

А. В. БИЦАДЗЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов механико-математических
и физических специальностей
высших учебных заведений*

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1984

22.161.5

Б 66

517.5

Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного: Учебник для вузов. — 3-е изд., доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984, с. 320.

В книге содержится сжатое изложение элементов теории аналитических функций как одного, так и нескольких переменных.

Для третьего издания книга существенно переработана и дополнена. В нее включена, в частности, глава, посвященная применениям комплексного анализа в математической физике.

Рецензент

кафедра высшей математики Московского инженерно-физического института (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук профессор А. И. Прилепко)

Андрей Васильевич Бицадзе

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редактор В. В. Абгарян

Технический редактор В. Н. Кондакова

Корректоры Г. В. Подвольская, Л. С. Сомова

ИБ № 12374

Сдано в набор 16.12.83. Подписано к печати 17.07.84. Формат 84×108^{1/32}. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 17,07. Тираж 12000 экз. Заказ № 2777. Цена 96 коп.

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли, 113054 Москва М-54, Валовая, 28.

Отпечатано в типографии № 2 изд-ва «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 10 Зак. 444

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, с измене-
ниями 1984

В 1702050000—133
053 (92)—84 49—84

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	8
Глава I. Комплексные числа	9
§ 1. Введение комплексных чисел	9
1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними (9). 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Понятие модуля и аргумента комплексного числа (10). 3. Интерпретация Римана комплексных чисел. Понятие расширенной комплексной плоскости (14).	
§ 2. Множества точек на расширенной комплексной плоскости	16
1. Некоторые основные понятия и элементарные утверждения (16). 2. Лемма Гейне—Бореля (20). 3. Принцип Больцано—Вейерштрасса (22).	
§ 3. Предел	23
1. Предел последовательности точек комплексной плоскости (23). 2. Понятие фундаментальной последовательности и критерий Коши (24). 3. Общие замечания относительно содержательного смысла некоторых бесконечных процессов (25). 4. Числовые ряды (27).	
Упражнения	31
Глава II. Функции комплексного переменного	32
§ 1. Определение функции. Предел функции	32
1. Комплексное переменное (32). 2. Функция комплексного переменного (32). 3. Предел функции (33).	
§ 2. Непрерывность функции комплексного переменного	35
1. Непрерывность и равномерная непрерывность функции комплексного переменного (35). 2. Кривая Жордана (37). 3. Некоторые простейшие примеры функций комплексного переменного (40).	
§ 3. Функциональные ряды	41
1. Сходимость и равномерная сходимость функционального ряда (41). 2. Степенные ряды. Радиус сходимости (43). 3. Основные арифметические операции над степенными рядами (47). 4. Определение некоторых элементарных функций с помощью степенных рядов (49). 5. Вторая теорема Абеля (52).	
Упражнения	55
Глава III. Аналитические функции комплексного переменного	57
§ 1. Понятие аналитической функции	57
1. Могучесть. Условия Коши—Римана (57). 2. Определение аналитической функции (59). 3. Конформное отображение (62).	

§ 2. Обращение некоторых элементарных функций и понятие римановой поверхности	66
1. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией (66). 2. Дробно-линейная функция (66). 3. Степенная функция (67). 4. Экспоненциальная функция (69). 5. Функция $\sin z$ (70).	
§ 3. Дробно-линейное отображение	72
1. Редукция невырожденного дробно-линейного отображения к отображениям простейшего вида (72). 2. Симметрия относительно прямой и окружности (74). 3. Основные свойства невырожденного дробно-линейного отображения (75). 4. Понятие неподвижной точки и классификация невырожденных дробно-линейных отображений (77).	
Упражнения	81
Глава IV. Теория интеграла Коши	82
§ 1. Комплексное интегрирование	82
1. Определение интеграла и его основные свойства (82). 2. Интегральная формула Бореля—Помпею (84). 3. Лемма Гурса (87).	
§ 2. Теория Коши	89
1. Теорема Коши (89). 2. Интегральная формула Коши (94). 3. Интеграл типа Коши (94). 4. Понятие неопределенного интеграла и обращение теоремы Коши (97). 5. Понятие гармонической функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной части (100).	
§ 3. Некоторые важнейшие утверждения, вытекающие из интегральной формулы Коши	102
1. Принцип максимума модуля (102). 2. Теорема Фрагмена—Линделёфа. Лемма Шварца (104). 3. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций (107). 4. Интегральные формулы Шварца и Пуассона (109). 5. Об одном признаке сходимости к нулю последовательности аналитических функций (111).	
§ 4. Интеграл в смысле главного значения по Коши	112
1. Условие Гёльдера (112). 2. Определение интеграла в смысле главного значения по Коши (113). 3. Предельные значения интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого—Племеля (115). 4. Задача Дирихле для гармонических функций в круге (117).	
Упражнения	119
Глава V. Ряды Тейлора и Лорана. Элементы теории вычетов	122
§ 1. Ряд Тейлора	122
1. Теорема Тейлора (122). 2. Единственность аналитической функции (123). 3. Нули аналитической функции (124). 4. Неравенства Коши и теорема Лиувилля (125).	
§ 2. Ряд Лорана. Изолированные особые точки	126
1. Теорема Лорана (126). 2. Изолированные особые точки аналитической функции (129). 3. Бесконечно удаленная изолированная особая точка (133). 4. Понятия целой и мероморфной функций (134). 5. Формула Пуассона—Иенсена (136).	
§ 3. Элементы теории вычетов	137

1. Понятие вычета (137). 2. Вычисление некоторых контурных интегралов (138). 3. Принцип аргумента аналитической функции (140). 4. Интегральная формула Коши для бесконечной области (143). 5. Разложение на простейшие дроби мероморфной на комплексной плоскости функции (146). 6. Применение вычетов для вычисления некоторых определенных интегралов (151).	
Упражнения	153
Глава VI. Бесконечные произведения и элементы теории целых функций	155
§ 1. Бесконечные произведения	
1. Критерий сходимости бесконечного произведения (155).	
2. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения (157).	
3. Равномерно сходящиеся бесконечные произведения аналитических функций (157).	
§ 2. Элементы теории целых функций	158
1. Каноническое произведение и его род (158). 2. Представление целой функции в виде бесконечного произведения (162). 3. Род целой функции. Теорема Пуанкаре (163). 4. Порядок целой функции (167). 5. Целые функции порядка ниже половины (170). 6. Представление мероморфной на комплексной плоскости функции в виде отношения двух целых функций (170).	
Упражнения	171
Глава VII. Основные принципы теории конформных отображений	173
§ 1. Аналитическое продолжение	173
1. Понятие аналитического продолжения (173). 2. Теорема монодромии (174). 3. Принцип непрерывности (175). 4. Принцип симметрии Римана—Шварца (176). 5. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного (177). 6. Принцип Шварца (178).	
§ 2. Свойство единственности аналитических функций	179
1. Некоторые элементарные утверждения о единственности аналитических функций (179). 2. Лемма Карлемана и обобщение теоремы единственности (180).	
§ 3. Конформное отображение односвязных однолистных областей	181
1. Предварительные замечания (181). 2. Условия единственности конформно отображающей функции (183). 3. Формулировка теоремы Римана о конформном отображении и некоторые вспомогательные утверждения (184). 4. Доказательство существования конформно отображающей функции (187). 5. Соответствие границ при конформном отображении (189). 6. Принцип взаимно однозначного соответствия. Формула Кристоффеля—Шварца (192).	
Упражнения	194
Глава VIII. Функции многих переменных	196
§ 1. Аналитические функции многих комплексных переменных	196
1. Некоторые обозначения и основные понятия (196). 2. Кратные ряды с комплексными членами (197). 3. Степен-	

ные ряды с несколькими переменными (198). 4. Понятие аналитической функции многих комплексных переменных (200). 5. Аналог теоремы Тейлора (202). 6. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительных переменных (204). 7. Распространение гармонической функции для комплексных значений ее аргументов. Формула Гурса (205).	
§ 2. Алгебраические функции	207
1. Существование неявной функции (207). 2. Алгебраические функции одного комплексного переменного (209). 3. Понятие критической точки (210).	
§ 3. Конформное отображение в многомерных евклидовых пространствах	211
1. Некоторые определения и обозначения (211). 2. Конформность отображения по Гауссу (213). 3. Примеры конформного отображения (214). 4. Теорема Лиувилля (215).	
§ 4. Аналог системы Коши—Римана в трехмерном евклидовом пространстве	218
1. Области с гладкой и кусочно-гладкой границей (218). 2. Некоторые интегральные равенства, вытекающие из формулы Гаусса—Остроградского (220). 3. Трехмерный аналог системы Коши—Римана (221). 4. Аналог интеграла в смысле главного значения по Коши (225). 5. Аналоги формул Сохоцкого—Племеля (226). 6. Гармонические функции (227). 7. Признак сходимости последовательности градиентов гармонических функций (230).	
Упражнения	232
Глава IX. Некоторые применения теории аналитических функций комплексного переменного	234
§ 1. Построение в квадратурах решений некоторых краевых задач для гармонических функций	234
1. Формулы Шварца и Пуассона для полуплоскости (234). 2. Формула Шварца и решение задачи Дирихле для гармонических функций в полосе, ограниченной прямыми (236). 3. Задача Дирихле для плоскости со щелью (240). 4. Поведение интеграла в смысле главного значения по Коши (243). 5. Поведение производной интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования (246). 6. Поведение интеграла типа Коши (36) вблизи отрезка γ_δ (248). 7. Поведение интеграла типа Коши вблизи концов γ (250). 8. Задача Гильберта (252). 9. Задача наклонной производной (256). 10. Уравнение Пуассона (258).	
§ 2. Краевые задачи для бигармонических функций	261
1. Понятие бигармонической функции и ее комплексное представление (261). 2. Задача Дирихле для бигармонических функций (265). 3. Задача Рикье (268). 4. Уравнения линейной теории упругости (270). 5. Функция напряжения и редукция основных краевых задач теории упругости к краевым задачам для аналитических функций комплексного переменного (274). 6. Первая основная задача теории упругости для круга (277). 7. Вторая основная задача теории упругости для круга (279). 8. Контактная задача Герца (280).	

§ 3. Применение теории аналитических функций в гидромеханике и в теории поля	285
1. Основные уравнения гидромеханики (285). 2. Линезаризованная задача Навье—Стокса (287). 3. Плоскопараллельное стационарное безвихревое движение невязкой жидкости (291). 4. Изучение потока при наличии полюсов и нулей у комплексного потенциала скоростей (294). 5. Обтекание цилиндра плоскопараллельным стационарным, безвихревым потоком несжимаемой жидкости (297). 6. Подъемная сила (299). 7. Плоское электростатическое поле (301). 8. Автодуальные калибровочные поля (305). 9. Точные решения лоренц-ковариантных уравнений (309).	
§ 4. Нелокальные краевые задачи	312
1. Простейшая нелокальная краевая задача для гармонических функций (312). 2. Одна нелокальная краевая задача для бигармонических функций (314).	
Упражнения	316
Предметный указатель	318

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание книги «Основы теории аналитических функций комплексного переменного» отличается от предыдущих изданий появлением в ней новой, девятой главы под названием «Некоторые применения теории аналитических функций комплексного переменного». Эта глава посвящена построению в квадратурах решений ряда задач математической физики в широком понимании предмета этой дисциплины.

Книга создавалась на основе опыта моей преподавательской работы в Тбилисском, Московском, Новосибирском университетах и в Московском инженерно-физическом институте, а также в общении с М. В. Келдышем, М. А. Лаврентьевым и Н. И. Мусхелишвили, добрая память о которых дорога для меня.

А. В. Бицадзе

Москва — Тбилиси

Глава I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Введение комплексных чисел

1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними. *Комплексным числом* α называется пара (a, b) действительных чисел a и b , взятых в определенном порядке. Первая компонента a этой пары называется *действительной частью*, а вторая компонента b — *мнимой частью* (или коэффициентом при мнимой части) комплексного числа α , и для них приняты обозначения $a = \operatorname{Re} \alpha$, $b = \operatorname{Im} \alpha$.

При $b=0$ комплексное число $\alpha = (a, 0)$ отождествляется с действительным числом a . При $a=0$ комплексное число $\alpha = (0, b)$ называется *мнимым*. Числа $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$ и $(0, 1) = i$ называются *нулем*, *единицей* и *мнимой единицей* соответственно.

По определению, комплексные числа $\alpha_1 = (a_1, b_1)$ и $\alpha_2 = (a_2, b_2)$ равны, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Суммой двух комплексных чисел $\alpha_1 = (a_1, b_1)$ и $\alpha_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, а их *произведением* — комплексное число $\alpha_1 \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Непосредственной проверкой устанавливается, что введенные арифметические операции подчинены известным законам арифметики:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \quad \text{— коммутативность сложения,}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1 \quad \text{— коммутативность умножения,}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \quad \text{— ассоциативность сложения,}$$

$$(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3) \quad \text{— ассоциативность умножения,}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \quad \text{— дистрибутивность.}$$

Из определений операций сложения и умножения очевидны равенства

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad ii = i^2 = -1.$$

На основе легко проверяемого равенства $(0, 1)(b, 0) = (0, b)$ заключаем, что комплексное число $\alpha = (a, b)$ может быть представлено в виде $\alpha = a + ib$.

В самом деле, имеем

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$$

Вычитание определяется как операция, обратная сложению, т. е. разностью $\alpha_1 - \alpha_2$ называется комплексное число α_3 , обладающее свойством $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1$. Если $\alpha_1 = (a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (a_2, b_2)$, то $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$.

Комплексное число $a - ib$ называется сопряженным с комплексным числом $\alpha = a + ib$, и для него принято обозначение $\bar{\alpha}$. Переход от данного комплексного числа к сопряженному называется операцией сопряжения. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha)} &= \alpha, & \overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, & \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} &= \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2, \\ \alpha + \bar{\alpha} &= 2a, & \alpha - \bar{\alpha} &= 2ib & \alpha \bar{\alpha} &= a^2 + b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению, т. е. под частным α_1/α_2 , $\alpha_2 \neq 0$, понимается комплексное число α_4 , обладающее свойством $\alpha_2 \alpha_4 = \alpha_1$. Для представления α_4 в виде $a_4 + ib_4$ следует провести простое вычисление:

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Операция, сопоставляющая каждому отличному от нуля комплексному числу α комплексное число $R^2/\bar{\alpha}$, где число $R > 0$ задано, называется инверсией.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Понятие модуля и аргумента комплексного числа. Неотрицательное число $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$. Очевидно, что $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Так как $|z_1 z_2 \dots z_n|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n = |z_1|^2 |z_2|^2 \dots |z_n|^2$, то имеем

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|. \quad (1)$$

Из равенства $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ непосредственно вытекают неравенства

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|. \quad (2)$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2, \\ |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2, \end{aligned}$$

на основании первого из неравенств (2) и равенства (1) заключаем, что

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (3)$$

и

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (4)$$

Легко показать, что для двух систем комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ и $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ всегда имеет место неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j z'_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |z'_j|^2. \quad (5)$$

В самом деле, введем обозначения

$$A = \sum_{j=1}^n |z_j|^2, \quad B = \sum_{j=1}^n |z'_j|^2, \quad C = \sum_{j=1}^n z_j z'_j.$$

При $B=0$ соотношение (5) переходит в равенство $0=0$. В предположении, что $B \neq 0$, неравенство (5) следует из очевидного равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |Bz_j - C\bar{z}'_j|^2 &= \sum_{j=1}^n (Bz_j - C\bar{z}'_j)(B\bar{z}_j - C\bar{z}'_j) = \\ &= AB^2 - B|C|^2 - B|C|^2 + B|C|^2 = B(AB - |C|^2) \end{aligned}$$

и неравенств

$$\sum_{j=1}^n |Bz_j - C\bar{z}'_j|^2 \geq 0, \quad B > 0.$$

Обозначим через E_2 евклидову плоскость с декартовыми ортогональными координатами x и y . Так как комплексное число $z = x + iy$ является парой (x, y) действительных чисел, а множество всевозможных пар (x, y) действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с конечной частью E_2 , то каждую конечную точку $(x, y) \in E_2$ можно принять за изображение комплексного числа $z = x + iy$. В таком истолковании E_2 естественно называть *комплексной плоскостью*, а z — *точкой* этой плоскости.

Так как модуль комплексного числа z обладает всеми свойствами нормы: 1) $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$, 2) $|\lambda z|=|\lambda||z|$ (однородность нормы) и 3) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ (неравенство треугольника), то $|z_1-z_2|$ естественно принять за *расстояние* между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости. Величина $|z|$ представляет собой длину радиуса-вектора точки z .

Очевидно, что каждая точка комплексной плоскости находится на конечном расстоянии от точки $z=0$.

При такой интерпретации комплексных чисел операции сложения и вычитания выполняются по правилам сложения и вычитания векторов. Из рассмотрения треугольников с вершинами в точках $0, z_1, z_1+z_2$ и $0, z_1, z_1-z_2$ усматривается наглядный смысл неравенств (3) и (4).

Угол φ , составленный радиусом-вектором точки z с положительным направлением оси x , называется *аргументом* комплексного числа z , и для него принято обозначение $\varphi = \arg z$. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли его отсчет от положительного направления действительной оси против или по движению часовой стрелки соответственно.

Положение точки z на комплексной плоскости однозначно определяется как ее декартовыми координатами x, y , так и полярными координатами $r=|z|, \varphi=\arg z$. Эти координаты связаны между собой простыми формулами

$$x=r \cos \varphi, \quad y=r \sin \varphi.$$

По заданной точке z ее модуль определяется *единственным образом*, а аргумент — с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k=0, \pm 1, \dots$. Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leq \pi$, называется *главным значением аргумента*.

Точка $z=0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

Так как уравнениями осей x и y являются соответственно $\operatorname{Im} z=0$ и $\operatorname{Re} z=0$, то обычно их называют *действительной* и *мнимой осями*.

Из формул, связывающих декартовы и полярные координаты точки z , получается тригонометрическая запись комплексного числа

$$z=|z|(\cos \arg z + i \sin \arg z). \quad (6)$$

Пользуясь записью (6) для комплексных чисел

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

где $\varphi = \arg(z_1 z_2)$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, и правилом умножения комплексных чисел, получим

$$|z_1 z_2| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ = |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (7)$$

откуда сразу следуют уже известное свойство (1) модуля комплексного числа и равенство

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad (8)$$

где k принимает целочисленные значения $0, \pm 1, \dots$

Из равенства $z_1 = z_2 z_3$, где $z_2 \neq 0$, в силу (1) и (8) заключаем, что $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ и

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi.$$

Формула (7) и, следовательно, свойство (8) произведения двух комплексных чисел легко обобщаются по индукции на любое конечное число n сомножителей $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n + 2k\pi. \quad (9)$$

В частности, при $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ из (1) и (9) получаем

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z + 2k\pi,$$

т. е.

$$z^n = |z|^n (\cos n \arg z + i \sin n \arg z). \quad (10)$$

Формула (10) известна под названием формулы Муавра.

Пусть теперь комплексное число $\alpha \neq 0$. Корень натуральной степени n из α определяется как такое комплексное число $z = \sqrt[n]{\alpha}$, которое, будучи возведенным в степень n , дает число α , т. е.

$$z^n = \alpha. \quad (11)$$

Пользуясь формулой (10) и тригонометрическими записями

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z), \\ \alpha = |\alpha| (\cos \arg \alpha + i \sin \arg \alpha),$$

получим

$$|z|^n (\cos n \arg z + i \sin n \arg z) = |\alpha| (\cos \arg \alpha + i \sin \arg \alpha),$$

откуда

$$|z|^n = |\alpha|, \quad n \arg z = \arg \alpha + 2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

Из (12) имеем

$$|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}, \quad \arg z = \frac{\arg \alpha + 2k\pi}{n}, \quad k=0, \pm 1, \dots,$$

т. е.

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|} \left[\cos \frac{\arg \alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg \alpha + 2k\pi}{n} \right], \quad k=0, \pm 1, \dots \quad (13)$$

Из формулы (13) очевидно, что *среди значений $\sqrt[n]{\alpha}$ различными являются только n* , причем все они получаются из (13), если k придавать последовательно n значений, например, $k=0, 1, \dots, n-1$.

3. Интерпретация Римана комплексных чисел. Понятие расширенной комплексной плоскости. В евклидовом пространстве E_3 с декартовыми ортогональными координатами ξ, η, ζ рассмотрим сферу S с центром в точке $(0, 0, 1/2)$ радиуса $1/2$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0. \quad (14)$$

Плоскость $\zeta=0$ примем за комплексную плоскость z , действительная ось которой $y=0$ совпадает с осью $\eta=0$, $\zeta=0$, а мнимая ось $x=0$ — с осью $\xi=0$, $\zeta=0$.

Из точки $P(0, 0, 1)$ проведем луч, пересекающий сферу S в отличной от P точке $M(\xi, \eta, \zeta)$. Точку пересечения луча PM с комплексной плоскостью обозначим через $z=x+iy$. Точка M называется *стереографической проекцией* точки z на сферу S с полюсом P .

Стереографическая проекция устанавливает *взаимно однозначное* соответствие между точками сферы S с выколотым полюсом P и множеством всех точек комплексной плоскости z .

В силу коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \zeta)$ и z имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta-1}{-1},$$

или

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \quad (15)$$

Учитывая то обстоятельство, что

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2},$$

в силу (14) получаем

$$|z|^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

откуда

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (16)$$

Подставляя значение ζ из (16) в (15), будем иметь

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) называются *формулами стереографической проекции*.

Стереографическая проекция обладает следующим замечательным свойством: *она сопоставляет окружности на плоскости z окружности на сфере S и обратно*.

В самом деле, уравнение окружности на плоскости z имеет вид

$$Azz + \frac{1}{2}B(z + \bar{z}) - \frac{1}{2}iC(z - \bar{z}) + D = 0, \quad (18)$$

где A , B , C и D — действительные числа, удовлетворяющие условиям $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$.

В частности, при $A = 0$ уравнение (18) определяет прямую на комплексной плоскости.

В силу (14) и (15) уравнение (18) принимает вид

$$(A - D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0. \quad (19)$$

Уравнения (19) и (14) определяют окружность на сфере (14).

Ввиду того, что уравнение (19) при условиях $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$ определяет любую пересекающую сферу S плоскость в пространстве E_3 , очевидно и обратное утверждение.

Так как при $A = 0$ плоскость (19) проходит через полюс P , то при стереографической проекции прямая на комплексной плоскости переходит в окружность на сфере S , проходящую через полюс, и обратно.

Введем теперь в рассмотрение «идеальное» комплексное число $z = \infty$ и «пополним» комплексную плоскость присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки, соответствующей числу $z = \infty$.

Комплексную плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной комплексной плоскостью*.

Дополняя соответствие, установленное стереографической проекцией (16), (17), сопоставлением полюсу P сферы S точки $z = \infty$, получим *взаимно однозначное* соответствие между S и расширенной комплексной плоскостью. Следовательно, каждую точку сферы S можно рассматривать как изображение соответствующей точки расширенной комплексной плоскости. Такая интерпретация комплексных чисел называется *интерпретацией Римана*, а S — *сферой Римана*.

§ 2. Множества точек на расширенной комплексной плоскости

1. Некоторые основные понятия и элементарные утверждения. *Окрестностью* $C(\delta, z_0)$ точки z_0 комплексной плоскости называется множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, где δ — заданное положительное число. Это множество представляет собой *круг* радиуса δ с центром в точке z_0 .

Окрестностью $C(\delta, \infty)$ бесконечно удаленной точки называется множество точек z расширенной комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z| > \delta$.

Пусть E — множество точек на расширенной комплексной плоскости. Для *дополнения* E до расширенной комплексной плоскости примем обозначения SE . Множество E называется *ограниченным*, если можно указать положительное число δ такое, что $C(\delta, 0)$ содержит внутри себя множество E .

Точка z_0 называется *изолированной точкой* множества E , если существует такое $\delta > 0$, что пересечение $E \cap C(\delta, z_0)$ состоит из единственной точки z_0 .

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется *предельной точкой* множества E , если для любого $\delta > 0$ в пересечении $E \cap C(\delta, z_0)$ имеется бесконечное множество точек E .

Множество всех предельных точек данного множества E называется *производным множеством*, и его при-

нято обозначать через E' . Множество E называется *замкнутым*, если $E' \subseteq E$. Объединение (сумма) $E \cup E' = \bar{E}$ называется *замыканием множества E* . Очевидно, что замыкание является замкнутым множеством.

Пересечение $\bar{E} \cap \overline{CE} = \Gamma$ называется *границей* множества E . Каждая точка $z_0 \in \Gamma$ называется *граничной точкой* множества E . Она обладает тем свойством, что для любого $\delta > 0$ ни одно из множеств $E \cap C(\delta, z_0)$, $CE \cap C(\delta, z_0)$ не совпадает с пустым множеством $\emptyset$.

Точка z_0 называется *внутренней точкой* множества E , если существует $\delta > 0$ такое, что $C(\delta, z_0) \subset E$. Множество E называется *открытым*, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой. При любом $\delta > 0$ окрестность $C(\delta, z_0)$ является открытым множеством.

Из определения замкнутых и открытых множеств непосредственно следует справедливость следующих утверждений: 1) *если E замкнуто, то CE открыто*; 2) *если E открыто, то CE замкнуто*; 3) *пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто*; 4) *объединение любого множества открытых множеств открыто*; 5) *объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто*; 6) *пересечение конечного числа открытых множеств открыто*.

Из утверждений 1) и 2) вытекает, что *пустое множество и множество всех точек расширенной комплексной плоскости одновременно являются и открытыми и замкнутыми*.

Мы скажем, что конечная или бесконечная система $\mathcal{O}$ открытых множеств является *открытым покрытием E* , если каждая точка $z \in E$ принадлежит по крайней мере одному множеству из системы $\mathcal{O}$.

Множество E называется *связным*, если нельзя найти двух открытых множеств O_1 и O_2 , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} E \subseteq O_1 \cup O_2, \quad E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad E \cap O_1 \neq \emptyset, \\ E \cap O_2 \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что пустое множество и множество, составленное из единственной точки, являются связными.

От противного легко показать связность множества E точек прямолинейного отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 .

В самом деле, предположим, что существуют открытые множества O_1 и O_2 , удовлетворяющие условиям (20). Пусть $\alpha_1 \in E \cap O_1$ и $\beta_1 \in E \cap O_2$. Обозначим через $\alpha_2\beta_2$ ту половину прямолинейного отрезка $\alpha_1\beta_1$, для которой $\alpha_2 \in E \cap O_1$ и $\beta_2 \in E \cap O_2$. Точно так же обозначим через $\alpha_n\beta_n$ ту половину прямолинейного отрезка $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, для которой $\alpha_n \in E \cap O_1$ и $\beta_n \in E \cap O_2$. В силу известного свойства вложенных прямолинейных отрезков заключаем, что существует единственная точка $\gamma \in \alpha_n\beta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Но точка γ не может принадлежать ни O_1 , ни O_2 , ибо $\gamma \in O_k$ ($k=1$ или $k=2$) означало бы, что все отрезки $\alpha_n\beta_n$, начиная с определенного номера, принадлежат O_k . Мы пришли к противоречию.

Мы скажем, что две точки множества E можно *соединить ломаной*, если существует линия, составленная из *конечного числа* прямолинейных звеньев, соединяющая между собой эти точки и принадлежащая E (в случае, когда одна из взятых точек является бесконечно удаленной, предполагается, что одно звено ломаной имеет бесконечную длину).

Приведенное выше общее определение связности в случае открытого множества E означает, что нельзя найти двух открытых множеств O_1 и O_2 , удовлетворяющих условиям

$$E = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad O_1 \neq \emptyset, \quad O_2 \neq \emptyset. \quad (21)$$

Это определение связности в случае непустого открытого множества E равносильно тому, что *любые две точки E могут быть соединены ломаной*.

В самом деле, пусть E — открытое связное множество по только что указанному определению, а точка $z_1 \in E$. Обозначим через O_1 множество всех тех точек E , каждую из которых можно соединить с z_1 ломаной. Оставшуюся часть E обозначим через O_2 , т. е. $E = O_1 \cup O_2$ и

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset. \quad (22)$$

Пусть z_2 — произвольная фиксированная точка O_1 . Так как $z_2 \in E$ и E открыто, существует $\delta > 0$ такое, что $C(\delta, z_2) \subset E$. Каждую точку $z \in C(\delta, z_2)$ можно соединить с z_2 прямолинейным отрезком и, стало быть, z можно соединить с z_1 ломаной, т. е. $C(\delta, z_2) \subset O_1$, а это означает, что z_2 — внутренняя точка O_1 . Тем самым открытость множества O_1 доказана.

Пусть теперь $z_2 \in O_2$. Существует $\delta > 0$ такое, что $C(\delta, z_2) \subset E$. Ни одна точка z окрестности $C(\delta, z_2)$ не может быть точкой множества O_1 , ибо в противном случае можно было бы z_2 соединить ломаной с $z_1 \in O_1$ и тем самым имели бы $z_2 \in O_1$, что противоречит условию (22). Следовательно, $C(\delta, z_2) \subset O_2$, т. е. O_2 открыто.

Легко видеть, что множество O_2 пусто. В противном случае открытые множества O_1 и O_2 удовлетворяли бы условиям (21), а это противоречит связности множества E .

Допустим теперь, что открытое множество E не является связным, т. е. существуют открытые множества O_1 и O_2 , удовлетворяющие условиям (21). Пусть $z_1 \in O_1$ и $z_2 \in O_2$. Покажем, что точки z_1 и z_2 не могут быть соединены ломаной, принадлежащей множеству E . Допустив обратное, без ограничения общности можем полагать, что z_1 и z_2 могут быть соединены между собой одним прямолинейным отрезком I :

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (23)$$

В силу (21) мы должны иметь

$$I \subset O_1 \cup O_2, \quad I \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad I \cap O_1 \neq \emptyset, \quad I \cap O_2 \neq \emptyset,$$

а это противоречит связности отрезка I .

Аналогичным рассуждением можно показать, что *любые две точки открытого связного множества могут быть соединены ломаной, одни звенья которой параллельны действительной оси, а другие — мнимой*.

Открытое связное множество называется *областью*, а замыкание области — *замкнутой областью*.

Компонентой K множества E будем называть связное подмножество этого множества, обладающее тем свойством, что не существует другого связного подмножества K_1 множества E , удовлетворяющего условию $K \subset K_1$. Другими словами, компонентой множества E называется любое его максимальное связное подмножество.

Справедливо следующее утверждение: *каждое множество E единственным образом может быть представлено как объединение своих компонент*.

В самом деле, пусть $z_1 \in E$ и E_1 — объединение всех связных подмножеств E , содержащих в себе точку z_1 . Допущение того, что E_1 не является связным, равно-

сильно существованию открытых множеств O_1 и O_2 , удовлетворяющих условиям

$$E_1 \subseteq O_1 \cup O_2, \quad E_1 \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad E_1 \cap O_1 \neq \emptyset, \\ E_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Пусть $z_1 \in O_1$ и $z_2 \in E_1 \cap O_2$. Ввиду того, что z_1 и z_2 обе принадлежат E_1 , существует связное множество $E_0 \subset E$ такое, что $z_1 \in E_0$ и $z_2 \in E_0$, а это противоречит связности E_0 , так как

$$E_0 \subseteq O_1 \cup O_2, \quad E_0 \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad E_0 \cap O_1 \neq \emptyset, \\ E_0 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Следовательно, E_1 связно. Среди связных подмножеств E , содержащих z_1 , максимальным, очевидно, является E_1 , т. е. E_1 является компонентой множества E , причем для каждой точки $z \in E$ содержащая ее компонента определяется единственным образом.

Заметим, что каждая компонента открытого множества E может рассматриваться как объединение всех открытых связных подмножеств E , содержащих фиксированную точку этой компоненты. Следовательно, каждая компонента открытого множества является областью.

Компоненту замкнутого множества иногда называют *континуумом*. При таком определении континуума точка тоже может оказаться континуумом.

Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Граница окрестности $C(\delta, z_0)$ точки z_0 расширенной комплексной плоскости состоит из единственной компоненты, которая является окружностью. Следовательно, $C(\delta, z_0)$ — односвязная область.

Ниже в основном будут рассмотрены области с *конечным* порядком связности.

На расширенной комплексной плоскости замкнутое множество называем *компактным*. Если компактное множество не содержит бесконечно удаленной точки, то оно ограничено.

2. Лемма Гейне — Бореля. В комплексном анализе важную роль играет следующая лемма Гейне — Бореля: *для компактности множества E точек на расширенной комплексной плоскости необходимо и достаточно, чтобы из любого его бесконечного открытого покрытия $\mathcal{O}$ можно было выделить конечное открытое покрытие.*

При доказательстве необходимости достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда E ограничено. В самом деле, обозначим через O_∞ открытое множество из системы $\mathcal{O}$, содержащее точку $z = \infty$. Очевидно, что $SO_\infty \cap E = E_1$ является ограниченным замкнутым множеством, и если для E_1 из покрытия $\mathcal{O}$ можно выделить конечное его покрытие, то тем самым необходимость условия леммы будет доказана и для E .

Итак, будем предполагать, что множество E ограничено, т. е. существует квадрат $Q_1: -a \leq \frac{x}{y} \leq a$, содержащий внутри себя E .

Допустим, что из бесконечного открытого покрытия $\mathcal{O}$ множества E нельзя выделить конечного покрытия того же множества. Разделим прямыми $x=0, y=0$ квадрат Q_1 на четыре квадрата. Обозначим через Q_2 тот из полученных четырех квадратов, для которого $E \cap Q_2$ нельзя покрыть конечным числом открытых множеств из $\mathcal{O}$ (такой квадрат по допущению существует). Разделим Q_2 прямыми, параллельными соответственно осям $x=0, y=0$, на четыре конгруэнтных квадрата и обозначим через Q_3 тот из них, для которого $E \cap Q_3$ нельзя покрыть конечным числом открытых множеств из системы $\mathcal{O}$. Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность квадратов $\{Q_k\}$ со свойствами: 1) $E \cap Q_k$ нельзя покрыть конечным числом открытых множеств из покрытия $\mathcal{O}$, 2) $Q_{k+1} \subset Q_k$ и 3) диагональ α_k квадрата Q_k стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Из вводного курса математического анализа известно, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ состоит из единственной точки z_0 , которая, очевидно, является предельной точкой множества E и, следовательно, принадлежит ему. Обозначим через Q_{z_0} открытое множество из покрытия $\mathcal{O}$, содержащее точку z_0 . По определению открытого множества существует $\delta > 0$ такое, что $C(\delta, z_0) \subset Q_{z_0}$. Для указанного δ в свою очередь существует натуральное число N такое, что $Q_N \subset C(\delta, z_0)$, т. е. для покрытия множества $E \cap Q_N$ достаточно одного множества Q_{z_0} из $\mathcal{O}$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия леммы.

Так как расширенная комплексная плоскость компактна, при доказательстве второй части леммы достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда SE непусто.

Обозначим через z_0 произвольную фиксированную точку множества SE . Для каждой точки $z \in E$ существует окрестность $C(\delta, z)$, замыкание которой $\overline{C}(\delta, z)$ не содержит точки z_0 . Совокупность $C(\delta, z)$, когда z пробегает множество E , представляет собой открытое покрытие E . По условию леммы существует конечное покрытие $[C(\delta, z_1), C(\delta, z_2), \dots, C(\delta, z_n)]$ множества E . Пересечение $\bigcap_{k=1}^n \overline{C}(\delta, z_k)$ есть открытое подмножество SE , содержащее внутри себя точку z_0 , т. е. z_0 является внутренней точкой множества SE . Следовательно, SE открыто и, стало быть, E замкнуто.

3. Принцип Больцано — Вейерштрасса. Одним из важнейших следствий леммы Гейне — Бореля является принцип Больцано — Вейерштрасса: *любая бесконечная последовательность*

$$\{z_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

точек z_k компактного множества E на расширенной комплексной плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.

Предположим, что ни одна точка множества E не является предельной для последовательности (24). Это означает что для любой точки $z \in E$ существует такое $\delta > 0$, что $C(\delta, z)$ содержит внутри себя не более чем конечное число точек последовательности (24). Обозначим через $\mathcal{O}$ систему открытых множеств $C(\delta, z)$, когда z пробегает все точки множества E . Система $\mathcal{O}$ является открытым покрытием E , и в силу леммы Гейне — Бореля из нее можно выделить конечное покрытие $[C(\delta_1, z'_1), \dots, C(\delta_n, z'_n)]$ множества E . Так как каждая из $C(\delta_k, z'_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, содержит не более чем конечное число точек последовательности (24), последняя не может быть бесконечной. Значит, наше предположение неверно, и тем самым принцип Больцано — Вейерштрасса доказан.

Ввиду того, что расширенная комплексная плоскость сама является компактным множеством, из принципа Больцано — Вейерштрасса, в частности, следует, что *любая бесконечная последовательность точек на расширенной комплексной плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.*

§ 3. Предел

1. Предел последовательности точек комплексной плоскости. Если последовательность

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots \quad (25)$$

точек комплексной плоскости ограничена и имеет единственную предельную точку z_0 , то говорят, что эта последовательность *сходится* к z_0 , т. е. имеет своим *пределом* z_0 , и пишут

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0.$$

Другими словами, z_0 является *пределом последовательности* (25), если для любого $\delta > 0$ можно указать натуральное число $N(\delta)$ такое, что $z_k \in C(\delta, z_0)$ для всех $k \geq N$.

Не сходящиеся последовательности называются *расходящимися*.

Когда последовательность расходится и бесконечно удаленная точка является ее единственной предельной точкой, пишут

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty. \quad (26)$$

Равенство (26) означает, что для любого $\delta > 0$ существует натуральное число $N(\delta)$ такое, что $z_k \in CC(\delta, 0)$ для всех $k \geq N$.

Интерпретация Римана комплексных чисел позволяет придать равенству (26) особенно наглядный смысл.

В самом деле, стереографической проекцией последовательности (25) в силу формул (16) и (17) является последовательность $\{M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, точек на сфере Римана с координатами

$$\xi_k = \frac{x_k}{1 + |z_k|^2}, \quad \eta_k = \frac{y_k}{1 + |z_k|^2}, \quad \zeta_k = \frac{|z_k|^2}{1 + |z_k|^2}. \quad (27)$$

Наличие равенства (26) в силу (27) и очевидных неравенств $|x_k| \leq |z_k|$, $|y_k| \leq |z_k|$ означает, что последовательность $\{M_k\}$ сходится к полюсу P сферы Римана.

Из определения предела последовательности непосредственно следует, что если последовательности $\{z_k\}$ и $\{z'_k\}$ сходятся, то сходящимися являются и последовательности

$\{z_k \pm z'_k\}$, $\{z_k \cdot z'_k\}$, $\left\{\frac{z_k}{z'_k}\right\}$ (в последнем случае предпола-

гается, что $z'_k \neq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_k \neq 0$), причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k \pm z'_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k \pm \lim_{k \rightarrow \infty} z'_k, \quad (28)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k \cdot z'_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} z'_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k}{z'_k} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} z_k}{\lim_{k \rightarrow \infty} z'_k}.$$

Доказательство равенств (28) ничем не отличается от доказательства соответствующих утверждений для последовательностей действительных чисел.

2. Понятие фундаментальной последовательности и критерий Коши. Последовательность (25) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\delta > 0$ существует натуральное число $N(\delta)$ такое, что

$$|z_{N+m} - z_N| < \delta \quad (29)$$

для любого натурального m .

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим критерием Коши: для сходимости последовательности (25) необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пусть последовательность (25) сходится и имеет своим пределом z_0 . Это означает, что для любого $\delta > 0$ существует натуральное число $N(\delta)$ такое, что $|z_N - z_0| < \delta/2$, $|z_{N+m} - z_0| < \delta/2$ для любого натурального m . Следовательно, имеем

$$|z_{N+m} - z_N| \leq |z_N - z_0| + |z_{N+m} - z_0| < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

и тем самым необходимость условия (29) доказана.

Предположим теперь, что условие (29) выполнено. Это означает, что для любого $\delta > 0$ существует натуральное число $N(\delta)$ такое, что все точки последовательности (25), кроме конечного числа, лежат в круге $C(\delta, z_N)$: $|z - z_N| < \delta$. В силу принципа Больцано — Вейерштрасса последовательность (25) имеет предельную точку z_0 , лежащую в замкнутом круге $\bar{C}(\delta, z_N)$. Легко видеть, что z_0 — единственная предельная точка последовательности (25). В самом деле, допустим, что z'_0 тоже является предельной точкой последовательности (25), отличной от z_0 . Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \frac{1}{2} |z_0 - z'_0|. \quad (30)$$

Ввиду того, что точки z_0 и z'_0 обе лежат в круге $\overline{C(\delta, z_N)}$, мы должны иметь $|z_0 - z'_0| \leq 2\delta$, а это противоречит неравенству (30). Следовательно, $z_0 = z'_0$ и, стало быть,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0.$$

Легко видеть, что если $z_0 \neq \infty$ является предельной точкой множества E точек комплексной плоскости, то из E всегда можно выделить последовательность, сходящуюся к z_0 .

В самом деле, так как z_0 — предельная точка множества E , пересечение $E \cap \{|z - z_0| < 1/k\} = E_k$ для любого натурального k содержит бесконечное множество точек. В силу принципа произвольного выбора Цермело из каждого E_k можно выбрать по точке z_k ($z_k \neq z_0$ при $z_0 \in E$). Последовательность $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к z_0 . Это следует из того, что для любого $\delta > 0$ число N можно взять настолько большим, что для любого $k \geq N$ будем иметь $1/k < \delta$, т. е. $|z_k - z_0| < 1/k < \delta$ для всех $k \geq N$.

3. Общие замечания относительно содержательного смысла некоторых бесконечных процессов. Выражение вида

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \quad (31)$$

где α_k — вполне определенные комплексные числа, отличные от ∞ , носит название *ряда*.

Когда число отличных от нуля слагаемых (*членов*) ряда (31) бесконечно, сумма (31) в обычном понимании не имеет смысла. Тем не менее понятие сходимости числовой последовательности позволяет бесконечному процессу сложения в выражении (31) придать вполне определенный содержательный смысл. Это делается следующим образом. Обозначим через s_n сумму первых n

членов ряда (31), $s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Говорят, что ряд (31) *сходится* (суммируем) или *расходится* в соответствии с тем, сходится или расходится последовательность $\{s_n\}$. В случае существования предела $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ число s называется *суммой ряда* (31).

Необходимое условие сходимости (суммируемости) ряда (31) получается из равенства $s_n - s_{n-1} = \alpha_n$ в резуль-

тате предельного перехода, и оно имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \quad (32)$$

Видоизменяя понятие сходимости, некоторым расходящимся рядам также можно придать содержательный смысл. Так, например, говорят, что ряд (31) *суммируем по методу Чезаро*, или $(C, 1)$ -суммируем, если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(C, 1) = s(C, 1),$$

где $s_n(C, 1) = \frac{\sum_{k=1}^n s_k}{n}$, причем $s(C, 1)$ называется суммой ряда (31).

Существуют различные обобщения метода суммирования, придающие смысл суммам широких классов расходящихся рядов [(C, r) -суммирование Чезаро, (H, r) -суммирование Гёльдера, (R, r) -суммирование Рисса и т. д.]. Кроме рядов существуют и другие бесконечные процессы, имеющие вполне содержательный смысл. Среди них в первую очередь следует отметить *бесконечные произведения* и *бесконечные определители*.

Произведение комплексных чисел

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \quad (33)$$

когда число сомножителей не является конечным, тоже не имеет обычного смысла. В предположении, что ни один из сомножителей бесконечного произведения (33) не равен нулю или бесконечности, обозначим через p_n произведение n первых его сомножителей:

$$p_n = \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

и рассмотрим последовательность $\{p_n\}$.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0$, то говорят, что бесконечное произведение (33) *сходится*, и число p называется его *значением*.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения (33) имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1.$$

Для определителя порядка $2n+1$:

$$\det(\alpha_{ik}), \quad i, k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad \alpha_{ik} \neq \infty,$$

примем обозначение D_n .

Говорят, что бесконечный определитель

$$\det(\alpha_{ik}), \quad i, k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty, \quad \alpha_{ik} \neq \infty,$$

сходится, если сходится числовая последовательность $\{D_n\}$, и число $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ называется *значением* этого определителя.

4. Числовые ряды. По определению, число s является суммой сходящегося ряда (31), если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $|s - s_n| < \varepsilon$, как только $n \geq N(\varepsilon)$. Выражение $s - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n+k}$ носит название *остатка* ряда (31).

Ввиду того, что $s_{N+m} - s_N = \alpha_{N+1} + \alpha_{N+2} + \dots + \alpha_{N+m}$, критерий Коши сходимости последовательности $\{s_n\}$ для ряда (31) перефразируется следующим образом: для сходимости ряда (31) необходимо и достаточно, чтобы для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существовало натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^m \alpha_{N+k} \right| < \varepsilon.$$

для любого натурального m .

Вместе с рядом (31) рассмотрим ряд, составленный из модулей членов этого ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|. \quad (34)$$

В силу неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^m \alpha_{N+k} \right| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_{N+k}|$$

из сходимости ряда (34) на основании критерия Коши заключаем, что ряд (31) также сходится. Однако сходимость ряда (34) вовсе не является необходимой для сходимости ряда (31). Когда ряд (34) сходится, говорят, что исходный ряд (31) *абсолютно сходится*. Сходящийся ряд, который абсолютно не сходится, называется *условно сходящимся*.

Наряду со сходящимися (условно или абсолютно) рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \quad (35)$$

сходящимися являются и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \pm \beta_k)$, *причем, обозначая их суммы соответственно через* s , s' *и* s'' , *имеем* $s'' = s \pm s'$.

Справедливость этого утверждения следует из равенства

$$s''_n = s_n \pm s'_n, \quad \text{где } s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad s'_n = \sum_{k=1}^n \beta_k, \quad s''_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \pm \beta_k),$$

и из определения сходимости.

Из членов данного ряда можно составить бесконечным числом способов бесконечное множество новых рядов так, что каждый член исходного ряда будет фигурировать в качестве члена одного и только одного из этих рядов. Указанный процесс называется *разложением* данного ряда.

Предположим, что одно из таких разложений ряда (31) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{a_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{b_k}, \quad \sum_{k'=1}^{\infty} \alpha_{c_k}, \quad \dots \quad (36)$$

Справедлива следующая теорема (теорема о двойных рядах): *если ряд (31) абсолютно сходится, то*
 1) *абсолютно сходится каждый из рядов разложения (36),*
 2) *абсолютно сходится ряд, составленный из сумм* s_k *этих рядов (двойной ряд):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k, \quad (37)$$

и 3) сумма ряда (37) совпадает с суммой s *исходного ряда (31).*

Справедливость первой части теоремы, например, для первого ряда разложения (36) следует из очевидного неравенства

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{a_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|.$$

Для доказательства второй части теоремы заметим, что из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ следует неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \beta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$$

для любого n и, стало быть,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|.$$

На основании этого неравенства мы можем написать

$$|s_1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{a_k}|, \quad |s_2| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{b_k}|, \quad |s_3| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{c_k}|, \quad \dots$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n |s_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|,$$

откуда и следует абсолютная сходимость ряда (37).

С целью доказательства третьей части теоремы оценим разность $s - \sum_{k=1}^n s_k$. Имеем

$$\left| s - \sum_{k=1}^n s_k \right| \leq |\alpha_{v_1}| + |\alpha_{v_2}| + \dots, \quad (38)$$

где $v_1, v_2, \dots$ — номера всех тех членов ряда (31), которые не входят в ряды $s_1, s_2, \dots, s_n$. Обозначим через m произвольное натуральное число и выберем число n настолько большим, чтобы индексы $v_1, v_2, \dots$ были больше m . При таком подборе n на основании (38) будем иметь

$$\left| s - \sum_{k=1}^n s_k \right| \leq |\alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+2}| + \dots \quad (39)$$

В силу абсолютной сходимости ряда (31) для любого данного $\varepsilon > 0$ число m можно подобрать так, чтобы имело место неравенство $|\alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+2}| + \dots < \varepsilon$, откуда, учитывая (39), получаем

$$\left| s - \sum_{k=1}^n s_k \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает последнюю часть сформулированной теоремы.

Из теоремы о двойных рядах следует, что *при перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.*

Произведением рядов (35) называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_k + \alpha_2 \beta_{k-1} + \dots + \alpha_k \beta_1). \quad (40)$$

Если ряды (35) абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд (40), причем для сумм s , s' и s'' этих рядов имеет место равенство

$$s'' = ss'. \quad (41)$$

Для доказательства этого свойства произведения абсолютно сходящихся рядов рассмотрим множество всевозможных парных произведений членов рядов (35):

$$\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_1, \dots \quad (42)$$

Ряд, членами которого являются числа (42), абсолютно сходится. Это следует из того, что любая конечная сумма модулей этих чисел не превышает числа $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$. Тем самым доказана абсолютная сходимость ряда (40). Теперь, группируя члены этого ряда в виде

$$\alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k + \dots + \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k + \dots$$

и применяя теорему о двойных рядах, получим

$$s'' = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot s' = ss'.$$

При перемножении двух условно сходящихся рядов по указанному выше правилу может случиться, что по-

лученный в результате умножения ряд расходится и, следовательно, такая операция будет лишена смысла.

К вопросу перемножения двух условно сходящихся рядов мы еще вернемся ниже.

УПРАЖНЕНИЯ

Показать справедливость приведенных ниже утверждений.

1. Множество всех комплексных чисел относительно бинарных операций сложения и умножения является полем.

2. Поле комплексных чисел $\alpha = a + ib$ и множество всевозможных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ с действительными элементами в обычном понимании суммы и произведения двух матриц изоморфны.

3. Если $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, то имеет место равенство

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{(n-1)k} = 0$$

для любого натурального k , не являющегося кратным n .

4. В соотношении (5) равенство возможно тогда и только тогда, когда $z_j^* = \lambda z_j$.

5. Операция сопряжения является зеркальным отражением относительно действительной оси (симметрией относительно действительной оси), а инверсия — зеркальным отражением относительно окружности $|z| = R$ (симметрией относительно окружности $|z| = R$) комплексной плоскости на себя.

6. При неколлинеарности каждой из троек $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') комплексных чисел наличие равенства

$$\frac{\alpha'' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\beta' - \beta}$$

означает, что треугольники $\alpha\alpha'\alpha''$ и $\beta\beta'\beta''$ подобны и одинаково ориентированы.

7. При стереографической проекции угол между двумя пересекающимися кривыми на комплексной плоскости равен углу между их соответствующими стереографическими проекциями на сфере S Римана.

8. Расстояние d между сферическими изображениями $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ точек $z = x + iy$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ дается формулами

$$d = \frac{|z - z_1|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z_1|^2)}}, \quad z \neq \infty, \quad z_1 \neq \infty,$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z_1 = \infty.$$

9. Суммируемый ряд является $(C, 1)$ -суммируемым, и его обычная сумма s совпадает с $s(C, 1)$.

10. Из сходимости последовательности $\{s_n\}$ следует сходимость последовательности $\{|s_n|\}$. Верно ли обратное утверждение?

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Определение функции. Предел функции

1. **Комплексное переменное.** Символ, принимающий определенные комплексные числовые значения или, как еще принято говорить, пробегающий определенное множество точек комплексной плоскости, называется *комплексным переменным*. Для обозначения комплексного переменного мы часто будем пользоваться буквами z , w , t , ζ и т. д.

В зависимости от того, является ли множеством изменения переменного z комплексная плоскость или расширенная комплексная плоскость, будем считать, что речь идет о плоскости комплексного переменного z или о расширенной плоскости комплексного переменного z .

2. **Функция комплексного переменного.** На расширенных плоскостях комплексных переменных z и w рассмотрим соответственно множества E и E_1 .

Если указан закон f , по которому каждому значению $z \in E$ сопоставляется определенное значение $w \in E_1$, то говорят, что w является *однозначной функцией* переменного z , и пишут $w = f(z)$. Когда задана функция $w = f(z)$, говорят, что задано *отображение* множества E в множество E_1 . Точка $w \in E_1$ называется *образом* точки $z \in E$, а точка z — *прообразом* точки w . Для прообраза принято обозначение $z = f^{-1}(w)$.

При отображении, осуществляемом с помощью однозначной функции $w = f(z)$, может оказаться, что каждому двум различным прообразам z_1 и z_2 соответствуют разные образы, т. е. $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Такое отображение называется *взаимно однозначным* или *однолиственным*, а осуществляющая его функция $w = f(z)$ — *однолистной*. При однолиственном отображении $w = f(z)$ прообраз $z = f^{-1}(w)$ можно рассматривать как однозначную функцию переменного w . Она называется функцией, *обратной* по отношению к функции $w = f(z)$.

При рассмотрении однозначного, но не однолистного отображения, конечно, можно говорить об обратной функции $z=f^{-1}(w)$, но она уже не будет однозначной.

Ниже речь будет идти (если не оговорено противное) исключительно об однозначных функциях комплексного переменного.

3. Предел функции. Пусть E —множество изменения комплексного переменного z , а z_0 —предельная точка этого множества. Мы скажем, что z стремится к z_0 , $z \rightarrow z_0$, если, каково бы ни было $\delta > 0$, в процессе изменения z , начиная с определенного его значения, $z \in E \cap C(\delta, z_0)$, $z \neq z_0$.

Предположим теперь, что функция $w=f(z)$ задана на множестве E . Говорят, что при $z \rightarrow z_0$ функция $w=f(z)$ имеет своим *пределом в смысле Гейне* число $w_0 \neq \infty$, если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in E$, сходящейся к z_0 , последовательность $\{w_n=f(z_n)\}$ сходится к w_0 .

Говорят, что при $z \rightarrow z_0$ функция $w=f(z)$ имеет своим *пределом в смысле Коши* число $w_0 \neq \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство

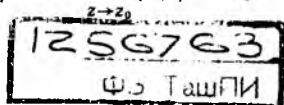
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

имеет место для всех $z \in E \cap C(\delta, z_0)$, $z \neq z_0$.

Очевидно, что из существования предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ по Коши следует существование предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ по Гейне и эти пределы совпадают. Верно и обратное утверждение. Доказательство его легко проводится от противного. В самом деле, пусть w_0 не является пределом $f(z)$ по Коши при $z \rightarrow z_0$. Это означает, что можно указать такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует точка $z_\delta \in E \cap C(\delta, z_0)$ такая, что $|f(z_\delta) - w_0| \geq \varepsilon$.

Обозначим через $\{\delta_n\}$ последовательность положительных чисел δ_n , сходящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$. По принципу произвольного выбора Цермело из множеств $E \cap C(\delta_n, z_0)$, $n=1, 2, \dots$, можно выбрать по точке z_n так, что $|f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon$. Следовательно, существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0 , что соответствующая последовательность $\{w_n\}$ значений $f(z_n)$ не сходится к w_0 , т. е. w_0 не может быть пределом $f(z)$ по Гейне при $z \rightarrow z_0$.

Критерий Коши существования предела: для существования предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ необходимо и до-



статочно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $\delta > 0$ такое, что для любых точек z' и z'' , удовлетворяющих условиям

$$z' \in E \cap C(\delta, z_0), \quad z' \neq z_0, \quad z'' \in E \cap C(\delta, z_0), \quad z'' \neq z_0, \quad (1)$$

имело место неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon. \quad (2)$$

Необходимость следует из определения предела по Коши. В самом деле, соотношение $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что имеют место неравенства $|f(z') - w_0| < \varepsilon/2$, $|f(z'') - w_0| < \varepsilon/2$, как только выполнены условия (1). Отсюда и получается неравенство (2), так как $|f(z') - f(z'')| \leq |f(z') - w_0| + |f(z'') - w_0|$.

Достаточность условий (1), (2) будет доказана, если мы покажем, что для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in E$, сходящейся к z_0 , последовательность $\{w_n = f(z_n)\}$ сходится к w_0 .

Из сходимости последовательности $\{z_n\}$ следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое $N(\delta) > 0$, что $z_{N+m} \in C(\delta, z_N)$ для любого натурального m . В силу условия теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(z_{N+m}) - f(z_N)| < \varepsilon$, как только $z_{N+m} \in C(\delta, z_N)$, т. е. последовательность $\{w_n = f(z_n)\}$ является фундаментальной и, следовательно, она сходится. Пусть $w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$.

Обозначим через $\{z'_n\}$ любую другую последовательность точек E , сходящуюся к z_0 . Если мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = w_0, \quad (3)$$

то в силу определения предела по Гейне будет доказано равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad z \in E.$$

Для произвольного ε существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $z', z'' \in E$, удовлетворяющих условиям (1), имеет место неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/2$. Для $\delta(\varepsilon)$ существует $N(\delta) > 0$ такое, что, как только $n > N$, будем иметь $z_n \in C(\delta, z_0)$, $z'_n \in C(\delta, z_0)$ и

$$|f(z_n) - w_0| < \varepsilon/2, \quad |f(z_n) - f(z'_n)| < \varepsilon/2.$$

Отсюда в силу неравенства $|\omega_0 - f(z'_n)| \leq |\omega_0 - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z'_n)|$ получим, что $|\omega_0 - f(z'_n)| < \varepsilon$.

Этим справедливость равенства (3) доказана.

Из определения предела следует, что если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \omega'_0,$$

то существуют и пределы $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \pm \varphi(z)\}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \varphi(z)$,

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)}$ (если $\omega'_0 \neq 0$), причем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm \varphi(z)] = \omega_0 \pm \omega'_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \varphi(z) = \omega_0 \omega'_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{\omega_0}{\omega'_0}.$$

Кроме того, из равносильных равенств

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{\omega_0}$$

следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \omega_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} \omega_0.$$

§ 2. Непрерывность функции комплексного переменного

1. Непрерывность и равномерная непрерывность функции комплексного переменного. Пусть функция $\omega = f(z)$ задана на множестве E точек расширенной плоскости комплексного переменного z .

Говорят, что в не изолированной точке $z_0 \in E$ функция $f(z)$ непрерывна, если $f(z_0) \neq \infty$ и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in E.$$

Поскольку имеются два равносильных определения предела, по Гейне и по Коши, то имеются два равносильных определения непрерывности, по Гейне и по Коши.

Предположим, что каждая точка z множества E является его предельной точкой.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z \in E$, то говорят, что $f(z)$ непрерывна на множестве E .

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке $z_0 \in E$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое

$\delta(\varepsilon, z_0)$, что для любых $z', z'' \in E \cap C(\delta, z_0)$ имеем

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon. \quad (4)$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой пары точек $z', z'' \in E$, удовлетворяющих неравенству $|z' - z''| < \delta$, имеет место неравенство (4), то говорят, что функция $f(z)$ *равномерно непрерывна на E* .

Из равномерной непрерывности, очевидно, следует непрерывность функции $f(z)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

В дальнейшем мы существенно будем пользоваться приведенными ниже важнейшими свойствами непрерывных функций, заданных на множестве E точек комплексной плоскости.

а) *Заданная на открытом (замкнутом) множестве E функция $f(z)$ непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (замкнутого) множества из множества значений $f(z)$ является открытым (замкнутым).*

Утверждение а) является очевидным и на его доказательстве мы здесь останавливаться не будем.

б) *Непрерывный образ $E_1 = f(E)$ компактного множества E компактен.*

Пусть множество E компактно. В силу леммы Гейне — Бореля компактность множества $E_1 = f(E)$ будет доказана, если мы покажем, что из любого открытого покрытия $\{O\}$ множества E_1 можно выделить конечное открытое покрытие.

В силу непрерывности функции $f(z)$ для любого $z \in E$ существует окрестность $\omega(z)$ такая, что $f(E \cap \omega) \subset O(z) \in \{O\}$. Система окрестностей $\{\omega(z)\}$ является открытым покрытием E . Из компактности E в силу леммы Гейне — Бореля следует возможность выделения конечного покрытия $[\omega(z_1), \omega(z_2), \dots, \omega(z_n)]$ этого множества. Пусть $O(z_k)$ — открытое множество из покрытия $\{O\}$, содержащее внутри себя множество $f(\omega(z_k) \cap E)$. Очевидно, что $[O(z_1), O(z_2), \dots, O(z_n)]$ является конечным открытым покрытием E_1 .

с) *Непрерывный образ связного множества связан.*

Пусть E — связное множество, а $E_1 = f(E)$ — его образ на плоскости переменного w . Обозначим через Q_1 и Q_2 открытые множества, обладающие свойствами

$$E_1 \subset Q_1 \cup Q_2, \quad E_1 \cap Q_1 \cap Q_2 = \emptyset. \quad (5)$$

Если E^* — произвольное множество точек плоскости ω , то под $f^{-1}(E^*)$ будем понимать множество точек $z \in E$, для которых $f(z) \in E^*$. Используя это обозначение, можно написать

$$E = f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2), \quad (6)$$

причем в силу (5) справедливо равенство

$$f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2) = \emptyset. \quad (7)$$

В силу непрерывности функции $\omega = f(z)$ для каждой точки $z \in f^{-1}(Q_1)$ можно указать ее окрестность $\omega(z)$ такую, что $\omega(z) \cap E \subset f^{-1}(Q_1)$ (если, конечно, $f^{-1}(Q_1) \neq \emptyset$). Объединение всех окрестностей $\omega(z)$ обозначим через Q_1^0 . Имеем $Q_1^0 \cap E = f^{-1}(Q_1)$. Точно так же, если $f^{-1}(Q_2) \neq \emptyset$, существует открытое множество Q_2^0 такое, что $E \cap Q_2^0 = f^{-1}(Q_2)$. Таким образом, имеем

$$E \subset Q_1^0 \cup Q_2^0,$$

причем на основании (7) имеем $E \cap Q_1^0 \cap Q_2^0 = \emptyset$. В силу связности E из двух множеств $E \cap Q_1^0$ и $E \cap Q_2^0$ по крайней мере одно пусто и, стало быть, E_1 связно.

d) *Непрерывная на компактном множестве E функция $f(z)$ равномерно непрерывна.*

Из непрерывности функции $f(z)$ в точке $z \in E$ следует существование круга $C(\delta, z)$, $\delta = \delta(\epsilon, z)$, такого, что для любой пары точек z' и z'' из $E \cap C(\delta, z)$ имеет место неравенство (4). Каждой точке $z \in E$ сопоставим открытый круг $C(\delta/2, z)$. Система открытых кругов $S: \{C(\delta/2, z)\}$ является открытым покрытием E . В силу леммы Гейне—Бореля из системы S можно выделить конечное открытое покрытие S_1 . Радиус наименьшего круга из S_1 обозначим через δ_0 . Пусть теперь точки $z', z'' \in E$ удовлетворяют условию $|z' - z''| < \delta_0$. Обозначим через $C(\delta/2, a)$ тот открытый круг из S_1 , который содержит точку z' . Очевидно, что точки z' и z'' обе лежат внутри круга $|z - a| < \delta(\epsilon, a)$ и, стало быть, для них справедливо неравенство (4).

Отображение, осуществляемое однолистной непрерывной функцией $\omega = f(z)$ с непрерывной обратной $z = f^{-1}(\omega)$, называется *топологическим* (или *гомеоморфным*).

2. Кривая Жордана. *Непрерывной кривой* называется геометрическое место точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad (8)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t на сегменте

$$\alpha \leq t \leq \beta. \quad (9)$$

Непрерывная кривая как непрерывный образ компактного связного множества (9) является компактным связным множеством.

Непрерывная кривая называется *кривой Жордана* или *простой кривой*, если различным значениям параметра t (кроме, быть может, его значений $t = \alpha$ и $t = \beta$) соответствуют различные значения $z(t)$. Жорданова кривая называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Замкнутая кривая Жордана может рассматриваться как топологический образ окружности.

Множество точек расширенной комплексной плоскости, граница которого состоит из единственной разомкнутой кривой Жордана, очевидно, является односвязной областью.

Жорданом было доказано, что *замкнутая кривая Жордана делит расширенную комплексную плоскость на две области, внутреннюю (не содержащую точку $z = \infty$) и внешнюю (содержащую точку $z = \infty$)*. Очевидно, что каждая из этих областей является односвязной.

Пусть имеются кривые Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, обладающие следующими свойствами: 1) Γ_0 замкнута; 2) каждая из Γ_k лежит во внешней области, ограниченной Γ_j , $k, j = 1, 2, \dots, n, k \neq j$; 3) все $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, лежат во внутренней области, ограниченной Γ_0 . Множество точек, лежащих внутри Γ_0 и вне каждой Γ_k , является $(n+1)$ -связной областью D_{n+1} . Кривые $\Gamma_k, k = 0, 1, \dots, n$, являются компонентами границы Γ области D_{n+1} . Граница области иногда именуется *контуром области*.

При изменении параметра t на сегменте своего задания в одном направлении (от α к β или обратно) на кривой Жордана Γ точка $z(t)$ совершает обход. Если при обходе замкнутой кривой Жордана Γ ограничиваемая ею конечная область остается слева, то направление обхода называется *положительным*. В случае же разомкнутой кривой Γ положительным направлением обхода будем считать направление, соответствующее возрастанию параметра t .

Жорданова кривая (8) называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ всюду на сегменте (9),

причем $z'(\alpha) = z'(\beta)$ при $z(\alpha) = z(\beta)$. В каждой точке жордановой гладкой кривой существует касательная, причем угол, составленный ею с любым выбранным постоянным направлением на плоскости, является непрерывной функцией параметра t .

Так как гладкая кривая Жордана является спрямляемой, то в качестве параметра t в представлении (8) можно принять длину s дуги Γ , отсчитываемую от произвольно фиксированной точки Γ в положительном направлении.

Пусть l — длина гладкой замкнутой кривой Жордана Γ , а z_1 и z_2 — произвольные точки на Γ . Дугу Γ между z_1 и z_2 , длина которой $\sigma(z_1, z_2) \leq l/2$, обозначим через $\widehat{z_1 z_2}$, а длину хорды, стягивающей дугу $\widehat{z_1 z_2}$, — через $r(z_1, z_2)$.

На множестве всевозможных пар $z_1 \in \Gamma$, $z_2 \in \Gamma$, удовлетворяющих условию $\sigma(z_1, z_2) \geq \xi$, где ξ — фиксированное число, $0 < \xi < l/2$, функция $r(z_1, z_2)$ достигает минимума $\mu(\xi) > 0$. Все точки z кривой Γ , удовлетворяющие условию $\sigma(z_0, z) \geq \xi$, где z_0 — произвольная фиксированная точка на Γ , лежат вне круга $|z - z_0| < \mu_0 < \mu(\xi)$.

Из условия гладкости Γ следует, что для любого θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi/2$, существует положительное число $\sigma_0 < l/2$ такое, что острый угол α между касательными в любых двух точках $z_1 \in \Gamma$, $z_2 \in \Gamma$, удовлетворяющих условию $\sigma(z_1, z_2) < \sigma_0$, не превышает $\theta_0/2$. Отсюда на основании известной из анализа теоремы Лагранжа заключаем, что если $\sigma(z_1, z_2) < \sigma_0$, то острый угол между хордой, стягивающей дугу $\widehat{z_1 z_2}$, где $z_1 \in \widehat{z_1 z_2}$, $z_2 \in \widehat{z_1 z_2}$, и касательной к Γ в точке z_1 или z_2 не превышает $\theta_0/2$.

Рассмотрим множество γ всех точек z кривой Γ , удовлетворяющих условию $\sigma(z_0, z) < \sigma_0$, где $z_0 = z(s_0)$ — произвольная фиксированная точка на Γ . Без ограничения общности можно считать, что z_0 не является начальной точкой отсчета длины s дуги Γ и $\sigma_0 < s_0$. Точка z_0 делит дугу γ на две части, на одной из которых $s > s_0$, а на другой $s < s_0$.

Из очевидных равенств

$$\begin{aligned} \frac{dr(z_0, z(s))}{ds} &= +\cos \theta, & s > s_0, \\ \frac{dr(z_0, z(s))}{ds} &= -\cos \theta, & s < s_0, \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0/2, & z(s) \in \gamma, & z_0 \in \gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

где θ — острый угол между хордой, стягивающей дугу $\widehat{z_0 z}$, и касательной к γ в точке z , следует, что на γ

$$|s - s_0| \cos \frac{\theta_0}{2} \leq r(z_0, z(s)) \leq |s - s_0|.$$

Обозначим через δ_0 наименьшее из чисел $\mu(\sigma_0)$, $\sigma_0 \cos \frac{\theta_0}{2}$ и рассмотрим окружность $|t - z_0| = \delta_0$.

При возрастании s от s_0 до $s_0 + \sigma_0$ в силу (10) функция $r[z(s_0), z(s)]$ строго возрастает от нуля до $r[z(s_0), z(s_0 + \sigma_0)] \geq \sigma_0 \cos \frac{\theta_0}{2} \geq \delta_0$ и, следовательно, точка $z(s)$ ровно один раз попадет на окружность $|t - z_0| = \delta_0$. Аналогичным рассуждением убеждаемся, что при убывании s от s_0 до $s_0 - \sigma_0$ точка $z(s)$ ровно один раз попадет на окружность $|t - z_0| = \delta_0$. Тем самым доказано следующее важное свойство гладких замкнутых кривых Жордана Γ : для каждой Γ существует положительное число δ_0 такое, что окружность с центром в любой точке $z_0 \in \Gamma$ радиуса $\delta < \delta_0$ ровно два раза пересекает кривую Γ .

