

В.А. ФИЛИППОВ

**ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 539.4.013+514.7+624.074.43

ББК 22.151

Ф 53

Филиппов В. А. **Основы геометрии поверхностей оболочек пространственных конструкций.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-1062-4.

В пособии рассмотрены вопросы геометрии регулярных и нерегулярных поверхностей, применяемых в строительстве, архитектуре и технике.

Предназначено студентам старших курсов строительных факультетов университетов, изучающим железобетонные и металлические конструкции. Отдельные параграфы, посвященные поверхностям, представляют интерес для проектировщиков оболочек пространственных конструкций, архитекторов, инженерно-технических работников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Основные сведения о кривых линиях	8
§ 1. Плоские кривые	8
1. Понятия и определения (8). 2. Касательная и нормаль к кривой (9). 3. Строение кривой в неособой точке (12). 4. Особые точки плоских кривых (15). 5. Окружность кривизны, эволюта и эвольвента окружности (17).	
§ 2. Пространственные кривые	19
6. Понятия и определения (19). 7. Соприкасающаяся плоскость и главная нормаль пространственной кривой (21). 8. Сопровождающий трехгранник кривой (23).	
§ 3. Элементы векторного анализа и инварианты кривых линий	25
9. Векторная функция скалярного аргумента (25). 10. Длина дуги кривой (32). 11. Кривизна кривой (34). 12. Кручение кривой (39).	
Глава II. Общие сведения о регулярных поверхностях.	42
§ 4. Понятие поверхности.	42
13. Аналитическое представление поверхности (42). 14. Геометрическое представление поверхности (46). 15. Кривые линии и координатная сеть на поверхности (51). 16. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, нормальное сечение поверхности (53). 17. Особые точки регулярной поверхности (54).	
§ 5. Особенности поверхностей оболочек пространственных конструкций.	57
18. Понятие оболочки (57). 19. Основы формообразования поверхностей оболочек (58).	

§ 6. Две квадратичные формы поверхности	60
20. Первая квадратичная форма поверхности (60). 21. Метрические задачи на поверхности (62). 22. Вторая квадратичная форма поверхности (64). 23. Нормальная кривизна линии на поверхности (67).	
§ 7. Гауссова и средняя кривизны поверхности	70
24. Главные направления и главные кривизны поверхности (70). 25. Нахождение главных направлений и главных кривизн поверхности (73).	
§ 8. Характерные линии поверхности	79
26. Линии кривизны (79). 27. Асимптотические линии (80). 28. Геодезические линии (82). 29. Параболические линии (85). 30. Линия сжатия (87).	
§ 9. Строение регулярной поверхности	88
31. Соприкасающийся параболоид и индикатриса кривизны поверхности (89). 32. Классификация точек и строение регулярной поверхности (92).	
§ 10. Изгибание и развертывание регулярных поверхностей	96
33. Понятие изгибания поверхности (96). 34. Развертывающиеся поверхности (98).	
Глава III. Основные виды поверхностей оболочек пространственных конструкций	101
§ 11. Линейчатые поверхности	101
35. Цилиндрическая поверхность (103). 36. Коническая поверхность (103). 37. Торсовая поверхность (104). 38. Коноидальная поверхность (106). 39. Линейчатый, или гиперболический параболоид (113).	
§ 12. Поверхности вращения	116
40. Прямой круговой конус (118). 41. Прямой круговой цилиндр (121). 42. Однополостный гиперболоид вращения (123). 43. Сфероидальные поверхности (126). 44. Тороидальные поверхности (131). 45. Параболоиды вращения (135). 46. Катеноид (138).	
§ 13. Поверхности переноса	141
47. Эллиптический параболоид (142). 48. Гиперболический параболоид (145). 49. Круговая поверхность переноса (149).	
§ 14. Винтовые поверхности	153
50. Прямой геликоид (154). 51. Эвольвентный геликоид (157).	

§ 15. Циклические поверхности	163
52. Каналовая и трубчатая поверхности (164). 53. Циклиды Дюпена (167).	
§ 16. Нерегулярные поверхности	168
54. Понятие нерегулярной поверхности оболочки (168). 55. Составные оболочки (170). 56. Расчетно-экспериментальные оболочки (171). 57. Оболочки произвольной формы (173).	
Приложение	177
Литература	190

Предисловие

Раздел «поверхности» входит в программы по высшей математике, в курсы дифференциальной, аналитической и начертательной геометрии технических университетов.

Особый интерес этот раздел представляет для студентов строительных специальностей, будущих инженеров, конструкторов и проектировщиков, поскольку геометрия поверхностей имеет приложение в их практической работе, при расчете и проектировании покрытий большепролетных сооружений промышленного, гражданского и других назначений.

Однако в курсах железобетонных и металлических конструкций студенты наталкиваются на определенные трудности изучения поверхностей оболочек, вызванные особенностями оболочек пространственных конструкций.

Дело в том, что при расчете и проектировании поверхностей оболочек, подвергающихся под нагрузкой различным усилиям, применяется метод дифференциальной геометрии (изучение поверхности в бесконечно малой части), которая как самостоятельная дисциплина в большинстве строительных вузов не читается. Сведения, полученные о поверхностях в курсах аналитической и начертательной геометрии, недостаточны, так как охватывают ограниченный круг поверхностей.

Другая трудность заложена в самой природе поверхности, представляющей обобщенный геометрический образ (множество точек и линий), находящийся на грани анализа и геометрии, что вынуждает рассматривать поверхность с двух точек зрения — аналитической и геометрической.

Не остается в стороне и объективный фактор, обусловленный общим прогрессом в технике и строительстве, переходом к сборно-монолитному и монолитному строительству и другим современным методам, расширяющим возможности применения оболочек в пространственных конструкциях.

Усложнение современных конструкций промышленных и общественных зданий, распространение новых строительных материалов (алюминия, пластика, синтетических тканей и других материалов), а также повышение требований к внешнему облику сооружений — все это привело к включению в пособие

классов и видов поверхностей, отсутствующих в курсах высшей математики и начертательной геометрии, вплоть до поверхностей произвольной формы. Большое внимание в изложении материала уделено кривым линиям, как порождающим поверхности, и их инвариантам: длине, кривизне и кручению.

Центральное место в пособии отведено *анализу дифференциально-геометрических характеристик поверхностей оболочек различной кривизны* (положительной, отрицательной, нулевой) *с вычислением их гауссовой и средней кривизн посредством двух квадратичных форм.*

В изложении материала доказательства теорем по мере возможности заменяются, где это необходимо, только раскрытием их содержания, что облегчает изучение поверхностей.

Вопросы, непосредственно касающиеся расчета и проектирования оболочек пространственных конструкций, опускаются, за исключением отдельных примеров, когда геометрия поверхностей органически с ними связана.

В целях облегчения усвоения материала аналитическое описание поверхностей сопровождается пояснениями геометрического характера с приведением соответствующего чертежа.

В приложении даны образцы учебных заданий на построение композиций некоторых сочлененных поверхностей оболочек с нахождением их линий пересечений, а также примеры и упражнения на составление уравнений и определение отдельных видов поверхностей оболочек по их уравнениям, заданным в координатной и векторно-параметрической формах.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ

В этой главе даются основные сведения о плоских и пространственных линиях, необходимые в дальнейшем для всестороннего изучения поверхностей. Осуществляется переход от скалярной к векторной функции. Рассматриваются инварианты кривых линий ¹⁾: длина, кривизна и кручение. Раскрывается содержание формул Френе.

§ 1. Плоские кривые

1. Понятия и определения. Все точки плоской кривой принадлежат одной плоскости. Плоскую кривую можно рассматривать как траекторию движущейся точки или как множество точек плоскости. К плоским кривым относится любая кривая второго порядка.

Аналитически плоская кривая в прямоугольной системе координат задается уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

представляющим геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, или в виде функции ²⁾

$$y = f(x). \quad (2)$$

Геометрически это означает, что каждой точке A дуги $\widetilde{a_1 a_2}$ кривой соответствует единственная точка x_a оси абсцисс и обратно (рис. 1).

Если бесконечно близким точкам оси Ox будут соответствовать бесконечно близкие точки кривой, то такое непрерывное и взаимно однозначное соответствие называется *отображением*.

¹⁾ Под инвариантами кривой линии подразумеваются величины, неизменные при преобразовании или перемещении относительно системы координат.

²⁾ Все функции в этой главе считаются по крайней мере один раз непрерывно дифференцируемыми.

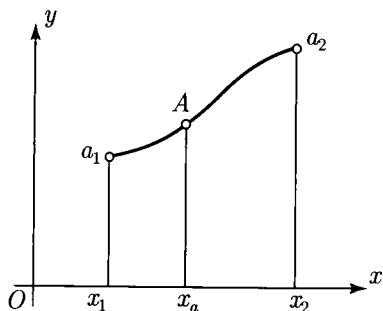


Рис. 1

ем¹⁾). В наглядном представлении это кривая без разрывов и изломов.

Если абсцисса x_a между точками x_1 и x_2 принимает значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \leq x_a \leq x_2$ (с включением концевых точек x_1 и x_2), то совокупность таких точек x_a называется *отрезком* и обозначается $[x_1, x_2]$.

В случае $x_1 < x_a < x_2$ (с исключением концевых точек x_1 и x_2) совокупность точек x_a называется *промежутком*, или *интервалом* и обозначается (x_1, x_2) .

Окрестностью точки плоской кривой называется интервал, содержащий данную точку. При этом точка может быть произвольной или срединной точкой интервала. Кривая (2), полученная отображением интервала прямой, называется *простой дугой в плоскости*.

Задание линии в векторно-параметрических формах дано ниже (п. 9).

2. Касательная и нормаль к кривой. Известно, что *касательной t в данной точке M_0 кривой l* называется предельное положение секущей M_0N , когда точка N стремится по кривой к совпадению с точкой M_0 (рис. 2). Иначе говоря, касательная есть *линия наибольшего сближения с кривой в данной точке*.

Кривая, имеющая в каждой точке единственную касательную, называется *гладкой*, или *один раз дифференцируемой*.

Точка соприкосновения кривой со своей касательной называется *точкой касания*.

Направление кривой зависит от направления касательной [18]. Если касательная к кривой направлена в сторону возраста-

¹⁾ Под отображением понимают также непрерывно дифференцируемую функцию.

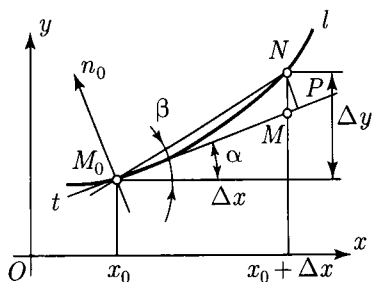


Рис. 2

ния абсциссы, то кривая имеет *положительный знак*, в противном случае — *отрицательный знак*.

С касательной к кривой связана производная функции, так как без касательной геометрически производная не существует.

Известно, что *производной* функции $y = f(x)$ в данной точке M_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Производная обозначается также символом y' , или $\frac{dy}{dx}$.

Угловой коэффициент секущей M_0N в точке M_0 (рис. 2) равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

в пределе имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона касательной t к положительному направлению оси Ox .

Геометрически формула (3) означает, что при $x = x_0$ (рис. 2) производная $f'(x_0)$ равна *угловому коэффициенту* $\operatorname{tg} \alpha$ *касательной к кривой в точке* $M_0(x_0, y_0)$:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку через точку $M_0(x_0, y_0)$ можно провести пучок прямых с уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (3a)$$

где k — угловой коэффициент произвольной прямой, равный тангенсу угла наклона ее к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$), то для касательной

t к кривой l (рис. 2) имеем $k = f'(x_0)$. Тогда для касательной t к кривой l уравнение (3а) примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (4)$$

Прямая, перпендикулярная касательной к кривой в данной точке, называется *нормалью кривой*. С каждой нормалью свяжем направление в сторону вогнутости кривой (рис. 2). Нормаль в пособии обозначается символом n_0 .

Из условия перпендикулярности прямых $k_1 = -1/k$, где k_1 — угловой коэффициент нормали, а k — угловой коэффициент касательной, поскольку $k = f'(x_0)$, имеем $k_1 = -1/f'(x_0)$. Тогда, подставляя k_1 в уравнение (3а), получим уравнение нормали к плоской кривой

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (5)$$

Производная тесно связана с дифференциалом функции. Напомним, что *дифференциал* функции $y = f(x)$ определяется как главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента и равная произведению производной на приращение последнего. Дифференциал обозначается символом dy :

$$dy = y' \Delta x, \quad (6)$$

или

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (6a)$$

Геометрически дифференциал функции представляет собой *приращение ординаты* dy (NP) касательной t , соответствующее приращению аргумента Δx в данной точке M кривой l (рис. 23).

Подробнее производная и дифференциал, как векторная функция скалярного аргумента, рассматриваются ниже (п. 9).

Отметим, что производная и дифференциал функции, касательная и нормаль к кривой в данной точке имеют основополагающее значение в дальнейшем изложении материала пособия. Например, без вычисления второй производной нельзя определить кривизну кривой (п. 11) и, следовательно, кривизну поверхности (п. 23).

Нормаль к кривой в данной точке переходит в обобщенном виде в нормаль n_0 к поверхности (рис. 41), которая порождает в свою очередь нормальное сечение l_0 поверхности (рис. 42), на основе которого находятся главные кривизны, гауссова и средняя кривизны поверхности (п. 24, 25), используемые при расчете и проектировании оболочек пространственных конструкций (п. 19).

Разумеется, вышеописанное — только схема, обозначающая основные вехи на пути изучения пособия и связанная, прямо или косвенно, с поверхностями (гл. III).

3. Строение кривой в неособой точке. Точка, в которой кривая имеет единственную касательную, называется *неособой*, или *обыкновенной*.

Аналитически в неособой точке кривой $F(x, y) = 0$ *первые частные производные F'_x и F'_y не обращаются одновременно в нуль*, т. е. по крайней мере одна из частных производных не равна нулю. Например, парабола с уравнением $y^2 - x = 0$ состоит из неособых точек, ибо ее частная производная $F'_x = -1 \neq 0$.

Для оценки степени прилегания кривой к касательной, а следовательно, и формы кривой, вводятся понятия *порядка малости* и *порядка касания прямой с кривой*.

Пусть из точки N кривой на ее касательную M_0M опущен перпендикуляр NP (рис. 2). Если длина этого отрезка NP по отношению к длине отрезка M_0P есть бесконечно малая n -го порядка, то целое число n принимается за *порядок малости* кривой l в окрестности точки M_0 . При этом чем выше порядок малости n кривой, тем заметнее уменьшается расстояние точек кривой от касательной, тем плотнее прилегает кривая к своей касательной. *Порядок касания кривой с ее касательной* в окрестности точки касания есть целое число, которое меньше порядка малости кривой на 1.

Порядок малости и порядок касания кривой с касательной применяются при оценке порядка малости касания кривой с плоскостью, двух кривых, поверхности с плоскостью и двух поверхностей.

Проследим за изменением порядка малости и порядка касания кривой вблизи точки касания с возрастанием порядка производной¹⁾.

При *первом порядке малости* кривая в точке касания имеет производную $y' \neq 0$ с нулевым порядком касания, который в дальнейшем изложении не рассматривается.

В случае *второго порядка малости* кривая вблизи точки касания удовлетворяет условию $y''(x_0) \neq 0$, или первому порядку

¹⁾ Аналитическое нахождение порядка малости и порядка касания рассмотрено в [20] и других пособиях по дифференциальной геометрии.

касания (общий случай порядка малости и касания кривой со своей касательной).

Если при этом условии (рис. 3) отклонение кривой от касательной в данной точке с *положительным* знаком ($y'' > 0$), то кривая $y = f(x)$ располагается выше своей касательной *выпуклостью вниз* и называется *вогнутой*, а если с *отрицательным* знаком ($y'' < 0$) — ниже своей касательной, *выпуклостью вверх* и называется *выпуклой*.

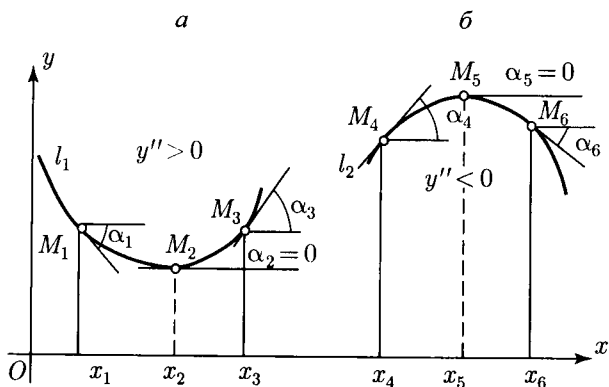


Рис. 3

Объяснение к первому случаю — вогнутости кривой l_1 — дает рис. 3, а, и ко второму случаю — выпуклости кривой l_2 — дает рис. 3, б.

При возрастании x на отрезке $[x_1, x_3]$ касательная, перемещаясь по дуге l_1 , образует в точке касания M_1 с осью Ox отрицательный острый угол α_1 , который при переходе в точку M_2 дуги уменьшается и становится углом $\alpha_2 = 0$.

Далее угол α возрастает и при переходе в точку M_3 дуги становится положительным углом α_3 .

С возрастанием угла α возрастает и угловой коэффициент касательной, равный первой производной: $\operatorname{tg} \alpha = y'$, а значит, вторая производная принимает значение $y'' > 0$.

При перемещении касательной на отрезке $[x_4, x_6]$ по дуге l_2 после угла α_5 , равного нулю, угол α уменьшается и становится отрицательным углом α_6 . Потому вторая производная принимает значение $y'' < 0$.

В случае *третьего порядка малости* кривая вблизи точки касания удовлетворяет условию $y''' \neq 0$. Если при этом $y'' = 0$ (необходимое условие), то точка M_0 кривой l , отделяющая вогнутую часть кривой от выпуклой, называется *точкой перегиба*

(рис. 4). Кривая, содержащая точку перегиба и имеющая разные знаки кривизны по разные стороны от своей касательной t в той же точке, называется *линией перегиба*.

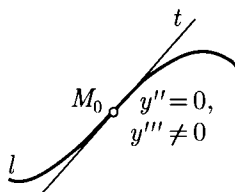


Рис. 4

Для нахождения точки перегиба можно воспользоваться следующим правилом: точка кривой будет точкой перегиба, если при последовательном дифференцировании ее уравнения *впервые* появляющаяся производная, не равная в этой точке нулю, имеет нечетный порядок; в противном случае эта точка не является точкой перегиба.

Например, кривая $y = x^3$ (кубическая парабола) при дифференцировании ее уравнения имеет производные $y' = 6x$, $y'' = 6$, из которых последняя, впервые не равная нулю при $x = 0$, будет нечетного порядка. Поэтому точка O кривой l является точкой перегиба (рис. 5).

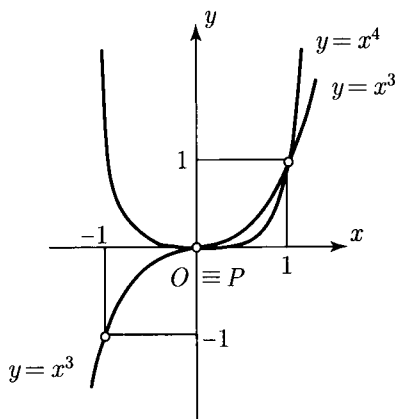


Рис. 5

Если точка удовлетворяет только условию $y'' = 0$, то она является *точкой спрямления плоской кривой*, т. е. точкой, в которой кривизна равна нулю.

Линия, состоящая сплошь из точек спрямления, есть прямая. В общем случае точка спрямления кривой, если она суще-

ствует, не является точкой перегиба, ибо она переходит в точку уплощения (п. 6).

Многие плоские кривые, например, кривая $y = x^4$ (парабола четвертого порядка) в точке O начала координат (рис. 5) вообще не имеет точки перегиба, ибо при дифференцировании ее уравнения получим

$$y'' = 12x^2, \quad y''' = 24x, \quad y^{IV} = 24.$$

Отсюда замечаем, что производная, впервые не равная нулю при $x = 0$, будет четвертого порядка, а значит, согласно вышеприведенному правилу, в точке O данной кривой *точка перегиба не существует*.

Точки перегиба и спрямления относятся к *специальным неособым точкам плоской кривой* [7]¹⁾, причем они оказывают влияние на формообразование некоторых поверхностей (рис. 64, 72 и др.).

4. Особые точки плоских кривых. *Особой точкой* плоской кривой $F(x, y) = 0$ называется точка, в которой две первые частные производные F'_x и F'_y одновременно обращаются в нуль²⁾.

Геометрически это означает, что направление касательной в особой точке плоской кривой не определено или она не единственная.

Если координаты точки удовлетворяют трем уравнениям:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F = 0,$$

а из трех вторых частных производных F''_{xx} , F''_{xy} , F''_{yy} хотя бы одна не равна нулю, то такая точка плоской кривой называется *двойной особой точкой*.

Через двойную особую точку проходит не более двух ветвей плоской кривой, пересекающихся или соприкасающихся. В случае трех таких кривых их общая точка называется *тройной особой точкой*, и т. д.

¹⁾ Однако точка перегиба, расположенная в начале координат, относится к особым точкам кривой.

²⁾ Исследование особых точек кривых осуществляется с помощью формулы Тейлора ([3]).

Аналитически особые точки кривой $F(x, y) = 0$ определяются дискриминантом δ из уравнения

$$\delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = F''_{xx}F''_{yy} - F''_{xy}{}^2.$$

При $\delta > 0$ точка называется *изолированной*, при $\delta < 0$ точка называется *узловой*, или *точкой самопересечения*, при $\delta = 0$ точка называется *точкой возврата*.

Например, лемниската l (рис. 6), определяемая как геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

где $a \neq 0$ — постоянная, в точке O имеет первые частные производные:

$$F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2), \quad F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2).$$

Система уравнений $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ дает три решения: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$. При подстановке $(0, 0)$ во вторые частные производные имеем:

$$F''_{xx}(0) = -4a^2, \quad F''_{xy}(0) = 0, \quad F''_{yy}(0) = 4a^2, \quad \delta = -16a^4 < 0,$$

т. е. точка O будет двойной особой узловой точкой лемнискаты с двумя касательными асимптотами a_1 и a_2 , имеющими уравнения $y = \pm x$ (см. также п. 44, рис. 105).

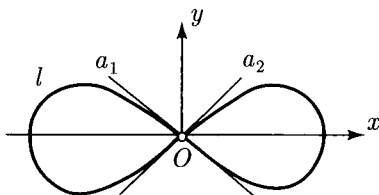


Рис. 6

На рис. 7 показаны разновидности особых точек плоских кривых. Приведем их краткие характеристики: 1 — *изолированная точка*, расположенная вне кривых; 2 — *узловая точка*, или *точка самопересечения* кривой с двумя касательными в этой точке; 3 — *точка возврата первого рода*, через которую проходят две ветви кривых по разные стороны от касательной в этой точке; 4 — *точка возврата второго рода*, в отличие от первого рода — с кривыми, расположенными по одну сторону от касательной в этой точке; 5 — *точка самоприкосновения*, через которую проходят две кривые, расположенные по разные

стороны от их общей касательной, но, в отличие от точек возврата, без точки излома; 6 — *точка излома*, или *угловая точка*, через которую проходят две ветви кривых с двумя различными касательными, пересекающимися в этой точке под определенным углом.

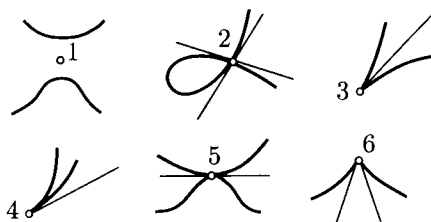


Рис. 7

К особым точкам причисляют *точки разрыва* кривой, *бесконечно удаленные точки* асимптотических кривых и логарифмических спиралей, интегральных кривых, например, описываемых уравнением $du/dx = f(x, y)$.

При постоянной форме кривой, но с изменением вида ее уравнения, особая точка может рассматриваться как неособая, и наоборот. Такие особые точки называют *устраняемыми*.

Так, при рассмотрении лемнискаты как состоящей из двух аналитических кривых (рис. 6) в виде линий перегиба, точка перегиба O будет неособой.

5. Окружность кривизны, эволюта и эвольвента окружности. Известно (п. 3), что плоская кривая в общем случае уклоняется от своей касательной на второй порядок малости или первый порядок касания, не обеспечивающие плотного прилегания касательной с кривой. Для определения кривизны кривой геометрическим способом вместо касательной прямой в данной точке кривой подбирается окружность, имеющая высший порядок малости.

В случае плоской кривой l это — окружность p с центром C , расположенным на нормали n_0 в данной точке M_0 кривой с касательной t в той же точке, и радиусом $R = CM_0$ (рис. 8).

Предельное положение p_1 окружности p , проходящей через заданную точку M_0 кривой l и две ближайшие точки M_1 и M_2 , стремящиеся к совпадению с точкой M_0 , называется *соприкасающейся окружностью*, или *кругом кривизны*. Радиус и центр соприкасающейся окружности называются соответственно *радиусом* и *центром кривизны*.

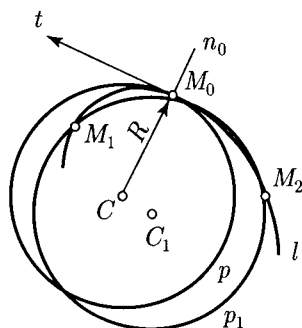


Рис. 8

Формулы вычисления кривизны плоской кривой, радиуса и координат центра кривизны приводятся ниже (п. 11).

С кругом кривизны связаны эволюта и эвольвента плоской кривой.

Геометрическое место центров кривизны M_0, M_1, \dots, M_n называется *эволютой кривой* (рис. 9, полуокружность p — эволюта кривой f).

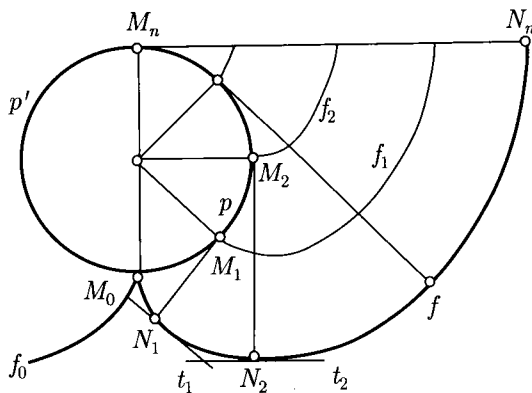


Рис. 9

Эвольвентой окружности называется кривая f — ортогональная траектория¹⁾, пересекающая в каждой своей точке N_1, N_2, \dots касательные t_1, t_2, \dots к полуокружности p . Слово «эволюта» происходит от латинского слова *evolutus* — «развернутый», а «эвольвента» происходит от *evolvens* — «разворачивающий».

¹⁾ Ортогональной траекторией семейства прямых называется кривая, пересекающая прямые под прямым углом.

В особой точке возврата первого рода M_0 эвольвента окружности распадается на две ветви f_0 и f , по отношению к которым окружность p' является эволютой.

Эвольвента, как развертка эволюты, строится следующим образом. На касательных эволюты откладываются отрезки прямых M_1N_1, M_2N_2, \dots , равные спрямленным дугам M_0M_1, M_0M_2, \dots окружности p , а концевые точки N_1, N_2, \dots соединяют гладкой кривой f . При этом одной эволюте соответствует множество эвольвент f_1, f_2, \dots , а касательные эволюты будут нормальными к эвольвентам (на рис. 9 касательные M_1N_1, M_2N_2, \dots эволюты перпендикулярны к касательным эвольвентам t_1, t_2, \dots в точках N_1, N_2, \dots). Отсюда следует другое определение эволюты, как *огивающей семейства нормалей эвольвенты*.

Эволюта произвольной кривой показана на рис. 54 (эволюта q с касательными n_0, n_1, \dots , как нормальными к поверхности Φ).

§ 2. Пространственные кривые

6. Понятия и определения. В отличие от плоской кривой, точки пространственной кривой *не лежат в одной плоскости*, поэтому такую кривую относят к *линиям двойной кривизны*.

Кривую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей Φ_1 и Φ_2 (рис. 10), заданную системой двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \Phi_2(x_2, y_2, z_2) = 0 \end{cases}$$

с координатами точек, удовлетворяющими одновременно обоим уравнениям.

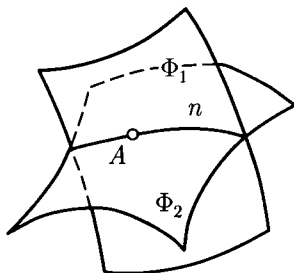


Рис. 10

Задание плоских и пространственных кривых в векторно-параметрической форме приводится ниже (п. 9).

Многие понятия и определения, относящиеся к плоским кривым, в обобщенном виде распространяются на пространственные кривые. Так, определения касательной прямой, касательной плоскости, круга кривизны для пространственных кривых аналогичны соответствующим определениям для плоских кривых.

Простая кривая в пространстве есть образ интервала или окружности при непрерывном отображении в пространство.

Окрестностью точки A пространственной кривой p считается пересечение кривой с внутренностью сферы малого радиуса с центром в точке A (рис. 11).

Новым является понятие *нормальной плоскости кривой в пространстве*, которая определяется как плоскость α , перпендикулярная касательной t к кривой l в данной точке P (рис. 12).

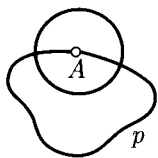


Рис. 11

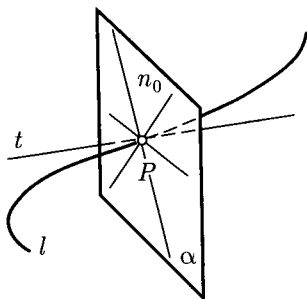


Рис. 12

Существенное различие между плоской и пространственной кривыми состоит в том, что последняя обладает *кручением* (п. 12). Поэтому, в отличие от точки спрямления плоской кривой, аналогичная точка на пространственной кривой называется *точкой уплощения*.

Простейшим примером пространственной кривой является *цилиндрическая винтовая линия*, которая, как и окружность, перемещается в пространстве параллельно самой себе, без изменения формы.

Цилиндрическую винтовую линию можно определить как траекторию равномерного движения точки по образующей прямого кругового цилиндра, одновременно вращающейся вокруг его оси — оси аппликат Oz на рис. 13.

Величина отрезка M_0M_1 образующей цилиндра, на который перемещается точка M_0 за время одного полного оборота образующей, называется *шагом цилиндрической винтовой линии* и обозначается символом h .

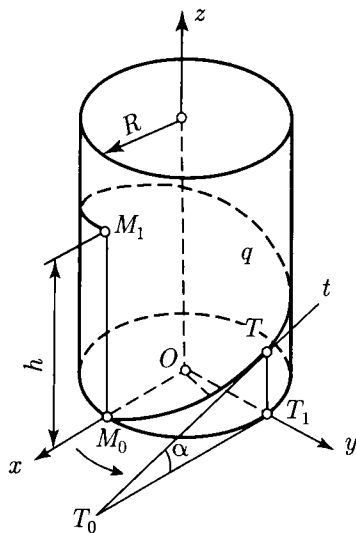


Рис. 13

Если шаг h имеет постоянную величину, то винтовая линия называется *линией постоянного шага*. Угол α наклона касательной t в точке M_0 винтовой линии q к основанию цилиндра называется *углом наклона винтовой линии*.

Винтовые линии постоянного шага относятся к *линиям постоянной кривизны и кручения*, что способствует их применению в технике.

Совокупность вращательного и поступательного движений точки по винтовой линии, связанных пропорциональной зависимостью, называется *винтовым движением* (п. 50).

Винтовые линии разделяются на «правые» и «левые» в зависимости от вращения образующей соответственно по или против часовой стрелке, если смотреть по направлению оси вращения цилиндра (рис. 12, «правая» винтовая линия).

Винтовая линия на цилиндре представляет собой геодезическую кривую (п. 28), которая при развертывании ее на плоскость обращается в прямую.

В технике винтовая линия используется для нарезания резьбы разных профилей, а также для образования винтовых поверхностей (п. 50, 51).

7. Соприкасающаяся плоскость и главная нормаль пространственной кривой. Соприкасающаяся плоскость и связанная с ней главная нормаль пространственной кривой, рассматриваемая ниже, будут часто встречаться в дальнейшем при

определении кривизны линий на поверхностях (п. 23). К понятию соприкасающейся плоскости можно подойти, представив, что в пучке плоскостей π_0, π_1, \dots , касательных к пространственной кривой в данной точке, существует *плоскость наибольшего сближения с кривой*.

Соприкасающейся плоскостью пространственной кривой в точке M_0 называется плоскость π_0 , к совпадению с которой стремится плоскость $M_0M_1M_2$, когда две ее ближайшие точки M_1 и M_2 стремятся по кривой l к совпадению с точкой M_0 (рис. 14). Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью самой кривой.

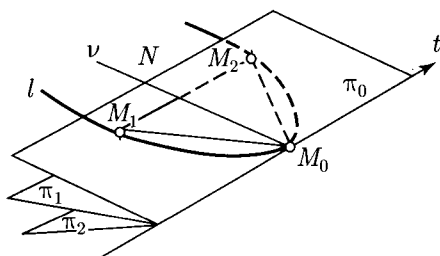


Рис. 14

В дифференциальной геометрии доказывается [3], что если плоскость π_0 в данной точке M_0 кривой l соприкасающаяся, то расстояние, например, от точки M_1 кривой до плоскости π_0 при сближении точек M_1 и M_0 есть бесконечно малая не ниже третьего порядка малости (рис. 13, расстояние от точки M_1 до плоскости π не показано).

Отметим важное свойство соприкасающейся плоскости. Пространственную кривую, в окрестности данной точки расположенную в соприкасающейся плоскости, можно *рассматривать как плоскую*, что упрощает нахождение кривизны любых линий на поверхностях (рис. 48, кривая l). Но следует учитывать, что в точке спрямления плоской кривой или в точке уплощения пространственной кривой, как в точках нулевой кривизны, соприкасающаяся плоскость не определяется.

В [3] доказывается также, что пространственная кривая вблизи данной точки, как линия двойкой кривизны, располагается *по разные стороны от соприкасающейся плоскости*. Наглядно это положение кривой иллюстрирует соприкасающаяся плоскость π_0 , разделяющая кривую l в точке M_0 на видимую M_0M_1 и невидимую M_0M_2 части (рис. 14).

Известно, что через пространственную кривую в данной точке проходит множество нормалей, но только одна из них будет главной — та, которая принадлежит соприкасающейся плоскости кривой. Поэтому говорят, что соприкасающаяся плоскость пространственной кривой в данной точке порождает главную нормаль, обозначаемую греческой буквой ν .

Главной нормалью $\nu(M_0N)$ пространственной кривой l в данной точке M_0 называется перпендикуляр к касательной t в той же точке кривой, лежащий в соприкасающейся плоскости π_0 (рис. 14). Другое определение главной нормали пространственной кривой дается ниже (п. 11).

Вышеупомянутое свойство соприкасающейся плоскости позволяет использовать ее для определения кривизны пространственной кривой в данной точке. Эта кривизна всегда принимается с положительным знаком, ибо нельзя установить положительное направление вращения касательной «внутри» соприкасающейся плоскости в той же точке кривой (рис. 13).

Отметим также, что прямая, перпендикулярная соприкасающейся плоскости пространственной кривой в данной точке, называется *бинормалью* и обозначается буквой b (рис. 15, бинормаль $b \equiv z$).

8. Сопровождающий трехгранник кривой. Для изучения свойств кривых в пространстве служит подвижной трехгранник, называемый *сопровождающим трехгранником*, или *тригранником Френа*, ребра которого образуют три взаимно перпендикулярные прямые, называемые касательной t , главной нормалью ν и бинормалью b ; эти прямые принимаются за оси прямоугольной системы координат с началом в точке O на кривой l (рис. 15).

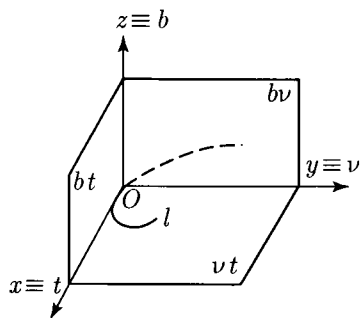


Рис. 15

Грани трехгранника называются: νt — соприкасающейся, $b\nu$ — нормальной и bt — спрямляющей плоскостями.

Сопровождающий трехгранник позволяет путем вычисления производных по его осям определить кривизну и кручение кривой в данной точке по формулам Френе¹⁾, которые приводятся ниже (п. 11, 12). Он также позволяет выявить строение пространственной кривой в окрестности точки путем проецирования кривой на его грани, принятые за плоскости проекций (рис. 16, показаны два октанта пространства).

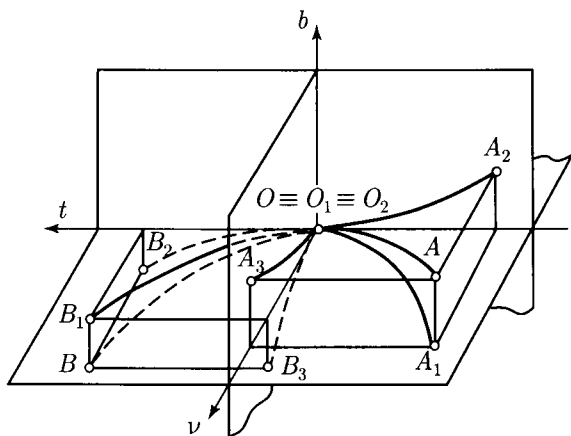


Рис. 16

Если спроецировать кривую AB на соприкасающуюся плоскость νt , принятую за горизонтальную плоскость проекций, то проекцией A_1B_1 кривой будет плоская кривая с особой точкой O , совпадающей с началом координат. При проецировании кривой AB на нормальную плоскость $b\nu$, принятую за профильную плоскость проекций, кривая распадается на две ветви O_1A_3 и O_1B_3 с точкой возврата первого рода $O_1 \equiv O$. Проекцией кривой A_2B_2 на спрямляющую плоскость bt , принятую за фронтальную плоскость проекций, станет линия перегиба с точкой перегиба $O_2 \equiv O_1 \equiv O$.

Некоторые двойные особые точки пространственных кривых определяются только по двум проекциям (рис. 17, а, точка A — узловая) ввиду возможного появления мнимых особых точек

¹⁾ Названы так по имени французского математика, который впервые получил эти формулы.

(рис. 17, б, точки B и C), называемых *конкурирующими*¹⁾ (рис. 157, точки E и L , U и F).

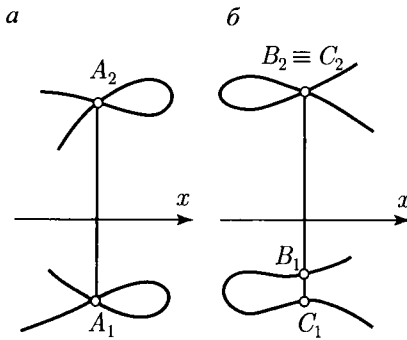


Рис. 17

После изучения плоских и пространственных кривых можно перейти к изучению инвариантов кривых: длины, кривизны и кручения. Для этого понадобится ознакомление с элементами векторного анализа.

§ 3. Элементы векторного анализа и инварианты кривых линий

Поскольку векторный анализ является отдельным разделом высшей математики, то ограничимся лишь сведениями, необходимыми для понимания дальнейшего материала. Главное внимание, как и прежде, отводится *производной и дифференциалу* векторной функции.