Очевидно, что и для разомкнутой гладкой кривой Жордана Γ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что окружность радиуса $\delta < \delta_0$ с центром в любой точке $z_0 \in \Gamma$ либо два раза, либо один раз пересекает Γ .

Число δ_0 мы ниже будем называть *стандартным радиусом, соответствующим кривой Γ* .

Жорданова кривая называется *кусочно-гладкой*, если сегмент $\alpha \leq t \leq \beta$ можно разделить на конечное число сегментов, внутри каждого из которых $z'(t)$ непрерывна и отлична от нуля, а в точках деления t_k функция $z'(t)$ имеет отличные от нуля пределы как справа, так и слева.

3. Некоторые простейшие примеры функций комплексного переменного. Функция $w = P_n(z)$ комплексного переменного z , где

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad a_0 \neq 0,$$

полученная в результате конечного числа операций умножения z на самого себя, умножения на комплексные числа и сложения, называется *целой рациональной функцией* или *полиномом* над полем комплексных чисел. Неотрицательное целое число n называется *степенью* полинома $P_n(z)$. При $n=1$ полином $P_1(z) = a_0 z + a_1$ называется *линейной функцией*. Когда $a_0 = 0$, линейная функция называется *постоянной*.

Отношение двух полиномов $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$ и $Q_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^{m-k}$.

$$\omega(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

называется *рациональной функцией*. В частности, при $n=m=1$ рациональная функция

$$\omega = \frac{a_0 z + a_1}{b_0 z + b_1} \quad (11)$$

носит название *дробно-линейной* (или *общей линейной*) функции.

§ 3. Функциональные ряды

1. Сходимость и равномерная сходимость функционального ряда. *Функциональным* называется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z), \quad (12)$$

членами которого являются заданные на некотором множестве E точек комплексной плоскости z функции $\alpha_k(z)$.

Поскольку в фиксированной точке $z \in E$ ряд (12) является числовым, то по определению его сходимость к сумме s означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что $|s - s_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$, где

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(z).$$

Ряд (12) называется *сходящимся на множестве E* , если он сходится в каждой точке $z \in E$. Его сумма s , очевидно, является функцией z , определенной в каждой точке множества E .

Число N , участвующее в определении сходимости ряда (12), зависит не только от ε , но, вообще говоря, и от z , т. е. оно является функцией ε и z .

Сходящийся на множестве E функциональный ряд (12) называется *равномерно сходящимся на E* , если N не зависит от z . Вейерштрассу принадлежит следующий простой

признак равномерной сходимости: если для всех $z \in E$ каждый член $\alpha_k(z)$ ряда (12), начиная с некоторого номера k_0 , по модулю не больше соответствующего члена a_k сходящегося числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (13)$$

с неотрицательными членами, то ряд (12) сходится равномерно (и абсолютно) на множестве E .

В силу сходимости ряда (13) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon) \geq k_0$, что $\sum_{k=1}^m a_{N+k} < \varepsilon$ для любого натурального m . Следовательно, имеем

$$\left| \sum_{k=1}^m \alpha_{N+k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_{N+k}(z)| \leq \sum_{k=1}^m a_{N+k} < \varepsilon.$$

Отсюда на основании критерия Коши убеждаемся в равномерной и абсолютной сходимости ряда (12) на множестве E .

Равномерно сходящиеся ряды обладают следующим весьма важным свойством: *сумма $s(z)$ равномерно сходящегося на множестве E ряда (12) непрерывных функций $\alpha_k(z)$ непрерывна на E .*

Обозначим через z_0 произвольную фиксированную точку множества E . Легко проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что $|s(z) - s(z_0)| < \varepsilon$ для всех $z \in E \cap C(\delta, z_0)$.

В самом деле, в силу равномерной сходимости ряда (12) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что

$$|s(z) - s_N(z)| < \varepsilon/3, \quad z \in E,$$

а в силу непрерывности конечной суммы $s_N(z)$ для того же ε существует такое $\delta(\varepsilon, z_0)$, что

$$|s_N(z) - s_N(z_0)| < \varepsilon/3$$

для всех $z \in E \cap C(\delta, z_0)$. На основании этих неравенств получаем

$$|s(z) - s(z_0)| \leq |s(z) - s_N(z)| + |s_N(z) - s_N(z_0)| + |s_N(z_0) - s(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление, когда

это возможно, в виде суммы ряда хорошо изученных функций.

Простейшим классом таких функциональных рядов являются так называемые *степенные ряды*, к изучению которых мы и переходим.

2. Степенные ряды. Радиус сходимости. *Степенным* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k, \quad (14)$$

где $z_0, a_k, k=0, 1, \dots$, — заданные комплексные числа, а ζ — комплексное переменное.

Вводя обозначение $\zeta - z_0 = z$, степенной ряд (14) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (15)$$

Каждый член ряда (15) определен на всей плоскости комплексного переменного z .

Множество точек сходимости степенного ряда (15) непусто. Во всяком случае, в точке $z=0$ он заведомо сходится и его сумма равна a_0 .

Существуют степенные ряды, множество точек сходимости которых состоит из единственной точки $z=0$. К этому классу относится ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k. \quad (16)$$

В самом деле, для любого $z \neq 0$ существует такой номер k_0 , начиная с которого $|kz| > 2$ и, следовательно, $|k^k z^k| > 2^k$. Таким образом, в точке $z \neq 0$ нарушено необходимое условие $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k z^k = 0$ сходимости ряда (15).

Ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k} \quad (17)$$

дает пример степенного ряда, множество точек сходимости которого представляет собой всю комплексную плоскость. Это следует из того, что для любого конечного значения z , начиная с определенного номера k_0 , имеют место неравенства $\left| \frac{z}{k} \right| < \frac{1}{2}$, т. е. $\left| \frac{z^k}{k^k} \right| < \frac{1}{2^k}$, а ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ сходится (см. признак равномерной сходимости Вейерштрасса).

Существуют степенные ряды, сходящиеся в одних точках (отличных от нуля) комплексной плоскости и расходящиеся в других. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad (18)$$

известный под названием *бесконечной геометрической прогрессии*, сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geq 1$.

При изучении структуры множества точек сходимости степенных рядов важную роль играет первая теорема Абеля: *если степенной ряд (15) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, для любого z , удовлетворяющего неравенству $|z| < |z_0|$.*

Ввиду сходимости ряда (15) при $z = z_0$ заключаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k z_0^k = 0$. Отсюда следует существование положительного числа g такого, что

$$|a_k z_0^k| < g, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

В силу (19) для каждого члена $a_k z^k$ ряда (15) имеем оценку

$$|a_k z^k| = \left| a_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0} \right)^k \right| < g q^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

где $q = |z|/|z_0|$. Так как числовой ряд с положительными членами gq^k сходится при $q < 1$, то из (20) непосредственно следует справедливость первой теоремы Абеля.

Теперь покажем существование неотрицательного числа R такого, что степенной ряд (15) при $|z| < R$ сходится и при $|z| > R$ расходится.

Для степенных рядов, сходящихся в единственной точке $z = 0$ или на всей комплексной плоскости, R соответственно равно нулю или бесконечности. Остается рассмотреть случай, когда ряд (15) для одних значений z , отличных от нуля, сходится и для других — расходится. В этом случае в силу первой теоремы Абеля на положительной действительной полуоси существует отрезок I_1 , левый конец которого является точкой сходимости, а правый конец — точкой расходимости ряда (15). Обозначим через I_2 ту половину отрезка I_1 , левый конец которой

является точкой сходимости, а правый конец — точкой расходимости ряда (15), и этот процесс продолжим бесконечно. Точка (единственная) пересечения вложенных отрезков I_n , $n=1, 2, \dots$, изображает число R .

В самом деле, пусть $|z| < R$. Выберем n настолько большим, чтобы левый конец α_n отрезка I_n был больше, чем $|z|$. Так как в точке α_n ряд (15) сходится, то, по первой теореме Абеля, он сходится абсолютно и при $|z| < \alpha_n < R$. Пусть теперь $|z| > R$ и n — настолько большое, что правый конец β_n отрезка I_n меньше, чем $|z|$. Ввиду того, что β_n является точкой расходимости ряда (15) и $R < \beta_n < |z|$, в силу той же теоремы Абеля заключаем, что в точке z ряд (15) расходится.

Итак, для каждого степенного ряда (15) существует окружность $|z| = R$, внутри которой этот ряд сходится и вне которой — расходится. Число R называется радиусом сходимости, а круг $|z| < R$ — кругом сходимости степенного ряда (15).

Из коэффициентов степенного ряда (15) составим последовательность неотрицательных чисел

$$|a_1|, |a_2|^{1/2}, \dots, |a_k|^{1/k}, \dots \quad (21)$$

и обозначим через l верхний предел этой последовательности:

$$l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Очевидно, что l всегда существует (конечный или бесконечный), и притом единственный (l является самой правой предельной точкой последовательности $\{|a_k|^{1/k}\}$).

Имеет место следующая теорема (Коши—Адамара): радиус сходимости R степенного ряда (15) определяется формулой

$$R = 1/l, \quad (22)$$

причем подразумевается, что $R=0$ при $l=+\infty$ и $R=+\infty$ при $l=0$.

Когда $l=+\infty$, ряд (15) не может сходиться при $z \neq 0$. В самом деле, в противном случае можно было бы указать число $g > 1$ такое, что $|a_k z^k| < g$, т. е. $|a_k|^{1/k} < g/|z|$, $k=1, 2, \dots$, а это невозможно, ибо равенство $l=+\infty$ означает, что последовательность (21) неограничена.

Пусть теперь $l=0$ и z — любая отличная от нуля точка комплексной плоскости. Равенство $l=0$ означает,

что $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что $|a_k|^{1/k} < \varepsilon$ при $k > N$. В частности, для $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$, начиная с определенного значения k , будем иметь

$$|a_k z^k| = |a_k| |z|^k < 1/2^k,$$

откуда и следует абсолютная сходимость ряда (15) па всей комплексной плоскости.

Остается показать, что при конечном $l \neq 0$ ряд (15) сходится при $|z| < 1/l$ и расходится при $|z| > 1/l$.

Ввиду того, что l — самая правая предельная точка последовательности (21), для любого $\varepsilon > 0$, начиная с определенного номера k , будем иметь $|a_k|^{1/k} < l + \varepsilon$. При $l|z| < 1$ в качестве ε можем взять $\frac{1-l|z|}{2|z|}$ и, следовательно,

$$|a_k|^{1/k} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|},$$

или

$$|a_k|^{1/k} |z| < \frac{1+l|z|}{2} = q < 1.$$

Неравенства $|a_k z^k| < q^k$, выполняющиеся начиная с определенного значения k , гарантируют абсолютную сходимость ряда (15) при $|z| < 1/l$.

При $|z| > 1/l$, заметив, что для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество значений k , для которых $|a_k|^{1/k} > l - \varepsilon$, и приняв $\varepsilon = \frac{l|z| - 1}{|z|}$, будем иметь $|a_k z^k| > 1$ для этих же значений k . Нарушение необходимого условия $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k z^k = 0$ сходимости ряда (15) влечет за собой расходимость этого ряда при $|z| > 1/l$.

Образуя последовательность (21) для ряда

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}, \quad (23)$$

легко убедимся, что при любом действительном n его радиус сходимости $R = 1$.

В самом деле, для этого примера верхний предел последовательности (21) совпадает с ее пределом, причем

имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{n/k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{n \log k}{k}} = 1.$$

Ряд (23) замечателен тем, что на окружности $|z|=1$ при $n=0$ он всюду расходится, при $n=2$ — всюду сходится, а при $n=1$ в одних точках этой окружности он сходится (например, при $z=-1$), в других (при $z=1$) расходится.

Пусть радиус сходимости R степенного ряда (15) не равен нулю и r — любое положительное число, меньшее R .

Ввиду того, что числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ сходится, на основании признака равномерной сходимости Вейерштрасса заключаем, что *степенной ряд (15) равномерно и абсолютно сходится в круге $|z| \leq r$.*

Это утверждение вообще не означает, что степенной ряд обязательно равномерно сходится внутри его круга сходимости $|z| < R$.

В самом деле, сумма ряда (23) при $n=0$ и $|z| < 1$ равна $\frac{1}{1-z}$. Так как для любого фиксированного натурального N имеем $\left| 1 + \sum_{k=1}^N z^k \right| < N+1$ при $|z| < 1$, то нельзя отыскать натурального числа $N(\varepsilon)$, не зависящего от z и такого, чтобы разность $\frac{1}{1-z} - (1 + z + \dots + z^N)$ по модулю была меньше наперед заданного положительного числа ε для всех z внутри круга сходимости $|z| < 1$ этого ряда.

Каждый член $a_k z^k$ степенного ряда (15) является непрерывной функцией на всей плоскости комплексного переменного. Так как ряд (15) равномерно сходится в круге $|z| \leq r$, где r — любое положительное число, меньшее радиуса сходимости R этого ряда, то в силу установленного выше свойства равномерно сходящихся функциональных рядов с непрерывными членами заключаем, что *сумма степенного ряда непрерывна в любой точке z внутри его круга сходимости.*

3. Основные арифметические операции над степенными рядами. Предположим, что радиус сходимости R степенного ряда (15) отличен от нуля и r — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < r < R$.

Справедливо следующее утверждение: *если сумма $s(z)$ степенного ряда (15) равна нулю всюду в круге $|z| < r$, то $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$*

В самом деле, допустим обратное и обозначим через m индекс первого отличного от нуля коэффициента ряда (15).

По условию, сумма $s^*(z)$ ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} z^k$ равна нулю в круге $|z| < r$ всюду, кроме точки $z = 0$. Ввиду того, что сумма $s_*(z)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} z^k$ непрерывна при $|z| \leq r$ и $s_*(0) = 0$, можно указать число $\delta > 0$ такое, что при $|z| \leq \delta$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} z^k \right| < \frac{1}{2} |a_m|$$

и, стало быть,

$$\left| a_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} z^k \right| \geq |a_m| - \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} z^k \right| \geq \frac{1}{2} |a_m|,$$

а это противоречит равенству $s^*(z) = 0$, $0 < |z| \leq \delta$.

Пусть теперь радиусы сходимости R_1 и R_2 степенных рядов

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (24)$$

$$s_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (25)$$

отличны от нуля, и пусть $\rho = \min(R_1, R_2)$.

Так как в каждой точке z круга $|z| < \rho$ ряды (24) и (25) являются сходящимися, то имеют смысл сумма и разность этих рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) z^k, \quad (26)$$

причем радиусы сходимости рядов (26) в силу первой теоремы Абеля не меньше ρ .

На основании доказанного выше утверждения, если $s(z) = s_1(z)$ при $|z| < r < \rho$, то $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots$ (теорема единственности для степенного ряда). В дальнейшем эта теорема будет доказана при более

слабых ограничениях относительно множества точек z , в которых $s(z) = s_1(z)$.

Так как ряды (24) и (25) оба абсолютно сходятся при $|z| < \rho$, то их можно перемножить, причем радиус сходимости полученного после перемножения ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n},$$

не меньше, чем ρ .

Таким образом, операции сложения и умножения однозначно выполнимы для сходящихся степенных рядов, причем для этих операций справедливы законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, а вычитание представляет собой операцию, обратную по отношению к операции сложения, т. е. множество всех степенных рядов с отличными от нуля радиусами сходимости представляет собой *кольцо* над полем комплексных чисел.

Заметим, что при $b_0 \neq 0$ можно рассматривать отношение рядов (24) и (25) как степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, коэффициенты которого d_k в силу условия $b_0 \neq 0$ однозначно определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{n=0}^k b_n d_{k-n} = a_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ниже будет показано, что радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ при $b_0 \neq 0$ отличен от нуля, если только $R_1 \neq 0$ и $R_2 \neq 0$.

4. Определение некоторых элементарных функций с помощью степенных рядов. Сходящиеся степенные ряды позволяют ввести в рассмотрение широкие классы непрерывных функций комплексного переменного.

Степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad 0! = 1, \quad (27)$$

сходится на всей плоскости комплексного переменного z .

В самом деле, имеем

$$(k!)^2 = \prod_{n=1}^k n(k-n+1) \geq k^k, \quad k=1, 2, \dots \quad (28)$$

Из (28) следует, что $\left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k^{1/2}}$, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} = 0$.

Сумму ряда (27) принято обозначать через e^z , и она носит название *экспоненциальной функции*. Так как ряд (27) абсолютно сходится для любого конечного значения z , то имеет смысл произведение $e^z \cdot e^t$, которое равно

$$e^z \cdot e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+t)^k}{k!} = e^{z+t}. \quad (29)$$

Формула (29) иногда называется теоремой сложения для экспоненциальной функции. Приняв в этой формуле $t = -z$ и $t = -\tau$, будем иметь

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1, \quad e^z \cdot e^{-\tau} = e^{z-\tau},$$

т. е.

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad \frac{e^z}{e^{\tau}} = e^{z-\tau}.$$

Заменяя в ряде (27) переменное z через iz и группируя его члены подходящим образом, получим

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (30)$$

Очевидно, что радиусы сходимости обоих рядов в правой части (30) равны ∞ . Сумму первого из них будем обозначать через $\cos z$, а второго — через $\sin z$, т. е. по определению

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad (31)$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (32)$$

Заметим, что для действительных значений переменного $z = x$ суммы рядов (27), (31) и (32) совпадают с известными из действительного анализа функциями e^x , $\cos x$ и $\sin x$ соответственно.

В силу (30), (31) и (32) имеем

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad (33)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (34)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (35)$$

Формулы (33), (34) и (35) называются формулами Эйлера. Используя (33), тригонометрической записи комплексного выражения $A = |A|(\cos \arg A + i \sin \arg A)$ можно придать более удобную форму:

$$A = |A| e^{i \arg A}.$$

Из очевидных равенств

$$\begin{aligned} e^{i(z+t)} \pm e^{-i(z+t)} &= \\ &= \frac{1}{2} [(e^{iz} + e^{-iz})(e^{it} \pm e^{-it}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{it} \mp e^{-it})] \end{aligned}$$

в силу (34) и (35) получаем теоремы сложения для функций $\cos z$ и $\sin z$:

$$\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t, \quad (36)$$

$$\sin(z+t) = \sin z \cos t + \cos z \sin t. \quad (37)$$

Подставляя в формулу (29) вместо t выражение $2k\pi i$, $k=0, \pm 1, \dots$, будем иметь $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$, т. е. функция e^z является периодической с периодом $2\pi i$. Очевидно, что других периодов (не целократных $2\pi i$) функция e^z не имеет.

Положив $t=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \dots$, в формулах (36) и (37), сразу установим периодичность функций $\cos z$ и $\sin z$ с периодом 2π :

$$\cos(z+2k\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2k\pi) = \sin z.$$

Непосредственными следствиями формул (34) и (35) являются свойства четности $\cos z$ и нечетности $\sin z$:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Учитывая эти обстоятельства и полагая $t=-z$ в формуле (36), получим тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad (38)$$

доказанное в школьной тригонометрии лишь для действительных значений переменного z .

В силу формул (33) и (38) имеем для $z = x + iy$:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

и

$$|e^z| = e^x. \quad (39)$$

Ввиду того, что при $-\infty < x < \infty$ функция $e^x \neq 0$, из формулы (39) заключаем, что функция e^z нигде в комплексной плоскости $z = x + iy$ в нуль не обращается.

Множество всех точек комплексной плоскости z , в которых $\cos z = 0$, т. е. множество всех нулей этой функции, в силу (34) определяется из равенства $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, или, что то же самое, из равенства $e^{2iz} = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Следовательно, нули функции $\cos z$ имеют вид

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Аналогично доказывается, что нули функции $\sin z$ имеют вид

$$z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

В то время как для действительных значений z имеют место соотношения $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$, для комплексных значений z модули этих функций могут быть как угодно большими. На примере $\cos z$ это следует из очевидного равенства

$$|\cos z|^2 = \frac{1}{4} (e^{-2y} + e^{2y}) + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

которое показывает, что при $z \rightarrow \infty$ вдоль прямой $x = \text{const}$ функция $|\cos z|^2 \rightarrow \infty$.

Экспоненциальная функция позволяет ввести в рассмотрение *гиперболические функции*

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (40)$$

Подставляя в (34) и (35) вместо z выражение iz , в силу (40) получим

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz. \quad (41)$$

Формулы (41) позволяют найти периоды, нули и обнаружить ряд других свойств гиперболических функций, исходя из соответствующих свойств функций $\cos z$ и $\sin z$.

5. Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд (15) с радиусом сходимости $R > 0$ сходится в точке $z_0 = Re^{i\theta_0}$

окружности $|z|=R$, то для суммы $s(z)$ этого ряда имеет место равенство

$$\lim_{z=|z|e^{i\theta_0} \rightarrow z_0} s(z) = s(z_0),$$

т. е. функция $s(z)$ в точке z_0 непрерывна вдоль радиуса Oz_0 .

Без ограничения общности можем предполагать, что $R=1$, $z_0=1$ и

$$s(1)=0. \quad (42)$$

В самом деле, после замены $z=z_0t$ степенной ряд (15) переходит в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k t^k$ относительно переменного t , причем круг $|z|=|z_0||t|<R$ переходит в круг $|t|<1$, а точка $z=z_0$ — в точку $t=1$. Кроме того, если $s(1) \neq 0$, рассматривая ряд $s^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - s(1)$, будем иметь $s^*(1)=0$.

Итак, нам следует показать, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ 0 < z < 1}} s(z) = 0. \quad (43)$$

Наряду с (15) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (44)$$

с радиусом сходимости, равным единице, суммой которого при $|z|<1$ является функция $\frac{1}{1-z}$.

В силу абсолютной сходимости рядов (15) и (44) при $|z|<1$ имеет смысл произведение

$$s(z) \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (45)$$

где

$$b_k = \sum_{n=0}^k a_n.$$

Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, радиус сходимости ряда (45) не меньше единицы. Но он не может быть больше единицы, ибо в противном случае

радиус сходимости ряда $(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ тоже был бы больше единицы, что невозможно.

Выражение $s(z)$ перепишем в виде

$$s(z) = (1-z) \sum_{k=0}^N b_k z^k + (1-z) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k z^k. \quad (46)$$

В силу равенства (42) для любого $\varepsilon > 0$ число N можно подобрать настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$|b_k| < \varepsilon/2, \quad k \geq N.$$

На основании этого неравенства для z из интервала $0 < z < 1$ в силу (46) имеем

$$\begin{aligned} |s(z)| &\leq (1-z) M + \frac{\varepsilon}{2} (1-z) \sum_{k=N+1}^{\infty} z^k = \\ &= (1-z) M + \frac{\varepsilon}{2} z^{N+1} < (1-z) M + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$M = \sum_{k=0}^N |b_k|.$$

Теперь возьмем z настолько близким к единице, чтобы имело место неравенство

$$1-z < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (48)$$

В силу (47) и (48) заключаем, что

$$|s(z)| < \varepsilon,$$

и тем самым вторая теорема Абеля доказана.

Вторая теорема Абеля остается в силе и тогда, когда $z \rightarrow z_0$, оставаясь внутри угла раствора $\theta < \pi$ с вершиной в точке z_0 и с биссектрисой Oz_0 . Доказательство остается прежним, если только заметить, что величина $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ остается ограниченной, когда z находится внутри указанного угла, но достаточно близко к точке $z = z_0$.

Из второй теоремы Абеля следует справедливость утверждения: *если числовые ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}, \quad (49)$$

сходятся, то имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad (50)$$

т. е. операция умножения имеет смысл для условно сходящихся рядов, если полученный в результате этой операции ряд сходится.

В самом деле, в силу первой теоремы Абеля из сходимости рядов (49) следует сходимость степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

при $|z| < 1$, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (51)$$

На основании второй теоремы Абеля заключаем, что

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \\ \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

и, следовательно, предельным переходом при $z \rightarrow 1$ из (51) получаем (50).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что при топологическом отображении открытого множества E на открытое множество E_1 открытому подмножеству из E соответствует открытое подмножество из E_1 .

2. Доказать, что если однолистная на компактном множестве E функция $w = f(z)$ непрерывна, то непрерывна и обратная функция $z = f^{-1}(w)$.

3. Показать, что полином $P_n(z)$ является непрерывной функцией всюду на плоскости комплексного переменного z .

4. Линейная функция $w = a_0 z + a_1$ равномерно непрерывна на плоскости комплексного переменного z . Обладает ли таким же свойством функция $w = z^2$?

5. Изучить свойства непрерывности дробно-линейной функции (11) на множестве точек расширенной комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\left| z + \frac{b_1}{b_0} \right| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $b_0 \neq 0$. Является ли эта функция равномерно непрерывной на расширенной комплексной плоскости с выключенной точкой $z = -\frac{b_1}{b_0}$?

6. Проверить непрерывность рациональной функции $w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ в тех точках z комплексной плоскости, в которых $Q_m(z) \neq 0$.
7. Показать, что функция $w = |z|^m z^n$, где m и n — неотрицательные целые числа, непрерывна в каждой точке z комплексной плоскости.
8. Вычислить радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^{2k}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} k e^{1/k} z^k, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{4k}}{(2k)!}.$$

9. Показать, что требование абсолютной сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в одной граничной точке его круга сходимости $|z| < R$ влечет за собой абсолютную и равномерную сходимость этого ряда в замкнутом круге $|z| \leq R$.

10. Показать, что ряд, полученный умножением на самого себя ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$, сходится.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Понятие аналитической функции

1. Моногенность. Условия Коши—Римана. Рассмотрим заданную в области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ однозначную функцию

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Пусть точки z и $z + \Delta z$ обе принадлежат D . Разность $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta w = \Delta u + i \Delta v$ будем называть *приращением* функции w , соответствующим *приращению* $\Delta z \neq 0$ независимого переменного z .

Если существует предел (конечный) отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, один и тот же при любом стремлении Δz к нулю, то этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и ее принято обозначать $f'(z)$, т. е.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z). \quad (1)$$

Функция $f(z)$, имеющая производную в точке $z \in D$, называется *моногенной* в этой точке.

Равенство (1) равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \right| < \varepsilon,$$

как только $|\Delta z| < \delta$. Отсюда сразу следует непрерывность в точке z моногенной в точке z функции $f(z)$.

Когда Δz принимает действительные и чисто мнимые значения $\Delta z = \Delta x$ и $\Delta z = i \Delta y$ соответственно, для производной моногенной в точке z функции $f(z)$ будем иметь

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из равенств (2) заключаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{CR})$$

Следовательно, действительная и мнимая части моногенной в точке z функции $w=f(z)$ имеют в этой точке частные производные первого порядка, которые связаны между собой равенствами (CR).

Равенства (CR) представляют собой условия, необходимые для моногенности функции $w=f(z)$ в точке z . Эти условия принято называть условиями Коши—Римана.

Легко показать, что выполнение условий (CR) в точке z при дополнительном требовании существования полных дифференциалов у функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ является достаточным для моногенности функции $w=u+iv$ в точке z .

В самом деле, существование полных дифференциалов du и dv в точке z равносильно равенствам

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \eta_1(x, y, \Delta x, \Delta y), \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \eta_2(x, y, \Delta x, \Delta y), \end{aligned} \quad (3)$$

где величины η_1 и η_2 являются бесконечно малыми высшего порядка по отношению к $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

Вводя обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4)$$

равенства (3) можно записать в виде

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + \eta_1 + i\eta_2. \quad (5)$$

Используя комплексную запись

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (6)$$

условий (CR) и принимая во внимание равенство

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z} = 0,$$

из (5) получим, что существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} = f'(z), \quad (7)$$

и тем самым моногенность функции $f(z)$ в точке z доказана.

Приращение Δw моногенной в точке z функции w в силу (5) и (6) имеет вид

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \eta_1 + i\eta_2. \quad (8)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (8) называется *дифференциалом* моногенной в точке z функции, и для него принято обозначение

$$dw = f'(z) \Delta z. \quad (9)$$

Дифференциал моногенной в точке z функции w является *линейной* по отношению к Δz и *главной* [при $f'(z) \neq 0$] частью приращения Δw .

Ввиду того, что функция $w = f(z) = z$ моногенна всюду на комплексной плоскости и

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1,$$

в обозначении (9) можно написать $dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z$ и, следовательно,

$$dw = f'(z) dz. \quad (10)$$

Запись (10) для дифференциала моногенной в точке $z \in D$ функции $w = f(z)$ позволяет производную $f'(z)$ представить в виде отношения дифференциалов $f'(z) = \frac{dw}{dz}$, что находится в полном соответствии с обозначениями (4), если учесть равенство (6).

2. Определение аналитической функции. Заданная в области D однозначная функция $w = f(z)$ называется *аналитической* или *голоморфной*, если она моногенна в каждой точке этой области.

Выражение *функция $f(z)$ аналитична в точке z* мы употребляем в том смысле, что $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Из определения аналитичности следует, что для аналитичности однозначной в области D функции $w = f(z)$ необходимо, а при дополнительных предположениях суще-

ствования полных дифференциалов du , dv и достаточно выполнение условий (CR) всюду в области D .

Предположим, что однозначные в области D функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ монотонны в точке z . Так же, как при рассмотрении действительных дифференцируемых функций в курсе математического анализа, легко показать, что наряду с $f(z)$ и $\varphi(z)$ монотонными являются и функции $f(z) \pm \varphi(z)$, $f(z) \cdot \varphi(z)$ и $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ при $\varphi(z) \neq 0$, причем

$$(f \pm \varphi)' = f' \pm \varphi', \quad (f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi', \quad \left(\frac{f}{\varphi}\right)' = \frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2}. \quad (11)$$

Кроме того, если однолистная аналитическая функция $w = f(z)$ отображает область D плоскости z на область D_1 плоскости w , а функция $\zeta = \varphi(w)$ аналитична в области D_1 , то сложная функция $\zeta = \varphi[f(z)]$ аналитична в области D , причем

$$\zeta' = \varphi'[f(z)] \cdot f'(z).$$

Принимая во внимание равенства $\frac{d}{dz}(\text{const}) = 0$, $\frac{dz}{dz} = 1$, на основании (11) заключаем, что полином $P_n(z)$ и дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $z \neq -\frac{d}{c}$, аналитичны и

$$P'_n(z) = \left(\sum_{k=0}^n a_k z^{n-k} \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k z^{n-k-1},$$

$$\left(\frac{az+b}{cz+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, \quad z \neq -\frac{d}{c}.$$

Покажем теперь, что сумма $s(z)$ степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в круге сходимости $|z| < R$, $R > 0$, является аналитической функцией.

Сначала заметим, что если $R > 0$ является радиусом сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то радиус сходимости ряда

$$s_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1} \quad (12)$$

тоже равен R . Это следует из очевидного равенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (k |a_k|)^{\frac{1}{k-1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k-1}} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

и из формулы (22) Коши—Адамара гл. II.

Из абсолютной сходимости ряда (12) при $|z| < R$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (13)$$

для всех $n \geq N$, если только $r < R$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{s(z + \Delta z) - s(z)}{\Delta z} - s_0(z) \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k [(z + \Delta z)^{k-1} + (z + \Delta z)^{k-2} z + \dots + z^{k-1} - k z^{k-1}] \right| + \\ & + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k [(z + \Delta z)^{k-1} + (z + \Delta z)^{k-2} z + \dots + z^{k-1}] \right| + \\ & + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right|. \quad (14) \end{aligned}$$

В предположениях, что величина $|\Delta z|$ достаточно мала и $|z| < r$, $|z + \Delta z| < r$, в силу непрерывности первого слагаемого в правой части (14) и неравенства (13) мы можем написать

$$\left| \frac{s(z + \Delta z) - s(z)}{\Delta z} - s_0(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Тем самым доказаны моногенность $s(z)$ при $|z| < R$ и справедливость равенства $s'(z) = s_0(z)$, т. е. *степенной*

ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *внутри его круга сходимости можно почленно продифференцировать, причем сумма продифференцированного ряда равна производной суммы исходного ряда.*

На основании этого утверждения убеждаемся в аналитичности функций e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ всюду на

комплексной плоскости. При этом имеем

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\(\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z, \\(\sin z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z, \\(\operatorname{ch} z)' &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z, \\(\operatorname{sh} z)' &= \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z.\end{aligned}$$

3. Конформное отображение. Рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (15)$$

удовлетворяющую в точке $z_0 \in D$ условию

$$f'(z_0) \neq 0. \quad (16)$$

Это условие равносильно тому, что в точке z_0 якобиан

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2$$

отличен от нуля.

Следовательно, в силу известной теоремы о неявных функциях, доказанной в курсе математического анализа в предположении непрерывности первых производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (ниже, в гл. IV, § 2.3, будет доказано, что действительная и мнимая части аналитической функции имеют производные всех порядков), система равенств $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в некоторой окрестности точки z_0 однозначно обращается. Другими словами, каждая точка $z_0 \in D$, в которой выполняется условие (16), обладает окрестностью однолистности $f(z)$, причем обратная функция $z = f^{-1}(w)$ аналитична в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ и, как легко видеть,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)} = [f^{-1}(w)]'. \quad (17)$$

Это вовсе не означает, что если $f'(z) \neq 0$ всюду в области D , то в этой области $f(z)$ обязательно будет однолистной. Например, функция $w = z^2$ аналитична в области D : $1/2 < |z| < 1$, $0 < \arg z < 3\pi/2$ и в ней $w' = 2z \neq 0$, но эта функция область D отображает на кольцо $1/4 < |w| < 1$, каждая точка верхней половины которого имеет два прообраза.

Пусть γ — проходящая через точку z_0 гладкая дуга Жордана с уравнением $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. В точке $z_0 = z(t_0)$ имеем

$$z'(t_0) \neq 0. \quad (18)$$

Образом γ при отображении (15) является проходящая через точку w_0 дуга $\Gamma = f(\gamma)$, уравнение которой имеет вид $w = f[z(t)]$, причем $w'(t) = f'(z) \cdot z'(t)$ и в силу (16) и (18)

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \neq 0. \quad (19)$$

Условие (19) означает, что дуга Γ в точке w_0 имеет касательную.

На основании (19) заключаем, что с точностью до слагаемого $2k\pi$

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0), \quad (20)$$

т. е. аргумент $f'(z_0)$ равен углу поворота дуги γ в точке z_0 при отображении (15).

Пусть теперь γ_1 — отличная от γ гладкая дуга Жордана $z_1 = z_1(\tau)$, $\alpha_1 \leq \tau \leq \beta_1$, проходящая через точку z_0 , а $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ — ее образ $w_1 = f[z_1(\tau)]$, причем $z_1(\tau_0) = z_0$.

Повторяя приведенное выше рассуждение, получим

$$\arg f'(z_0) = \arg w'_1(\tau_0) - \arg z'_1(\tau_0). \quad (21)$$

Из равенств (20) и (21) имеем

$$\arg w'(t_0) - \arg w'_1(\tau_0) = \arg z'(t_0) - \arg z'_1(\tau_0),$$

а это означает, что угол между дугами γ и γ_1 в точке z_0 равен углу между их образами Γ и Γ_1 в точке $w_0 = f(z_0)$. Другими словами: в каждой точке z_0 , в которой $f'(z_0) \neq 0$, при отображении (15) имеет место сохранение (консерватизм) углов (как по величине, так и по направлению их отсчета).

Ввиду того, что $|dz_0| = \sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2} dt = ds_0$ и $|dw_0| = \sqrt{(u'_0)^2 + (v'_0)^2} dt = ds_0$ являются элементами длин дуг γ

и Γ в точках z_0 и w_0 соответственно и $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_0} = f'(z_0)$, имеем

$$|f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0},$$

т. е. модуль производной аналитической функции в точке z_0 при выполнении условия (16) совпадает с искажением масштаба (элемента длины) при отображении (15) и это искажение одно и то же по всем направлениям, выходящим из точки z_0 .

Топологическое отображение (15) области D плоскости z на область D_1 плоскости w , при котором в каждой точке $z \in D$ имеют место консерватизм углов и постоянство искажения масштаба, называется *конформным*.

На основании приведенного выше рассуждения заключаем, что отображение, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$, является конформным в достаточно малой окрестности каждой точки z , в которой $f'(z) \neq 0$.

Из геометрического смысла аргумента и модуля производной непосредственно следует справедливость обратного утверждения: если при отображении, осуществляемом однозначной функцией (15), в каждой точке $z \in D$ имеют место консерватизм углов и постоянство искажения масштаба, то функция $w = f(z)$ аналитична, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в D .

Пусть функция $f(z)$ аналитична и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D . Рассмотрим отображение $w = \bar{f}(z)$. Очевидно, что вблизи каждой точки $z \in D$ это отображение является топологическим, причем имеет место постоянство искажения масштаба, а углы сохраняются по величине, но направление их отсчета меняется на обратное. Такое отображение называется *антиконформным* или *конформным второго рода*, а функция $w = \bar{f}(z)$ — *антианалитической*.

Если действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части функции $f(z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и при отображении $w = f(z)$ в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов, то $f(z)$ аналитична и $f'(z) \neq 0$.

В самом деле, в силу (5) в каждой точке $z \in D$ имеем

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} e^{-2i\varphi}, \quad \varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z. \quad (22)$$

Так как по условию $\arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ при фиксированном z не должен зависеть от φ , из (22) получаем $w_z = 0$, что и доказывает справедливость нашего утверждения.

Предположим теперь, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области D и в каждой точке $z \in D$ имеет место постоянство искажения масштаба, т. е. $\left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \neq 0$ и не зависит от φ . На основании (22) имеем

$$\left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) e^{2i\varphi} \right],$$

откуда сразу следует, что $\frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0$, т. е. либо $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$, либо $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \neq 0$. В первом случае $f(z)$ аналитична, а во втором — антианалитична.

Главная линейная часть $w^* - w_0$ приращения аналитической в области D функции $f(z)$:

$$w^* - w_0 = f'(z_0)(z - z_0) \quad (23)$$

обладает тем свойством, что при $f'(z_0) \neq 0$ она круг $|z - z_0| \leq r$ переводит в круг $|w^* - w_0| \leq \rho = |f'(z_0)|r$ с сохранением направления обхода. Это следует из того, что в силу (23)

$$|w^* - w_0| = |f'(z_0)| |z - z_0|, \\ \arg(w^* - w_0) = \arg f'(z_0) + \arg(z - z_0).$$

Обратно, если $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны и главная линейная часть приращения функции $f(z)$:

$$w^* - w_0 = f_{z_0}(z - z_0) + f_{\bar{z}_0}(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad (24) \\ f_{z_0} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z_0}, \quad f_{\bar{z}_0} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}_0},$$

обладает тем свойством, что она круг с центром в точке z_0 переводит в круг с центром в точке $w_0 = f(z_0)$, то $f(z)$ либо аналитична, либо антианалитична.

В самом деле, из (24) имеем

$$z - z_0 = \frac{\bar{f}_{z_0}(w^* - w_0) - f_{\bar{z}_0}(\bar{w}^* - \bar{w}_0)}{|f_{z_0}|^2 - |f_{\bar{z}_0}|^2},$$

и, следовательно,

$$|z - z_0|^2 = \frac{(|f_{z_0}|^2 + |\bar{f}_{\bar{z}_0}|^2) |\omega^* - \omega_0|^2 - 2 \operatorname{Re} [f_{z_0} \bar{f}_{\bar{z}_0} (\bar{\omega}^* - \bar{\omega}_0)^2]}{(|f_{z_0}|^2 - |\bar{f}_{\bar{z}_0}|^2)^2}. \quad (25)$$

Так как по условию окружность $|z - z_0| = r$ переводится в окружность $|\omega^* - \omega_0| = \rho$, из (25) мы должны иметь $f_{z_0} \bar{f}_{\bar{z}_0} = 0$, т. е. либо $\bar{f}_{\bar{z}_0} = 0$ и $f_{z_0} \neq 0$, либо $f_{z_0} = 0$ и $\bar{f}_{\bar{z}_0} \neq 0$. Тем самым справедливость нашего утверждения доказана.

Если однолистная функция $f(z)$ обладает тем свойством, что ее главная линейная часть (24) переводит эллипсы плоскости z в эллипсы плоскости ω^* , то отображение $\omega = f(z)$ называется *квазиконформным*.

§ 2. Обращение некоторых элементарных функций и понятие римановой поверхности

1. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. В дальнейшем мы убедимся в том, что если $f(z)$ — заданная в области D плоскости переменного z однолистная аналитическая функция, то $f'(z) \neq 0$ всюду в D (см. § 3.3 гл. V).

В предыдущем параграфе было показано, что если $f'(z_0) \neq 0$, то функция $\omega = f(z)$ осуществляет конформное отображение некоторой окрестности точки z_0 на определенную односвязную область, содержащую точку $\omega_0 = f(z_0)$. Отсюда, если вспомнить, что при непрерывном отображении связность множества сохраняется, следует справедливость утверждения: *однолистная аналитическая функция $\omega = f(z)$ область D своего задания конформно отображает на определенную область D_1 плоскости ω , причем обратная функция $z = f^{-1}(\omega)$ аналитична в D_1 .*

Когда речь идет об обращении отличной от постоянной аналитической функции, в первую очередь следует определить ее область однолистности.

2. Дробно-линейная функция. Легко видеть, что *необходимое и достаточное условие однолистности дробно-линейной функции*

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} \quad (26)$$

заключается в том, что

$$bc - ad \neq 0. \quad (27)$$

В самом деле, при различных значениях z_1 и z_2 переменного z для разности между соответствующими значениями w_1 и w_2 функции w в силу (26) имеем

$$w_2 - w_1 = \frac{(bc - ad)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}. \quad (28)$$

Следовательно, выполнение условия (27) обеспечивает однозначную обратимость отображения (26) на расширенной плоскости комплексного переменного z , причем

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}. \quad (29)$$

В частности, при $c = 0$, $d = 1$ из (27) получаем

$$a \neq 0. \quad (30)$$

Условие (30) обеспечивает однолиственность линейной функции $w = az + b$, обратной которой является функция

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}.$$

При рассмотрении дробно-линейной функции (26) случай одновременного обращения в нуль постоянных c и d , очевидно, исключается. Во всех же остальных случаях нарушение условия (27) равносильно тому, что функция w постоянна и, следовательно, не имеет области однолиственности.

3. Степенная функция. Для того чтобы найти область однолиственности степенной функции

$$w = z^n, \quad (31)$$

где n — натуральное число, рассмотрим значения $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ и $|z_2| = |z_1|e^{i\varphi_2}$ независимого переменного z . Так как для разности соответствующих значений w_1 и w_2 функции w имеем

$$w_1 - w_2 = |z_1|^n (e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}),$$

то отображение (31) заведомо однолистно внутри каждого угла раствора $\frac{2\pi}{n}$ с вершиной в точке $z = 0$.

Разделим комплексную плоскость z на n областей

$$D_k: \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Функция $w = z^n$ каждый луч $\arg z = c$ переводит в луч $\arg w = nc$.

Так как $w' = nz^{n-1} \neq 0$ при $z \in D_k$, то каждая из D_k , как область однолиственности функции z^n , при $w = z^n$ конформно отображается на область E , представляющую собой плоскость w , из которой удалены точки луча $w \geq 0$, или, как еще принято говорить, *плоскость w , разрезанную вдоль луча $w \geq 0$* . При этом лучи $\arg z = \frac{2k\pi}{n}$ и $\arg z = \frac{2(k+1)\pi}{n}$ переходят соответственно в верхний и нижний края разреза.

Обратную функцию $z = w^{1/n}$, определенную в E и принимающую значения из D_k , обозначим через $z_k = (w^{1/n})_k$. Очевидно, что

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg w}{n} + \frac{2k\pi i}{n}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi.$$

Рассматривать каждую из величин z_k как отдельную функцию нецелесообразно по той простой причине, что, например, в области D : $\pi/n < \arg z < 3\pi/n$ обратная функция $z = w^{1/n}$ при $\pi/n < \arg z < 2\pi/n$ совпадает с z_0 , а при $2\pi/n < \arg z < 3\pi/n$ — с z_1 . Поэтому z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, естественно называть *ветвями* многозначной функции $z = w^{1/n}$. Каждая ветвь z_k в области E является аналитической функцией, причем в силу (17)

$$\frac{dz_k}{dw} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \left(w^{\frac{1}{n}-1} \right)_k.$$

При отображении (31) лишь точки $z = 0$, $w = 0$ и $z = \infty$, $w = \infty$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Каждой же точке w , отличной от нуля и бесконечности, ставится в соответствие n значений z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому отображение (31) при $n > 1$ естественно называть *n -листным*. Для того чтобы раскрыть сущность такого названия и наглядно представить отображение (31), рассмотрим наложенные друг на друга n листов области E : $E_0, \dots, E_{n-1}$, где область E_k поставлена в соответствие области D_k .

Совершим отождествление или, как еще говорят, *склеивание* нижнего края разреза E_0 с верхним краем разреза E_1 , свободного нижнего края разреза E_1 с верхним краем разреза E_2 и т. д., свободного нижнего края разреза E_{n-1} со свободным верхним краем разреза E_0 . Полу-

ченная n -листная область называется *римановой поверхностью* функции $z = w^{1/n}$. Соотношение (31) осуществляет взаимно однозначное соответствие между расширенной плоскостью комплексного переменного z и римановой поверхностью функции $z = w^{1/n}$, которое является конформным всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Образы этих точек $w = 0$ и $w = \infty$ обладают тем свойством, что при обходе вокруг них против часовой стрелки m раз, исходя из фиксированной точки w , при возвращении к этой же точке происходит переход от ветви z_k на ветвь z_{k+m} . Заметим, что при $m = n$ имеем $z_{k+n} = z_k$. По этой причине точки $w = 0$ и $w = \infty$ принято называть *алгебраическими точками ветвления порядка $n-1$ функции $z = w^{1/n}$* .

4. Экспоненциальная функция. Так как из равенства $e^{z_1} = e^{z_2}$ следует, что $z_1 = z_2 + 2k\pi i$, то областью однолистности функции e^z является любая полоса ширины 2π , параллельная действительной оси. Разделим плоскость z на совокупность полос

$$D_k: 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

При отображении

$$w = e^z \quad (32)$$

прямая $\operatorname{Im} z = c$ переходит в луч $\arg w = c$. Ввиду того, что $(e^z)' = e^z$, соотношение (32) представляет собой конформное отображение области D_k на область E , рассмотренную выше, причем прямые $\operatorname{Im} z = 2k\pi$ и $\operatorname{Im} z = 2(k+1)\pi$, составляющие границу области D_k , переходят соответственно в верхний и нижний края разреза E .

Равенство (32) равносильно двум равенствам: $|w| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg w = \operatorname{Im} z + 2k\pi$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Следовательно, для обратной функции $z = f^{-1}(w)$ в рассматриваемом случае в каждой из областей D_k имеем $z_k = \log |w| + i \arg w + 2k\pi i$, $0 < \arg w < 2\pi$. По этой причине $z = f^{-1}(w)$ называется *логарифмической функцией*, и для нее мы будем пользоваться обозначением $z = \log w$.

Так как ветви

$$z_k = \log |w| + i \arg w + 2k\pi i, \\ 0 < \arg w < 2\pi, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

все различные, функция $z = \log w$ бесконечнозначна или, как еще говорят, функция $w = e^z$ *бесконечнолистка*.

Рассматривая бесконечное множество листов $E: \dots, E_{-1}, E_0, E_1, \dots$, наложенных друг на друга, и склеивая

края разрезов E_k и E_{k-1} , $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, таким же образом, как при построении римановой поверхности функции $z = w^{1/n}$, получим *риманову поверхность* функции $z = \log w$, которая, очевидно, бесконечнолистка.

Плоскость z функцией $w = e^z$ конформно отображается на полученную риманову поверхность с выключенной точкой $w = 0$. Так как при обходе вокруг точки $w = 0$ любое число раз все время происходит переход на новые ветви функции $z = \log w$, то эта точка называется *трансцендентной точкой ветвления*. Очевидно, что трансцендентной точкой ветвления является и $w = \infty$.

Для любого комплексного показателя α степенную функцию $w = z^\alpha$ определим как $w = e^{\alpha \log z}$. Точно так же показательную функцию $w = \alpha^z$ с любым комплексным основанием α определим как $w = e^{z \log \alpha}$.

5. Функция $\sin z$. Рассмотрим теперь отображение

$$w = \sin z. \quad (33)$$

Из равенства

$$w_1 - w_2 = \sin z_1 - \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2}$$

очевидно, что областями однолиственности функции $\sin z$ являются полосы

$$D_k: k\pi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

а также верхние полуполосы

$$\begin{aligned} & (2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ & k = \dots, -1, 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

и нижние полуполосы

$$\begin{aligned} & (2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \\ & k = \dots, -1, 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Равенство (33) при $u + iv = w$ и $x + iy = z$ равносильно равенству

$$u + iv = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

или, что то же самое,

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y. \quad (34)$$

Из (34) имеем

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1. \quad (35)$$

Каждая прямая $x=c \neq 0$ полосы D_0 при отображении (33) переходит в гиперболу (35), причем в соответствии с тем, будет ли $-\pi/2 < c < 0$ или $0 < c < \pi/2$, прямые $x=c$ переходят в левую или правую ветвь гиперболы (35), а прямая $x=0$ переходит в прямую $u=0$. Кроме того, границы $x=-\pi/2$ и $x=\pi/2$ полосы D_0 переходят соответственно в лучи $-\infty < w \leq -1$ и $1 \leq w < +\infty$.

Отсюда, принимая во внимание то обстоятельство, что $(\sin z)' = \cos z \neq 0$ всюду в области D_0 , заключаем, что функция $w = \sin z$ область D_0 конформно отображает на область $E^{(1)}$, которая совпадает с плоскостью w , разрезанной вдоль лучей: $-\infty < w \leq -1$ и $1 \leq w < \infty$, причем верхним (нижним) полупрямым $x=-\pi/2$ и $x=\pi/2$ соответствуют верхние (нижние) края разрезов $-\infty < w \leq -1$ и $1 \leq w < \infty$.

В каждой области однолиственности функции $\sin z$ отображение (33) однозначно обращается.

Функцию $z = f^{-1}(w)$, обратную функции $w = \sin z$, принято обозначать через $\arcsin w$.

Из равенства (33) имеем

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{iz} = iw \pm \sqrt{1-w^2},$$

или

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i} \log(iw \pm \sqrt{1-w^2}). \quad (36)$$

На основании равенства (36) заключаем, что функция $z = \arcsin w$ многозначна. Обозначим через $z_0 = (\arcsin w)_0$ соответствующую области D_0 ветвь этой функции. Она аналитична в области $E^{(1)}$, причем

$$\frac{dz_0}{dw} = \frac{1}{(\sin z)'} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Принимая во внимание равенство $\sin(z+k\pi) = (-1)^k \sin z$, заключаем, что при четном (нечетном) k соответствующая полосе D_k ветвь $z_k = (\arcsin w)_k$ верхнюю (нижнюю) половину области $E^{(1)}$ конформно отображает на верхнюю (нижнюю) половину полосы D_k и нижнюю половину

области $E^{(1)}$ — на нижнюю (верхнюю) половину полосы D_k . Исходя из этого, легко построить риманову поверхность функции $z = \arcsin w$.

Обозначим через $E_k^{(1)}$ область определения ветви $z_k = (\arcsin w)_k$. Пусть $E_k^{(1)+}$ и $E_k^{(1)-}$ — верхняя и нижняя полуплоскости области $E_k^{(1)}$ соответственно.

Сначала построим часть римановой поверхности функции $z = \arcsin w$, соответствующую полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

С этой целью представим себе множества наложенных друг на друга полуплоскостей $E_{2k}^{(1)+}$ и $E_{2k+1}^{(1)-}$ соответственно, когда k принимает всевозможные целые значения.

Переходу из верхней половины полосы D_0 в верхнюю половину полосы D_1 через полупрямую $x = \pi/2$, $y > 0$ соответствует склеивание $E_0^{(1)+}$ и $E_1^{(1)-}$ вдоль луча $1 < w < \infty$, а переходу из верхней половины полосы D_1 в верхнюю половину полосы D_2 соответствует склеивание $E_1^{(1)-}$ и $E_2^{(1)+}$ вдоль луча $-\infty < w < -1$. Продолжая этот процесс в обе стороны изменения целочисленного индекса k , получим часть римановой поверхности, соответствующую полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. После этого ясно, как строить вторую часть римановой поверхности, соответствующую полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Для получения полной римановой поверхности функции $z = \arcsin w$ остается склеить вдоль отрезка $-1 \leq w \leq +1$ соответствующие одной и той же полосе D_k листы полученных выше обеих частей римановой поверхности.

Очевидно, что $w = 1$, $w = -1$ и $w = \infty$ являются точками ветвления функции $z = \arcsin w$.

§ 3. Дробно-линейное отображение

1. Редукция невырожденного дробно-линейного отображения к отображениям простейшего вида. В дальнейшем отображение, осуществляемое функцией (26) при выполнении условия (27), будем называть *невырожденным дробно-линейным отображением*.

Очевидно, что невырожденное линейное отображение

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \quad (37)$$

получается в результате суперпозиции трех простейших отображений:

$$t = |a|z, \quad (38)$$

$$\tau = e^{i \arg a} t, \quad (39)$$

$$w = \tau + b, \quad (40)$$

из которых (38) является *отображением подобия* (гомотетическим отображением) с центром подобия в точке $z=0$ и коэффициентом подобия $|a|$, отображение (39) представляет собой *вращение* вокруг точки $t=0$ с углом поворота $\arg a$, а (40) — *параллельный перенос* в направлении вектора b на расстояние $|b|$.

Следует отметить также, что невырожденное линейное отображение (37) при $a \neq 1$ можно представить в виде $w - z_0 = a(z - z_0)$, где $z_0 = \frac{b}{1-a}$.

Функции $w = |a|z$, $w = e^{i \arg a} \cdot z$ и $w = z + b$ осуществляют конформное отображение расширенной комплексной плоскости z на расширенную комплексную плоскость w . Для конечных значений z это утверждение очевидно, а при $z = \infty$ оно непосредственно получается, если переменные z и w изобразить на сфере Римана. Очевидно, что функция

$$w = \frac{1}{z} \quad (41)$$

конформно отображает расширенную плоскость z на расширенную плоскость w .

Невырожденное дробно-линейное отображение (26) либо редуцируется к линейному отображению $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ при $c=0$, либо оно является результатом последовательно примененных трех отображений:

$$t = \frac{c^2}{bc-ad}z + \frac{cd}{bc-ad}, \quad \tau = \frac{1}{t}, \quad w = \frac{a}{c} + \tau.$$

Последнее заключение следует из тождества

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}, \quad c \neq 0.$$

Так как при отображениях (38), (39), (40) и (41) *окружность (прямая тоже считается окружностью) переходит в окружность*, то этим же свойством обладает невырожденное дробно-линейное отображение (26). При этом следует заметить, что когда точка z описывает окружность в определенном направлении (например, против движения часовой стрелки), то точка w описывает соответствующую окружность также в определенном направлении (против движения часовой стрелки или наоборот).

Матрицу

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

будем называть матрицей дробно-линейного отображения (26). Подставляя выражение

$$z = \frac{a_1 t + b_1}{c_1 t + d_1}$$

в правую часть (26), получим дробно-линейное отображение

$$w = \frac{a_2 t + b_2}{c_2 t + d_2}$$

с матрицей

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix},$$

т. е. в результате последовательного применения невырожденных дробно-линейных отображений (суперпозиций) получается невырожденное дробно-линейное отображение.

Следовательно, множество всех невырожденных дробно-линейных отображений относительно введенной выше ассоциативной операции является группой, в которой единичный элемент — тождественное отображение $w = z$, а каждый элемент (26) имеет своим обратным элемент (29).

2. Симметрия относительно прямой и окружности. В конце § 3 гл. I (см. упр. 5) было введено понятие симметрии относительно действительной оси и относительно окружности.

Точки z_1 и z_2 , лежащие на одном и том же луче, выходящем из центра окружности C_{z_0} : $|z - z_0| = R$, называются *взаимно симметричными* относительно этой окружности, если $|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = R^2$. Лежащие на одном и том же перпендикуляре к данной прямой точки z_1 и z_2 , равноудаленные от нее, также называются *взаимно симметричными* относительно этой прямой.

Очевидно, что функции $w = \bar{z}$ и $w = R^2/\bar{z}$ осуществляют отображение симметрии относительно действительной оси $\text{Im } z = 0$ и относительно окружности $|z| = R$ соответственно. Отсюда заключаем, что отображения симметрии относительно прямой $z = z_0 + \xi e^{i\theta}$, $-\infty < \xi < \infty$, и относительно окружности $|z - z_0| = R$ имеют вид соответ-

венно

$$w = e^{2i\theta} \bar{z} + z_0 - \bar{z}_0 e^{2i\theta} \quad (42)$$

и

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (43)$$

Из формулы (42) следует, что вращение $w = e^{i \arg a} z$ является результатом суперпозиции отображений симметрии $w = e^{2i\theta} \bar{t}$ и $t' = e^{2i\theta} \bar{z}$, где $\theta - \theta_1 = \frac{1}{2} \arg a$, а параллельный перенос $w = z + b$ — отображений симметрии $w = e^{2i\theta} \bar{t} + k \frac{b}{|b|} - k \frac{\bar{b}}{|b|} e^{2i\theta}$ и $t = e^{2i\theta} \bar{z} + k_1 \frac{b}{|b|} - k_1 \frac{\bar{b}}{|b|} e^{2i\theta}$, где $\theta = \frac{\pi}{2} + \arg b$, k и k_1 — действительные числа, причем $k - k_1 = |b|/2$.

Очевидно также, что отображение подобия $w = |a|z$ есть результат суперпозиции двух симметрий: $w = R^2/\bar{t}$ и $t = R_1^2/\bar{z}$, где $R^2/R_1^2 = |a|$, а отображение $w = 1/\bar{z}$ — симметрий $w = \bar{t}$, $t = 1/\bar{z}$.

Из (42) и (43) следует, что суперпозиция двух отображений симметрии является невырожденным дробно-линейным отображением. Следовательно, в результате суперпозиции любого *четного* числа отображений симметрии получается невырожденное дробно-линейное отображение и, наоборот, любое невырожденное дробно-линейное отображение является суперпозицией *четного* числа отображений симметрии.

3. Основные свойства невырожденного дробно-линейного отображения. Невырожденное дробно-линейное отображение (26) содержит три комплексных параметра, представляющие собой отношение трех из коэффициентов a, b, c, d к четвертому (отличному от нуля). Эти параметры однозначно определяются из требования, чтобы три заданные точки z_1, z_2, z_3 плоскости z перешли в три заданные точки w_1, w_2, w_3 плоскости w .

В самом деле, вычисляя разности $w - w_1$, $w - w_2$, $w_3 - w_1$, $w_3 - w_2$, где

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}, \quad k = 1, 2, 3,$$

и принимая во внимание условие (27), легко убедимся в справедливости равенства

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (44)$$

Выражение $\frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ в геометрии носит название *ангармонического отношения* четырех точек z, z_3, z_1, z_2 . Равенство (44) означает инвариантность ангармонического отношения четырех точек при невырожденном дробно-линейном отображении.

Разрешая (44) относительно w , получим искомое дробно-линейное отображение. Оно переводит три точки z_1, z_2, z_3 и проходящую через них окружность C_z соответственно в три точки w_1, w_2, w_3 и проходящую через них окружность C_w . Тройки точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 определяют направления обхода на C_z и C_w соответственно, причем области, остающиеся при этих обходах слева (справа), соответствуют друг другу при отображении (44). Последнее утверждение является непосредственным следствием конформности дробно-линейного отображения (углы между касательной, направленной в сторону обхода, и внутренней нормалью в каждой точке C_z и C_w равны как по величине, так и по направлению отсчета). Отсюда, принимая во внимание, что при отображении (26) в случае действительных a, b, c, d действительная ось $\text{Im } z = 0$ переходит в действительную ось $\text{Im } w = 0$ и при $\text{Im } z = 0$ знак $\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ совпадает со

знаком $ad-bc$, в свою очередь заключаем, что *при невырожденном дробно-линейном отображении (26) с действительными коэффициентами верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$ переходит в верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, если $ad-bc > 0$, и верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$ переходит в нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$, если $ad-bc < 0$.*

В силу известной из планиметрии теоремы о квадрате длины касательной к окружности от точки касания до данной точки на касательной заключаем, что взаимно симметричные относительно окружности C_{z_0} : $|z-z_0|=R$ (или относительно данной прямой) точки z_1 и z_2 являются центрами пучка ортогональных к C_{z_0} окружностей и, следовательно, *взаимная симметричность этих точек является свойством, инвариантным при дробно-линейных отображениях.*

Точки $w=0$ и $w=\infty$ являются симметричными относительно окружности $|w|=1$. Так как эти точки дробно-линейной функцией (26) поставлены в соответствие точкам $z=-b/a$ и $z=-d/c$, то при требовании, чтобы действительная ось $\text{Im } z = 0$ переходила в окружность $|w|=1$,

мы должны иметь: а) $-b/a = z_0$, $-d/c = \bar{z}_0$ — из-за симметричности точек $-b/a$ и $-d/c$ относительно прямой $\text{Im } z = 0$ и б) $a/c = e^{i\theta}$ в силу равенств

$$|\omega| = \left| \frac{a}{c} \right| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| = \left| \frac{a}{c} \right| = 1, \quad \text{Im } z = 0.$$

Следовательно, функция

$$\omega = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (45)$$

при $\text{Im } z_0 > 0$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на круг $|\omega| < 1$. Если же $\text{Im } z_0 < 0$, то эта функция конформно отображает нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < 0$ на круг $|\omega| < 1$.

Рассуждая аналогично и требуя, чтобы при отображении (26) окружность $|z| = 1$ перешла в окружность $|\omega| = 1$, получим

$$-\frac{b}{a} = z_0, \quad -\frac{d}{c} = \frac{1}{z_0},$$

$$|\omega| = \left| \frac{a}{c} \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} \right| = \left| \frac{a}{c} \bar{z}_0 \right| \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = 1, \quad -\frac{a}{c} \bar{z}_0 = e^{i\theta},$$

т. е.

$$\omega = -\frac{a}{c} \bar{z}_0 \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}. \quad (46)$$

При $|z_0| < 1$ функция (46) конформно отображает круг $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$, а при $|z_0| > 1$ эта же функция конформно отображает область $|z| > 1$ на круг $|\omega| < 1$.

Каждая из дробно-линейных функций, отображающих конформно соответственно верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \omega > 0$, верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на круг $|\omega| < 1$ и круг $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$, содержит по три действительных параметра, которые единственным образом определяются, например, из требования, чтобы три заданные граничные точки z_1, z_2, z_3 перешли в три заданные граничные точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

4. Понятие неподвижной точки и классификация невырожденных дробно-линейных отображений. Неподвижными точками дробно-линейного отображения (26) назы-

ваются точки z , удовлетворяющие условию

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

или, что то же самое,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \quad (47)$$

При $c \neq 0$ из квадратного уравнения (47) получаем явное выражение для неподвижных точек z_1 и z_2 :

$$z_1, z_2 = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (48)$$

При $c=0$ неподвижными являются точки $z_1 = \frac{b}{d-a}$ и $z_2 = \infty$. Если же $b=c=0$ и $a=d$, то отображение (26) является тождественным $w=z$, т. е. все точки плоскости z неподвижны.

При $z_1 = z_2$ неподвижная точка называется *кратной*. В силу (48) условием кратности неподвижной точки является равенство $(a-d)^2 + 4bc = 0$. При $c=0$ из последнего равенства получаем $a=d$, а это означает, что $z = \infty$ является кратной неподвижной точкой параллельного переноса $w = z + b/d$.

В силу (44) дробно-линейное отображение с двумя различными неподвижными точками z_1 и z_2 имеет вид

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = k \frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad z_1 \neq \infty, \quad z_2 \neq \infty, \quad (49)$$

или

$$w - z_1 = k_1 (z - z_1), \quad z_2 = \infty, \quad (50)$$

где коэффициенты

$$k = \frac{w_3 - z_1}{w_3 - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad k_1 = \frac{w_3 - z_1}{z_3 - z_1}$$

не зависят от выбора z_3 при условии, что $w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$. Величины k и k_1 легко выразить через a, b, c и d , если наряду с (48) учесть, что $w_3 = b/d$ при $z_3 = 0$.

Отображение (49) [(50)] называется *гиперболическим*, *эллиптическим* или *локсодромическим* в зависимости от того, будет ли $k > 0$ [$k_1 > 0$], $k = e^{i\theta}$ [$k_1 = e^{i\theta}$], $\theta \neq 2\pi n$, или $k = |k|e^{i \arg k}$, $|k| \neq 1$, $\arg k \neq 2\pi n$, где n — целое число,

Для выяснения геометрического смысла гиперболического и эллиптического отображений рассмотрим два ортогональных семейства окружностей: первое, состоящее из *окружностей Аполлония* $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \rho$, $\rho > 0$, с предельными точками z_1 и z_2 , и второе, состоящее из *окружностей Штейнера*, проходящих через эти же точки. Изображая переменные z и w на одной и той же плоскости и принимая во внимание то обстоятельство, что при отображениях $t = \frac{z-z_1}{z-z_2}$,

$\tau = \frac{w-z_1}{w-z_2}$ окружности Аполлония $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \rho$, $\left| \frac{w-z_1}{w-z_2} \right| = \rho$ переходят в окружности $|t| = \rho$, $|\tau| = \rho$, а окружности Штейнера переходят в прямые, проходящие через точки $t=0$ и $\tau=0$ соответственно, заключаем, что: 1) при гиперболическом отображении каждая окружность Штейнера (и ограниченный ею круг) переходит в себя, а окружности Аполлония перемещаются, и 2) при эллиптическом отображении каждая окружность Аполлония (и ограниченный ею круг) переходит в себя, а окружности Штейнера перемещаются.

При $z_1 = z_2 = z_0$ дробно-линейное отображение называется *параболическим*. Оно имеет вид либо

$$\frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{z-z_0} + b_1, \quad z_0 \neq \infty, \quad b_1 = \frac{2c}{a+d}, \quad (51)$$

либо $w = z + b/d$, $z_0 = \infty$.

Формула (51) получается предельным переходом при $z_1 \rightarrow z_2 = z_0$ из формулы (49), если последнюю записать в виде

$$\frac{1}{w-z_2} = \frac{k}{z-z_2} + \frac{k-1}{z_2-z_1}.$$

Для того чтобы представить геометрически отображение (51), изобразим переменные z и w на одной и той же плоскости. Рассмотрим опять два семейства окружностей: первое, состоящее из окружностей, проходящих через точку z_0 и касающихся в этой точке прямой $z = z_0 + \xi e^{-i \arg b_1}$, $-\infty < \xi < \infty$, и второе, состоящее из окружностей, проходящих через эту же точку и ортогональных окружностям первого семейства. При отображениях $\tau = \frac{1}{w-z_0}$ и $t = \frac{1}{z-z_0}$ окружности первого семейства переходят в прямые, параллельные вектору b_1 , а окружности второго семейства — в прямые, ортогональные век-

тору b_1 . При отображении $\tau = t + b_1$ каждая из прямых, параллельных вектору b_1 , переходит в себя, а ортогональные им прямые перемещаются.

Следовательно, при параболическом отображении каждая окружность первого семейства переходит в себя, а каждая окружность второго семейства переходит в другую определенную окружность этого же семейства.

На основании изложенных в этом и предыдущих параграфах результатов некоторые простые односвязные области, ограниченные прямыми и окружностями, можно конформно отобразить друг на друга при помощи дробно-линейных, показательных, степенных и тригонометрических функций и их суперпозиций.

Обозначим через $\gamma(t)$ значение производной дробно-линейной функции $w(z)$ в неподвижной точке $t = w(t)$:

$$\gamma(t) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{w(z) - w(t)}{z - t} = \lim_{z \rightarrow t} \frac{w - t}{z - t}.$$

Если $|\gamma(t)| > 1$, существует такая окрестность точки t , которой для всех z имеет место неравенство

$$|w - t| > q(t) |z - t|, \quad (52)$$

где $q(t) = |\gamma(t)| - \varepsilon > 1$, а ε — наперед заданное достаточно малое положительное число. В случае, когда $|\gamma(t)| < 1$, в некоторой окрестности точки t всюду будем иметь

$$|w - t| < q(t) |z - t|, \quad (53)$$

где на этот раз $q(t) = |\gamma(t)| + \varepsilon < 1$. В первом случае точка называется *отталкивающей*, а во втором — *притягивающей*. Если же $|\gamma(t)| = 1$, то уже нельзя указать окрестность точки t , в которой всюду имели бы место неравенства (52) или (53). В этом случае неподвижная точка называется *безразличной*.

В силу (49), (50) и (51) имеем соответственно

$$\gamma(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{w - z_1}{z - z_1} = k,$$

$$\gamma(z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{w - z_2}{z - z_2} = \frac{1}{k},$$

$$\gamma(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{w - z_1}{z - z_1} = k_1,$$

$$\gamma(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{1 + b_1(z - z_0)} = 1.$$

Следовательно, неподвижные точки во всех случаях эллиптического и параболического отображений, а также в случае $k=1$ гиперболического отображения являются безразличными. Во всех случаях локсодромического отображения, а также гиперболического отображения при $k \neq 1$, одна неподвижная точка является отталкивающей, а другая — притягивающей.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что функция $w = z\bar{z}$ монотонна лишь при $z=0$, а функция $w = \bar{z}$ нигде не монотонна.