9. Векторная функция скалярного аргумента. *Векторная функция*, или *вектор-функция скалярного аргумента* по существу есть аналог скалярной функции, выраженный в векторной форме.

Переменный вектор $\mathbf{r}(t)$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента t , если всякому численному значению аргумента соответствует определенное значение вектора \mathbf{r} ²⁾:

¹⁾ Конкурирующими точками называются точки, расположенные на одном перпендикуляре к плоскости проекций, но на разном расстоянии от нее.

²⁾ При обозначении вектора жирной буквой (например, \mathbf{r}) черта сверху не ставится, в отличие от других обозначений (например, \vec{a} , \overrightarrow{OM} ...).

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (7)$$

Вектор \mathbf{r} можно рассматривать как радиус-вектор \overline{OM} , исходящий из начала O прямоугольной системы координат, который при изменении параметра t в заданном интервале описывает своим концом — точкой $M(x, y, z)$ — в пространстве сплошную кривую l , называемую *годографом вектор-функции* (рис. 18).

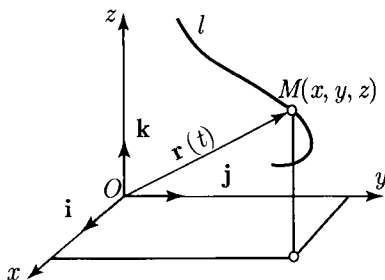


Рис. 18

Вектор, длина (модуль) которого равна 1, называется *единичным*.

Если единичные векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} суть орты координатных осей Ox , Oy и Oz соответственно, то справедливо уравнение пространственной кривой в векторной форме

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t), \quad (8)$$

где скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будут алгебраическими проекциями вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ на соответствующие координатные оси. Отсюда уравнение кривой в пространстве можно задать равносильной системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (9)$$

Положив $z = 0$, получим соответственно векторное и параметрические уравнение плоской кривой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t), \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (11)$$

Среди переменных векторов особое место занимает *бесконечно малый вектор*. Это такой вектор, модуль которого стремится к нулю; он записывается символом $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{0}$.

Вектор \mathbf{r}_0 (рис. 19) называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ при стремлении $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0.$$

Вектор-функция, как и в анализе, называется *непрерывной в данной точке*, если ее приращение, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, также бесконечно мало:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Вектор-функция, как и скалярная функция, называется *дифференцируемой в некотором промежутке*, если она имеет производную в каждой точке промежутка.

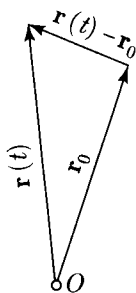


Рис. 19

Параметрические уравнения пространственной кривой

$$x = \psi(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \gamma(t)$$

в интервале $a < t < b$ определяют *регулярный кусок кривой*, если функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\gamma(t)$ в этом интервале имеют непрерывные производные первого порядка, которые в данной точке интервала не обращаются одновременно в нуль (п. 4, см. также [24]).

Производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента называется предел отношения приращения $\Delta \mathbf{r}$ вектор-функции к соответствующему приращению Δt аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (12)$$

Производная вектор-функции обозначается $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ или \mathbf{r}' .

Геометрический смысл производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ состоит в том (рис. 20), что при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 стремится к совпадению с точкой M , а вектор секущей $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ стремится к совпадению с касательной $d\mathbf{r}(t)/dt$ в точке M кривой l . Поэтому производная $d\mathbf{r}/dt$ есть вектор касательной t к годографу вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, направленный в сторону возрастания параметра t .

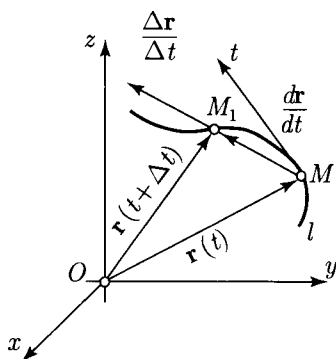


Рис. 20

Определение дифференциала вектор-функции можно свести к обычному дифференциалу (6), (6а), как произведению производной вектор-функции $\mathbf{r}'(t)$ на приращение Δt аргумента, обозначаемому символом $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\Delta t. \quad (13)$$

Тогда можно написать следующие выражения для производных вектор-функции через дифференциалы вектор-функции высших порядков:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \dots \quad (14)$$

Геометрически дифференциал вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ есть вектор $d\mathbf{r}$, направленный по касательной \overline{MN} к гладкой кривой l в данной точке M (рис. 21). Длина вектора $d\mathbf{r}$ пропорциональна бесконечно малому приращению Δt аргумента, а сам вектор $d\mathbf{r}$ отличается от соответствующего приращения $\Delta \mathbf{r}$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ на бесконечно малую $\overline{M_1N}$ более высокого порядка малости относительно Δt . Вектор $\overline{M_1N}$ представляет

собой разность между дифференциалом \overline{MN} и приращением $\overline{MM_1}$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ ¹⁾.

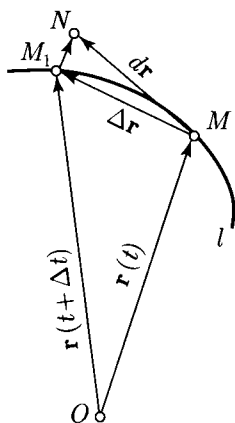


Рис. 21

Из векторной алгебры в пособии используются определения *скалярного и векторного произведений двух векторов*, а также *смешанного произведения*. Напомним, что *скалярным произведением* ненулевых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется число, равное произведению модулей $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (15)$$

Скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается также \mathbf{ab} .

Скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда *они взаимно перпендикулярны или один из них равен нулю*.

Покажем, что *если вектор касательной к кривой в данной точке единичный, то его производная будет вектором, ему перпендикулярным*.

Скалярное произведение двух единичных касательных векторов $\boldsymbol{\tau}$ ²⁾ можно написать в виде

$$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = |\boldsymbol{\tau}| |\boldsymbol{\tau}| \cos 0 = |\boldsymbol{\tau}|^2, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\tau}^2 = \text{const.}$$

¹⁾ Здесь, хотя и с опозданием, отметим, что слово «дифференциал» происходит от латинского слова differentia, означающего «разность».

²⁾ В отличие от обозначения касательной к кривой латинской буквой t , единичный касательный вектор к кривой в дальнейшем обозначается жирной греческой буквой $\boldsymbol{\tau}$ (см. уравнение (38)).

Отсюда производная этого скалярного произведения, выраженная через $\frac{d\tau}{dt}$ по касательной t в данной точке кривой, с учетом обеих частей последнего равенства будет равна

$$2\tau \frac{d\tau}{dt} = 0,$$

где в левой части равенства стоит скалярное произведение двух векторов τ и $\frac{d\tau}{dt}$. Тогда согласно (15) векторы τ и $\frac{d\tau}{dt}$ взаимно перпендикулярны.

Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор (обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) с модулем, равным произведению модулей векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} на синус угла φ между ними:

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi. \quad (16)$$

При этом ненулевой вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} с общим началом, поворачивающейся против часовой стрелки на наименьший угол от \mathbf{a} к \mathbf{b} , если смотреть с конца вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Векторное произведение векторов $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ может быть вычислено по формуле

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторов равно нулю, *если векторы коллинеарны* (т. е. параллельны одной и той же прямой) *или один из них равен нулю*.

Смешанным произведением векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} называется скалярное произведение вектора \mathbf{a} на векторное произведение $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Оно обозначается $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]).$$

Метрические задачи на нахождение длины дуг кривых, длины линий на поверхностях и другие, встречающиеся при расчете поверхностей оболочек, побуждают обратиться к понятию определенного интеграла скалярной функции $f(x)$.

При решении метрических задач разными способами выражение n -й интегральной суммы функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ записывается в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k, \quad (17)$$

а предел ¹⁾, к которому стремится n -я интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего частичного отрезка, называется *определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (17a)$$

Тогда согласно этому определению имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k, \quad (18)$$

где в левой части $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение, a и b — (соответственно нижний и верхний) пределы интегрирования.

Определенный интеграл вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ обозначается

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt. \quad (18a)$$

Расширенным понятием определенного интеграла на случай двух переменных функции $f(x, y)$ будет *двойной интеграл по области D* , как предел n -й интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, где под диаметром частичной области подразумевают наибольшее расстояние между граничными точками этой области.

Двойной интеграл обозначается так:

$$\iint_D f(x, y) d\omega. \quad (19)$$

Двойной интеграл применяется, например, для вычисления кусков площадей на поверхностях оболочек.

¹⁾ Предполагается, что предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек внутри каждой части.

10. Длина дуги кривой. На практике длину протяженной кривой, например, дороги, можно приближенно измерить шагами.

Длина дуги плоской или пространственной линии есть предел, к которому стремится периметр ломаной линии, вписанной в дугу, когда число отрезков ломаной неограниченно возрастает, а максимальная длина отрезка стремится к нулю.

Пусть ломаная, вписанная в кривую ab , заданную функцией $y = f(x)$, разбивается на отрезки M_0M_1 , M_1M_2 , ..., $M_{n-1}M_n$ (рис. 22).

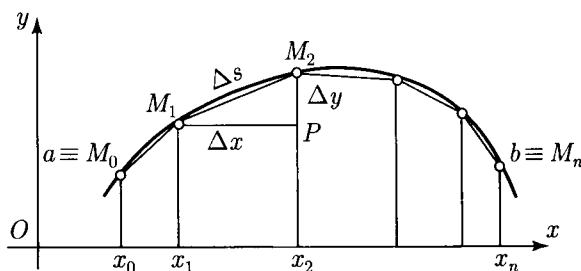


Рис. 22

Чтобы получить формулу длины дуги кривой ab ¹⁾, выделим частичный отрезок M_1M_2 ломаной линии. Из треугольника M_1M_2P имеем:

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1P^2 + M_2P^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Поскольку бесконечно малая дуга $\widetilde{M_1M_2}$ в пределе равна стягивающей ее хорде M_1M_2 :

$$\lim_{|M_1M_2| \rightarrow 0} \frac{|\widetilde{M_1M_2}|}{|M_1M_2|} = 1, \quad (20)$$

то

$$\widetilde{M_1M_2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (21)$$

Выражение $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ в уравнении (21), как пропорциональное приращению dx аргумента, в случае пренебрежения бесконечно

¹⁾ Другой способ вычисления дуги кривой рассматривается в математическом анализе на основе (18).

малой высшего порядка есть дифференциал ds длины дуги плоской кривой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (22)$$

Если в уравнении (21) за параметр принята абсцисса x , то оно примет вид

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) вместо подынтегральных выражений интеграла (17а), получим формулы для нахождения длины дуги плоской кривой: соответственно

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (24)$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (25)$$

Аналогичные формулы для нахождения длины дуги пространственной кривой соответственно примут вид

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (26)$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (27)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то длина дуги пространственной кривой определяется интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (28)$$

Вычисление длины дуги кривых линий называется *спрямлением линий*.

¹⁾ Формула (25) используется для вычисления длины тросов в вантовых конструкциях.

Дифференциал ds дуги кривой l геометрически выражается (рис. 23) отрезком касательной MN в данной точке M , так как из прямоугольного треугольника MNP имеем

$$ds^2 = MP^2 + PN^2 = MN^2,$$

где $MP = dx$, $PN = dy$, $MN = |dr|$ (рис. 21). Отсюда получим

$$\begin{aligned} dr^2 &= dx^2 + dy^2 = ds^2, \\ |dr| &= ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, длина вектора dr равна дифференциалу ds длины дуги $\widehat{MM_1}$ кривой l .

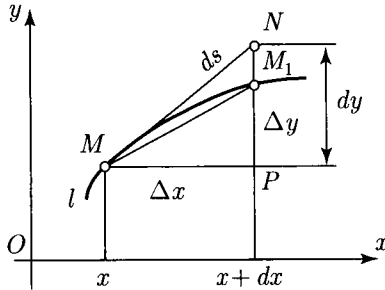


Рис. 23

В некоторых случаях вместо произвольного параметра t для длины кривой удобно выбрать *геометрический* параметр s , равный длине дуги от начальной точки до данной точки кривой. Такой параметр, выражающий геометрические свойства кривой, называют *естественным*, или *натуральным* параметром кривой, описываемой уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (30)$$

Длина кривой линии связана с ее кривизной.

11. Кривизна кривой. Кривизна кривой линии имеет большое значение не только в теории кривых, но и в теории поверхностей.

Вычисление кривизны линии связано со вторыми производными. Поэтому, начиная с этого момента, будем считать, что любая непрерывная функция, описывающая кривую, *по крайней мере дважды дифференцируема*.

Понятие о кривизне линии l дает угол φ , образованный поворотом касательной t_0 в точке M_0 кривой l при переходе

ее в точку M_1 с касательной t_1 . Этот угол называется *углом смежности* (рис. 24).

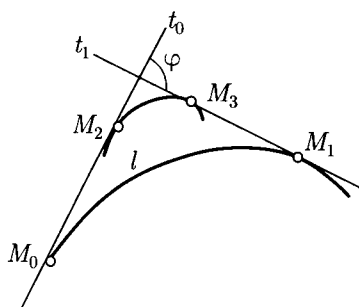


Рис. 24

Однако определить степень изогнутости линии с помощью угла смежности не удастся, так как его можно отнести к дугам $\widehat{M_0M_1}$ и $\widehat{M_2M_3}$ разной степени изогнутости. Поэтому вводится понятие средней кривизны $K_{\text{ср}}$ линии, как отношение угла смежности φ к длине дуги $\widehat{M_0M_1}$ кривой:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{|\widehat{M_0M_1}|}. \quad (31)$$

Средняя кривизна, в свою очередь, не определяет полностью кривизну линии в данной точке, ввиду того, что на различных участках линии могут быть разные кривизны.

Геометрически средняя кривизна линии представляет собой *угол поворота касательной в данной точке при перемещении касательной вдоль кривой по дуге единичной длины*.

Кривизну линии можно рассматривать также как скорость поворота касательной при перемещении данной точки по кривой. Чем больше скорость поворота касательной, тем сильнее изогнута кривая, и наоборот.

Кривизной k линии в данной точке M_0 ¹⁾ называется предел средней кривизны дуги $\widehat{M_0M_1}$, когда точка M_1 дуги стремится к точке M_0 :

$$k = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} K_{\text{ср}} = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} \frac{\varphi}{|\widehat{M_0M_1}|}.$$

¹⁾ Кривизну линии в точке обозначаем строчной буквой k , среднюю и полную кривизны — заглавной буквой K .

Можно показать, что кривизна k кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны:

$$k = \frac{1}{R}, \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{k}, \quad (32)$$

т. е. чем больше кривизна кривой в данной точке, тем меньше ее радиус кривизны, и наоборот.

Примем дугу $\widehat{M_0M_1}$ плоской кривой p , соответствующую перемещению единичного вектора τ_0 из точки M_0 в точку M_1 , за параметр Δs (рис. 25).

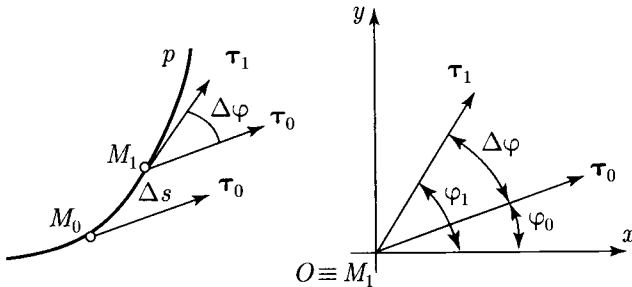


Рис. 25

Проведем из начала O прямоугольной системы координат единичные векторы τ_0 и τ_1 , приняв их за стороны угла $\Delta\varphi$ с вершиной $M_1 \equiv O$. Обозначим углы наклона каждой из сторон угла $\Delta\varphi$ к оси абсцисс соответственно буквами φ_0 и φ_1 .

Тогда угол поворота $\Delta\varphi$ определяется разностью

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0,$$

и средняя кривизна дуги Δs кривой на основе (31) равна

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (33)$$

Согласно (33) кривизна плоской кривой в данной точке при условии, что $\Delta s \rightarrow 0$, равна

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (34)$$

Кривизна линии $y = f(x)$ на основании (34) вычисляется по формуле (промежуточные выкладки опускаются)

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (35)$$

Из равнобедренного (так как векторы $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_1L}$ — единичные) треугольника M_1N_1L находим

$$LN_1 = |\Delta\tau| = 2|\tau| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Разделив обе части этого равенства на Δs , получим

$$\frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = 2 \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} = \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} = \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Переход к пределу в обеих частях этого равенства при $\Delta s \rightarrow 0$ дает

$$\frac{|d\tau|}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Так как

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1,$$

окончательно получим

$$\frac{|d\tau|}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (39)$$

На основе (39) и с учетом (34) кривизна пространственной кривой в точке равна

$$k = \frac{|d\tau|}{ds}. \quad (40)$$

Геометрический смысл уравнения (40) состоит в том, что вектор $d\tau/ds$ по длине равен кривизне k дуги кривой в данной точке, а по направлению перпендикулярен единичному касательному вектору кривой в той же точке, так как его производная перпендикулярна ему (п. 9).

Отсюда следует другое определение главной нормали пространственной кривой, эквивалентное ранее данному (п. 7).

Прямая, коллинеарная в данной точке кривой вектору $d\tau/ds$, называется главной нормалью к кривой. Единичный вектор главной нормали ν обозначается ν .

Поскольку длина вектора $d\tau/ds$ равна кривизне кривой, то формула (40) по существу раскрывает содержание первой формулы Френе для пространственных кривых

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu. \quad (41)$$

Произведение $k\nu$ в правой части (41) называется *вектором кривизны* и применяется в дальнейшем для нахождения кривых линий на поверхностях (п. 23).

При задании линии параметром s длины дуги и радиусом кривизны $R = 1/k$ с учетом (40) можно записать

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{R}, \quad (42)$$

так как левую часть этой формулы согласно (38) можно записать в виде $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$.

Из (42) следует

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)^2.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)^2} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|. \quad (43)$$

Если вектор \mathbf{r} задан своими проекциями, то можно написать

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{ds^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{ds^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Следовательно, в координатной форме формула для вычисления кривизны пространственной кривой в данной точке примет вид

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}. \quad (43a)$$

В случае задания пространственной кривой произвольным параметром ее кривизна находится по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}}{\sqrt{(\mathbf{r}'^2)^3}}. \quad (44)$$

12. Кручение кривой. Кручение является характеристикой, как правило, пространственной кривой, так как кручение плоской кривой равно нулю.

Геометрически кручением описывается *вращение соприкасающейся плоскости* tv *трехгранника Френе* вокруг *единичного вектора касательной* $\boldsymbol{\tau}$ в данной точке M_0 пространственной кривой q при его поступательном перемещении по кривой (рис. 27, грани не показаны).

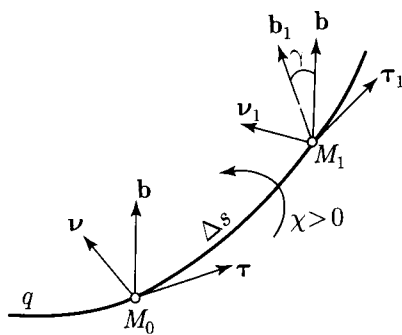


Рис. 27

Угол, образованный соприкасающимися плоскостями $\tau\nu$ и $\tau_1\nu_1$ при перемещении вершины M_0 трехгранника в ближайшую точку M_1 пространственной кривой q , можно заменить равным ему углом γ , образованным бинормальями b и b_1 , как перпендикулярами к соответствующим соприкасающимся плоскостям.

Величина, равная пределу, к которому стремится отношение угла γ между бинормальями к длине дуги Δs при стремлении точки M_1 к M_0 пространственной кривой, называется *абсолютным кручением* кривой и выражается формулой

$$\chi = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Delta s}. \quad (45)$$

Абсолютное кручение соответствует скорости вращения соприкасающейся плоскости трехгранника в данной точке кривой. Величина, обратная абсолютному кручению, называется *радиусом кручения* кривой и обозначается символом ρ :

$$\rho = \frac{1}{\chi}.$$

Кручению кривой отвечает *третья формула Френе*

$$\frac{db}{ds} = -\chi\nu. \quad (46)$$

Кручению может быть придан положительный знак ($\chi > 0$), если с возрастанием параметра s вдоль кривой вращение соприкасающейся плоскости вокруг единичного вектора касательной в данной точке кривой происходит по направлению от бинормали к главной нормали трехгранника при взгляде с конца τ (рис. 27, $\chi > 0$). В противном случае кручение имеет отрицательный знак ($\chi < 0$).

Направление кручения пространственной кривой связано с винтовым движением (п. 6).

Для пространственной кривой, заданной *произвольным параметром*, кручение с соответствующим знаком находится по формуле:

$$\chi = \frac{\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''' \rangle}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2}. \quad (47)$$

И, наконец, *вторая формула Френе, связанная с кручением пространственной кривой*, имеет вид

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \chi\mathbf{b}. \quad (48)$$

Поскольку кручение плоской кривой равно нулю, то *третья и вторая формулы Френе для плоских кривых* соответственно примут вид:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau. \quad (50)$$

Заметим, что при одновременных поступательном и вращательном движениях по кривой *трехгранник* совершает винтовое движение вокруг касательной (п. 6).

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В данной главе выясняются аналитическая и геометрическая природа поверхностей и особенности оболочек пространственных конструкций. Раскрывается содержание двух фундаментальных квадратичных форм, являющихся ключом к решению многих задач на поверхности. Даются понятия нормальной, гауссовой и средней кривизн поверхностей с формулами их вычисления. Приводятся примеры, показывающие строение формы типовых поверхностей оболочек с классификацией их точек и описанием характерных линий, а также сообщаются начальные сведения об изгибании и разворачивании поверхностей.

§ 4. Понятие поверхности

13. Аналитическое представление поверхности. Поверхность, в отличие от линии, является *двумерным образом трехмерного пространства* и, как правило, описывается функцией двух переменных.

Простое, но не полное понятие поверхности дал еще Евклид, считая ее фигурой, имеющей лишь длину и ширину. В действительности понятие поверхности значительно шире и сложнее, так как оно охватывает все разнообразие созданных природой и человеком форм, обобщенных в геометрический образ.

Аналитическое представление поверхности связано с ее уравнением. С этой точки зрения поверхность можно определить как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению в неявном виде

$$F(x, y, z) = 0 \quad (51)$$

или уравнению, разрешенному относительно одной из координат в виде

$$z = F(x, y). \quad (52)$$

Более общее аналитическое описание поверхности сводится к выражению координат ее точек через два независимых пара-

метра, обозначаемых обычно латинскими буквами u и v , в виде системы уравнений

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \gamma(u, v). \quad (53)$$

Если координаты x , y , z точки поверхности отнести к радиус-вектору, то получим равносильное уравнение в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (54)$$

или подробнее

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}\varphi(u, v) + \mathbf{j}\psi(u, v) + \mathbf{k}\gamma(u, v). \quad (55)$$

На рис. 28 показана произвольная поверхность Φ , порожденная рядом последовательных положений в пространстве движущейся кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, изменяющей свою форму. Положение любой точки M на поверхности можно задать двумя параметрами u и v . Поэтому говорят, что поверхность в трехмерном пространстве представляет собой *двухмерное множество точек пространства*, заданное уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Параметры u и v , определяющие точку поверхности, называются *криволинейными координатами поверхности* (п. 15).

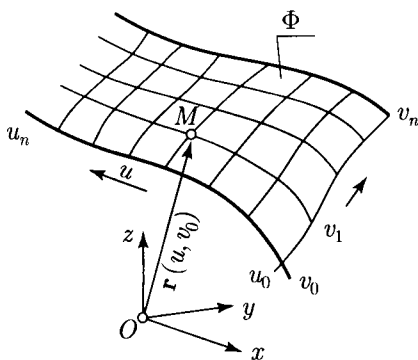


Рис. 28

Однако не всякое множество точек или линий определяет поверхность (п. 14, рис. 30).

Существование поверхности в первую очередь предполагает *взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и парами значений параметров u , v в области их изменения*. Это означает, что на поверхности линии *одного семейства* не должны пересекаться друг с другом. Другими словами, через каждую точку поверхности проходит *только одна линия одного семейства или несколько линий разных семейств*.

Следующее требование, определяющее поверхность, заключается в ее непрерывности, т. е. при бесконечно малом изменении параметров u и v точка поверхности перемещается на бесконечно малое расстояние.

Поверхность называется *регулярной*, если каждая ее точка содержит окрестность (определение которой дается ниже), допускающую регулярную параметризацию (53). Регулярная поверхность описывается k раз дифференцируемой функцией, где $k \geq 1$.

При $k = 1$ поверхность называется *гладкой*. Гладкая поверхность в n -мерном евклидовом пространстве входит в понятие многообразия [7].

Далее предполагается, что в каждой точке регулярной поверхности функция имеет непрерывную производную не ниже второго порядка.

Образование регулярной поверхности, заданной уравнением (51) или (52), показано на рис. 29, а. Здесь поверхность Σ рассматривается как множество точек пространства, полученных отображением простой области D , расположенной в координатной плоскости Oxy ¹⁾.

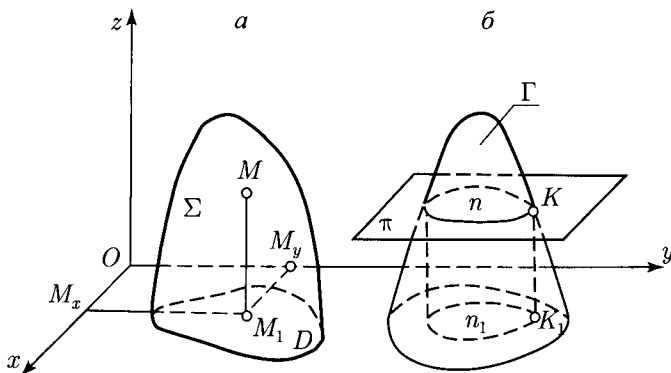


Рис. 29

Такая поверхность называется *простой поверхностью*. Однозначное соответствие между точками поверхности и области D , как непрерывную функцию координат x и y , можно реализовать геометрически, т. е. лучами, параллельными оси аппликат Oz . Обратное отображение множества точек простой поверхности Σ

¹⁾ Простой областью плоскости называется множество точек внутри замкнутой кривой (в частности, внутренность круга).

на область D плоскости Oxy порождает проекцию поверхности. При этом каждой точке M поверхности соответствует единственная точка M_1 на ее проекции — области D .

Разновидность простой поверхности, определяемой как геометрическое место точек, для которых левая часть (51) имеет постоянное значение C , называется *поверхностью уровня* (рис. 29, б, поверхность Γ).

Линия n сечения поверхности уровня плоскостью π , параллельной координатной плоскости Oxy в данной точке K , называется *линией уровня*.

Поверхность Σ при надлежащем выборе осей координат Ox , Oy , Oz (рис. 29, а) допускает параметризацию вида

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

По аналогии с окрестностью точки на линии, вводится понятие окрестности точки на регулярной поверхности.

Под *окрестностью точки A на поверхности*, заданной уравнением (51) или (52), подразумевается пересечение поверхности с внутренностью сферы малого радиуса с центром в точке A .

Точка X_0 поверхности считается *предельной*, или *точкой накопления*, если существует последовательность точек, имеющая предел в той же точке X_0 .

Если простая поверхность содержит все свои предельные точки, то она называется *замкнутой*, как, например, сфера (рис. 101), кольцо (рис. 104) и другие.

Замкнутая часть поверхности вместе с ее границей называется *куском поверхности*.

Образом простой поверхности при однозначном отображении в пространство является *общая поверхность*, но изучение дифференциально-геометрических характеристик поверхности начинается с простой поверхности, а точнее, с окрестности ее точки.

Обобщенным геометрическим образом регулярных поверхностей будет *топологическая поверхность*, представляющая собой однозначное и непрерывное отображение одного точечного множества на другое при любых деформациях, не имеющих разрывов [22].

Топологическую поверхность можно представить в виде эластичной пленки, способной принимать при деформации разнообразные формы (рис. 148–150).

Регулярная поверхность имеет выход в многомерное пространство, но ее форма при этом подвергается сильному искажению.

Аналитические способы задания регулярных поверхностей уравнениями могут быть выражены в графической форме в виде однозначного чертежа.

14. Геометрическое представление поверхности. Под *геометрическим представлением* регулярной поверхности будем понимать задание поверхности с учетом вышеперечисленных требований (п. 13), но изображенных однозначным чертежом, без составления уравнения, т. е. графическим способом.

Для задания поверхности общего вида в пространстве графическим способом необходимо иметь *три линии*, каждая из которых может быть либо кривой, либо прямой.

Предположим, что заданы только две произвольные кривые l и n и пересекающая их в точках S и T прямая m (рис. 30). При перемещении точки T по кривой n в точку T_1 , считая точку S неподвижной, получим некоторую коническую поверхность с вершиной S (п. 36).

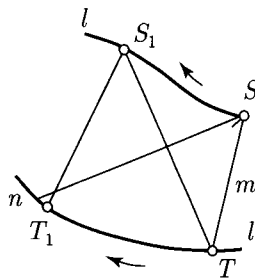


Рис. 30

При перемещении вершины S этой конической поверхности по кривой l в точку S_1 (точки T и T_1 неподвижны) получим *новую коническую поверхность*, но, вообще говоря, другой формы.

Следовательно, перемещение прямой m между двумя кривыми l и n не задает поверхности общего вида; оно образует лишь зависящую от двух параметров кривых *линейчатую конгруэнцию* [23] (т. е. *двухпараметрическое множество прямых*), обозначаемую символом ∞^2 .

Чтобы выделить из линейчатой конгруэнции ∞^2 линейчатую поверхность общего вида [11], проведем третью кривую t , расположив ее, например, между заданными кривыми l и n , а затем найдем точку Q ее пересечения с конической поверхностью TST_1 (рис. 31). Тогда положение прямой SP , проходящей через точку Q и пересекающей кривую n в точке P , окажется единственно

возможным, так как между точками кривых l и n устанавливается взаимно однозначное соответствие.

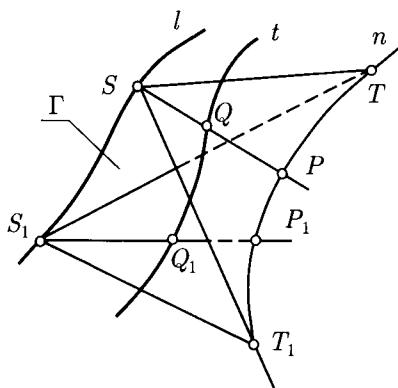


Рис. 31

Повторяя описанные построения, получим множество образующих поверхности — прямых SP, SP_1, \dots , которые при перемещении по трем кривым образуют линейчатую поверхность общего вида (рис. 31, поверхность Γ).

Линейчатая конгруэнция находит применение при конструировании поверхностей сложной формы [19].

На рис. 32 показан кусок линейчатого однополостного гиперболоида общего вида, образованного пересечением подвижной прямой m соответственно в точках D, E, F трех скрещивающихся прямых a, b, c , не параллельных одновременно ни одной плоскости. По этой схеме можно получить эллиптический гиперболоид, в частности, однополостный гиперболоид вращения (рис. 99).

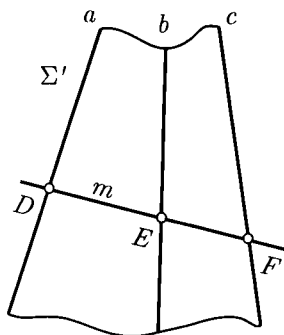


Рис. 32

Образование некоторых поверхностей второго порядка основывается на их проективных свойствах, связанных с *бесконечно удаленными*, или *несобственными элементами проективного пространства*, т. е. реконструированного евклидова пространства: *несобственными точками, прямыми и плоскостями* [25].

В этом случае (рис. 33) каждая *прямая m* дополняется *одной бесконечно удаленной точкой F_∞* , а *параллельные прямые и плоскости считаются пересекающимися соответственно в несобственной точке F_∞ и по несобственной прямой S_∞* .

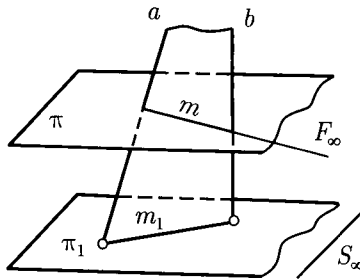


Рис. 33

Прямые m, m_1, \dots разных направлений, расположенные в параллельных плоскостях π, π_1, \dots , пересекаются в бесконечности с бесконечно удаленной прямой S_∞ , расположенной в одной плоскости, называемой *плоскостью параллелизма*.

Например, для воспроизведения линейчатого гиперболического параболоида (рис. 91) вместо трех скрещивающихся прямых a, b и c достаточно задать две скрещивающиеся прямые AB и CD , если пересекающая их подвижная прямая BC во всех положениях остается параллельной координатной плоскости Ouz , принятой за плоскость параллелизма. Здесь бесконечно удаленные точки F_∞, \dots пересечения в бесконечности положений подвижной прямой BC с параллельной им плоскостью Ouz составляют *несобственную прямую* этой плоскости, заменяющую *третью скрещивающуюся прямую поверхности* (рис. 91, точка F_∞ и прямая S_∞ не показаны).

Линейчатые поверхности, образованные с помощью плоскости параллелизма (коноид, линейчатый гиперболический параболоид, цилиндроид¹⁾) называются *поверхностями с плоскостями параллелизма*, или *поверхностями Каталана* — по имени ученого, открывшего их.

¹⁾ Цилиндроид в пособии не рассматривается.

Таким образом, накладывая на задание поверхности определенные условия и задавая закон передвижения линии, производящей поверхность, можно получать различные их виды.

Способ образования поверхности Φ непрерывным движением в пространстве одной линии m — образующей — вдоль другой линии n — направляющей — по определенному закону, называется *кинематическим* (рис. 34 и др.).

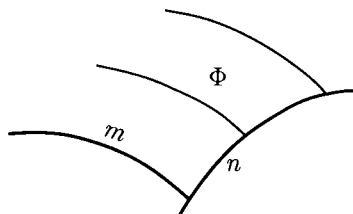


Рис. 34

Отдельные виды поверхностей образуются движением самой поверхности (рис. 104, 132), а некоторые поверхности имеют два закона образования (рис. 103, 117, 126 и др.).

Кинематический способ отвечает наглядности изображения поверхности и удобен для задания ее на однозначном чертеже, а также уравнением. На ортогональном чертеже поверхность задается совокупностью своих проекций (каждая из них состоит из проекций геометрических элементов: точек, линий и других фигур), называемой для краткости *определителем поверхности*, а по существу являющейся *минимальным условием задания поверхности*. Переход от определителя к построению полного чертежа поверхности производится посредством *алгоритма*, вытекающего из закона образования поверхности.

Например, в определитель поверхности на чертеже прямого кругового конуса (рис. 35) входят: его вершина — неподвижная точка $S(S_1, S_2)$, ось вращения $I(i_1, i_2)$ и угол φ наклона образующей $MS(M_1S_1, M_2S_2)$ к оси вращения. Алгоритм построения чертежа конуса, как поверхности вращения (п. 40), сводится к нахождению проекций M_1S_1 и M_2S_2 образующей MS , описывающей концом — точкой $M(M_1, M_2)$ — окружность $n(n_1, n_2)$ с центром $C(C_1, C_2)$ и радиусом R , проецирующуюся на фронтальную плоскость проекций прямой n_2 , перпендикулярной оси I конуса (рис. 36). Заполнив горизонтальную и фронтальную проекции конуса соответственно двумя семействами линий в виде пересекающихся окружностей и прямых, получим *полный чертеж конуса*. Проекция контура конуса — окружность и равнобедренный треугольник — называются *очерками поверхности*.

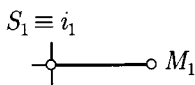
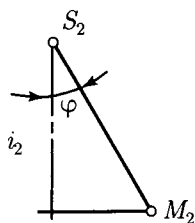


Рис. 35

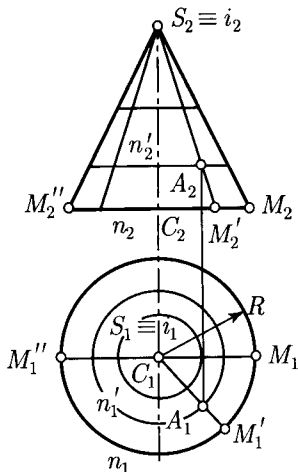


Рис. 36

Другим определителем конуса служит вершина $S(S_1, S_2)$ и окружность $n(n_1, n_2)$ его основания.

Однозначность ортогонального чертежа поверхности геометрически выражается тем условием, что каждая точка поверхности принадлежит линии поверхности, чаще всего образующей.

Поверхность считается заданной на чертеже, если по одной проекции точки (скажем, горизонтальной A_1) на соответствующей проекции $M'_1 S_1$ образующей можно построить другую (например, фронтальную) проекцию A_2 точки на соответствующей проекции $M_2 S_2$ образующей, и обратно (рис. 36, точка A). Такой чертеж называется взаимно однозначным, или обратимым.

Непрерывность поверхности на чертеже геометрически выражается построением семейств сближенных друг к другу линий, называемых в совокупности непрерывным каркасом поверхности, если каждая линия одного семейства принадлежит поверхности. Очевидно, что линии разных семейств должны пересекаться между собой, образуя сеть поверхности (п. 15).

Однако плотность линий каркаса, изображаемых на чертеже поверхности, невелика, поэтому он напоминает дискретный каркас (п. 34).

Роль однозначного и полного чертежа поверхности возрастает при изображении нерегулярных, или незакономерных поверхно-

стей (п. 54), хотя современным компьютерам доступно составление чертежей без помощи руки человека.

Аналитическое и геометрическое представления, дополняя друг друга, расширяют взгляд на поверхности и способствуют их всестороннему изучению.

15. Кривые линии и координатная сеть на поверхности.

Геометрически образующие и направляющие линии всегда принадлежат поверхности (рис. 34 и др.).

По аналогии с декартовыми прямоугольными координатами на плоскости, на поверхности также вводятся криволинейные координаты, соответствующие параметрам u и v (п. 13). Используя эти координаты, можно задать произвольную кривую на регулярной поверхности. Приведем выражения для задания такой кривой (рис. 37).

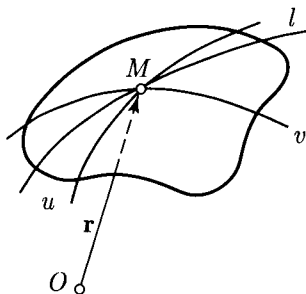


Рис. 37

Пусть заданы поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ и лежащая на ней кривая l , проходящая через точку M , определяемую криволинейными координатами u и v , связанными функциональной зависимостью с параметром t . Тогда произвольную кривую на поверхности можно задать так называемыми *внутренними уравнениями*

$$u = u(t), \quad v = v(t). \quad (56)$$

При подстановке соотношений (56) в уравнение поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ получим *параметрическое уравнение кривой линии на поверхности*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \quad (57)$$

С данной системой криволинейных координат связаны *координатные линии* — кривые, вдоль которых одна из координат (u или v) остается постоянной (рис. 38). *Линией u* называют координатную линию, вдоль которой меняется только координата u , а координата v постоянна; *линией v* называют линию, вдоль

которой меняется только координата v , а координата u постоянна.