2. Показать, что функция

$$w = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям Коши — Римана в каждой точке z комплексной плоскости и монотонна всюду, кроме точки $z=0$.

3. Проверить выполнение условий (CR) непосредственным вычислением для следующих функций: а) e^z , б) $\sin z$, в) $\cos z$, д) $\operatorname{sh} z$, е) $\operatorname{ch} z$.

4. Построить римановы поверхности для функций: а) $w = \cos z$ и б) $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (функция Жуковского).

5. Как понимать выражения: а) $(-1)^i$, б) $(-1)^{1/2}$, в) i^i ?

6. Отобразить конформно общую часть двух областей $|z-1| > 1$ и $|z-2| < 2$ на единичный круг $|w| < 1$.

7. Найти дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на себя, если известны неподвижные точки $i/2$ и $1+i$ этого отображения.

8. Показать, что если однолистная функция $w = f(z)$ конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на ограниченную область плоскости w , то площадь σ области D вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint_{|z| < 1} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx dy.$$

9. Доказать справедливость формулы Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

для любого комплексного значения n .

10. Показать, что функцию $z = \operatorname{arctg} w$, обратную функции $w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, можно представить в виде

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}.$$

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА КОШИ

§ 1. Комплексное интегрирование

1. Определение интеграла и его основные свойства. На плоскости комплексного переменного z рассмотрим спрямляемую кривую Жордана Γ с концами в точках α , β и заданную на ней непрерывную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Обозначим через $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, фиксированные точки на Γ , следующие друг за другом в положительном направлении, и составим сумму

$$s = \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta z_k, \quad (1)$$

где $\xi_k = \xi_k + i\eta_k$ — определенная точка дуги $\widehat{z_k z_{k+1}}$ кривой Γ , $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $z_0 = \alpha$, $z_{n+1} = \beta$.

Представляя сумму s в виде

$$s = s_1 + is_2 = \sum_{k=0}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + + i \sum_{k=0}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k]$$

и устремляя n к бесконечности при предположении, что $\max_{k=0, 1, \dots, n} |\Delta z_k|$ стремится к нулю, в силу спрямляемости Γ и непрерывности $f(z)$ в пределе получим

$$\lim s_1 = \int_{\Gamma} u dx - v dy, \quad \lim s_2 = \int_{\Gamma} u dy + v dx.$$

Следовательно, в принятых предположениях существует предел суммы s , который называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ* :

$$\lim s = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx. \quad (2)$$

Из (1) очевидно, что наряду с (2) существует и предел суммы $\sum_{k=0}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k+1})$, который принято обозначать в виде

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz,$$

где знак «—» над Γ означает, что интегрирование происходит в обратном направлении. Очевидно, что

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

В том случае, когда Γ — замкнутая спрямляемая кривая Жордана, запись (2) означает, что интегрирование происходит в положительном направлении, т. е. в направлении, оставляющем слева конечную область, ограниченную контуром Γ .

Из определения интеграла (2) непосредственно вытекают следующие его свойства:

1) Если $f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, m$, — заданные на Γ непрерывные функции и c_k , $k = 1, 2, \dots, m$, — заданные постоянные, то

$$\int_{\Gamma} \sum_{k=1}^m c_k f_k(z) dz = \sum_{k=1}^m c_k \int_{\Gamma} f_k(z) dz. \quad (3)$$

2) Если спрямляемая кривая Жордана Γ состоит из m кусков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) dz, \quad (4)$$

причем предполагается, что интегрирование по каждому Γ_k происходит в направлении, порождаемом направлением интегрирования на Γ .

В случае, когда совокупность Γ попарно непересекающихся замкнутых спрямляемых кривых Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ является границей $(m+1)$ -связной области, причем $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ лежат внутри конечной области, ограниченной кривой Γ_0 , и $f(z)$ непрерывна на Γ ,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (5)$$

3) Наряду с непрерывной функцией $f(z)$ интегрируема и функция $|\dot{f}(z)|$, причем

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot l, \quad (6)$$

где l — длина Γ .

4) Если заданная на Γ последовательность $\{f_k(z)\}$, $k=1, 2, \dots$, непрерывных функций равномерно сходится к $f(z)$, то $f(z)$ интегрируема и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_k(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (7)$$

Так как в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_k(z)\}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$, не зависящее от z и такое, что $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$ всюду на Γ , как только $k \geq N$, то на основании (3) и (6) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f_k(z) dz - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Gamma} [f_k(z) - f(z)] dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\Gamma} |f_k(z) - f(z)| |dz| < \varepsilon \cdot l, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость равенства (7).

5) При комплексном интегрировании замена переменного производится по обычным правилам замены переменных в действительных криволинейных интегралах в правой части формулы (2).

2. Интегральная формула Бореля — Помпею. Пусть D — конечная область с кусочно-гладкой границей Γ .

Если заданная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ действительная однозначная функция $A(x, y)$ в области D имеет частные производные $\frac{\partial A}{\partial x}$ и $\frac{\partial A}{\partial y}$, причем в каждой точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma$ существуют $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial A}{\partial x} = A_1(x_0, y_0)$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial A}{\partial y} = A_2(x_0, y_0)$, когда лежащая в D точка $z = x + iy$ по любому пути стремится к точке z_0 , то, приняв $A_1(x_0, y_0)$ и $A_2(x_0, y_0)$ за значения $\frac{\partial A}{\partial x}$ и $\frac{\partial A}{\partial y}$ при $z = z_0$, мы скажем, что $\frac{\partial A}{\partial x}$ и $\frac{\partial A}{\partial y}$ определены в $\bar{D}$.

Из курса математического анализа известна следующая формула Грина—Остроградского:

$$\int_{\Gamma} p dx + q dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy, \quad (8)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — действительные однозначные функции переменных x, y , непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

Если действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части функции $f(z)$ являются однозначными функциями, непрерывными вместе с частными производными первого порядка в $\bar{D}$, то на основании (2) и (8) будем иметь

$$\int_{\Gamma} f(t) dt - 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} d\xi d\eta = 0, \quad t = \xi + i\eta. \quad (9)$$

При дополнительном требовании аналитичности $f(z)$ в области D , т. е. при

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in D, \quad (10)$$

из (9) получаем

$$\int_{\Gamma} f(t) dt = 0. \quad (11)$$

Равенство (11) представляет собой содержание теоремы Коши, которая в дальнейшем будет доказана при более слабых предположениях.

Интеграл (2) от функции $f(z) = z^n$, где n — целое число, когда Γ является окружностью $|z| = R$, вычисляется легко. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} z^n dz &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos(n+1)\varphi d\varphi - \\ &- R^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin(n+1)\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

При $n \geq 0$ в силу (11) имеем

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0, \quad (13)$$

где Γ — любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана.

Если конечная область $\bar{D}$ с границей Γ не содержит точки $z=0$, то опять в силу (11) убеждаемся в справедливости равенства (13) и при $n \leq -1$. В случае, когда точка $z=0$ принадлежит области D , удаляя ее из D вместе с замкнутым кругом $|z| \leq \varepsilon$ и для оставшейся части области D применяя формулу (11), в силу (5) и (12) получим

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & n < -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad (14)$$

Тем самым мы показали, что значение интеграла от функции z^n для целых $n \neq -1$ по любой кусочно-гладкой линии Γ , соединяющей точки α и β (и не проходящей через точку $z=0$ при $n < -1$), одно и то же или, как еще принято говорить, оно не зависит от пути интегрирования. Для его вычисления при $n \geq 0$ рассмотрим путь интегрирования, совпадающий с прямолинейным отрезком $z = \alpha + (\beta - \alpha)t$, $0 \leq t \leq 1$. В силу (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= (\beta - \alpha) \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)t]^n dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (\beta - \alpha)^{k+1} \int_0^1 t^k dt = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \alpha^{n-k} (\beta - \alpha)^{k+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha^{n+1-k} (\beta - \alpha)^k - \alpha^{n+1} \right] = \frac{\beta^{n+1}}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

В предположении непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вместе с их частными производными первого порядка в $\bar{D}$ для функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ справедлива формула Бореля—Помпею

$$(6.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} = \begin{cases} 0, & z \in \bar{D}, \\ f(z), & z \in D, \end{cases} \quad (16)$$

Действительно, когда точка $z \in \overline{CD}$, формула (16), очевидно, следует из равенства (9), если в последнем $f(t)$ заменить через $\frac{f(t)}{t-z}$ и учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{f(t)}{t-z} = \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} \frac{1}{t-z}.$$

Когда же $z \in D$, эту точку следует удалить из области D вместе с замкнутым кругом $|t-z| \leq \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε и для оставшейся части D применить опять равенство (9), в котором $f(t)$ заменена через $\frac{f(t)}{t-z}$. В рассматриваемом случае формула (16) является следствием равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t-z} &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} dt + f(z) \int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{dt}{t-z} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} dt + f(z) = f(z), \quad z \in D, \end{aligned}$$

вытекающего непосредственно из (6) и (12).

В частности, при соблюдении условия (10) всюду в D из (16) получается интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (17)$$

Справедливость формулы (17) ниже будет доказана при более слабых предположениях.

Выражение, стоящее в левой части формулы (17), называется *интегралом Коши*.

3. Лемма Гурса. На основании формулы (15) легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма Гурса. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D , и γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в D , то для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно указать лежащий в D многоугольник P с

вершинами на γ такой, что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_P} f(z) dz \right| < \varepsilon, \quad (18)$$

где γ_P — контур многоугольника P .

В самом деле, пусть $\bar{D}_1$ — замкнутая область, лежащая в D и содержащая внутри себя кривую γ . Обозначим через L длину γ .

Из равномерной непрерывности функции $f(z)$ в $\bar{D}_1$ следует, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad (19)$$

как только

$$|z' - z''| < \delta. \quad (20)$$

Точками $z_1, z_2, \dots, z_n$ разобьем кривую γ на дуги γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, длина каждой из которых меньше $\delta_1 < \delta$, и обозначим через P многоугольник с вершинами в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$.

В силу спрямляемости γ число δ_1 можно считать настолько малым, чтобы многоугольник P лежал внутри области D .

Применяя формулу (15), когда Γ совпадает с γ_k , получим

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} dz = \Delta z_k = z_{k+1} - z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad z_{n+1} = z_1. \quad (21)$$

Учитывая свойства 1), 2) и 3) интеграла [см. формулы (3), (4) и (6)], в силу (19), (20) и (21) заключаем, что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (22)$$

Повторяя аналогичное рассуждение, будем иметь

$$\left| \int_{\gamma_P} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (23)$$

Неравенство (18) является непосредственным следствием неравенств (22) и (23).

§ 2. Теория Коши

1. Теорема Коши. Теоремой Коши называется следующее утверждение: *если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и γ —любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в D , то*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (24)$$

Приведем принадлежащее Гурса весьма изящное доказательство этой теоремы.

Сначала рассмотрим случай, когда γ является контуром γ_{Δ} треугольника Δ , лежащего в области D .

На основании формулы (13) заключаем, что

$$\int_{\gamma_{\Delta}} dz = \int_{\gamma_{\Delta}} z dz = 0. \quad (25)$$

Справедливость равенства

$$\int_{\gamma_{\Delta}} f(z) dz = 0 \quad (26)$$

доказывается легко.

В самом деле, предположим, что

$$\left| \int_{\gamma_{\Delta}} f(z) dz \right| = M.$$

Соединяя прямолинейными отрезками середины сторон треугольника Δ , разобьем его на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta^{(k)}$, $k=1, 2, 3, 4$, и обозначим через Δ_1 тот из них, для которого

$$\left| \int_{\gamma_{\Delta_1}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Существование такого треугольника следует из очевидного неравенства

$$\left| \int_{\gamma_{\Delta}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\gamma_{\Delta^{(k)}}} f(z) dz \right|.$$

По только что указанному способу разобьем треугольник Δ_1 на четыре конгруэнтных треугольника и

обозначим через Δ_2 тот из них, для которого

$$\left| \int_{\gamma_{\Delta_2}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность треугольников

$$\{\Delta_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

со следующими свойствами: 1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $k = 1, 2, \dots$; 2) периметр Δ_k равен $l/2^k$, где l — периметр Δ ; 3) для каждого Δ_k имеет место неравенство

$$\left| \int_{\gamma_{\Delta_k}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k}. \quad (28)$$

Пересечение всех треугольников последовательности (27) состоит из единственной точки $z_0 \in D$.

В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (29)$$

при всех z , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta. \quad (30)$$

Начиная с определенного номера k_0 , все треугольники последовательности (27) лежат внутри круга (30), и, следовательно, в силу (25), (29) и (30) мы можем написать

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{\Delta_k}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_{\Delta_k}} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)] dz \right| < \\ &< \varepsilon \int_{\gamma_{\Delta_k}} |z - z_0| |dz| < \varepsilon \frac{l^2}{4^k}. \end{aligned} \quad (31)$$

Сравнивая (28) и (31), получим

$$M < \varepsilon l^2,$$

откуда в силу произвольности ε следует справедливость равенства (26).

Обозначим теперь через γ_P контур произвольного многоугольника P , лежащего в области D , и разобьем P на конечное число треугольников $\Delta^{(k)}$.

Из очевидного равенства

$$\int_{\gamma_P} f(z) dz = \sum_k \int_{\gamma_{\Delta(k)}} f(z) dz$$

в силу (26) заключаем, что

$$\int_{\gamma_P} f(z) dz = 0. \quad (32)$$

В случае, когда γ — любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, на основании леммы Гурса в силу (18) и (32) получим

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon,$$

откуда сразу следует равенство (24).

Справедливо более сильное утверждение (обобщенная теорема Коши): равенство (24) остается в силе, если γ — замкнутая гладкая кривая Жордана, а функция $f(z)$ аналитична в конечной области D , ограниченной контуром γ , и непрерывна в $\bar{D}$.

Действительно, в силу равномерной непрерывности $f(z)$ в $\bar{D}$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, как только $|z_1 - z_2| \leq 2\delta$.

Пусть $\delta < \delta_0$, где δ_0 — введенный в § 2.2 гл. II стандартный радиус, соответствующий кривой γ .

Из открытого покрытия $\{C(\delta, t)\}$ кривой γ , где $C(\delta, t)$ — открытый круг с центром в точке $t \in \gamma$ радиуса $\delta < \delta_0$, можно выделить конечное открытое покрытие γ , состоящее из кругов $C(\delta, t_1), C(\delta, t_2), \dots, C(\delta, t_m)$, причем m не превышает $\frac{l}{\delta} + 1$, где l — длина γ .

Обозначим через D_k область $D \cap C(\delta, t_k) \cap C(\delta, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, m$, $t_{m+1} = t_1$, а через d_k обозначим область $[D \cap C(\delta, t_k)] \setminus [\bar{D}_k \cup \bar{D}_{k-1}]$, $k = 1, 2, \dots, m$, $D_0 = D_m$. Пусть Γ_k и γ_k — границы D_k и d_k соответственно.

После удаления из области D всех $\bar{D}_k$ и $\bar{d}_k$ при достаточно малом δ останется область D_* с кусочно-гладкой жордановой границей Γ_* , лежащей внутри D .

Учитывая то обстоятельство, что в силу уже доказанной выше теоремы Коши

$$\int_{\Gamma_*} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma_k} f(z_k) dz = 0, \quad \int_{\gamma_k} f(\xi_k) dz = 0,$$

где z_k и ζ_k — фиксированные точки внутри D_k и d_k соответственно, можно написать

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum \int_{\Gamma_k} f(z) dz + \sum \int_{\gamma_k} f(z) dz = \\ &= \sum \int_{\Gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz + \sum \int_{\gamma_k} [f(z) - f(\zeta_k)] dz, \end{aligned}$$

откуда сразу получается, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \sum \int_{\Gamma_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| + \\ &+ \sum \int_{\gamma_k} |f(z) - f(\zeta_k)| |dz| < \varepsilon (l + 4\pi l + 4\pi \delta_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Тем самым в принятых выше предположениях справедливость равенства (24) доказана.

Приведенное здесь рассуждение позволяет доказать справедливость равенства (24) и в том случае, когда γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана.

Пусть теперь D — конечная $(m+1)$ -связная область, граница Γ которой представляет собой совокупность попарно непересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ лежат внутри конечной области, ограниченной кривой Γ_0 .

Из теоремы Коши [вытекает справедливость следующего утверждения: *если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$, то*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) dz = 0. \quad (34)$$

В самом деле, в силу аналитичности функции $f(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$ на основании леммы Гейне — Бореля заключаем, что существует конечная система кругов $(K_1, K_2, \dots, K_j)$, покрывающая $\bar{D}$, внутри каждого из которых $f(z)$ аналитична. Пусть $D^* = \bigcup_{n=1}^j K_n$. Очевидно, что область D^* содержит внутри себя замкнутую область $\bar{D}$, причем $f(z)$ аналитична в D^* .

Обозначим через $\gamma_k, k=0, 1, \dots, m$, попарно непересекающиеся кусочно-гладкие разомкнутые дуги Жордана, лежащие в D и соединяющие соответственно Γ_k с Γ_{k+1} , $\Gamma_{m+1} = \Gamma_0$.

Проведенными вдоль γ_k разрезами область D делится на две односвязные области с замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими границами Γ^* и Γ^{**} . Так как Γ^* и Γ^{**} лежат внутри области аналитичности $f(z)$, то в силу теоремы Коши имеем

$$\int_{\Gamma^*} f(z) dz = \int_{\Gamma^{**}} f(z) dz = 0. \quad (35)$$

Из очевидного равенства

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \int_{\Gamma^*} f(z) dz + \int_{\Gamma^{**}} f(z) dz$$

(вдоль γ_k интегрирование происходит дважды в противоположных направлениях) в силу (35) сразу следует справедливость равенства (34).

В силу обобщенной теоремы Коши равенство (34) остается справедливым, если от функции $f(z)$ потребуем аналитичности в D и непрерывности в $\bar{D}$.

Равенство (34) все еще остается справедливым, если $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$ всюду, кроме конечного числа точек $a_k \in D$, $k=1, 2, \dots, n$, вблизи которых $f(z)$ ведет себя так, что

$$\lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k) f(z) = 0. \quad (36)$$

Для доказательства этого факта, очевидно, можно ограничиться рассмотрением случая $n=1$.

Заметим, что в силу (36) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|z - a_1| |f(z)| < \varepsilon, \quad (37)$$

как только

$$|z - a_1| \leq \delta. \quad (38)$$

Удалим точку a_1 из области D вместе с замкнутым кругом (38). Для оставшейся части D формулу (34) можем считать доказанной, т. е.

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \int_{|z - a_1| = \delta} f(z) dz. \quad (39)$$

Заметим, что в силу (37) имеет место оценка

$$\left| \int_{|z-a_1|=\delta} f(z) dz \right| = \left| \int_{|z-a_1|=\delta} (z-a_1) f(z) \frac{dz}{z-a_1} \right| \leq \\ \leq \int_{|z-a_1|=\delta} |z-a_1| |f(z)| \frac{|dz|}{|z-a_1|} < 2\epsilon\pi.$$

В силу этого неравенства из формулы (39) в пределе, когда $\epsilon \rightarrow 0$, получим равенство (34).

2. Интегральная формула Коши. Для аналитической в области D с жордановой кусочно-гладкой границей Γ и непрерывной в $\bar{D}$ функции $f(z)$ из вышедоказанного утверждения легко вывести интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{CD}. \end{cases} \quad (40)$$

В самом деле, для $z \in D$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(t) dt + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dt}{t-z}, \quad (41)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t-z}.$$

Так как Φ , как функция переменного t , аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$ всюду, кроме точки $t=z$, а в этой точке условие (36), очевидно, соблюдено, то имеем

$$\int_{\Gamma} \Phi(t) dt = 0. \quad (42)$$

Замечая теперь, что формулу (17) можно считать доказанной для $f(z) \equiv 1$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dt}{t-z} = 1, \quad z \in D, \quad (43)$$

из формулы (41) в силу (42) и (43) получим формулу (40).

Для $z \in \bar{CD}$ формула (40) следует из теоремы Коши.

3. Интеграл типа Коши. Пусть Γ — замкнутая или разомкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана и $f(t)$ — заданная на Γ непрерывная функция. В любой точке z

комплексной плоскости, не лежащей на Γ , выражение $\frac{f(t)}{t-z}$, как функция $t \in \Gamma$, непрерывно, и, следовательно, существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (44)$$

являющийся однозначной функцией переменного z .

Выражение (44) носит название интеграла типа Коши.

Если Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана и $f(t)$ задана всюду в $D \cup \Gamma = \bar{D}$, причем она аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши и (44) представляет собой интегральную формулу Коши (40).

Интеграл типа Коши обладает следующим замечательным свойством: в любой точке z комплексной плоскости, не лежащей на кривой Γ , интеграл типа Коши (44) является аналитической функцией, причем

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^2}. \quad (45)$$

Более того, $F(z)$ имеет производные всех порядков и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (46)$$

Обнаружить это свойство интеграла типа Коши нетрудно, если заметить, что

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)(t-z-\Delta z)}, \quad (47)$$

где $z + \Delta z$ не лежит на Γ .

Так как точка z не лежит на кривой Γ , то всегда можно указать положительное число δ такое, что замкнутый круг $|\xi - z| \leq \delta$ будет находиться на конечном расстоянии $d > 0$ от Γ .

Пусть $|\Delta z| < \delta$. Очевидно, что для всех точек $t \in \Gamma$ будем иметь

$$|t-z| > d, \quad |t-z-\Delta z| > d. \quad (48)$$

Вычитая правую часть (45) из (47), в силу (48) получим

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^2} \right| = \\ = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t) dt}{(t-z)^2 (t-z-\Delta z)} \right| < \frac{|\Delta z| L}{2\pi d^3} M, \quad (49)$$

где L — длина кривой Γ , а $M = \max |f(t)|$, когда $t \in \Gamma$.

Из неравенства (49) следуют аналитичность функции $F(z)$ и справедливость формулы (45).

Далее, считая формулу (46) доказанной при $n = k-1$, в результате простых вычислений получим

$$\left| \frac{F^{(k-1)}(z+\Delta z) - F^{(k-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{k+1}} \right| = \\ = \left| \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} (t-z)^{k-1-j} (\Delta z)^j}{(t-z)^k (t-z-\Delta z)^k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k}{(t-z)^{k+1}} \right] f(t) dt \right| < \frac{|\Delta z| L \omega M}{2\pi d^{2k+1}},$$

где ω — постоянная, зависящая лишь от k и d . Отсюда предельным переходом при $\Delta z \rightarrow 0$ приходим к заключению, что формула (46) верна и при $n = k$.

Установленное выше свойство интеграла типа Коши позволяет сделать весьма важное заключение: *аналитическая в области D функция $f(z)$ в каждой точке этой области имеет производную любого порядка.*

В самом деле, пусть z_0 — произвольная точка области D и δ — положительное число такое, что окрестность $|z - z_0| < \delta$ точки z_0 лежит полностью в D .

В силу интегральной формулы Коши (40) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=\delta} \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (50)$$

Так как интеграл Коши в правой части формулы (50) является частным случаем интеграла типа Коши, то представленная формулой (50) функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 всюду имеет производные всех порядков. Ввиду того, что z_0 — произвольная точка области D , тем самым

доказано существование производных всех порядков у функции $f(z)$ всюду в области ее аналитичности.

4. Понятие неопределенного интеграла и обращение теоремы Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и Γ — кусочно-гладкая кривая Жордана, соединяющая точки $z_0 \in D$, $z \in D$ и лежащая внутри D , то интеграл

$$\int_{\Gamma} f(t) dt$$

не зависит от пути интегрирования и, следовательно, можно написать

$$\int_{\Gamma} f(t) dt = \int_{z_0}^z f(t) dt = F(z). \quad (51)$$

Мы теперь покажем, что если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл

$$\int_{z_0}^z f(t) dt = F(z), \quad z \in D, \quad z_0 \in D, \quad (52)$$

не зависит от пути интегрирования, то однозначная в области D функция $F(z)$ аналитична в этой области и

$$F'(z) = f(z). \quad (53)$$

Так как интеграл в левой части формулы (52) не зависит от пути интегрирования, то для $z \in D$ и $z + \Delta z \in D$ имеем

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z + \Delta z} f(t) dt.$$

В силу непрерывности $f(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t - z| < \delta$. Поэтому, предполагая $|\Delta z| < \delta$, из очевидного равенства

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(t) - f(z)] dt,$$

где интегрирование происходит вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $z + \Delta z$ и лежащего в D ,

будем иметь

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует справедливость равенства (53).

Из сделанного в конце предыдущего пункта заключения и равенства (53) следует аналитичность функции $f(z)$ в области D .

Совокупность аналитических в области D функций $\Phi(z)$, обладающих тем свойством, что

$$\Phi'(z) = f(z), \quad (54)$$

где $f(z)$ — аналитическая в области D функция, будем называть *неопределенным интегралом от функции $f(z)$* .

Вычитая (53), будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = 0, \quad (55)$$

где $u(x, y) + iv(x, y) = \Phi(z) - F(z)$.

Учитывая условия Коши—Римана, из равенства (55) заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ в D . Следовательно, $\Phi(z) - F(z) = \text{const}$ всюду в области D .

Таким образом, имеем

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt + C,$$

откуда ввиду того, что

$$C = \Phi(z_0),$$

следует формула Лейбница

$$\int_{z_0}^z f(t) dt = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

Теперь легко доказать теорему Морера (являющуюся обращением теоремы Коши): *если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ , лежащего в D ,*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (56)$$

то $f(z)$ аналитична всюду в D .

В самом деле, по условию теоремы интеграл в левой части формулы (52) не зависит от пути интегрирования и, кроме того, $f(z)$ непрерывна в D . Следовательно, $F(z)$ аналитична в области D и имеет место равенство (53). Как уже было показано выше, аналитичность $f(z)$ является следствием равенства (53).

Очевидно, что теорема Морера остается в силе, если в требовании (56) кривую Γ заменить произвольным треугольником, лежащим в области D .

Приведем и другой вариант доказательства теоремы Морера, обобщение которого играет существенную роль в § 4.3 гл. VIII.

Обозначим через Q лежащий вместе со своей границей S внутри области D квадрат, стороны которого параллельны координатным осям. Пусть $z = x + iy$ — произвольная точка внутри Q .

В силу непрерывности функции $f(z)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек t внутри круга $C(\delta, z)$ имеет место неравенство

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Пусть Q_0 — вписанный в круг $C(\delta, z)$ квадрат, стороны которого параллельны сторонам квадрата Q . Прямыми $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ разобьем часть Q , лежащую вне Q_0 , на мелкие квадраты Q_k , длина стороны каждого из которых не превышает достаточно малого числа $h > 0$.

На основании формулы (40) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(t) dt}{t-z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_0} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{S_k} \frac{f(t) - f(t_k)}{t-z} dt, \quad (57)$$

где S_0 и S_k — границы квадратов Q_0 и Q_k соответственно, а t_k — центр квадрата Q_k .

При достаточно малом h в силу равномерной непрерывности функции $f(z)$ имеет место неравенство

$$|f(t) - f(t_k)| < \varepsilon |t - z|^2 \quad (**)$$

для всех $t \in S_k$.

Из очевидных равенств

$$|t - z|^2 = |t_k - z|^2 + |t - t_k|^2 - 2|t_k - z||t - t_k| \cos \alpha, \\ \left| \frac{t - z}{t_k - z} \right|^2 = 1 + \lambda \left| \frac{t - t_k}{z - t_k} \right|,$$

где $0 < \lambda < 3$, следует, что

$$\frac{1}{t-z} = \frac{\bar{t}-\bar{z}}{|t-z|^2} = -\frac{\bar{z}-\bar{t}_k}{|t_k-z|^2} + \frac{\bar{t}-\bar{t}_k}{|t-z|^2} + \lambda \frac{\bar{z}-\bar{t}_k}{|t-z|^2} \left| \frac{t-t_k}{z-t_k} \right|.$$

Подставляя полученное выражение для $\frac{1}{t-z}$ в правую часть формулы (57) и учитывая то обстоятельство, что в силу условия (56) и равенства (13)

$$\int_{S_k} \frac{\bar{z}-\bar{t}_k}{|z-t_k|^2} [f(t)-f(t_k)] dt = 0, \quad k=1, 2, \dots,$$

на основании неравенств (*) и (**) получим оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(t) dt}{t-z} - f(z) \right| < \frac{4\varepsilon}{\pi} (1 + \sqrt{2} |Q|),$$

где $|Q|$ — площадь квадрата Q . Тем самым доказана справедливость представления

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(t) dt}{t-z},$$

откуда непосредственно следует аналитичность функции $f(z)$ в точке z .

5. Понятие гармонической функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Однозначная в области D действительная функция $u(x, y)$ действительных переменных x, y , обладающая непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (58)$$

называется *гармонической*.

Дифференциальное уравнение с частными производными (58) называется *уравнением Лапласа*, а дифференциальный оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — *оператором Лапласа*.

В п. 3 настоящего параграфа было доказано, что аналитическая в области D функция $f(z)$ комплексного переменного z в каждой точке этой области имеет производные всех порядков. В частности, ее производную первого порядка можно записать в виде

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (59)$$

Так как $f'(z)$ сама является аналитической функцией в области D , то из (59) заключаем, что существуют частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

причем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad (60)$$

всюду в области D .

Из аналитичности функции $f(z)$ в области D следуют тождества

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (CR)$$

Дифференцируя эти тождества по x и y соответственно и складывая, в силу второго из равенств (60) получим, что $\Delta u = 0$. Легко видеть, что и $\Delta v = 0$.

Следовательно, действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической в области D функции $f(z)$ являются гармоническими функциями. Функцию $v(x, y)$ принято называть гармонически сопряженной с функцией $u(x, y)$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D . Если в точке $z \in D$ функция $f(z) \neq 0$, то

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \log |f(z)| = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \Delta \log |f(z)| = 0.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из очевидных равенств

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \log |f(z)| &= \\ &= (u^2 + v^2)^{-1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} - i u \frac{\partial u}{\partial y} - i v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} &= 2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

если учесть, что в точке z условия (CR) выполняются.

Предположим теперь, что в односвязной области D задана гармоническая функция $u(x, y)$. В области D сопряженная с $u(x, y)$ гармоническая функция $v(x, y)$ весьма просто выражается через $u(x, y)$.

Действительно, из условий (CR) имеем

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (61)$$

Ввиду того, что $\Delta u = 0$, правая часть (61) является полным дифференциалом и, следовательно,

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C,$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка области D , C — произвольная действительная постоянная, а интеграл не зависит от пути интегрирования.

Таким образом, аналитическая в односвязной области D функция $f(z)$ по ее действительной части определяется с точностью до аддитивной произвольной мнимой постоянной iC по формуле

$$f(z) = u(x, y) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + iC. \quad (62)$$

Ниже (§ 1.7 гл. VIII) будет выведена более простая формула, чем (62), выражающая аналитическую в односвязной области D функцию $f(z)$ через ее действительную (или мнимую) часть.

§ 3. Некоторые важнейшие утверждения, вытекающие из интегральной формулы Коши

1. Принцип максимума модуля. Пусть $f(z)$ — заданная в области D аналитическая функция. Обозначим через M верхнюю границу значений $|f(z)|$ для всех $z \in D$.

Под принципом максимума модуля понимается следующее утверждение: *модуль аналитической в области D функции $f(z)$, отличной от постоянной, ни в одной точке этой области не может принимать значения M .*

Если $M = +\infty$, справедливость этого утверждения очевидна, ибо в каждой точке $z \in D$ функция $|f(z)|$ принимает лишь конечное значение.

Предположим теперь, что M конечно и в некоторой точке $z_0 \in D$ имеет место равенство $|f(z_0)| = M$.

Рассмотрим замкнутый круг $|z - z_0| \leq \delta$, лежащий в области D .

Из интегральной формулы Коши (40) имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=\delta} \frac{f(t) dt}{t-z_0},$$

или, что то же самое,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) d\varphi,$$

откуда в силу принятого допущения получим

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \delta e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (63)$$

На основании (63) легко усмотреть, что всюду на окружности $|z-z_0|=\delta$ имеет место равенство

$$|f(z)| = M. \quad (64)$$

В самом деле, допустим, что для некоторого значения $\varphi = \varphi_0$ имеет место неравенство $|f(z_0 + \delta e^{i\varphi_0})| < M$. В силу непрерывности $|f(z_0 + \delta e^{i\varphi})|$, как функции от φ , можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что вдоль дуги $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ окружности $|z-z_0|=\delta$ будем иметь

$$|f(z_0 + \delta e^{i\varphi})| < M.$$

На основании этого неравенства из (63) получим противоречие: $M < M$. Тем самым справедливость равенства (64) доказана.

Повторяя приведенное выше рассуждение для круга $|z-z_0| \leq \delta'$, где δ' — произвольное положительное число, меньшее δ , видим, что равенство (64) имеет место в каждой точке круга $|z-z_0| \leq \delta$. Покажем теперь, что это равенство имеет место в каждой точке области D . С этой целью рассмотрим произвольную точку $z_1 \in D$ и соединим ее с точкой z_0 непрерывной кривой L , лежащей в D . Обозначим через d положительное число, меньшее чем расстояние между кривой L и границей Γ области D .

Передвигая центр круга радиуса d из точки z_0 вдоль кривой L к точке z_1 , убедимся в справедливости равенства (64) в точке z_1 .

Так как $|f(z)| = M \neq 0$ в области D и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \log |f(z)| = \frac{f'(z)}{f(z)} = 0,$$

то $f'(z) = 0$ для всех $z \in D$, а это противоречит требованию, что $f(z)$ отлична от постоянной. Тем самым принцип максимума модуля доказан.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Действительная, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$ функция $|f(z)|$ переменных x, y обязательно достигает своего максимума. Следовательно, по доказанному принципу максимума модуля функция $|f(z)|$ достигает своего максимума в $\bar{D}$ лишь на границе Γ этой области.

Если непостоянная аналитическая функция $f(z) \neq 0$ всюду в области D и m — нижняя граница значений $|f(z)|$, $z \in D$, то, применяя принцип максимума модуля к функции $1/f(z)$, заключаем, что $|f(z)|$ не может принимать значения m ни в одной точке области D .

2. Теорема Фрагмена — Линделёфа. Лемма Шварца. Из принципа максимума модуля аналитической функции следует ряд важных утверждений. Одним из них является теорема Фрагмена — Линделёфа: если область D представляет собой угол раствора π/δ_1 с вершиной в точке z_0 на плоскости комплексного переменного z и заданная в ней аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет условиям: 1) на границе Γ области D всюду функция $f(z)$ имеет конечные предельные значения изнутри D , 2) существует положительная постоянная M такая, что $|f(t)| < M$ для всех $t \in \Gamma$, 3) в каждой точке $z \in D$ имеет место неравенство

$$|f(z)| < e^{|z-z_0|^\delta},$$

где $0 < \delta < \delta_1$, то

$$|f(z)| < M$$

всюду в D .

При доказательстве этой теоремы без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$, а область D содержит внутри себя луч $\arg z = 0$ и симметрична относительно этого луча.

Рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$F_\lambda(z) = f(z) e^{-\lambda z^{\delta_2}},$$

где λ и δ_2 — положительные постоянные, $\delta < \delta_2 < \delta_1$, а под z^{δ_2} понимается ветвь этой функции, положительная для положительных значений z .

В силу условия 3) в любой точке $z \in D$ имеем

$$|F_\lambda(z)| < e^{-|z|^{\delta_2} \left(\lambda \cos \frac{\pi \delta_2}{2\delta_1} - |z|^{\delta - \delta_2} \right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F_\lambda(z) = 0.$$

На основании условий 2) и 3) непосредственно получаются оценки

$$|F_\lambda(z)| < M e^{-\lambda |z|^{\delta_2} \cos \frac{\pi \delta_2}{2\delta_1}} < M,$$

$$\arg z = \pm \frac{\pi}{2\delta_1}.$$

Так как $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F_\lambda(z) = 0$, то из этой оценки в силу принципа максимума модуля аналитической функции $F_\lambda(z)$ следует, что в каждой точке $z \in D$ имеет место неравенство

$$|F_\lambda(z)| < M.$$

Таким образом, в любой точке $z \in D$ имеем

$$|f(z)| < M e^{\lambda |z|^{\delta_2}}.$$

Справедливость сформулированного утверждения следует из только что полученной оценки, если учесть, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{\lambda |z|^{\delta_2}} = 1.$$

Из принципа максимума модуля аналитических функций также легко получается следующая лемма Шварца: *если аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям*

$$f(0) = 0 \tag{65}$$

и

$$|f(z)| < 1, \quad |z| < 1, \tag{66}$$

то

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |z| < 1, \tag{67}$$

и

$$|f'(0)| \leq 1, \tag{68}$$

причем, если равенство $|f(z)| = |z|$ имеет место хотя бы в одной точке $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$, или $|f'(0)| = 1$, то всюду в рассматриваемом круге $f(z) = e^{i\alpha}z$, где α — действительная постоянная.

Переходя к доказательству этой леммы, заметим, что для любой точки z круга $|z| < \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, меньшее единицы, по формуле Коши (40) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (69)$$

В силу (65) и (69) заключаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{z} \right) f(t) dt = \frac{z}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t(t-z)},$$

т. е. функция

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t(t-z)}$$

аналитична в круге $|z| < \varepsilon$, причем

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t^2}.$$

Таким образом, функция $\Phi(z) \equiv \frac{f(z)}{z}$, $\Phi(0) = f'(0)$, аналитична в круге $|z| < 1$.

Из принципа максимума модуля вытекает, что $\max |\Phi(z)|$ при $|z| \leq \varepsilon_1$, где ε_1 — произвольное положительное число, меньшее единицы, достигается на окружности $|z| = \varepsilon_1$.

Следовательно, для $|z| < \varepsilon_1$ на основании (66) имеем

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Отсюда в пределе при $\varepsilon_1 \rightarrow 1$ для любой фиксированной точки z круга $|z| < 1$ получаем

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1, \quad (70)$$

и, стало быть, $|f'(0)| \leq 1$, что и требовалось доказать.

Если в точке $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$, имеет место равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то из принципа максимума для $|\Phi(z)|$ за-

ключаем, что $\Phi(z)$ постоянна в круге $|z| \leq 1$. При наличии равенства $|f'(0)| = 1$ повторением аналогичного рассуждения также заключаем, что $\Phi(z) = \text{const.}$

В обоих случаях очевидно, что $|\Phi(z)| = 1$, т. е. $\Phi(z) = e^{i\alpha}$.

3. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Из курса математического анализа известно, что сумма $f(x)$ равномерно сходящегося в интервале $a < x < b$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ действительных дифференцируемых функций может не оказаться дифференцируемой, а при наличии производной $f'(x)$ совсем не обязательно, чтобы имело место равенство $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$.

В отличие от этого, в комплексном анализе имеет место следующий весьма важный факт, известный под названием первой теоремы Вейерштрасса: *если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (71)$$

аналитических в области D функций $f_k(z)$ равномерно сходится на любом компактном подмножестве K области D , то сумма $f(z)$ этого ряда аналитична в D , при-

чем для каждого натурального p ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ равномерно сходится на любом компактном подмножестве K области D и

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z). \quad (72)$$

Из доказанного в § 3.1 гл. II утверждения о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций следует непрерывность функции $f(z)$ в области D .

Пусть z_0 — произвольная точка области D .

Обозначим через γ кусочно-гладкий замкнутый контур, лежащий в области D вместе с конечной областью D_γ , ограниченной им, причем $z_0 \in D_\gamma$. Из равномерной

сходимости ряда (71) вдоль γ в силу (7) следует, что для любой точки $z \in D_\gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f_k(t) dt}{t-z}. \quad (73)$$

В силу интегральной формулы Коши (40) равенство (73) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = f(z),$$

откуда следует аналитичность функции $f(z)$ в точке z_0 . Так как z_0 — произвольная точка области D , то тем самым доказана аналитичность $f(z)$ всюду в D .

Из равномерной сходимости ряда (71) аналогично заключаем, что

$$\frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{p+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_k(t) dt}{(t-z)^{p+1}} \quad (74)$$

для любой точки $z \in D_\gamma$. Из формул (46) и (74) следует справедливость равенства (72) в любой точке $z \in D_\gamma$ и, в частности, в точке z_0 .

Покажем теперь, что на любом компактном подмножестве K области D ряд в правой части равенства (72) сходится равномерно. С этой целью обозначим через z_0 произвольную точку компактного множества K . Пусть d — такое положительное число, что круг $|z - z_0| \leq 2d$ принадлежит области D .

В силу равномерной сходимости ряда (71) на окружности $|z - z_0| = 2d$ заключаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(z) \right| < \varepsilon \quad (75)$$

для любого $n > N$.

Для остатка ряда в правой части (72) в силу формулы (46) и равномерной сходимости ряда (71) на окружности $|t - z_0| = 2d$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=2d} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(t) \frac{dt}{(t-z)^{p+1}},$$

$$|z - z_0| < 2d,$$

откуда в силу (75) заключаем, что для всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < d$, будем иметь

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z) \right| < \frac{4\pi\varepsilon dp!}{2\pi d^{p+1}} = \frac{2\varepsilon p!}{d^p}. \quad (76)$$

Неравенство (76) означает, что ряд в правой части равенства (72) равномерно сходится в круге $|z - z_0| < d$ с центром в произвольной точке $z_0 \in K$. Отсюда по лемме Гейне—Бореля заключаем, что указанный ряд равномерно сходится на K .

Непосредственным следствием принципа максимума модуля аналитической функции является вторая теорема Вейерштрасса: *если ряд (71) аналитических в области D и непрерывных в замкнутой области D функций $f_k(z)$ равномерно сходится на границе Γ области D , то этот ряд равномерно сходится в $\bar{D}$.*

В самом деле, в силу равномерной сходимости ряда (71) на Γ для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^p f_{N+k}(t) \right| < \varepsilon, \quad t \in \Gamma,$$

для любого натурального p .

Так как конечная сумма $\sum_{k=1}^p f_{N+k}(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, то в силу принципа максимума модуля аналитической функции заключаем, что

$$\left| \sum_{k=1}^p f_{N+k}(z) \right| < \varepsilon \quad (77)$$

для любого $z \in \bar{D}$. Как известно, неравенство (77) является условием, необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (71) в замкнутой области $\bar{D}$.

4. Интегральные формулы Шварца и Пуассона. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$.

Из интегральной формулы Коши (40) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R} \frac{f(t) dt}{t-z} = f(z) \quad (78)$$

для любой точки z круга $|z - z_0| < R$ и

$$\int_{|t-z_0|=R} \frac{f(t) dt}{t-z^*} = 0 \quad (79)$$

для точки z^* , симметричной точке z относительно окружности γ : $|t - z_0| = R$.

Ввиду того, что

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}, \quad t - z_0 = R e^{i\varphi},$$

$$d\bar{t} = -i R e^{-i\varphi} d\varphi = -i \frac{R^2 d\varphi}{t - z_0}, \quad dt = i R e^{i\varphi} d\varphi,$$

из (79), переходя к сопряженным величинам, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(t)} d\bar{t}}{\overline{t - z_0} \frac{R^2}{z - z_0}} &= i \int_{\gamma} \frac{\overline{f(t)} (z - z_0) d\varphi}{t - z} = \\ &= -i \int_{\gamma} \overline{f} d\varphi + \int_{\gamma} \frac{\overline{f} dt}{t - z} = -i \int_{\gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{i(t - z_0)} + \int_{\gamma} \frac{\overline{f} dt}{t - z} = \\ &= -2\pi i \overline{f(z_0)} + \int_{\gamma} \frac{\overline{f} dt}{t - z} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для любой точки z круга $|z - z_0| < R$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t - z} = \overline{f(z_0)}. \quad (80)$$

Сложив формулы (78) и (80), получим

$$f(z) + \overline{f(z_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(t) dt}{t - z}, \quad (81)$$

где $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$.

Учитывая то обстоятельство, что

$$u(x_0, y_0) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(t) dt}{t - z_0},$$

формулу (81) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(t) dt}{t-z_0} + ic = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t-2z_0+z}{(t-z_0)(t-z)} u(t) dt + ic, \end{aligned} \quad (82)$$

где действительная постоянная $c = \operatorname{Im} f(z_0)$.

Вычитая (80) из (78), аналогично получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{t-2z_0+z}{(t-z_0)(t-z)} v(t) dt + c_1, \quad (83)$$

где $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$, $c_1 = \operatorname{Re} f(z_0)$.

Формулы (82) и (83), выражающие значения аналитической функции $f(z)$ в круге $|z-z_0| < R$ соответственно через краевые значения действительной и мнимой частей этой функции на окружности $|t-z_0|=R$, называются интегральными формулами Шварца.

Вводя обозначения $z-z_0=re^{i\varphi}$, $t-z_0=Re^{i\varphi}$, из формулы Шварца (82) получим формулу Пуассона

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\varphi_0}}{Re^{i\varphi} - re^{i\varphi_0}} \operatorname{Re} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi_0 - \varphi)} h(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi, \end{aligned} \quad (84)$$

где $h(z_0 + Re^{i\varphi}) = u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi)$.

5. Об одном признаке сходимости к нулю последовательности аналитических функций. Формула (81) позволяет получить простое доказательство следующего весьма важного утверждения: *если последовательность аналитических в области D функций*

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z), \dots \quad (85)$$

обладает тем свойством, что в некоторой фиксированной точке $z_0 \in D$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z_0) = 0 \quad (86)$$

и равномерно в области D

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f_k(z) = 0, \quad (87)$$

то последовательность (85) равномерно сходится к нулю на любом компактном подмножестве K области D .

Действительно, рассмотрим круг $|z - z_0| \leq 2\delta$, лежащий в области D . В силу (81) имеем

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|t - z_0| = 2\delta} \frac{\operatorname{Re} f_k(t)}{t - z} dt - \overline{f_k(z_0)}. \quad (88)$$

На основании (86) и (87) из формулы (88) заключаем, что в круге $|z - z_0| < \delta$ последовательность (85) равномерно сходится к нулю.

Теперь легко показать, что для любой точки $z_1 \in K$ существует круг $|z - z_1| < d$, принадлежащий области D , внутри которого последовательность (85) равномерно сходится к нулю.

В самом деле, соединим точку z_0 с точкой z_1 непрерывной линией L , лежащей в области D , и рассмотрим круг $|z - \tau| < 2d$, где τ — точка на линии L , а $2d$ — положительное число, меньшее чем расстояние между L и границей Γ области D .

Передвигая центр τ круга $|z - \tau| < 2d$ от точки z_0 к точке z_1 и все время пользуясь формулой (88), в которой точка z_0 заменена точкой τ , убедимся, что в каждом круге $|z - \tau| < d$ и, в частности, в круге $|z - z_1| < d$ последовательность (85) равномерно сходится к нулю.

Доказательство справедливости признака завершается применением леммы Гейне — Бореля.

§ 4. Интеграл в смысле главного значения по Коши

1. Условие Гёльдера. Говорят, что заданная на связном множестве E однозначная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, если существуют положительные постоянные L и h , $0 < h \leq 1$, такие, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L |z_1 - z_2|^h \quad (89)$$

для любой пары точек z_1 и z_2 из E .

Для $h=1$ условие (89) называется *условием Липшица*.

Функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, называются также *непрерывными по Гёльдеру*. Требование непрерывности по Гёльдеру, очевидно, сильнее требования обычной непрерывности.

Число h называется *показателем Гёльдера*.

Ниже речь будет идти о непрерывности по Гёльдеру функций, заданных на гладкой дуге Γ . Из определения

непрерывности по Гёльдеру непосредственно следует, что если $f(z)$ и $\varphi(z)$ непрерывны на Γ по Гёльдеру с показателями соответственно h_1 и h_2 , то $f \pm \varphi$ и $f \cdot \varphi$ также будут непрерывными по Гёльдеру с показателем $h = \min(h_1, h_2)$. Кроме того, если $f(z)$ непрерывна по Гёльдеру и $f(z) \neq 0$ всюду на Γ , то $\frac{1}{f(z)}$ также непрерывна

по Гёльдеру, причем показатели Гёльдера для $f(z)$ и $\frac{1}{f(z)}$ одинаковы.

2. Определение интеграла в смысле главного значения по Коши. Пусть Γ —кусочно-гладкая кривая Жордана, а $\mu(t)$ —заданная на Γ интегрируемая функция. Как уже было отмечено, если $\mu(t)$ непрерывна на Γ , то интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t-z}, \quad (90)$$

как функция переменного z на комплексной плоскости, всюду вне кривой Γ является аналитической функцией.

Функция μ называется *плотностью*, а $\frac{1}{t-z}$ —*ядром Коши*.

Когда точка $z \in \Gamma$, интеграл в правой части формулы (90) в обычном понимании не существует, но при некоторых дополнительных ограничениях относительно плотности μ ему можно придать определенный смысл.

Будем предполагать, что Γ —замкнутая гладкая кривая, а точка $z = t_0$ лежит на Γ .

Пусть γ —окружность $|z - t_0| = \varepsilon$, где ε —достаточно малое положительное число, не превышающее стандартного радиуса δ_0 кривой Γ . Часть кривой Γ , лежащую вне круга $|z - t_0| \leq \varepsilon$, обозначим через Γ_ε .

Интеграл

$$I_\varepsilon(t_0) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(t) dt}{t-t_0}, \quad (91)$$

очевидно, имеет смысл в обычном понимании.

Если существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(t_0) = I(t_0),$$

то этот предел называется *интегралом в смысле главного значения по Коши* или *сингулярным интегралом Коши*

и его обозначают обычным символом интеграла

$$I(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0}. \quad (92)$$

Иногда в математической литературе символ интеграла в смысле главного значения по Коши снабжается либо двумя латинскими буквами v.p. спереди, что означает *vaieur principal* (главное значение), либо звездочкой сверху или снизу этого символа.

Для существования интеграла (92) в смысле главного значения по Коши при любом $t_0 \in \Gamma$ достаточно потребовать от функции μ , чтобы она удовлетворяла условию Гёльдера

$$|\mu(t_1) - \mu(t_2)| \leq L |t_1 - t_2|^h \quad (93)$$

всюду на Γ .

Действительно, пользуясь интегральной формулой Коши (40), интеграл (91) перепишем в виде

$$I_{\varepsilon}(t_0) = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt + 2\pi i \mu(t_0) - \mu(t_0) \int_{\gamma_1} \frac{dt}{t - t_0}, \quad (94)$$

где γ_1 — часть окружности γ , лежащая вне конечной области D ограниченной кривой Γ .

Из условия (93) следует существование обычного равномерного сходящегося несобственного интеграла

$$\int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt, \quad (95)$$

являющегося непрерывной функцией переменного t_0 .

Кроме того, гладкость кривой Γ обеспечивает справедливость равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{dt}{t - t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_{\gamma_1} d\varphi = \pi i. \quad (96)$$

Переходя к пределу в равенстве (94) и учитывая (95) и (96), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} = \pi i \mu(t_0) + \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt. \quad (97)$$

В случае разомкнутой гладкой кривой Γ в предположении, что точка $t_0 \in \Gamma$ не является концевой, инте-

грал в смысле главного значения по Коши определяется опять-таки как предел выражения

$$I_{\varepsilon}(t_0) = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\mu(t_0) dt}{t - t_0}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел всегда существует, если функция μ удовлетворяет условию Гёльдера.

3. Пределные значения интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого—Племеля. Будем предполагать, что плотность μ интеграла типа Коши (90) удовлетворяет условию Гёльдера, а Γ является замкнутой гладкой кривой Жордана.

Обозначим через t_0 произвольную фиксированную точку на Γ и перепишем выражение (90) следующим образом:

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - z} dt + \int_{\Gamma} \frac{\mu(t_0) dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma. \quad (98)$$

В силу интегральной формулы Коши (40) имеем

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - z} dt + 2\pi i \mu(t_0), \quad z \in D, \quad (99)$$

и

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - z} dt, \quad z \in \overline{CD}, \quad (100)$$

где D —конечная область, ограниченная кривой Γ .

Пусть

$$\varphi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - z} dt. \quad (101)$$

Легко видеть, что при $z \rightarrow t_0$ изнутри или извне области D так, что нетупой угол между отрезком $t_0 z$ и касательной к Γ в точке t_0 больше некоторого положительного числа θ , одного и того же для всех t_0 , существует предел

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \varphi(z) = \varphi(t_0)$$

равномерно относительно положения точки t_0 на Γ .

В самом деле, в силу (101) имеем

$$\varphi(z) - \varphi(t_0) = (z - t_0) \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{(t - t_0)(t - z)} dt. \quad (102)$$

Ввиду того, что Γ — гладкая кривая, окружность γ достаточно малого радиуса $|t - t_0| = \rho$ будет пересекаться с Γ только в двух точках t' и t'' . Дугу кривой Γ между t' и t'' , содержащую внутри себя точку t_0 , обозначим через Γ_1 и запишем выражение (102) в виде

$$\varphi(z) - \varphi(t_0) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = (z - t_0) \int_{\Gamma_1} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{(t - t_0)(t - z)} dt,$$

$$I_2 = (z - t_0) \int_{\Gamma_2} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{(t - t_0)(t - z)} dt,$$

а Γ_2 — дополнение Γ_1 до всей кривой Γ .

Так как Γ — гладкая кривая Жордана, то в силу формулы (10) § 2.2 гл. II существует положительная постоянная K , зависящая лишь от Γ и такая, что

$$|dt| = ds \leq K |dr|, \quad (103)$$

где $r = |t - t_0|$.

Из условия, что $z \rightarrow t_0$ указанным выше образом, в силу отмеченного в § 2.2 гл. II свойства гладкой дуги имеем

$$|t - z| > K_1 |z - t_0|, \quad (104)$$

где K_1 — положительное число, зависящее лишь от Γ и θ .

В силу (103) и (104), учитывая то обстоятельство, что μ удовлетворяет условию Гёльдера (93), находим оценку

$$|I_1| < L \frac{K}{K_1} \int_{\Gamma_1} r^{h-1} |dr| = 2L \frac{K}{K_1} \frac{\rho^h}{h}. \quad (105)$$

Для $t \in \Gamma_2$ имеем $|t - t_0| \geq \rho$. В предположении, что $|z - t_0| < \rho/2$, получим $|t - z| \geq \rho/2$. Отсюда заключаем, что

$$|I_2| < \frac{|z - t_0|}{\rho^2} M, \quad (106)$$

где постоянная M не зависит от t_0 и z .

Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ на основании неравенства (105) число ρ можно взять настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$|I_1| < \varepsilon/2. \quad (107)$$

После того как число ρ выбрано, точку z возьмем настолько близко к t_0 , чтобы в силу (106) имело место неравенство

$$|I_2| < \varepsilon/2. \quad (108)$$

Из неравенств (107) и (108) имеем

$$|\varphi(z) - \varphi(t_0)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, существуют предельные значения выражений (99) и (100), которые на основании (97) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in D}} \Phi(z) &= \Phi^+(t_0) = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt + 2\pi i \mu(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} + \pi i \mu(t_0) \end{aligned} \quad (109)$$

и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \bar{D}}} \Phi(z) = \Phi^-(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} - \pi i \mu(t_0). \quad (110)$$

Равенства (109) и (110) называются формулами Сохоцкого—Племеля. В силу непрерывности функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на Γ очевидно, что эти формулы остаются в силе при $z \rightarrow t_0$ по любому пути, лежащему внутри D и $\bar{D}$ соответственно.

Из (109) и (110) непосредственно следует справедливость равенств

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = 2\pi i \mu(t_0) \quad (111)$$

и

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0}. \quad (112)$$

4. Задача Дирихле для гармонических функций в круге.
В математической физике весьма важную роль играет следующая задача Дирихле: *найти гармоническую в круге $|z - z_0| < R$ функцию $u(x, y) = u(z)$, непрерывную в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$ и принимающую заданные непрерывные значения $h(t)$ на окружности $|z - z_0| = R$.*

Если дополнительно известно, что функция $f(z)$, действительной частью которой является гармоническая в круге $|z - z_0| < R$ функция $u(z)$, удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$, то в силу формул (82) и (109) функцию $u(z)$ можно представить формулой Пуассона (84).

Докажем, что формула Пуассона (84) дает решение задачи Дирихле и в приведенной выше формулировке.

В предположениях $z_0 = 0$, $R = 1$ (как будет показано в § 3.5 гл. VII, этим общность не ограничивается) формула Пуассона (84) принимает вид

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} h(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad |z| < 1. \quad (113)$$

В том, что представленная формулой (113) функция $u(z)$ при $|z| < 1$ является гармонической, легко убедиться непосредственной проверкой.

В самом деле, функция

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}$$

при $|z| < 1$ является гармонической, а правую часть (113) при $|z| < 1$ можно дифференцировать под знаком интеграла.

Следовательно,

$$\Delta u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} h(e^{i\varphi}) d\varphi = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Так же легко показать, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < 1}} u(z) = h(z_0), \quad z_0 = e^{i\varphi_0}. \quad (114)$$

Действительно, для постоянной гармонической функции $u(z) = 1$ имеет место представление

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\varphi, \quad |z| \leq 1. \quad (115)$$

Следовательно,

$$u(z) - h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} [h(e^{i\varphi}) - h(e^{i\varphi_0})] d\varphi. \quad (116)$$

В силу равномерной непрерывности функции $h(e^{i\varphi})$ на окружности $|z|=1$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех φ и φ_0 , удовлетворяющих условию $|\varphi - \varphi_0| < \delta$, имеем

$$|h(e^{i\varphi}) - h(e^{i\varphi_0})| < \varepsilon. \quad (117)$$

Перепишем (116) в виде

$$u(z) - h(z_0) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} [h(e^{i\varphi}) - h(e^{i\varphi_0})] d\varphi,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \right) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} [h(e^{i\varphi}) - h(e^{i\varphi_0})] d\varphi.$$

На основании (115) и (117) имеем $|I_1| < \varepsilon$.

После выбора $\delta(\varepsilon)$ возьмем z настолько близко к z_0 , чтобы имело место неравенство

$$\left(\int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \right) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\varphi < \frac{\pi\varepsilon}{M}, \quad M = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |h(e^{i\varphi})|,$$

т. е. $|I_2| < \varepsilon$. Тем самым равенство (114) доказано.

УПРАЖНЕНИЯ

Показать справедливость следующих утверждений.

1. Если $f(z)$ — аналитическая в односвязной области D функция, а γ — замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в D , то

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} dz = 0.$$

2. Если γ — единичная окружность $|z|=1$, то

$$\int_{\gamma} e^z d\bar{z} = -2\pi i.$$

3. Если D — единичный круг и n — натуральное число, то

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{t^n d\xi d\eta}{t-z} = z^{n-1} (1-z\bar{z}), \quad \xi + i\eta = t, \quad z \in D.$$

4. Если функция $f(z)$ аналитична всюду на комплексной плоскости и для всех достаточно больших $|z|$ имеет место неравенство $|f(z)| < M|z|^n$, где M — положительная постоянная, а n — неотрицательное целое число, то $f(z)$ — полином степени не выше n .

5. Каждая ветвь функции $\log z$ может быть получена при помощи интегрирования функции $1/z$ вдоль подходящим образом подобранного пути, соединяющего точку $z_0 = 1$ с точкой z .

6. Принцип максимума модуля справедлив для любой непрерывной однолистной в области D функции $f(z)$ комплексного переменного z .

7. Пусть M и m — верхняя и нижняя грани значений гармонической в области D функции $u(x, y)$. Отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(x, y)$ внутри этой области не может достигать ни максимума, ни минимума (принцип экстремума для гармонической функции).

8. Если $0 < t_0 < 1$, то

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{t-t_0} = \frac{1}{2} + t_0 + t_0^2 \log \frac{1-t_0}{t_0},$$

где под $\log \frac{1-t_0}{t_0}$ понимается ветвь этой функции, принимающая действительные значения при $0 < t_0 < 1$.

9. Если ветвь функции $\log \frac{z-b}{z-a}$, где a и b — действительные числа ($a < b$), выбрана так, что

$$\log \frac{z-b}{z-a} = \int_a^b \frac{dt}{t-z},$$

то функция

$$\omega(z, a, b) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{z-b}{z-a}$$

гармонична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и

$$\lim_{z \rightarrow x} \omega(z, a, b) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & -\infty < x < a, \quad b < x < \infty, \\ 1-\lambda, & x=a, \\ \lambda, & x=b, \end{cases}$$

где $\lambda = \lim_{z \rightarrow c} \arg(z-c)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, а постоянная c принимает значения a и b (предполагается, что путь, по которому $z \rightarrow c$, в точке c имеет касательную).

Функция $\omega(z, a, b)$ называется *гармонической мерой* прямолинейного отрезка ab в точке z относительно верхней полуплоскости.

10. Если Γ — замкнутая гладкая кривая Жордана, n и m — отрицательные целые числа и $t_0 \in \Gamma$, то

$$\int_{\Gamma} \frac{t^n dt}{t-t_0} \int_{\Gamma} \frac{\tau^m d\tau}{\tau-t} = -\pi^2 t_0^{n+m}.$$

11. Если n и m — неотрицательные целые числа и $0 < t_0 < 1$, то

$$\int_0^1 \frac{t^n dt}{t-t_0} \int_0^1 \frac{\tau^m d\tau}{\tau-t} = -\pi^2 t_0^{n+m} + \int_0^1 d\tau \int_0^1 \frac{t^n \tau^m}{(t-t_0)(\tau-t)} dt.$$

12. Из принципа экстремума для гармонической функции следует единственность решения задачи Дирихле.

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Ряд Тейлора

1. Теорема Тейлора. В § 1.2 гл. III было показано, что сумма $s(z)$ степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1)$$

внутри его круга сходимости $|z - z_0| < R$ является аналитической функцией. Этот факт, впрочем, следует также и из первой теоремы Вейерштрасса (гл. IV, § 3.3), если учесть, что в любом круге $|z - z_0| \leq R_1 < R$ рассматриваемый ряд сходится равномерно.

Имеет место и обратное утверждение, известное под названием теоремы Тейлора: *аналитическая в области D функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представляется в виде степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (2)$$

радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние d от z_0 до границы Γ области D .

В самом деле, в круге $|z - z_0| < \delta < d$ в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)}, \quad (3)$$

где γ — окружность $|t - z_0| = \delta$.

Ввиду того, что для каждой фиксированной точки z круга $|z - z_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| = q < 1, \quad t \in \gamma,$$

ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} \quad (4)$$

сходится равномерно на γ и, следовательно, равенство (3) можем переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad (5)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (6)$$

или, принимая во внимание формулу (46) гл. IV,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (7)$$

Так как ряд в левой части (4) для каждой фиксированной точки z круга $|z-z_0| < \delta$ сходится равномерно относительно $t \in \gamma$, а коэффициенты a_k в силу теоремы Коши одни и те же для всех δ из промежутка $0 < \delta < d$, то радиус сходимости степенного ряда (5) не меньше, чем d .

Ряд (5), коэффициенты которого выражаются через аналитическую функцию $f(z)$ по формулам (6) и (7), называется *рядом Тейлора* или *разложением Тейлора* функции $f(z)$.

Очевидно, что каждый степенной ряд внутри своего круга сходимости является рядом Тейлора для своей суммы $s(z)$.

Из (7) следует, что разложение аналитической функции $f(z)$ в ряд Тейлора возможно единственным образом.

2. Единственность аналитической функции. Из теоремы Тейлора, как следствие, получается утверждение: *если аналитические в области D функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ равны между собой на некотором множестве $E \subset D$, имеющем по крайней мере одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f(z) = \varphi(z)$ всюду в области D* (внутренняя теорема единственности аналитической функции).

Действительно, множество E содержит последовательность точек $\{z_n\}$, $n=1, 2, \dots$, сходящуюся к точке z_0 ,

причем по условию

$$f(z_n) = \varphi(z_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

В силу теоремы Тейлора в окрестности $|z - z_0| < \delta < d$ точки z_0 функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ разлагаются в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (9)$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \quad (10)$$

Начиная с определенного номера n , точки z_n все лежат в круге $|z - z_0| < \delta$. Подставляя выражения (9) и (10) для $f(z)$ и $\varphi(z)$ в равенства (8) и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $a_0 = b_0$.

Следовательно, для всех точек последовательности $\{z_n\}$, лежащих в круге $|z - z_0| < \delta$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1}. \quad (11)$$

Из равенства (11) при $n \rightarrow \infty$ в пределе получим $a_1 = b_1$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что $a_k = b_k$ для всех номеров k и, стало быть, $f(z) = \varphi(z)$ в круге $|z - z_0| < \delta$ всюду.

Пусть теперь z_* — любая точка области D . Соединим z_0 с z_* непрерывной кривой L , лежащей в D , и рассмотрим круг $C(\delta_1, \tau)$: $|z - \tau| < \delta_1$, где $\tau \in L$, а δ_1 меньше, чем расстояние между L и границей Γ области D .

Передвигая центр круга $C(\delta_1, \tau)$ из точки z_0 вдоль L к точке z_* и повторяя приведенное выше рассуждение, приходим к заключению, что $f(z_*) = \varphi(z_*)$. Так как z_* — произвольная точка области D , то тем самым сформулированное утверждение доказано.

3. Нули аналитической функции. Точка z_0 из области задания функций $f(z)$, в которой $f(z_0) = 0$, называется нулем функции $f(z)$.

В области D аналитичности функции $f(z)$ число ее нулей, находящихся от границы Γ области D на расстоянии, не меньшем $1/n$, для каждого натурального n в силу теоремы единственности конечно. Следовательно, аналитическая функция $f(z)$ в области своего задания может иметь лишь счетное множество нулей (предполагается, что $f(z) \not\equiv 0$).

В области аналитичности, в окрестности своего нуля z_0 функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad a_m \neq 0, \quad (12)$$

где $m \geq 1$. Число m называется *порядком* или *кратностью* нуля. Из равенств (7) следует, что z_0 является нулем кратности m для аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. При $m=1$ нуль z_0 называется *простым*.

4. Неравенства Коши и теорема Лиувилля. Пусть сумма $s(z)$ степенного ряда (1) ограничена в круге сходимости $|z-z_0| < R$, т. е.

$$|s(z)| < M, \quad |z-z_0| < R, \quad (13)$$

где M — положительное число.

Коэффициенты a_k ряда (1) выражаются через $s(z)$ по формулам (6):

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{s(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad (14)$$

где γ — окружность $|t-z_0| = \delta < R$.

В силу (13) и (14) следует, что

$$|a_k| < \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}} M = \frac{M}{\delta^k}. \quad (15)$$

Переходя к пределу при $\delta \rightarrow R$, из (15) получим неравенства Коши

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Непосредственным следствием неравенств Коши (16) является теорема Лиувилля: *если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|f(z)| < M$, где M — положительное число, то $f(z) = \text{const}$.*

В самом деле, так как $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, то радиус сходимости ее разложения (5) равен $+\infty$. Следовательно, неравенства (16) имеют место для любого $R > 0$.

Устремляя R к $+\infty$, из (16) получим

$$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, стало быть, $f(z) = a_0 = \text{const.}$

Заметим, что теорема Лиувилля является частным случаем утверждения, сформулированного в упр. 4 гл. IV.

§ 2. Ряд Лорана. Изолированные особые точки

1. Теорема Лорана. Рассмотрим функциональный ряд с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k, \quad z_0 \neq \infty, \quad (17)$$

каждый член которого имеет смысл для всех точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z-z_0| > 0$.

В результате замены $z-z_0 = 1/\zeta$ ряд (17) запишется в виде обычного степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^k. \quad (18)$$

Приняв $\zeta = 0$ при $z = \infty$, убедимся в том, что если $|\zeta| < r_1$ — круг сходимости степенного ряда (18) на плоскости переменного ζ , то ряд (17) сходится, и притом абсолютно, в каждой точке вне замкнутого круга $|z-z_0| \leq r = 1/r_1$ и его сумма $s_2(z) = s_*\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, где $s_*(\zeta)$ — сумма ряда (18). Так как вне круга $|z-z_0| < \rho$ для любого $\rho > r$ ряд (17) сходится равномерно, то в силу первой теоремы Вейерштрасса функция $s_2(z)$ аналитична во всех точках комплексной плоскости z , удовлетворяющих условию $|z-z_0| > r$.

Функциональный ряд (17) естественно назвать *степенным рядом по отрицательным степеням $z-z_0$* .

Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad (19)$$

сходится в круге $|z-z_0| < R$, а степенной ряд (17) по отрицательным степеням $z-z_0$ — вне круга $|z-z_0| \leq r$, то при $r < R$, обозначая их суммы в каждой точке z

кольца K : $r < |z - z_0| < R$ соответственно через s_1 и s_2 , заключаем, что функция $s(z) = s_1(z) + s_2(z)$ аналитична в кольце K и представляет в нем сумму ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = s(z). \quad (20)$$

Легко доказывается и обратное утверждение—теорема Лорана: аналитическая в кольце K функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представляется в виде ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z), \quad (21)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (22)$$

а γ —окружность $|t - z_0| = \delta$, $r < \delta < R$.