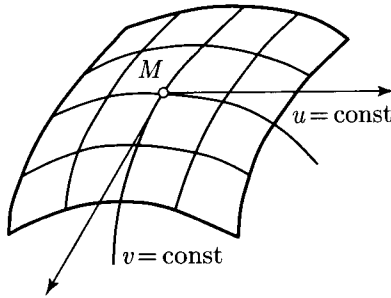


Рис. 38

Совокупность взаимно пересекающихся линий u и v называется *координатной сетью поверхности*.

Координатные линии можно рассматривать как сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz ; эти сечения образуют *ортогональную сеть координатных линий на поверхности*.

По аналогии с плоской гладкой кривой, имеющей в каждой точке единственную касательную (рис. 2), прямая t , касательная в данной точке поверхности к кривой l , принадлежащей поверхности, называется *касательной к поверхности* (рис. 39). Касательная определяется полным дифференциалом

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} u'_t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} v'_t \right) dt, \quad (58a)$$

или

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv = (\mathbf{r}'_u u'_t + \mathbf{r}'_v v'_t) dt, \quad (58b)$$

где $\mathbf{r}'_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$ и $\mathbf{r}'_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$ — соответствующие частные производные, а du и dv — соответствующие дифференциалы криволинейных координат u и v .

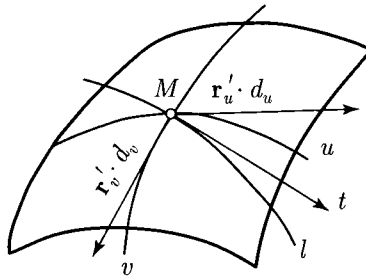


Рис. 39

Частные производные $\partial \mathbf{r}/\partial u$ и $\partial \mathbf{r}/\partial v$ геометрически представляют собой *угловые коэффициенты касательных к линиям сечений поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям*.

Полный дифференциал вектор-функции двух переменных, как и в математическом анализе, является главной частью полного приращения функции, линейной относительно приращений двух независимых переменных.

Направление касательного вектора $d\mathbf{r}$ в данной точке поверхности называется *направлением на поверхности*.

Для определения направления вектора $d\mathbf{r}$ в данной точке поверхности достаточно знать отношение дифференциалов du/dv (которое зависит от значения параметра t). Вектор $d\mathbf{r}$ также соответствует *направлению кривой на поверхности*.

Угол φ между векторами $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$, касательными к двум кривым l_1 и l_2 в их общей точке M (рис. 40), называется *углом между кривыми на поверхности*. Его величина определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{d\mathbf{r}\delta\mathbf{r}}{\sqrt{(d\mathbf{r})^2} \sqrt{(\delta\mathbf{r})^2}}.$$

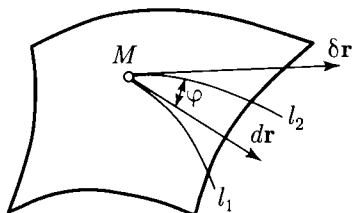


Рис. 40

16. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, нормальное сечение поверхности. Полный дифференциал функции двух переменных позволяет определить касательную к любой линии на поверхности (п. 15).

Плоскость, в которой расположены все прямые, касательные к кривым линиям поверхности в их общей точке, называется *касательной плоскостью поверхности*. Очевидно, что для задания касательной плоскости достаточно двух пересекающихся прямых, коллинеарных векторам \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v и касающихся двух кривых u и v в их общей точке M (рис. 41).

Касательная плоскость имеет с поверхностью касание не ниже второго порядка малости.

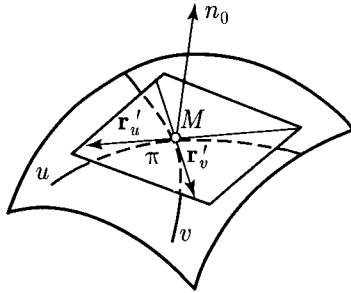


Рис. 41

Уравнение касательной плоскости в данной точке поверхности $z = z(x, y)$ можно записать в виде

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \quad (59)$$

где X, Y, Z — текущие координаты, p и q — значения частных производных соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данной точке.

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости поверхности в неособой точке, называется *нормалью к поверхности* (рис. 41, нормаль n_0 , касательная плоскость π).

Уравнение нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в данной точке записывается в виде

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}. \quad (60)$$

Так как вектор нормали \mathbf{n}_0 к поверхности в данной точке перпендикулярен векторам \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v , то единичный вектор \mathbf{n} по направлению нормали \mathbf{n}_0 к поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ равен

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||}, \quad (61)$$

где в знаменателе стоит модуль векторного произведения двух векторов.

Пусть плоскость α содержит нормаль n_0 в данной точке M поверхности. Тогда кривая l_0 , полученная пересечением поверхности плоскостью α , называется *кривой нормального сечения*, или, короче, *нормальным сечением* (рис. 42, кривая l_0).

Нормальное сечение имеет большое значение в технике, а также непосредственно связано с вычислением главных кривизн и гауссовой кривизны поверхности (п. 24, 25).

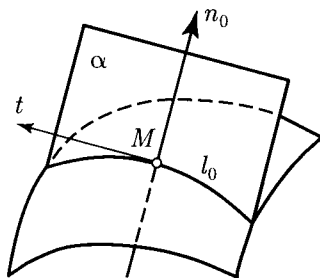


Рис. 42

17. Особые точки регулярной поверхности. На поверхностях, как и на линиях (п. 4), могут существовать наряду с неособыми и особые точки, нарушающие регулярность поверхности.

Точка поверхности $F(x, y, z) = 0$, у которой все первые частные производные F'_x, F'_y, F'_z не обращаются одновременно в нуль, т. е. хотя бы одна из них не равна нулю, называются *неособыми*, или *обыкновенными точками поверхности*, а поверхность, не имеющая особых точек, называется *неособой*.

Например, однополостный гиперболоид вращения (п. 42), заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, состоит из неособых точек, так как при дифференцировании его уравнения производные F'_x, F'_y, F'_z обращаются в нуль только при условии $x = y = z = 0$, которое противоречит уравнению поверхности. Иначе говоря, поверхность в каждой неособой точке допускает параметризацию в виде $z = z(x, y)$.

Геометрически это означает, что через каждую неособую точку M регулярной поверхности проходит единственная касательная плоскость π (рис. 41).

Точки поверхности $F(x, y, z) = 0$, где все первые частные производные F'_x, F'_y, F'_z одновременно обращаются в нуль или хотя бы одна из них не существует, называются *особыми точками поверхности*.

Наличие особых точек на поверхности зависит от способа ее задания. Например, сфера, заданная уравнениями в векторно-параметрической форме (п. 43), имеет в полюсах S и S_1 (рис. 101) особые изолированные точки.

Полюсы сферы суть две вырожденные точки S и S_1 семейства меридианов и параллелей на сфере с осью вращения Oz , которые, образно говоря, образуют два «отверстия» на сфере, нарушая ее регулярную параметризацию.

В особой точке поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ векторное произведение $[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] = \mathbf{0}$ ввиду коллинеарности двух векторов, поэтому ее нормаль не определена. Отсюда следует, что точка пересечения нормали n_0 с поверхностью должна быть неособой.

Особые точки, полученные посредством касательной и одновременно секущей плоскости в данной точке поверхности, описаны ниже (п. 32).

Если среди вторых частных производных $F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{zz}$ есть отличные от нуля, то поверхность имеет *двойную особую точку*.

Например, конус вращения второго порядка с уравнением $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 43) в вершине O , совпадающей с началом координат, имеет *двойную особую коническую точку* [24].

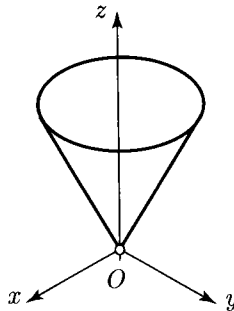


Рис. 43

К регулярным поверхностям, содержащим двойные особые точки, зависящие от их формы (естественные особые точки), относятся, кроме конических, также точки некоторых нелинейчатых поверхностей второго и четвертого порядков (рис. 106, 107, 110 и др.), а также линейчатых с ребром возврата (рис. 87, 128 и др.).

Вопрос о том, считать ли точку поверхности неособой или особой, в отдельных случаях требует специального исследования [20].

Появление особых точек следует учитывать на поверхностях, применяемых в технике и строительстве.

Так, в гидравлике при резком изменении потока воды в замкнутом объеме образуется гребень с заострением в точке возврата первого рода, который усиливает давление на стенки емкости, что может привести к кипению воды с отрицательными последствиями.

Особые точки и линии могут возникать при соприкосновении оболочки с опорным контуром сооружения, что приводит

к непредвиденным деформациям оболочек. С особыми точками на поверхностях приходится считаться в различных областях науки и техники [7].

§ 5. Особенности поверхностей оболочек пространственных конструкций

В данном параграфе освещаются особенности, присущие оболочкам строительных пространственных конструкций, и их влияние на формообразование оболочки. Раскрывается доминирующая роль кривизны поверхности в расчете и проектировании оболочек.

18. Понятие оболочки. Под *оболочкой* в строительстве понимают неплоскую тонкостенную конструкцию, несущую нагрузку и перекрывающую большепролетные сооружения, протяженностью не менее 50 м, где нежелательно или технически невозможно построение промежуточных опор.

Оболочка считается *пологой*, если в каждой ее точке угол между плоскостью ее основания и касательной плоскостью не превышает 18° , в ту или иную сторону от основания, в зависимости от типа поверхности.

Поверхность, описываемая одним из уравнений (51)–(55) и делящая повсюду толщину оболочки пополам, называется *срединной поверхностью* (рис. 44, поверхность Γ). От срединной поверхности ведется расчет оболочки по ее компонентам [8], которые рассматриваются в специальных курсах по железобетонным и металлическим конструкциям. Там же дается классификация наиболее распространенных пространственных конструкций: куполов, цилиндрических оболочек, составных оболочек и складок, висячих покрытий и др.

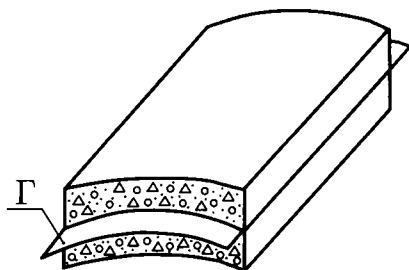


Рис. 44

Оболочки имеют ряд преимуществ перед другими строительными конструкциями — арками, фермами и т. п. Они не только перекрывают большое пространство, но и обладают меньшей массой, а значит, экономят расход материала на строительство сооружения.

Кроме того, оболочки отличаются от других конструкций оригинальностью формы, что способствует выбору разнообразных архитектурных композиций зданий. Некоторые оболочки имеют многофункциональное или даже универсальное предназначение (п. 39, 48).

Вместе с тем расчет и проектирование оболочек пространственных конструкций является сложным процессом, требующим участия высококвалифицированных специалистов разных профессий: инженеров-конструкторов, архитекторов, проектировщиков, математиков, программистов и чертежников, а иногда и привлечения специалистов других профессий для проведения экспериментальных исследований.

19. Основы формообразования поверхностей оболочек.

Исходными данными при расчете и проектировании оболочек часто выбирают размеры пролетов плана, обозначаемых $2a$ и $2b$, и стрелок f_1 и f_2 контурных образующих оболочки, увязанных с опорным контуром сооружения.

Забегая вперед (п. 47), приведем в качестве примера один из этапов упрощенного расчета пологой оболочки положительной кривизны в виде эллиптического параболоида (рис. 115, 116), принимая его размеры приблизительно равными соответствующим размерам проекции на горизонтальную плоскость, с постоянной гауссовой кривизной в каждой точке поверхности (п. 24, 25).

Условия равновесия оболочки приводят к трем дифференциальным уравнениям [12]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} N_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} N_2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} S = q,$$

где N_1 и N_2 — нормальные усилия, направленные параллельно координатным осям соответственно Ox и Oy , S — сдвигающие усилия; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — вторые частные производные, а по существу, главные кривизны p_1 и p_2 в вершине поверхности — точке O , $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ — смешанная производная, выявляющая кривизну кручения оболочки; см. формулы (112a), (112б).

Таким образом, главные кривизны, определяющие гауссову кривизну (п. 24) являются одним из *компонентов расчета оболочки*.

С другой стороны, гауссова кривизна позволяет характеризовать строение поверхности, которое особенно важно учитывать в местах соединения ее с опорным контуром сооружения, ибо незначительное изменение стрелок подъема или провисания (рис. 116, 118) влияет на жесткость конструкции в целом.

Поэтому в данном случае доминирующее значение принадлежит *строению формы поверхности в каждой ее линии и даже в отдельной точке* (п. 32), что вызывает необходимость применения методов дифференциальной геометрии.

Большую роль играет *правильный выбор типа оболочки в зависимости от сочетаний формы плана и протяженности сооружения*.

Например, для большепролетных сооружений на прямоугольном плане малопригодны цилиндрические оболочки нулевой гауссовой кривизны (рис. 53 и др.), как обладающие недостаточной жесткостью конструкции в направлении прямолинейных образующих, подвергающихся изгибу. Наоборот, выпукло-вогнутые оболочки двойкой отрицательной кривизны (рис. 52 и др.) представляют собой жесткие формообразования и могут использоваться в весьма протяженных *висячих конструкциях* (рис. 145).

Можно сказать, что несущая способность оболочки является функцией ее геометрической формы, или, иными словами, *геометрия поверхности работает на прочность конструкции сооружения, его долговечность*.

На формообразование поверхностей оболочек влияет *функциональное предназначение сооружения*. Так, здания, используемые для различных зрелищных мероприятий с концертными залами, где необходимы повышенные акустические характеристики, часто покрывают куполами с радиусами, превышающими высоту помещения примерно в два раза.

Отпечаток на формообразование оболочек накладывают, как уже отмечалось, *свойства современных строительных материалов*. На смену громоздким плитам и оболочкам из железобетона приходят сборно-монолитные и монолитные покрытия сооружений, а также сооружения с каркасом из высокопрочной стали.

Своеобразную форму имеют *оболочки из легко деформирующихся материалов*: пластиков, синтетических тканей и др. (п. 57).

При выборе формы оболочки учитываются ее *эстетические и экологические качества*, а также *связь с окружающей средой*.

И, как всегда, не остаются в стороне *вопросы технологии, сборки, монтажа оболочки и экономичности строительства*, где преимущество принадлежит линейчатым поверхностям оболочек отрицательной кривизны (п. 38, 39, 48, 50).

Присутствие прямолинейных элементов (образующих) позволяет собирать криволинейную поверхность опалубки из простых прямых (досок), с предварительным напряжением арматуры. Протяженность конструкции такой тонкостенной оболочки приводит к экономии материала и удешевлению строительства.

При расчете и проектировании пространственных конструкций, наряду с вычислением гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки (п. 40 и др.), возникают *метрические задачи на нахождение длины дуг кривых, размеров площадей кусков поверхностей и другие*, которые для своего решения требуют знания *двух фундаментальных квадратичных форм поверхности*.

§ 6. Две квадратичные формы поверхности

Квадратичные формы называются так потому, что описываются однородными многочленами второго порядка.

При расчете и проектировании поверхностей оболочек применяются первая и вторая квадратичные формы ¹⁾.

20. Первая квадратичная форма поверхности. Первая квадратичная форма главным образом предназначена для вычисления *длины бесконечно малых дуг кривых линий на поверхностях*. Поэтому она называется также *линейным элементом поверхности*.

Первая квадратичная форма имеет следующий сокращенный вид:

$$I = d\mathbf{r}^2, \quad \text{или} \quad I = ds^2. \quad (62)$$

Это означает соответственно: скалярный квадрат полного дифференциала $d\mathbf{r}$ радиус-вектора \mathbf{r} текущей точки на поверхности, или квадрат дифференциала ds длины бесконечно малой дуги на поверхности в той же точке (30).

¹⁾ Третья и четвертая квадратичные формы в пособии не рассматриваются.

Рассмотрим регулярную поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ с касательными векторами \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v к координатным линиям u и v в точке их пересечения (рис. 45).

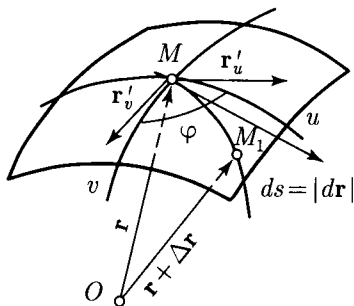


Рис. 45

При перемещении радиус-вектора \mathbf{r} из точки M в ближайшую точку M_1 его конец M опишет на поверхности дугу $\overline{MM_1}$ кривой по заданному направлению касательного вектора $d\mathbf{r}$ в той же точке, длина которого согласно (30) равна дифференциалу длины дуги: $ds^2 = d\mathbf{r}^2$.

Тогда квадрат полного дифференциала двух переменных на основании (586) примет вид

$$d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv)^2. \quad (63)$$

Раскрывая скобки в этом выражении, получим

$$d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}'_u{}^2 du^2 + 2\mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v du dv + \mathbf{r}'_v{}^2 dv^2. \quad (64)$$

Введем коэффициенты, которые обозначаются символами E , F и G :

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_u{}^2, \\ F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2. \end{aligned} \quad (65)$$

При подстановке значений коэффициентов E , F и G в равенство (64) первая квадратичная форма поверхности примет вид

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (66)$$

Коэффициенты E и G представляют собой квадраты первых частных производных по параметрам u и v в данной точке поверхности. Если за параметры u и v координатных линий принять параметр s длины дуги, то $E = G = 1$.

Коэффициент F выражает угол между векторами \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v , или угол между координатными линиями u и v (рис. 45, угол φ) в данной точке поверхности, который согласно (16) равен

$$F = \sqrt{EG} |\cos \varphi|. \quad (67)$$

В случае ортогональности координатных линий $F = 0$.

Первая квадратичная форма всегда неотрицательна, ибо коэффициенты E и G согласно (65) больше или равны нулю.

При задании поверхности уравнением $z = z(x, y)$ коэффициенты первой квадратичной формы равны

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_x{}^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 + p^2, \\ F &= \mathbf{r}'_x \mathbf{r}'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = pq, \\ G &= \mathbf{r}'_y{}^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + q^2, \end{aligned} \quad (68)$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ — первые частные производные в обозначениях Монжа.

С учетом (66) первая квадратичная форма принимает вид

$$I = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2. \quad (69)$$

21. Метрические задачи на поверхности. Приведем основные метрические задачи, решаемые с помощью первой квадратичной формы.

Если на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ задана произвольная кривая l (рис. 37), то для нахождения длины линии можно воспользоваться уравнениями (56) и (57).

Чтобы найти длину дуги кривой на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ с концевыми точками M_1 и M_2 , соответствующими значению параметров t_1 и t_2 (рис. 46), удобно воспользоваться интегралом вида

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds,$$

подставив вместо дифференциала длины дуги ds его выражение через первую квадратичную форму поверхности (66) в виде

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (70)$$

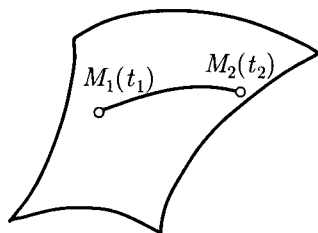


Рис. 46

Затем, интегрируя (70) по параметру t , получим формулу для вычисления длины дуги на поверхности

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (71)$$

Эту формулу на основании (19а) и (57) можно переписать по-другому:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(u(t), v(t))| dt = \int_{M_1}^{M_2} |d\mathbf{r}(u, v)| = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{I}, \quad (72)$$

где I — обозначение первой квадратичной формы поверхности.

Способы вычисления площади куска регулярной поверхности подробно описаны в математическом анализе и по существу проще, чем приведенные в учебниках по дифференциальной геометрии.