Действительно, пусть $z \in K$, и рассмотрим кольцо K_1 : $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. По интегральной формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r_1} \frac{f(t) dt}{t-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)}{t-z_0} \frac{dt}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r_1} \frac{f(t)}{z-z_0} \frac{dt}{1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Очевидно, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} \quad (24)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}} \quad (25)$$

сходятся равномерно относительно t соответственно при $|t - z_0| = R_1$ и $|t - z_0| = r_1$.

Заменяя в (23) выражения $\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}}$ и $\frac{1}{1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}}$ рядами

(24) и (25), получим равенство (21), в котором

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (26)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r_1} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k=-1, -2, \dots \quad (27)$$

Так как подынтегральное выражение $f(t)(t-z_0)^{-k-1}$ в правых частях формул (26) и (27) аналитично при $t \in K$, то в силу теоремы Коши заключаем, что

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k=-1, -2, \dots, \quad (29)$$

где γ —любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая в кольце K .

Формула (22) является единой записью формул (28) и (29). Тем самым теорема Лорана доказана полностью.

Ряд в левой части (21), коэффициенты которого выражаются через $f(z)$ по формулам (22), называется *рядом Лорана* или *лорановским разложением* аналитической в кольце K функции $f(z)$, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = f_1(z-z_0) \quad (30)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k} = f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \quad (31)$$

— соответственно *правильной*, или *регулярной*, и *главной*, или *иррегулярной*, частями лорановского разложения. Очевидно, что ряд (30) сходится в круге $|z-z_0| < R$, а ряд (31)—вне замкнутого круга $|z-z_0| \leq r$.

Ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, когда $a_k=0$, $k=-1, -2, \dots$

В данном круговом кольце K : $r < |z-z_0| < R$ (может оказаться, что $r=0$ или $R=+\infty$) аналитическая функция $f(z)$ единственным образом разлагается в ряд Лорана.

В самом деле, пусть

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k, \quad z \in K. \quad (32)$$

Умножая (32) на $(z-z_0)^{-n-1}$ и интегрируя вдоль окружности $\gamma: |z-z_0|=\delta$, $r<\delta<R$, на основании формул (12) гл. IV получим $a_n=b_n$, $n=\dots, -1, 0, 1, \dots$, что и требовалось доказать.

2. Изолированные особые точки аналитической функции. Если в некоторой окрестности $|z-z_0|<\delta$ точки z_0 комплексной плоскости z функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки z_0 (в которой она может быть и не задана), то z_0 называется *изолированной особой точкой* аналитической функции $f(z)$.

Согласно теореме Лорана функция $f(z)$ в кольце $0<r<|z-z_0|<\delta$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \quad (33)$$

Ввиду того, что r можно брать как угодно близко к нулю, представление (33) годится для всех значений z , удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$.

В зависимости от того, будет ли множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $z-z_0$ в лорановском разложении (33) функции $f(z)$ *пусто*, *конечно* или *бесконечно*, *изолированная особая точка* z_0 называется *устранимой особой точкой*, *полюсом* или *существенно особой точкой*.

По определению *устранимой особой точки* z_0 , в области $0<|z-z_0|<\delta$ функция $f(z)$ представляется в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \quad (34)$$

Так как ряд в правой части (34) сходится в круге $|z-z_0|<\delta$ и его сумма $s(z)$ является аналитической функцией в этом круге, совпадающей с $f(z)$ при $z \neq z_0$, то, приняв за значение $f(z)$ в точке z_0 число $a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = s(z_0)$, получаем, что $f(z)$ аналитична в указанном круге, и, стало быть, *в каждой окрестности* $|z-z_0|<\delta_1<\delta$ *устранимой особой точки* z_0 *функция* $f(z)$ *ограничена*.

Предположим теперь, что z_0 является полюсом функции $f(z)$. Обозначив через m наибольшее натуральное число среди индексов k , отличных от нуля коэффициентов a_{-k} при отрицательных степенях $z-z_0$, из (33)

получим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^m a_{-k} (z-z_0)^{-k}. \quad (35)$$

Число m называется *порядком* полюса z_0 . При $m=1$ полюс называется *простым*.

В силу (35) для функции

$$F(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} + \sum_{k=1}^m a_{-k} (z-z_0)^{m-k}$$

центр круга $|z-z_0| < \delta$ является устранимой особой точкой. Поэтому $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} F(z) = a_{-m} \neq 0$, откуда, согласно

определению предела, следует, что для любого положительного $\varepsilon < |a_{-m}|$ существует число $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что в области $0 < |z-z_0| < \eta$ имеет место неравенство

$$|F(z)| > \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|f(z)| > \frac{\varepsilon}{|z-z_0|^m} \quad (36)$$

для всех z , принадлежащих области $0 < |z-z_0| < \eta$.

Неравенство (36) означает, что $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = \infty$.

Из определений нуля и полюса следует, что если $z_0 \in D$ является нулем порядка m аналитической в области D функции $f(z)$, то в некоторой окрестности $|z-z_0| < \delta$ этой точки функция $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ аналитична всюду, кроме точки z_0 , которая для $F(z)$ является полюсом порядка m .

Действительно, в некоторой окрестности $|z-z_0| < \delta_1$ точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$. Следовательно, существует окрестность $|z-z_0| < \delta < \delta_1$ точки z_0 , в которой $\varphi(z) \neq 0$. В этой окрестности функция $F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)}$ аналитична всюду, кроме точки z_0 , причем ввиду того, что в указанной окрестности функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ разлагается в ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $a_0 \neq 0$,

лорановским разложением функции $F(z)$ является ряд

$$F(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} + \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0}. \quad (37)$$

Так как $a_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$, то из (37) следует, что точка z_0 является полюсом порядка m для функции $\frac{1}{f(z)}$.

Предположим теперь, что $z=z_0$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$. В силу (36) существует такая область $0 < |z-z_0| < \delta$, в которой $f(z) \neq 0$. В этой области функция $\frac{1}{f(z)}$ аналитична, причем из (35) вытекает, что

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)}, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} + a_{-m} + a_{-m+1} (z-z_0) + \dots + a_{-1} (z-z_0)^{m-1}.$$

Доопределяя функцию $\varphi(z)$ в точке z_0 как $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = a_{-m}$ и учитывая, что $a_{-m} \neq 0$ (порядок полюса равен m), заключаем, что в окрестности $|z-z_0| < \delta$ точки z_0 функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ аналитична, причем $\frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{a_{-m}} \neq 0$. Отсюда в свою очередь следует, что после доопределения в точке z_0 по формуле

$$\frac{1}{f(z)} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{1}{f(z)}$$

функция $\frac{1}{f(z)}$ становится аналитической при $|z-z_0| < \delta$, причем точка z_0 для нее является нулем порядка m .

Непосредственным следствием только что изложенных фактов является предложение: если в некоторой окрестности существенно особой точки z_0 аналитическая функция $f(z) \neq 0$, то эта точка является существенно особой и для $\frac{1}{f(z)}$.

По определению, в окрестности существенно особой точки z_0 аналитическая функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = f_1(z - z_0) + f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right),$$

где f_1 и f_2 даются формулами (30) и (31). Так как ряд в левой части (31) в рассматриваемом случае сходится для всех точек z расширенной комплексной плоскости,

кроме точки z_0 , то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^k = f_2(\zeta)$, где $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$,

будет сходиться во всех точках плоскости переменного ζ . По теореме Лиувилля $f_2(\zeta)$ не может быть ограниченной на плоскости ζ . Следовательно, существует сходящаяся к $\zeta = \infty$ последовательность точек ζ_k , $k = 1, 2, \dots$, обладающая тем свойством, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\zeta_k) = \infty$. Отсюда для

последовательности точек $z_k = \frac{1}{\zeta_k} + z_0$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_2\left(\frac{1}{z_k - z_0}\right) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_1(z_k - z_0) = a_0$$

и, стало быть,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \infty. \quad (38)$$

На основании равенства (38) легко доказывается следующая важная теорема Сохоцкого—Вейерштрасса о поведении аналитической функции $f(z)$ вблизи существенно особой точки: *множество E значений, принимаемых аналитической функцией $w = f(z)$ в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки z_0 , всюду плотно на расширенной комплексной плоскости w , т. е. каждая точка α расширенной комплексной плоскости w либо принадлежит множеству E , либо является его предельной точкой.*

В самом деле, в окрестности z_0 либо существует такая точка z_1 , в которой $f(z_1) = \alpha$, и тогда теорема доказана, либо существует такая окрестность точки z_0 , в которой всюду $f(z) \neq \alpha$. В последнем случае z_0 является существенно особой точкой и для функции $\frac{1}{f(z) - \alpha}$, и в силу

(38) можно найти такую последовательность $z_k \rightarrow z_0$, что

$$\lim_{z_k \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z_k) - \alpha} = \infty,$$

т. е.

$$\lim_{z_k \rightarrow z_0} f(z_k) = \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Из установленных выше положений о поведении аналитической функции вблизи изолированной особой точки непосредственно следует справедливость утверждения: *изолированная особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ является:* а) *устранимой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \beta \neq \infty$; б) полюсом порядка m , если $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta, \beta \neq 0, \beta \neq \infty$; в) существенно особой, если множество всех значений, принимаемых $f(z)$ в любой сколь угодно малой окрестности этой точки, всюду плотно на расширенной комплексной плоскости.*

Существенным обобщением теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса является следующее утверждение, принадлежащее Пикару: *в любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция $f(z)$ принимает любое конечное значение α (причем бесконечное число раз), за исключением, быть может, одного.* Не доказывая эту теорему, заметим лишь, что в случае аналитической функции $f(z) = e^{1/z}$, $z \neq 0$, для которой $z = 0$ — существенно особая точка, исключительным значением является $\alpha = 0$.

3. Бесконечно удаленная изолированная особая точка.

Пусть теперь изолированной особой точкой для $f(z)$ является бесконечно удаленная точка, т. е. для любого достаточно большого $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ аналитична в области $|z| > \varepsilon$ всюду, кроме точки $z = \infty$.

Очевидно, что функция $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в круге $|\xi| = \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$ всюду, кроме точки $\xi = 0$, являющейся изолированной особой точкой для этой функции. Поэтому лорановское разложение $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ вблизи точки $\xi = 0$:

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \xi^{-k}$$

после замены переменного $\xi = \frac{1}{z}$ дает лорановское разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}. \quad (39)$$

В зависимости от того, является ли $\xi = 0$ устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой для функции $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$, говорят, что $z = \infty$ есть устранимая особая точка, полюс или существенно особая точка для $f(z)$. Следовательно, в зависимости от того, будет ли множество отличных от нуля коэффициентов при положительных степенях z в разложении (39) пусто, конечно или бесконечно, $z = \infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой для функции $f(z)$.

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ в правой части (39) называются соответственно главной и правильной частями аналитической функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = \infty$.

Все то, что было сказано о поведении аналитической функции вблизи конечной изолированной особой точки, справедливо и в том случае, когда изолированной особой точкой является $z = \infty$.

4. Понятия целой и мероморфной функций. Как уже было отмечено в § 1.2 гл. III, полином

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$$

является аналитической функцией в каждой конечной точке z расширенной комплексной плоскости, а $z = \infty$ для этой функции представляет собой изолированную особую точку.

Лорановским разложением $P_n(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ является сумма $\sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$. Следовательно, для полинома $P_n(z)$ на расширенной комплексной плоскости z единственной особой точкой является $z = \infty$, причем она устранима, если $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и представляет собой полюс порядка n , если $a_n \neq 0$.

Рациональная функция

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad Q_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^{m-k}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0,$$

аналитична на расширенной плоскости комплексного переменного z всюду, кроме точки $z = \infty$ и нулей ее знаменателя $Q_m(z)$.

Из очевидных равенств

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \beta \neq \infty, \quad n \leq m, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m-n} R(z) = \frac{a_0}{b_0}, \quad n > m,$$

следует, что $z = \infty$ для функции $R(z)$ является устранимой особой точкой при $n \leq m$ и полюсом порядка $n - m$ при $n > m$. Очевидно также, что для $R(z)$ нуль z_k полинома $Q_m(z)$ кратности λ_k является полюсом порядка λ_k при $P_n(z_k) \neq 0$, а если к тому же z_k — нуль кратности μ_k полинома $P_n(z)$, то z_k является полюсом порядка $\lambda_k - \mu_k$ при $\lambda_k > \mu_k$ и устранимой особой точкой при $\lambda_k \leq \mu_k$.

Аналитическая на комплексной плоскости z функция $f(z)$ называется целой. У целой функции единственной особой точкой на расширенной комплексной плоскости является бесконечно удаленная точка.

В зависимости от того, является ли $z = \infty$ для целой функции $f(z)$ устранимой особой точкой или полюсом, $f(z)$ есть постоянная или полином. Действительно, если $z = \infty$ является устранимой особой точкой $f(z)$, то в некоторой окрестности этой точки $|z| > \varepsilon$ функция $f(z)$ ограничена. Но в силу непрерывности $|f(z)|$ ограничен и в круге $|z| \leq \varepsilon$, и, следовательно, на основании теоремы Лиувилля заключаем, что $f(z) = \text{const}$. Если же $z = \infty$ — полюс порядка n , то разность $f(z) - f_0(z)$, где $f_0(z)$ — главная часть (полином степени n) лорановского разложения $f(z)$ вблизи $z = \infty$, на расширенной плоскости имеет в качестве единственной особой точки лишь бесконечно удаленную устранимую особую точку и, стало быть, $f(z) - f_0(z) = \text{const}$.

Целая функция, для которой $z = \infty$ является существенно особой точкой, называется целой трансцендентной.

Функция $f(z)$, аналитическая в области D всюду, кроме полюсов, называется мероморфной в D .

Очевидно, что функции $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ и $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ мероморфны на комплексной плоскости z .

Легко видеть, что мероморфная на расширенной комплексной плоскости функция $f(z)$ рациональна. Это следует из того, что для целой функции

$$f(z) - \sum_{k=1}^m f_k \left(\frac{1}{z - z_k} \right) = \Phi(z),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ — все отличные от $z = \infty$ полюсы $f(z)$ на расширенной комплексной плоскости, а $f_k \left(\frac{1}{z - z_k} \right)$ — соответствующая полюсу z_k главная часть лорановского разложения, $z = \infty$ является либо устранимой особой точкой, либо полюсом порядка n , и, следовательно, как уже было доказано, $\Phi(z)$ — либо постоянная, либо полином степени n .

5. Формула Пуассона — Иенсена. Если аналитическая в круге $|z| < \rho$ функция $f(z)$ при $|z| \leq \rho$ непрерывна и имеет конечное число нулей z_k , $0 < |z_k| < \rho$, $k = 1, 2, \dots, m$ (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность), то имеет место формула Пуассона — Иенсена

$$\begin{aligned} \log |f(z)| = & - \sum_{k=1}^m \lg \left| \frac{\rho^2 - \bar{z}_k z}{\rho(z - z_k)} \right| + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\rho e^{i\theta} + z}{\rho e^{i\theta} - z} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta, \quad |z| < \rho. \end{aligned} \quad (40)$$

В самом деле, функция

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^m \frac{\rho^2 - \bar{z}_k z}{\rho(z - z_k)}$$

после ее дополнения в точках z_k как $\lim_{z \rightarrow z_k} F(z)$ становится аналитической при $|z| \leq \rho$, непрерывной и отличной от нуля при $|z| \leq \rho$. Поэтому гармоническую при $|z| < \rho$ и непрерывную при $|z| \leq \rho$ функцию $\log |F(z)|$ при $|z| < \rho$ можно представить формулой Пуассона [см. формулу (84) гл. IV]:

$$\log |F(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\rho e^{i\theta} + z}{\rho e^{i\theta} - z} \log |F(\rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Отсюда, учитывая то обстоятельство, что при $t = \rho e^{i\theta}$ имеют место равенства

$$\left| \frac{\rho^2 - \bar{z}_k t}{\rho(t - z_k)} \right| = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

сразу получим формулу (40).

§ 3. Элементы теории вычетов

1. Понятие вычета. Пусть z_0 — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$, а γ — произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, лежащая в области аналитичности $f(z)$ и окружающая z_0 , причем область D_γ с границей γ не содержит других особых точек, кроме z_0 .

В силу теоремы Коши значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

взятого вдоль γ в направлении, оставляющем D_γ слева, одно и то же для всех γ , и оно называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 .

Для вычета ниже будем пользоваться обозначением

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z). \quad (41)$$

При вычислении вычета можно считать, что γ — окружность $|z - z_0| = \delta$ достаточно малого радиуса.

В предположении, что z_0 — конечная точка, разложим функцию $f(z)$ в окрестности z_0 в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (42)$$

Интегрируя (42) и пользуясь формулами (12) гл. IV, получим

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1}. \quad (43)$$

Следовательно, *вычет аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z_0 \neq \infty$ равен коэффициенту a_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении (42).*

Очевидно, что в случае, когда z_0 — устранимая особая точка, $\operatorname{Res} f(z) = 0$. Если же z_0 — полюс порядка m , то из (42) получаем

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (44)$$

В частности, если z_0 является простым полюсом функции $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, т. е. $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то из (44) находим

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Предположим теперь, что изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является бесконечно удаленной.

В качестве γ в формуле (41) примем окружность $|z| = \varepsilon$ достаточно большого радиуса. Так как на этот раз интегрирование вдоль γ происходит в направлении, оставляющем круг $|z| < \varepsilon$ справа, и лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет вид $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$, то из (43) получаем

$$\operatorname{Res} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} f(z) dz = -a_{-1}. \quad (45)$$

Из последней формулы, в частности, следует, что вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки, в отличие от конечной устранимой особой точки, может оказаться отличным от нуля.

2. Вычисление некоторых контурных интегралов. Ниже всегда будем предполагать, если противное не оговорено, что D — конечная односвязная область с кусочно-гладкой жордановой границей Γ . Легко видеть, что все изложенные ниже результаты остаются справедливыми, если D является n -связной конечной областью, граница Γ которой состоит из n попарно непересекающихся замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых.

Рассмотрим функцию $f(z)$, непрерывную в $\bar{D}$ и аналитическую в D всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, n$. Удаляя каждую точку z_k из области D вместе с достаточно малым

кругом $|z - z_k| \leq \delta$, лежащим в D , и для оставшейся части D применяя теорему Коши, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|t - z_k| = \delta} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (46)$$

Из формул (45) и (46) вытекает следующее утверждение: если функция $f(z)$ аналитична на расширенной комплексной плоскости всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_0 = \infty, z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0. \quad (47)$$

Действительно, при достаточно большом $\varepsilon > 0$ точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ лежат все внутри круга $|z| < \varepsilon$. Поэтому из формулы (46) имеем

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} f(z) dz. \quad (48)$$

Но в силу (45) интеграл в правой части (48) с обратным знаком дает $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$, откуда следует (47).

Предположим теперь, что функция $\varphi(z)$ непрерывна в $\bar{D}$ и аналитична в D , а $f(z)$ аналитична в $\bar{D}$ всюду, кроме конечного числа полюсов $\beta_k \in D, k=1, 2, \dots, n$, и $f(z) \neq 0$ в $\bar{D}$ всюду, кроме конечного числа нулей $\alpha_k \in D, k=1, 2, \dots, m$. Кратность нуля α_k и порядок полюса β_k обозначим через λ_k и μ_k соответственно.

Функция $\Phi(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ непрерывна в $\bar{D}$ и аналитична в области D всюду, кроме, быть может, точек α_k и β_k , являющихся возможными ее полюсами.

Ввиду того, что вблизи точки α_k имеет место равенство $f(z) = (z - \alpha_k)^{\lambda_k} f_1(z)$, где $f_1(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки α_k функция, удовлетворяющая условию $f_1(\alpha_k) \neq 0$, то в этой окрестности имеем $\frac{f'(z)}{f(z)} =$

$= \frac{\lambda_k}{z - \alpha_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$. Отсюда следует, что коэффициент при $(z - \alpha_k)^{-1}$ в лорановском разложении функции $\Phi(z)$ вблизи точки α_k равен $\varphi(\alpha_k) \lambda_k$. Аналогичным рассуждением убеждаемся в том, что коэффициент при $(z - \beta_k)^{-1}$ в лора-

новском разложении $\Phi(z)$ вблизи точки β_k равен $-\varphi(\beta_k)\mu_k$. Следовательно, на основании (43) и (46) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi(\alpha_k) - \sum_{k=1}^n \mu_k \varphi(\beta_k). \quad (49)$$

3. Принцип аргумента аналитической функции. В предположении, что $\varphi(z) \equiv 1$, из формулы (49) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m \lambda_k - \sum_{k=1}^n \mu_k = N - P, \quad (50)$$

где N и P — соответственно число нулей и полюсов $f(z)$ внутри D , причем каждый нуль и каждый полюс берутся столько раз, каковы их кратность или порядок.

Так как $f(z)$ аналитична на Γ и на ней всюду отлична от нуля, то существует двусвязная область D_0 с границами Γ_0 и Γ_1 , содержащая внутри себя контур Γ , в которой функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ аналитична.

Пусть D_1 — односвязная область, полученная из D_0 проведением разреза L , причем всегда можно считать, что L пересекается Γ только в одной точке. В области D_1 всюду имеет место равенство $\frac{d}{dz} [f(z) e^{-\Phi(z)}] = 0$, где $\Phi(z)$ есть неопределенный интеграл от функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Следовательно, $f(z) = e^{\Phi(z) - \Phi(z_0)} f(z_0)$, где z_0 — фиксированная точка области D_1 .

Введем в рассмотрение однозначную в области D_1 функцию $\log f(z) = \Phi(z) - \Phi(z_0) + \log f(z_0)$.

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \log f(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\log |f(z)| + i \arg f(z)]_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi i} [\arg f(z)]_{\Gamma}, \end{aligned}$$

где $[\]_{\Gamma}$ обозначает приращение стоящего в квадратных скобках выражения при однократном обходе точкой z контура Γ в положительном направлении, формулу (50) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_{\Gamma} = N - P. \quad (51)$$

Равенство (51) известно под названием принципа аргумента аналитической функции: если функция $f(z)$ аналитична в $\bar{D}$ всюду, кроме конечного числа полюсов $\beta_k \in D$, $k=1, 2, \dots, n$, и имеет конечное число нулей $\alpha_k \in D$, $k=1, 2, \dots, m$, причем $f(z) \neq 0$ на Γ , то приращение аргумента $f(z)$ при однократном обходе точкой z контура Γ в положительном направлении равно $2\pi(N-P)$.

Приведем несколько важных теорем, вытекающих из принципа аргумента аналитической функции.

Основная теорема алгебры: полином $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$, $a_0 \neq 0$, на расширенной плоскости комплексного переменного z имеет n нулей (корней).

Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$, то все нули $P_n(z)$ лежат внутри круга $|z| < R$ достаточно большого радиуса. Обозначив их число через N , в силу принципа аргумента для $P_n(z)$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = N. \quad (52)$$

Но интеграл в левой части (52) с обратным знаком дает вычет функции $F(z) = \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$ относительно бесконечно удаленной точки, вблизи которой

$$F(z) = \frac{n}{z} \varphi(z),$$

где функция

$$\varphi(z) = \frac{1 + \frac{n-1}{na_0} a_1 \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{na_0} \frac{1}{z^{n-1}}}{1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{z^n}}$$

аналитична при $|z| > R$ и имеет $z = \infty$ в качестве устранимой особой точки, причем $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 1$. Следовательно, лорановское разложение $F_n(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет

вид $F(z) = \frac{n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} n b_k z^{-k-1}$, если $\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}$.

Отсюда на основании (45) заключаем, что $-N = \lim_{z \rightarrow \infty} \text{Res } F(z) = -n$.

Теорема Руше: если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в $\bar{D}$ и на границе Γ области D всюду имеет место неравенство

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)|, \quad (53)$$

то внутри D обе эти функции имеют одинаковое число нулей.

Из неравенства (53) следует, что $\varphi(z) \neq 0$, $\psi(z) \neq 0$ на Γ и все значения функции $F(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ на Γ удовлетворяют условию $\left| \frac{\psi}{\varphi} - 1 \right| < 1$. Это означает, что при полном обходе точкой z контура Γ в положительном направлении приращение аргумента функции $F(z)$ равно нулю. Отсюда, принимая во внимание, что $\arg F_+(z) = \arg \psi(z) - \arg \varphi(z)$, получаем

$$[\arg \varphi(z)]_{\Gamma} = [\arg \psi(z)]_{\Gamma}. \quad (54)$$

Так как $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не имеют полюсов в D , на основании (51) и (54) заключаем, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области D имеют одинаковое число нулей.

Из теоремы Руше в свою очередь вытекает следующее весьма важное свойство однолистных аналитических функций, уже использованное нами в § 2.1 гл. III: в области однолиственности аналитической функции $f(z)$ ее производная нигде не обращается в нуль.

В самом деле, допустим обратное и обозначим через z_0 точку области однолиственности D функции $f(z)$, в которой

$$f'(z_0) = 0. \quad (55)$$

В силу (55) тейлоровское разложение $f(z)$ в окрестности z_0 имеет вид

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 2. \quad (56)$$

В силу (55) и (56) для некоторого $\delta > 0$ будем иметь

$$f'(z) \neq 0 \quad 0 < |z - z_0| < \delta, \quad (57)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} \neq 0, \quad |z - z_0| \leq \delta. \quad (58)$$

Из (58) очевидно, что

$$0 < \min_{|z - z_0| = \delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| = m,$$

Обозначим через α произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $0 < |\alpha| < m$. Следовательно, функ-

ции $\varphi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ и $\psi(z) = -\alpha + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = f(z) - a_0 - \alpha$ в круге $|z-z_0| \leq \delta$ удовлетворяют всем условиям теоремы Руше. В силу (58) число нулей $\varphi(z)$ в круге $|z-z_0| < \delta$ равно n . Поэтому, согласно теореме Руше, функция $\psi(z) = f(z) - a_0 - \alpha$ в указанном круге тоже должна иметь n нулей, каждый из которых в силу (57) является простым. Таким образом, из нашего допущения вытекает, что функция $f(z)$ принимает значение $a_0 + \alpha$ в $n \geq 2$ точках круга $|z-z_0| < \delta$, а это противоречит однолиственности $f(z)$.

4. Интегральная формула Коши для бесконечной области. Обозначим через D^+ конечную область, ограниченную замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана Γ , а через D^- — дополнение $\overline{D^+}$ до расширенной комплексной плоскости.

Когда $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, принимая $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ за значение $f(\infty)$, мы скажем, что функция $f(z)$ аналитична в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в D^- и непрерывную в $\overline{D^-}$. Пусть z — произвольная точка, $z \neq \infty$, а Γ_R — окружность $|t| = R$ настолько большого радиуса, что точка z и кривая Γ лежат в круге $|z| < R$.

В силу интегральной формулы Коши (40) гл. IV имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & z \in D^+, \\ f(z), & z \in D, \end{cases} \quad (59)$$

где D — двусвязная область, ограниченная кривыми Γ и Γ_R . Так как

$$\operatorname{Res}_{t=\infty} \frac{f(t)}{t-z} = -f(\infty), \quad z \neq \infty,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t) dt}{t-z} = f(\infty). \quad (60)$$

В силу (60) формула (59) принимает вид

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ f(\infty) - f(z), & z \in D^-, \end{cases} \quad (61)$$

где интегрирование вдоль Γ происходит в направлении, оставляющем область D^+ слева. Очевидно, что формула (61) остается в силе и при $z = \infty$.

Формула (61) называется интегральной формулой Коши для функции, аналитической в бесконечной области D^- .

Непосредственным следствием интегральных формул Коши является следующее утверждение: для того чтобы заданная на гладкой кривой Γ однозначная функция $f(t)$, удовлетворяющая условию Гельдера, была краевым значением аналитической в области D^+ или в области D^- функции $\Phi(z)$, т. е. $\Phi^+(t) = f(t)$ или $\Phi^-(t) = f(t)$ всюду на Γ , необходимо и достаточно в первом случае выполнение условия

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = 0 \quad (62)$$

для всех $z \in D^-$, а во втором случае — условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \Phi(\infty) \quad (63)$$

для всех $z \in D^+$.

Необходимость этих условий является непосредственным следствием интегральных формул Коши (40) гл. IV и (61).

Достаточность условия (62) следует из того, что для функции $\Phi(z)$, определенной на расширенной комплексной плоскости вне кривой Γ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z},$$

в силу равенства (62) и формулы (111) гл. IV будем иметь

$$\Phi^+(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t)$$

в каждой точке Γ .

Достаточность условия (63) обнаруживается аналогично, если рассмотреть функцию $\Phi(z)$, определенную вне Γ по формуле

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \Phi(\infty).$$

Условие (62) равносильно условию

$$f(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - t_0} = 0, \quad t_0 \in \Gamma. \quad (64)$$

Равенство (64) непосредственно получается из условия (62) на основании формулы (110) гл. IV.

Если теперь, обратно, $f(t)$ удовлетворяет условию (64), то для интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}$$

в силу формулы (110) гл. IV и условия (64) будем иметь

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - t_0} = 0,$$

откуда в силу формулы (111) гл. IV заключаем, что $F^+(t_0) - F^-(t_0) = F^+(t_0) = f(t_0)$ всюду на Γ и, стало быть,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = \int_{\Gamma} \frac{F^+(t) dt}{t - z} = 0$$

для всех z из D^- .

Аналогично доказывается, что условие (63) равносильно условию

$$f(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - t_0} = 2\Phi(\infty).$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что для достаточно больших $|z|$

$$\frac{1}{t - z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{z^{k+1}}, \quad t \in \Gamma,$$

а для z , достаточно близких к произвольной фиксированной точке $z_0 \in D^+$,

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0 + z_0 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(t - z_0)^{k+1}}, \quad t \in \Gamma,$$

равенства (62) и (63) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_{\Gamma} t^k f(t) dt = 0 \quad (65)$$

для достаточно больших $|z|$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}} = \Phi(\infty) \quad (66)$$

для достаточно малых $|z-z_0|$.

Следовательно, в силу единственности рядов (65) и (66) условия (62) и (63) равносильны соответственно равенствам

$$\int_{\Gamma} t^k f(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z_0} = \Phi(\infty), \quad \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t(z-z_0)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

5. Разложение на простейшие дроби мероморфной на комплексной плоскости функции. В конце § 2.4 настоящей главы было показано, что рациональная функция $R(z)$ может быть представлена (притом единственным образом) в виде

$$R(z) = P(z) + \sum_{k=1}^n f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right),$$

где $P(z)$ и $f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$ — главные части лорановских разложений $R(z)$ в окрестностях ее полюсов $z_0 = \infty$, z_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Каждое слагаемое суммы

$$f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \sum_{l=1}^{p_k} a_l^{(k)} (z-z_k)^{-l},$$

где p_k — порядок полюса z_k , называется *простейшей дробью*.

Следовательно, рациональная функция $R(z)$ комплексного переменного z после выделения ее полиномиальной части единственным образом представляется в виде суммы простейших дробей.

Пусть теперь $f(z)$ — мероморфная на плоскости комплексного переменного z функция с полюсами в точках z_k , $k = 1, 2, \dots$. Так как множество $\{z_k\}$ имеет единственную предельную точку на бесконечности, то $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$.

Главную часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки z_k обозначим опять через $f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) \quad (67)$$

равномерно сходится на любом ограниченном замкнутом множестве точек плоскости z , не содержащем точек z_k , $k=1, 2, \dots$, то разность

$$f(z) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = h(z)$$

является целой функцией. Следовательно, в этом случае для функции $f(z)$ имеем разложение вида

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right).$$

Но ряд (67) может оказаться расходящимся. В этом случае, оказывается, всегда можно указать такую последовательность полиномов $p_k(z)$, $k=1, 2, \dots$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - p_k(z) \right]$$

будет сходиться во всех точках комплексной плоскости, отличных от z_k , $k=1, 2, \dots$. Точнее, справедлива следующая теорема Миттаг-Леффлера: *если z_k , $k=1, 2, \dots$, — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих [условиям $z_k \neq 0$, $|z_k| \leq |z_{k+1}|$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$, а*

$f_k(\xi)$ — полиномы вида $\sum_{j=1}^{n_k} a_j^{(k)} \xi^j$, $k=1, 2, \dots$, то существует такая последовательность полиномов $p_k(z)$, $k=1, 2, \dots$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - p_k(z) \right] \quad (68)$$

равномерно сходится на любом ограниченном замкнутом множестве точек комплексной плоскости, не содержащем

точек z_k , $k=1, 2, \dots, n$, следовательно, представляет мероморфную на комплексной плоскости функцию $F(z)$.

В самом деле, обозначим через $p_k(z)$ сумму первых m_k членов тейлоровского разложения $\sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(k)} z^j$ аналитической в круге $|z| < |z_k|$ функции $f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$.

В силу формулы (16) гл. V имеем

$$|b_j^{(k)}| \leq M_k \left| \frac{2}{z_k} \right|^j,$$

где $M_k = \max \left| f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) \right|$ при $|z| = \left| \frac{z_k}{2} \right|$. Следовательно, при $|z| < |z_k|/4$ имеем

$$\left| f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - p_k(z) \right| < M_k \left| \frac{4z}{z_k} \right|^{m_k}. \quad (69)$$

Подберем теперь m_k так, чтобы имело место неравенство $M_k < e^{m_k}$. Отсюда, учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$, в силу теоремы Коши—Адамара заключаем, что радиус сходимости степенного ряда $\sum M_k \left(\frac{4z}{z_k}\right)^{m_k}$ равен бесконечности.

Для любого фиксированного $R > 0$ число членов последовательности $\{z_k\}$, лежащих в круге $|z| < R$, конечно. Следовательно, конечным является число слагаемых $f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - p_k(z)$, имеющих полюсы z_k в круге $|z| < R$. Для остальных же членов ряда (68) в круге $|z| < R$ имеют место оценки (69), гарантирующие равномерную сходимость ряда (68) на любом замкнутом множестве, лежащем в круге $|z| < R$ и не содержащем точек z_k . Отсюда следует, что сумма ряда (68) является аналитической функцией в круге $|z| < R$ всюду, кроме точек z_k , лежащих внутри этого круга, причем точки z_k являются полюсами $F(z)$. Устремляя R к бесконечности, заключаем, что $F(z)$ мероморфна на всей плоскости комплексного переменного z .

Доказанная теорема в принципе позволяет утверждать, что любую мероморфную на комплексной плоскости функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - p_k(z) \right],$$

где $h(z)$ — целая функция. Однако явное нахождение этого разложения довольно затруднительно.

Для наглядности мы здесь рассмотрим два примера.

Функция $\frac{1}{\sin^2 z}$ является мероморфной на плоскости комплексного переменного z с полюсами второго порядка в точках $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Ввиду того, что вблизи точки $z_k = k\pi$ имеем $\sin^2 z = (z - z_k)^2 + \sum_{l=4}^{\infty} a_l (z - z_k)^l$, главная часть лорановского разложения функции $\frac{1}{\sin^2 z}$ в окрестности $z_k = k\pi$ имеет вид $\frac{1}{(z - k\pi)^2}$.

На любом ограниченном замкнутом множестве E точек комплексной плоскости z лишь конечное число членов ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2} \quad (70)$$

может обращаться в бесконечность. Поэтому для всех $z \in E$ существует такое натуральное число N , что при $|k| \geq N$ каждый член ряда (70) по модулю не превосходит $\frac{M}{k^2 \pi^2}$, где число $M > 1$, т. е. ряд $\sum_{|k| \geq N} \frac{1}{(z - k\pi)^2}$ на множестве E сходится абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2}$$

является целой.

Нетрудно видеть, что $f(z) = 0$ всюду на комплексной плоскости.

Действительно, из равенства $|\sin^2 z| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$

следует, что $\left| \frac{1}{\sin^2 z} \right| \rightarrow 0$ при $0 \leq x \leq \pi$ и $|y| \rightarrow +\infty$.

Ввиду равномерной сходимости ряда (70) при $0 \leq x \leq \pi$ и $|y| > 1$ заключаем, что его сумма стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $f(z)$ ограничена в полосе $0 \leq x \leq \pi$, $-\infty < y < \infty$. Так как $f(z)$, как разность двух периодических функций с периодом π , периодична, то $f(z)$ ограничена на всей плоскости переменного z и, стало быть, в силу теоремы Лиувилля она

равна нулю. Тем самым доказано, что

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2}. \quad (71)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{z}{k\pi(z-k\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad (72)$$

где $\sum'$ означает, что k не может принимать значения нуля.

На любом ограниченном замкнутом множестве E точек плоскости z ряд (72), если пренебречь конечным числом его членов, сходится равномерно. Поэтому в силу первой теоремы Вейерштрасса и равенства (71) для суммы $s(z)$ ряда (72) будем иметь

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sin^2 z}. \quad (73)$$

Интегрируя равенство (73) от фиксированной точки $z_0 \neq k\pi$ до переменной точки $z \neq k\pi$ по пути, не проходящему через точки $z = k\pi$, $k = \dots -1, 0, 1, \dots$, и учитывая то обстоятельство, что

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} \right) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{\sin z} \equiv \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + C = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} + C. \end{aligned} \quad (74)$$

Умножая равенство (74) на $1/z$ и интегрируя вдоль окружности $|z|=1$, в силу равенства $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} = 0$ заключаем, что $C=0$. Поэтому формула (74) окончательно принимает вид

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (75)$$

6. Применение вычетов для вычисления некоторых определенных интегралов. Теория вычетов находит весьма полезное применение при вычислении некоторых определенных интегралов.

Ниже мы ограничимся рассмотрением трех классов определенных интегралов:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi, \quad (76)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (77)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx} dx, \quad (78)$$

где функция R рациональна относительно своих аргументов $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ и непрерывна при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и аналитична внутри нее всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, причем при рассмотрении I_2 предполагается, что для достаточно больших $|z|$ имеет место неравенство

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}, \quad M = \text{const} > 0, \quad (79)$$

а при рассмотрении I_3 предполагается, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (80)$$

равномерно относительно $\varphi = \arg z$.

В результате замены переменного интегрирования $e^{t\varphi} = z$ интеграл (76) в силу равенства $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$, принимает вид

$$I_1 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z},$$

и, следовательно, его можно вычислить по формуле (46):

$$I_1 = 2\pi \sum \operatorname{Res} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{1}{z},$$

где вычеты берутся относительно особых точек, лежащих в круге $|z| < 1$.

Для вычисления интеграла (77) рассмотрим полукруг $|z| < r$, $\text{Im } z > 0$, содержащий внутри себя все особые точки функции $f(z)$, лежащие в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. В силу формулы (46) имеем

$$\int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z), \quad (81)$$

где γ — полуокружность $|z| = r$, $\text{Im } z > 0$.

На основании неравенства (79) устанавливаем, что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \frac{\pi M}{r}. \quad (82)$$

Переходя в формуле (81) к пределу при $r \rightarrow \infty$, в силу (82) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z).$$

Для вычисления I_3 рассмотрим очевидное равенство

$$\int_{-r}^r f(x) e^{ix} dx + \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z) e^{iz}. \quad (83)$$

Обозначая через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на γ и учитывая, что

$$\int_0^{\pi} e^{-\text{Im } z \cdot r} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \varphi} \cdot r d\varphi < \pi,$$

будем иметь

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz \right| < M(r) \pi,$$

откуда на основании (80) заключаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz = 0. \quad (84)$$

Переходя к пределу в формуле (83) при $r \rightarrow \infty$ и принимая во внимание (84), получим

$$I_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z) e^{iz}.$$

В случае, когда некоторые из особых точек z_k функции $f(z)$ лежат на действительной оси и несобственный интеграл I_3 существует, его можно вычислить незначительным изменением только что изложенного способа.

Так, например, если $f(z) = 1/z$, то из очевидного равенства

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty}} \left\{ \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^r \right) \frac{e^{ix}}{x} dx + i \int_0^{\pi} e^{ir(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi - \right. \\ \left. - i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi \right\} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ следующих однозначных ветвей:

а) $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2}$, б) $\log(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{t+1}$, где пути интегрирования лежат в круге $|z| < 1$.

2. Функцию $\frac{1+z}{z(z-1)}$ разложить в ряд Лорана в областях:

а) $0 < |z| < 1$ и б) $|z| > 1$.

3. Пользуясь теоремой Лиувилля, показать, что целая функция $\omega = f(z)$, не принимающая значений ω из круга $|\omega - \omega_0| < \delta$, является постоянной.

4. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, $f(0) = 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится при $|z| < 1$ и представляет аналитическую функцию.

5. Для каких значений коэффициентов функция

$$a_0 + a_1x + a_2y + i(b_0 + b_1x + b_2y) = F(t), \quad |t| = |x + iy| = 1,$$

является граничным значением аналитической в круге $|z| < 1$ функции?

6. Применением метода вычетов вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx$.

7. Вывести формулу, аналогичную интегральной формуле Шварца для области $|z| > 1$.

8. Показать, что для всех $|z| \leq \rho$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\rho e^{i\theta} - z| d\theta = \log \rho.$$

9. Доказать справедливость приведенных ниже утверждений.

а) Если аналитическая в круге $|z| < \rho$ функция $f(z)$ при $|z| \leq \rho$ отлична от нуля всюду, кроме точки $z_0 = \rho e^{i\theta_0}$, причем функция

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}, \quad F(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) \neq 0, \infty,$$

где k — натуральное число, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq \rho$, то для гармонической в круге $|z| < \rho$ функции $\log |f(z)|$ справедливо равенство

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta.$$

б) Если аналитическая в круге $|z| < \rho$ функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq \rho$ и обращается в нуль лишь при $z=0$, причем кратность нуля $z=0$ равна m , то

$$\log \frac{1}{m!} |f^{(m)}(0)| + m \log \rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta.$$

10. Показать, что

$$\operatorname{tg} z = 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - z^2}.$$

Глава VI

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Бесконечные произведения

1. Критерий сходимости бесконечного произведения. Как уже было сказано в § 3.3 гл. I, бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный отличный от нуля предел p последовательности $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ при $n \rightarrow \infty$. Из этого определения сразу следует необходимость условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + a_k) = 1 \quad (2)$$

для сходимости бесконечного произведения (1).

Приведенное определение сходимости бесконечного произведения (1) исключает возможность обращения в нуль любого его сомножителя $1 + a_k$, $k = 1, 2, \dots$

Наряду с бесконечным произведением (1) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log (1 + a_k), \quad (3)$$

где под $\log (1 + a_k) = \log |1 + a_k| + i \arg (1 + a_k)$ понимается его *главное значение*, т. е. значение, для которого

$$-\pi < \arg (1 + a_k) \leq \pi. \quad (4)$$

В терминах сходимости ряда (3) легко получается следующий критерий сходимости бесконечного произведения (1): для сходимости бесконечного произведения (1) необходима и достаточна сходимость ряда (3).

В самом деле, из очевидного равенства $p_n = e^{s_n}$, где $s_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + a_k)$, следует, что если ряд (3) сходится, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p = e^s \neq 0,$$

а это означает сходимость бесконечного произведения (1).

Предположим теперь, что бесконечное произведение (1) сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0. \quad (5)$$

Выбирая для $\arg p$ его главное значение, определим $\arg p_n$ по условию

$$\arg p - \pi < \arg p_n \leq \arg p + \pi \quad (6)$$

и положим $\log p_n = \log |p_n| + i \arg p_n$. Очевидно, что

$$s_n - \log p_n = 2\pi i m_n, \quad (7)$$

где m_n для каждого фиксированного значения n является вполне определенным целым числом.

Из (7) имеем

$$2\pi(m_{n+1} - m_n) = \arg(1 + a_{n+1}) - \arg p_{n+1} + \arg p_n. \quad (8)$$

В силу (2), (4), (5) и (6) заключаем, что для всех достаточно больших n имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |\arg(1 + a_{n+1})| &< 2\pi/3, & |\arg p_{n+1} - \arg p| &< 2\pi/3, \\ |\arg p_n - \arg p| &< 2\pi/3. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании неравенств (9) и (8) получаем оценку

$$|m_{n+1} - m_n| < 1,$$

откуда сразу следует, что $m_{n+1} = m_n$. Следовательно, начиная с определенного значения, для всех n имеем

$$m_n = \text{const} = m. \quad (10)$$

В силу (10) и (5) из равенства (7) заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log p_n + 2m\pi i = \log |p| + i \arg p + 2m\pi i,$$

а это означает сходимость ряда (3).

2. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения. Говорят, что бесконечное произведение (1) *абсолютно сходится*, если абсолютно сходится ряд (3).

Имеет место следующее утверждение: *абсолютная сходимость бесконечного произведения (1) равносильна абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Справедливость этого утверждения вытекает из очевидного равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(1+a_k)}{a_k} = 1, \quad -\pi < \arg(1+a_k) \leq \pi,$$

ибо для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$(1-\varepsilon)|a_k| \leq \log(1+a_k) \leq (1+\varepsilon)|a_k|$$

для всех $k \geq N$.

Бесконечное произведение (1) называется *условно сходящимся*, если оно сходится, но не абсолютно. Примером условно сходящегося бесконечного произведения может служить

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right].$$

В самом деле, при n четном $p_n = 1$, а при n нечетном $p_n = \frac{n+1}{n}$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$, в то время как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ расходится.}$$

3. Равномерно сходящиеся бесконечные произведения аналитических функций. Рассмотрим бесконечное произведение аналитических в области D функций $1 + \varphi_k(z)$:

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \varphi_k(z)], \quad (11)$$

ни один из сомножителей которого нигде в D в нуль не обращается.

Бесконечное произведение (11) называется *равномерно сходящимся* в области D , если в этой области равномерно сходится последовательность

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^n [1 + \varphi_k(z)].$$

Из первой теоремы Вейерштрасса непосредственно вытекает, что в случае равномерной сходимости бесконечного произведения (11) в области D функция $p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z)$ является аналитической в D .

Может случиться, что некоторые сомножители бесконечного произведения (11) имеют нули в области D .

Сходимость бесконечного произведения (11) в подобласти D_1 области D , когда число N его сомножителей, имеющих нули в D_1 , и число нулей в D_1 каждого из этих сомножителей конечны, определяется следующим образом.

Пусть $1 + \varphi_{n_j}(z)$, $j = 1, 2, \dots, N$, являются сомножителями бесконечного произведения (11), имеющими нули в D_1 . Произведение $\prod_{j=1}^N [1 + \varphi_{n_j}(z)] = r(z)$ имеет вполне определенный смысл всюду в D_1 . Для бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \varphi_k(z)]$, $k \neq n_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, сходимость в D_1 (в том числе и равномерная) определяется по указанному выше способу. В случае сходимости произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \varphi_k(z)] = q(z), \quad k \neq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

мы скажем, что бесконечное произведение (11) сходится всюду в D_1 , и его значением является функция $p(z) = r(z)q(z)$.

§ 2. Элементы теории целых функций

1. Каноническое произведение и его род. Известно, что полином $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$ степени n представляется в виде произведения

$$P(z) = a_0 \prod_{k=1}^n (z - z_k) \quad (12)$$

и, наоборот, полином $Q(z)$ степени n с заданными нулями $z_1, z_2, \dots, z_n$ имеет вид

$$Q(z) = A_0 \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

где A_0 — произвольное комплексное число, $A_0 \neq 0$, $A_0 \neq \infty$.

Если у целой функции $f(z)$ на комплексной плоскости имеется конечное число нулей $z_1, z_2, \dots, z_n$, то, очевидно, ее можно представить в виде

$$f(z) = q(z) \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad (13)$$

где $q(z)$ — вполне определенная целая функция, отличная от нуля.

Обобщение формулы (13) на случай, когда множество E нулей целой функции $f(z)$ бесконечно, безусловно, представляет интерес.

Из теоремы единственности аналитической функции следует, что E — счетное множество,

$$E = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}, \quad (14)$$

причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty. \quad (15)$$

Без ограничения общности можно предполагать, что нумерация в (14) идет по возрастанию модулей z_k , т. е. $|z_{k-1}| \leq |z_k|$ (среди равных между собой по модулю z_k нумерация ведется в любом порядке).

Легко построить целую функцию $f(z)$ с заданными нулями (14). Пока будем предполагать, что среди чисел (14) нет равных нулю.

Прямое обобщение формулы (13) в виде

$$f(z) = q(z) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \quad (16)$$

далеко не всегда возможно по той причине, что бесконечное произведение в правой части (16) может не окантаться сходящимся.

С целью обобщения формулы (13) Вейерштрасс вместо $1 - \frac{z}{z_k}$ ввел в рассмотрение так называемые *первичные множители*

$$f_k(z) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j}. \quad (17)$$

Натуральные числа m_k всегда можно подобрать так, чтобы бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

оказалось равномерно (и абсолютно) сходящимся в любой ограниченной части плоскости z . Для этого достаточно принять, что $m_k = k-1$, т. е.

$$f_k(z) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j}, \quad k=2, 3, \dots, \quad (18)$$

$$f_1(z) = 1 - \frac{z}{z_1}.$$

Обозначим через C_k круг $|z| < |z_k|$. Он содержит внутри себя лишь конечное число точек последовательности (14). Внутри круга C_k целые функции $f_s(z)$, $s=k, k+1, \dots$, нигде в нуль не обращаются.

Покажем, что бесконечное произведение

$$\prod_{s=k}^{\infty} f_s(z) = \prod_{s=k}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_s}\right) e^{\sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j} \quad (19)$$

сходится равномерно (и абсолютно) в круге $|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|$, где ε — как угодно малое положительное число.

Прежде всего заметим, что, выбирая ветвь функции $\log\left(1 - \frac{z}{z_s}\right)$, равную нулю при $z=0$, и учитывая то обстоятельство, что внутри круга C_k ее тейлоровское разложение имеет вид

$$\log\left(1 - \frac{z}{z_s}\right) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j,$$

для $f_s(z)$ в силу (18) будем иметь

$$\log f_s(z) = - \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j,$$

т. е.

$$f_s(z) = e^{- \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j}. \quad (20)$$

На основании представления (20) выражение (19) запишется следующим образом:

$$\prod_{s=k}^{\infty} f_s(z) = e^{-\sum_{s=k}^{\infty} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j} \quad (21)$$

Но в круге $|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j \right| \leq \sum_{j=s}^{\infty} \left| \frac{z}{z_s} \right|^j = \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{z_s} \right|} \left| \frac{z}{z_s} \right|^s \leq \frac{(1-\varepsilon)^s}{\varepsilon},$$

$$s = k, k+1, \dots$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{s=k}^{\infty} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s}\right)^j$$

и, стало быть, равномерная и абсолютная сходимость бесконечного произведения (21) в круге

$$|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|.$$

Поэтому в силу сказанного в п. 3 предыдущего параграфа заключаем, что бесконечное произведение

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j} \quad (22)$$

представляет собой функцию, аналитическую в круге $|z| < |z_k|$ для любого значения k . Отсюда в свою очередь, учитывая (15), заключаем, что $\Pi(z)$ является целой функцией, причем на комплексной плоскости она обращается в нуль лишь в точках последовательности (14).

При предположении сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{\rho+1}} < \infty, \quad (23)$$

где ρ — целое неотрицательное число, первичные множители (17) можно взять в виде

$$f_k(z) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j},$$

и тогда бесконечное произведение (21) также будет сходиться равномерно и абсолютно в каждом круге $|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|$.

Действительно, в круге $|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s} \right)^j \right| &\leq \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_s} \right|^j = \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{z_s} \right|} \left| \frac{z}{z_s} \right|^{\rho+1} \leq \\ &\leq \frac{(1-\varepsilon)^{\rho+1} |z_k|^{\rho+1}}{\varepsilon} \frac{1}{|z_s|^{\rho+1}}, \end{aligned}$$

откуда, представляя бесконечное произведение (21) в виде

$$\prod_{s=k}^{\infty} f_s(z) = e^{-\sum_{s=k}^{\infty} \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_s} \right)^j}, \quad (24)$$

в силу (23) заключаем, что оно равномерно (и абсолютно) сходится в круге $|z| \leq (1-\varepsilon)|z_k|$. Следовательно, бесконечное произведение

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{\sum_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k} \right)^j} \quad (25)$$

при соблюдении условия (23) является целой функцией, обращающейся в нуль на комплексной плоскости z лишь в точках последовательности (14). Оно носит название *канонического произведения*, соответствующего последовательности (14).

Наименьшее неотрицательное целое число ρ , для которого ряд (23) сходится, называется *родом канонического произведения* (25).

Очевидно, что бесконечное произведение

$$\varphi(z) = z^{\lambda} \Pi(z) \quad (26)$$

представляет собой целую функцию, нулями которой на комплексной плоскости являются лишь точки z_k последовательности (14) и точка $z_0=0$, причем кратность нуля z_0 равна λ .

2. Представление целой функции в виде бесконечного произведения. Пусть теперь известно, что точка $z_0=0$ и точки последовательности (14) (и только они) являются

нулями наперед заданной целой функции

$$f(z) = z^\lambda f_1(z), \quad (27)$$

где λ — кратность нуля z_0 .

Очевидно, что функция

$$g(z) = \frac{f_1(z)}{\Pi(z)}, \quad g(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{f_1(z)}{\Pi(z)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где целая функция $\Pi(z)$ дается формулой (22) или (25), сама является целой, не обращающейся в нуль нигде на комплексной плоскости z . Следовательно, функция

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = h_1(z)$$

является целой и, стало быть,

$$g(z) = e^{h(z)}, \quad (28)$$

где

$$h(z) = \int_0^z h_1(t) dt + C.$$

На основании (26), (27) и (28) заключаем, что

$$f(z) = z^\lambda \Pi(z) e^{h(z)} = \varphi(z) e^{h(z)}. \quad (29)$$

Формула (29) дает представление целой функции $f(z)$ в виде бесконечного произведения. В этой формуле целая функция $h(z)$ должна быть определена каждый раз, когда конкретно задана функция $f(z)$.

3. Род целой функции. Теорема Пуанкаре. Ниже будем предполагать, что последовательность нулей (14) целой функции $f(z)$ удовлетворяет условию (23), причем, кроме них, на комплексной плоскости у $f(z)$ имеется еще лишь один нуль $z_0 = 0$ кратности λ . На этот раз в представлении (29) в качестве $\Pi(z)$ будем брать каноническое произведение (25).

В случае, когда $h(z)$ — полином, говорят, что представленная формулой (29) функция $f(z)$ является целой функцией *конечного рода*. Если целая функция $f(z)$ не имеет нулей и в представлении (29), $h(z)$ — полином, то род $f(z)$ считается равным степени $h(z)$. Если ρ — род канонического произведения (25), а ρ_1 — степень полинома $h(z)$, то число $\max(\rho, \rho_1)$ называется *родом целой функ-*

ции $f(z)$. Если же $h(z)$ — целая трансцендентная функция или ряд (23) не сходится, то $f(z)$ называется *целой функцией бесконечного рода*.

Ниже в качестве примера вычислим род функции $f(z) = \sin z$. Нулями этой функции являются точки $z_0 = 0$, $z_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, причем условие (23) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} < \infty. \quad (30)$$

Следовательно, каноническое произведение (25) в рассматриваемом случае дается формулой

$$\Pi(z) = \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}, \quad (31)$$

где штрих означает, что пропущено значение $k=0$.

На основании (30) заключаем, что род канонического произведения (31) равен единице.

В силу (31) по формуле (29) получаем

$$\sin z = z e^{h(z)} \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}. \quad (32)$$

На любом ограниченном замкнутом множестве E_1 точек комплексной плоскости z , не содержащем нулей функции $\sin z$, из (32) имеем

$$\frac{1}{\sin z} \frac{d}{dz} \sin z = \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \frac{dh}{dz} + \sum'_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \quad (33)$$

Учитывая формулу (72) гл. V, из (33) находим, что $\frac{dh}{dz} = 0$, т. е. $h(z) = \text{const}$ всюду на комплексной плоскости. Но так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, из (32) следует, что $e^{h(z)} = 1$.

Итак, окончательно имеем

$$\sin z = z \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right). \quad (34)$$

Из формулы (34) в свою очередь следует, что род функции $\sin z$ равен единице.

Пусть $f(z)$ — целая функция и $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Если $f(z)$ отлична от постоянной, то в силу теоремы Лиувилля

$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty$. Некоторое представление о характере стремления к бесконечности $M(r)$ при $r \rightarrow \infty$ для целых функций конечного рода дает следующая теорема Пуанкаре: если $f(z)$ — целая функция рода p и α — произвольное положительное число, то для всех достаточно больших r имеет место оценка

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}}. \quad (35)$$

В случае, когда число нулей функции $f(z)$ не более чем конечно, оценка (35) очевидна. Во всех остальных случаях функцию $f(z)$ всегда можно представить в виде

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{j=1}^p \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j}, \quad (36)$$

где $h(z)$ — полином степени не выше p , причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-p-1} < \infty. \quad (37)$$

Предварительно покажем, что для каждой из функций

$$\psi_m(z) = (1-z) e^{\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} z^j}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \psi_0(z) = 1 - z$$

на всей плоскости комплексного переменного z имеет место оценка

$$\log |\psi_m(z)| \leq (2m+1) |z|^{m+1}. \quad (38)$$

Для любого конечного значения z имеем

$$\log |\psi_m(z)| \leq \log |\psi_{m-1}(z)| + |z|^m, \quad m \geq 1, \quad (39)$$

а для $|z| < 1$

$$\log |\psi_m(z)| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j} |z|^j \leq \frac{|z|^{m+1}}{1-|z|},$$

т. е.

$$(1-|z|) \log |\psi_m(z)| \leq |z|^{m+1}. \quad (40)$$

Умножив (39) на $|z|$ и сложив с (40), получим, что для $|z| < 1$

$$\log |\psi_m(z)| \leq |z| \log |\psi_{m-1}(z)| + 2|z|^{m+1}. \quad (41)$$

В тех точках z , для которых $|z| \geq 1$ и $|\psi_{m-1}(z)| \geq 1$, имеем $|z| \log |\psi_{m-1}(z)| \geq \log |\psi_{m-1}(z)|$. Поэтому для указанных точек из (39) вытекает оценка (41).

Для точек же z , для которых $|z| \geq 1$ и $|\psi_{m-1}(z)| < 1$, из (39) непосредственно следует требуемая оценка (38).

Остается показать справедливость оценки (38) при наличии оценки (41).

При $m=0$ оценка (38) очевидна, ибо $\log |1-z| \leq \log (1+|z|) \leq |z|$. Допуская справедливость оценки (38) при $m=n-1$, в силу (41) убеждаемся, что она верна и при $m=n$.

Следовательно, на всей плоскости комплексного переменного z имеет место оценка

$$\log |\psi_p(z)| \leq (2p+1) |z|^{p+1}. \quad (42)$$

При $|z| > 1$ из очевидного неравенства

$$|\psi_p(z)| < 2|z|e^{\left| \sum_{j=1}^p \frac{1}{j} z^j \right|}$$

следует, что

$$\frac{\log |\psi_p(z)|}{|z|^{p+1}} < \frac{\log 2}{|z|^{p+1}} + \frac{\log |z|}{|z|^{p+1}} + \frac{\sum_{j=1}^p \frac{1}{j} z^j}{|z|^{p+1}}.$$

Отсюда заключаем, что для любого наперед заданного числа $\beta > 0$ существует число $R > 0$ такое, что для всех $|z| > R$ имеет место неравенство

$$\log |\psi_p(z)| < \beta |z|^{p+1}. \quad (43)$$

Переходим к доказательству оценки (35). Для $\alpha > 0$ в силу (37) существует $N > 0$ такое, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k|^{-p-1} < \frac{\alpha}{2(2p+1)}. \quad (44)$$

В силу (42) и (44) имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \log \left| \psi_p \left(\frac{z}{z_k} \right) \right| \leq (2p+1) \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_k} \right|^{p+1} < \frac{\alpha}{2} |z|^{p+1}. \quad (45)$$

Приняв $\beta = \alpha 4^{-1} \left(\sum_{k=1}^N |z_k|^{-p-1} \right)^{-1}$, для достаточно больших

$|z|$ в силу (43) получим

$$\sum_{k=1}^N \log \left| \psi_p \left(\frac{z}{z_k} \right) \right| < \frac{\alpha}{4} |z|^{p+1}. \quad (46)$$

Так как степень полинома $h(z)$ в правой части формулы (36) не превышает p , то $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-p-1} [\lambda \log |z| + |h(z)|] = 0$.

Следовательно, для достаточно больших $|z|$ имеем

$$\lambda \log |z| + |h(z)| < \frac{\alpha}{4} |z|^{p+1}. \quad (47)$$

На основании (45), (46) и (47) получим

$$\log |f(z)| = \log \left| z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \psi_p \left(\frac{z}{z_k} \right) \right| < \alpha |z|^{p+1},$$

откуда и следует неравенство (35).

4. Порядок целой функции. Число

$$q = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r},$$

где $M(r) = \max |f(z)|$ при $|z| = r$, называется *порядком целой функции* $f(z)$.

Из определения верхнего предела следует, что если порядок q целой функции $f(z)$ конечен, то для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для всех $r \geq r_0$ имеет место оценка

$$M(r) < e^{r^{q+\varepsilon}}. \quad (48)$$

Связь между родом и порядком целой функции устанавливается следующей теоремой: *если род p целой функции $f(z)$ конечен, то конечен и ее порядок q и обратно, причем*

$$p \leq q \leq p+1. \quad (49)$$

Справедливость первой части теоремы и неравенства $q \leq p+1$ непосредственно следует из определения порядка целой функции и из неравенства (35) при $\alpha = 1$.

Предположим теперь, что порядок q целой функции $f(z)$ конечен, и обозначим через p наибольшее целое число, не превышающее q . Очевидно, что

$$q < p+1. \quad (50)$$

При доказательстве второй части теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда среди нулей z_k , $k=1, 2, \dots$, $|z_k| \leq |z_{k+1}|$, функции $f(z)$ нет $z=0$.

Нетрудно заметить, что из конечности порядка q функции $f(z)$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-p-1}$.

В самом деле, обозначим через $N(R)$ число нулей z_k функции $f(z)$, удовлетворяющих условию $|z_k| < R$. Из формулы Пуассона—Иенсена [см. формулу (40) гл. V] при $z=0$, $\rho=eR$ имеем

$$\sum_{k=1}^N (eR) \log \frac{eR}{|z_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(eRe^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|. \quad (51)$$

Из определения $N(R)$ и равенства (51) следует, что

$$N(R) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(eRe^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|,$$

откуда в силу (48) заключаем, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N(R) R^{-q-2\varepsilon} = 0, \quad (52)$$

и, следовательно, для наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $R_0 > 0$ такое, что для всех $R \geq R_0$ имеет место неравенство

$$N(eR) < R^{q+2\varepsilon}. \quad (53)$$

Таким образом, для числа k нулей $z_1, z_2, \dots, z_k$ функции $f(z)$, начиная с определенного его значения, имеем

$$k \leq N(e|z_k|) < |z_k|^{q+2\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что, начиная с определенного значения k ,

$$|z_k|^{-p-1} < k^{-\frac{p+1}{q+2\varepsilon}}. \quad (54)$$

В силу (50) число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$q+2\varepsilon < p+1. \quad (55)$$

На основании (54) и (55) заключаем, что, начиная с определенного значения k ,

$$|z_k|^{-p-1} < k^{-\omega}, \quad \omega = \frac{p+1}{q+2\varepsilon} > 1,$$

т. е. последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет условию (37).

Следовательно, целую функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = e^{h(z)} \Pi(z), \quad (56)$$

где $\Pi(z)$ — каноническое произведение,

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\sum_{l=1}^p \frac{1}{l} \left(\frac{z}{z_k}\right)^l}. \quad (57)$$

Относительно функции $h(z)$ пока известно только то, что она целая. Вторая часть теоремы будет доказана, если мы покажем, что $h(z)$ — полином степени не выше p .

Из формулы Пуассона — Иенсена имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \log |f(z)| &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \\ &= - \sum_{k=1}^{N(p)} \frac{1}{z_k - z} + \sum_{k=1}^{N(p)} \frac{\overline{z_k}}{\rho^2 - \overline{z_k} z} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} \log |f(\rho e^{i\theta})|}{(\rho e^{i\theta} - z)^2} d\theta, \end{aligned}$$

откуда после p -кратного дифференцирования получим

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dz^p} \frac{f'(z)}{f(z)} &= - \sum_{k=1}^{N(p)} \frac{p!}{(z_k - z)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{N(p)} \frac{p! \overline{z_k}^{p+1}}{(\rho^2 - \overline{z_k} z)^{p+1}} + \\ &+ \frac{(p+1)!}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} \log |f(\rho e^{i\theta})|}{(\rho e^{i\theta} - z)^{p+2}} d\theta. \end{aligned} \quad (58)$$

Выберем ρ так, чтобы имело место неравенство (55). В силу (48) убеждаемся в том, что при $\rho \rightarrow \infty$ предел интегрального члена в правой части (58) равен нулю.

Для любого $k \leq N(p)$ и $|z| < \frac{\rho}{2}$ имеем $\left| \frac{z_k}{\rho^2 - \overline{z_k} z} \right| < \frac{2}{\rho}$, т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^{N(p)} \frac{\overline{z_k}^{p+1}}{(\rho^2 - \overline{z_k} z)^{p+1}} \right| < \frac{2^{p+1} N(p)}{\rho^{p+1}}.$$

Следовательно, в силу (52) и (55) вторая сумма в правой части (58) в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ равна нулю.

Таким образом, из (58) следует, что

$$\frac{d^p}{dz^p} \frac{f'(z)}{f(z)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{(z_k - z)^{p+1}}. \quad (59)$$

В силу (56) имеет место тождество

$$h'(z) = \frac{I'(z)}{I(z)} - \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}. \quad (60)$$

Но для канонического произведения (57) имеем

$$\frac{d^p}{dz^p} \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{(z_k - z)^{p+1}}. \quad (61)$$

На основании (59), (60) и (61) заключаем, что $h^{(p+1)}(z) \equiv 0$, а это означает, что $h(z)$ — полином степени не выше p .

5. Целые функции порядка ниже половины. Полином

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad n > 0,$$

обладает тем замечательным свойством, что нельзя найти луча на плоскости комплексного переменного z , вдоль которого $P(z)$ ограничен.

Это свойство является характерным не только для полиномов.

Если порядок q отличной от постоянной целой функции $f(z)$ ниже половины, то нельзя найти луча на комплексной плоскости, вдоль которого $f(z)$ ограничена.

Справедливость этого утверждения вытекает из определения порядка целой функции и из доказанной в гл. IV, § 3.2, теоремы Фрагмена—Линделёфа.

Действительно, допустим, что вдоль луча L , выходящего из точки z_0 , функция $f(z)$ ограничена. В теореме Фрагмена—Линделёфа примем $q < \delta < 1/2$, $\delta_1 = 1/2$ (т. е. в качестве области D берется плоскость комплексного переменного z , разрезанная вдоль луча L). Так как функция $f(z)$ удовлетворяет всем трем условиям этой теоремы, то она должна быть ограниченной на всей комплексной плоскости, а это невозможно, ибо $f(z)$ отлична от постоянной.

Пример целой функции

$$f(z) = e^{\sqrt[1]{z}} + e^{-\sqrt[1]{z}}$$

порядка $q = 1/2$, ограниченной вдоль луча $\arg z = \pi$, показывает, что приведенное выше утверждение может оказаться неверным, когда $q \geq 1/2$.

6. Представление мероморфной на комплексной плоскости функции в виде отношения двух целых функций. Пусть $f(z)$ — мероморфная на всей комплексной плоскости

функция с полюсами в точках $z_0=0, z_1, z_2, \dots$ (и только в этих точках). Очевидно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$.

Функция $\varphi(z)$, представленная бесконечным произведением (26), имеет нули в точках $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots$ (и только в этих точках). Предполагается, что порядок полюса z_k функции $f(z)$ равен кратности нуля z_k функции $\varphi(z)$.

Очевидно, что функция

$$g(z) = f(z) \varphi(z), \quad g(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} f(z) \varphi(z),$$

является целой. Поэтому можно написать

$$f(z) = \frac{g(z)}{\varphi(z)}. \quad (62)$$

Формула (62) дает представление мероморфной функции $f(z)$ в виде отношения двух целых функций $g(z)$ и $\varphi(z)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать сходимость бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1+z^{2k})$ в круге $|z| < 1$ и проверить тождество

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+z^{2k}) = \frac{1}{1-z^2}.$$

2. Показать, что если последовательность точек $z_k, k=1, 2, \dots$ удовлетворяет условиям $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)$ сходится, то бесконечное произведение (произведение Бляшке)

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R$ при любом $R < 1$ и представляет аналитическую функцию в круге $|z| < 1$.

3. Чему равен род полинома?
4. Построить целую трансцендентную функцию рода нуль.
5. Чему равен род функции e^{z^2} ?
6. Представить функцию $\operatorname{sh} z$ в виде бесконечного произведения и вычислить его род.
7. Показать, что

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2 (2k-1)^2} \right).$$

8. Доказать сходимость бесконечных произведений:

a) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$, b) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4k^2}\right)$,

c) $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, d) $\prod_{k=2}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right]$

и вычислить их значения.

9. Вычислить род функции $\sin z^n$, где n — натуральное число.

10. Построить мероморфную на комплексной плоскости функцию $f(z)$, для которой точки z_k , $k=1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$ (и только они), являются простыми полюсами с $\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 1$ (задача Миттаг-Леффлера).

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. Аналитическое продолжение

1. Понятие аналитического продолжения. На плоскости комплексного переменного z рассмотрим две области D_1 и D_2 , пересечение $d = D_1 \cap D_2$ которых представляет собой область.

Пусть $f_1(z)$ — аналитическая в области D_1 функция. Если существует аналитическая в области D_2 функция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в d , то говорят, что $f_2(z)$ является *аналитическим продолжением* $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через общую часть d этих областей.

В силу теоремы единственности § 1.2 гл. V очевидно, что если существует аналитическое продолжение, то оно единственно.

Аналитическая функция $f(z)$ вместе с областью D ее задания называется *элементом*, и для него принято обозначение (f, D) . Из двух элементов (f_1, D_1) и (f_2, D_2) один называется *непосредственным аналитическим продолжением* другого, если $D_1 \cap D_2 = d$ является областью и $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in d$. Очевидно, что функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$$

аналитична в области $D = D_1 \cup D_2$.

Конечное множество элементов $(f_0, D_0), (f_1, D_1), \dots, (f_m, D_m)$ называется *цепью*, если каждый элемент (f_k, D_k) является непосредственным аналитическим продолжением элемента (f_{k-1}, D_{k-1}) . Непустое множество F элементов (f, D) , обладающее тем свойством, что для любых двух его элементов один получается из другого при помощи цепи, все элементы которой принадлежат F , называется *общей аналитической функцией*. Общая аналитическая функция, содержащая все аналитические продолжения каждого ее элемента, называется *полной аналитической функцией*.

Может случиться, что при аналитическом продолжении, соответствующем цепи $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \dots, (f_m, D_m)$, на непустом пересечении $d = D_1 \cap D_m$ аналитические функции $f_1(z)$ и $f_m(z)$ не равны между собой и, следовательно, определенная этой цепью общая аналитическая функция $F(z)$ не может рассматриваться как однозначная.

При детальном изучении общих и полных аналитических функций естественно возникает необходимость обобщения введенного в § 2 гл. III понятия римановой поверхности, но на этом мы здесь останавливаться не будем.

Непосредственное аналитическое продолжение, если оно возможно, иногда удобнее всего осуществить с помощью степенных рядов. При этом в качестве элемента

(f, D) следует брать сумму $f(z)$ степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ с кругом сходимости $D: |z - z_0| < r$.

2. Теорема монодромии. Пусть L — лежащая в комплексной плоскости z жорданова кривая с концами в точках z_0 и z_* .

Говорят, что *функция $f(z)$ аналитически продолжается из точки z_0 в точку z_* вдоль кривой L , если на L можно указать конечную систему точек $z_1, z_2, \dots, z_k$, следующих друг за другом в направлении от z_0 к z_* , и цепь $(f_0, D_0), (f_1, D_1), \dots, (f_k, D_k)$, $f_0(z) = f(z)$ при $z \in D_0$, такую, что каждая область D_n содержит внутри себя дугу $\widehat{z_n z_{n+1}}$, $n = 0, 1, \dots, k$, $z_{k+1} = z_*$, кривой L .*

Заметим, что аналитическое продолжение функции $f(z)$ вдоль данной кривой L не зависит от выбора точек z_n , $n = 1, 2, \dots, k$, и цепи.

В теории аналитических функций важную роль играет следующее утверждение, известное под названием теоремы монодромии: *если функция $f(z)$ аналитически продолжается вдоль любой жордановой кривой, лежащей в односвязной области D , то она однозначна в D .*

Пусть z_0 — произвольная точка области D , а L — лежащая в D произвольная кривая Жордана, выходящая из точки z_0 , обладающая тем свойством, что для цепи $(f_0, D_0), (f_1, D_1), \dots, (f_k, D_k)$, соответствующей аналитическому продолжению функции $f(z)$ вдоль кривой L , пересечение $D_0 \cap D_k = d \neq \emptyset$. Теорема монодромии будет доказана, если обнаружится, что для любой точки $z_* \in d$ имеет место равенство $f_0(z_*) = f_k(z_*)$.

Обозначим через L_0 лежащую в области D_0 жорданову кривую с концами в точках z_0 и z_* . В качестве цепи, соответствующей аналитическому продолжению функции $f(z)$ вдоль L_0 , очевидно, можно брать элемент (f_0, D_0) .

Пусть L_1 — лежащая в области D кривая Жордана с закрепленными концами z_0 и z_* , вдоль которой аналитическому продолжению функции $f(z)$ соответствует цепь $(f_0, D_0), (f_1, D_1), \dots, (f_k, D_k)$.

Из односвязности области D следует, что кривую L_1 в результате непрерывной деформации без выхода из области D можно перевести в L_0 .

Обозначим через $\{L_\lambda\}$ семейство лежащих в области D жордановых кривых L_λ с концами в точках z_0 и z_* и с параметрическим уравнением $z = z(\lambda, t)$, обладающее тем свойством, что непрерывному убыванию параметра λ на отрезке $0 \leq \lambda \leq 1$ от $\lambda = 1$ до $\lambda = 0$ соответствует переход кривой L_1 в L_0 с помощью непрерывной деформации без выхода из D .

Пусть $(f_0, D_0), (f_1^\lambda, D_1^\lambda), \dots, (f_{k_\lambda}^\lambda, D_{k_\lambda}^\lambda)$ — цепь, соответствующая аналитическому продолжению функции $f(z)$ из точки z_0 в точку z_* вдоль кривой L_λ . Для каждого μ из отрезка $0 \leq \mu \leq 1$ существует положительное число $\varepsilon_\mu > 0$ такое, что для всех λ из интервала $\delta_\mu: |\lambda - \mu| < \varepsilon_\mu$ имеет место равенство $f_{k_\lambda}^\lambda(z_*) = f_{k_\mu}^\mu(z_*)$, $z_* \in D_{k_\lambda}^\lambda \cap D_{k_\mu}^\mu$. Этот факт является непосредственным следствием определения цепи и понятия аналитического продолжения вдоль кривой.

Из бесконечного открытого покрытия $\{\delta_\mu\}$ отрезка $0 \leq \lambda \leq 1$ в силу леммы Гейне—Бореля можно выделить конечное открытое покрытие $\{\delta_{\mu_1}, \delta_{\mu_2}, \dots, \delta_{\mu_n}\}$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq 1$, этого же отрезка. Так как $\delta_{\mu_{k-1}} \cap \delta_{\mu_k} \neq \emptyset$, то $f_{k_\lambda}^\lambda(z_*) = f_0(z_*)$ для всех λ из отрезка $0 \leq \lambda \leq 1$ и, стало быть, $f_k(z_*) = f_{k_1}^1(z_*) = f_{k_0}^0(z_*) = f_0(z_*)$. Тем самым теорема монодромии доказана.

3. Принцип непрерывности. Предположим, что две области D_1 и D_2 , $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, имеют общий участок грани, содержащий замкнутую или разомкнутую открытую гладкую дугу Жордана γ_0 , и рассмотрим область $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma_0$.

Принцип непрерывности: если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в областях D_1 и D_2 соответственно, непрерывны вплоть до γ_0 и, кроме того,

$$f_1(z) = f_2(z), \quad z \in \gamma_0 \quad (1)$$

то функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma_0, \end{cases}$$

аналитична в области D .

Справедливость принципа непрерывности непосредственно вытекает из интегральной формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=\delta} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad z \in C(\delta, z_0), \quad (2)$$

где $C(\delta, z_0)$ — окрестность $|z - z_0| < \delta$ произвольной фиксированной точки $z_0 \in \gamma_0$, лежащая в области D , причем предполагается, что δ меньше стандартного радиуса δ_0 , соответствующего кривой γ_0 .

Принимая во внимание равенство (1), легко усмотреть, что формула (2) является очевидным следствием интегральной формулы Коши, записанной в виде равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(t) dt}{t-z} &= \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cap C(\delta, z_0), \\ 0, & z \in D_2 \cap C(\delta, z_0), \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(t) dt}{t-z} &= \begin{cases} 0, & z \in D_1 \cap C(\delta, z_0), \\ f_2(z), & z \in D_2 \cap C(\delta, z_0), \end{cases} \end{aligned}$$

где кривые Γ_1 и Γ_2 — границы областей $D_1 \cap C(\delta, z_0)$ и $D_2 \cap C(\delta, z_0)$ соответственно.

В условиях принципа непрерывности говорят, что функция $f_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через дугу γ_0 .

4. Принцип симметрии Римана—Шварца. Пусть участок γ_0 границы односвязной области D представляет собой дугу окружности C_z , а D_* — лежащая вне D область, прилегающая к γ_0 и симметричная с D относительно C_z .

Под принципом симметрии Римана—Шварца понимается следующее утверждение: если функция $w = f(z)$ аналитична в области D , непрерывна вплоть до γ_0 и, кроме того, значения $f(z)$, принимаемые на γ_0 , лежат на дуге Γ_w окружности C_w плоскости w , то $f(z)$ из области D аналитически продолжается через γ_0 в область D_* , причем значения $f(z)$ при $z \in D_*$ симметричны со значениями $f(z_*)$ относительно C_w , где z_* — точка, симметричная с z относительно C_z .

Дробно-линейные преобразования переменных z и w позволяют без ограничения общности полагать, что γ_0 и Γ_0 совпадают соответственно с отрезками $a < x < b$ и $a_1 < u < b_1$ действительных осей на плоскостях комплексных переменных $z = x + iy$ и $w = u + iv$.

В окрестности каждой точки $z_0 \in D$ имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (\overline{z} - \overline{z_0})^k.$$

Под $\overline{f(z)}$, $z \in D_*$, будем понимать сумму сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (z - \overline{z_0})^k$. Очевидно, что функция $\overline{f(z)} = \overline{f(\overline{z})}$ аналитична в области D_* и непрерывна вплоть до γ_0 , причем на γ_0 имеет место равенство $\overline{f(x)} = f(x)$, ибо по условию $\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} \overline{f(x)} = 0$ при $a < x < b$. Отсюда в силу принципа непрерывности заключаем, что функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ f(x), & a < x < b, \\ \overline{f(z)}, & z \in D_*, \end{cases}$$

аналитична в области $D \cup D_* \cup \gamma_0$, и тем самым принцип симметрии Римана—Шварца доказан.

5. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного. Заданная на отрезке $I: a \leq x \leq b$ действительная однозначная функция $f(x)$ называется *аналитической*, если в некоторой окрестности $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ каждой точки $x_0 \in I$ она представляется в виде суммы степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (3)$$

с действительными коэффициентами.

Если $f(x)$ — действительная аналитическая на отрезке I функция, а $F(z)$ — аналитическая функция в области D , содержащей внутри себя отрезок I , причем $F(x) = f(x)$ при $x \in I$, то говорят, что $F(z)$ является *аналитическим продолжением* $f(x)$ из отрезка I в области D .

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0)^k,$$

полученный из (3) заменой x на комплексное переменное $z = x + iy$, сходится в круге $C(\delta, x_0)$: $|z - x_0| < \delta$, и его сумма $F(z)$ является аналитической функцией в $C(\delta, x_0)$, совпадающей с $f(x)$ при $z = x$. Очевидно, что функция $F(z)$ из верхнего полукруга $|z - x_0| < \delta$, $\text{Im } z > 0$, аналитически продолжается в нижний полукруг $|z - x_0| < \delta$, $\text{Im } z < 0$, по принципу симметрии Римана—Шварца. Отсюда, ввиду того, что $F(z)$ аналитически продолжается вдоль отрезка I , заключаем, что *функция $f(x)$ аналитически продолжается из отрезка I в некоторую область D , симметричную относительно действительной оси $\text{Im } z = 0$.*

6. Принцип Шварца. Жорданова дуга γ_0 называется *аналитической*, если в ее параметрической записи $z = \varphi(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, действительные функции $x(t)$ и $y(t)$ действительно переменного t аналитичны на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$. Аналитическая дуга γ_0 называется *регулярной* или *правильной*, если

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = |\varphi'(t)|^2 \neq 0 \quad (4)$$

всюду на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$.

Обозначим через $z_0 = z(t_0)$, $\alpha < t_0 < \beta$, произвольную фиксированную точку правильной аналитической дуги γ_0 . В предыдущем пункте было показано, что функции $x(t)$ и $y(t)$ из некоторого интервала $t_0 - \delta_1 < t < t_0 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$, аналитически продолжают в круг $|t - t_0| < \delta_1$ плоскости комплексного переменного t , т. е. функция $z = \varphi(t) = x(t) + iy(t)$ аналитична в круге $|t - t_0| < \delta_1$ и в силу (4) в некоторой окрестности точки t_0 всюду $\varphi'(t) \neq 0$. Отсюда следует, что некоторую окрестность точки t_0 функция $z = \varphi(t)$ конформно отображает на некоторую область плоскости z , содержащую внутри себя точку $z_0 = z(t_0) \in \gamma_0$.

Принцип Шварца: *если граница области D содержит правильную аналитическую дугу γ_0 , функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна вплоть до γ_0 и, кроме того, образ γ_0 при отображении $w = f(z)$ является правильной аналитической дугой Γ_0 на плоскости w , то функция $f(z)$ аналитически продолжается из области D через дугу γ_0 .*

Как уже было показано, функция $z = \varphi(t)$ конформно отображает достаточно малую окрестность $|t - t_0| < \delta$ точки t_0 на некоторую область d плоскости z , содержа-

щую внутри себя точку $z_0 = z(t_0) \in \gamma_0$. Точно так же функция $w = \psi(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$, где $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, $\alpha_1 \leq \tau \leq \beta_1$ — параметрическая запись дуги Γ_0 , конформно отображает достаточно малую окрестность $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$ точки τ_0 , $\alpha_1 < \tau_0 < \beta_1$, на некоторую область d_1 плоскости w , содержащую внутри себя точку $w_0 = w(\tau_0)$, где $w_0 = f(z_0) \in \Gamma_0$. Следовательно, функции $t = \varphi^{-1}(z)$ и $\tau = \psi^{-1}(w)$ конформно отображают области d и d_1 на круги $|t - t_0| < \delta$ и $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$ соответственно.

Рассмотрим функцию $\tau = \psi^{-1}\{f[\varphi(t)]\} = \omega(t)$. Она аналитична в некоторой области плоскости комплексного переменного t , примыкающей к отрезку $t_1 < t < t_2$ действительной оси, и принимает действительные значения на этом отрезке.

Следовательно, функция $\omega(t)$ аналитически продолжается через отрезок $t_1 < t < t_2$ и, стало быть, функция $w = \psi\{\omega[\varphi^{-1}(z)]\}$ аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \gamma_0$ и совпадает с $f(z)$ при $z \in D$, что и требовалось доказать.

§ 2. Свойство единственности аналитических функций

1. Некоторые элементарные утверждения о единственности аналитических функций. В § 1.2 гл. V было обнаружено важное свойство единственности аналитической области D функции $f(z)$, сформулированное в виде утверждений: а) *если $f(z) = 0$ на некотором множестве E точек области D , имеющем по крайней мере одну предельную точку в D , то $f(z) = 0$ всюду в этой области, и* б) *если в некоторой точке $z_0 \in D$ все производные $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, то $f(z) = 0$ всюду в D .*

Утверждение б), очевидно, равносильно предложению: *если аналитическая в области D функция $f(z)$ в некоторой точке $z_0 \in D$ имеет нуль «бесконечного порядка», т. е.*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \text{ то } f(z) = 0 \text{ всюду в } D.$$

Поскольку во всех этих утверждениях нули функции $f(z)$ лежат в области ее аналитичности, приведенные выше утверждения можно называть внутренними теоремами единственности аналитических функций.

Предположим теперь, что граница Γ области D аналитичности функции $f(z)$ содержит гладкую жорданову дугу γ_0 и $f(z)$ непрерывна в D вплоть до γ_0 . Легко

видеть, что если $f(z) = 0$ для всех $z \in \gamma_0$, то $f(z) = 0$ всюду в D .

Действительно, пристроим к области D вдоль участка γ_0 ее границы Γ область D_1 , $D \cap D_1 = \emptyset$, и рассмотрим функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \gamma_0, \\ 0, & z \in D_1. \end{cases}$$

В силу принципа непрерывности, изложенного в предыдущем параграфе, заключаем, что $F(z)$ аналитична в области $D_2 = D \cup \gamma_0 \cup D_1$. Так как $F(z) = 0$ на дуге γ_0 , лежащей внутри D_2 , то $F(z) = 0$ всюду в D_2 и, стало быть, $f(z) = 0$ всюду в D .

2. Лемма Карлемана и обобщение теоремы единственности. Пусть D — односвязная область плоскости комплексного переменного z , ограниченная прямолинейными отрезками $\gamma_1 = \zeta_0 \zeta_1$, $\gamma_2 = \zeta_0 \zeta_2$ и жордановой дугой $\gamma = \widehat{\zeta_1 \zeta_2}$. Угол $\widehat{\zeta_1 \zeta_0 \zeta_2}$ между γ_1 и γ_2 обозначим через $\pi\alpha$.

Карлеману принадлежит следующее утверждение (лемма Карлемана): *если функция $f(z)$ аналитична в области D , на границе этой области всюду существуют предельные значения $f(z)$ изнутри D и*

$$|f(t)| \leq M, \quad t \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (5)$$

$$|f(t)| \leq m, \quad t \in \gamma, \quad m < M, \quad (6)$$

где под $f(t)$, $t \in \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$, понимается $\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D}} f(z)$, то в

любой точке ζ биссектрисы угла $\widehat{\zeta_1 \zeta_0 \zeta_2}$ имеет место оценка

$$|f(\zeta)| \leq M^{1-(r/R)^{1/\alpha}} m^{(r/R)^{1/\alpha}}, \quad (7)$$

в которой

$$r = |\zeta - \zeta_0|, \quad R = \max_{\zeta^* \in \gamma} |\zeta^* - \zeta_0|.$$

Для доказательства оценки (7) рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$F(z) = f(z) e^{\sigma \left(\frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^{1/\alpha}},$$

где σ — произвольное положительное число, $\zeta \neq \zeta_0$, а под $\left(\frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^{1/\alpha}$ понимается однозначная в области D ветвь этой функции, равная единице при $z = \zeta$.

Ввиду того, что

$$\left| e^{\sigma \left(\frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^{1/\alpha}} \right| = 1, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

и

$$\left| e^{\sigma \left(\frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^{1/\alpha}} \right| \leq e^{\sigma (R/r)^{1/\alpha}}, \quad z \in \gamma,$$

на основании (5) и (6) заключаем, что

$$|F(z)| \leq M, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (8)$$

$$|F(z)| \leq me^{\sigma (R/r)^{1/\alpha}}, \quad z \in \gamma. \quad (9)$$

Из оценок (8) и (9) в силу принципа максимума модуля следует, что $|F(\zeta)|$ не превышает $\max [M, me^{\sigma (R/r)^{1/\alpha}}]$, т. е.

$$|f(\zeta)| \leq \max \{ Me^{-\sigma}, me^{\sigma [(R/r)^{1/\alpha} - 1]} \}. \quad (10)$$

Подбирая теперь положительное число σ так, чтобы имело место равенство

$$Me^{-\sigma} = me^{\sigma [(R/r)^{1/\alpha} - 1]},$$

или, что то же самое,

$$e^{\sigma} = \left(\frac{M}{m} \right)^{(r/R)^{1/\alpha}},$$

из (10) сразу получим оценку (7).

Из леммы Карлемана непосредственно получается следующее обобщение теоремы единственности: *если функция $f(z)$ аналитична в области D , граница которой содержит жорданову дугу γ_0 , причем на γ_0 всюду существуют предельные значения $\bar{f}(z)$ изнутри D , равные нулю, то $f(z) = 0$ в области D .*

§ 3. Конформное отображение односвязных однолистных областей

1. Предварительные замечания. В § 1.3 гл. III было доказано, что аналитическая в области D функция $w = f(z)$ при $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$, некоторую окрестность точки z_0 конформно отображает на некоторую область плоскости w , содержащую точку $w_0 = f(z_0)$.

Геометрическая задача построения конформного отображения данной области D плоскости z на данную область D_1 плоскости w равносильна построению аналитической в области D функции $w=f(z)$, принимающей каждое значение $w \in D_1$ один раз.

При изучении этой задачи в предположении, что одна из рассматриваемых областей, например область D_1 , ограничена, необходимо исключить случай, когда D есть расширенная плоскость или расширенная плоскость с выключенной точкой.

В самом деле, если область D совпадает с расширенной комплексной плоскостью или с комплексной плоскостью (случай расширенной комплексной плоскости с выключенной точкой с помощью дробно-линейного преобразования редуцируется к случаю комплексной плоскости), то функция $w=f(z)$, отображающая конформно D на D_1 , обязана быть целой и к тому же ограниченной, поскольку область D_1 ограничена. Но в силу теоремы Лиувилля такая функция постоянна и, стало быть, искомого конформного отображения не существует.

Ниже мы будем предполагать, что D и D_1 представляют собой односвязные однолистные области, причем D_1 ограничена, а D отлична от расширенной комплексной плоскости и от расширенной комплексной плоскости с выключенной точкой.

При доказательстве существования функции $w=f(z)$, отображающей конформно область D на D_1 , без ограничения общности можно считать, что D_1 есть круг $|w| < 1$.

Действительно, если будет доказано существование конформных отображений $\xi=\varphi(z)$ области D на круг $|\xi| < 1$ и $\tau=\psi(w)$ области D_1 на круг $|\tau| < 1$, то, рассматривая дробно-линейное отображение $\tau=L(\xi)$ круга $|\xi| < 1$ на круг $|\tau| < 1$, получим аналитическую функцию

$$w=\psi^{-1}\{L[\varphi(z)]\},$$

осуществляющую конформное отображение области D на область D_1 .

Так как граница Γ области D содержит по крайней мере две точки, то в силу связности Γ (см. § 2.1 гл. I) она должна быть континуумом, содержащим эти точки. Пусть a и b —конечные точки, принадлежащие Γ .

Мы вправе считать, что область D лежит в круге $|z| < 1$ и содержит внутри себя точку $z=0$.

В самом деле, рассмотрим однозначную в плоскости z , разрезанной вдоль участка Γ , соединяющего точки a и b , ветвь функции

$$\xi = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad (11)$$

однолиственную и аналитическую в области D .

Пусть $\xi_0 = \sqrt{\frac{z_0-a}{z_0-b}}$, $z_0 \in D$. При отображении (11) достаточно малой окрестности $C(\delta, \xi_0)$ точки ξ_0 соответствует некоторая односвязная подобласть области D , содержащая точку z_0 . При $C(\delta, \xi_0) \cap C(\delta, -\xi_0) = \emptyset$ ни одно значение функции $\xi(z)$ не может попасть в окрестность $C(\delta, -\xi_0)$ точки $-\xi_0$, ибо в противном случае одному и тому же $z \in D$ при однолистном отображении (11) соответствовали бы два значения ξ , а это невозможно. Поэтому можно полагать, что образ D_ξ области D при отображении (11) не содержит определенной окрестности $|\xi - \xi_*| < r$ некоторой точки ξ_* плоскости ξ . Отсюда в свою очередь следует, что при отображении $\tau = \frac{r}{\xi - \xi_*}$ образ D_τ области D_ξ будет лежать внутри круга $|\tau| < 1$ плоскости τ . Теперь линейной заменой переменного τ легко добиться того, чтобы нулевая точка принадлежала образу D_τ и, вместе с тем, чтобы этот образ не вышел из единичного круга с центром в нулевой точке.

2. Условия единственности конформно отображающей функции. Если будет доказано существование одной функции $w = f(z)$, осуществляющей конформное отображение области D на единичный круг D_1 : $|w| < 1$, то тем самым будет доказано, что множество таких функций бесконечно. Это следует из того, что наряду с функцией $w = f(z)$ все функции вида $e^{i\theta} \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)}$, где θ — произвольная действительная постоянная и w_0 — произвольное комплексное число, $|w_0| < 1$, конформно отображают область D на единичный круг D_1 .

Точку $z_0 \in D$ вместе с выходящим из нее направлением принято называть *линейным элементом*, а отображение области D на область D_1 , переводящее заданный линейный элемент из D в заданный линейный элемент из D_1 , — *нормализованным отображением*.

Покажем, что не может существовать более одной однолистной аналитической функции $w = f(z)$, осуществ-

ляющей нормализованное конформное отображение области D на круг $|w| < 1$.

С помощью дробно-линейных преобразований переменных всегда можно добиться того, что условия нормализованности будут иметь вид

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \quad (12)$$

Допустим теперь, что существуют две однолистные аналитические функции: $w = f(z)$ и $\tau = \varphi(z)$, осуществляющие конформные отображения D на D_1 и удовлетворяющие условиям (12).

Очевидно, что равенство $z = f^{-1}(w) = \varphi^{-1}(\tau)$ определяет конформное отображение $\tau = \psi(w)$ круга $|w| < 1$ на себя, причем в силу (12) удовлетворены условия

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) > 0. \quad (13)$$

Следовательно, аналитическая в круге $|w| < 1$ функция $\psi(w)$ удовлетворяет условиям $\psi(0) = 0$, $|\psi(w)| < 1$, и, стало быть, в силу леммы Шварца $|\tau| \leq |w|$. Ввиду того, что и функция $w = \psi^{-1}(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, имеем $|w| \leq |\tau|$. Следовательно, в круге $|w| < 1$ всюду имеет место равенство $|w| = |\tau|$, т. е. $\tau = e^{i\alpha}w$, где α — действительная постоянная. Так как в силу (13)

$$\left. \frac{d\tau}{dw} \right|_{w=0} = e^{i\alpha} > 0,$$

то $\alpha = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Таким образом, окончательно имеем $\tau = w$, т. е. $f(z) = \varphi(z)$, что и требовалось доказать.

3. Формулировка теоремы Римана о конформном отображении и некоторые вспомогательные утверждения. Риману принадлежит следующая основная теорема теории конформного отображения: *для каждой односвязной однолистной области, граница которой состоит более чем из одной точки, существует единственная однолистная аналитическая функция, осуществляющая нормализованное конформное отображение этой области на внутренность единичного круга.*

Единственность отображающей функции уже была доказана в предыдущем пункте.

Из имеющихся в настоящее время нескольких вариантов доказательства существования конформно отображающей функции ниже будет предложен тот, который

не требует введения в рассмотрение новых, отличных от уже изложенных выше понятий и определений.

В этом пункте мы остановимся на двух элементарных утверждениях, носящих вспомогательный характер.

Пусть K — двулистная область плоскости t , составленная из двух однолистных кругов $|t| < 1$, склеенных перекрестно вдоль краев разрезов, проведенных от фиксированной точки α , $0 < |\alpha| = \mu < 1$, до некоторой точки β окружности $|t| = 1$. Обозначим через $\tau = \varphi_\mu(t)$ функцию, отображающую конформно область K на единичный круг K^* : $|\tau| < 1$ и удовлетворяющую условиям

$$\varphi_\mu(0) = 0, \quad \varphi'_\mu(0) > 0. \quad (14)$$

Явное выражение для функции $\varphi_\mu(t)$ нам не понадобится, но заметим, что оно легко может быть получено в результате суперпозиции трех элементарных отображений: 1) дробно-линейного отображения круга $|t| < 1$ на себя, переводящего точку α в центр этого круга, 2) извлечения квадратного корня и 3) линейного отображения, устанавливающего нормализацию (14).

Отличная от τ функция $t = \varphi_\mu^{-1}(\tau)$ аналитична в круге K^* и в силу (14) удовлетворяет условиям $\varphi_\mu^{-1}(0) = 0$,

$$\frac{d}{d\tau} \varphi_\mu^{-1}(\tau) > 0$$

при $\tau = 0$. Поэтому для всех t и τ , отличных от нуля и по модулю меньших единицы, в силу леммы Шварца имеем

$$|t| < |\tau| \quad (15)$$

Неравенство (15) означает, что при отображении $\tau = \varphi_\mu(t)$ каждая точка $t \in K$, $t \neq 0$, переходит в точку $\tau \in K^*$, более удаленную от центра, чем t . Отсюда вытекает справедливость очень важного при доказательстве существования конформно отображающей функции утверждения: *при конформном отображении K на K^* , осуществляемом функцией $\tau = \varphi_\mu(t)$, удовлетворяющей условиям (14), имеет место оценка*

$$|\tau| \geq q(\mu) |t|, \quad (16)$$

где $|t| \leq \mu$, а $q(\mu)$ — постоянная, превышающая единицу и зависящая от μ непрерывно.

Действительно, так как при $|t| < 1$, $t \neq 0$, равенство $|\varphi_\mu(t)| = |t|$ исключено, то из (15) получаем

$$\min_{|t| \leq \mu < 1} \left| \frac{\tau}{t} \right| = \min_{|\varphi_\mu^{-1}(\tau)| \leq \mu} \left| \frac{\tau}{\varphi_\mu^{-1}(\tau)} \right| = q(\mu) > 1.$$

Пусть d — однолиственная односвязная область, лежащая в K , для которой точка $t=0$ является внутренней, а точка ветвления $t=\alpha$ функции $\varphi_\mu(t)$ — внешней или граничной. Функция $\tau = \varphi_\mu(t)$ конформно отображает область d на некоторую односвязную область d^* , лежащую в K^* и содержащую внутри себя точку $\tau=0$. На основании (16) заключаем, что если область d содержит круг $|t| < \rho \leq \mu$, то область d^* содержит круг $|\tau| < \rho^* = q(\mu)\rho$, $\rho^* > \rho$.

В следующем пункте нам также понадобится утверждение: если последовательность однолистных аналитических в области D функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... сходится равномерно в каждой замкнутой области $\bar{D}_* \subset D$, то предел этой последовательности $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, если он отличен от постоянной, также однолистен в области D .

С целью доказательства этого утверждения заметим, что в силу первой теоремы Вейерштрасса функция $f(z)$ аналитична в области D , причем последовательность $f'_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, равномерно сходится к $f'(z)$ в каждой замкнутой подобласти области D .

Так как в области D функция $f(z) \neq \text{const}$, то для любой фиксированной точки $z_0 \in D$ и произвольного комплексного числа $a \neq \infty$ существует окрестность $|z - z_0| < r$, лежащая в D , на границе γ которой $f(z) - a \neq 0$.

В силу принципа аргумента логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = N$$

равен числу нулей функции $f(z) - a$ в круге $|z - z_0| < r$.

Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ следует, что, начиная с достаточно большого номера n_0 , для всех $n \geq n_0$ функции $f_n(z) \neq a$ при $z \in \gamma$ и

$$N = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_m(z) dz}{f_m(z) - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n(z) dz}{f_n(z) - a}. \quad (17)$$

На основании однолистности функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, в силу равенства (17) заключаем, что для всех $n \geq n_0$ функции $f(z) - a$ и $f_n(z) - a$ в круге $|z - z_0| < r$ либо нигде в нуль не обращаются, либо имеют по одному нулю.

Предположим, что $N = 1$, и обозначим через K_1 круг, лежащий внутри D и вне круга $|z - z_0| \leq r$. Для всех $n \geq n_0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'_n(z) dz}{f_n(z) - a} = 0, \quad (18)$$

где γ_1 — граница K_1 .

На основании равенства (18) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'_n(z) dz}{f_n(z) - a} = 0,$$

т. е. функция $f(z)$ в области D вне круга $|z - z_0| \leq r$ нигде не принимает значения a , и тем самым однолистность $f(z)$ доказана.

4. Доказательство существования конформно отображающей функции. Как уже было отмечено в предыдущих пунктах настоящего параграфа, при доказательстве существования конформно отображающей функции $w = f(z)$ без ограничения общности можно полагать, что область D лежит в единичном круге $|z| < 1$ и содержит внутри себя точку $z = 0$, область D_1 совпадает с единичным кругом $|w| < 1$, а условие нормализованности имеет вид (12).

Введенная в предыдущем пункте функция $\varphi_\mu(t)$ позволяет сконструировать последовательность

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (19)$$

однолистных аналитических в области D функций, равномерно сходящуюся в каждой замкнутой подобласти области D , предел которой $f(z)$ осуществляет искомое конформное отображение.

Если заданная односвязная область G содержит внутри себя нулевую точку, то радиус максимального круга с центром в этой точке, вся внутренность которого принадлежит G , будем обозначать через $\rho(G)$.

Приняв $\mu = \rho(D) = \rho_0$, в качестве первой функции $w_1 = f_1(z)$ последовательности (18) возьмем однозначную ветвь функции $\varphi_\mu(z)$, $\mu = \rho_0$. Функция $f_1(z)$ аналитична,

однолистка, удовлетворяет условию (12), и, следовательно, она отображает область D на некоторую область $G_1 \subset D_1$, содержащую внутри себя точку $w_1 = 0$. В качестве $w_2 = f_2(z)$ примем функцию $\varphi_{\rho_1}[f_1(z)]$, где $\rho_1 = \rho(G_1)$ и т. д., $w_n = f_n(z) = \varphi_{\rho_{n-1}}[f_{n-1}(z)]$, где $\rho_{n-1} = \rho(G_{n-1})$, а G_{n-1} — образ G_{n-2} при отображении, осуществляемом функцией $w_{n-1} = \varphi_{\rho_{n-2}}(w_{n-2})$.

Очевидно, что каждая из функций $f_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$, однолистка и аналитична в области D и, кроме того, удовлетворяет условиям (12). Как уже было отмечено в предыдущем пункте, $\rho_n = q(\rho_{n-1}) \rho_{n-1}$, откуда, принимая во внимание неравенство $q(\mu) > 1$ при $0 < \mu < 1$, заключаем, что последовательность ρ_n , $n = 1, 2, \dots$, строго возрастает и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1. \quad (20)$$

Так как в любой точке z_0 границы Γ области D имеем $|f_n(z_0)| \leq 1$, $|f_n(z_0)| \geq \rho_n$, а функция $\frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$ для любых натуральных n и p аналитична и отлична от нуля в области D , то в силу принципа экстремума модуля аналитической функции в любой точке $z \in D$ будем иметь

$$\rho_{n+p} < \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| < \frac{1}{\rho_n}. \quad (21)$$

На основании (20) и (21) заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| = 1 \quad (22)$$

равномерно в области D .

Ввиду того, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = \frac{f'_{n+p}(0)}{f'_n(0)} > 0,$$

выбирая ветвь функции $\log \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$, принимающую действительное значение при $z = 0$, в силу (22) убеждаемся в том, что последовательность действительных частей функции

$$\log \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = \log \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| + i \arg \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$$

равномерно сходится к нулю в области D и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{f_{n+p}(0)}{f_n(0)} = 0.$$

Отсюда на основании доказанного в § 3.5 гл. IV предложения следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = 1$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad (23)$$

равномерно в любой замкнутой подобласти области D , причем

$$f(0) = 0, \quad f'(0) \geq 0, \quad |f(z)| \leq 1, \quad z \in D. \quad (24)$$

Из (21) в пределе при $p \rightarrow \infty$ получаем

$$1 \leq \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} \right| \leq \frac{1}{\rho_n}. \quad (25)$$

На основании (20), (23) и (25) убеждаемся, что в достаточной близости от границы Γ области D функция $|f(z)|$ как угодно мало отличается от единицы. Отсюда, принимая во внимание равенство $f(0) = 0$, заключаем, что $f(z)$ отлична от постоянной и, следовательно, в силу последнего утверждения предыдущего пункта функция $f(z)$ однолистка в области D . Из однолистности $f(z)$ в свою очередь вытекает, что во втором соотношении (24) равенство исключается, т.е. $f'(0) > 0$. В силу принципа максимума модуля равенство исключается и в третьем соотношении (24).

Таким образом, функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на некоторую область G , лежащую в круге $|w| < 1$. Отсюда, учитывая равенство (20), заключаем, что граница Γ области D при отображении $w = f(z)$ переходит в окружность $|w| = 1$, а область G совпадает с открытым кругом $|w| < 1$. Тем самым теорема Римана доказана полностью.

5. Соответствие границ при конформном отображении.

Если последовательность

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots \quad (26)$$

точек области D , ограниченной контуром Γ , сходится к точке $z_0 \in \Gamma$, то все предельные точки последовательности

$$f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_k), \dots, \quad (27)$$

где $w = f(z)$ — функция, отображающая конформно область D на круг $|w| < 1$, лежат на окружности $|w| = 1$.

Действительно, если предельная точка w_0 последовательности (27) не лежит на окружности $|w| = 1$, то она обязана быть внутренней точкой круга $|w| < 1$. Поэтому некоторую окрестность точки w_0 , лежащую в круге $|w| < 1$, функция $z = f^{-1}(w)$ будет отображать конформно на односвязную область Δ , лежащую строго внутри D (т. е. границы D и Δ не будут иметь общих точек) и содержащую внутри себя бесконечное множество точек последовательности (26), а это невозможно, ибо $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 \in \Gamma$.

Говорят, что при конформном отображении $w = f(z)$ области D на круг $|w| < 1$ точке $z_0 \in \Gamma$ соответствует точка w_0 окружности $|w| = 1$, если для любой последовательности (26) точек области D , сходящейся к точке z_0 , соответствующая последовательность (27) сходится к w_0 .

С помощью методов теоретико-множественной топологии в настоящее время исчерпывающим образом изучены вопросы соответствия границ при однолистном конформном отображении односвязных областей.

В частности, установлено, что при конформном отображении $w = f(z)$ друг на друга областей D и D_1 , ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми Γ и Γ_1 соответственно, функция $f(z)$ устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между $D \cup \Gamma$ и $D_1 \cup \Gamma_1$ с сохранением направления обхода на Γ и Γ_1 .

На доказательстве этого факта мы здесь останавливаться не будем, а читателя, интересующегося поведением конформно отображающей функции на границе области, отсылаем к книге: Каратеодори К. Конформное отображение. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.

Сформулированное утверждение имеет важные применения в теории аналитических функций.

Так, например, если известно, что заданная в односвязной однолистной области D аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает эту область на односвязную однолистную область D_1 , причем границы Γ и Γ_1 этих областей являются замкнутыми кривыми Жордана, то в силу указанного утверждения функция $f(z)$ непрерывна в D вплоть до границы Γ . Поэтому в рассматриваемом случае в изложенных в § 1 настоящей главы принципах аналитического продолжения требование «непрерывности в D вплоть до γ_0 » следует опустить.

Далее, на основании приведенного выше утверждения единственность аналитической функции $w=f(z)$, осуществляющей конформное отображение на единичный круг $|w|<1$ области D плоскости комплексного переменного z , граница которой Γ является замкнутой кривой Жордана, может быть доказана при соблюдении любого из двух требований:

а) три заданные точки z_1, z_2, z_3 границы Γ переходят в три заданные точки w_1, w_2, w_3 окружности $|w|=1$ с сохранением направления обхода;

б) одна внутренняя точка z' области D и одна ее граничная точка z'' переходят соответственно во внутреннюю точку w' и граничную точку w'' круга $|w|<1$.

Действительно, допустим, что имеются две такие функции: $w=f(z)$ и $\tau=\varphi(z)$. Тогда равенство $\varphi^{-1}(\tau)=f^{-1}(w)$ определяет конформное отображение $\tau=\psi(w)$ круга $|w|<1$ на себя, гомеоморфное в замкнутом круге $|w|\leq 1$ и сохраняющее направление обхода на окружности $|w|=1$. Обозначим через w_0 и τ_0 соответствующие друг другу при этом отображении какие-либо две внутренние точки. Пусть $\theta=\arg \psi'(w_0)$. В силу формулы (46) гл. III и доказанного в п. 2 настоящего параграфа свойства единственности нормализованного конформного отображения заключаем, что

$$\frac{\tau-\tau_0}{1-\overline{\tau_0}\tau} = e^{i\theta} \frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}.$$

Отсюда, ввиду того, что при отображении $\tau=w(z)$ в силу а) и б) неподвижными должны оставаться либо точки w_1, w_2, w_3 , либо точки w', w'' , следует тождественность этого отображения, т. е.

$$f(z) \equiv \varphi(z).$$

Это же утверждение вместе с теоремой Римана позволяет доказать существование решения задачи Дирихле в следующей постановке: в области G плоскости комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$, ограниченной замкнутой кривой Жордана Γ , требуется найти гармоническую функцию $u_*(\zeta)=u_*(\xi, \eta)$, непрерывную в $\bar{G}$ и принимающую на Γ заданные непрерывные значения $g(\zeta)$.

В самом деле, искомая гармоническая функция $u_*(\zeta)$ (если она существует) является действительной частью аналитической в области G функции $F(\zeta)$. Функция $u(z)=\operatorname{Re} F[f^{-1}(z)]$, где $z=f(\zeta)$ — функция, отображающая

конформно область G на круг $|z| < 1$, гармонична в этом круге и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$, причем на окружности $|z| = 1$ она принимает непрерывные значения $h(z) = g[f^{-1}(z)]$.

Но задача отыскания гармонической в круге $|z| < 1$ функции $u(z)$, непрерывной вплоть до окружности $|z| = 1$, решается формулой Пуассона:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} h(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad |z| < 1, \quad (28)$$

которая была выведена в § 4.4 гл. IV. Следовательно, искомое решение сформулированной выше задачи Дирихле существует и оно имеет вид

$$u_*(\zeta) = u[f(\zeta)].$$

6. Принцип взаимно однозначного соответствия. Формула Кристоффеля — Шварца. Непосредственным следствием принципа аргумента аналитической функции является так называемый принцип взаимно однозначного соответствия: *если границы Γ и Γ_1 односвязных областей D и D_1 являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Жордана и аналитическая в $\bar{D}$ функция $w = f(z)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает Γ на Γ_1 с сохранением направления обхода, то она конформно отображает область D на область D_1 .*

Действительно, из очевидных равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{d\tau}{\tau - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(t) dt}{f(t) - w} = \begin{cases} 0, & w \in C\bar{D}_1, \\ 1, & w \in D_1, \end{cases}$$

следует, что функция $f(z) - w$ при $w \in C\bar{D}_1$ не имеет ни одного нуля, а для каждого $w \in D_1$ она имеет единственный нуль.

Точка $z_0 = f^{-1}(w_0)$ при $w_0 \in \Gamma_1$ не может принадлежать области D . В противном случае нашелся бы замкнутый круг $\bar{C}(\delta, z_0) \subset D$, не содержащий отличных от z_0 нулей функции $f(z) - w_0$. В силу теоремы Руше каждое значение $w_1 \in C(\varepsilon, w_0)$, $\varepsilon = \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - w_0| > 0$, принимается функцией $f(z)$ в круге $\bar{C}(\delta, z_0)$, а это невозможно, когда $w_1 \in C\bar{D}_1$. Отсюда следует однолиственность функции $f(z)$ и конформность отображения области D на область D_1 .

Принцип взаимно однозначного соответствия, очевидно, остается в силе, если $f(z)$ аналитична в $\bar{D}$ всюду, кроме конечного числа точек контура Γ , в которых $f'(z)$ обращается в бесконечность, но интегрируема вдоль Γ . Этот принцип верен и в том случае, когда одна из рассматриваемых областей, например D , является полуплоскостью.

На основе принципа взаимно однозначного соответствия можно построить явное выражение (в квадратурах) функции $w = f(z)$, отображающей верхнюю полуплоскость $\Pi_1: \operatorname{Im} z > 0$ на многоугольник Π_n .

Обозначим через $A_1, A_2, \dots, A_n$ вершины многоугольника Π_n .

В силу теоремы Римана функция $f(z)$ существует, причем она отображает действительную ось $\operatorname{Im} z = 0$ на контур многоугольника Π_n взаимно однозначно и непрерывно.

Рассмотрим однозначную аналитическую в полуплоскости Π_1 функцию

$$f(z) = ce^{i\alpha} \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + c_1, \quad (29)$$

где c и α — положительные постоянные, c_1 — комплексная постоянная, числа $a_k = f^{-1}(A_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, — действительные числа, α_k , $0 < \alpha_k < 2$, $\alpha_k \neq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, — величины углов многоугольника Π_n с вершинами в точках A_k , а под $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, понимаются однозначные в полуплоскости Π_1 ветви этих функций, положительные при $z > a_k$.

В силу принципа симметрии Римана — Шварца функция $f(z)$ аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ через участки $-\infty < x < a_1$, $a_{k-1} < x < a_k$, $k = 2, 3, \dots, n$, $a_n < x < \infty$ действительной оси.

Из геометрического смысла производной аналитической функции следует, что, когда $\alpha = \arg(A_n - A_1)$, $z_0 < a_1$ и точка $f(z_0) = c_1$ лежит на отрезке $A_n A_1$, функция $f(z)$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение границы полуплоскости Π_1 на контур многоугольника Π_n с сохранением направления обхода. Следовательно, в силу принципа взаимно однозначного соответствия $f(z)$ конформно отображает полуплоскость Π_1 на многоугольник Π_n .

Если заданы три из чисел a_k , $k=1, 2, \dots, n$, например a_1, a_2, a_3 , то постоянные $a_4, a_5, \dots, a_n$, c и c_1 в правой части (29) могут быть определены однозначно, ибо вершины

$$A_k = f(a_k)$$

многоугольника Π_n известны. Однако практическое нахождение этих постоянных, вообще говоря, весьма затруднительно.

Выражение (29) известно под названием формулы Кристоффеля—Шварца.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что элемент (f, D) , где $f(z)$ —сумма степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$, не имеет аналитического продолжения за круг $D: |z| < 1$ сходимости этого ряда.

2. Известно, что функция $w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$ аналитична в односвязной области D , лежащей в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и примыкающей к отрезку $I: a < x < b$ действительной оси $\text{Im } z = 0$, причем $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до участка I ее границы и удовлетворяет условию

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 0, \quad x \in I.$$

Найти аналитическое продолжение $f(z)$ через отрезок I в область D^* , симметричную области D относительно действительной оси.

3. Известно, что функция $w = f(z)$ аналитична в полукруге $D: \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$, $\text{Im } z > 0$, и непрерывна вплоть до дуги $\gamma_0: \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, $\text{Im } z > 0$, причем $\text{Re } f(z) = 0$ при $z \in \gamma_0$. Найти аналитическое продолжение $f(z)$ через γ_0 .

4. Не используя свойства нормализованного конформного отображения, доказать, что функция $w = f(z)$, отображающая конформно круг на круг, обязательно линейна или дробно-линейна.

5. Выяснить, для какого значения отношения R/r возможно конформно отобразить двусвязную область, ограниченную окружностями $|z| = 1$ и $|z - i/2| = 1/4$, на кольцо $r < |w| < R$, и найти конформно отображающую функцию.

6. Найти гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$, функцию $u(z)$, непрерывную в замкнутом полукруге $|z| \leq 1$, $\text{Im } z \geq 0$, и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u(e^{i\varphi}) &= f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ u(x) &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где $f(\varphi)$ —заданная (непрерывная) функция [$f(0) = f(\pi) = 0$].

7. Найти гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$, функцию $u(z)$, непрерывную в замкнутом полукруге $|z| \leq 1$, $\text{Im } z \geq 0$, и удов-

удовлетворяющую условиям

$$u(e^{i\varphi}) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$u(x) = \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где $\psi(x)$ — заданная (непрерывная) функция [$\psi(-1) = \psi(1) = 0$].

8. Пользуясь ответами задач 6 и 7, построить формулу, дающую гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, функцию $u(z)$, непрерывную в замкнутом полукруге $|z| \leq 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, и удовлетворяющую условиям

$$u(e^{i\varphi}) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$u(x) = \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где f и ψ — заданные (непрерывные) функции [$f(0) = \psi(1)$, $f(\pi) = \psi(-1)$].

9. Отобразить на верхнюю полуплоскость треугольник с вершинами $A_1 = -1$, $A_2 = 1$, $A_3 = i$.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Аналитические функции многих комплексных переменных

1. Некоторые обозначения и основные понятия. Упорядоченную систему $(z_1, z_2, \dots, z_m) = z$ значений комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, будем называть *точкой* m -мерного комплексного векторного пространства C^m этих переменных. Пространство C^m можно интерпретировать как обычное $2m$ -мерное евклидово пространство действительных переменных $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$.

Множество точек $z \in C^m$, удовлетворяющих условиям $|z_k - z_k^{(0)}| < r_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, где r_k — положительные числа, называется *открытым полицилиндром* $C(r, z^{(0)})$ радиуса $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ с центром в точке $z^{(0)}$, а множество точек $z \in C^m$, удовлетворяющих условиям $|z_k - z_k^{(0)}| \leq r_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, — *замкнутым полицилиндром* $\bar{C}(r, z^{(0)})$. Точки $z \in C^m$, для которых имеют место равенства $|z_k - z_k^{(0)}| = r_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, составляют так называемый *остов* полицилиндра $C(r, z^{(0)})$.

Пусть E и E_1 — некоторые множества точек из C^m и из обычной комплексной плоскости w соответственно. Введенное выше понятие полицилиндра позволяет, так же как и в § 2 гл. I, ввести понятия окрестности точки, изолированной точки, предельной точки и внутренней точки множества E , а также понятия ограниченного, замкнутого, открытого и компактного множеств в пространстве C^m . При этом очевидным образом формулируются и доказываются лемма Гейне — Бореля и принцип Больцано — Вейерштрасса. Под равенством $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = z^{(0)}$ понимается система равенств $\lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)} = z_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Если указан закон f , по которому каждому значению $z \in E$ поставлено в соответствие единственное значение $w \in E_1$, то говорят, что w является *однозначной функцией*

переменного z (функцией нескольких комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$), и пишут

$$w = f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_m).$$

Заданная на множестве E функция $f(z)$ *непрерывна* (или, как еще принято говорить, *непрерывна по совокупности переменных*) в предельной точке $z^{(0)}$ множества E , принадлежащей E , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать систему положительных чисел $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \delta$ такую, что для любых $z', z'' \in E \cap C(\delta, z^{(0)})$ имеет место неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Понятие *равномерной непрерывности* заданной на множестве E функции $f(z)$, а также понятия *сходимости* и *равномерной сходимости* заданной на E последовательности функций $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, вводятся точно таким же образом, как и в случае функций одного комплексного переменного (см. § 2.1 и § 3.1 гл. II).

Конечная сумма $P_k(z) = \sum_{j=1}^m a_{k_1, \dots, k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}$, где $k_1, k_2, \dots, k_m$ принимают неотрицательные целые значения, причем $\sum_{j=1}^m k_j = k$, носит название *однородного полинома степени k* . Очевидно, что $P_k(z)$ является непрерывной функцией для всех конечных значений z .

Приведенные ниже свойства непрерывных функций многих комплексных переменных доказываются буквально так же, как в случае функций одного комплексного переменного.

а) *Непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E из C^m функция равномерно непрерывна на E .*

б) *Непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E из C^m функция ограничена на E .*

с) *Сумма $s(z)$ равномерно сходящегося на множестве $E \subset C^m$ ряда непрерывных функций $\alpha_n(z)$:*

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z)$$

непрерывна на E .

2. Кратные ряды с комплексными членами. Выражение вида

$$\sum \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} \quad (1)$$

где m — натуральное число, а $k_1, k_2, \dots, k_m$ принимают всевозможные неотрицательные целые значения, назы-

вается m -кратным рядом с комплексными членами $\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}$.

Обозначим через $s_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ конечную m -кратную сумму

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}.$$

Говорят, что ряд (1) *сходится* и его *суммой* является число s , если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа $N_1, N_2, \dots, N_m$, что

$$|s_{n_1, n_2, \dots, n_m} - s| < \varepsilon$$

для всех $n_k > N_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Из легко проверяемой формулы

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1, n_2, \dots, n_m} &= \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_1+j_2+\dots+j_m} s_{n_1-j_1, n_2-j_2, \dots, n_m-j_m} \end{aligned}$$

вытекает, что равенство

$$\lim_{\substack{k_1 \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ k_m \rightarrow \infty}} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} = 0$$

является *необходимым условием* сходимости ряда (1).

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} |\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}|$. Установленные в § 3.4 гл. I свойства абсолютно сходящихся двойных рядов остаются в силе и для абсолютно сходящихся кратных рядов.

3. Степенные ряды с несколькими переменными. Функциональный ряд вида

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m} \quad (2)$$

называется *степенным рядом с несколькими переменными* $z_1, z_2, \dots, z_m$.

При $m=1$, как уже было показано в § 3.2 гл. II, сходимость ряда (2) в точке $z^{(0)} = z_1^{(0)}$ гарантирует для всех значений индекса k_1 наличие неравенств $|\alpha_{k_1}| |z_1^{(0)}|^{k_1} < g$, где g — положительное число. Простой пример двойного степенного ряда $\sum_{k_1, k_2 \geq 0} \alpha_{k_1, k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$, $\alpha_{0,0} = -\alpha_{0,1} = 1$, $\alpha_{k_1,0} =$

$= -\alpha_{k_1, 1} = k_1^{k_1}$, $k_1 \geq 1$, $\alpha_{k_1, k_2} = 0$ при $k_2 > 1$, сходящегося в точках $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, 1)$, $z_1^{(0)} \neq \infty$, и $z^{(0)} = (0, z_2^{(0)})$, $z_2^{(0)} \neq \infty$, показывает, что при $m > 1$ из сходимости ряда (2) в точке $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)})$, $z_k^{(0)} \neq 0$, $k = 1, \dots, m$, вообще говоря, не следует, что для всех значений индексов имеют место неравенства

$$|\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}| |z_1^{(0)}|^{k_1} |z_2^{(0)}|^{k_2} \dots |z_m^{(0)}|^{k_m} < g,$$

где g — положительное число, одно и то же для всех $k_1, k_2, \dots, k_m$. Поэтому аналогом первой теоремы Абеля можно считать следующее утверждение: *если коэффициенты $\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ степенного ряда (2) для всех значений индексов удовлетворяют условиям*

$$|\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}| \leq \frac{g}{r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_m^{k_m}}, \quad (3)$$

где g — положительное число, не зависящее от $k_1, k_2, \dots, k_m$, то этот ряд сходится абсолютно в каждой точке открытого полицилиндра $C(r, 0)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, причем сходимость является равномерной на каждом компактном подмножестве полицилиндра $C(r, 0)$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что при $z \in C(r, 0)$ ряд

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} g \left| \frac{z_1}{r_1} \right|^{k_1} \left| \frac{z_2}{r_2} \right|^{k_2} \dots \left| \frac{z_m}{r_m} \right|^{k_m}$$

представляет собой кратную геометрическую прогрессию, суммой которой является выражение

$$g \left(1 - \frac{|z_1|}{r_1} \right)^{-1} \left(1 - \frac{|z_2|}{r_2} \right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{|z_m|}{r_m} \right)^{-1}.$$

Условие (3) всегда выполняется, например, если ряд (2) абсолютно сходится в точке $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ остова полицилиндра $C(r, 0)$.

В силу абсолютной сходимости ряда (2) внутри полицилиндра $C(r, 0)$ мы можем сгруппировать его члены

таким образом, чтобы этому ряду придать вид $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$,

где $P_n(z)$ — однородный полином переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$ степени n . Так как каждый из однородных полиномов $P_n(z)$ является непрерывной функцией, а ряд равномерно сходится на каждом компактном подмножестве полици-

линдра $C(r, 0)$, то сумма $s(z)$ этого ряда является непрерывной функцией внутри цилиндра $C(r, 0)$.

4. Понятие аналитической функции многих комплексных переменных. Пусть $w = f(z) = u + iv$ — заданная в некоторой области D пространства C^m функция, действительная и мнимая части которой, как функции действительных переменных $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$, непрерывны вместе с производными первого порядка в каждой точке $z \in D$.

Приращение Δw функции w , когда переменные z_k принимают приращения Δz_k , $k = 1, 2, \dots, m$, можно записать в виде

$$\Delta w = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Delta \bar{z}_k \right) + o(|\Delta z|), \quad (4)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right),$$

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k, \quad \Delta \bar{z}_k = \Delta x_k - i \Delta y_k,$$

а $o(|\Delta z|)$ — бесконечно малая величина высшего порядка

по сравнению с $|\Delta z| = \sum_{k=1}^m |\Delta z_k|$.

Если часть

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Delta \bar{z}_k \right)$$

приращения (4) функции $f(z)$ в каждой точке $z \in D$ является линейной формой лишь относительно Δz_k , $k = 1, 2, \dots, m$, т. е. если в каждой точке $z \in D$ имеют место равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

то говорят, что функция $f(z)$ *аналитична в области D* .
Выражение

$$dw = df = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \quad (6)$$

называется *полным дифференциалом* аналитической функции $f(z)$.

Из определения аналитической функции $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_m)$ следует, что она непрерывна по совокупности переменных и аналитична относительно каждого переменного z_k в смысле § 1.2 гл. III. Коэффициент $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ при dz_k в правой части формулы (6) представляет собой (частную) производную функции $f(z)$ относительно переменного z_k , и она вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} &= \lim_{\Delta z_k \rightarrow 0} \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_k + \Delta z_k, \dots, z_m) - f(z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_m)}{\Delta z_k} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_k} + i \frac{\partial v}{\partial x_k} = -i \frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial y_k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сумма $s(z)$ степенного ряда (2), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (3), как уже было отмечено в п. 3 настоящего параграфа, является непрерывной функцией в полицилиндре $C(r, 0)$.

Представляя ряд (2) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_1, z_2, \dots, z_m) = s(z) \quad (8)$$

и учитывая то обстоятельство, что однородные полиномы $P_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, являются аналитическими функциями любого из переменных z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, в силу первой теоремы Вейерштрасса (§ 3.3 гл. IV) заключаем, что функция $s(z)$ аналитична по любому из этих переменных, причем каждый член продифференцированного, например, один раз по переменному z_k ряда (8) не превосходит по модулю соответствующего члена геометрической прогрессии, суммой которой является выражение

$$\begin{aligned} \frac{g}{r_k} \left(1 - \frac{|z_1|}{r_1}\right)^{-1} \left(1 - \frac{|z_2|}{r_2}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{|z_k|}{r_k}\right)^{-2} \dots \\ \dots \left(1 - \frac{|z_m|}{r_m}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $s(z)$ в полицилиндре $C(r, 0)$, непрерывно дифференцируема вместе со своими производными по каждому переменному z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, до любого порядка и она удовлетворяет условиям (5), т. е. $s(z)$ аналитична в полицилиндре $C(r, 0)$. Кроме того, как легко видеть, для всех значений индексов имеют место

равенства

$$k_1! k_2! \dots k_m! \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_m} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_m^{k_m}} \right]_{z=0}. \quad (9)$$

5. Аналог теоремы Тейлора. Для функции $f(z)$, аналитической в области $D \subset C^m$, аналогом теоремы Тейлора (§ 1.1 гл. V) является следующее утверждение: для каждой точки $z^{(0)} \in D$ существует полицилиндр с центром в этой точке, внутри которого функция $f(z)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} (z_1 - z_1^{(0)})^{k_1} (z_2 - z_2^{(0)})^{k_2} \dots (z_m - z_m^{(0)})^{k_m}.$$

Ради упрощения записи будем считать, что $z^{(0)} = 0$. При достаточно малых $r_1, r_2, \dots, r_m$ полицилиндр $\overline{C(r, 0)}$ лежит внутри области D . Фиксировав значения $z_k, k=2, 3, \dots, m$, в кругах $|z_k| \leq r_k$ аналитическую по переменному z_1 функцию $f(z)$ в каждой точке круга $|z_1| < r_1$ можем представить интегральной формулой Коши (40) гл. IV:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_1|=r_1} \frac{f(t_1, z_2, \dots, z_m)}{t_1 - z_1} dt_1. \quad (10)$$

Аналогично заключаем, что

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, z_k, \dots, z_m) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_k|=r_k} \frac{f(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, z_{k+1}, \dots, z_m)}{t_k - z_k} dt_k, \quad (11) \\ &|z_k| < r_k, \quad k=2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Из (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{|t_1|=r_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int_{|t_2|=r_2} \frac{dt_2}{t_2 - z_2} \dots \\ &\dots \int_{|t_m|=r_m} \frac{f(t_1, t_2, \dots, t_m)}{t_m - z_m} dt_m. \quad (12) \end{aligned}$$

В силу непрерывности по совокупности переменных функций, стоящих под интегралами в правой части формулы (12), интегрирование можно производить в любом

порядке и можно записать эту формулу в виде

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{|t_1|=r_1} \int_{|t_2|=r_2} \cdots \int_{|t_m|=r_m} \frac{f(t) dt_1 dt_2 \dots dt_m}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2) \dots (t_m - z_m)}, \quad (13)$$

$$z \in C(r, 0).$$

Так как для каждого фиксированного $z \in C(r, 0)$ функция

$$\frac{1}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2) \dots (t_m - z_m)}$$

представляется в виде суммы абсолютно и равномерно (относительно t_k при $|t_k|=r_k$, $k=1, 2, \dots, m$) сходящегося ряда

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}}{t_1^{k_1+1} t_2^{k_2+1} \dots t_m^{k_m+1}},$$

то из (13) получим

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}, \quad (14)$$

где

$$\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{|t_1|=r_1} \int_{|t_2|=r_2} \cdots \int_{|t_m|=r_m} \frac{f(t) dt_1 dt_2 \dots dt_m}{t_1^{k_1+1} t_2^{k_2+1} \dots t_m^{k_m+1}}. \quad (15)$$

Из формулы (15) имеем

$$|\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m}| \leq \frac{M}{r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_m^{k_m}},$$

где $M = \max |f(z)|$ при $z \in \overline{C(r, 0)}$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда в правой части формулы (14) в полицилиндре $C(\rho, 0)$, где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$, $0 < \rho_k < r_k$, $k=1, 2, \dots, m$.

В силу (9) коэффициенты степенного ряда (14) наряду с (15) могут быть вычислены и по формуле

$$\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_m} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_m^{k_m}} \right]_{z=0}. \quad (16)$$

На основании формулы (16) заключаем, что в полицилиндре $C(r, 0)$ представление функции $f(z)$ в виде суммы ряда по степеням z_k , $k=1, 2, \dots, m$, единственно.

Для представимости функции $f(z)$ по формуле (13) достаточно потребовать от нее непрерывности в области D по совокупности переменных z_k , $k=1, 2, \dots, m$, и аналитичности по каждому из этих переменных. В этих предположениях сразу заключаем, что $f(z)$ аналитична в D . Отсюда, если теперь учесть, что справедливо утверждение: *функция $f(z)$, аналитическая в области D по каждому переменному z_k , $k=1, 2, \dots, m$, непрерывна по совокупности этих переменных*, заключаем, что *аналитическая по каждому переменному z_k функция $f(z)$ аналитична в области D* .

Сформулированное выше утверждение носит название теоремы Гартогса. Доказательство этой теоремы читатель может найти, например, в книге: Бохнер С., Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных. — М.: Гостехиздат, 1951.

6. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительных переменных. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — однозначная функция, заданная в некоторой области d пространства действительных переменных x_k , $k=1, 2, \dots, m$. Говорят, что функция $f(x)$ аналитична в области d , если для каждой точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ существует такой параллелепипед Π : $|x_k - x_k^{(0)}| < \delta_k$, $k=1, 2, \dots, m$, в каждой точке x которого $f(x)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} (x_1 - x_1^{(0)})^{k_1} (x_2 - x_2^{(0)})^{k_2} \dots (x_m - x_m^{(0)})^{k_m}. \quad (17)$$

Область d мы можем считать лежащей в пространстве C^m комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, причем в d имеют место равенства $y_k = 0$, $k=1, 2, \dots, m$.

Абсолютная сходимость ряда (17) в параллелепипеде Π влечет за собой абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} (z_1 - x_1^{(0)})^{k_1} (z_2 - x_2^{(0)})^{k_2} \dots (z_m - x_m^{(0)})^{k_m} \quad (18)$$

в цилиндре $C(\delta, x^{(0)})$: $|z_k - x_k^{(0)}| < \delta_k$, $k=1, 2, \dots, m$.

Сумма $s(z)$ ряда (18) в цилиндре $C(\delta, x^{(0)})$ является аналитической функцией, совпадающей с $f(x)$ при $y_k = 0$, $k=1, 2, \dots, m$.

Так как при вычислении коэффициентов ряда (18) по формуле (16):

$$a_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_m} s(z)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_m^{k_m}} \right]_{z=x^{(0)}}$$

в силу (7) можно считать, что $s(x) = f(x)$, то тем самым доказано, что в полицилиндре $C(\delta, x^{(0)})$ существует единственная аналитическая функция $s(z)$ переменных $z_k, k=1, 2, \dots, m$, совпадающая с $f(x)$ для действительных значений этих переменных. Функцию $s(z)$ естественно обозначать через $f(z)$ и называть ее *аналитическим продолжением $f(x)$ из параллелепипеда Π в полицилиндр $C(\delta, x^{(0)})$* .

Следовательно, существует некоторая область D пространства S^m комплексных переменных $z_k, k=1, 2, \dots, m$, содержащая внутри себя область d пространства переменных $x_k, k=1, 2, \dots, m$, в которую аналитическая продолжается заданная в d аналитическая функция $f(x)$.

7. Распространение гармонической функции для комплексных значений ее аргументов. Формула Гурса. В § 2.5 гл. IV была выведена формула, дающая выражение аналитической в односвязной области D плоскости переменного $z = x + iy$ функции $f(z)$ по ее действительной части $u(x, y)$.

Разлагая в окрестности каждой точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ функцию $f(z)$ в степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ и

учитывая, что $\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (\overline{z} - \overline{z_0})^k$, убеждаемся в справедливости следующего утверждения: гармоническая в односвязной области D функция

$$2u(x, y) = f(z) + \overline{f(z)} \quad (19)$$

в круге $C(\varepsilon, z_0)$, где ε — расстояние от точки z_0 до границы области D , разлагается в абсолютно сходящийся двойной степенной ряд

$$2u(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} b_{k_1, k_2} (x - x_0)^{k_1} (y - y_0)^{k_2} \quad (20)$$

с действительными коэффициентами u , стало быть, представляет собой аналитическую функцию действительных переменных x и y .

Легко видеть, что двойной степенной ряд в правой части формулы (20) абсолютно сходится в полицилиндре $C(r, z^{(0)})$ пространства переменных $z_1 = x + ix'$, $z_2 = y + iy'$ при $r = (r_1, r_2)$, $r_1 + r_2 < \varepsilon$, $z^{(0)} = (x_0, y_0)$.

Аналитическое продолжение функции $u(x, y)$ в полицилиндр $C(r, z^{(0)})$ обозначим через $u(z_1, z_2)$. В силу (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} 2u(z_1, z_2) &= \sum_{k_1, k_2 \geq 0} b_{k_1, k_2} (z_1 - x_0)^{k_1} (z_2 - y_0)^{k_2} = \\ &= f(z_1 + iz_2) + \bar{f}(z_1 - iz_2). \end{aligned} \quad (21)$$

При комплексных значениях z_1 и z_2 переменные $z = z_1 + iz_2$ и $\bar{z} = \bar{z}_1 - i\bar{z}_2$ независимы. Поэтому в формуле (21), записанной в виде

$$2u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}),$$

можно принять $\bar{z} = \bar{z}_0 = x_0 - iy_0$, т. е.

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{f}(\bar{z}_0),$$

или, что то же самое,

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0) + iC_0, \quad (G)$$

где C_0 — произвольная действительная постоянная.

Формула (G) справедлива для всех значений z_1 и z_2 из кругов $|z_1 - x_0| < r_1$ и $|z_2 - y_0| < r_2$ при $z_1 + iz_2 = z$, $z_1 - iz_2 = \bar{z}_0$ и, в частности, когда z_1 и z_2 принимают действительные значения из этих же кругов. Следовательно, в некоторой окрестности $C(\varepsilon, z_0)$ каждой точки $z_0 \in D$ аналитическая функция $f(z)$ представляется с помощью ее действительной части, распространенной для комплексных значений независимых переменных, по формуле (G). Эта формула известна под названием формулы Гурса.

При наличии элементов

$$\left[2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0) + iC_0, C(\varepsilon, z_0) \right]$$

функция $f(z)$ аналитически продолжается, и притом в силу теоремы модромии однозначно, в D ,

§ 2. Алгебраические функции

1. Существование неявной функции. Пусть функция $F(w, z) = F_1(u, v; x, y) + iF_2(u, v; x, y)$ аналитична в области D пространства C^2 комплексных переменных $w = u + iv$ и $z = x + iy$.

Если в точке $(w_0, z_0) \in D$ имеет место равенство

$$F(w_0, z_0) = 0 \quad (22)$$

и

$$F_w(w_0, z_0) \neq 0, \quad (23)$$

то в некоторой окрестности этой точки уравнение

$$F(w, z) = 0 \quad (24)$$

имеет единственное решение $w = f(z)$, удовлетворяющее условию $f(z_0) = w_0$, причем функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = -\frac{F_z}{F_w}. \quad (25)$$

Приступая к доказательству этого утверждения, заметим, что в силу аналитичности функции $F(w, z)$ по переменному w для якобиана $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}$ имеем выражение

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} = |F_w|^2.$$

Записывая (22), (23) и (24) в виде

$$\begin{aligned} F_k(u_0, v_0; x_0, y_0) &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} &= |F_w|^2 \neq 0 \text{ при } w = w_0, \quad z = z_0, \\ F_k(u, v; x, y) &= 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (26)$$

и принимая во внимание то обстоятельство, что функции $F_k(u, v; x, y)$, $k = 1, 2$, непрерывны вместе со своими производными первого порядка, в силу известной из анализа теоремы существования неявных функций заключаем, что система уравнений (26) в некоторой окрестности точки $(u_0, v_0; x_0, y_0)$ пространства переменных u, v, x, y имеет единственное решение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, удовлетворяющее условиям $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$; кроме того, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка в некоторой

окрестности точки (x_0, y_0) пространства переменных x, y , причем

$$F_{ku}u_x + F_{kv}v_x = -F_{kx}, \quad k=1, 2. \quad (27)$$

$$F_{ku}u_y + F_{kv}v_y = -F_{ky}, \quad (28)$$

Пользуясь тем, что в силу аналитичности функции $F(w, z)$ по переменным w и z имеют место равенства [см. формулу (5) настоящей главы]

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_{2y}, & F_{2x} &= -F_{1y}, \\ F_{1u} &= F_{2v}, & F_{2u} &= -F_{1v}, \end{aligned}$$

из (27) и (28) находим

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = -\operatorname{Re} \frac{(F_{1x} - iF_{1y})(F_{1u} + iF_{1v})}{|F_w|^2}, \\ u_y &= -v_x = \operatorname{Im} \frac{(F_{1x} - iF_{1y})(F_{1u} + iF_{1v})}{|F_w|^2}. \end{aligned}$$

А это означает, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и ее производная вычисляется по формуле (25).