Вычисление площади куска поверхности с привлечением первой квадратичной формы сводится к измерению бесконечно малых плоских фигур (параллелограммов), описанных около поверхности, с последующим суммированием их площадей при переходе к пределу, который определяется двойным интегралом (20), выраженным через дискриминант первой квадратичной формы:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (73)$$

При задании поверхности $z = z(x, y)$ выражение площади примет вид

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (73a)$$

22. Вторая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма служит для вычисления *кривизны бесконечно малых дуг кривых линий на поверхностях* и, совместно с первой квадратичной формой, определяет *главные кривизны регулярной поверхности*.

Сокращенно вторая квадратичная форма выражается так:

$$\Pi = \mathbf{n} d^2 \mathbf{r}, \quad \text{или} \quad \Pi = -d\mathbf{n} d\mathbf{r}, \quad (74)$$

что означает соответственно скалярное произведение полного дифференциала второго порядка $d^2 \mathbf{r}$ на единичный вектор нормали \mathbf{n} в данной точке поверхности или скалярное произведение векторов $d\mathbf{n}$ и $d\mathbf{r}$ с обратным знаком.

Пусть по-прежнему задана регулярная поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ с произвольной кривой l (рис. 47), проходящей через точку M с касательной плоскостью π и с единичным вектором нормали \mathbf{n} в той же точке к поверхности.

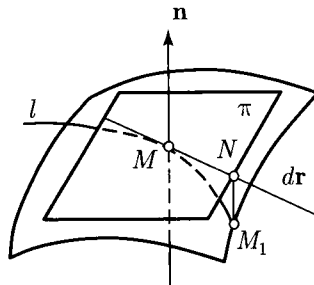


Рис. 47

В отличие от первой квадратичной формы, перемещение точки M по кривой l в ближайшую точку M_1 происходит с отклонением кривой от касательного вектора $d\mathbf{r}$ на отрезок M_1N , перпендикулярный касательной плоскости π , с *точностью не ниже второго порядка малости*, который выражается квадратом полного дифференциала функции двух переменных.

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{r} &= d(d\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv) = \\ &= \mathbf{r}''_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}''_{uv} du dv + \mathbf{r}''_{vv} dv^2 + \mathbf{r}'_u d^2 u + \mathbf{r}'_v d^2 v. \end{aligned} \quad (75)$$

При скалярном умножении каждого члена этого равенства на единичный вектор нормали \mathbf{n} , с учетом обращения квадратов

дифференциалов из (75) в нуль вследствие перпендикулярности вектора \mathbf{n} к каждому из векторов \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v , получим

$$\mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \mathbf{n}r''_{uu} du^2 + 2\mathbf{n}r''_{uv} du dv + \mathbf{n}r''_{vv} dv^2. \quad (76)$$

Выразим скалярные произведения единичного вектора нормали \mathbf{n} на вторые частные производные в данной точке поверхности из (76) через коэффициенты второй квадратичной формы, которые обозначаются:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{n}r''_{uu}, \\ M &= \mathbf{n}r''_{uv}, \\ N &= \mathbf{n}r''_{vv}. \end{aligned} \quad (77)$$

При подстановке значений коэффициентов (77) в (76) получим окончательно выражение второй квадратичной формы поверхности:

$$\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \quad (78)$$

Для упрощения вычисления единичного вектора нормали \mathbf{n} перепишем уравнение (61) в виде

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (79)$$

так как из (17) имеем

$$\begin{aligned} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|| &= |\mathbf{r}'_u| \cdot |\mathbf{r}'_v| \sin \varphi = |\mathbf{r}'_u| \cdot |\mathbf{r}'_v| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{|\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 - |\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты из (77) примут вид

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{n}r''_{uu} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]r''_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= \mathbf{n}r''_{uv} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]r''_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= \mathbf{n}r''_{vv} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]r''_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Коэффициенты L и N выражают нормальную кривизну поверхности в данной точке (п. 23) в направлении координатных линий u и v , а коэффициент M — их сопряженность относительно осей прямоугольной системы координат (п. 31).

Другое сокращенное выражение второй квадратичной формы поверхности следует из перпендикулярности единичного вектора

нормали \mathbf{n} касательному вектору $d\mathbf{r}$ к кривой в данной точке поверхности, т. е. скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\mathbf{n} d\mathbf{r} = 0.$$

Отсюда дифференцированием получим выражение второй квадратичной формы поверхности:

$$d\mathbf{n} d\mathbf{r} + \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0,$$

или, согласно (74),

$$\Pi = -d\mathbf{n} d\mathbf{r}.$$

Поэтому вторая квадратичная форма, в отличие от первой, может иметь как положительный, так и отрицательный знак, в зависимости от направления единичного вектора нормали относительно вогнутости или выпуклости поверхности (рис. 47, единичный вектор нормали \mathbf{n} отрицательного направления).

При задании поверхности уравнением $z = z(x, y)$ коэффициенты второй квадратичной формы имеют разные обозначения: общепринятые

$$\begin{aligned} L &= \frac{z''_{xx}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \\ M &= \frac{z''_{xy}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \\ N &= \frac{z''_{yy}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \end{aligned} \quad (81)$$

или в обозначениях Монжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{z''_{xx}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ M &= \frac{z''_{xy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ N &= \frac{z''_{yy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Вторая квадратичная форма с учетом (78) и (82) принимает вид:

$$\Pi = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \quad (83)$$

или

$$\Pi = \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad (84)$$

где $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — вторые частные производные.

Первая и вторая квадратичные формы не являются независимыми. Они связаны между собой формулами Петерсона-Кодацци, утверждающими существование и единственность регулярной поверхности с точностью до положения в пространстве [18]. Зависимость двух квадратичных форм поверхности в данной точке выражается прежде всего отношением коэффициентов второй квадратичной формы к коэффициентам первой, которое рассматривается ниже (п. 23).

23. Нормальная кривизна линии на поверхности. Известно (п. 15), что кривизна кривой в данной точке поверхности зависит от направления ее касательного вектора в той же точке и определяется отношением дифференциалов du/dv .

Чтобы вычислить кривизну произвольной линии на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ в данной точке, сначала рассмотрим геометрический аппарат, раскрывающий связь между кривизной произвольной линии на поверхности и нормальной кривизной этой линии.

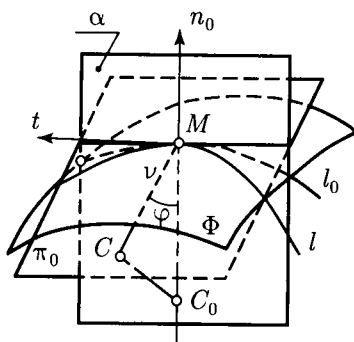


Рис. 48

Пусть имеем регулярную поверхность Φ (рис. 48) с произвольной кривой l , проходящей через точку M поверхности с касательной t в той же точке. Обозначим l_0 кривую нормального сечения поверхности плоскостью α , проведенной через нормаль \mathbf{n}_0 к поверхности в той же точке. Из точки M к кривой l проведем главную нормаль ν в соприкасающейся плоскости π_0 кривой, как перпендикуляр к касательной t в той же точке. Угол между главной нормалью ν кривой l и нормалью \mathbf{n}_0 к поверхно-

сти обозначим буквой φ . Остальные обозначения введем по мере изложения материала.

Согласно первой формуле Френе (41) с учетом (38) имеем

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}, \quad (85)$$

где произведение $k\boldsymbol{\nu}$ есть вектор кривизны кривой l .

При скалярном умножении каждой части равенства (85) на единичный вектор нормали \mathbf{n} получим

$$k\mathbf{n}\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{n}d^2 \mathbf{r}}{ds^2}. \quad (86)$$

Подставив в правую часть (86) согласно (74), (78) и (70) значение двух квадратичных форм: второй (78) и первой (66) — и заменив при этом в левой части (86) скалярное произведение $\mathbf{n}\boldsymbol{\nu}$ единичных векторов на косинус угла φ между ними, получим основную формулу для нахождения кривизны произвольной кривой на поверхности:

$$k \cos \varphi = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (87)$$

В левой части (87) стоит произведение модуля кривизны k кривой l на косинус угла между единичными векторами \mathbf{n} и $\boldsymbol{\nu}$. В правой части (87) стоит отношение второй квадратичной формы к первой, значение которого зависит от направления касательной к кривой в данной точке M поверхности.

Поскольку плоскость α есть нормальное сечение поверхности в точке M (рис. 48), то угол φ ее с наклонной плоскостью π_0 окажется равным 0 (рис. 48, $\cos \varphi = 1$). Поэтому множитель $\cos \varphi$ в равенстве (87) сокращается, и оно примет вид

$$k_0 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}, \quad (87a)$$

где k_0 — кривизна кривой нормального сечения l_0 .

Величина k_0 называется *нормальной кривизной линии в данной точке поверхности* по направлению касательного вектора в той же точке и, с точностью до знака, равна кривизне линии нормального сечения (рис. 42, кривая l_0).

Таким образом, кривизна линии в данной точке поверхности определяется направлением ее касательной в этой точке.

Все кривые на поверхности с общей касательной в одной точке имеют в этой точке равные нормальные кривизны.

Поэтому для нахождения кривизны произвольной кривой на поверхности в данной точке необходимо найти кривизну нормального сечения поверхности в той же точке.

Из равенства правых частей (87) и (87а) следует, что равны их левые части:

$$k_0 = k \cos \varphi. \quad (88)$$

Формула (88) позволяет определить кривизну произвольной кривой на поверхности по ее нормальной кривизне, если известен угол между нормальной и соприкасающейся плоскостями, что по существу составляет содержание *теоремы Мёнье*.

По аналогии с радиусом кривизны R произвольной кривой на поверхности из (7) введем понятие радиуса нормальной кривизны R_0 поверхности:

$$R = \frac{1}{k}, \quad R_0 = \frac{1}{k_0}. \quad (89)$$

Тогда (88) можно записать в виде

$$R = R_0 \cos \varphi. \quad (90)$$

Отсюда радиус кривизны $R = MC$ произвольной кривой l на поверхности (рис. 48) станет проекцией радиуса кривизны $R_0 = MC_0$ нормального сечения поверхности на соприкасающуюся плоскость π_0 кривой l . Пусть C и C_0 — центры кривизны соответственно кривых l и l_0 , тогда центр C будет проекцией центра C_0 на плоскость π_0 . Поэтому получим *другое толкование теоремы Мёнье*: центр кривизны кривой наклонного сечения поверхности представляет собой проекцию на соприкасающуюся плоскость центра кривизны кривой нормального сечения поверхности, имеющей общие точку и касательную в той же точке с кривой наклонного сечения.

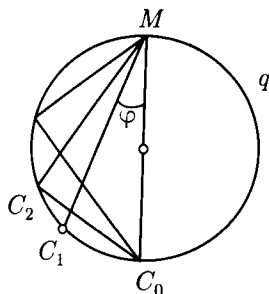


Рис. 49

Кроме того, все центры кривизны C, \dots (рис. 49) кривых l, \dots наклонных сечений π_0, \dots к поверхности (как вершины

прямых углов, опирающихся на диаметр), лежат на окружности q диаметра MC_0 , равного радиусу R_0 нормальной кривизны поверхности (рис. 48, окружность не показана). Эта окружность расположена в плоскости, перпендикулярной нормальному сечению α поверхности Φ .

На основе теоремы Мёнье находятся главные нормальные кривизны поверхностей, а значит, и гауссова кривизна (п. 24).

§ 7. Гауссова и средняя кривизны поверхности

Исходной величиной для нахождения гауссовой и средней кривизн является *нормальная кривизна поверхности* с наложенными на нее определенными условиями, зависящими от типа поверхности и ее расположения в пространстве.

24. Главные направления и главные кривизны поверхности. При повороте касательной около нормали к поверхности в данной точке на произвольный угол, кривизна нормального сечения начинает изменяться и достигать в некоторых точках поверхности максимального и минимального значений, т. е. экстремумов.

Два взаимно перпендикулярных направления в касательной плоскости к любой точке поверхности, соответствующие двум экстремальным значениям нормальной кривизны в той же точке, называются *главными направлениями поверхности*. Иначе говоря, это направления, совпадающие с ортогональными осями индикатрисы кривизны (рис. 73–75), которая рассматривается ниже (п. 31).

Значения нормальной кривизны, соответствующие главным направлениям поверхности, называются *главными нормальными кривизнами*, или, короче, *главными кривизнами поверхности в данной точке*.

Покажем, как меняются кривизны нормальных сечений при изменении направления касательной к поверхности в данной точке.

Примем координатные оси Ox и Oy прямоугольной системы координат за главные направления x_1 и y_1 , а координатную плоскость Oxy за касательную плоскость поверхности в точке O начала координат (рис. 50, поверхность не показана). Проведем из точки O прямую в плоскости Oxy по направлению t нормального сечения поверхности в той же точке под произвольным углом γ к главному направлению x_1 поверхности.

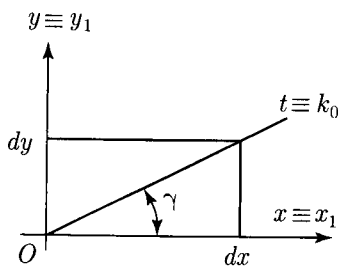


Рис. 50

Согласно формуле Эйлера [24], кривизна k_0 нормального сечения поверхности в данной точке по определенному направлению может достигать экстремумов:

$$k_0 = k_1 \cos^2 \gamma + k_2 \sin^2 \gamma,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности.

Если принять $k_1 > k_2$ и произвести замену $\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$, то получим

$$k_0 = k_2 + (k_1 - k_2) \cos^2 \gamma,$$

где второе слагаемое в силу $k_1 > k_2$ неотрицательно, и достигает наименьшего значения при $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. при этом достигается *минимальное значение нормальной кривизны* $k_0 = k_2$ в данной точке поверхности.

При $\gamma = 0$ и при $\gamma = \pi$ второе слагаемое максимально, и сумма *достигает наибольшего значения нормальной кривизны в данной точке поверхности*:

$$k_0 = k_2 + (k_1 - k_2) = k_1.$$

Следовательно, нормальная кривизна достигает экстремальных значений по двум главным направлениям x_1 и y_1 .

Случай, когда все направления на поверхности будут главными, рассматриваем ниже (п. 25, случай 1)).

Произведение главных кривизн называется *гауссовой*, или *полной кривизной поверхности* и обозначается

$$K = k_1 k_2. \quad (91)$$

Полусумма главных кривизн называется *средней кривизной поверхности* и обозначается

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (92)$$

Радиусы R_1 и R_2 , определяющие соответственно главные кривизны k_1 и k_2 , называются *главными радиусами кривизны поверхности*, их соответствующие центры C_1 и C_2 — *главными центрами кривизны*. Главные центры кривизны всегда расположены на нормали n_0 к поверхности (рис. 51, 52, 53).

Главные кривизны поверхности k_1 и k_2 , выраженные через радиусы R_1 и R_2 , равны:

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}. \quad (93)$$

Главным кривизнам могут быть приданы знаки в соответствии со знаками кривизны нормальных сечений по главным направлениям в соответствующих секущих плоскостях.

Если оба главных центра C_1 и C_2 расположены на нормали n_0 в каждой точке поверхности по одну ее сторону, то главные кривизны имеют одинаковые знаки. Такая поверхность называется *поверхностью двоякой положительной кривизны*, ее гауссова кривизна $K > 0$ (рис. 51).

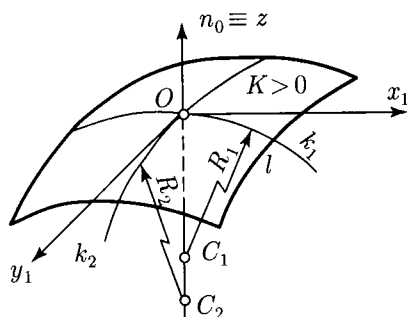


Рис. 51

Если главные центры кривизны C_1 и C_2 расположены на нормали n_0 в каждой точке поверхности по разные стороны от нее, то главные кривизны имеют разные знаки. Такая поверхность называется *поверхностью двоякой отрицательной кривизны*, ее гауссова кривизна $K < 0$ (рис. 52).

Если в каждой точке поверхности один из главных центров кривизны C_1 (радиуса R_1) расположен на нормали n_0 в данной точке поверхности, а другой удален в бесконечность ($R_2 = \infty$), то главная кривизна $k_2 = 0$ и такая поверхность называется *поверхностью нулевой*, или *одинарной кривизны*; ее гауссова кривизна $K = 0$ (рис. 53).

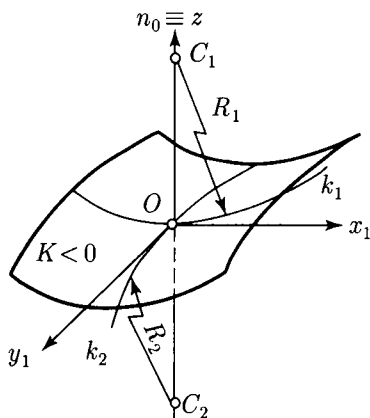


Рис. 52

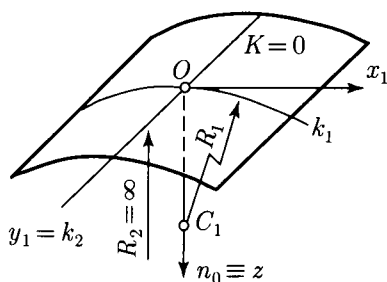


Рис. 53

Таким образом, по знаку гауссовой кривизны все регулярные поверхности разделяются на поверхности *положительной, отрицательной и нулевой кривизны*.

Кроме того, некоторые поверхности отрицательной кривизны могут относиться к *минимальным поверхностям*, если их средняя кривизна равна нулю (п. 46, 49, 50).

Существуют поверхности, имеющие в каждой точке *постоянную гауссову кривизну*: положительную — сфера, отрицательную — псевдосфера ¹⁾, нулевую — плоскость.

И, наконец, регулярная поверхность может иметь области положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизны. Такая поверхность называется поверхностью *разнозначной гауссовой кривизны* (рис. 63, 64, 104 и др.).

¹⁾ Псевдосфера (см., напр., [18]) в данном пособии не рассматривается.

25. Нахождение главных направлений и главных кривизн поверхности. Нахождение главных направлений и главных кривизн поверхностей удобно показать на поверхностях вращения, так как их главные направления могут совпадать с направлениями осей Ox и Oy прямоугольной системы координат, а одна из главных кривизн представляет меридианы этих поверхностей (предварительно рекомендуется прочесть § 12).

Проведем нормаль n_0 в точке M к произвольной поверхности вращения Φ , пересекающую ось вращения Oz в точке C_0 (рис. 54). Пусть отрезок MO_0 нормали n_0 — главный радиус кривизны R_1 меридиана m в точке M .

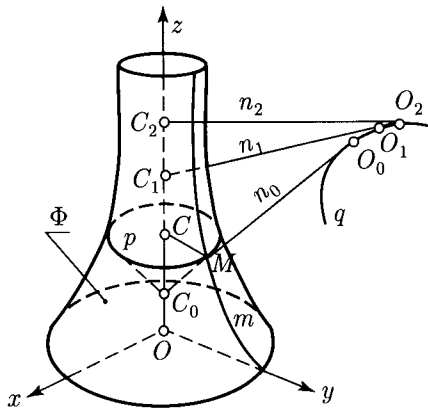


Рис. 54

Чтобы найти главную кривизну k_2 в направлении параллели p в той же точке поверхности вращения, воспользуемся теоремой Мёнье (рис. 48, второе толкование теоремы Мёнье).

На оси Oz центр кривизны C наклонного сечения поверхности в точке M — параллели p — будет проекцией на соприкасающуюся плоскость — плоскость наклонного сечения — центра кривизны C_0 кривой нормального сечения поверхности в той же точке (рис. 54, плоскости наклонного и нормального сечений не показаны).