Когда условие (23) нарушено, может оказаться, что в окрестности точки (w_0, z_0) уравнение (24) вовсе не имеет решения вида $w = f(z)$, удовлетворяющего условию $f(z_0) = w_0$, а если решение и существует, оно не всегда может быть единственным. Так, например, в случае $F(w, z) = w^2 - z^2$ в окрестности точки $(0, 0)$ уравнение $F(w, z) = 0$ имеет два решения вида $w = f(z)$, удовлетворяющие условию $f(0) = 0$, а именно $w = z$ и $w = -z$.

Множество точек (w, z) , для которых одновременно выполняются равенства

$$F(w, z) = 0, \quad F_w(w, z) = 0, \quad (29)$$

вообще говоря, имеет довольно сложную природу.

Однако, если $F(w, z)$ является неприводимым полиномом (т. е. его нельзя представить в виде произведения двух полиномов, каждый из которых отличен от постоянной), то множество точек z , для которых одновременно имеют место равенства (29), конечно.

Действительно, из неприводимости полинома $F(w, z)$ следует, что полиномы F и F_w взаимно простые (т. е. у них нет отличного от постоянной общего множителя). Поэтому дискриминант $R(z)$ полинома $F(w, z)$ не равен тождественно нулю. Применяя известный из алгебры

алгоритм Евклида, находим, что

$$R(z) = pF(w, z) + qF_w(w, z), \quad (30)$$

где $p = p(w, z)$ и $q = q(w, z)$ — полиномы.

В силу (30) заключаем, что значения z , для которых выполняются равенства (29), должны быть нулями полинома $R(z)$. Поскольку $R(z)$ имеет лишь конечное число нулей, конечным является и множество значений z , для которых одновременно имеют место равенства (29).

2. Алгебраические функции одного комплексного переменного. *Алгебраической* называется полная аналитическая функция, для некоторого элемента (f, D) которой существует такой полином $P(w, z)$, что равенство

$$P(f(z), z) = 0 \quad (31)$$

выполняется для всех $z \in D$.

Ввиду того, что вместе с функцией $f(z)$ аналитической является и функция $P(f(z), z)$, в силу теоремы единственности аналитической функции (см. гл. V, § 1, п. 2) из определения алгебраической функции непосредственно следует, что если для некоторого ее элемента (f, D) имеет место равенство (31), то это равенство будет иметь место для всех ее элементов.

В определении алгебраической функции всегда можно считать, что $P(w, z)$ — неприводимый полином.

Действительно, пусть полином $P(w, z)$, для которого имеет место тождество (31), приводим. Представим его в виде произведения

$$P(w, z) = \prod_{j=1}^n P_j(w, z)$$

неприводимых множителей P_j .

Обозначим через $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательность точек $z_k \in D$, предел которой $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 \in D$. В силу (31) имеем

$$\prod_{j=1}^n P_j(f(z_k), z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда заключаем, что по крайней мере для одного значения индекса j равенство $P_j(f(z_k), z_k) = 0$ выполняется для бесконечного множества индексов k . Следовательно, в силу теоремы единственности для всех $z \in D$ будем иметь $P_j(f(z), z) = 0$.

Теперь легко показать, что *соответствующие данной алгебраической функции неприводимые полиномы, для которых выполняется тождество (31), отличаются друг от друга лишь постоянным множителем.*

В самом деле, пусть $P_1(\omega, z)$ и $P_2(\omega, z)$ — два неприводимых полинома, для которых имеют место тождества

$$P_1(f(z), z) = 0, \quad P_2(f(z), z) = 0. \quad (32)$$

Допустим, что полиномы P_1 и P_2 — взаимно простые. Тогда их результат $R(z)$ должен быть полиномом, не равным нулю тождественно. Представляя $R(z)$ (пользуясь, например, алгоритмом Евклида) в виде $R(z) = pP_1(\omega, z) + qP_2(\omega, z)$, в силу (32) заключаем, что $R(z) = 0$ для всех $z \in D$, а это невозможно.

3. Понятие критической точки. Пусть $P(\omega, z)$ — заданный полином. Запишем его в виде

$$P(\omega, z) = \sum_{k=0}^m a_k(z) \omega^{m-k},$$

где $a_k(z)$, $k=0, 1, \dots, m$, — полиномы комплексного переменного z .

Критическими точками алгебраической функции, порождаемой полиномом $P(\omega, z)$, будем называть бесконечно удаленную точку плоскости комплексного переменного z , все точки z , для которых $P(\omega, z) = P_\omega(\omega, z) = 0$, а также точки z , являющиеся нулями полинома $a_0(z)$. Как уже было показано в п. 1, число значений z , для которых $P = P_\omega = 0$, в случае неприводимого полинома $P(\omega, z)$ конечно. Так как число нулей полинома $a_0(z)$ также конечно, то множество критических точек алгебраической функции, порождаемой неприводимым полиномом, является конечным.

В каждой некритической точке z_0 плоскости комплексного переменного z , в которой $P_\omega(\omega, z_0) \neq 0$, уравнение $P(\omega, z_0) = 0$ имеет ровно m простых корней ω_j^0 , $j=1, 2, \dots, m$. Ввиду того, что

$$P(\omega_j^0, z_0) = 0, \quad P_\omega(\omega_j^0, z_0) \neq 0, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

в силу доказанного выше утверждения о существовании и единственности неявной функции заключаем, что в некоторой окрестности $C(\delta, z_0)$ существует m аналитических функций $f_j(z)$, $j=1, 2, \dots, m$, удовлетворяющих условиям $f_j(z_0) = \omega_j^0$ и $P(f_j(z), z) = 0$ для всех $z \in C(\delta, z_0)$.

Следовательно, в окрестности точки z_0 мы имеем m элементов $[f_j(z), C(\delta, z_0)]$, порождаемых полиномом $P(w, z)$. Очевидно, что каждый из этих элементов аналитически продолжается вдоль любой непрерывной кривой, выходящей из точки z_0 и не проходящей через критические точки.

Бывают случаи, когда в результате аналитического продолжения разных элементов $[f_j(z), C(\delta, z_0)]$, $j=1, 2, \dots, m$, мы приходим к разным алгебраическим функциям, как это имеет место на примере полинома $P(w, z) = w^2 - z^2$. Порождаемые этим полиномом элементы $[z, C(\delta, z_0)]$ и $[-z, C(\delta, z_0)]$ в результате аналитического продолжения дают две разные алгебраические функции z и $-z$ соответственно.

Однако функции, полученные аналитическим продолжением элементов $[f_1(z), C(\delta, z_0)]$, $[f_2(z), C(\delta, z_0)]$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$, порождаемых, например, полиномом $P(w, z) = w^2 - z$, уже не могут быть рассмотрены как разные алгебраические функции.

Говорят, что порождаемые полиномом $P(w, z)$ элементы $[f_1(z), C(\delta_1, z_1)]$ и $[f_2(z), C(\delta_2, z_2)]$ определяют одну и ту же ветвь в некритической точке $z_0 \in C(\delta_1, z_1) \cap C(\delta_2, z_2)$, если существует окрестность $C(\delta, z_0)$ точки z_0 , в которой всюду $f_1(z) = f_2(z)$.

Если полином $P(w, z)$ неприводим и z_0 является некритической точкой, то в результате всевозможных аналитических продолжений элементов $[f_j(z), C(\delta, z_0)]$, $j=1, 2, \dots, m$, порождаемых полиномом $P(w, z)$, получается многозначная алгебраическая функция, число ветвей которой равно m , причем все эти элементы получают аналитическим продолжением одного из них, например $[f_1(z), C(\delta, z_0)]$.

Доказательство этого утверждения читатель может найти, например, в книге: Неванlinna Р. Униформизация. — М.: ИЛ, 1955.

§ 3. Конформное отображение в многомерных евклидовых пространствах

1. Некоторые определения и обозначения. Ниже мы часто будем пользоваться матричной записью, причем квадратные $(n \times n)$ -матрицы и n -компонентные векторы будем обозначать соответственно прописными и строчными латинскими буквами без индексов.

Под *произведением* Ap квадратной $(n \times n)$ -матрицы $A = \|A_{ik}\|$ на вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ будем понимать вектор $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, компоненты которого получаются из компонент вектора p в результате линейного преобразования с матрицей A :

$$q_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} p_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица A называется *ортогональной*, если $\sum_{i=1}^n A_{ji} A_{jk} = \delta_{ik}$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Под *произведением* λA скаляра λ на $(n \times n)$ -матрицу $A = \|A_{ik}\|$ понимается матрица $B = \|B_{ik}\|$, где $B_{ik} = \lambda A_{ik}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Требования, что матрица A или вектор p непрерывны, удовлетворяют условию Гёльдера, дифференцируемы и т. д., означают, что каждый элемент A или каждая компонента p обладает указанными свойствами.

Выражение $\sum_{k=1}^n p_k q_k = pq = (p \cdot q)$ называется *скалярным произведением* векторов p и q . В случае, когда все компоненты вектора p действительны, выражение

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k^2 \right)^{1/2} = (p \cdot p)^{1/2} = |p|$$

будем называть *длиной* вектора p .

Пусть E_n — евклидово пространство действительных точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пользуясь векторными обозначениями $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ для точек x и y , расстояние между ними можно записать в виде

$$\left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{1/2} = |x - y|.$$

Окрестностью $C(\delta, a)$ точки $a \in E_n$ называется множество точек $x \in E_n$, для которых $|x - a| < \delta$, где δ — заданное положительное число, $C(\delta, a)$ представляет собой n -мерный шар радиуса δ с центром в точке a .

После определения окрестности точки пространства E_n понятия *предельной точки*, *внутренней точки*, *граничной точки*, *ограниченного множества*, *замкнутого множества*,

открытого множества, связного множества и области вводятся точно таким же образом, как в § 2.1 гл. 1.

2. Конформность отображения по Гауссу. В области E_n евклидова пространства E_n точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассмотрим систему действительных функций $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывных вместе с производными первого порядка, осуществляющих взаимно однозначное отображение области Ω на некоторую область Ω_1 этого же пространства.

В векторных обозначениях $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ рассматриваемое отображение запишется в виде

$$y = y(x). \quad (33)$$

Для квадратов расстояний $dx dx$ и $dy dy$ между точками $x, x + dx$ и $y, y + dy$ (элементов длин) примем обозначения ds^2 и $d\sigma^2$ соответственно.

Отображение (33) называется *конформным по Гауссу*, если существует такая положительная скалярная функция $\lambda(x)$, что

$$d\sigma^2 = \lambda(x) ds^2. \quad (34)$$

Другими словами, конформность отображения (33) означает, что имеет место постоянство искажения масштаба (элемента длины) по всем направлениям, выходящим из точки x .

Условие (34) равносильно равенствам

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \lambda(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (35)$$

При отображении (33) векторам dx и δx , выходящим из точки x , соответствуют векторы dy и δy , выходящие из точки y .

Так как $dy_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k$, $\delta y_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \delta x_k$, то в силу (35) будем иметь

$$\cos \widehat{dy \delta y} = \frac{dy \delta y}{|dy| |\delta y|} = \frac{dx \delta x}{|dx| |\delta x|} = \cos \widehat{dx \delta x}.$$

Следовательно, характерным для конформного отображения является сохранение (консерватизм) углов.

3. Примеры конформного отображения. Параллельный перенос $y = x + h$, преобразование подобия $y = \mu x$ и ортогональное преобразование $y = Cx$, где $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ — постоянный вектор, μ — скалярная постоянная, а C — постоянная ортогональная матрица, дают тривиальные примеры конформного отображения в пространстве E_n . В первом и третьем случаях $\lambda = 1$, а во втором случае $\lambda = \mu^2$.

Отображение

$$y = \frac{x}{(x \cdot x)}, \quad (36)$$

имеющее смысл для всех конечных значений x , отличных от $x = 0$, называется *инверсией* или *зеркальным отображением* пространства E_n относительно сферы $|x| = 1$.

Умножая скалярно обе части равенства (36) на x , получим

$$(x \cdot y) = 1. \quad (37)$$

Из равенства (36) также следует, что $|y||x| = 1$, т. е. при инверсии соответствующие друг другу точки x и y лежат на одном луче, выходящем из точки $x = 0$, причем произведение расстояний этих точек от $x = 0$ равно единице.

Легко видеть, что отображение (36) обращается однозначно. В самом деле, умножая скалярно обе части равенства (36) на y , в силу (37) заключаем, что $(y \cdot y) = \frac{1}{(x \cdot x)}$, и, следовательно, равенство (36) можно записать в виде

$$x = \frac{y}{(y \cdot y)}. \quad (38)$$

В пространстве E_n введем в рассмотрение единственную бесконечно удаленную точку $x = \infty$ и доопределим отображение (36) во всем E_n сопоставлением друг другу точек 0 и ∞ .

Инверсия обладает следующими важными свойствами: а) *при инверсии сфера* (плоскость тоже считается сферой бесконечного радиуса) *отображается в сферу* и б) *инверсия является конформным отображением*.

Справедливость утверждения а) сразу следует из того, что уравнение сферы в переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет вид

$$A(x \cdot x) + (h \cdot x) + B = 0, \quad (39)$$

где A и B — скалярные постоянные, а $h = (h_1, \dots, h_n)$ — постоянный вектор.

Действительно, заменяя в левой части (39) вектор x его выражением (38), получим уравнение

$$B(y \cdot y) + (h \cdot y) + A = 0,$$

представляющее сферу в переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Для доказательства свойства б) заметим, что при $x \neq 0$ в результате дифференцирования равенства (36) получим

$$dy = \frac{(x \cdot x) dx - 2(x \cdot dx)x}{(x \cdot x)^2}. \quad (40)$$

Умножив скалярно dy на себя и учитывая (40), сразу убеждаемся в том, что условие (34) конформности отображения соблюдено, причем на этот раз $\lambda(x) = \frac{1}{(x \cdot x)^2}$.

Понимая под углом между двумя направлениями, выходящими из точки $y = \infty$, угол между соответствующими им при отображении (36) направлениями, выходящими из точки $x = 0$, заключаем, что при инверсии углы сохраняются в E_n всюду.

4. Теорема Лиувилля. Условия (35) конформности отображения (33) представляют собой относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$ систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

При $n = 2$ система (35) равносильна одной из следующих двух линейных систем:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0,$$

или

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0,$$

и, следовательно, в этом случае теория конформного отображения полностью описывается теорией однолистных аналитических функций одного комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ или $z = x_1 - ix_2$ (ср. § 1.3 гл. III).

В случае $n > 2$ число уравнений в системе (35) превышает число функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, т. е. система (35) переопределена.

Ответ на вопрос, насколько переопределена система (35), дает следующая теорема Лиувилля: в евклидовом пространстве E_n при $n > 2$ конформное отображение

исчерпывается конечным числом суперпозиций четырех видов отображений — параллельного переноса, преобразования подобия, ортогонального преобразования и инверсии.

Теорему Лиувилля можно доказать путем описания многообразия решений системы (35) (см. Bianchi L. *Lezioni di Geometria Differenziale*.—Pisa, 1894). Ниже мы приводим предложенное Капелли доказательство этой теоремы при $n=3$, опирающееся на следующие хорошо известные факты из дифференциальной геометрии: 1) если уравнение поверхности S записано в виде

$$x = x(u_1, u_2), \quad (41)$$

где $u_1 = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$ являются линиями кривизны на S , то в каждой точке этой поверхности вектор x с единичным вектором нормали v поверхности S связан формулами Родрига

$$\frac{\partial v}{\partial u_1} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial u_2} = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad (42)$$

где $1/R_1$ и $1/R_2$ — главные кривизны поверхности S ; 2) из триортогональной системы поверхностей каждая пара пересекается вдоль линий кривизны (теорема Дюпена); 3) сфера является единственной поверхностью, на которой каждая линия является линией кривизны.

При доказательстве этих положений от функций $x_i = x_i(u_1, u_2)$, $i=1, 2, 3$, достаточно потребовать, чтобы они имели непрерывные производные третьего порядка.

В дальнейшем мы будем предполагать, что отображение (33) является конформным и аналитическим, т. е. $y_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=1, 2, 3$, являются аналитическими функциями переменных x_1, x_2, x_3 .

Из положения 1) вытекает, что любую поверхность S , удовлетворяющую отмеченным выше требованиям гладкости, вблизи каждой ее точки можно включить в триортогональную систему поверхностей.

Действительно, запишем уравнение поверхностей S в виде (41), где $u_1 = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$ — линии кривизны. Тройка поверхностей, получаемая из уравнения

$$\bar{x} = x(u_1, u_2) + u_3 v(u_1, u_2) \quad (43)$$

при $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$, $u_3 = \text{const}$ соответственно, представляет собой триортогональную систему. Это следует

из равенств

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} = \left(1 - \frac{u_3}{R_1}\right) \frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} = \left(1 - \frac{u_3}{R_2}\right) \frac{\partial x}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_3} = v(u_1, u_2),$$

полученных в результате дифференцирования равенства (43) с учетом формул (42), и из взаимной ортогональности векторов $\frac{\partial x}{\partial u_1}$, $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ и v .

Теперь легко показать справедливость следующего утверждения: *при конформном отображении линия кривизны переходит в линию кривизны.*

В самом деле, пусть поверхность S_1 является конформным образом поверхности S , а Γ — линия кривизны на S . Обозначим через Γ_1 конформный образ Γ . Приняв Γ за одну из координатных линий $u_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, поверхность S включим в триортогональную систему T .

Так как при конформном отображении углы сохраняются, то конформный образ T является триортогональной системой и, следовательно, в силу теоремы Дюпена Γ_1 должна быть линией кривизны.

Из только что доказанного утверждения и положения 3) сразу следует, что *конформный образ сферы является сферой.*

В самом деле, пусть поверхность S является конформным образом сферы σ . Прообраз γ каждой кривой Γ , лежащей на S , в силу 3) является линией кривизны, и, стало быть, Γ сама является линией кривизны. Отсюда, на основании того же положения 3), заключаем, что S — сфера.

Переходим к доказательству теоремы Лиувилля.

Пусть x^0 — произвольная точка области Ω , а $y^0 = y(x^0)$ — соответствующая ей точка области Ω_1 при конформном отображении (33).

Обозначим через T триортогональную систему сфер $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, проходящих через точку x^0 и лежащих в области Ω , касательными плоскостями которых в точке x^0 служат соответственно плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$.

При конформном отображении (33) триортогональной системе T соответствует триортогональная система T_1 сфер, проходящих через точку y^0 .

Пусть $x^* = I_1(x)$ и $y^* = I_2(y)$ — инверсии относительно сфер $|x - x^0| = r$ и $|y - y^0| = r_1$, содержащих внутри себя триортогональные системы T и T_1 соответственно.

Ввиду того, что инверсия является конформным отображением, образами T и T_1 при отображениях $x^* = I_1(x)$ и $y^* = I_2(y)$ являются соответственно системы плоскостей

$x_i^* = a_i^*$ и $\sum_{k=1}^3 C_{ik}(y_k^* - b_k^*) = 0$, $i = 1, 2, 3$, где C_{ik} — ортогональная (3×3) -матрица. Без ограничения общности можно считать, что $a^* = 0$, $b^* = 0$ и $C = E$, где E — единичная (диагональная) матрица (этого всегда можно добиться, последовательно применяя два раза параллельный перенос и ортогональное преобразование).

Поскольку в результате суперпозиции конечного числа конформных отображений получается конформное отображение, конформным является отображение

$$y^* = I_2[y(I_1^{-1}(x^*))] = y^*(x^*), \quad (44)$$

переводящее триортогональную систему плоскостей $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$ в триортогональную систему плоскостей $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 0$. Таким образом, отображение (44) имеет вид $y_i^* = y_i^*(x_i^*)$, $i = 1, 2, 3$, где y_i^* является функцией лишь переменного x_i^* . Отсюда, учитывая то обстоятельство, что каждая из y_i^* , $i = 1, 2, 3$, является аналитической функцией переменного x_i^* , а при отображении (44) сферы переходят в сферы, заключаем, что отображение (44) имеет вид $y^* = \mu x^*$, где μ — скалярная постоянная.

Следовательно, отображение (33) можно записать в виде

$$y = I_2^{-1}[\mu I_1(x)], \quad (45)$$

и тем самым теорема Лиувилля доказана полностью.

Преобразование вида (45) носит название *преобразования Мёбиуса*.

§ 4. Аналог системы Коши — Римана в трехмерном евклидовом пространстве

1. **Области с гладкой и кусочно-гладкой границей.** Поверхность S в пространстве E_3 называется *гладкой*, если: а) она везде имеет касательную плоскость, меняющуюся непрерывно от точки к точке, и б) существует такое положительное число δ_0 , что часть S_1 поверхности S , лежащая внутри шара $C(\delta, y)$, где y — произвольная точка на S и $0 < \delta < \delta_0$, пересекается каждой прямой, параллельной нормали к S в точке y , не более чем один раз.

Гладкая поверхность S называется *поверхностью Ляпунова*, если соблюдено условие $\vartheta \leq L|x-y|^h$, где ϑ — угол между единичными нормальными v_x и v_y к S в точках x и y , а L и h — положительные числа, причем $0 < h \leq 1$.

Ограниченная область $\Omega^+ \subset E_3$ называется *областью с гладкой (с гладкой по Ляпунову) границей S* , если S представляет собой совокупность конечного числа замкнутых гладких поверхностей (поверхностей Ляпунова) $S_1, S_2, \dots, S_m$, попарно не имеющих общих точек.

Замкнутую поверхность S_i , гомеоморфную сфере, будем называть *кусочно-гладкой (кусочно-гладкой в смысле Ляпунова)*, если она составлена из конечного числа гладких поверхностей (поверхностей Ляпунова) S_{ij} , $j = 1, 2, \dots, k$, причем множество точек, принадлежащих по крайней мере двум из S_{ij} , не содержит ни точек возврата, ни ребер возврата поверхности S_i .

Если граница S области $\Omega^+ \subset E_3$ представляет собой совокупность конечного числа поверхностей $S_1, S_2, \dots, S_m$, среди которых $m-k$ являются кусочно-гладкими (кусочно-гладкими в смысле Ляпунова), а k — замкнутыми гладкими поверхностями (поверхностями Ляпунова), причем $k < m$, то мы будем говорить, что Ω^+ является *областью с кусочно-гладкой (с кусочно-гладкой по Ляпунову) границей*.

Для дополнения $\Omega^+ \cup S$ до всего пространства E_3 мы будем пользоваться обозначением Ω^- .

Если заданная в замкнутой области $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S$ действительная однозначная функция $A(x) = A(x_1, x_2, x_3)$ в области Ω^+ имеет производные $\frac{\partial A}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, причем в каждой точке $y \in S$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\partial A}{\partial x_i} = B_i(y)$, когда точка $x \in \Omega^+$ стремится к точке y по любому пути, то, приняв $B_i(y)$ за значения $\frac{\partial A}{\partial x_i}$ при $x = y$, мы скажем, что $\frac{\partial A}{\partial x_i}$ определены в замкнутой области $\bar{\Omega}^+$.

Из курса математического анализа известно, что для действительных функций $A_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывных вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\bar{\Omega}^+$ с гладкой границей S , имеет место формула Гаусса—Остроградского

$$\iiint_{\Omega^+} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\tau_x = \iint_S \sum_{i=1}^3 A_i(y) v_i(y) ds_y, \quad (46)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор внешней нормали (т. е. нормали, направленной в сторону Ω^+) к поверхности S в точке $y \in S$.

Формула (46) остается в силе и в тех случаях, когда Ω^+ — область с кусочно-гладкой границей. При этом интеграл в правой части (46), распространенный по кусочно-гладкой части S_i границы S области Ω^+ , понимается как сумма интегралов по всем кускам S_{ij} , $j = 1, 2, \dots, k$, составляющим поверхность S_i .

2. Некоторые интегральные равенства, вытекающие из формулы Гаусса — Остроградского. Пусть $q(x) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ — заданный в замкнутой области $\bar{\Omega}^+$ с кусочно-гладкой границей S вектор. В предположении, что $q(x)$ непрерывен в $\bar{\Omega}^+$ вместе со своими производными первого порядка, из формулы (46) непосредственно получим

$$\iiint_{\Omega^+} D \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right) q(z) d\tau_z = \iint_S D(\nu_1, \nu_2, \nu_3) q(y) ds_y, \quad (47)$$

где $D(X_1, X_2, X_3)$ — матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & 0 & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & 0 & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Обозначим через $N(x, y)$ матричный дифференциальный оператор

$$N(x, y) = -D^* \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{1}{|x-y|} D \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right),$$

где $D^*(X_1, X_2, X_3)$ — матрица

$$D^* = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & 0 & X_3 & -X_2 \\ X_2 & -X_3 & 0 & X_1 \\ X_3 & X_2 & -X_1 & 0 \end{vmatrix},$$

а $|x-y|$ — расстояние между точками x и y пространства E_3 .

Для точек $y \in S$ введем в рассмотрение матрицу

$$M(x, y) = -D^* \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{1}{|x-y|} D(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad (49)$$

где матрица D дается формулой (48), а ν_1, ν_2, ν_3 являются косинусами внешней нормали к S в точке y .

Непосредственным вычислением легко убедиться, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{|x-y|=\delta} M(x, y) q(y) ds_y = q(x) \quad (50)$$

для любой точки $x \in \Omega^+$.

Так как функция $u = \frac{1}{|x-y|}$ при $y \neq x$ является решением уравнения Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0$, то для любых точек x и y области Ω^+ при $x \neq y$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} N(x, y) q(y) = & -\frac{\partial}{\partial y_1} \left[D^* \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{1}{|x-y|} (q_2, q_1, -q_4, q_3) \right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial y_2} \left[D^* \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{1}{|x-y|} (q_3, q_4, q_1, -q_2) \right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial y_3} \left[D^* \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{1}{|x-y|} (q_4, -q_3, q_2, q_1) \right]. \quad (51) \end{aligned}$$

Удалим точку x из области Ω^+ вместе с достаточно малой ее замкнутой окрестностью $\overline{C}(\delta, x) \subset \Omega^+$ и оставшуюся часть Ω^+ обозначим через Ω_1 .

Интегрируя тождество (51) по области Ω_1 и используя формулу (46) Гаусса—Остроградского, в пределе при $\delta \rightarrow 0$ в силу (50) получим

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1^+} N(x, y) q(y) d\tau_y = q(x), \quad x \in \Omega^+. \quad (52)$$

Если $x \in \Omega^-$, то в результате интегрирования тождества (51) в силу (46) получим

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1^+} N(x, y) q(y) d\tau_y = 0. \quad (53)$$

Формулы (52) и (53) представляют собой аналог формулы (17) гл. IV.

3. Трехмерный аналог системы Коши — Римана. В § 1.1 гл. III было показано, что действительная и мнимая части аналитической в некоторой области плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в каждой точке этой области являются решениями системы Коши—Римана (CR) линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Ниже мы увидим, что в пространстве E_3 в определенном смысле аналогом системы (CR) является предложенная и исследованная румынскими математиками Гр. К. Моисилом и Н. Теодореско линейная система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) q(x) = 0, \quad (\text{MT})$$

где дифференциальный оператор D задается формулой (48), в которой $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, а $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ — искомый вектор.

Если вектор $q(x)$ в области $\Omega^+ \subset E_3$ с кусочно-гладкой границей S имеет непрерывные производные первого порядка и удовлетворяет системе (MT), то из формул (47), (52) и (53) получим

$$\iint_S D(v_1, v_2, v_3) q(y) ds_y = 0, \quad (54)$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega^+, \\ 0, & x \in \Omega^-. \end{cases} \quad (55)$$

Формулы (54) и (55) являются аналогами известных интегральных формул (34) и (40) гл. IV.

Когда $q(y) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ — заданный лишь на S непрерывный вектор, выражение

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y \quad (56)$$

имеет смысл в каждой точке x пространства E_3 , не принадлежащей S , и представляет собой четырехкомпонентный вектор, дифференцируемый любое число раз.

Ввиду того, что

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix},$$

где Δ — оператор Лапласа, и выражение $\frac{1}{|x-y|}$, как функция x , при $x \neq y$ удовлетворяет уравнению Лапласа, представленный формулой (56) вектор $p(x)$ в каждой точке $x \in E_3$, не лежащей на S , является решением системы (MT).

По этой причине выражение (56) естественно называть аналогом интеграла типа Коши [см. формулу (44) гл. IV].

Пространственным аналогом теоремы Морера (см. § 2.4 гл. IV) можно считать следующее утверждение: *если вектор $q(x)$ непрерывен в области Ω^+ и для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности σ , лежащей вместе с конечной областью, ограниченной ею, в Ω^+ , имеет место равенство*

$$\iint_{\sigma} D(v_1, v_2, v_3) q(y) ds_y = 0, \quad (57)$$

то $q(x)$ является решением системы (MT) в каждой точке $x \in \Omega^+$.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, рассмотрим куб K , лежащий вместе с границей S в области Ω^+ и содержащий внутри себя точку x . Предположим, что грани куба K параллельны координатным плоскостям.

В силу непрерывности $q(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|q(x) - q(y)| < \varepsilon \quad (58)$$

для всех точек y из замкнутого шара $|y - x| \leq \delta$, лежащего внутри K .

Обозначим через K_0 вписанный в шар $|y - x| \leq \delta$ куб, грани которого параллельны граням куба K . Плоскостями $x_i = c_i$, $i = 1, 2, 3$, разобьем часть куба K , лежащую вне K_0 , на кубики K_j , диагональ каждого из которых не превышает достаточно малого числа $h > 0$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} M(x, y) q(y) ds_y + \sum_j \iint_{S_j} M(x, y) q(y) ds_y, \end{aligned} \quad (59)$$

где S_0 и S_j — поверхности K_0 и K_j соответственно.

В силу равномерной непрерывности вектора $q(x)$ при достаточно малом h для всех $y \in S_j$ имеет место неравенство

$$|q(y) - q(y')| < \varepsilon |y - y'|^3, \quad (60)$$

где y' — центр кубика K_j .

Из тождества

$$|x - y|^3 = |x - y'|^3 + |y - y'|^3 - 2(x - y')(y - y'), \quad y \in S_j,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|^3}{|x-y^j|^3} &= \left(1 + \gamma \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right)^{3/2} = \\ &= 1 + \frac{3}{2} \left(1 + \gamma \theta \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right)^{1/2} \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}, \end{aligned} \quad (61)$$

где $|\gamma| < 4$, $0 < \theta < 1$.

На основании (61) можем написать

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{|y-x|^3} &= -\frac{x-y^j}{|x-y^j|^3} + \frac{y-x}{|y-x|^3} + \frac{x-y^j}{|y-x|^3} \frac{|y-x|^3}{|x-y^j|^3} = \\ &= -\frac{x-y^j}{|x-y^j|^3} + \frac{y-x}{|y-x|^3} + \\ &+ \frac{x-y^j}{|y-x|^3} \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 + \gamma \theta \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right)^{1/2} \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right], \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{|y-x|^3} &= -\frac{x-y^j}{|x-y^j|^3} + \frac{y-y^j}{|y-x|^3} + \\ &+ \frac{3}{2} \left(1 + \gamma \theta \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right)^{1/2} \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|} \frac{x-y^j}{|y-x|^3}. \end{aligned} \quad (62)$$

В силу (55) тождество (59) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y - q(x) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} M(x, y) [q(y) - q(x)] ds_y + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_j \iint_{S_j} M(x, y) [q(y) - q(y^j)] ds_y. \end{aligned} \quad (63)$$

Из условия (57) следует, что

$$\begin{aligned} \iint_{S_j} D^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{1}{|x-y^j|} \times \\ \times D(v_1, v_2, v_3) [q(y) - q(y^j)] ds_y = 0, \end{aligned} \quad (64)$$

где значение $v = (v_1, v_2, v_3)$ берется в точке интегрирования $y \in S_j$.

В силу (62), (64), (58), (60) и (63) получим оценку

$$\left| \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y - q(x) \right| < (c_0 + cv) \varepsilon,$$

где c_0 и c — вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от ε и h , а v — объем куба K .

Таким образом, мы убедились в том, что для вектора $q(x)$ имеет место представление

$$q(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(y) ds_y,$$

откуда и следует справедливость сформулированного выше утверждения.

4. Аналог интеграла в смысле главного значения по Коши. Когда точка $x = x^0$ лежит на поверхности S , интеграл в правой части формулы (56) в обычном понимании не имеет смысла. Однако, если заданный на S вектор $q(y)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|q(y') - q(y'')| < L_1 |y' - y''|^{h_1}, \quad (65)$$

этому интегралу можно придать вполне определенный смысл.

Действительно, выделим точку x^0 из поверхности S сферой достаточно малого радиуса ε с центром в этой точке и рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) q(y) ds_y, \quad (66)$$

где S_ε — часть поверхности S , лежащая вне сферы σ .

Если существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x^0) = I(x^0)$, то этот предел естественно называть *сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши*.

Когда S — замкнутая гладкая поверхность и заданный на ней вектор $q(y)$ удовлетворяет условию (65), указанный предел существует.

В самом деле, представим интеграл (66) в виде

$$I_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y + q(x^0) - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} M(x^0, y) q(x^0) ds_y, \quad (67)$$

где σ_1 — часть сферы σ , лежащая вне области Ω^+ .

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} M(x^0, y) q(x^0) ds_y = \frac{1}{2} q(x^0). \quad (68)$$

Так как выражение

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x^0, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y \end{aligned}$$

является обычным несобственным интегралом, то, учитывая (68), заключаем, что предел $I(x^0)$ выражения (67) существует. Этот предел в дальнейшем будем обозначать обычным символом интеграла

$$\begin{aligned} I(x^0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x^0, y) q(y) ds_y = \\ &= \frac{1}{2} q(x^0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x^0, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y. \quad (69) \end{aligned}$$

В случае разомкнутой гладкой поверхности S , когда x^0 — внутренняя точка S , обозначив через S_ε часть S вне шара $C(\varepsilon, x^0)$, интеграл в смысле главного значения можно определить опять как предел выражения

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x^0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) q(x^0) ds_y \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел всегда существует, если вектор q удовлетворяет условию Гёльдера (65).

5. Аналоги формул Сохоцкого — Племяля. Предположим, что S — замкнутая поверхность Ляпунова и векторная плотность $q(y)$ интеграла в правой части формулы (56) удовлетворяет условию Гёльдера (65).

Перепишем выражение (56) в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) q(x^0) ds_y, \quad (70) \end{aligned}$$

где x^0 — произвольная фиксированная точка поверхности S .

Из формулы (70) следует, что

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) [q(y) - \bar{q}(x^0)] ds_y + q(x^0), \quad x \in \Omega^+, \quad (71)$$

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x, y) [q(y) - q(x^0)] ds_y, \quad x \in \Omega^-, \quad (72)$$

где Ω^+ — конечная область, ограниченная поверхностью S , а $\Omega^- = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}^+$.

Так же, как в § 4.3 гл. IV, доказывается, что существуют пределы $p^+(x^0)$ и $p^-(x^0)$ представленных формулами (71) и (72) векторов, когда $x \rightarrow x^0$, находясь в областях Ω^+ и Ω^- соответственно, причем в силу (69) имеем

$$p^+(x^0) = \frac{1}{2} q(x^0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x^0, y) q(y) ds_y, \quad (73)$$

$$p^-(x^0) = -\frac{1}{2} q(x^0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S M(x^0, y) q(y) ds_y. \quad (74)$$

Формулы (73) и (74) являются аналогами формул Сохоцкого—Племеля (109) и (110) из гл. IV.

В результате вычитания и сложения из (73) и (74) получим

$$p^+(x^0) - p^-(x^0) = q(x^0),$$

$$p^+(x^0) + p^-(x^0) = \frac{1}{2\pi} \iint_S M(x^0, y) q(y) ds_y.$$

6. Гармонические функции. Однозначная в области Ω^+ действительная функция $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$, обладающая непрерывными производными второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической*.

Очевидно, что вектор $q(x) = \left(0, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$, где $u(x)$ — гармоническая в области Ω^+ функция, является решением системы (MT).

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — произвольная точка области Ω^+ . В каждой точке x шара $C(r, x^0)$, лежащего вместе с границей $|x - x^0| = r$ в области Ω^+ , в силу (55) имеем

$$q(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y-x^0|=r} M(x, y) q(y) ds_y, \quad (75)$$

откуда сразу следует, что *гармоническая функция* $u(x)$ в точке x имеет производные всех порядков.

Если $u(x)$ — заданная в области Ω^+ гармоническая функция, то, приняв ее за одну из частных производных первого порядка, например за $\frac{\partial v}{\partial x_3}$, от гармонической в области Ω^+ функции $v(x)$, из формулы (75) находим

$$u(x^0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|y-x^0|=r} u(y) ds_y. \quad (76)$$

Повторяя рассуждения § 3.1 гл. IV и пользуясь формулой (76), легко усмотреть, что *гармоническая в области Ω^+ функция* $u(x)$, отличная от постоянной, ни в одной внутренней точке этой области не может достигать максимума (принцип экстремума для гармонической функции).

Задача Дирихле для шара: найти гармоническую в шаре $S(r, x^0)$ функцию $u(x)$, непрерывную в замкнутом шаре $\bar{S}(r, x^0)$ и принимающую заданные непрерывные значения $f(y)$ на сфере $|y-x^0|=r$.

Так как гармоничность функции является свойством, инвариантным при параллельном переносе и преобразовании подобия, то без ограничения общности можно полагать, что $x^0=0$ и $r=1$.

Из принципа экстремума для гармонической функции вытекает, что *задача Дирихле не может иметь более одного решения* (свойство единственности решения задачи Дирихле).

Так как выражения

$$\frac{1}{|y-x|}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|y-x|} = \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3}, \quad i=1, 2, 3,$$

как функции переменных x_1, x_2, x_3 при $x \neq y$ являются решениями уравнения Лапласа, то в силу очевидного тождества

$$\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^3} = -\frac{1}{|y-x|} + \frac{2}{|y-x|^3} y(y-x) \quad (77)$$

закключаем, что функция

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^3} f(y) ds_y \quad (78)$$

является гармонической в шаре $|x| < 1$.

Из формул (55), (73) и (77) для вектора $q(x) = (0, 0, 0, 1)$, являющегося решением системы (MT), имеем

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{y(y-x)}{|y-x|^3} ds_y = 1 \quad (79)$$

в каждой точке x шара $|x| < 1$ и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{y(y-x)}{|y-x|^3} ds_y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{y(y-x^0)}{|y-x^0|^3} ds_y = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi} \iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x^0|} = 1 \end{aligned} \quad (80)$$

в каждой точке x^0 сферы $|y|=1$.

В силу равномерной сходимости несобственного интеграла $\iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x|}$ с учетом равенства (80) получим

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x|} = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x^0|} = 1,$$

откуда на основании свойства единственности решения задачи Дирихле заключаем, что

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x|} = 1, \quad |x| \leq 1. \quad (81)$$

В силу (77), (79) и (81) имеем

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^3} ds_y = 1 \quad (82)$$

в каждой точке замкнутого шара $|x| \leq 1$.

Пользуясь равенством (82) так же, как в § 4.4 гл. IV, убеждаемся в том, что представленная формулой (78) функция $u(x)$ действительно стремится к $f(x^0)$, когда точка x внутри шара $|x| < 1$ стремится к точке x^0 сферы $|y|=1$.

Следовательно, формула (78) дает решение сформулированной выше задачи Дирихле. Эта формула, так же как и формула (84) гл. IV, называется формулой Пуассона.

Для гармонической в шаре $C(1, 0)$ функции $u(x)$ с непрерывными производными первого порядка в $\bar{C}(1, 0)$, удовлетворяющей на сфере $S: |x|=1$ краевому условию $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_S = \varphi$, имеет место интегральное представление

$$u(x) = \int_0^{x_1} v(t, x_2, x_3) dt + \omega(x_2, x_3), \quad (83)$$

где $v(x)$ — гармоническая в $C(1, 0)$ функция, принимающая на S краевые значения φ , а $\omega(x_2, x_3)$ — общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_3^2} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{x_1=0}. \quad (84)$$

Представив функцию $v(x)$ формулой Пуассона (78), из формулы (83) в силу (84) получим

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{(1 - y_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(x_1 - y_1)}{\delta R^{1/2}} + \frac{x_1 + y_1}{R^{1/2}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arsh} \frac{x_1 - y_1}{\delta^{1/2}} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)_S ds_y + \gamma(x_2, x_3), \quad (85)$$

где $\delta = (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$, $R = |x - y|^2$, а $\gamma(x_2, x_3)$ — гармоническая в цилиндре $x_2^2 + x_3^2 < 1$ функция, связанная с функцией $u(x)$ соотношением

$$\gamma(x_2, x_3) = u(0, 0, 0) + 2\operatorname{Re} u\left(0, \frac{x_2 + ix_3}{2}, \frac{x_2 + ix_3}{2i}\right) = 0.$$

7. Признак сходимости последовательности градиентов гармонических функций. Изложенный в § 3.5 гл. IV признак сходимости последовательности аналитических функций можно перефразировать в виде теоремы: если последовательность частных производных $\left\{\frac{\partial u_n(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right\}$, $n = 1, 2, \dots$, гармонических в области $D \subset E_2$ функций $u_n(x_1, x_2)$ сходится равномерно к нулю в D , а последовательность $\left\{\frac{\partial u_n(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right\}$ сходится к нулю в фиксированной точке $x_1^0 + ix_2^0 \in D$, то последовательность $\{\operatorname{grad} u_n(x_1, x_2)\}$ сходится к нулю равномерно в любой замкнутой области D .

Трехмерным аналогом этой теоремы можно считать следующее утверждение: если последовательность $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, гармонических в области $\Omega \subset E_3$ функций

$u_n(x)$ обладает свойствами: а) последовательность $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right\}$ сходится к нулю в области Ω равномерно относительно переменных x_1, x_2, x_3 ; б) последовательность $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right\}$ сходится к нулю в области Ω равномерно относительно переменных x_2, x_3 ; в) последовательность $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right\}$ сходится к нулю в фиксированной точке области Ω , например в точке $(0, 0, 0)$ (в предположении, что она принадлежит Ω), то последовательность $\{ \text{grad } u_n(x) \}$ сходится к нулю равномерно относительно переменных x_1, x_2, x_3 в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}^*$, лежащей в области Ω .

Для доказательства нашего утверждения заметим, что всегда можно указать такое положительное число r , что замкнутый шар $\bar{C}(r, x^0)$ радиуса r с центром в любой точке $x^0 \in \Omega^*$ будет лежать в области Ω .

Внутри шара $C(r, x^0)$ для каждой гармонической функции из последовательности $\{u_n(x)\}$ в силу (85) имеет место представление

$$u_n(x) = \frac{1}{4\pi r} \iint_S \left[\frac{r^2 - (y_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2 - (x_3 - x_3^0)^2}{\delta R^{1/2}} (x_1 - y_1) + \right. \\ \left. + \frac{x_1 + 2x_1^0 + y_1}{R^{1/2}} - \text{arsh} \frac{x_1 - y_1}{\delta^{1/2}} \right] \frac{\partial u_n}{\partial y_1} ds_y + \gamma_n(x_2, x_3; x^0), \quad (86)$$

где S — сфера $|y - x^0| = r$, а γ_n — вполне определенная гармоническая функция переменных x_2, x_3 в цилиндре $(x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 < r^2$.

Обозначим через δ и δ_1 положительные числа, удовлетворяющие условиям $\delta < \delta_1 < r$.

Вычисляя частные производные $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial x_3}$ функции $u_n(x_1, x_2, x_3)$, представленной формулой (86), в точках $(0, x_2, x_3)$ и $(0, 0, 0)$ соответственно, в силу условий а), б) и в) заключаем, что последовательность $\left\{ \frac{\partial \gamma_n(x_2, x_3; 0)}{\partial x_2} \right\}$ сходится к нулю равномерно при $x_2^2 + x_3^2 \leq \delta_1$, а последовательность $\left\{ \frac{\partial \gamma_n(x_2, x_3; 0)}{\partial x_3} \right\}$ сходится к нулю при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Отсюда в силу сформулированной в начале настоящего пункта теоремы следует равномерная сходимость

к нулю последовательности $\{\text{grad } \gamma_n(x_2, x_3; 0)\}$ при $x_2^2 + x_3^2 < \delta$. Принимая во внимание это обстоятельство, на основании условий а), б) и с) опять из формулы (86) заключаем, что последовательность $\{\text{grad } u_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю в шаре $C(\delta, 0)$.

Передвигая центр шара $C(\delta, 0)$ в точку x^0 по непрерывному пути L , лежащему в области Ω^+ , и учитывая, что условие б) в точке x^0 можно считать выполненным, повторением только что приведенного рассуждения убеждаемся в равномерной сходимости к нулю последовательности $\{\text{grad } u_n(x)\}$ в шаре $C(\delta, x^0)$. Отсюда в силу леммы Гейне—Бореля непосредственно следует справедливость сформулированного выше утверждения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, сходится ли двойной ряд

$$\sum_{m, n \geq 0} \frac{m-n}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}, \quad m+n > 2.$$

2. Доказать справедливость утверждения: последовательность $\{s_{n_1, n_2, \dots, n_m}\}$, $n_1, n_2, \dots, n_m \geq 0$, сходится в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую систему натуральных чисел $N_1, N_2, \dots, N_m$, что неравенство

$$|s_{N_1+p_1, N_2+p_2, \dots, N_m+p_m} - s_{N_1, N_2, \dots, N_m}| < \varepsilon$$

имеет место при любых неотрицательных целых $p_1, p_2, \dots, p_m$.

3. Показать, что степенной ряд

$$\sum_{m, n \geq 0} \frac{(m+n)!}{m! n!} z_1^m z_2^n$$

абсолютно сходится в том и только в том случае, если $|z_1| + |z_2| < 1$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если

$$\text{Re } f(z) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. Найти аналитическую на разрезанной вдоль положительной действительной полуоси плоскости z ветвь $f(z)$ многозначной функции, принимающую действительные значения при $z > 0$ на верхнем крае разреза, если задана

$$\text{Re } f(z) = x \log \sqrt{x^2+y^2} - y \arctg \frac{y}{x}.$$

6. Пользуясь формулой Гурса (G), вывести из формулы Пуассона (84) формулу Шварца (82) гл. IV.

7. Доказать, что если трехкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2, q_3)$ непрерывно дифференцируем в замкнутой области $\bar{\Omega}^+$ с кусочно-гладкой границей S и в каждой точке $x \in \Omega^+$ удовлетворяет системе уравнений $\operatorname{div} q = 0$, $\operatorname{rot} q = 0$, то

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S M_*(x, y) q(y) ds_y = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega^+, \\ 0, & x \in \Omega^-, \end{cases}$$

где $M_*(x, y)$ — матрица, полученная из матрицы $M(x, y)$ вычеркиванием первой строки и первого столбца. Если же q задан лишь на S и непрерывен, то вектор

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M_*(x, y) q(y) ds_y$$

при $x \in \Omega^+$ будет решением системы $\operatorname{div} p = 0$, $\operatorname{rot} p = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ [v_3(y_2 - x_2) - v_2(y_3 - x_3)] q_1 + [v_1(y_3 - x_3) - v_3(y_1 - x_1)] q_2 + \\ & + [v_2(y_1 - x_1) - v_1(y_2 - x_2)] q_3 \} \frac{1}{|x - y|^3} ds_y = \text{const} \end{aligned}$$

для всех $x \in \Omega^+$.

8. Показать, что если функция $u(x)$ гармонична в области $\Omega \subset E_3$, то

$$u(x^0) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \iiint_{|y-x^0|<\rho} u(y) d\tau_y,$$

где x^0 — произвольная точка области Ω , а шар $\bar{C}(\rho, x^0) \subset \Omega$.

9. Пользуясь формулой Пуассона (78), доказать, что гармоническая в области Ω функция $u(x)$ является аналитической.

10. Доказанная в § 3.2 гл. IV лемма Шварца может быть сформулирована в терминах градиента гармонической в круге $|x| < 1$ функции $u(x) = u(x_1, x_2)$ следующим образом: если $|\operatorname{grad} u(x)| < 1$ при $|x| < 1$ и $\operatorname{grad} u(x) = 0$ при $x = 0$, то $|\operatorname{grad} u(x)| \leq |x|$. Верно ли аналогичное утверждение для гармонической функции $u(x)$, когда число независимых переменных больше двух?

11. Доказать, что формулы

$$P_\alpha = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x_3^{2n}}{(2n)!} \Delta^n (x_1^\alpha x_2^{m-\alpha}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

$$Q_\beta = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x_3^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n (x_1^\beta x_2^{m-\beta-1}), \quad \beta = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, дают все линейно независимые однородные гармонические полиномы степени m от трех независимых переменных x_1, x_2, x_3 .

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Построение в квадратурах решений некоторых краевых задач для гармонических функций

1. Формулы Шварца и Пуассона для полуплоскости*

В § 3.4 гл. IV была выведена формула Шварца (82) интегрального представления аналитической в круге $|z - z_0| < R$ и непрерывной в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$ функции $f(z)$ через краевые значения на окружности $|t - z_0| = R$ ее действительной части $u(t)$.

Покажем, что аналитическую в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функцию $f(z)$, непрерывную и ограниченную в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, можно представить через краевые значения ее действительной части $u(t)$ вдоль действительной оси $\text{Im } z = 0$ при требовании, что

$$u(t) = O(|t|^{-h}), \quad h > 0, \quad (1)$$

для больших $|t|$.

Действительно, обозначим через w функцию

$$w = \frac{z-i}{z+i}, \quad (2)$$

отображающую конформно верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ комплексной плоскости w (см. формулу (45) гл. III). Для функции

$$\Phi(w) = f\left(i \frac{1+w}{1-w}\right), \quad (3)$$

аналитической в круге $|w| < 1$ и непрерывной в замкнутом круге $|w| \leq 1$, в силу формулы Шварца (82) гл. IV имеет место представление

$$\Phi(w) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{u^*(\tau) d\tau}{\tau - w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{u^*(\tau) d\tau}{\tau} + iC, \quad (4)$$

где

$$u^*(\tau) = u\left(i \frac{1+\tau}{1-\tau}\right), \quad (5)$$

C — произвольная действительная постоянная, а

$$\tau = \frac{t-i}{t+i}. \quad (6)$$

Поскольку при отображении (6) окружность $|\tau|=1$ плоскости w взаимно однозначно и непрерывно переходит в действительную ось $-\infty < t < \infty$ плоскости z с сохранением направления обхода и

$$d\tau = \frac{2idt}{(t+i)^2},$$

пользуясь свойством 5) криволинейного интеграла из § 1.1 гл. IV, в результате замены переменного (6) в формуле (4) на основании (2) и (3) можем написать

$$f(z) = \Phi\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) dt}{t-z} + iC_1, \quad (7)$$

где C_1 — произвольная действительная постоянная

$$C_1 = C + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) t dt}{1+t^2},$$

причем интеграл в правой части (7) абсолютно сходится.

Равенство (7) носит название формулы Шварца для полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

Из формулы (7) выделением действительной части непосредственно получаем формулу Пуассона для полуплоскости

$$u(z) = u(x, y) = \text{Re } f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad (8)$$

дающую решение задачи Дирихле для гармонической в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функции, непрерывной вплоть до действительной оси $\text{Im } z = 0$ и ограниченной на бесконечности, по краевому условию

$$u(t) = \varphi(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1).

Тот факт, что представленная формулой (8) гармоническая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функция $u(z) = u(x, y)$ действительно принимает краевые значения $\varphi(t)$ на действительной оси $\text{Im } t = 0$, проверяется точно так же, как это было сделано в § 4.4 гл. IV при проверке аналогичного факта в случае формулы Пуассона, дающей решение задачи Дирихле для гармонических функций в круге.

Формула Шварца (82) гл. IV, представляющая аналитическую в круге $|z - z_0| < R$ функцию $f(z) = u(z) + iv(z)$ через краевые значения ее действительной части $u(t)$ на окружности $|t - z_0| = R$, была выведена при предположении, что гармоническая функция $u(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$. Поскольку нас не интересовал вопрос о поведении $v(z) = \text{Im } f(z)$ в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$, мы дополнительно не требовали непрерывности по Гёльдеру краевых значений $u(t)$ на окружности $|t - z_0| = R$. В правой части этой формулы имеется интеграл типа Коши с непрерывной плотностью $u(t)$, представляющий аналитическую функцию как вне, так и внутри окружности $|t - z_0| = R$, и без требования непрерывности по Гёльдеру функции $u(t)$ мы не только не могли пользоваться формулами Сохоцкого—Племеля (109), (110) гл. IV, но само существование значений $v^+(t)$ и $v^-(t)$ на этой окружности не всегда может быть гарантировано.

Заметим, что в силу доказанного в конце § 2.1 гл. IV утверждения, мы вправе пользоваться формулами Шварца (4), (7), когда плотность интеграла на конечном множестве точек линии интегрирования обращается в бесконечность порядка ниже единицы.

2. Формула Шварца и решение задачи Дирихле для гармонических функций в полосе, ограниченной прямыми. Без ограничения общности будем считать, что полоса Π на плоскости z имеет вид

$$\Pi: \{0 < \text{Im } z < 1, -\infty < \text{Re } z < \infty\}.$$

Непосредственной проверкой легко уяснить, что функция

$$w = \text{th} \left(\frac{\pi z}{2} - i \frac{\pi}{4} \right) = \frac{ie^{\pi z} + 1}{ie^{\pi z} - 1} \quad (9)$$

комформно отображает полосу Π на единичный круг $|\omega| < 1$, причем она непрерывна вплоть до границы этой полосы и взаимно однозначно отображает нижнюю полуокружность $|\tau| = 1$, $\operatorname{Im} \tau < 0$, в прямую $\operatorname{Im} z = 0$, $-\infty < \operatorname{Re} z < \infty$, и верхнюю полуокружность $|\tau| = 1$, $\operatorname{Im} \tau > 0$, в прямую $\operatorname{Im} z = 1$, $-\infty < \operatorname{Re} z < \infty$, с сохранением направления обхода.

В результате замены переменного (9), устанавливающей соответствие между граничными точками полосы Π и окружности $|\tau| = 1$,

$$\tau = \frac{ie^{\pi t} + 1}{ie^{\pi t} - 1}, \quad (10)$$

с учетом равенств

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\pi i}{\operatorname{ch} \pi t} dt$$

и

$$\frac{\tau + w}{\tau - w} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi t} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t + z)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t - z)} dt,$$

полученных простым вычислением из формул (10) и (9), формула Шварца (4), записанная в виде

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau + w}{\tau - w} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau} + iC,$$

дает для аналитической в полосе Π функции

$$f(z) = \Phi\left(\frac{ie^{\pi z} + 1}{ie^{\pi z} - 1}\right)$$

интегральное представление

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t + z)}{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t - z)} u_0(t) dt - \\ & - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t + z + i)}{\operatorname{ch} \pi (t + i) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t - z + i)} u_1(t) dt + iC, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{Re} f(t) = u_0(t), \quad \operatorname{Re} f(t + i) = u_1(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (12)$$

a C — произвольная действительная постоянная. При этом, очевидно, следует предполагать, что функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$ непрерывны и удовлетворяют условию (1).

Ввиду того, что

$$\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t+z+i) = i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t+z),$$

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t-z+i) = i \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t-z),$$

$$\operatorname{ch} \pi (t+i) = -\operatorname{ch} \pi t,$$

равенству (11) можно придать вид

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t+z)}{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t-z)} u_0(t) dt + \\ & + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t+z)}{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t-z)} u_1(t) dt + iC. \end{aligned} \quad (13)$$

На основании тождеств

$$\operatorname{ch} (\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

$$\operatorname{sh} (\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

$$\operatorname{sh} i\alpha = i \sin \alpha$$

легко усмотреть, что

$$\operatorname{Im} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t+z)}{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t-z)} = \operatorname{Im} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (t-z) \quad (14)$$

и

$$\operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t+z)}{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t-z)} = -\operatorname{Im} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} (t-z). \quad (15)$$

В силу (14) и (15) действительные части представленной формулой (13) функции $f(z)$ и аналитической функции

$$f_1(z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (t-z) u_0(t) dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} (t-z) u_1(t) dt$$

в полосе Π совпадают, т. е.

$$f(z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (t-z) u_0(t) dt - \\ - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} (t-z) u_1(t) dt + iC. \quad (16)$$

На основании формулы (75) гл. V заключаем, что

$$\operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (t-z) = i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} i(t-z) = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t-z} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t-z}{(t-z)^2 + 4k^2},$$

т. е.

$$\frac{1}{2i} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (t-z) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{t-z} + \frac{2}{\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t-z}{(t-z)^2 + 4k^2}. \quad (17)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (17) является аналитической функцией в полосе Π , не имеющей никакой особенности вплоть до границы этой полосы. Учитывая это обстоятельство и подставляя выражение (17) в первое слагаемое правой части формулы (16) при предположении, что функция $u_0(t) = \operatorname{Re} f(t)$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяет условию Гёльдера, в силу формулы (109) гл. IV для предельных значений интеграла типа Коши заключаем, что

$$\operatorname{Re} f^+(t_0) = u_0(t), \quad -\infty < t_0 < \infty. \quad (18)$$

Принимая во внимание второе из равенств (12) и записывая второе слагаемое формулы (16) в виде

$$-\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} (t-z) \operatorname{Re} f(t+i) dt = \\ = \frac{1}{2i} \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} (\xi-z) \operatorname{Re} f(\xi) d\xi,$$

аналогично убеждаемся в том, что

$$\operatorname{Re} f^+(t_0) = u_1(t_0), \quad \operatorname{Im} t_0 = 1, \quad -\infty < \operatorname{Re} t_0 < \infty. \quad (19)$$

Следовательно, действительная часть функции $f(z)$, представленной формулой (16), дает решение задачи Дирихле для гармонических функций в полосе Π с крайними условиями (12). Когда функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$ только непрерывны и удовлетворяют условию (1), справедливость формул (18) и (19) проверяется повторением рассуждения § 4.4 гл. IV.

3. Задача Дирихле для плоскости со щелью. Под *плоскостью со щелью* будем понимать расширенную плоскость комплексного переменного z , разрезанную вдоль гладкой дуги γ . Она, конечно, представляет собой односвязную область, и для нее примем обозначение E_γ . Будем считать, что γ представляет собой отрезок $-a < t < a$ действительной оси $\text{Im } z = 0$.

Настоящий пункт посвящается построению решения задачи Дирихле в следующей постановке: *требуется найти гармоническую в E_γ функцию $u(x, y) = u(z)$, исчезающую на бесконечности и принимающую заданные непрерывные по Гёльдеру значения на γ ,*

$$u(t) = f(t), \quad -a < t < a, \quad (20)$$

в предположении, что вблизи точек $z = c$, совпадающих с концами γ , имеют место оценки

$$|u(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (21)$$

и функция $f(t)$ непрерывна по Гёльдеру при $-a \leq t \leq a$.

Обозначим через $F(z)$ аналитическую в E_γ функцию с действительной частью $u(x, y)$:

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (22)$$

исчезающую на бесконечности, для которой вблизи точек $c = \pm a$ имеют место оценки

$$|F(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (23)$$

Определенная по формуле

$$\bar{F}(z) = u(x, -y) - iv(x, -y) \quad (24)$$

функция также аналитична в E_γ , исчезает на бесконечности и вблизи концов γ удовлетворяет условию (23). Мы ничего не знаем о поведении мнимых частей функций

$F(z)$ и $\bar{F}(z)$ при переходе точки z через отрезок γ из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно.

Наряду с $F(z)$ и $\bar{F}(z)$ введем в рассмотрение функции

$$\Phi(z) = \sqrt{a^2 - z^2} [F(z) + \bar{F}(z)] \quad (25)$$

и

$$\Psi(z) = F(z) - \bar{F}(z), \quad (26)$$

где под $\sqrt{a^2 - z^2}$ понимается ветвь этой функции, ведущая себя на бесконечности как iz .

Функция $\Phi(z)$ аналитична в E_γ , ограничена на бесконечности, а вблизи точек $z = c = \pm a$ для нее имеют место оценки

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c|^{\alpha - 1/2}}. \quad (27)$$

Действительная часть функции $\Phi(z)$, когда z из верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ стремится к точке t , $\text{Im } t = 0$, имеет предел всюду, кроме, быть может, концов γ , причем в силу (20), (22), (24), (25)

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{Im } z > 0}} \text{Re } \Phi(z) = \text{Re } \Phi^+(t) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - t^2} f(t), & -a < t < a, \\ 0, & -\infty < t < -a, \quad a < t < \infty. \end{cases} \quad (28)$$

Для определения функции $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ мы воспользуемся формулой Шварца (7) и в силу (28) получаем

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} \frac{f(t) dt}{t - z} + 2iC, \quad (29)$$

где C — произвольная действительная постоянная.

В силу (20), (22), (24) и (26) действительная часть функции $\Psi(z)$, когда точка z из верхней полуплоскости стремится к точке t , $\text{Im } t = 0$, $t \neq \pm a$, имеет предельные значения $\text{Re } \Psi^+(t) = 0$.

Следовательно, $\Psi(z) = 0$ всюду на плоскости комплексного переменного z , т. е.

$$\bar{F}(z) = F(z). \quad (30)$$

Из формул (25), (29) и (30) следует, что

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{a^2 - z^2}} \frac{f(t) dt}{t - z} + \frac{iC}{\sqrt{a^2 - z^2}}. \quad (31)$$

Формула (31) определяет аналитическую в E_γ функцию, исчезающую на бесконечности, для которой вблизи точек $z = -a$, $z = a$ имеют место оценки (23).

Поскольку плотность $\mu(t)$ интеграла типа Коши

$$F_*(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t) dt}{t-z},$$

определенная по формуле

$$\mu(t) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - t^2} f(t), & -a < t < a, \\ 0, & -\infty < t < -a, \quad a < t < \infty, \end{cases}$$

непрерывна по Гёльдеру всюду, кроме, быть может, точек $t = \pm a$, то в силу формул Сохоцкого—Племеля (109), (110) гл. IV заключаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_+^*(t_0) &= \sqrt{a^2 - t_0^2} f(t_0), \\ \operatorname{Re} F_-^*(t_0) &= -\sqrt{a^2 - t_0^2} f(t_0), \quad -a < t_0 < a. \end{aligned} \quad (32)$$

О поведении $F_+^*(t_0)$ и $F_-^*(t_0)$ в E_γ вплоть до открытого отрезка $-a < t_0 < a$ будет сказано в п. 4.

Так как при однократном обходе точки z вокруг точек $c = \pm a$ аргумент функции $\sqrt{a^2 - z^2}$ принимает приращение $\pm \pi$, то на основании формул (32) заключаем, что однопараметрическое семейство действительных частей определенных по формуле (31) функций удовлетворяет краевому условию (20).

За счет подбора постоянной C в формуле (31) можно добиться того, чтобы функция $F(z)$ была ограничена вблизи одного из концов γ . Например, если

$$C = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+t}{a-t}} f(t) dt,$$

то формулу (31) можно переписать в виде

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{(a+t)(a-z)}{(a-t)(a+z)}} \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (33)$$

Для того чтобы представленная формулой (33) функция $F(z)$ была ограничена вблизи точки $z = -a$, функция $f(t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0. \quad (34)$$

При соблюдении этого условия формула (33) принимает вид

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 - t^2}} \frac{f(t) dt}{t - z}. \quad (35)$$

Условие (34) соблюдено, например, если функция $f(t)$ нечетна, т. е.

$$f(-t) = -f(t), \quad -a < t < a.$$

Ограниченность представленных формулами (33) и (35) функций соответственно вблизи точки $z=a$ и вблизи точек $z=a$, $z=-a$ будет показана в п. 7 настоящего параграфа.

4. Поведение интеграла в смысле главного значения по Коши. Будем ограничиваться рассмотрением интеграла

$$I(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{t - t_0},$$

представляющего собой, по определению, предел выражения

$$I_\varepsilon(t_0) = \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-a}^{t_0 - \varepsilon} + \int_{t_0 + \varepsilon}^a \right) \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt + \\ + \frac{1}{\pi i} \mu(t_0) \left(\int_{-a}^{t_0 - \varepsilon} + \int_{t_0 + \varepsilon}^a \right) \frac{dt}{t - t_0}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. § 4.2 гл. IV). Он всегда существует для всех t_0 , $-a < t_0 < a$, если плотность $\mu(t)$ непрерывна по Гёльдеру, причем

$$I(t_0) = I_1(t_0) + I_2(t_0),$$

где

$$I_1(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} dt, \quad I_2(t_0) = \frac{1}{\pi i} \mu(t_0) \log \frac{a - t_0}{a + t_0}.$$

Интеграл в смысле главного значения по Коши $I(t_0)$ имеет весьма важное свойство: если плотность $\mu(t)$ непрерывна по Гёльдеру на отрезке γ : $-a \leq t \leq a$, то $I(t_0)$ также непрерывна по Гёльдеру на отрезке γ_δ : $-a + \delta \leq t_0 \leq a - \delta$, где δ — сколь угодно малое положительное число.

Поскольку зависящий от t_0 второй множитель в правой части выражения $I_2(t_0)$ представляет собой аналитическую на γ_δ функцию, функция $I_2(t_0)$ непрерывна по Гёльдеру с одинаковым с $\mu(t_0)$ показателем Гёльдера ν . Остается показать, что

$$\begin{aligned} |I_1(t_0+h) - I_1(t_0)| &\leq L_1 |h|^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \\ |I_1(t_0+h) - I_1(t_0)| &\leq L_2 |h| \log \frac{1}{|h|}, \quad \nu = 1, \end{aligned}$$

когда точки t_0 и t_0+h обе лежат на γ_δ .

Считая без ограничения общности, что $0 < h < 1$, представим разность $I_1(t_0+h) - I_1(t_0)$ в виде

$$I_1(t_0+h) - I_1(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \left[\frac{\mu(t) - \mu(t_0+h)}{t - t_0 - h} - \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} \right] dt = A + B,$$

где

$$A(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{t_0-2h}^{t_0+2h} \left[\frac{\mu(t) - \mu(t_0+h)}{t - t_0 - h} - \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} \right] dt$$

и

$$B(t_0) = \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-a}^{t_0-2h} + \int_{t_0+2h}^a \right) \left[\frac{\mu(t) - \mu(t_0+h)}{t - t_0 - h} - \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{t - t_0} \right] dt.$$

В силу непрерывности μ по Гёльдеру имеем

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{1}{\pi} L \int_{t_0-2h}^{t_0+2h} (|t - t_0 - h|^{\nu-1} + |t - t_0|^{\nu-1}) dt < \\ &< \frac{L}{\nu\pi} (1 + 2 \cdot 2^\nu + 3^\nu) h^\nu, \end{aligned}$$

где L — коэффициент Гёльдера функции $\mu(t)$.

Представим функцию $B(t_0)$ в виде $C + D$, где

$$C(t_0) = \frac{h}{\pi i} \left(\int_{-a}^{t_0-2h} + \int_{t_0+2h}^a \right) [\mu(t) - \mu(t_0+h)] \frac{1}{(t - t_0 - h)(t - t_0)} dt$$

и

$$D(t_0) = \frac{1}{\pi i} [\mu(t_0) - \mu(t_0+h)] \log \frac{a - t_0}{a + t_0}.$$

Очевидно, что

$$|D(t_0)| < \frac{1}{\pi} L M h^v,$$

где

$$M = \max \left| \log \frac{a-t_0}{a+t_0} \right|, \quad t_0 \in \gamma_\delta.$$

Пользуясь тем, что μ непрерывна по Гёльдеру и на участках $-a < t < t_0 - 2h$ и $t_0 + 2h < t < a$ имеют место неравенства $2h < t_0 - t$ и $2h < t - t_0$, для функции $C(t_0)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} C &\leq \frac{Lh}{\pi} \left(\int_{-a}^{t_0-2h} + \int_{t_0+2h}^a \right) \frac{dt}{|t-t_0-h|^{1-v} |t-t_0|} = \\ &= \frac{Lh}{\pi} \left(\int_{-a}^{t_0-2h} + \int_{t_0+2h}^a \right) \frac{dt}{\left| 1 - \frac{h}{t-t_0} \right|^{1-v} |t-t_0|^{2-v}} \leq \\ &\leq \frac{2^{1-v} Lh}{\pi} \left(\int_{-a}^{t_0-2h} + \int_{t_0+2h}^a \right) \frac{dt}{|t-t_0|^{2-v}} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{2L}{\pi(1-v)} h^v, & 0 < v < 1, \\ \frac{2L}{\pi} h \log \frac{1}{h}, & v = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

для достаточно малых h .

Тем самым доказательство сформулированного утверждения завершено, причем следует особо отметить, что условие Гёльдера для $I(t_0)$ имеет вид

$$|I(t_0+h) - I(t_0)| \leq L^* h^v$$

при $0 < v < 1$ и

$$|I(t_0+h) - I(t_0)| \leq L^{**} h \log \frac{1}{h}$$

при $v = 1$.

Приведенное выше доказательство непрерывности по Гёльдеру интеграла в смысле главного значения $I(t_0)$ без особого изменения переносится на случай, когда линией интегрирования является гладкая кривая Жордана, замкнутая или разомкнутая. Когда γ — замкнутая кривая, непрерывность по Гёльдеру интеграла в смысле главного значения

по Коши, очевидно, имеет место на всей γ . В случае разомкнутого γ это свойство остается в силе на любом участке γ^* кривой γ , концы которого находятся на сколь угодно близком, отличном от нуля расстоянии от концов γ .

5. Поведение производной интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования. В настоящем пункте, так же как и в следующих двух пунктах, речь будет идти об интегралах типа Коши, когда линией интегрирования является отрезок γ : $-a \leq t \leq a$.

Производная интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{t-z} \quad (36)$$

в точках плоскости переменного z вне γ дается формулой (45) гл. IV:

$$F'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{(t-z)^2}.$$

Когда точка t_0 принадлежит отрезку γ : $-a + \delta < t_0 < a - \delta$, нас будут интересовать точки z , не лежащие на γ и удовлетворяющие условию

$$|z - t_0| \leq \eta, \quad \alpha_0 \leq \arg(z - t_0) = \alpha \leq \pi/2,$$

где η — произвольное положительное число, меньшее δ , а α_0 — фиксированное сколь угодно малое положительное число.

Покажем, что в этих предположениях имеют место оценки

$$\begin{aligned} |F'(z)| &< c |\log |z - t_0||, \quad v = 1, \\ |F'(z)| &< c |z - t_0|^{v-1}, \quad 0 < v < 1, \end{aligned}$$

где v — показатель Гёльдера функции μ .

Действительно, представим $F'(z)$ в виде

$$F'(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

где

$$F_1(z) = \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-a}^{-a+\delta} + \int_{a-\delta}^a \right) \frac{\mu(t) dt}{(t-z)^2}$$

и

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{\mu(t) dt}{(t-z)^2}.$$

Так как $|z-t_0| < \eta$, очевидно, что функция $F_1(z)$ ограничена.

Запишем выражение $F_2(z)$ в виде

$$F_2(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{2a}{\pi i} \frac{\mu(t_0)}{(z-a+\delta)(z+a-\delta)}$$

и

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{(t-z)^2} dt.$$

При $|z-t_0| < \eta$ функция $\Phi_1(z)$ ограничена, а для $\Phi_2(z)$ имеем

$$|\Phi_2(z)| \leq \frac{L}{\pi} \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{|t-t_0|^\nu dt}{(|t-t_0| - |z-t_0| \cos \alpha)^2 + |z-t_0|^2 \sin^2 \alpha} = \\ = \frac{L}{\pi} \omega(z, t_0),$$

где α — тупой угол, равный $\arg(z-t_0)$, а L — константа Гёльдера.

Выражение $\omega(z, t_0)$ перепишем в виде

$$\omega(z, t_0) = \int_{-a+\delta}^{t_0} \frac{(t_0-t)^\nu dt}{(t_0-t - |z-t_0| \cos \alpha)^2 + |z-t_0|^2 \sin^2 \alpha} + \\ + \int_{t_0}^{a-\delta} \frac{(t-t_0)^\nu dt}{(t-t_0 - |z-t_0| \cos \alpha)^2 + |z-t_0|^2 \sin^2 \alpha}.$$

При $\nu=1$ эти интегралы берутся в элементарных функциях и в результате простых вычислений получаем оценку

$$\omega(z, t_0) < C_0 |\log |z-t_0||,$$

где C_0 — постоянная. Когда же $0 < \nu < 1$, после замены переменного интегрирования $|t-t_0| = |z-t_0| \tau$ приходим

к равенству

$$\omega(z, t_0) = |z - t_0|^{v-1} \left(\int_0^{t'} + \int_0^{t''} \right) \frac{\tau^v d\tau}{(\tau - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha},$$

где

$$t' = \frac{a - \delta + t_0}{|z - t_0|}, \quad t'' = \frac{a - \delta - t_0}{|z - t_0|}.$$

Очевидно, что

$$\omega(z, t_0) < 2|z - t_0|^{v-1} \int_0^{\infty} \frac{\tau^v d\tau}{(\tau - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} < C_1 |z - t_0|^{v-1},$$

$$C_1 = \text{const},$$

и этим доказательство сформулированного утверждения завершается.

Проведем через точку t_0 , $-a + \delta < t_0 < a - \delta$, луч λ : $\arg(z - t_0) = \alpha$, где α — введенное выше число, и рассмотрим две точки z_1 и z_2 на λ . Без ограничения общности будем считать, что $|z_2 - t_0| > |z_1 - t_0|$.

Из очевидного равенства

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} F'(z) dz$$

в силу доказанных выше оценок для $F'(z)$ находим, что

$$|F(z_2) - F(z_1)| < \frac{c}{v} (|z_2 - t_0|^v - |z_1 - t_0|^v) \leq c^* |z_2 - z_1|^v, \\ c^* = \text{const}, \quad (37)$$

при $0 < v < 1$ и

$$|F(z_2) - F(z_1)| \leq c^{**} |z_2 - z_1|^v |\log |z_2 - z_1||, \quad v = 1. \quad (38)$$

6. Поведение интеграла типа Коши (36) вблизи отрезка γ_δ . При требовании непрерывности по Гёльдеру функции $\mu(t)$ формулы Сохоцкого—Племеля (109), (110) гл. IV, очевидно, остаются в силе, и если в каждой точке t_0 , $-a < t_0 < a$, под $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ будем понимать выражения

$$F^+(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{Im } z > 0}} F(z), \quad F^-(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{Im } z < 0}} F(z),$$

то

$$F^+(t_0) = \mu(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{t - t_0}, \quad F^-(t_0) = -\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{t - t_0}.$$

Из этих формул, ссылаясь на п. 4 настоящего параграфа, заключаем, что функции $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ непрерывны по Гёльдеру на γ_δ при сколь угодно малом δ .

Когда точки t_0 лежат на верхнем крае разреза γ , определим функцию $F(z)$ в этих точках как $F^+(t_0)$. Доопределенная таким образом функция непрерывна по Гёльдеру в верхней полуплоскости вплоть до верхнего края разреза γ_δ .

Для доказательства этого утверждения замкнем γ_δ гладкой дугой Жордана γ' , лежащей в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и составляющей вместе с γ_δ гладкую замкнутую кривую Жордана Γ . Пусть D^+ — конечная область, ограниченная Γ . Функция $F^+(t)$ существует всюду на Γ и непрерывна по Гёльдеру.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{F(z) - F^+(t_0)}{(z - t_0)^\alpha}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

где положительное число α меньше, чем показатель Гёльдера β функции $F^+(t)$, а под $(z - t_0)^\alpha$ понимается любая ветвь этой функции.

Краевые значения $\Psi^+(t)$ функции $\Psi(z)$ на Γ существуют, и

$$\Psi^+(t) = \frac{F^+(t) - F^+(t_0)}{(t - t_0)^\alpha}$$

представляет собой функцию, непрерывную по Гёльдеру, поскольку $\alpha < \beta$.

Удалим точку t_0 из Γ вместе с кружком достаточно малого радиуса ε , меньшего чем стандартный радиус δ_0 кривой Γ , и в оставшейся части D_ε области D представим функцию $\Psi(z)$ по формуле Коши (40) гл. IV:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\Psi^+(t) dt}{t - z}, \quad (*)$$

где ∂D_ε — кусочно-гладкая кривая Жордана.

Поскольку вблизи точки $z = t_0$ для функции $\Psi(z)$ имеет место оценка

$$\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z - t_0|^\alpha}\right),$$

в формуле (*) мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получаем

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi^+(t) dt}{t - z}$$

для всех точек z области D^+ . После доопределения $\Psi(z)$ в $D^+ \cup \Gamma$, как $\Psi^+(t)$ на Γ , в силу принципа максимума модуля § 3.1 гл. IV заключаем, что

$$|\Psi(z)| \leq \max_{t \in \Gamma} |\Psi^+(t)| \leq C, \quad C = \text{const},$$

равномерно относительно t_0 и α , откуда в свою очередь вытекает справедливость этой оценки и при $\alpha = \beta$. Следовательно,

$$|F(z) - F^+(t_0)| \leq c |z - t_0|^\beta,$$

что и доказывает сформулированное утверждение, когда одна из двух точек в условии Гёльдера принадлежит Γ .

Теперь пусть точки z и z_0 обе лежат в D^+ . Для функции $F(z)$ условие Гёльдера в проверке нуждается лишь тогда, когда по крайней мере одна из двух этих точек, например z_0 , находится от Γ на расстоянии, меньшем чем δ_0 . Обозначим через t_0 точку на Γ , ближайшую от z_0 , и разрежем область D^+ вдоль прямолинейного отрезка γ^0 , соединяющего между собой точки t_0 и z_0 (этот отрезок ортогонален к Γ). В области D_1 , полученной после разреза области D^+ , любая ветвь функции

$$\Psi_0(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{(z - z_0)^\beta}$$

аналитична относительно z и имеет непрерывные предельные значения на Γ . Поэтому повторением приведенного выше рассуждения приходим к оценке $|\Psi_0^+(t)| \leq C$, $t \in \Gamma$. В силу условий (37) и (38) эта оценка верна и на каждом из краев разреза, и, стало быть, $|\Psi_0(z)| \leq \text{const}$ в области D^+ , т. е.

$$|F(z) - F(z_0)| \leq C |z - z_0|^\beta.$$

7. Поведение интеграла типа Коши (36) вблизи концов γ . В этом пункте будем изучать поведение интеграла типа Коши (36) вблизи точек $z = a$, $z = -a$, когда его плотность $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{a-t}},$$

где $\varphi(t)$ непрерывна по Гёльдеру при $-a \leq t \leq a$.

Покажем, что для функции $\Phi(z)$, представленной формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{a-t} (t-z)}, \quad (39)$$

вблизи точки $z=a$ имеет место оценка

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-a|^\beta}, \quad (40)$$

где β — любое действительное число из интервала

$$1/2 < \beta < 1. \quad (41)$$

Для доказательства этого утверждения перепишем формулу (39) в виде

$$\begin{aligned} |z-a|^\beta \Phi(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{|z-a|^\beta - |t-a|^\beta}{|t-a|^{1/2} (t-z)} \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{|t-a|^{\beta-1/2}}{t-z} \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (42)$$

В силу (41) второе слагаемое в правой части этой формулы ограничено вблизи точки $z=a$.

Ввиду того, что $|z-a|^\beta - |t-a|^\beta \leq |z-t|^\beta$, для первого слагаемого в правой части (42) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left| \frac{|z-a|^\beta - |t-a|^\beta}{|t-a|^{1/2} (t-z)} \varphi(t) \right| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{|\varphi(t)| dt}{|t-a|^{1/2} |t-z|^{1-\beta}}.$$

Последний интеграл сходится, поскольку $\beta > 1/2$ в силу (41). Тем самым справедливость оценки (40) доказана.

Оценка (40) нам понадобится при получении более точной оценки для функции $\Phi(z)$.

В случае, когда $\varphi(t) \equiv 1$, поведение функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a-t} (t-z)}$$

вблизи точки $z=a$ выяснить легко. В самом деле, в силу формулы (111) гл. IV имеем

$$\Phi_1^+(t_0) - \Phi_1^-(t_0) = 2\sqrt{a-t_0}.$$

Если для точки t_0 , лежащей на верхнем крае разреза, за предельным значением однозначной функции

$\Phi_2(z) = (a-z)^{-1/2}$, примем $\Phi_2^+(t_0) = (a-t_0)^{-1/2}$, то очевидно, что $\Phi_2^-(t_0) = -(a-t_0)^{-1/2}$, т. е. $\Phi_2^+(t_0) - \Phi_2^-(t_0) = 2(a-t_0)^{1/2}$.

Следовательно, для функции

$$\Omega(z) = \Phi_1(z) - \Phi_2(z)$$

имеем

$$\Omega^+(t_0) - \Omega^-(t_0) = 0, \quad -a < t_0 < a,$$

т. е. $\Omega(z)$ аналитически продолжается через открытый отрезок γ , и к тому же для нее вблизи точки $z=a$ имеет место оценка (40).

Удаляя точку $z=a$ из плоскости комплексного переменного z кружком достаточно малого радиуса ε и применяя в оставшейся ее части интегральную формулу Коши (61) из гл. V, заключаем, что $\Omega(z)$ аналитична вблизи точки $z=a$, т. е. $\Phi_1(z) = \Phi_2(z) + \Omega(z)$. Учитывая это обстоятельство, запишем функцию $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \varphi(a)(a-z)^{-1/2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{(a-t)^{1/2-\varepsilon'}(t-z)} (a-t)^{-\varepsilon'} dt + \Omega(z),$$

где ε' — настолько малое положительное число, что функция

$$\varphi^*(t) = [\varphi(t) - \varphi(a)](a-t)^{-\varepsilon'}$$

не перестает быть непрерывной по Гёльдеру. Для второго слагаемого в правой части этого представления функции $\Phi(z)$ вблизи точки $z=a$ имеет место оценка (40), в которой можно считать, что $\beta = 1/2$. Следовательно, для функции $\Phi(z)$ вблизи точки $z=a$ имеет место оценка

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-a|^{1/2}}.$$

Отсюда следует ограниченность представленной формулой (33) функции $F(z)$ вблизи точки $z=a$. Аналогично доказывается ограниченность представленной формулой (35) функции вблизи каждой из точек $z=a$, $z=-a$.

8. Задача Гильберта. К задаче Дирихле по существу близка следующая краевая задача Гильберта: в конечной области D с гладкой границей Γ ищется аналитическая функция $F(z) = u(z) + iv(z)$, непрерывная по Гёльдеру в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющая условию

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (43)$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ — заданные на Γ действительные непрерывные по Гёльдеру функции, причем

$$a^2 + b^2 \neq 0 \quad (44)$$

всюду на Γ .

При $a(t) = 0$ или $b(t) = 0$, так же как при $b(t) = ka(t)$, $k = \text{const}$, всюду на Γ , условие (43) есть не что иное, как краевое условие задачи Дирихле для гармонических функций. Во всех остальных случаях эта задача до конца исследуется при помощи решения задачи Дирихле дважды последовательно.

Конформное отображение позволяет считать, что в случае, когда D — односвязная область, в задаче Гильберта она представляет собой единичный круг $|z| < 1$.

Вводя обозначение $\varphi(t) = a(t) + ib(t)$, запишем краевое условие (43) в виде

$$\operatorname{Re}[\varphi(t)F(t)] = f(t), \quad t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (45)$$

В силу (44) без ограничения общности мы можем предполагать, что $|\varphi(t)| = 1$.

Пусть n — целое число, определенное формулой

$$n = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} [\arg \varphi(t)]_{\Gamma}, \quad (46)$$

где буквы Var перед квадратными скобками означают, что рассматривается приращение аргумента функции $\varphi(t)$ при однократном обходе точки t окружности Γ в положительном направлении.

Очевидно, что функция

$$\alpha(t) = \arg \varphi(t) - n\vartheta, \quad t = e^{i\vartheta}, \quad (47)$$

однозначна и непрерывна по Гёльдеру на окружности Γ .

Аналитическая в круге D и непрерывная по Гёльдеру на окружности Γ функция $\psi(z)$, удовлетворяющая краевому условию

$$\operatorname{Re} \psi(t) = \alpha(t) \quad (48)$$

при требовании, что

$$\operatorname{Im} \psi(0) = 0, \quad (49)$$

строится по формуле Шварца (4), в которой в силу (49) постоянная $C = 0$, т. е.

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha(t) dt}{t}.$$

После того как функция $\psi(t)$ найдена, на основании (47) и (48) краевое условие (45) принимает вид

$$\operatorname{Re} [t^n e^{i\psi(t)} F(t)] = e^{-1m\psi(t)} f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (50)$$

Сперва рассмотрим случай $n > 0$. Аналитическая в круге D и непрерывная по Гёльдеру в замкнутом круге $D \cup \Gamma$ функция

$$\Phi(z) = z^n e^{i\psi(z)} F(z), \quad (51)$$

удовлетворяющая краевому условию (50), дается опять формулой Шварца (4):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} \frac{f(t) dt}{t} + iC. \quad (52)$$

Из (51) и (52) получаем

$$\begin{aligned} F(z) &= \\ &= z^{-n} e^{-i\psi(z)} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} \frac{f(t) dt}{t} + iC \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Очевидно, что $F(z)$ удовлетворяет краевому условию (43).

Поскольку аналитическая функция $e^{-i\psi(z)}$ в $D \cup \Gamma$ нигде в нуль не обращается, представленная формулой (53) функция $F(z)$ будет аналитической в D лишь при условии, что аналитическая функция в скобках в правой части этой формулы при $z=0$ имеет нуль порядка не ниже n , т. е. когда $C=0$ и

$$\int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} f(t) t^{-k-1} dt = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (54)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае задача (43) имеет и притом единственное решение тогда и только тогда, когда правая часть $f(t)$ в краевом условии (43) удовлетворяет дополнительным требованиям (54). Они представляют собой $2n-1$ действительных интегральных условий, которым должна удовлетворять функция $f(t)$ для разрешимости задачи (43).

Переходим к рассмотрению случая $n \leq 0$. Искомую функцию $F(z)$, удовлетворяющую условию (43), предста-

вим в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) z^k + z^{-n} F_1(z), \quad (55)$$

где $F_1(z)$ — также неизвестная функция.

Принимая во внимание (55), краевое условие (50) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[e^{i\psi(t)} F_1(t)] &= e^{-1m\psi(t)} f(t) - \\ &- \operatorname{Re} \left[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) t^{k+n} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Пользуясь опять формулой Шварца (4), в силу (56) получаем

$$\begin{aligned} e^{i\psi(z)} F_1(z) &= iC + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ e^{-1m\psi(t)} f(t) - \operatorname{Re} \left[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) t^{n+k} \right] \right\} \frac{dt}{t-z}. \end{aligned} \quad (57)$$

Из формул (55) и (57) находим семейство решений $F(z)$ задачи (43):

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) z^k + iC e^{-i\psi(z)} z^{-n} + \\ &+ z^{-n} e^{-i\psi(z)} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ e^{-1m\psi(t)} f(t) - \right. \\ &\left. - \operatorname{Re} \left[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) t^{n+k} \right] \right\} \frac{dt}{t-z}, \end{aligned} \quad (58)$$

содержащее одну действительную C и $-n$ комплексных постоянных $F^{(k)}(0)$. Оно состоит из $-2n+1$ линейно независимых решений задачи Гильберта (43), если линейную независимость будем понимать в смысле действительных коэффициентов в определении линейной независимости системы аналитических функций. Следовательно, при $n \leq 0$ задача Гильберта (43) всегда имеет и притом $-2n+1$ линейно независимых решений. Число $n=2n$ принято называть индексом этой задачи. Слагаемое

$$z^{-n} e^{-i\psi(z)} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} e^{-1m\psi(t)} \frac{f(t) dt}{t-z}$$

в правой части формулы (58) представляют собой *частное решение* задачи Гильберта (43), а вся остальная часть — *общее решение однородной задачи Гильберта*, т. е. когда правая часть в краевом условии (43) — функция $f(t) = 0$ всюду на окружности Γ .

9. Задача наклонной производной. Пусть D — область с гладкой границей Γ , действительные непрерывные функции a и b заданы на Γ и нигде одновременно не обращаются в нуль. *Задача наклонной производной заключается в определении в области D гармонической функции $w(x, y)$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющей краевому условию*

$$a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} = f(t), \quad x + iy = t \in \Gamma, \quad (59)$$

где f — заданная действительная непрерывная функция.

Ввиду того, что $u = \frac{\partial w}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial w}{\partial y}$ являются сопряженными гармоническими в D функциями, задача (59) равносильна нахождению аналитической в области D функции $F = u + iv$ по краевому условию (43). Эта задача уже была исследована в предыдущем пункте в предположениях, что a, b, f непрерывны по Гёльдеру, искомая функция $F(z)$ также непрерывна по Гёльдеру в $D \cup \Gamma$, а Γ — замкнутая гладкая кривая Жордана. Причем, без ограничения общности, мы считали, что D представляет собой круг $|z| < 1$.

Итак, будем считать, что D — единичный круг $|z| < 1$. Как уже было показано в предыдущем пункте, при $n > 0$ для разрешимости этой задачи необходимо и достаточно выполнение $2n - 1$ дополнительных условий (54), налагаемых на функцию $f(t)$, и тогда ее единственное решение $F(z)$ дается формулой (53), а при $n \leq 0$ она всегда имеет и притом $-2n + 1$ линейно независимых решений, и они все получаются из формулы (58).

При наличии решений задачи (43) функция $w(x, y)$ в области D строится интегрированием полного дифференциала

$$dw = u dx - v dy. \quad (60)$$

Когда $a + ib = t$, задача (59) носит название задачи Неймана:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = f(t), \quad t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad (61)$$

где ν — единичная внешняя нормаль к окружности $|t| = 1$. В этом случае условие (44) выполнено, а число

$$n = \frac{1}{2\pi} \text{Var} [\arg t]_{\Gamma} = 1.$$

На основании (47) и (48) заключаем, что на этот раз функция $\Psi(z) = 0$ всюду в $D \cup \Gamma$. Поэтому задача (61) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (54):

$$\int_{\Gamma} f(t) \frac{dt}{t} = i \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta = 0. \quad (62)$$

Если равенство (62) имеет место, то в силу формулы (53) будем иметь

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{z(t-z)}. \quad (63)$$

В силу формулы (2) гл. IV очевидно, что искомое решение задачи (61) дается формулой

$$w = \text{Re} \int_{z_0}^z F(\tau) d\tau + c_1, \quad (64)$$

где z_0 — фиксированная точка круга $|z| < 1$, отличная от нуля, а c_1 — произвольная действительная постоянная.

Подставляя выражение $F(z)$ из формулы (63) в правую часть формулы (64), получаем

$$\begin{aligned} w &= \text{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} f(t) dt \int_{z_0}^z \frac{d\tau}{\tau(t-\tau)} + c_1 = \\ &= -\text{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(t) \left[\log(t-z) - \log(t-z_0) - \log \frac{z}{z_0} \right] d\vartheta + c_1 = \\ &= -\text{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(t) [\log(t-z) - \log(t-z_0)] d\vartheta + c_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(t) \log \frac{1}{|t-z|} d\vartheta + c, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$c = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(t) \log |t-z_0| d\vartheta + c_1$$

— произвольная действительная постоянная.

Представленная формулой (65) функция w и при требовании одной лишь непрерывности $f(t)$ является решением задачи (61). Проверка краевого условия в этом случае проводится так же, как это было сделано в § 4.4 гл. IV в случае задачи Дирихле, с учетом того, что условие (62) выполнено.

В случае, когда Γ отличается от окружности $|t|=1$, условие (61) задачи Неймана записывается в виде

$$\cos \hat{v}x \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \hat{v}y \frac{\partial w}{\partial y} = f,$$

причем условие (44) соблюдено, ибо $\cos^2 \hat{v}x + \cos^2 \hat{v}y = 1$. Однако для того, чтобы применить приведенный выше способ решения задачи (59), следует потребовать, чтобы функции $\cos \hat{v}x$ и $\cos \hat{v}y$ были непрерывны по Гёльдеру. Кривая Жордана Γ , удовлетворяющая этому условию, называется *кривой Ляпунова*.

10. Уравнение Пуассона. С именем Пуассона связывают уравнение вида

$$\Delta u = g, \quad (66)$$

где Δ — оператор Лапласа, а g — заданная в некоторой области D_1 действительная функция. Дважды непрерывно дифференцируемую в области D_1 функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (66), называют *регулярным решением* этого уравнения. В случае двух независимых переменных x, y , вводя дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ по формулам (4) гл. III, уравнение (66) можем записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} g(z), \quad (67)$$

где $g(z) = g(x, y)$.

Если u_1 — искомое решение уравнения (67) в некоторой области D с гладкой границей Γ , то функция

$$v(z) = \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (68)$$

должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} g,$$

одним из частных решений которого, в силу формулы (16) гл. IV, является функция

$$v(z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{g(t) d\xi d\eta}{t-z}, \quad t = \xi + i\eta. \quad (69)$$

В силу (68) и (69) функция u_1 должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{g(t) d\xi d\eta}{t-z}. \quad (70)$$

Ввиду того, что

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{\partial}{\partial z} [\log(t-z)(\bar{t}-\bar{z})] = -2 \frac{\partial}{\partial z} \log|t-z|,$$

равенству (70) можно придать вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \iint_D g(t) \frac{\partial}{\partial z} \log|t-z| d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_D g(t) \log|t-z| dt. \end{aligned} \quad (71)$$

В результате интегрирования равенства (71) по z приходим к заключению, что одним из частных решений уравнения (67) является функция

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_D g(t) \log|t-z| d\xi d\eta. \quad (72)$$

Формула (72) известна под названием интеграла Пуассона.

Чтобы найти более общее решение $u(z)$ уравнения (67), введем обозначение

$$w = u - u_1. \quad (73)$$

Ввиду линейности уравнения (67) функция w должна быть гармонической, т. е.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (74)$$

В § 1.7 гл. VIII была доказана аналитичность гармонических функций. Поэтому в результате интегрирования (74) находим класс гармонических функций

$$w = \varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (75)$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\psi}(\bar{z})$ — произвольные аналитические функции переменных z и $\bar{z}$ соответственно. Так как w — действительная гармоническая функция, должно иметь место равенство $\operatorname{Im} \varphi(z) = \operatorname{Im} \bar{\psi}(\bar{z})$. Но аналитическая функция восстанавливается по ее мнимой части с точностью до произвольного действительного слагаемого (см. § 2.5 гл. IV и § 2.7 гл. VIII), т. е. $\bar{\psi}(\bar{z}) = \varphi(z) + c$, и, стало быть, формуле (75) можно придать вид

$$w = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}). \quad (76)$$

На основании формул (72), (73) и (76) приходим к заключению, что в случае двух независимых переменных x, y формула

$$u(x, y) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}) + \frac{1}{2\pi} \iint_D g \log |t - z| d\xi d\eta \quad (77)$$

дает семейство решений уравнения Пуассона (66) в области D .

Формула (77) с учетом обозначений (73) позволяет любую линейную краевую задачу для уравнения Пуассона (66) в области D :

$$Lu = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (78)$$

где оператор L и функция f известны на Γ , привести к краевой задаче

$$Lw = f(t) - Lu_1$$

в этой же области для гармонических функций w .

Имея в виду именно это обстоятельство, мы в предыдущих пунктах ограничились рассмотрением некоторых линейных краевых задач лишь для гармонических функций.

Так как в комплексном представлении (76) гармонических функций мнимая часть аналитической функции $\varphi(z)$ не участвует, без ограничения общности можем считать, что в фиксированной точке z_0 области, где берется представление (76),

$$\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0. \quad (79)$$

Ссылаясь на формулу (62) гл. IV или на формулу Гурса (G) гл. VIII, непосредственно приходим к заключению, что формула (76) в рассматриваемой области каждой гармонической функции $w(x, y)$ ставит в соответствие вполне определенную аналитическую в этой же обла-

сти функцию $\varphi(z)$ комплексного переменного z . Так как обратное утверждение очевидно, формулу (76) мы вправе называть *общим представлением* решений гармонических функций, а формулу (77)—общим представлением решений уравнения (66).

Заметим, что интегральное представление (72) частного решения уравнения (66) легко можно получить, если воспользоваться хорошо известной из курса математического анализа формулой Грина—Остроградского:

$$\int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy,$$

где ν —внешняя к Γ нормаль, и принять, что $u(x, y)$ —решение уравнения (66), а $v(x, y) = -\log|t-z|$ —так называемое *элементарное (фундаментальное)* решение уравнения Лапласа.

§ 2. Краевые задачи для бигармонических функций

1. Понятие бигармонической функции и ее комплексное представление. В приложениях, особенно при изучении двумерных задач линейной теории упругости, часто приходится иметь дело с уравнением вида

$$\Delta \Delta u = g, \quad (80)$$

где Δ —оператор Лапласа, а g —заданная действительная непрерывная функция. Когда функция $g=0$ всюду в рассматриваемой области, уравнение

$$\Delta \Delta u = 0$$

называется *бигармоническим*, а его решения—*бигармоническими функциями*. Под *регулярным (классическим) решением* уравнения (80) в некоторой области D его задания понимается функция $u(z)$, непрерывная вместе со своими производными до четвертого порядка (включительно) и удовлетворяющая этому уравнению.

Настоящий пункт посвящается построению регулярных решений уравнения (80) в двумерной области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$.

Для того чтобы найти частное решение $u_1(x, y)$ уравнения (80), примем обозначение $v = \Delta u_1$. Функция u_1 будет решением уравнения (80), если $v(x, y)$ является решением уравнения Пуассона (66), т. е. $\Delta v = g$. Решение этого

уравнения дается формулой (72), т. е.

$$4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi} \iint_D g(t) \log |t-z| d\xi d\eta, \quad t = \xi + i\eta. \quad (81)$$

Пользуясь очевидным равенством

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} [(t-z)(\bar{t}-\bar{z}) \log(t-z)(\bar{t}-\bar{z})] - 2 = 2 \log |t-z|,$$

уравнение (81) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left[u_1 - \frac{1}{8\pi} \iint_D g(t) |t-z|^2 \log |t-z| d\xi d\eta \right] = C,$$

где

$$C = -\frac{1}{8\pi} \iint_D g(t) d\xi d\eta = \text{const.}$$

Следовательно,

$$u_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_D g(t) |t-z|^2 \log |t-z| d\xi d\eta + \Phi(z, \bar{z}),$$

где

$$\Phi(z, \bar{z}) = Cz\bar{z} + \varphi_1(z) + \varphi_2(\bar{z}),$$

а φ_1 и φ_2 — произвольные аналитические функции переменных z и $\bar{z}$ соответственно. Поскольку Φ является бигармонической функцией, в качестве одного из частных решений уравнения (80) можно брать функцию

$$u_1(z) = \frac{1}{8\pi} \iint_D g(t) |t-z|^2 \log |t-z| d\xi d\eta. \quad (82)$$

Функцию

$$E(t, z) = |t-z|^2 \log |t-z|$$

принято называть *элементарным* (фундаментальным) *решением* бигармонического уравнения.

Если $u(x, y)$ — искомое решение уравнения (80), то функция $w = u - u_1$ будет бигармонической, т. е.

$$\Delta \Delta w = 0. \quad (83)$$

Мы теперь покажем, что *любая регулярная бигармоническая функция является аналитической функцией действительных переменных* x, y . Будем ограничиваться рас-

смотрением конечной односвязной области D_1 плоскости переменных x, y .

Очевидно, функция $v = \Delta w$ гармонична в силу (83), и, как уже было показано в § 1.7 гл. VIII, она является аналитической функцией переменных x, y , причем согласно формуле (76)

$$v = 4[\omega_0(z) + \bar{\omega}_0(\bar{z})],$$

где $\omega_0(z)$ — произвольная аналитическая функция переменного z . Так как w — решение уравнения (83), то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \omega_0(z) + \bar{\omega}_0(\bar{z}).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{z}\omega_0(z) + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{\omega}_0(\bar{t}) d\bar{t} + \omega_1(z), \quad (84)$$

где $\omega_1(z)$ — произвольная аналитическая функция. В результате интегрирования равенства (84) находим

$$w = \bar{z} \int_{z_0}^z \omega_0(t) dt + z \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{\omega}_0(\bar{t}) d\bar{t} + \int_{z_0}^z \omega_1(t) dt + \bar{\omega}_2(\bar{z}), \quad (85)$$

где $\omega_2(z)$ — также произвольная аналитическая функция. Тем самым аналитичность функции $w(x, y)$ доказана.

Примем обозначения

$$\int_{z_0}^z \omega_0(t) dt = \varphi(z)$$

и

$$\int_{z_0}^z \omega_1(t) dt = \psi(z).$$

Так как $w(x, y)$ — действительная функция, в силу (85) заключаем, что

$$\bar{\omega}_2(\bar{z}) = \psi(\bar{z}).$$

Следовательно, формулу (85) можно записать в виде

$$w = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (86)$$

В представлении (86) действительных бигармонических функций мнимые части функций $\bar{z}\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не присутствуют. Поэтому без ограничения общности можно считать, что *входящие в формулу (86) аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в некоторой фиксированной точке z_1 области D_1 определения этих функций удовлетворяют условиям*

$$\varphi(z_1) = 0, \operatorname{Im} \varphi'(z_1) = 0 \quad (87)$$

и

$$\operatorname{Im} \psi(z_1) = 0. \quad (88)$$

Каждой паре аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ формула (86) ставит в соответствие вполне определенную бигармоническую функцию $w(x, y)$. В результате дифференцирования формулы (86) и повторения приведенного в предыдущем пункте рассуждения убеждаемся в справедливости и обратного утверждения: *для каждой бигармонической функции $w(x, y)$ найдется вполне определенная пара аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющих условиям (87), (88), при помощи которых $w(x, y)$ представляется формулой (86). Следовательно, мы можем считать, что формула (86) дает общее представление действительных бигармонических функций.*

Ввиду того, что

$$u = w + u_1,$$

на основании формул (82) и (86) приходим к общему комплексному представлению действительных решений уравнения (80):

$$u(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{D_1} g(t) |t - z|^2 \log |t - z| d\xi d\eta + \\ + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (89)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного z , удовлетворяющие условиям (87) и (88).

Формула (89) позволяет любую линейную задачу для уравнения (80) привести к соответствующей задаче для бигармонических функций.

Присутствие двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного z в общем представлении бигармонических функций (86) подсказывает, что *число действительных краевых условий в задачах для таких*

функций должно быть равно двум, если мы хотим, чтобы эти задачи были правильно поставлены.

2. Задача Дирихле для бигармонических функций. Пусть D — область плоскости комплексного переменного z , ограниченная гладкой жордановой кривой Γ . Задача нахождения бигармонической в области D функции $w(z) = w(x, y)$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющей краевым условиям

$$w(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (90)$$

и

$$\frac{dw}{dv} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (91)$$

где v — внешняя к Γ нормаль, а f и g — заданные непрерывные функции, носит название первой краевой задачи или задачи Дирихле для бигармонических функций.

В силу формулы (86) краевое условие (90) принимает вид

$$\bar{t}\varphi(t) + t\bar{\varphi}(\bar{t}) + \psi(t) + \bar{\psi}(\bar{t}) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (92)$$

Заметим, что

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{dx}{ds}. \quad (93)$$

Поэтому нормальная производная с использованием операторов $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, определенных формулами (4) гл. III, выражается формулой

$$\frac{d}{dv} = -it' \frac{\partial}{\partial t} + i\bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}.$$

Применяя оператор $\frac{d}{dv}$ к (86), в силу (91) получаем

$$t' [\bar{t}\varphi'(t) + \bar{\varphi}'(\bar{t}) + \psi'(t)] - \\ - \bar{t}' [\varphi(t) + t\bar{\varphi}'(\bar{t}) + \bar{\psi}'(\bar{t})] = ig(t), \quad t \in \Gamma. \quad (94)$$

Таким образом, задача Дирихле (90), (91) для бигармонических функций сведена к нахождению аналитических в D функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по краевым условиям (92), (94).

Подробно остановимся на случае, когда область D — круг $|z| < 1$. Так как в этом случае на Γ имеют место

равенства $t = e^{i\vartheta}$, $d\vartheta = ds$, $t' = it$, $\bar{t} = 1/t$ и $\bar{t}' = -i/t$, краевые условия (92) и (94) запишутся в виде

$$\frac{1}{t} \varphi(t) + t \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \psi(t) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{t}\right) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (95)$$

и

$$\varphi'(t) + t \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) + t \psi'(t) + \frac{1}{t} \varphi(t) + \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} \bar{\psi}'\left(\frac{1}{t}\right) = g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (96)$$

В принятых выше предположениях относительно характера гладкости искомой бигармонической функции $u(x, y)$ мы можем считать, что функции $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ непрерывны в $D \cup \Gamma$.

Представляя функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в круге D рядами Тейлора:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(0) z^k \quad (97)$$

и учитывая то обстоятельство, что в силу формулы (14) гл. IV

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^k dt = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 1, & k = -1, \end{cases}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^k dt}{t-z} = \begin{cases} z^k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

в результате умножения равенств (95) и (96) на выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-z}$$

и интегрирования по кривой Γ будем иметь соответственно

$$\frac{\varphi(z)}{z} + \operatorname{Re} \bar{\varphi}'(0) + \psi(z) + \operatorname{Re} \bar{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t) dt}{t-z} \quad (98)$$

и

$$\varphi'(z) + \operatorname{Re} \varphi'(0) + z \psi'(z) + \frac{\varphi(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t) dt}{t-z}, \quad (99)$$

ибо в силу (88) и (89)

$$\varphi(0) = \operatorname{Im} \varphi'(0) = \operatorname{Im} \psi(0) = 0. \quad (100)$$

Из (98) и (99) в пределе при $z \rightarrow 0$ в силу (100) получаем

$$\operatorname{Re} \varphi'(0) + \operatorname{Re} \psi(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f \, ds,$$

$$\operatorname{Re} \varphi'(0) = \frac{1}{6\pi} \int_{\Gamma} g \, ds.$$

Вводя обозначение $\omega(z)$ для аналитической в D функции

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \omega(z), \quad (101)$$

перепишем равенства (98), (99) в виде

$$\omega(z) + \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t) \, dt}{t-z} - \frac{1}{4\pi i} \int \frac{f \, dt}{t}, \quad (102)$$

$$z\omega'(z) + z\psi'(z) + 2\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t) \, dt}{t-z} - \frac{1}{6\pi i} \int \frac{g(t) \, dt}{t}. \quad (103)$$

Дифференцируя равенство (102) по z , находим

$$\omega'(z) + \psi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(t) \, dt}{t-z}. \quad (104)$$

Подставляя выражение (104) в (103), будем иметь

$$\omega(z) = \frac{1}{4\pi i} \int \frac{g(t) \, dt}{t-z} - \frac{z}{4\pi i} \int \frac{f'(t) \, dt}{t-z} - \frac{1}{12\pi} \int_{\Gamma} g(t) \, ds. \quad (105)$$

После того как $\omega(z)$ найдена, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ находим из (101) и (102):

$$\varphi(z) = \frac{z}{4\pi i} \int \frac{g(t) \, dt}{t-z} - \frac{z^2}{4\pi i} \int \frac{f'(t) \, dt}{t-z} - \frac{z}{12\pi} \int_{\Gamma} g \, ds \quad (106)$$

и

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t) \, dt}{t-z} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f \, ds - \\ & - \frac{1}{4\pi i} \int \frac{g(t) \, dt}{t-z} + \frac{z}{4\pi i} \int \frac{f'(t) \, dt}{t-z} + \frac{1}{12\pi} \int_{\Gamma} g \, ds. \end{aligned} \quad (107)$$

Подставляя полученные выражения для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в формулу (86), получаем решение задачи (90), (91) для бигармонических функций.

Из постановки задачи (90), (91) для бигармонических функций следует, что среди заданных на Γ функций $f(t)$ должна быть непрерывной вместе со своей производной первого порядка, а $g(t)$ — непрерывной. То, что представленная формулой (86) бигармоническая функция, когда $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определены по формулам (106) и (107), действительно удовлетворяет краевым условиям (90) и (91), легко проверяется, если f'' и g' непрерывны по Гёльдеру. В более слабых условиях гладкости f и g , чем указанные выше, следует повторить (с очевидным изменением) рассуждение § 4.4 гл. IV.

К задаче (90), (91) для уравнения (80) приводится изучение изгиба тонкой упругой пластинки с закрепленными краями в линейной постановке.

Под тонкой упругой пластинкой понимается упругое цилиндрическое тело, высота которого по сравнению с двумя другими размерами пренебрежимо мала в математической модели изгиба этого тела.

Наряду с задачей с закрепленными краями важное значение имеют также задачи изгиба опертой по краям и свободной пластинки. Однако объем настоящей книги не позволяет останавливаться здесь на них.

3. Задача Рикье. Наряду с задачей Дирихле (90), (91) для бигармонических функций определенный интерес представляет следующая задача Рикье: *требуется определить бигармоническую в области D функцию $u(z)$, непрерывную вместе со своими производными до второго порядка (включительно) в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющую краевым условиям*

$$u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (108)$$

и

$$\Delta u = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (109)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ действительные функции, причем Γ имеет непрерывную кривизну, $g(t)$ непрерывна, а $f(t)$ непрерывно дифференцируема дважды.

Для функции $u(z)$ воспользуемся общим представлением (86). Ввиду того, что

$$\Delta u = 4[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})],$$

краевое условие (109) переходит в краевое условие Дирихле

$$\varphi'(t) + \bar{\varphi}'(t) = \frac{1}{4} g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (110)$$

для функции $\varphi'(z)$.

После того как функция $\varphi(z)$ будет найдена по краевому условию (110), из (86) получаем задачу Дирихле для функции $\psi(t)$:

$$\psi(t) + \bar{\psi}(\bar{t}) = f(t) - [\bar{t}\varphi(t) + t\bar{\varphi}(\bar{t})]. \quad (111)$$

Таким образом, решение задачи Рикье приведено к решению задачи Дирихле дважды по краевым условиям (110) и (111).

Будем ограничиваться рассмотрением случая, когда D представляет собой круг $|z| < 1$.

Пользуясь формулой Шварца (82) гл. IV для единичного круга $|z| < 1$ и учитывая то обстоятельство, что в силу второго из условий (87) можно считать $\operatorname{Im} \varphi'(0) = 0$, находим функцию $\varphi'(z)$ в виде

$$\varphi'(z) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{t-z} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Gamma} g ds. \quad (112)$$

Интегрируя равенство (112) и учитывая первое из условий (87), находим выражение $\varphi(z)$ через заданную функцию $g(t)$.

После того как функция $\varphi(z)$ найдена, в силу (86) краевое условие (108) перепишем в виде (111) и вновь в силу формулы Шварца получаем

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{t} \varphi(t) + t\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t-z} dt - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f ds + \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t}\varphi(t) + t\bar{\varphi}(\bar{t})}{t} dt. \end{aligned} \quad (113)$$

Ввиду того, что $\varphi(0) = 0$, $\operatorname{Im} \varphi'(0) = 0$, для второго слагаемого в правой части формулы (113) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{t} \varphi(t) + t\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t-z} dt = \frac{1}{z} \varphi(z) + \operatorname{Re} \varphi'(0),$$

а четвертое слагаемое равно $\frac{1}{2} \operatorname{Re} \varphi'(0)$, так что

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{z} \varphi(z) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \varphi'(0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f ds. \quad (114)$$

Так как в силу (112)

$$\operatorname{Re} \varphi'(0) = \frac{1}{16} \int_{\Gamma} g ds,$$

то формулу (114) можно переписать в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{z} \varphi(z) - \frac{1}{32} \int_{\Gamma} g ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f ds.$$

Подставляя найденные выражения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в правую часть формулы (86), находим искомое решение задачи Римана в рассматриваемом случае. Проверка краевых условий трудности не представляет.

Знание конформно отображающей функции и в бигармонических задачах позволяет ограничиваться рассмотрением круговой области. Однако в результате конформного отображения нарушается линейность относительно z выражения $z\varphi(z) + \psi(z)$. По этой причине польза в применении конформного отображения незначительна в задачах для бигармонических функций.

4. Уравнения линейной теории упругости. При изучении сплошной среды различают два вида сил, действующих в среде, — *объемные* и *поверхностные*. В сплошной среде мысленно выделим произвольный объем d с границей σ . Объемные силы действуют в каждой точке d (например, сила тяжести), а поверхностные силы — в каждой точке σ (например, давление). Эти последние представляют собой силы взаимодействия между частями среды, лежащими соответственно внутри и вне σ . При наличии поверхностных сил (разумеется, отличных от нуля), независимо от того, находится ли среда в состоянии покоя или движения, говорят, что она находится в напряженном состоянии. Поэтому эти силы носят название *напряжений*.

Объемная сила Φ , приложенная к точке $P(x, y, z) \in d$, известна, если известны ее три составляющие (проекции на координатных осях, в нашем случае прямоугольных), X, Y, Z .

Сила напряжения F в каждой точке $Q(x, y, z) \in \sigma$ зависит не только от точки Q , но и от ориентации элемента площади σ , отнесенного к этой точке, и она будет нам известна, если будем знать: а) ориентации трех поверхностных элементов $d\sigma_{v_1}, d\sigma_{v_2}, d\sigma_{v_3}$ в точке Q , нормали которых v_1, v_2, v_3 не компланарны, и б) напряжения, действующие на каждом из этих элементов. В качестве v_1, v_2, v_3 примем орты координатных осей x, y, z с элементами $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$. В соответствии с этим каждое из напряжений, действующих на $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$, имеет по три компоненты, которые принято обозначать соответственно через $(X_x, X_y, X_z), (Y_x, Y_y, Y_z), (Z_x, Z_y, Z_z)$. Следовательно, знание этих девяти компонент полностью определяет напряжение F , действующее в точке $Q \in \sigma$. Доказывается, что *они составляют компоненты тензора второго ранга, носящего название тензора напряжения*.

Для того чтобы среда была в равновесии, главный вектор и главный момент всех действующих в ней сил должны быть равны нулю. Выполнение первого из этих требований дает *три уравнения равновесия*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (115)$$

а выполнение второго показывает, что

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y.$$

Последние равенства означают, что *тензор напряжения симметричен*. В силу линейности системы (115) без ограничения общности можно считать, что компоненты X, Y, Z объемной силы Φ равны нулю всюду в сплошной среде.

Напряженное состояние в сплошной среде возникает в результате внешнего воздействия, изменяющего расстояния между ее точками, т. е. когда среда подвержена *деформации*. Если точка P сплошной среды после деформации занимает положение Q , то вектор $PQ = (u, v, w)$ называется *вектором смещения*, а скалярные величины u, v, w — *компонентами смещения*. Величины

$$e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zx}, e_{zy}, e_{zz},$$

определенные формулами

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (116)$$

называются *компонентами деформации*, причем предполагается, что в этих равенствах при перестановке местами любой пары координат x, y, z следует переставлять местами соответствующие пары компонент смещения u, v, w . Следовательно, $e_{xy} = e_{yx}$, $e_{xz} = e_{zx}$, $e_{yz} = e_{zy}$. Наряду с этим предполагается, что u, v, w , непрерывны вместе со своими производными до третьего порядка (включительно). Для того чтобы было возможно определить функции u, v, w из системы шести уравнений (116), компоненты деформации должны быть связаны между собой шестью равенствами, носящими название *условий совместимости Сен-Венана*.

Приведенные выше уравнения (115), (116) годятся для любой сплошной среды. Теория упругости имеет своим предметом изучение напряженного состояния твердых сплошных упругих сред—упругих тел, когда известен закон зависимости между компонентами напряжения и компонентами деформаций. В линейной теории упругости таким законом является закон Гука: *компоненты напряжения в каждой точке упругого тела являются линейными однородными функциями (линейными формами) компонент деформации и обратно*. Когда коэффициенты этой линейной зависимости постоянны, тело называется *однородным*.

Говорят, что упругое тело подвержено *плоской деформации*, параллельной плоскости переменных x, y , если из трех компонент смещения u, v, w третья w равна нулю, а две первые компоненты u и v являются функциями только x, y . Для изотропных и однородных упругих тел в случае плоских деформаций закон Гука гласит, что

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (117)$$

$$Z_z = \lambda\theta, \quad X_z = Y_z = 0, \quad (118)$$

где λ и μ — положительные постоянные, которые считаются известными, а

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (119)$$

Поскольку компоненты смещения не зависят от координаты z , то и компоненты напряжения не зависят от z . Поэтому для изучения *равновесного* или, как еще принято говорить, *статического* напряженного состояния упругого тела, подверженного плоской деформации, мы имеем наряду с уравнениями (117) еще два уравнения (115) (в предположении, что объемные силы отсутствуют):

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \quad (120)$$

т. е. систему пяти уравнений с пятью неизвестными X_x , X_y , Y_y , u , v .

Подставляя выражения X_x , X_y , Y_y из (117) в (120), с учетом обозначения (119) получаем систему двух линейных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

для определения компонент смещения $u(x, y)$, $v(x, y)$.

При принятых выше предположениях относительно λ и μ эта система *эллиптическая*.

В результате дифференцирования уравнений указанной системы второго порядка относительно u и v соответственно по x и по y и сложения опять с учетом (119) получаем

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \theta = 0,$$

откуда, так как $\lambda + 2\mu \neq 0$, имеем, что $\Delta \theta = 0$, т. е. θ — гармоническая функция.

Если сложим первые два уравнения системы (117), в силу (119) получаем

$$\theta = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (X_x + Y_y), \quad (121)$$

т. е.

$$\Delta (X_x + Y_y) = 0. \quad (122)$$

На поверхности упругого тела могут быть вычислены как компоненты внешнего напряжения, так и компоненты

смещения. В соответствии с этим нам приходится находить в области D плоскости переменных x, y решение системы (117), (120): либо а) когда на границе $\partial D = \Gamma$ области D известен вектор усилия (X_v, Y_v) , действующий в точках t границы Γ со стороны внешней нормали v , компоненты которого выражаются формулами

$$X_v = X_x \frac{dx}{dv} + X_y \frac{dy}{dv}, \quad Y_v = Y_x \frac{dx}{dv} + Y_y \frac{dy}{dv}, \quad (123)$$

либо б) когда известны компоненты вектора смещения (u, v) в каждой точке $t \in \Gamma$.

В случае а) говорят, что дело имеем с *первой основной задачей теории упругости*, а в случае б) — со *второй основной задачей теории упругости*.

Возникают случаи упругого напряженного состояния, когда на некоторых участках Γ задано усилие (X_v, Y_v) , а на остальных частях Γ — компоненты смещения, или одновременно на некоторых участках Γ задано по одному условию, связывающему X_v, Y_v или u, v соответственно. Их изучение приводит к так называемым *смешанным задачам теории упругости*.

5. Функция напряжения и редукция основных краевых задач теории упругости к краевым задачам для аналитических функций комплексного переменного. В силу уравнений (120) выражения

$$-X_y dx + X_x dy = dB, \quad Y_y dx - X_y dy = dA \quad (124)$$

являются полными дифференциалами, и функции A и B могут быть найдены криволинейным интегрированием по заданным X_x, X_y, Y_y .

Вытекающее из (124) равенство

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

показывает, что полным дифференциалом является и выражение

$$A dx + B dy = dU. \quad (125)$$

Введенная равенством (125) функция $U(x, y)$ носит название *функции напряжения*. По заданным A и B она также определяется криволинейным интегрированием.

На основании (124) и (125) заключаем, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = Y_y, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X_x, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -X_y. \quad (126)$$

Из первых двух уравнений (126) имеем, что $\Delta U = X_x + Y_y$, откуда на основании (122) заключаем, что

$$\Delta \Delta U = 0,$$

т. е. функция напряжения бигармонична и ее общее представление дается формулой (86), которую на этот раз запишем в виде

$$4U(x, y) = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) + \bar{z}\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (127)$$

Пользуясь операторами $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (см. формулу (4) гл. III), на основании первых двух равенств (126) в силу (122) из (127) получаем

$$X_x + Y_y = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} U = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})$$

и

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z).$$

Отсюда, вводя новые обозначения

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \quad \psi''(z) = \Psi(z), \quad (128)$$

будем иметь

$$X_x + Y_y = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) \quad (129)$$

и

$$Y_y - X_x + 2iX_y = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z). \quad (130)$$

Для простоты в дальнейшем будем считать, что область D конечна и односвязна.

В первой основной задаче теории упругости вектор усилия (X_v, Y_v) считается заданным:

$$X_v = f_1(t), \quad Y_v = f_2(t).$$

В силу формул (93) и (126) имеем

$$\begin{aligned} -iX_v - Y_v &= -i \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} - i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

или, после интегрирования,

$$-\int_0^s (iX_v + Y_v) ds = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} + C_1,$$

где 0 и s — дуговые абсциссы точек $z_0(0)$ и $z(s)$, отсчитываемые от точки z_0 до z в положительном направлении, а C_1 — произвольная постоянная.

Применяя выражения операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ через $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, можем написать

$$-\int_0^s (iX_v + Y_v) ds = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U + C_1.$$

Подставляя в это равенство выражение $U(z)$ по формуле (86) и значения f_1 и f_2 для X_v , Y_v , получаем краевое условие для определения аналитических в области D функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$\bar{t}\varphi'(t) + \overline{\varphi(t)} + \psi'(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (131)$$

где

$$f(t) = -\frac{1}{2} \int_0^s (f_2 + if_1) ds + C, \quad C = \frac{1}{2} C_1. \quad (132)$$

Внося выражение θ из (121) в первые два уравнения (117), в силу первых двух равенств (126) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)} \Delta U \quad (133)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)} \Delta U. \quad (134)$$

В силу формулы (127) имеем

$$\Delta U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z),$$

т. е.

$$\Delta U = 2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \varphi(z) = 2 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \varphi(z). \quad (135)$$

На основании (135) перепишем равенства (133) и (134) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \varphi(z), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \varphi(z). \end{aligned}$$

Отсюда после интегрирования находим

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \operatorname{Re} \varphi(z) + F_1(y) \quad (136)$$

и

$$v = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \operatorname{Im} \varphi(z) + F_2(x), \quad (137)$$

где F_1 и F_2 — произвольные действительные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

В силу третьего из уравнений (117) и (126) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (138)$$

а из (136) и (137) в силу (135) мы должны иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + F'_1(y) + F'_2(x). \quad (139)$$

Сравнивая (138) и (139), получаем

$$F_1(y) = \alpha y + \beta, \quad F_2(x) = -\alpha x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}$$

Поэтому в силу (136) и (137) можем написать

$$u + iv = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \varphi(z) + \alpha y + \beta - i\alpha x,$$

или, учитывая (127) и игнорируя члены, выражающие жесткое смещение,

$$u + iv = \frac{1}{4\mu} [\kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z})]. \quad (140)$$

На основании равенства (140) заключаем, что *вторая основная задача теории упругости эквивалентна определению аналитических в области D функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по краевому условию*

$$\kappa \varphi(t) - t \bar{\varphi}'(\bar{t}) - \bar{\psi}'(\bar{t}) = 4\mu f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (141)$$

где $\kappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$, а $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — заданная на Γ функция, причем

$$u(t) = f_1(t), \quad v(t) = f_2(t), \quad t \in \Gamma.$$

6. Первая основная задача теории упругости для круга.
В предыдущем пункте первая основная задача теории

упругости была приведена к определению аналитических в области D функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по краевому условию (131).

Будем предполагать, что область D представляет собой круг $|z| < 1$, на окружности которого Γ : $t = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq \leq 2\pi$, $\bar{t} = 1/t$. Поэтому, если принять обозначение $\Psi(z) = \psi'(z)$, краевое условие (131) можно записать в виде

$$\frac{1}{t} \varphi'(t) + \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \Psi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (142)$$

Переходя к сопряженным величинам в (142), будем иметь

$$t\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) + \varphi(t) + \bar{\Psi}\left(\frac{1}{t}\right) = \bar{f}(\bar{t}), \quad t \in \Gamma. \quad (143)$$

Умножая равенства (142) и (143) на $\frac{1}{2\pi i(t-z)}$ и интегрируя по t , как и в п. 2 настоящего параграфа, при $|z| < 1$ получаем

$$\frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z} + \bar{\varphi}(0) + \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt \quad (144)$$

и

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(0) + \bar{\varphi}''(0) + \bar{\Psi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt. \quad (145)$$

Дифференцируя равенство (145) и полагая $z=0$, находим

$$\varphi'(0) + \bar{\varphi}'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t^2} dt. \quad (146)$$

Равенство (146) возможно лишь при условии

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \bar{f} e^{-i\vartheta} d\vartheta = 0,$$

а это в свою очередь означает, что главный момент внешних усилий, действующих на Γ , равен нулю (см. п. 4 настоящего параграфа).

Выражение $\operatorname{Re} \varphi'(0)$ находим из (146). Учитывая это обстоятельство и отбрасывая постоянные слагаемые в формулах (144) и (145), не влияющие на напряженное со-

стояние, окончательно будем иметь

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt - z\bar{\varphi}'(0) \quad (147)$$

и

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z}. \quad (148)$$

Определенные по формулам (148) функции $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ позволяют судить о напряженном состоянии упругого тела, подверженного плоской деформации.

7. Вторая основная задача теории упругости для круга. Если принять опять обозначение $\Psi(z) = \psi'(z)$, краевое условие (141) второй основной задачи теории упругости в случае круга $|z| < 1$ примет вид

$$\kappa\varphi(t) - t\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\Psi}\left(\frac{1}{t}\right) = 4\mu f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (149)$$

или, переходя к комплексно сопряженным величинам,

$$\bar{\kappa}\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\varphi'(t) - \Psi(t) = 4\mu\bar{f}(\bar{t}), \quad t \in \Gamma. \quad (150)$$

Поступая таким же образом, как и в предыдущем пункте, из (149) и (150) при $|z| < 1$ получаем

$$\kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(0) - \bar{\varphi}''(0) - \bar{\Psi}(0) = \frac{2\mu}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} \quad (151)$$

и

$$\bar{\kappa}\bar{\varphi}(0) - \frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z} - \Psi(z) = \frac{2\mu}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt \quad (152)$$

Полагая $z=0$ в (151) и в равенстве, полученном из него дифференцированием по z , будем иметь

$$\begin{aligned} \kappa\varphi(0) - \bar{\varphi}''(0) - \bar{\Psi}(0) &= \frac{2\mu}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t} dt, \\ \kappa\varphi'(0) - \bar{\varphi}'(0) &= \frac{2\mu}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t^2} dt. \end{aligned} \quad (153)$$

Поскольку $\kappa^2 \neq 1$, на основании (153) выражениям (151) и (152) для $\kappa\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ можно придать вид

$$\begin{aligned} \kappa\varphi(z) = & \frac{2\mu z}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t(t-z)} dt + \\ & + \frac{2\mu z}{\pi(1-\kappa^2)} \int_{\Gamma} (f e^{-i\vartheta} - \kappa \bar{f} e^{i\vartheta}) d\vartheta + \kappa\varphi(0) \quad (154) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & -\frac{2\mu}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt - \frac{1}{z} \varphi'(z) + \\ & + \frac{2\mu}{z\pi(1-\kappa^2)} \int_{\Gamma} (\bar{f} e^{i\vartheta} - \kappa f e^{-i\vartheta}) d\vartheta + \kappa \bar{\varphi}(0). \quad (155) \end{aligned}$$

Из формулы (140) очевидно, что в правых частях (154) и (155) постоянное $\varphi(0)$ можно считать равным нулю.

При проверке краевых условий нам нужны будут значения на Γ производной функции $\varphi(z)$, входящей в формулы (154) и (155). Следует также заметить, что компоненты смещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в замкнутом круге $|z| \leq 1$ будут непрерывны по Гёльдеру, если функция $\bar{f}(t)$ непрерывна на Γ по Гёльдеру вместе с ее первой производной. Это условие достаточно для проверки выполнения краевого условия (149). Такому же требованию следует подчинить функцию $\bar{f}(t)$ и в формулах (147) и (148).

8. Контактная задача Герца. В практике измерения жесткости упругих тел большое значение имеет определение напряженного состояния в двух упругих телах, которые вдавливаются друг в друга. В трехмерном случае эта задача была изучена Герцем в предположении, что вблизи места контакта до деформации поверхности этих тел описываются уравнениями вида $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ с постоянными A, B, C .

Когда упругие тела представляют собой бесконечные цилиндры, взаимодействующие вдоль их образующих, в предположении, что плоской деформацией охвачены узкие слои вблизи этих образующих, задача Герца может быть решена применением теории аналитических функций комплексного переменного. Мы остановимся на этой задаче еще и потому, что она дает один из ярких примеров смешанных задач теории упругости.

Итак, пусть на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ имеются две области D_1 и D_2 , причем D_1 лежит в верхней полуплоскости, а D_2 — в нижней полуплоскости, а участок контакта между ними в процессе деформации мал по сравнению с размерами самих областей. Пусть уравнения границ $\partial D_1 = \Gamma_1$ и $\partial D_2 = \Gamma_2$ вблизи точки $z = 0$ представляются в виде

$$y = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad (156)$$

до деформации и

$$y = f_1(t) + v_1(t), \quad y = f_2(t) + v_2(t) \quad (157)$$

после деформации, причем на участке контакта переменное t меняется на отрезке γ : $-a \leq t \leq a$ действительной оси. Считается, что положительное число a заранее не задано, но оно настолько мало, что D_1 и D_2 можно принять соответственно за верхнюю E_1 и нижнюю E_2 полуплоскости. Функции v_1 и v_2 представляют собой вертикальные компоненты смещения деформированных частей границ Γ_1 и Γ_2 , и в силу (156) и (157)

$$v_1(t) - v_2(t) = f_2(t) - f_1(t), \quad -a \leq t \leq a. \quad (158)$$

Равенство (158) представляет собой краевое условие для вертикальных компонент смещения v_1 и v_2 .

Будем считать, что на участке контакта *трение отсутствует*. Поэтому с учетом того обстоятельства, что участки действительной оси вне отрезка γ свободны от напряжения, должны иметь

$$X_y^1 = X_y^2 = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad (159)$$

и

$$Y_y^1 = Y_y^2 = 0, \quad -\infty < t < -a, \quad a < t < \infty. \quad (160)$$

Верхние индексы 1, 2 означают, что соответствующие величины относятся к D_1 и D_2 .

Равенства (158), (159) и (160) представляют собой краевые условия задачи Герца. Следует также считать, что напряжения и вращения для D_1 и D_2 равны нулю на бесконечности.

Из (129) и (130) имеем, что

$$2(Y_y^k - iX_y^k) = \Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(\bar{z}) + z\bar{\Phi}_k'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad k = 1, 2. \quad (161)$$

Поскольку в силу (159) и (160) из (161) следует равенство

$$\Phi_k(t) = -\bar{\Phi}_k(t) - i\bar{\Phi}'_k(t) - \bar{\Psi}_k(t), \quad k=1, 2, \\ -\infty < t < -a, \quad a < t < \infty,$$

Функция $\Phi_1(z)$ аналитически продолжается из E_1 в E_2 через лучи $-\infty < t < -a$, $a < t < \infty$, и ее продолжением в E_2 является функция $-\bar{\Phi}_1(z) - z\bar{\Phi}'_1(z) - \bar{\Psi}_1(z)$. Точно так же функция $\Phi_2(z)$ из E_2 аналитически продолжается в E_1 , и ее продолжением в E_1 является функция $-\bar{\Phi}_2(z) - z\bar{\Phi}'_2(z) - \bar{\Psi}_2(z)$. Следовательно, функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ аналитичны на комплексной плоскости E_γ , разрезанной вдоль отрезка γ , причем

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & z \in E_1, \\ -\bar{\Phi}_1(z) - z\bar{\Phi}'_1(z) - \bar{\Psi}_1(z), & z \in E_2, \end{cases} \quad (162)$$

и

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} \Phi_2(z), & z \in E_2, \\ -\bar{\Phi}_2(z) - z\bar{\Phi}'_2(z) - \bar{\Psi}_2(z), & z \in E_1. \end{cases} \quad (163)$$

Если во вторых равенствах z заменим через $\bar{z}$ и применим операцию сопряжения, будем иметь

$$\bar{\Phi}_k(z) = -\Phi_k(z) - z\Phi'_k(z) - \Psi_k(z),$$

т. е.

$$\Psi_k(z) = -\bar{\Phi}_k(z) - \Phi_k(z) - z\Phi'_k(z),$$

или

$$\bar{\Psi}_k(\bar{z}) = -\bar{\Phi}_k(\bar{z}) - \Phi_k(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'_k(\bar{z}). \quad (164)$$

Взяв оператор $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ над обеими частями (140), получаем

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + i \frac{\partial v_k}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_k} [x\Phi_k(z) - \bar{\Phi}_k(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'_k(\bar{z}) - \bar{\Psi}_k(\bar{z})], \quad k=1, 2. \quad (165)$$

Естественно считать, что на бесконечности определенные формулами (162), (163) аналитические функции исчезают.

Подставляя выражение $\bar{\Psi}_k(\bar{z})$ из (164) в формулы (161) и (165), будем иметь

$$Y^k_y - iX^k_y = \frac{1}{2} [\Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \bar{\Phi}'_k(\bar{z})] \quad (166)$$

и

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + i \frac{\partial v_k}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_k} [\kappa_k \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \bar{\Phi}'(\bar{z})], \quad (167)$$

где μ_k и κ_k — значения постоянных μ и κ для областей D_1, D_2 .

Из формул (162) и (163) непосредственно получаем

$$\Phi_k^+(t) = \Phi_k^-(t), \quad -\infty < t < -a, \quad a < t < \infty,$$

а из (166) следует, что для давления $P(t) = Y_y$ имеем

$$P = \frac{1}{2} (\Phi_1^+ - \Phi_1^-), \quad P = \frac{1}{2} (\Phi_2^- - \Phi_2^+), \quad -a < t < a, \quad (168)$$

где $+$ и $-$ указывают на то, что пределы берутся из верхней и из нижней полуплоскостей соответственно.

Из равенств (168) имеем, что

$$\Phi_1^+ + \Phi_2^+ = \Phi_1^- + \Phi_2^-,$$

т. е. функция $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ аналитически продолжается через γ . Отсюда при естественном требовании ограниченности $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ вблизи точек $z = -a$, $z = a$ и исчезновения этих функций на бесконечности следует, что $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = 0$, т. е.

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = i\Phi(z) \quad (169)$$

всюду на E_γ . Из (167) на основании (169) заключаем, что

$$v_1'(t) = \frac{1}{4\mu_1} (\kappa_1 + 1) \operatorname{Re} \Phi(t), \quad v_2'(t) = -\frac{1}{4\mu_2} (\kappa_2 + 1) \operatorname{Re} \Phi(t).$$

Отсюда, в силу (158), будем иметь

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = h'(t), \quad -a < t < a, \quad (170)$$

где

$$h' = [f_2'(t) - f_1'(t)] \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2}.$$

Следовательно, для определения функции $\Phi(z)$ мы получим задачу Дирихле для гармонических функций на плоскости E_γ со целью с краевым условием (170), решение которой дано формулой (35).

В силу (170) и (35) будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 - t^2}} \frac{h'(t) dt}{t - z}. \quad (171)$$

Так как при выводе формулы (35) мы предполагали, что правая часть краевого условия (20) должна быть непрерывной по Гёльдеру, при постановке задачи Герца мы должны требовать, чтобы функции f_1 и f_2 из (156) имели непрерывные по Гёльдеру производные первого порядка при $-a \leq t \leq a$. Кроме того, должно быть выполнено условие (34).

Повторяя приведенное в п. 3 предыдущего параграфа рассуждение о предельных значениях представленной по формуле (31) функции $F(z)$, в случае формулы (171) получаем

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0) &= h'(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t_0^2}{a^2 - t^2}} \frac{h'(t) dt}{t - t_0}, \\ \Phi^-(t_0) &= h'(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t_0^2}{a^2 - t^2}} \frac{h'(t) dt}{t - t_0}.\end{aligned}$$

Из этих формул следует, что функция $\Phi(z)$ действительно удовлетворяет краевому условию (170) и, кроме того, в силу (168)

$$P(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t_0^2}{a^2 - t^2}} \frac{h'(t) dt}{t - t_0}.$$

Условие (34) будет выполнено, например, при требовании нечетности функции $h'(t)$.

Суммарное давление на участке γ дается формулой

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a P(t_0) dt_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t_0^2}{a^2 - t^2}} \frac{dt_0}{t - t_0} = \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{t(j_2' - j_1')}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = P_0, \quad (172)\end{aligned}$$

и оно считается известным. Равенство (172) служит для определения числа a .

В задаче Герца обычно интересуются только нахождением распределения давления $P(t_0)$ на участке γ места контакта областей D_1 и D_2 . Однако в случае надобности функцию $\Psi(z)$ можно выразить через $\Phi(z)$, и картина напряженного состояния будет ясна.

Принятые выше допущения, позволяющие привести задачу Герца к задаче (170), конечно, требуют, чтобы функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вместе с их производными первого порядка были малы.

§ 3. Применение теории аналитических функций в гидромеханике и в теории поля

1. Основные уравнения гидромеханики. Наряду с задачами теории упругости методами, основанными на теории аналитических функций, успешно изучаются явления, протекающие в нетвердых (жидких) сплошных средах и в физических полях.