Отсюда главная кривизна k_2 поверхности вращения определяется радиусом кривизны R_2 , равным отрезку C_0M нормали n_0 к поверхности в точке M .

Что касается знаков главных кривизн данной поверхности вращения, то в силу вогнутости меридиана относительно оси вращения Oz главная кривизна k_1 имеет *положительный* знак, а главная кривизна k_2 — *отрицательный* знак, в силу выпукло-

сти параллели к той же оси вращения. Поэтому центры главных кривизн O_0 и C_0 расположены на нормали по разные стороны поверхности вращения отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$.

На поверхности вращения положительной гауссовой кривизны $K > 0$ (рис. 55) главная кривизна k_1 в точке M меридиана m определяется радиусом кривизны R_1 с центром кривизны C_1 на нормали n_0 к поверхности в точке M . Главная кривизна k_2 в направлении параллели p в той же точке определяется радиусом кривизны R_2 с центром кривизны C_0 на пересечении нормали n_0 с осью поверхности вращения Oz , по образцу рис. 54. Но оба главных центра кривизны расположены на нормали n_0 по одну сторону поверхности, в силу вогнутости меридиана к оси вращения. Поэтому главные кривизны k_1 и k_2 имеют положительный знак.

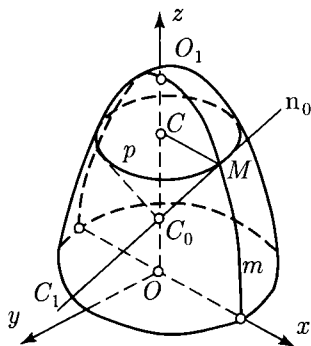


Рис. 55

Главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, образованной вращением кривой $z(x)$ вокруг оси Oz , можно вычислить соответственно по формулам:

$$k_1 = \frac{|z''|}{(1 + z'^2)^{3/2}}, \quad (94)$$

$$k_2 = -\frac{1}{z(1 + z'^2)^{1/2}}, \quad (95)$$

$$K = -\frac{|z''|}{z(1 + z'^2)^2}, \quad (96)$$

$$H = \frac{z|z''| - (1 + z'^2)}{2z(1 + z'^2)^{3/2}}. \quad (97)$$

Отметим, что центры кривизны O_0, \dots и C_0, \dots нормальных сечений поверхности называются *фокальными точками*, или *точками центров*. При этом главные центры O_0, O_1, \dots нормалей n_0, n_1, \dots к поверхности Φ расположены на эволюте q (п. 5).

Поверхность, образованная вращением эволюты q меридиана m вокруг оси Oz , называется *фокальной*, или *поверхностью центров* (рис. 54, поверхность центров не показана).

Иногда фокальная поверхность разделяется на две поверхности центров; в данном примере вторая фокальная поверхность вырождается в прямую — ось вращения Oz . Фокальные поверхности вращения, помимо вырождения в прямые, могут обращаться в точку (рис. 101) или в кривые линии (рис. 132, 137).

Рассмотренные выше геометрические схемы нахождения главных кривизн поверхностей вращения (рис. 54, 55) распространяются на другие классы поверхностей (гл. III), но заметно усложняются, когда главные направления не совпадают с осями Ox и Oy прямоугольной системы координат (рис. 88, 89, 126 и др.). В этом случае *нахождение главных направлений любой регулярной поверхности, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$* , сводится к определению отношений дифференциалов du/dv в данной точке поверхности, при которых нормальная кривизна согласно (87а) достигает экстремумов, по следующей формуле:

$$(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2 = 0. \quad (98)$$

Решение этого квадратного уравнения дает два действительных корня, которые соответствуют двум различным главным направлениям поверхности в данной точке. Другими словами, два направления касательных в данной точке поверхности будут главными, если отношение дифференциалов du/dv обращает (98) в нуль.

Возможны следующие случаи.

1) Все коэффициенты второй квадратичной формы поверхности в каждой точке равны нулю:

$$L = M = N = 0. \quad (99)$$

В этом случае поверхность обращается в плоскость, содержащую точки уплощения (рис. 71, точка U).

2) Коэффициенты двух квадратичных форм в каждой точке поверхности пропорциональны между собой:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}. \quad (100)$$

В этом случае все направления на поверхности будут главными с равными главными кривизнами, т. е. поверхность будет сферой, содержащей омбилические, или шаровые точки (рис. 101, большие круги m, \dots , омбилические точки M, \dots).

3) Если один из коэффициентов в (98) не равен нулю, например,

$$MG - NF \neq 0$$

или

$$LF - ME \neq 0,$$

то, разделив уравнение (98) на du^2 или dv^2 , соответственно получим

$$(LF - ME) + (LG - NE)\frac{dv}{du} + (MG - NF)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \quad (101)$$

или

$$(MG - NF) + (LG - NE)\frac{du}{dv} + (LF - ME)\left(\frac{du}{dv}\right)^2. \quad (102)$$

При решении этих двух уравнений можно определить линии кривизны на поверхности (п. 26), не совпадающие с ее координатной сетью (п. 50).

Нахождение главных кривизн в каждой точке любой регулярной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ сводится к решению квадратного уравнения

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0, \quad (103)$$

где главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями этого уравнения.

Если разделить левую часть (103) на коэффициент $(EG - F^2)$ при k^2 , то произведение корней будет равным свободному члену, а их сумма равна коэффициенту при k с обратным знаком. Отсюда гауссова и средняя кривизны соответственно могут быть найдены через коэффициенты первой и второй квадратичных форм по формулам:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (104)$$

$$H = \frac{EN - 2MF + LG}{2(EG - F^2)}. \quad (105)$$

В частности, при $F = M = 0$ главные кривизны вычисляются по упрощенным формулам

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}. \quad (106)$$

Гауссова и средняя кривизны соответственно находятся из формул:

$$K = \frac{LN}{EG} \quad (107)$$

и

$$H = \frac{LG + EN}{2EG}. \quad (108)$$

Гауссова и средняя кривизны поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$, с учетом (82) соответственно вычисляются по формулам:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (109)$$

и

$$H = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}. \quad (110)$$

С учетом (81) гауссова кривизна примет вид

$$K = \frac{z''_{xx}z''_{yy} - z''_{xy}{}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{k_x k_y - k_{xy}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (111)$$

где k_x, k_y — нормальные кривизны в направлении осей Ox и Oy прямоугольной системы координат, а k_{xy}^2 соответствует коэффициенту второй квадратичной формы M , отвечающему условию их сопряженности: см. (121), (122).

При нахождении главных кривизн следует учитывать положение главных направлений поверхности относительно осей координат Ox и Oy , причем за координатные линии могут быть приняты линии кривизны (п. 26), а также асимптотические линии (п. 27), не сопряженные с главными направлениями поверхности.

Отклонение координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ от главных направлений в данной точке входит в понятие *кривизны кручения поверхности*.

Коэффициенты k_{xy} или k_{uv} , выраженные через смешанные частные производные:

$$k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (112a)$$

или

$$k_{uv} = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \quad (112b)$$

называют *коэффициентами кручения поверхности* (или *параметрами кручения*¹⁾), заданной соответственно уравнением $z = z(x, y)$ или $r = r(u, v)$ в данной точке. Геометрически это означает *совпадение* ($k_{xy} = M = 0$, $k_{uv} = M = 0$) или *несовпадение* ($k_{xy} = M \neq 0$, $k_{uv} = M \neq 0$) *главных направлений* поверхности в данной точке с осями Ox и Oy *прямоугольной системы координат*²⁾.

§ 8. Характерные линии поверхности

В отличие от произвольных линий на поверхностях, к характерным линиям отнесем линии, имеющие с ними неразрывные и глубокие связи, влияющие на строение формы поверхности.

26. Линии кривизны. Линии кривизны связаны с главными направлениями поверхности и в отдельных случаях совпадают с ними.

Кривая на поверхности называется *линией кривизны*³⁾, если ее касательная в каждой точке коллинеарна одному из главных направлений поверхности (рис. 56: касательная t к линии l в точке M поверхности совпадает с главным направлением y_1).

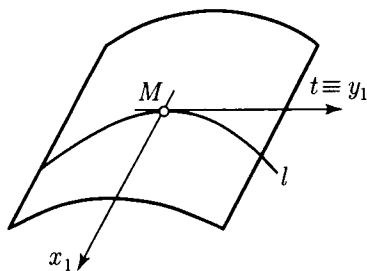


Рис. 56

Через каждую точку поверхности в общем случае могут проходить две взаимно перпендикулярные линии кривизны; совокупность таких линий образует сеть линий на поверхности. Если при этом сеть линий кривизны совпадает с координатными

¹⁾ Термин «параметр кручения поверхности» встречается в литературе по оболочкам пространственных конструкций (см., напр., [8]).

²⁾ Координатная ось Oz принимается за нормаль n_0 в данной точке поверхности.

³⁾ Линия кривизны может быть прямой (на рис. 57 прямая a , совпадающая с асимптотической линией поверхности (п. 27)).

линиями, то поверхность считается *отнесенной к своим линиям кривизны*.

С аналитической точки зрения на линии кривизны накладываются два условия: коэффициенты F и M соответственно первой и второй квадратичных форм должны равняться нулю:

$$\begin{cases} F = 0, \\ M = 0, \end{cases} \quad (113)$$

где $F = 0$ в силу ортогональности линий кривизны, $M = 0$ в силу сопряженности линий кривизны с главными направлениями поверхности (122).

Поэтому первая и вторая квадратичные формы для линий кривизны примут соответственно вид:

$$I = E du^2 + G dv^2, \quad (114)$$

$$II = L du^2 + N dv^2. \quad (115)$$

Аналитически линии кривизны поверхности находятся решением дифференциальных уравнений (101) или (102).

Наглядным примером линий кривизны служат меридианы и параллели любой поверхности вращения (рис. 54 и др.).

Линии кривизны можно рассматривать как линии, вдоль которых нормали к поверхности образуют *новую развертывающуюся поверхность* (п. 34).

Так, например, линия, расположенная на плоскости, или окружность на сфере является линией кривизны ввиду того, что нормали к кривой на плоскости образуют цилиндрическую поверхность, а нормали к кривой на сфере — конус вращения с вершиной в центре сферы.

Линии кривизны могут совпадать с другими характерными линиями поверхности: асимптотической (п. 27), геодезической (п. 28), параболической (п. 29) и линией сжатия (п. 30).

Из линий кривизны формируются некоторые циклические поверхности (п. 52), индикатрисы Дюпена (п. 53) и др.

27. Асимптотические линии. *Асимптотической линией* (или *асимптотой*) называется линия поверхности, нормальная кривизна которой в каждой точке равна нулю.

Касательная, определяющая направление асимптотической линии в данной точке поверхности, называется *асимптотической касательной*. Порядок касания поверхности с асимптотической линией выше первого.

Любая прямая, принадлежащая поверхности, как линия нулевой кривизны, является асимптотической (рис. 57, прямая a).

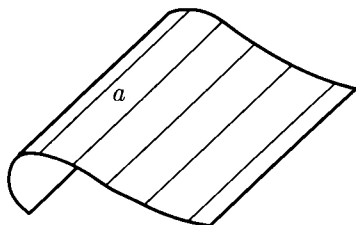


Рис. 57

Если кривизна асимптотической линии в данной точке отлична от нуля, то касательная плоскость в той же точке поверхности совпадает с соприкасающейся плоскостью кривой.

Например, цилиндрическая винтовая линия q прямого геликоида с асимптотической касательной t в точке M будет асимптотической кривой на его поверхности (рис. 126, касательная плоскость $m \times t$ совпадает с соприкасающейся $\nu \times t$ в их общей точке M поверхности). Примером плоских асимптотических кривых на поверхности служат две окружности p_2^1 и p_2^2 кольца (рис. 102).

В общем случае асимптотические линии на поверхностях напоминают спирали, которые при удалении в бесконечность выпрямляются и вырождаются в особую асимптотическую точку.

Уравнение асимптотической линии можно получить, если приравнять нулю нормальную кривизну этой линии или вторую квадратичную форму поверхности:

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0. \quad (116)$$

Если это уравнение разделить на du^2 , то получим

$$N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2M \frac{dv}{du} + L = 0. \quad (117)$$

Уравнение (117), как квадратное относительно производной dv/du , дает действительное решение, когда дискриминант второй квадратичной формы $LN - M^2 \leq 0$. Геометрически это означает существование (действительных) асимптот на поверхностях нулевой кривизны (напр., прямая a на рис. 57) и на поверхностях отрицательной кривизны (напр., AB и A_1B_1 на рис. 99). Поверхности положительной кривизны имеют лишь мнимые асимптоты (напр., направления Ox_1 и Oy_1 на рис. 51).

Поверхность нулевой кривизны содержит одно семейство асимптотических образующих прямых, коллинеарных одному из главных направлений поверхности (рис. 71, $p_2 \equiv a_1$) и одно-

временно являющихся линиями кривизны (п. 26) и геодезическими линиями (п. 28).

На поверхностях отрицательной кривизны через каждую точку проходят две равнонаклонные к главным направлениям действительные асимптотические прямые (рис. 70, асимптоты a_1 и a_2). Поэтому главные направления являются биссектрисами углов между асимптотами.

Для нахождения асимптотических линий на поверхностях используется уравнение (116).

Если координатная сеть линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, например, прямого геликоида (рис. 126), отнесена к асимптотической сети линий, то из уравнения (116) следует, что коэффициенты L и N обращаются в нуль, а коэффициент $M \neq 0$.

Тогда вторая квадратичная форма поверхности примет вид

$$II = 2M du dv. \quad (118)$$

Асимптотические линии позволяют определить тип поверхности по знаку ее кривизны ($K > 0$, $K < 0$, $K = 0$). Координатная сеть линий, отнесенная к асимптотам, позволяет расчленить поверхность оболочки $K < 0$ на отдельные элементы в виде скрученных четырехугольников (рис. 91, 92).

Приведем пример с привлечением двух пересекающихся действительных асимптотических прямых для выявления главных кривизн на модели поверхности отрицательной кривизны, изображенной на рис. 123.

Если приложить прямолинейную планку до полного соприкосновения с моделью в двух разных направлениях и очертить ее края пересекающимися прямыми, то направления биссектрис между ними будут соответствовать направлениям главных кривизн поверхности p_1 и p_2 .

28. Геодезические линии. В основе понятия геодезической кривой лежит идея спрямления кривой на поверхности. Наглядно геодезическую линию можно представить как траекторию движущейся материальной точки по кратчайшему расстоянию на поверхности.

Геодезической кривизной k_g линии q в точке M поверхности называется кривизна проекции q_1 этой линии на касательную плоскость π в этой точке по направлению нормали n_0 к поверхности в той же точке (рис. 58).

Геометрически геодезическая кривизна k_g соответствует нормальному сечению q_1 цилиндрической поверхности с образу-

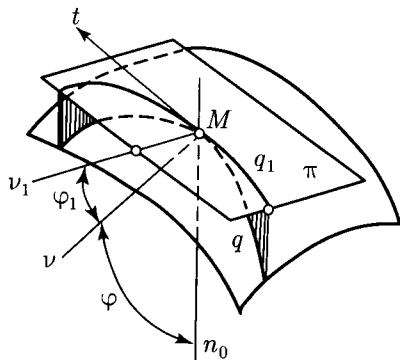


Рис. 58

ющими, перпендикулярными касательной плоскости π к поверхности в данной точке M .

Пусть φ_1 — угол, образованный главной нормалью ν кривой q и нормалью ν_1 к цилиндрической поверхности в их общей точке M . Тогда

$$k_1 = k \cos \varphi_1, \quad (119)$$

где k — кривизна линии q на поверхности, k_1 — кривизна проекции q на касательную плоскость π поверхности (нормальное сечение цилиндрической поверхности).

Поскольку $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, где φ — угол между ν и нормалью n_0 , то геодезическая кривизна кривой равна

$$k_g = k \sin \varphi = k \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = k_1. \quad (120)$$

Кривая на поверхности называется *геодезической*, если в каждой ее неособой точке геодезическая кривизна равна нулю.

При $\sin \varphi = 0$ главная нормаль ν в соприкасающейся плоскости кривой q совпадает с нормалью n_0 к поверхности.

Отсюда вытекает основное свойство геодезических линий: чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке *главная нормаль совпала с нормалью к поверхности*.

Следующее свойство геодезических линий состоит в том, что *длина между двумя ее ближайшими точками будет минимальной среди всех линий на поверхности с общими концами в этих точках*. Поэтому говорят, что геодезическая линия есть *кратчайшая линия на поверхности, соединяющая две данные точки*.

Если геодезическая на поверхности прямая, то она будет асимптотической (п. 27).

Аналитически геодезические линии на поверхностях требуют решения дифференциальных уравнений третьего порядка и в пособии не рассматриваются. Проще всего геодезические линии на поверхности выявляются с использованием их основного свойства.

Так, цилиндрическая винтовая линия q_0 (рис. 59) будет геодезической, ввиду совпадения ее главной нормали ν в соприкасающейся плоскости π_0 винтовой линии q_0 с нормалью n_0 к поверхности в данной точке M .

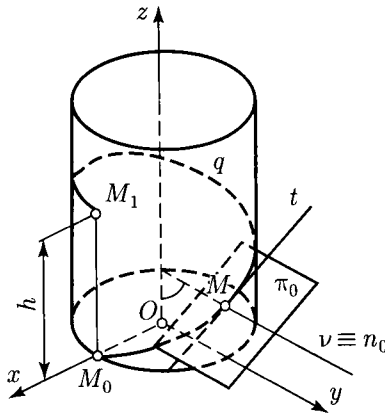


Рис. 59

На поверхностях вращения геодезическими всегда являются меридианы t и горловая окружность p (рис. 98), экватор p (рис. 101, 103 и др.), а также геодезические линии q, \dots , проходящие через точки K, K_1, \dots пересечений параллелей p, p_1, \dots , и меридианов t, t_1, \dots , если синусы углов $\varphi, \varphi_1, \dots$, образованных этими линиями с меридианами поверхности, обратно пропорциональны радиусам параллелей (рис. 60).

Геодезические линии на линейчатых развертывающихся поверхностях (п. 34) при изгибании на плоскость, как правило, являются прямыми, как, например, винтовая линия на цилиндре. В случае неразвертывающихся линейчатых поверхностей с образующими, перпендикулярными направляющим линиям, геодезическими будут направляющие, совпадающие с линией сжатия поверхности (п. 30).

Геодезическими на сфере служат большие круги, как кривые, главные нормали которых совпадают с нормальными к поверхности.

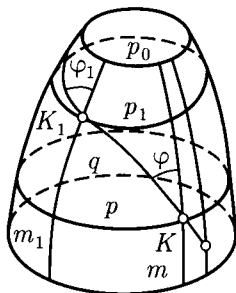


Рис. 60

Геодезические линии применяются в строительстве, физике и других областях науки и техники.

На рис. 61 показана срединная поверхность оболочки вращения, состоящая из двух семейств не закрепленных между собой металлических лент (ленточная оболочка), одна из которых несущая — меридиан m , а другая стабилизирующая — параллель p в начальном положении. Под воздействием деформации стабилизирующая лента перемещается в сторону сужения поверхности, стремясь занять положение геодезической кривой (штриховая линия) с нормалью n_0 к поверхности при креплении ее с опорным контуром оболочки в точках A и B .

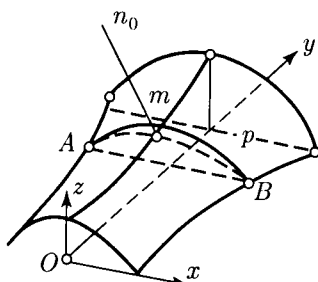


Рис. 61

29. Параболические линии. Параболические линии на поверхности представляют собой непрерывные плоские линии, в каждой точке которых гауссова кривизна $K = 0$, при условии, что одна из ее главных кривизн поверхности k_1 или k_2 не равна нулю.