На каждом мысленно выделенном элементе площади в объеме, занятом жидкостью, действует давление. Когда давление направлено вдоль нормали к выделенному элементу площади, говорят, что имеет место *закон изотропности* давления. Этот закон всегда верен, если жидкость находится в равновесном состоянии. Если указанный закон верен и для движущейся жидкости, то такая жидкость называется *идеальной*.

В жидкости выделим произвольно малый объем d — «частицу жидкости» — с границей σ . Жидкости, заполняющей объем d , приписывается определенная, средняя скорость, предел которой при стягивании σ в точку P называется *скоростью* q жидкости в точке P . Обозначим через x_1, x_2, x_3 декартовы ортогональные координаты точки P , а через q_1, q_2, q_3 — соответствующие компоненты вектора q . Движение или равновесное состояние жидкости определено, если нам известны в каждой точке $P(x_1, x_2, x_3)$ давление $p(x_1, x_2, x_3, t)$, плотность распределения масс $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ и вектор $q(x_1, x_2, x_3, t)$.

Линия в занятом жидкостью объеме, касательная которой в каждой точке P параллельна вектору скорости q в точке P , называется *линией тока*. Когда в каждой точке P линии тока вектор скорости не зависит от времени, эта линия совпадает с *траекторией движущейся точки*, уравнением которой служит равенство

$$\frac{dx}{dt} = q,$$

где x — радиус-вектор точки P .

Когда плотность ρ постоянна во всем объеме, занятом жидкостью, такая жидкость называется *несжимаемой*.

При наличии трения (внутреннего, между частицами жидкости, и внешнего, между частицами жидкости и твердым телом, находящимся с ними в контакте) закон изотропности давления в движущейся жидкости может не иметь места. В таком случае жидкость называется *реальной*. Внутреннее трение является причиной появления позади движущегося в реальной жидкости твердого тела *вихрей*, *сопротивления* и *подъемной силы*. Они сразу исчезают при наступлении равновесного состояния. Этот факт находится в тесной связи с тем, что внутреннее трение может проявляться в сопротивлении изменению формы жидкости. Когда при изучении движения жидкости нельзя игнорировать внутреннее трение, жидкость называется *вязкой*.

Если скорость q в каждой точке движущейся жидкости не зависит от времени, то движение называется *стационарным*.

В гидромеханике в самом общем случае при предположении, что объемные силы отсутствуют, для определения величин q , p и ρ имеется система уравнений, состоящая из одного векторного уравнения *Навье—Стокса*

$$\rho \frac{Dq}{Dt} + \text{grad } p = \mu \Delta q \quad (173)$$

и скалярного уравнения *неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho q = 0, \quad (174)$$

где Δ —оператор Лапласа по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 , оператор $\frac{D}{Dt}$ дается формулой

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \text{grad}, \quad \text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (175)$$

а μ —коэффициент вязкости.

К системе (173), (174) четырех уравнений добавляется пятое, конечное уравнение, носящее название *уравнения состояния*:

$$p = p(\rho). \quad (176)$$

В случае так называемой *баротропной* жидкости зависимость (176) между p и ρ монотонна.

Если через $q^2 = q \cdot q$ обозначим скалярное произведение вектора q на себя, а через $\text{rot } q \times q$ —векторное про-

изведение векторов $\text{rot } q$ и q , то в силу (175) уравнению (173) можно придать вид

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho \left[\frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \text{rot } q \times q \right] + \text{grad } p = \mu \Delta q.$$

В соответствии с этим в стационарном случае уравнение (173) запишется в виде

$$\rho \left[\frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \text{rot } q \times q \right] = -\text{grad } p + \mu \Delta q, \quad (177)$$

а уравнение (174), очевидно, переходит в уравнение

$$\text{div } \rho q = 0. \quad (178)$$

Если существует семейство параллельных плоскостей, в которых при пересечении с объемом, занятым движущейся жидкостью, гидромеханическая картина одинакова, то такое движение называется *плоскопараллельным течением*.

При изучении плоскопараллельного течения в определенных допущениях становится возможным применять теорию аналитических функций одного комплексного переменного не только с целью доказательства существования решений ряда важных задач, но и для построения в квадратурах этих решений в случае некоторых видов движений и областей.

2. Линсаризованная задача Навье — Стокса. Когда при изучении плоскопараллельного стационарного течения жидкости считается, что левая часть уравнения (177) пренебрежимо мала и $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, то система (177), (178) *линеаризуется* и получаем

$$\Delta q_1 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \Delta q_2 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad (179)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0. \quad (180)$$

Если функции $q_1(x_1, x_2)$, $q_2(x_1, x_2)$ и $p(x_1, x_2)$ имеют непрерывные производные соответственно до третьего и второго порядка и удовлетворяют системе (179), (180), то говорят, что они представляют собой *регулярное решение* этой системы.

Одно из основных задач для системы (179), (180) заключается в требовании *определить регулярное в односвязной области D плоскости комплексного переменного*

$z = x_1 + ix_2$ ее решение q_1, q_2, p по краевому условию

$$q_1(t) = f_1(t), \quad q_2(t) = f_2(t), \quad t \in \Gamma, \quad (181)$$

где $\Gamma = \partial D$ — граница области D , а f_1 и f_2 — заданные действительные функции.

Исключая $p(x_1, x_2)$ из системы (179), будем иметь

$$\Delta \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = -2i\varphi'(z) + 2i\bar{\varphi}'(\bar{z}), \quad (182)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая в области D функция комплексного переменного z .

Обозначим через $w(z)$ функцию

$$w(z) = q_1 - iq_2 \quad (183)$$

и запишем уравнения (180) и (182) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}). \quad (184)$$

Из (184) интегрированием находим

$$w = \bar{z}\varphi'(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z), \quad (185)$$

где $\psi(z)$ — также произвольная аналитическая в области D функция.

Из комплексной записи системы (179):

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - i \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \Delta w = \frac{4}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}}$$

в силу (185) следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{\mu} \varphi'(z). \quad (186)$$

Интегрированием равенства (186) получаем

$$p = \frac{2}{\mu} \varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \quad (187)$$

где $\varphi_1(z)$ — произвольная аналитическая в области D функция. Поскольку функция $p(x_1, x_2)$, определенная по формуле (187), действительна, мы должны потребовать чтобы $\varphi_1(z) = \frac{2}{\mu} \varphi'(z) + C$, где C — произвольная действительная

постоянная. Следовательно, из (187) получаем

$$p = \frac{4}{\mu} \operatorname{Re} \varphi'(z) + C. \quad (188)$$

Формулы (185) и (188) дают общее представление регулярных решений системы (179), (180), и к тому же они показывают, что эти решения являются аналитическими функциями действительных переменных x_1, x_2 .

Вводя обозначение $f(t) = \dot{f}_1(t) - i\dot{f}_2(t)$, запишем краевое условие (181) в комплексной форме:

$$w(t) = \dot{f}(t), \quad t \in \Gamma. \quad (189)$$

Формула (185) позволяет краевой задаче (189) придать вид

$$\bar{t}\varphi'(t) - \bar{\varphi}(\bar{t}) + \psi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (190)$$

и тем самым свести задачу (179), (180), (181) к определению аналитических в области D функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по краевому условию (190).

Будем считать, что область D представляет собой круг $|z| < 1$, а искомая функция $w(z)$ непрерывна по Гёльдеру в $D \cup \Gamma$ вместе со своими производными первого порядка. В соответствии с этим от функции $f(t)$ также потребуем, чтобы она вместе с ее производной первого порядка была непрерывна по Гёльдеру на Γ .

В рассматриваемом случае краевое условие (190) принимает вид

$$\frac{1}{t} \varphi'(t) - \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \psi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (191)$$

Переходя к комплексно сопряженным величинам, из (191) получаем

$$t\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) - \varphi(t) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{t}\right) = \bar{f}(\bar{t}), \quad t \in \Gamma. \quad (192)$$

Умножая равенства (191) и (192) на $\frac{1}{2\pi i(t-z)}$ и интегрируя по окружности Γ , будем иметь

$$\frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z} - \bar{\varphi}(0) + \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t) dt}{t-z} \quad (193)$$

и

$$z\bar{\varphi}'(0) - \varphi(z) + \bar{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(t) dt}{t-z}. \quad (194)$$

При $z=0$ из (194) находим, что

$$-\varphi(0) + \bar{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t} \quad (195)$$

и

$$\bar{\varphi}'(0) - \varphi'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t^2}. \quad (196)$$

Действительная часть правой части равенства (196) представляет собой криволинейный интеграл, который преобразуется по формуле Грина—Остроградского:

$$\int_{\Gamma} f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = - \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

и, следовательно, равен нулю в силу уравнения (180). Из (194) имеем

$$\varphi(z) = z\bar{\varphi}'(0) + \bar{\psi}(0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} \quad (197)$$

и, стало быть,

$$\varphi'(z) = \bar{\varphi}'(0) - \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z}. \quad (198)$$

Складывая (196) и (198), находим, что

$$\varphi'(z) - \varphi'(0) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t^2} \right]. \quad (199)$$

Функция $\psi(z)$ определяется по формулам (193) и (199) в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \bar{\varphi}(0) + \frac{1}{2\pi i z} \left[\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t^2} \right]. \quad (200)$$

Подставляя выражения $\bar{\varphi}(0) - \psi(0)$, $\bar{\varphi}(\bar{z})$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ из формул (195), (197), (198) и (200) в формулу (185), получаем выражение $w(z)$ в квадратурах:

$$w(z) = \frac{1-z\bar{z}}{2\pi i z} \left[\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t^2} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t},$$

а $p(x_1, x_2)$ определяется формулой (188) с помощью уже найденной по формуле (198) функции $\varphi'(z)$.

3. Плоскопараллельное стационарное безвихревое движение невязкой жидкости. Считая стационарное течение невязкой жидкости *безвихревым*, вместо (177) и (178) будем иметь

$$q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (201)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho q_2) = 0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = 0. \quad (202)$$

Уравнения (201) равносильны равенству

$$\frac{1}{2} dq^2 = -\frac{dp}{\rho}, \quad (203)$$

где через q^2 обозначен, как и в п. 1 настоящего параграфа, скалярный квадрат $qq = |q|^2$ скорости q .

С учетом (176) равенство (203) принимает вид

$$\frac{1}{2} dq^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dq} dq,$$

откуда в результате интегрирования находим

$$\frac{1}{2} q^2 = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho, \quad (204)$$

где ρ_0 —значение ρ , соответствующее $q=0$. Равенство (204) известно под названием *уравнения Бернулли*.

Из уравнения Бернулли видно, что плотность ρ является функцией модуля $|q|$ скорости q :

$$\rho = \rho(|q|), \quad (205)$$

а величина

$$C^2 = \frac{dp}{dq} = -\frac{\rho |q|}{\rho'(|q|)} \quad (206)$$

имеет размерность скорости. Величина C называется *местной скоростью звука*, а безразмерная величина

$$M = \frac{|q|}{C} \quad (207)$$

— *числом Маха*. Линия на плоскости переменных x_1, x_2 , вдоль которой $M=1$, называется *звуковой линией*, а значение $|q|=|q_k|$, для которого $M=1$, — *критической скоростью*.

В зависимости от того, будет ли $M < 1$ или $M > 1$, течение называется соответственно *дозвуковым* или *сверхзвуковым*. Если же течение происходит в области, достаточно близкой к звуковой линии и содержащей эту линию, то такое течение называется *околозвуковым* или *трансзвуковым*.

Введем в рассмотрение функции $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$, через которые q_1 и q_2 выражаются в виде

$$q_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad q_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (208)$$

Определенные по формулам (208) функции q_1 и q_2 , очевидно, удовлетворяют обоим уравнениям (202), причем

$$q^2 = (\text{grad } \varphi)^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (\text{grad } \psi)^2. \quad (209)$$

Функции φ и ψ называются соответственно *потенциалом скорости* и *функцией тока*. Они, в силу (208), связаны между собой уравнениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0. \quad (210)$$

Поскольку ρ является функцией $|q|$, система уравнений (210) является линейной лишь для несжимаемой жидкости, т. е. когда $\rho = \rho_0$, и в этом случае она представляет собой систему Коши—Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0. \quad (211)$$

Для несжимаемой жидкости без ограничения общности, очевидно, можно считать, что $\rho = 1$.

Аналитическая функция $F(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$ комплексного переменного z называется *комплексным потенциалом*. Когда она известна в области плоскопараллельного стационарного течения безвихревой, несжимаемой невязкой жидкости, по формулам

$$q_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad q_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (212)$$

находим скорость q , записанную в комплексной форме:

$$q_1 - iq_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = F'(z),$$

а для определения давления $p(x_1, x_2)$ достаточно проинтегрировать полный дифференциал (203), записанный в

виде

$$dp = -\frac{1}{2} d |F'(z)|^2.$$

Плоскости комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$ и $w = F'(z)$ принято называть соответственно *физической плоскостью* и *плоскостью годографа*, а плоскость переменного F — *плоскостью комплексного потенциала*.

Линии уровня на физической плоскости

$$\varphi(x_1, x_2) = \text{const} \quad (213)$$

и

$$\psi(x_1, x_2) = \text{const} \quad (214)$$

в точках их пересечения ортогональны, так как в силу (211)

$$\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = 0. \quad (215)$$

В каждой точке кривой (214) в силу (212) имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x_1}{\partial \psi / \partial x_2} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Следовательно, линии уровня (214) являются линиями тока и название функции тока для $\psi(x_1, x_2)$ вполне оправдано.

На основании (215) заключаем, что вдоль кривых (213) движения не происходит, поэтому они называются эквипотенциальными линиями, а функция $\varphi(x_1, x_2)$ — потенциалом скорости.

Из равенств (212) следует гидромеханический смысл модуля и аргумента производной $F'(z)$ аналитической функции $F(z)$ комплексного переменного. А именно, $|F'(z)|$ представляет собой модуль скорости $|q|$, а $\arg F'(z)$ — взятый с обратным знаком угол, составленный вектором скорости q с положительным направлением действительной оси. Функция $F'(z)$ называется комплексным потенциалом скорости.

Пусть D — произвольная односвязная область в плоскопараллельном потоке с гладкой границей Γ , а функция w определена в $D \cup \Gamma$ формулой

$$w = q_1 - iq_2 = F'(z). \quad (216)$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\Gamma} w dz = J_1 + iJ_2, \quad (217)$$

где

$$J_1 = \int_{\Gamma} q_1 dx_1 + q_2 dx_2, \quad J_2 = \int_{\Gamma} q_1 dx_2 - q_2 dx_1.$$

Числа J_1 и J_2 называются соответственно *циркуляцией жидкости вдоль Γ* и *расходом жидкости через Γ* .

Пусть $y = (y_1, y_2)$ — радиус-вектор точки на Γ , а $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dy}{dv}$ — единичные векторы положительно направленной касательной и внешней относительно D нормали к Γ в точке y . В силу формулы Грина—Остроградского

$$J_1 = \int_{\Gamma} q \frac{dy}{ds} ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial v} ds = - \iint_D \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$

и

$$J_2 = \int_{\Gamma} q \frac{dy}{dv} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial v} ds = \iint_D \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Отсутствие вихря и несжимаемость потока в силу (202) означают, что в потоке всюду выполняются равенства

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = 0.$$

Если аналитическая функция $F'(z)$ не имеет особых точек в потоке, то $J=0$ для любого замкнутого гладкого жорданова контура Γ . Когда же $J \neq 0$, это показывает, что функция $F'(z)$ имеет особые точки в потоке, причем $J_1 \neq 0$ означает, что особая точка является причиной возникновения вихря, а $J_2 \neq 0$ означает, что особая точка является местом либо стока, либо источника жидкости.

Конечно, может случиться, что в потоке существует твердое включение, как это бывает, например, при обтекании твердого цилиндра плоскопараллельным стационарным безвихревым потоком несжимаемой идеальной жидкости.

Переходим к рассмотрению нескольких примеров плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой жидкости.

4. Изучение потока при наличии полюсов и нулей u комплексного потенциала скорости. Когда комплексный потенциал скорости представляет собой аналитическую функцию всюду в односвязной области D , занятой пото-

ком, то, как уже было отмечено в предыдущем пункте, определенное по формуле (217) число $J=0$. Однако это число может оказаться отличным от нуля при наличии особых точек функции $w(z)$ в области D . В настоящем пункте речь в основном будет идти о поведении потока вблизи простого полюса функции $w(z)$. Без ограничения общности будем считать, что точка $z=0$ принадлежит области D и является единственной особой точкой — простым полюсом аналитического в этой области комплексного потенциала скорости. Поведение течения вблизи точки $z=0$ по существу близко к поведению потока, для которого

$$w = \frac{a_{-1}}{z}, \quad (218)$$

ибо в лорановском разложении вблизи точки $z=0$ комплексного потенциала скорости главным является именно слагаемое $\frac{a_{-1}}{z}$ (см. § 2.2 гл. V).

Итак, будем считать, что в формуле (216) функция w имеет вид (218). В силу формулы (217) число $\frac{J}{2\pi i}$ является вычетом функции w относительно точки $z=0$, и оно вычисляется по формуле (43) гл. V, т. е.

$$J = 2\pi i a_{-1}. \quad (219)$$

Примем обозначение

$$a_{-1} = \frac{J_1 + iJ_2}{2\pi i}.$$

Тогда комплексный потенциал $F(z)$ можно записать в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} (J_2 - iJ_1) \log z = \frac{1}{2\pi} (J_2 - iJ_1) (\log |z| + i \arg z),$$

т. е.

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} [J_2 \log |z| + J_1 \arg z] \quad (220)$$

и

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} [J_2 \arg z - J_1 \log |z|]. \quad (221)$$

Когда $J_2=0$ и $J_1 \neq 0$, как уже было отмечено в предыдущем пункте, точка $z=0$ является причиной возникновения вихря. В силу (220) и (221) в этом случае

эквипотенциальные линии

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} J_1 \arg z = \text{const}$$

представляют собой семейство лучей, выходящих из точки $z=0$, а линии тока

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} J_1 \log |z| = \text{const}$$

представляют собой семейство концентрических окружностей

$$|z| = \exp \left[-\frac{2\pi}{J_1} \text{const} \right],$$

которые к тому же являются траекториями вихревого движения вокруг точки $z=0$.

Пусть теперь $J_2 \neq 0$, $J_1 = 0$, т. е.

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} J_2 \log |z|, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} J_2 \arg z.$$

В этом случае картина расположения эквипотенциальных линий и линий тока по сравнению с предыдущим случаем обратная: выходящие из точки $z=0$ лучи являются линиями тока, а концентрические окружности

$$|z| = \exp \left[\frac{2\pi}{J_1} \text{const} \right]$$

— эквипотенциальными линиями, причем завихрения не происходит, а точка $z=0$ выступает местом *источника* или *стока* в зависимости от того, будет ли $J_2 > 0$ или $J_2 < 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $J_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$. В этом случае в силу (220) и (221) эквипотенциальные линии и линии тока записываются в виде уравнений

$$|z| = \exp \left[\frac{2\pi \text{const} - J_1 \arg z}{J_2} \right]$$

и

$$|z| = \exp \left[\frac{J_2 \arg z - 2\pi \text{const}}{J_1} \right]$$

и представляют собой два семейства *логарифмических спиралей*, ортогональных между собой в каждой точке, отличной от $z=0$.

В случае кратных полюсов, если коэффициент a_{-1} в лорановском разложении функции $w(z)$ отличен от нуля, число $J \neq 0$, однако картина поведения течения вблизи кратных полюсов гораздо сложнее, чем в рассмотренных выше случаях.

Может случиться, что аналитическая в области D функция $w = F'(z)$ в отдельных точках области D обращается в нуль. Вблизи каждого нуля $z = z_0 \in D$ отображение, осуществляемое функцией $F(z)$, перестает быть конформным. Нарушение взаимной однозначности между точками образа и прообраза выражается в том, что *через точку z_0 проходит несколько линий тока и эквипотенциальных линий. Если точка $z = z_0$ является нулем кратности n для функции $w(z)$, то через эту точку проходит по $n+1$ эквипотенциальных линий и линий тока.* В самом деле, вблизи точки z_0 функцию $F(z) - F(z_0)$ можно представить в виде

$$F(z) - F(z_0) = \frac{1}{(n+1)!} |F^{(n+1)}(z_0)| |z - z_0|^{n+1} e^{i[(n+1)\theta - \theta_0]} + F_1(z), \quad (222)$$

где $\theta_0 = \arg F^{(n+1)}(z_0)$, а функция $F_1(z)$ в точке z_0 имеет нуль порядка выше $n+1$. Из формулы (222) следует, что при обходе точкой z вокруг z_0 один раз как действительная $\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)$, так и мнимая $\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)$ части функции $F(z) - F(z_0)$ ровно $2n+2$ раз меняют знак. Более того, касательные в точке z_0 проходящих через z_0 линий тока (эквипотенциальных линий) полный угол делят на $n+1$ равных частей. Нули z_0 функции $F'(z)$ называются *критическими точками потока*.

5. Обтекание цилиндра плоскопараллельным стационарным, безвихревым потоком несжимаемой жидкости. В плоскостях, перпендикулярных образующему цилиндра, картина течения одинакова. Мы ограничимся рассмотрением обтекания кругового цилиндра единичного радиуса, когда одной из указанных плоскостей является плоскость комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, пересекающаяся с обтекаемым цилиндрическим телом по кругу $|z| \leq 1$.

Будем считать, что скорость q потока на бесконечности конечна, параллельна действительной оси и что

$$q(\infty) = q_0 > 0. \quad (223)$$

Так как функция $F'(z)$ аналитична вне круга $|z| \leq 1$ и в силу (223) имеет устранимую особенность на беско-

нечности, то комплексный потенциал на расширенной плоскости переменного z вне круга $|z| \leq 1$ может быть представлен в виде ряда (см. § 2.3 гл. V)

$$F(z) = q_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}. \quad (224)$$

В представлении (224) слагаемое a_0 пропущено по той причине, что оно не влияет на скорость $q(z)$ движения.

Так как поток обтекает круг $|z| \leq 1$ извне, то окружность должна быть линией тока, т. е.

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \operatorname{Im} F(t) = 0, \quad t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (225)$$

Подставляя выражение (224) в (225), будем иметь

$$\operatorname{Im} i \left[q_0 e^{i\vartheta} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k e^{-ik\vartheta} \right] = 0,$$

т. е. $a_k = 0$, $k = 2, 3, \dots$, и $a_1 = q_0$. Следовательно, из (224) получаем

$$F(z) = q_0 \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (226)$$

На основании (226) заключаем, что функция тока

$$\psi(x_1, x_2) = q_0 \left(|z| - \frac{1}{|z|} \right) \sin \vartheta,$$

а внешность физической плоскости вне круга $|z| < 1$ покрыта семейством линий тока, заданных уравнением

$$\left(|z| - \frac{1}{|z|} \right) \sin \vartheta = c = \text{const}. \quad (227)$$

Из (225) следует, что в зависимости от того, будет ли $c > 0$ или $c < 0$, линии тока расположены соответственно в верхней или в нижней полуплоскости и представляют собой алгебраические кривые третьего порядка

$$(|z|^2 - 1)x_2 = c|z|^2, \quad |z|^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (228)$$

На основании (228) заключаем, что $c = 0$ соответствует линии тока: окружность $|z| = 1$ и участки действительной оси $x_2 = 0$ вне круга $|z| < 1$. Как и следовало ожидать, точки $z = -1$, $z = 1$ являются критическими для отображения, осуществляемого функцией

$$\varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2) = F(z).$$

Однозначность функции $F(z)$ в потоке всюду следует из того, что циркуляция вдоль каждой гладкой замкнутой линии, лежащей в ней (в том числе вдоль окружности $|z|=1$), равна нулю.

Допуская неоднозначность функции $F(z)$, в простейшем случае вместо (226) имели бы

$$F(z) = \frac{J}{2\pi i} \log z + q_0 \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad J = J_1 + iJ_2. \quad (229)$$

Поток, соответствующий комплексному потенциалу

$$\bar{\varphi}(x, y) + i\psi(x, y) = \frac{J}{2\pi i} \log z, \quad (230)$$

был изучен в предыдущем пункте.

Поток, соответствующий комплексному потенциалу (229), получается в результате сложения потоков, соответствующих комплексным потенциалам (226) и (230).

Поскольку в силу (229)

$$F'(z) = \frac{J}{2\pi i} \frac{1}{z} + q_0 - \frac{q_0}{z^2},$$

на плоскости комплексного переменного z имеются две критические точки z_1, z_2 , являющиеся корнями квадратного уравнения

$$z^2 + \frac{J}{2q_0\pi i} z - 1 = 0,$$

т. е.

$$z_1 = \frac{-J}{4q_0\pi i} + \sqrt{1 - \frac{J^2}{16q_0^2\pi^2}}, \quad z_2 = \frac{-J}{4q_0\pi i} - \sqrt{1 - \frac{J^2}{16q_0^2\pi^2}}.$$

При подходящем подборе J и q_0 обе эти точки будут лежать в области, занятой потоком, т. е. вне круга $|z| < 1$.

6. Подъемная сила. Изучение полета крыла в атмосфере при предположении, что оно представляет собой бесконечный цилиндр, математически может быть моделировано в терминах плоскопараллельного движения жидкости, обтекающей цилиндр. Когда скорость полета значительно ниже скорости звука, атмосферу можно принять за несжимаемую идеальную жидкость и задачу свести к исследованию обтекания плоской замкнутой кривой Γ (не обязательно формы окружности) плоскопараллельным потоком. Гидромеханическая картина на этот раз будет гораздо сложнее, чем в случае, когда Γ — окружность.

Зависимость (203) между давлением p и скоростью q запишем в виде

$$p = -\frac{\rho}{2} q^2 + c, \quad (231)$$

где c — произвольная постоянная.

Единичные векторы внутренней относительно D нормали и положительно направленной касательной к Γ в точке z обозначим соответственно через $\frac{dz}{dv}$, $\frac{dz}{ds}$.

Так как для элемента ds дуги Γ имеем $ds = dz \left| \frac{dz}{ds} \right|$, то

$$\arg dz = \arg \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = e^{i \arg dz}, \quad \frac{dz}{dv} = e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{dz}{ds} \quad (232)$$

и

$$\frac{\overline{dz}}{ds} = e^{-i \arg dz}. \quad (233)$$

По данному в п. 1 настоящего параграфа определению идеальной жидкости, давление p на элемент ds направлено по внутренней относительно D нормали к Γ . Поэтому в силу (232) для элемента силы, действующей на ds при обтекании, в комплексной записи имеем

$$p \frac{dz}{dv} = p e^{i \left(\arg dz + \frac{\pi}{2} \right)} = i p \frac{dz}{ds}. \quad (234)$$

В силу (216) имеем

$$q^2 = |w|^2. \quad (235)$$

Контур Γ области D является линией тока. Поэтому вдоль нее вектор скорости q имеет направление касательной и, стало быть, опять в силу (216)

$$\overline{w}(z) = |w| \frac{dz}{ds},$$

т. е.

$$|w| = \overline{w}(z) e^{-i \arg dz}. \quad (236)$$

Внося (236) в (235), получаем

$$q^2 = [\overline{w}(z)]^2 e^{-2i \arg dz}. \quad (237)$$

Умножая равенство (231) на $i \frac{dz}{ds}$, с учетом (237) будем иметь

$$ip \frac{dz}{ds} = -\frac{\rho i}{2} [\bar{w}(\bar{z})]^2 e^{-2i \arg dz} \frac{dz}{ds} + ic \frac{dz}{ds}. \quad (238)$$

Считая, что циркуляция в потоке отсутствует, из (238) в результате интегрирования по Γ с учетом (232) и (233) находим выражение суммарной силы (X, Y) , действующей на Γ , в комплексной записи:

$$X + iY = i \int_{\Gamma} p dz = -\frac{\rho i}{2} \int_{\Gamma} [\bar{w}(\bar{z})]^2 d\bar{z},$$

или

$$X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_{\Gamma} [w(z)]^2 dz. \quad (239)$$

Вектор (X, Y) , компоненты которого определяются по формуле (239), называется *подъемной силой*, действующей на Γ .

7. Плоское электростатическое поле. Под плоским электростатическим полем понимается плоская среда, в каждой точке P которой задан вектор E —*сила поля*. Введем декартовы ортогональные координаты x_1, x_2 точки P и обозначим через E_{x_1} и E_{x_2} компоненты вектора E .

Пусть d —произвольная односвязная область поля с гладкой границей σ и площадью $|d|$. Как и в п. 3 настоящего параграфа, для единичных векторов внешней нормали и положительно направленной касательной к σ в точке с радиусом-вектором $y = (y_1, y_2)$ примем обозначения

$$\frac{dy}{dv} = \left(\frac{dy_1}{dv}, \frac{dy_2}{dv} \right), \quad \frac{dy}{ds} = \left(\frac{dy_1}{ds}, \frac{dy_2}{ds} \right). \quad (240)$$

Величины N и A , определенные по формулам

$$N = \int_{\sigma} E \frac{dy}{dv} ds, \quad A = \int_{\sigma} E \frac{dy}{ds} ds, \quad (241)$$

носят названия соответственно *потока* через σ и *циркуляции* вдоль σ поля. При предположении непрерывности вектора E интегралы (241) существуют.

Дополнительно потребуем, чтобы вектор E был непрерывно дифференцируемым. В результате преобразования

криволинейных интегралов (241) по формуле Грина—Остроградского (8) гл. IV получаем

$$\begin{aligned} N &= \iint_d \left(\frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \\ A &= \iint_d \left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (242)$$

Стягивая область d в точку $P(x_1, x_2)$, из (242) в пределе будем иметь

$$\lim_{d \rightarrow P} \frac{N}{|d|} = \frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2} = \operatorname{div} E \quad (243)$$

и

$$\lim_{d \rightarrow P} \frac{A}{|d|} = \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_2} = \operatorname{rot} E. \quad (244)$$

По определению, $N = 4\pi e$, $\lim_{d \rightarrow P} \frac{N}{|d|} = 4\pi\rho$, где e —суммарный заряд, имеющийся в d , а ρ —поверхностная плотность распределения зарядов в точке P .

В силу (243) имеем

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho. \quad (245)$$

В случае отсутствия зарядов в поле $\rho = 0$ и из (245) получаем

$$\operatorname{div} E = 0. \quad (246)$$

Величина A представляет собой *работу* силы E на пути σ . Так как поле статическое, вихрь отсутствует и, стало быть, $A = 0$. Поэтому из формулы (244) имеем

$$\operatorname{rot} E = 0. \quad (247)$$

Выполнение равенств (246) и (247) означает, что выражения $-E_{x_2}dx_1 + E_{x_1}dx_2$ и $E_{x_1}dx_1 + E_{x_2}dx_2$ являются полными дифференциалами, т. е. существуют такие функции $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$, что

$$du_1 = -E_{x_2}dx_1 + E_{x_1}dx_2, \quad du_2 = E_{x_1}dx_1 + E_{x_2}dx_2. \quad (248)$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Эти равенства не что иное, как условие (CR) из гл. III. Следовательно, выражение $u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2) = F(z)$ представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ в электростатическом поле всюду, где отсутствуют заряды. Действительная и мнимая части функции $F(z)$ называются соответственно *силовой функцией* и *потенциалом поля*, а сама функция $F(z)$ — *комплексным потенциалом поля*.

Функция

$$u_1(z, t) = \log \frac{1}{|z - t|}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad t = t_1 + it_2, \quad (249)$$

представляет собой потенциал поля единичного заряда, помещенного в точке t . Компоненты силы E поля, соответствующего потенциалу (249), в силу (248) вычисляются по формулам

$$E_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{x_2 - t_2}{|z - t|^2}, \quad E_{x_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{x_1 - t_1}{|z - t|^2}.$$

В конце § 1.10 настоящей главы было отмечено, что функция $u_1(z, t)$, заданная формулой (249), представляет собой элементарное решение уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными. Оно позволяет строить всевозможные гармонические функции с двумя независимыми переменными.

Пусть теперь D — область плоскости комплексного переменного z с гладкой границей (не обязательно односвязная), а $\rho(t)$ и $\mu(t)$ — действительные интегрируемые функции, заданные на $\partial D = \Gamma$.

Определенные по формулам

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \rho(t) \frac{d}{dv_t} \log \frac{1}{|t - z|} ds_t \quad (250)$$

и

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(t) \log \frac{1}{|t - z|} ds_t \quad (251)$$

функции гармоничны во всех конечных точках плоскости комплексного переменного z , не лежащих на Γ . Они называются соответственно *потенциалами двойного и простого слоя полей, созданных зарядами, распределенными по Γ с плотностями $\rho(t)$ и $\mu(t)$* .

Поскольку

$$\frac{d}{dv_t} = i \frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{d\bar{t}}{ds} \frac{\partial}{\partial \bar{t}},$$

формулу (250) можно переписать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(t) dt}{t-z}.$$

При $\mu = \frac{d\rho}{ds} = \rho'_s$ в силу (251) и очевидного равенства

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \rho'_s \log |t-z| ds_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \rho(t) \frac{d}{ds_t} \log |t-z| ds_t =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(t) dt}{t-z}$$

следует, что для интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(t) dt}{t-z}$$

имеет место представление

$$F(z) = u(z) + iv(z). \quad (252)$$

В формуле (252) потенциал двойного слоя $u(z)$ выступает в роли силовой функции электростатического поля зарядов, распределенных по Γ с плотностью $\rho(t)$, и, имея решение задачи Дирихле

$$u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

мы в состоянии найти как плотность ρ на Γ , так и силовую функцию $F(z)$ внутри D . Потенциал же простого слоя $v(z)$ выступает в роли потенциала поля, и он решает задачу Неймана

$$\frac{dv}{dv} = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Поскольку в силу второго из равенств (248) компоненты силы поля даются формулами $E_{x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$, $E_{x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}$, то на основании первого из равенств (241) заключаем, что заданная на Γ функция $g(t)$ должна удов-

летворять условию (см. § 1.9 настоящей главы)

$$\int_{\Gamma} g(t) ds = 0.$$

8. Автодуальные калибровочные поля. В общей теории поля за последнее время значительное внимание уделяется математическому моделированию ряда задач в терминах так называемых *автодуальных калибровочных полей*. Изучение $SU(2)$ -калибровочных полей приводится к построению точных решений нелинейной системы уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \Phi \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (253)$$

где Φ — действительная, а ρ — комплексная искомые функции действительных переменных x_1, x_2, x_3, x_4, y и z — комплексные переменные

$$\sqrt{2} y = x_1 + ix_2, \quad \sqrt{2} z = x_3 - ix_4,$$

дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ определены по формулам

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

а черта над буквами означает операцию комплексного сопряжения.

Класс точных решений системы (253), очевидно, дает пара функций Φ, ρ , являющаяся решением линейной системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Другой класс точных решений системы (253) дается формулами

$$\Phi = \Phi(u), \quad \rho = \rho(u), \quad (254)$$

где u — решение уравнения Лапласа в комплексной записи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad (255)$$

а φ и ρ удовлетворяют равенствам

$$\varphi\varphi'' - \varphi'^2 + \rho'\bar{\rho}' = 0 \quad (256)$$

и

$$\varphi\rho'' - 2\rho'\varphi' = 0. \quad (257)$$

В справедливости этого утверждения убеждаемся непосредственной проверкой.

Равенства (256) и (257) представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно φ и ρ . Чтобы найти решение этой системы, заметим, что уравнение (257) эквивалентно уравнению

$$\rho' = c\varphi^2, \quad (258)$$

где c — произвольная комплексная постоянная.

Внося выражение ρ' из (258) в (256), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения φ :

$$\varphi\varphi'' - \varphi'^2 + c\bar{c}\varphi^4 = 0. \quad (259)$$

Приняв обозначение

$$\varphi' = p(\varphi), \quad (260)$$

перепишем уравнение (259) в виде

$$\varphi p p' - p^2 + c\bar{c}\varphi^4 = 0. \quad (261)$$

В результате замены искомой функции p по формуле

$$v = p^2 \quad (262)$$

для новой неизвестной функции v из (261) получаем линейное уравнение $\varphi v' - 2v + 2c\bar{c}\varphi^4 = 0$, решение которого дается формулой

$$v = \varphi^2 (c_1 - c\bar{c}\varphi^2), \quad (263)$$

где c_1 — новая произвольная постоянная.

Из (260), (262) и (263) следует, что

$$\varphi' = \pm |c| \varphi \sqrt{a - \varphi^2}, \quad (264)$$

где

$$a = \frac{c_1}{|c|^2}. \quad (265)$$

Из (264) и (265) находим

$$\varphi^2 = \frac{c_1}{|c|^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{c_1} u}. \quad (266)$$

Так как u — произвольное решение уравнения Лапласа (255), формулу (266) можно переписать в виде

$$\varphi^2 = \frac{1}{|c|^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}. \quad (267)$$

Из равенства (267) получается класс точных решений уравнения (259) формулами

$$\varphi = \frac{1}{|c| \operatorname{ch} u}, \quad \Psi = -\frac{1}{|c| \operatorname{ch} u}. \quad (268)$$

В силу (267) и (258) находим, что

$$\rho = \frac{1}{c} \operatorname{th} u. \quad (269)$$

На основании (254) заключаем, что определенные формулами (268) и (269) функции φ и ρ представляют собой класс точных решений системы (253), содержащий произвольную гармоническую функцию u переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и произвольную комплексную постоянную c .

Система уравнений автодуальных $SU(3)$ калибровочных полей в матричной записи имеет вид

$$\bar{\nabla} (P^{-1} \nabla P) = 0, \quad (270)$$

где дифференциальный оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, P — эрмитова матрица

$$P = \begin{vmatrix} \Phi_1^{-1} & \bar{\rho}_1 \Phi_1^{-1} & \bar{\rho}_3 \Phi_1^{-1} \\ \rho_1 \Phi_1^{-1} & \rho_1 \bar{\rho}_1 \Phi_1^{-1} + \Phi_1 \Phi_2^{-1} & \rho_1 \bar{\rho}_3 \Phi_1^{-1} + \bar{\rho}_2 \Phi_1 \Phi_2^{-1} \\ \rho_3 \Phi_1^{-1} & \bar{\rho}_1 \rho_3 \Phi_1^{-1} + \rho_2 \Phi_1 \Phi_2^{-1} & \rho_3 \bar{\rho}_3 \Phi_1^{-1} + \rho_2 \bar{\rho}_2 \Phi_1 \Phi_2^{-1} + \Phi_2 \end{vmatrix} \quad (271)$$

с единичным детерминантом, Φ_1, Φ_2 — действительные и ρ_1, ρ_2, ρ_3 — комплексные скалярные функции, черта над буквами — знак комплексного сопряжения, а $\Phi_k^{-1} = 1/\Phi_k$, $k = 1, 2$.

Систему (270) с учетом (271) удобнее записать в форме

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 - \Phi_1^{-1} \nabla \Phi_1 \bar{\nabla} \Phi_1 + \Phi_2 \Phi_1^{-1} \nabla \rho_1 \bar{\nabla} \bar{\rho}_1 + \Phi_2^{-1} \Omega \bar{\Omega} &= 0, \\ \Delta \Phi_2 - \Phi_2^{-1} \nabla \Phi_2 \bar{\nabla} \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2^{-1} \nabla \rho_2 \bar{\nabla} \bar{\rho}_2 + \Phi_1^{-1} \Omega \bar{\Omega} &= 0, \\ \Delta \rho_3 - \rho_3 \Delta \rho_1 - \nabla \rho_1 \bar{\nabla} \rho_2 - (\Phi_1^{-1} \bar{\nabla} \Phi_1 + \Phi_2^{-1} \bar{\nabla} \Phi_2) \Omega &= 0, \\ \Delta \rho_1 + (\Phi_2^{-1} \bar{\nabla} \Phi_2 - 2 \Phi_1^{-1} \bar{\nabla} \Phi_1) \nabla \rho_1 - \Phi_1 \Phi_2^{-2} \Omega \bar{\nabla} \bar{\rho}_2 &= 0, \\ \Delta \rho_2 + (\Phi_1^{-1} \bar{\nabla} \Phi_1 - 2 \Phi_2^{-1} \bar{\nabla} \Phi_2) \nabla \rho_2 + \Phi_2 \Phi_1^{-2} \Omega \bar{\nabla} \bar{\rho}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (272)$$

где

$$\Delta = \nabla \bar{\nabla} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right), \quad \Omega = \nabla \rho_3 - \rho_2 \nabla \rho_1.$$

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что функции $\Phi_1 = \Phi_1(u)$, $\Phi_2 = \Phi_2(u)$, $\rho_1 = \rho_1(u)$, $\rho_2 = \rho_2(u)$, $\rho_3 = \rho_3(u)$, удовлетворяющие системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1' - \Phi_1^{-1} \Phi_1'^2 + \Phi_1^{-1} \Phi_2 \rho_1' \bar{\rho}_1' + \Phi_2^{-1} (\rho_3' - \rho_2 \rho_1') (\bar{\rho}_3' - \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1') &= 0, \\ \Phi_2' - \Phi_2^{-1} \Phi_2'^2 + \Phi_2^{-1} \Phi_1 \rho_2' \bar{\rho}_2' + \Phi_1^{-1} (\rho_3' - \rho_2 \rho_1') (\bar{\rho}_3' - \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1') &= 0, \\ \rho_3'' - \rho_2 \rho_1'' - \rho_1' \rho_2' - (\Phi_1^{-1} \Phi_1' + \Phi_2^{-1} \Phi_2') (\rho_3' - \rho_2 \rho_1') &= 0, \\ \rho_1' + (\Phi_2^{-1} \Phi_2' - 2\Phi_1^{-1} \Phi_1') \rho_1' - \Phi_1 \Phi_2^{-2} (\rho_3' - \rho_2 \rho_1') \bar{\rho}_2' &= 0, \\ \rho_2' + (\Phi_1^{-1} \Phi_1' - 2\Phi_2^{-1} \Phi_2') \rho_2' + \Phi_2 \Phi_1^{-2} (\rho_3' - \rho_2 \rho_1') \bar{\rho}_1' &= 0, \end{aligned} \quad (273)$$

при любой действительной гармонической функции $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ действительных переменных x_1, x_2, x_3, x_4 дают класс точных решений системы (272).

В предположении

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \quad (274)$$

из первых двух уравнений системы (273) следует равенство

$$\rho_1' \bar{\rho}_1' = \rho_2' \bar{\rho}_2', \quad (275)$$

а третье уравнение этой же системы равносильно равенству

$$\rho_3' - \rho_2 \rho_1' = c \Phi^2, \quad (276)$$

где c — произвольная комплексная постоянная.

На основании равенств (274) и (275) из последних двух уравнений системы (273) получаем

$$\rho_1' \rho_2' = c_1 \Phi^2, \quad (277)$$

где c_1 — также произвольная комплексная постоянная.

В силу (274) — (277) каждое из первых двух уравнений системы (273) редуцируется к равенству

$$\Phi'' - \Phi^{-1} \Phi'^2 + |c_1| \Phi^2 + |c|^2 \Phi^3 = 0, \quad (278)$$

а из последних двух уравнений этой же системы имеем

$$\frac{\rho_1'}{\rho_2} = \exp[2|c|e^{i(\arg c - \arg c_1)} \int \Phi(u) du]. \quad (279)$$

Равенство (279) совместимо с равенством (275) при условии, что

$$\arg c - \arg c_1 = \pi/2 + k\pi, \quad k=0, \pm 1, \dots \quad (280)$$

Принимая $k=0$ в равенстве (280), из (279) получаем

$$\frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \exp \left[2 |c| i \int \Phi(u) du \right]. \quad (281)$$

Общее решение уравнения (278) имеет вид

$$\Phi = \frac{2\omega^2\delta}{(|c|^2\omega^2 + |c_1|^2)e^{-\omega u} + 2|c_1|\delta + \delta^2 e^{\omega u}}, \quad (282)$$

где ω и δ — произвольные действительные постоянные.

Из (277) и (281) следует, что

$$\rho'_1 = \sqrt{|c_1|} \exp[1/2 i \arg c_1] \Phi \exp[i |c| \int \Phi(u) du] \quad (283)$$

и

$$\rho'_2 = \sqrt{|c_1|} \exp[1/2 i \arg c_1] \Phi \exp[-i |c| \int \Phi(u) du]. \quad (284)$$

Подставляя выражение Φ из формулы (282) в правые части (283) и (284), в результате интегрирования находим функции ρ_1 и ρ_2 , а функция ρ_3 получается интегрированием равенства (276), в которое внесены уже полученные выражения $\Phi(u)$, $\rho_1(u)$ и $\rho_2(u)$.

В случае, когда $\rho_1 = \rho_2 = 0$, система (272) переходит в систему (253), класс точных решений которой [в силу (276) и (282)] дается формулами

$$\Phi = \Phi = \frac{2\omega^2\delta}{|c|^2\omega^2 e^{-\omega u} + \delta^2 e^{\omega u}} \quad (285)$$

и

$$\rho = \rho_3 = c \int \Phi^2(u) du. \quad (286)$$

При $\omega=1$, $\delta=|c|$ решения (285) и (286) переходят в решения (268) и (269) системы (253).

Заметим, что в силу (283) и (284) равенство $\rho_1 = -i\bar{\rho}_2$ имеет место лишь при $\arg c_1 = -\pi/2$.

Приведенным здесь способом можно строить и другие классы точных решений системы (272), но уже без предположения (274).

9. Точные решения лоренц-ковариантных уравнений. К лоренц-ковариантным относятся нелинейные уравнения

в частных производных вида

$$\square u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \right) u = 0, \quad (287)$$

где t — время, $x_1, \dots, x_m$ — действительные пространственные переменные, $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_n)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, — искомый, вообще говоря, комплексный вектор,

а $\square$ — даламбериан: $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

В случае $m=1$, $n=3$ и действительного $u(t, x)$ в обозначениях $x = x_1$, $\xi = t + x$, $\eta = t - x$, $u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) = q(\xi, \eta)$ уравнение (287) можно записать в виде

$$q_{\xi\eta} + (q_{\xi} \cdot q_{\eta}) q = 0. \quad (288)$$

Построение точных решений этого уравнения в предположениях $q^2 = q_{\xi}^2 = q_{\eta}^2 = 1$, $q_{\xi} \cdot q_{\eta} = \cos \alpha$ сводится к синус Гордона уравнению $\alpha_{\xi\eta} + \sin \alpha = 0$.

Примененный в п. 8 способ позволяет построить широкий класс точных решений уравнения (287) и, в частности, новый класс точных решений уравнения (288).

Относительно вектора $u(t, x)$ обычно делается предположение, что скалярное произведение

$$u \cdot \bar{u} = 1. \quad (289)$$

Уравнение (287) имеет класс точных решений вида

$$u = u(v), \quad (290)$$

где вектор $u(v)$ является решением системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' + (u' \cdot \bar{u}') u = 0, \quad (291)$$

а $v(x, t)$ — произвольное действительное скалярное решение волнового уравнения

$$\square v = 0. \quad (292)$$

Ввиду того, что в силу (290) уравнение (287) принимает вид

$$u' \square v + [u'' + (u' \cdot \bar{u}') u] \left(v_t^2 - \sum_{k=1}^m v_{x_k}^2 \right) = 0,$$

в справедливости сформулированного утверждения сразу убеждаемся на основании (291) и (292).

При дополнительном предположении $u' \cdot \bar{u}' = 1$ уравнение (291) эквивалентно уравнению $u'' + u = 0$, решением которого, очевидно, является вектор

$$u = ce^{iv}, \quad (293)$$

где c — произвольный комплексный постоянный n -мерный вектор, подчиненный ограничению $c \cdot \bar{c} = 1$.

В обозначениях для действительных векторов $u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^n)$, $u_2 = (u_2^1, \dots, u_2^n)$ в представлении $u_1 + iu_2 = u$ уравнение (287) записывается в виде системы $2n$ действительных уравнений

$$\square u_l + \sum_{s=1}^2 \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_k} \right)^2 \right] u_l = 0, \quad l = 1, 2, \quad (294)$$

класс частных решений которой в силу (293) можно записать в виде $u_1 = c \cos v$, $u_2 = c \sin v$, где каждая компонента вектора c равна $1/\sqrt{n}$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что решение системы (294) дают также векторы

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} [\cos(v + \alpha_1), \dots, \cos(v + \alpha_n)],$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} [\sin(v + \alpha_1), \dots, \sin(v + \alpha_n)],$$

где α_j , $j = 1, \dots, n$, — произвольные действительные постоянные, а $v(t, x)$ — произвольное действительное решение уравнения (292).

Когда $n = 1$ и $u(t, x) = u_1(t, x)$ — действительная функция, уравнение (287) наряду с постоянным решением $u(t, x) = 1$, удовлетворяющим условию (289), имеет решение $u(t, x)$, определяемое из соотношения $\int_{u_0}^u e^{t^2/2} dt = v$, $u_0 = \text{const.}$

Так как при $n = 1$ действительным решением системы (294) является вектор $u = (u_1, u_2)$ с компонентами $u_1 = \cos(v + \alpha)$, $u_2 = \sin(v + \alpha)$, то при $n = 3$ класс точных действительных решений уравнения (287), удовлетворяющих условию (289), дает вектор $u = (u_1, u_2, u_3)$ с компо-

нентами $u_1 = \cos(v + \alpha)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(v + \alpha)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(v + \alpha)$, причем $u'^2 = 1$.

Точно так же, когда число n компонент действительного вектора u нечетно, т. е. $n = 2N + 1$, система функций

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cos(v + \alpha_j), \quad u_{N-1+j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin(v + \alpha_j), \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ u_{2N-1} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cos(v + \alpha_N), \quad u_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sin(v + \alpha_N), \\ u_{2N+1} &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sin(v + \alpha_N), \end{aligned}$$

где v — произвольное действительное скалярное решение уравнения (292), а $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — произвольные действительные постоянные, дает решение уравнения (287), удовлетворяющее условию (289), причем и на этот раз $u'^2 = 1$.

§ 4. Нелокальные краевые задачи

1. Простейшая нелокальная краевая задача для гармонических функций. Наряду с краевыми задачами, рассмотренными в §§ 1, 2 настоящей главы, определенный интерес представляют так называемые нелокальные краевые задачи. Эти задачи хотя и являются непосредственными обобщениями известных классических краевых задач, однако при изучении вопроса их разрешимости возникают дополнительные трудности.

Пусть D — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ с достаточно гладкой границей $\gamma = \partial D$, а γ_1 — замкнутая простая достаточно гладкая кривая, лежащая в D . Обозначим через $\tau = \mu(t)$, $t \in \gamma$, $\tau \in \gamma_1$, диффеоморфизм между γ и γ_1 .

Простейшая нелокальная краевая задача для гармонических функций может быть сформулирована следующим образом: найти гармоническую в области D функцию $u(z) = u(x, y)$, непрерывную в $D \cup \gamma$ и удовлетворяющую краевому условию

$$u(t) - u[\mu(t)] = f(t), \quad t \in \gamma, \quad (295)$$

где $f(t)$ — заданная действительная функция.

Остановимся на примере этой задачи, когда γ и γ_1 — окружности $|t|=1$, $|t|=\delta$, $0 < \delta < 1$ соответственно, а условие (295) имеет вид

$$u(t) - u(\delta t) = f(t), \quad t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (296)$$

Для простоты будем считать, что $u(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в $D \cup \gamma$.

Применяя формулу Шварца (82) гл. IV для единичного круга D : $|z| < 1$, в силу (296) получаем

$$u(z) - u(\delta z) = v(z), \quad (297)$$

где

$$v(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) f(t) dt. \quad (298)$$

Так как при $z=0$ из (297) мы должны иметь $v(0)=0$, то в силу (298) для разрешимости задачи (296) необходимо выполнение условия

$$\int_{\gamma} f(\vartheta) d\vartheta = 0, \quad f(\vartheta) = f(e^{i\vartheta}). \quad (299)$$

Легко видеть, что это условие является и достаточным для разрешимости задачи (296). В самом деле, выполнение этого условия означает, что

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t} = 0. \quad (300)$$

Складывая равенства (298) и (300), получаем $v(z) = \operatorname{Re} \frac{z}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t(t-z)}$. Поскольку аналитическая функция под

знаком Re в правой части формулы (298) при $z=0$ имеет нуль по меньшей мере первого порядка, из формулы (297) в результате итерации получаем одно из решений $u_0^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(\delta^k z)$ уравнения (297).

Следовательно, при выполнении условия (299) формула $u(z) = c + u_0(z)$, где c — произвольная действительная постоянная, дает все решения задачи (296). Этой формуле, очевидно, можно придать вид

$$u(z) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-\delta^k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

2. Одна нелокальная краевая задача для бигармонических функций. Одну из нелокальных краевых задач для бигармонических функций получим, если к краевому условию (296) добавим условие

$$\frac{du}{dv} = g(t), \quad t \in \gamma, \quad (301)$$

где v — единичный вектор внешней нормали к γ в точке t , а $g(t)$ — заданная действительная функция (см. формулу (91) настоящей главы).

Будем считать, что область D представляет собой круг $|z| < 1$, а искомая бигармоническая функция, удовлетворяющая краевым условиям (296) и (301), имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в $D \cup \gamma$.

Как уже было отмечено в § 1.1 бигармоническую в D функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (302)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного z , причем

$$\varphi(0) = \operatorname{Im} \varphi'(0) = \operatorname{Im} \psi(0) = 0. \quad (303)$$

Очевидно, что формула (302) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами всех бигармонических в D функций и множеством всевозможных пар аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющих условию (303).

На основании (302) с учетом равенства $\frac{d}{dv} = t \frac{\partial}{\partial t} + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, $t = e^{i\vartheta}$ краевые условия (296) и (301) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \bar{t}\varphi(t) + \psi(t) + t\bar{\varphi}(\bar{t}) + \bar{\psi}(\bar{t}) - \delta\bar{t}\varphi(\delta t) - \psi(\delta t) - \\ - \delta t\bar{\varphi}(\delta\bar{t}) - \bar{\psi}(\delta\bar{t}) = f(t), \end{aligned} \quad (304)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + t\psi'(t) + \bar{t}\varphi'(\bar{t}) + \bar{t}\psi'(t) + \bar{\varphi}'(\bar{t}) + \bar{t}\bar{\psi}'(\bar{t}) = g(t), \\ t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (305)$$

Умножая равенства (304) и (305) на выражение $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-z}$ и интегрируя по окружности γ , получаем (ср. с § 2.1

настоящей главы)

$$\varphi(z)/z + \psi(z) - \delta\varphi(\delta z)/z - \psi(\delta z) + \bar{\varphi}'(0) - \delta^2\bar{\varphi}'(0) = F(z), \quad (306)$$

$$\varphi'(z) + z\psi'(z) + \varphi(z)/z + 2\bar{\varphi}'(0) = F_1(z), \quad (307)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)dt}{t-z}. \quad (308)$$

В силу первого из условий (303) функция $\varphi(z)/z$ аналитична в круге $|z| < 1$.

В обозначениях

$$\omega(z) = \varphi(z)/z, \quad \theta(z) = \omega(z) + \psi(z) \quad (309)$$

перепишем равенства (306) и (307) в виде

$$\theta(z) + (1 - \delta^2)\omega(\delta z) - \theta(\delta z) + (1 - \delta^2)\bar{\varphi}'(0) = F(z), \quad (310)$$

$$2\omega(z) + z\theta'(z) + 2\bar{\varphi}'(0) = F_1(z). \quad (311)$$

Система уравнений (310), (311) служит для определения функций $\omega(z)$ и $\theta(z)$. Из (311) имеем

$$2\omega(\delta z) + \delta z\theta'(\delta z) + 2\bar{\varphi}'(0) = F_1(\delta z). \quad (312)$$

В результате исключения $\omega(\delta z)$ из (310) и (312) получаем

$$2\theta(z) - 2\theta(\delta z) - (1 - \delta^2)\delta z\theta'(\delta z) = \Phi(z), \quad (313)$$

где

$$\Phi(z) = 2F(z) - (1 - \delta^2)F_1(\delta z). \quad (314)$$

При $z=0$ из (313) с учетом (308) и (314) следует необходимость условия

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta = \frac{1 - \delta^2}{2} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) d\vartheta \quad (315)$$

для разрешимости задачи (296), (301).

Нетрудно видеть, что выполнение условия (315) и достаточно для существования решения этой задачи. В самом деле, для определения функции $\theta(z)$ имеем уравнение (313), в котором $\Phi(0)=0$ в силу (315). Представляя функции $\theta(z)$ и $\Phi(z)$ в виде степенных рядов $\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$, из (313) получаем $\alpha_k(\delta)a_k = b_k$,

$k = 1, 2, \dots$, где $\alpha_k(\delta) = 2(1 - \delta^k) - k(1 - \delta^2)\delta^k$, $k = 1, 2, \dots$. Ввиду того, что $0 < \delta < 1$, имеем $\alpha_k(\delta) > 0$ и, кроме того, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(\delta) = 2$.

Следовательно, решением уравнения (313) является функция

$$\theta(z) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\alpha_k(\delta)} z^k,$$

где c — произвольная постоянная.

После того как функция $\theta(z)$ найдена, функции $\omega(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ находим из равенств (309) и (311). Подставляя полученные для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ выражения в формулу (302), находим искомое решение задачи (296), (301). Оно, конечно, определено с точностью до произвольного действительного постоянного слагаемого.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{t+z}{t(t-z)} \operatorname{Im} f(t) dt + c,$$

где c — произвольная действительная постоянная, дает интегральное представление аналитической в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ при требовании непрерывности $\operatorname{Im} f(z)$ в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

2. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, непрерывная по Гёльдеру в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Доказать, что краевые значения $u(\vartheta)$, $v(\vartheta)$, действительной и мнимой частей $f(z)$ на окружности $t = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, связаны между собой соотношением

$$u(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) d\vartheta. \quad (*)$$

3. Доказать, что условие (*) равносильно условию

$$v(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\vartheta) d\vartheta.$$

4. Показать, что формула

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{a^2 - z^2}} g(t) dt + \frac{ic}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

где c — произвольная действительная постоянная, дает аналитическую в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функцию, обращающуюся в нуль на бесконечности, имеющую особенность порядка ниже единицы при $z = -a$, $z = a$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned}\text{Im } F(t) &= 0, & -\infty < t < -a, & \quad a < t < \infty, \\ \text{Re } F(t) &= g(t), & -a < t < a.\end{aligned}$$

5. Найти решения задачи Гильберта в круге $|z| < 1$ по краевому условию

$$\cos n\vartheta \cdot u(\vartheta) + \sin n\vartheta \cdot v(\vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

6. Найти условия разрешимости и построить в квадратурах решение задачи Гильберта в круге $|z| < 1$ по краевому условию

$$\cos n\vartheta \cdot u(\vartheta) - \sin n\vartheta \cdot v(\vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

7. Найти решение задачи Рикье в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

8. Построить в квадратурах решение первой основной задачи теории упругости в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

9. Показать, что формула

$$F(z) = \Phi(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t+z}{t(t-z)} [\log g(t) - \log |\Phi(t)|] dt \right\},$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, непрерывная по Гёльдеру при $|z| \leq 1$ и отличная от нуля всюду на окружности $t = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, дает класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций, непрерывных по Гёльдеру при $|z| \leq 1$ и удовлетворяющих краевому условию

$$|F(t)| = g(t), \quad |t| = 1,$$

где $g(t)$ — заданная положительная всюду на окружности $|t| = 1$ функция.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля вторая теорема 52
 - первая теорема 44
- Абсолютная сходимость бесконечного произведения 157
 - ряда 28
- Алгебраическая точка ветвления 69
 - функция 207, 209
- Аналитическая функция 57, 59
 - бесконечнолистная 69
 - многих комплексных переменных 196, 200
 - — многолистная 68
 - общая 173
 - однозначная 59
 - однолистная 56
 - полная 173
- Аналитическое продолжение 173
 - непосредственное 173
- Аналитичность сложной функции 60
- суммы степенного ряда 60
- Ангармоническое отношение четырех точек 76
- Антианалитическая функция 64
- Антиконформное отображение 64
- Аполлония окружность 79
- Аргумента принцип 140
- Безразличная неподвижная точка 80
- Бернулли уравнение 291
- Бесконечно удаленная изолированная особая точка 133
 - точка 16
- Бесконечное произведение 26
 - абсолютно сходящееся 157
 - равномерно сходящееся 157
 - сходящееся 26, 155
 - условно сходящееся 157
- Бесконечнолистная функция 69
- Бесконечный определитель 26, 27
 - сходящийся 27
- Бигармоническая задача Дирихле 265
 - функция 261
- Бляшке произведение 171
- Больцано — Вейерштрасса принцип 22
- Бореля — Помпею формула 84, 86
- Вейерштрасса вторая теорема 109
 - первая теорема 107
 - первичные множители 159
 - признак равномерной сходимости 41, 42
- Ветвь многозначной функции 68
- Внутренние теоремы единственности 123, 179
- Вращения отображение 73
- Вычет функции 137, 138
- Гармоническая мера 120
 - функция 100, 227, 234
- Гармонически сопряженные функции 101
- Гартогса теорема 204
- Гаусса — Остроградского формула 219
- Гейне — Бореля лемма 20
- Гельдера показатель 112
 - условие 112
- Герца контактная задача 280
- Гильберта краевая задача 252
- Гиперболические функции 52
- Главная часть ряда Лорана 128
- Гладкая кривая 38
 - поверхность 218
- Голоморфная функция 59
- Гомеоморфное отображение 37
- Грина — Остроградского формула 85
- Гука закон 272
- Гурса лемма 87
 - формула аналитического продолжения 205, 206
- Двойного слоя потенциал 203
- Дирихле задача 17, 191
 - — для круга 117
 - — плоскости со щелью 240
 - — полосы 236
 - — шара 228
- Дифференциал функции 59
- Дробно-линейная функция 66
- Дробно-линейное отображение 72
 - гиперболическое 78
 - локсодромическое 78
 - параболическое 79
 - эллиптическое 78
- Единственность разложения в степенной ряд 123
- Жидкость вязкая 286
 - идеальная 285
 - реальная 286
- Жордана кривая 37
 - замкнутая 38
 - теорема 38
- Жуковского функция 81
- Задача наклонной производной 256
 - Неймана 256, 304
 - для круга 257
- Изолированная особая точка 129
 - — на бесконечности 13
 - точка множества 16
- Инверсия в E_n 214
 - комплексной плоскости 10
- Интеграл в смысле главного значения по Коши 113, 114
 - Коши 87

- Интеграл Коши сингулярный 113
 — неопределенный 98
 — по кривой 82
 — Пуассона 259
 — типа Коши 94, 95
 Интегральная формула Коши 94
 — — для бесконечной области 144
 — — Шварца для круга 109, 111
 — — — полуплоскости 234, 235
 Иррегулярная часть ряда Лорана 128
 Источник 296

 Калибровочные поля 305
 Каноническое произведение 162
 Карлемана лемма 180
 Квазиконформное отображение 66
 Комплексный потенциал 292
 — — скорости 293
 Компонента множества 19
 Компоненты напряжения 271
 — — смещения 271
 Континуум 20
 Контур области 38
 Конформное отображение 62
 — — круга на круг 77
 — — по Гауссу 213
 — — полуплоскости на круг 77
 — — — полуплоскость 76
 Коши критерий существования предела функций 33
 — — сходимости последовательности 24
 — — неравенства 125
 Коши — Адамара теорема 45
 Коши — Римана система дифференциальных уравнений 58
 — — — —, трехмерный аналог 218, 221
 — — условия 58
 — — сингулярный интеграл 113
 — — теорема 89
 Кратность нуля 125
 Кратный ряд 197
 — — абсолютно сходящийся 198
 — — сходящийся 198
 Кривая кусочно-гладкая 40
 — — непрерывная 37
 — — простая 38
 Кристоффеля — Шварца формула 192, 194
 Критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения 157
 — Коши существования предела функции 33
 — — сходимости последовательности 24
 — — сходимости бесконечного произведения 155
 Критическая точка алгебраической функции 210
 Круг сходимости степенного ряда 45

 Лапласа оператор 100
 — уравнение 100
 Лейбница формула 98
 Лемма Шварца 104, 105
 Линейная функция 40
 Линейный элемент 183
 Линия тока 285
 Липшица условие 112
 Ливуилля теорема 125
 — — о конформных отображениях 215, 216

 Логарифмическая функция 69
 Лорана ряд 126
 — — теорема 126, 127
 Лялунова поверхность 219

 Максимум модуля принцип 102
 Мероморфная функция 135
 Мёбиуса преобразование 218
 Миттаг-Леффлера задача 172
 Моногенная функция 57
 Монодромии теорема 174
 Морера теорема 98
 — —, пространственный аналог 223
 Муавра формула 13

 Навье — Стокса линеаризованная задача 287
 — — уравнения 286
 Направление обхода положительное 38
 Неподвижная точка дробно-линейного отображения 77, 78
 — — — — безразличная 80
 — — — — кратная 78
 — — — — отталкивающая 80
 — — — — притягивающая 80
 Непрерывности принцип 175
 Непрерывность по Гельдеру 112
 — функции комплексного переменного 35
 Нормализованное конформное отображение 183
 Нуль аналитической функции 124
 — — — кратный 125
 — — — простой 125

 Обратная функция 32
 Обтекание цилиндра 297
 Общее комплексное представление би-гармонических функций 264
 Однозначная функция 32
 Однолистная функция 32
 Однородный полином 197
 Окрестность точки комплексной плоскости 16
 Ортогональное отображение 214
 Основная теорема алгебры 141
 — —, Римана о конформном отображении 184
 Основные уравнения гидромеханики 285
 Остаток ряда 27
 Отношение степенных рядов 49
 Отображение однолистное 32
 — подобия 73

 Параллельный перенос 73, 214
 Пикара теорема 133
 Поведение интеграла в смысле главного значения 243
 — — типа Коши вблизи концов линии интегрирования 250
 — — — — — линии интегрирования 248
 — — производной интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования 246
 Поверхность кусочно-гладкая 219
 — Римана 67, 69, 70, 72
 Полином 40
 — неприводимый 208
 Поллицилиндр замкнутый 196
 — открытый 196
 Полюс аналитической функции 129

- Порядок нуля 125
- полюса 130
- связности области 20
- целой функции 167
- Последовательность Коши 24
- расходящаяся 23
- сходящаяся 23
- фундаментальная 24
- Потенциал скорости 292
- Правильная часть ряда Лорана 128
- Предел последовательности 23
- функции в смысле Гейне 33
- — — Коши 33
- Признак сходимости последовательности градиентов гармонических функций 230
- Принцип взаимно однозначного соответствия 192
- симметрии Римана — Шварца 176
- Шварца аналитического продолжения 178
- экстремума гармонических функций 120
- Производная функции 57
- Простейшая дробь 146
- Простого слоя потенциал 203
- Пуассона — Иенсена формула 168
- Пуассона формула для круга 111
- — — полуплоскости 234, 235
- — — шара 229
- Равномерная непрерывность 36
- сходимость бесконечного произведения 157
- — ряда 41
- Радиус сходимости степенного ряда 45
- Разложение в ряд Лорана 128
- — — Тейлора 123
- на простейшие дроби 146
- числового ряда 28
- Рациональная функция 41
- — целая 40
- Регулярная часть ряда Лорана 128
- Редукция второй основной задачи теории упругости к краевой задаче теории функций 274, 277
- первой основной задачи теории упругости к краевой задаче теории функций 274, 275, 276
- Рикье задача 268
- — для круга 269
- Римана интерпретация комплексных чисел 14, 16
- сфера 16
- Род канонического произведения 162
- целой функции 163, 164
- Руше теорема 142
- Ряд абсолютно сходящийся 28
- расходящийся 25
- степенной 43
- сходящийся 27
- Тейлора 122
- условно сходящийся 28
- функциональный 41
- числовой 27
- Сен-Венана условия 272
- Сила подъемная 299, 301
- Симметрия относительно действительной оси 31
- Симметрия относительно окружности 31
- — прямой 74
- Склеивание краев разреза 68
- Соответствие границ при конформном отображении 189
- Сохоцкого — Племеля формулы 115, 117
- — —, пространственный аналог 226
- Стандартный радиус кривой 40
- Степенная функция 67
- Стереографическая проекция 14
- Сток 296
- Сумма числового ряда 25
- Суммирование ряда по методу Чезаро 26
- Существенно особая точка 129
- Существование неявной функции 207
- Тензор напряжения 271
- Теорема Миттаг-Леффлера 172
- — о двойных рядах 28
- Пуанкаре 163, 165
- сложения для тригонометрических функций 51
- — — экспоненциальной функции 58
- Фрагмена — Линделёфа 104
- Течение дозвуковое 292
- сверхзвуковое 292
- Теории упругости вторая основная задача 274
- — — — для круга 279
- — первая основная задача 274
- — — — для круга 277
- Трансцендентная точка ветвления 70
- Уравнение Пуассона 258
- Уравнения линейной теории упругости 270
- Устранимая особая точка 129
- Формулы стереографической проекции 15
- Эйлера 51
- Фундаментальная последовательность 24
- Функция многих комплексных переменных 196
- тока 292
- Целая аналитическая функция 134, 135
- функция порядка ниже половины 170
- Цепь элементов функции 173
- Число Маха 291
- Штейнера окружность 79
- Эквипотенциальная линия 293
- Экспоненциальная функция 50, 69
- Электростатическое поле 301
- Элементарное (фундаментальное) решение бигармонического уравнения 262
- — — уравнения Лапласа 261
- Ядро Коши 113