В частности, за параболическую линию в данной точке M цилиндра вращения (рис. 62) можно принять параллель p , соответствующую главной кривизне $k_1 > 0$, так как пересекающаяся с ней в той же точке прямолинейная образующая m поверхности

имеет кривизну $k_2 = 0$, т.е. в этой точке гауссова кривизна $K = 0$.

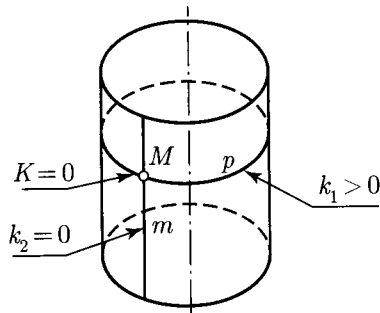


Рис. 62

Параболические линии могут покрывать всю поверхность (развертывающиеся линейчатые поверхности) или разделять ее на области разнозначной кривизны (неразвертывающиеся поверхности).

На рис. 63 (лампа) показаны возможные варианты расположения параболических линий, разделяющих области различной кривизны на поверхности вращения: $K = 0$, $K < 0$ и $K > 0$.

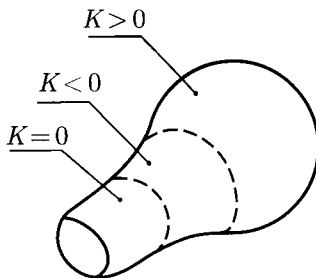


Рис. 63

На рис. 64 изображена произвольная нелинейчатая поверхность с областями $K > 0$ и $K < 0$, где одна из главных линий кривизны q имеет точку перегиба M ($k_1 = 0$), через которую проходит асимптотическая касательная t к поверхности. Тогда второй главной кривизне поверхности ($k_2 > 0$) соответствует параболическая линия p .

Примерами поверхности, имеющей две параболические кривые, совпадающие с асимптотическими и разделяющие области $K > 0$ и $K < 0$, являются кольцо (рис. 105), тор (рис. 106, 107) и циклида (рис. 138).

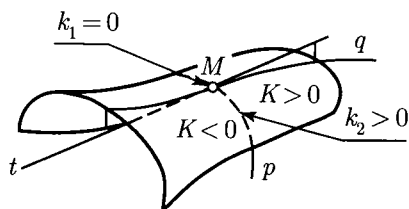


Рис. 64

На поверхностях касательных (п. 29) параболической линией служит ребро возврата (рис. 83), совпадающее с линией сжатия поверхности (п. 30).

30. Линия сжатия. Линия сжатия является *характеристикой только линейчатой поверхности в самом узком ее месте*.

К понятию линии сжатия можно подойти, опираясь на известную в геометрии задачу нахождения кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пусть отрезок AB есть общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым m_0 и m_1 (рис. 65). При сближении прямой m_0 с m_1 точка A стремится к некоторому предельному положению, которое называется *центральной точкой*, или *точкой сжатия* A_0 с прямой m_1 .

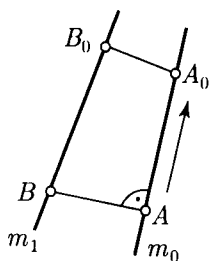


Рис. 65

Если принять прямые m_0 и m_1 за соседние образующие линейчатой поверхности (рис. 66, поверхность Σ), то при неограниченном сближении (вплоть до совпадения) точек сжатия A_0 и B_0 , A_1 и B_1 , ... в направлении общих перпендикуляров к образующим m_0 и m_1 , то образуется непрерывная линия f , называемая *линией сжатия*, или *стрикционной*.

В частности, если линия сжатия — прямая, пересекающая образующие линейчатой поверхности под прямым углом, то она совпадает с *геодезической и асимптотической линиями* (рис. 88, 89, линия n , и др.).

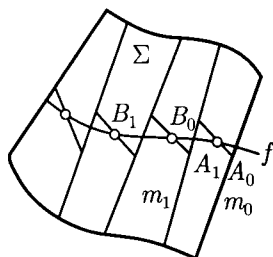


Рис. 66

Геометрически линия сжатия представляет собой одну из направляющих линейчатой поверхности, пересекающую их образующие в самом узком месте поверхности. Например, на гиперboloиде вращения (рис. 67) линия сжатия q (q_1, q_2, \dots) является окружностью минимального радиуса (горлом), совпадающей с геодезической линией поверхности, полученной сближением образующих, например, $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2) \dots$

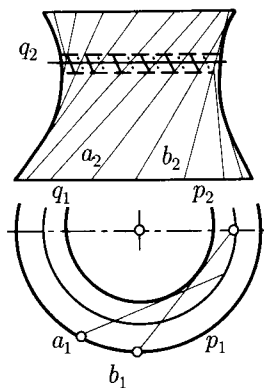


Рис. 67

На поверхностях касательных, как уже отмечалось, линия сжатия совпадает с ребром возврата, т.е. особой линией поверхности.

Линия сжатия конической поверхности вырождается в точку ее вершины (рис. 86 и др.), а на цилиндрической поверхности остается неопределенной (рис. 85 и др.).

§ 9. Строение регулярной поверхности

В этом параграфе рассматривается строение типовых регулярных поверхностей в бесконечно малом куске посредством

обобщенной формы так называемого соприкасающегося параболоида в данной точке поверхности. Дается классификация неособых точек поверхностей различной гауссовой кривизны с использованием индикатрисы Дюпена. Показывается связь между неособыми и особыми точками поверхности.

31. Соприкасающийся параболоид и индикатриса кривизны поверхности. В дифференциальной геометрии доказывается [18], что в каждой точке регулярной поверхности, например, $z = z(x, y)$, существует *единственный соприкасающийся параболоид, способный вырождаться в параболический цилиндр или плоскость*, отличающийся от заданной поверхности в окрестности их общей точки на величину не ниже второго порядка малости.

Соприкасающийся параболоид и его вырожденные формы могут быть описаны в координатах уравнением

$$z - \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

С геометрической точки зрения соприкасающийся параболоид S_0 содержит постоянный элемент — параболу p — и ближе других параболоидов примыкает к заданной поверхности Φ в окрестности точки M (рис. 68), имея с этой поверхностью общие геометрические характеристики: нормальные кривизны, касательные прямые, плоскости и др.

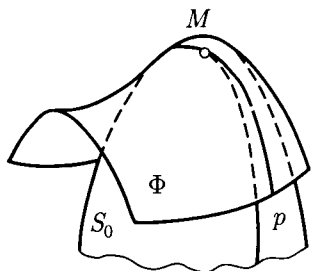


Рис. 68

Поэтому разнообразные по форме регулярные поверхности можно свести в бесконечно малом куске к разновидностям соприкасающегося параболоида: эллиптического (рис. 69) и гиперболического (рис. 70), а также параболического цилиндра (рис. 71) и плоскости.

Труднее выявляется форма поверхностей высших порядков, описываемых производными не ниже третьего порядка: например, так называемая поверхность «обезьяньего седла»,

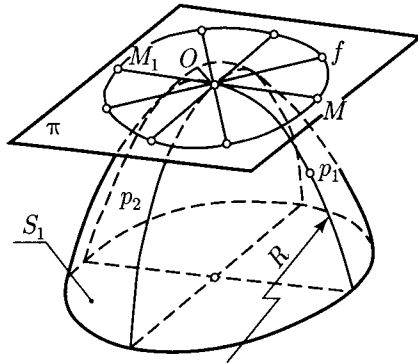


Рис. 69

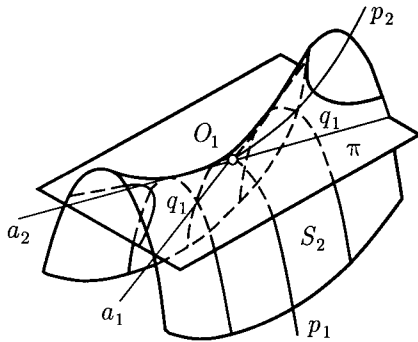


Рис. 70

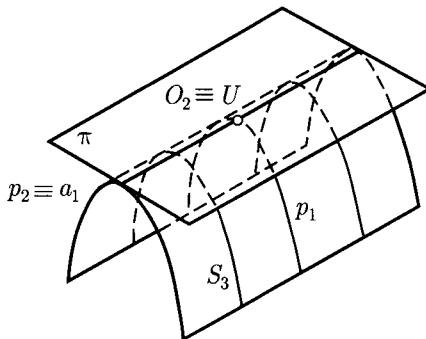


Рис. 71

представляющая собой прототип гиперболического параболоида (рис. 117), дополненного третьим выступом и впадиной, образующих как бы опору для обезьяньего хвоста (рис. 72).

Наглядно строение формы поверхности в каждой точке показывает *индикатриса кривизны Дюпена*, представляющая собой

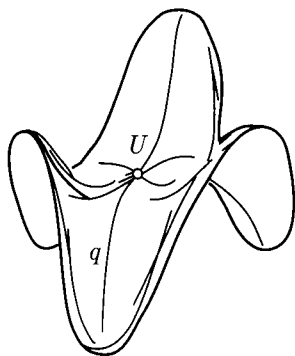


Рис. 72

одну из центральных кривых второго порядка, построенную на касательной плоскости к поверхности, с центром в точке касания. Так, индикатрисой эллиптического параболоида S_1 (рис. 69) будет эллипс f в касательной плоскости π к поверхности в точке M .

Построение индикатрисы кривизны производится следующим образом. Пусть в данной точке O поверхности проведено нормальное сечение, имеющее радиус кривизны R . Тогда на касательной к этому сечению отложим от точки O в обе стороны отрезки OM и OM_1 длины \sqrt{R} (в совокупности составляющие диаметр индикатрисы).

Геометрическое место концов отрезков OM , OM_1 , ... для всех нормальных сечений называется *индикатрисой кривизны* заданной поверхности (рис. 69, индикатриса кривизны f).

Два направления d и δ в данной точке поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ называются *сопряженными*, если они совпадают с сопряженными диаметрами индикатрисы, т. е. если выполняется условие

$$L d\delta du + M (d\delta dv + dv\delta u) + N dv\delta v = 0. \quad (121)$$

Сети линий на поверхности называются *сопряженными*, если направления касательных к разным семействам сети сопряжены между собой, т. е. совпадают с сопряженными диаметрами индикатрисы.

Например, меридианы t и параллели p образуют сопряженную сеть поверхности вращения (рис. 54, 56 и др.).

Два сопряженных направления поверхности в данной точке, совпадающие с ортогональными направлениями x и y главных осей индикатрисы (рис. 73–75), называются *главными направлениями поверхности* (другое определение главных направлений дано выше в п. 24).

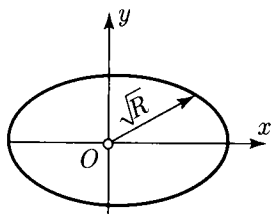


Рис. 73

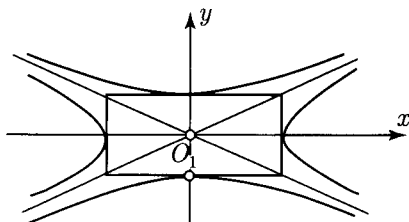


Рис. 74

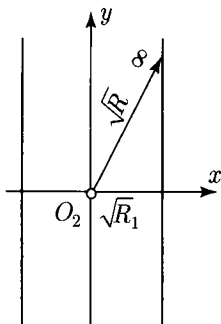


Рис. 75

Если координатная сеть линий поверхности является сопряженной, то из (121) имеем:

$$du = 0, \quad \delta v = 0.$$

Тогда

$$M dv \delta u = 0, \quad M = 0. \quad (122)$$

Следовательно, вторая квадратичная форма поверхности примет вид

$$\Pi = L du^2 + N dv^2. \quad (122a)$$

32. Классификация точек и строение регулярной поверхности. В зависимости от вида кривой второго порядка¹⁾ — индикатрисы — точки на регулярной поверхности можно разделить на четыре класса: 1) *эллиптические*, индикатриса — эллипс (рис. 73), в частности, *омбилические точки*, индикатриса — окружность²⁾; 2) *гиперболические*, индикатриса — пара сопряженных гипербол (рис. 74); 3) *параболические*, индикатриса —

¹⁾ К кривым второго порядка относятся также две пересекающиеся и две параллельные прямые, включая совпадающие.

²⁾ В омбилической точке все радиусы кривизны равны.

пара параллельных прямых¹⁾ (рис. 75), а также 4) *точки уплощения* — с индикатрисой, вырожденной в бесконечно удаленную точку касательной плоскости π поверхности S_3 , причем точка уплощения U совпадает с параболической точкой O_2 (рис. 71). Но, в отличие от параболической, точка уплощения характеризуется тем, что обе главные нормальные кривизны равны нулю.

Индикатриса сложной поверхности (рис. 72) может иметь вид шести кривых типа сопряженных гипербол (рис. 76, кривые соответствуют трем выступам и трем впадинам поверхности, сечения ее касательной плоскостью в точке U заштрихованы).

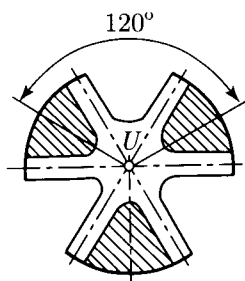


Рис. 76

Рассмотрим строение регулярной поверхности в окрестности перечисленных выше классов точек в отдельности.

В *эллиптической точке* O (рис. 69) поверхность имеет форму куска *соприкасающегося в той же точке эллиптического параболоида* S_1 , в частности, параболоида вращения (рис. 109), расположенного по одну сторону касательной плоскости π с главными параболой p_1 и p_2 одного знака кривизны, характеризующими поверхность $K > 0$.

Если касательная плоскость π_1 в эллиптической точке O одновременно пересекает, например, поверхность вращения (рис. 77) по кривой l вне точки касания, то *эллиптическая точка O совпадает с особой изолированной точкой T поверхности*.

В *окрестности гиперболической точки* O_1 (рис. 70) поверхность имеет форму куска *соприкасающегося гиперболического параболоида* S_2 , расположенного по разные стороны касательной плоскости в той же точке и пересекающего поверхность по двум асимптотическим прямым a_1 и a_2 . Тогда параболы p_1 и p_2 ,

¹⁾ Парабола, как нецентральная кривая второго порядка, на индикатрисе отображается парой параллельных прямых.

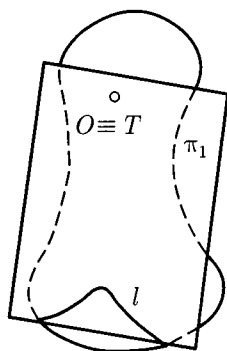


Рис. 77

соответствующие главным нормальным кривизнам поверхности в точке O_1 , будут направлены в противоположные стороны от касательной плоскости, характеризую поверхность $K < 0$.

Если касательная плоскость π_1^3 в гиперболической точке $O(O_1, O_2)$ одновременно пересекает, например, нелинейчатую поверхность вращения (рис. 105) по кривой $l(l_1, l_2)$, то *гиперболическая точка совпадает с двойной особой точкой самопересечения, или узловой* — $N(N_1, N_2)$.

В окрестности параболической точки O_2 (рис. 71) поверхность имеет форму куска *соприкасающегося параболического цилиндра* S_3 , расположенного по одну сторону от касательной плоскости π в той же точке, с главными нормальными кривизнами, которым соответствуют парабола p_1 и асимптотическая прямая $p_2 \equiv a_1$, характеризующие поверхность $K = 0$.

Если касательная плоскость π_2 в параболической точке O_2 (рис. 78) одновременно пересекает, например, поверхность вращения по двум кривым l_1 и l_2 , исходящим из той же точки, то *параболическая точка O_2 совпадает с двойной точкой возврата первого рода C_2* .

В окрестности точки уплощения, как уже отмечалось, поверхность может иметь разнообразное строение: простое — в виде *касательной плоскости, например, параболического цилиндра S_3* (рис. 71), или сложное, в виде куска *уплощенной поверхности* (рис. 72) с нестрогим экстремумом кривых перегиба q, \dots как нормальных сечений поверхности, пересекающихся в точке перегиба, совпадающей с точкой уплощения U (п. 6).

Иное строение в точке уплощения имеет поверхность вращения положительной кривизны $K > 0$ в вершине O_1 (рис. 55), если она является точкой спрямления (п. 3) меридиана m , имеющего, как известно, главную кривизну $k_1 = 0$. В этом случае каса-

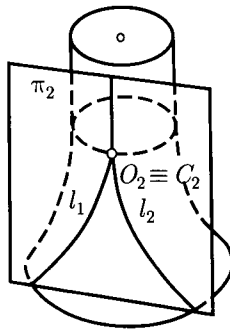


Рис. 78

тельная к меридиану в точке O_1 будет перпендикулярной к оси вращения Oz поверхности (рис. 55, касательная не показана). Тогда другая главная кривизна $k_2 = 0$ в силу того, что O_1 — точка спрямления. Тогда в этой точке $K = 0$, что определяет точку уплощения O_1 поверхности вращения $K > 0$.

Поскольку рассмотренные классы точек полностью выявляют строение регулярной поверхности в бесконечно малом куске, то отнесем их по значимости к *конструктивным точкам поверхностей*.

По *типу конструктивных точек* строение поверхностей разделяется на эллиптическое, гиперболическое, параболическое и смешанное, состоящее из совокупности этих точек, включая и точки уплощения и перегиба.

Одним из критериев, определяющих тип конструктивных точек поверхности, является *количество асимптотических направлений линий*, проходящих через конструктивную точку поверхности: ни одного — в эллиптической точке, два — в гиперболической точке, одно — в параболической точке и бесконечное множество — в точке уплощения.

Другим критерием, определяющим тип конструктивной точки поверхности, служит *знак ее гауссовой кривизны*: она положительна в эллиптической точке, отрицательна в гиперболической точке и равна нулю в параболической точке или точке уплощения.

Аналитически принадлежность конструктивных точек к данному классу поверхностей определяется вычислением дискриминанта второй квадратичной формы поверхности

$$\delta = LN - M^2.$$

Если в данной точке поверхности $\delta > 0$, то точка будет эллиптической, при $\delta < 0$ — гиперболической, при $\delta = 0$ — параболической.

В точке уплощения все три коэффициента второй квадратичной формы одновременно обращаются в нуль (п. 25, случай 1)).

Омбилическая точка характеризуется пропорциональностью отношений коэффициентов двух квадратичных форм (п. 25, случай 2)).

§ 10. Изгибание и развертывание регулярных поверхностей

33. Понятие изгибания поверхности. Под нагрузкой поверхность оболочки подвергается различным деформациям, в том числе изгибанию.

С позиции геометрии под изгибанием подразумевают преобразование поверхности без растяжений и сжатий, то есть сохранения длины ее линий с изменением их формы.

Наглядное представление об изгибании поверхности дает прямоугольный лист бумаги, свернутый в цилиндрический рулон без разрывов и складок.

Две поверхности, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, причем расположенные на них соответствующие линии имеют равные длины, называются *изометричными*, или *поверхностями с одинаковой метрикой*.

Инвариантами изгибания двух изометричных поверхностей друг в друга являются: одинаковые координаты в двух соответственных точках поверхностей, длины дуг кривых, геодезические кривизны линий, а также принадлежность точки поверхности одному из четырех классов (п. 32).

Последнее условие составляет содержание *теоремы Гаусса* и означает, что при изгибании нельзя совместить, скажем, поверхность из гиперболических точек с поверхностью из эллиптических точек или параболических точек.

Условие изгибания двух поверхностей с одинаковой метрикой выражается равенством их первых квадратичных форм во всех точках:

$$E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2.$$

Первые квадратичные формы равны тождественно при равных значениях коэффициентов

$$E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2.$$

Две изометричные поверхности при изгибании друг в друга с сохранением вышеперечисленных условий называют *наложимыми*.

Например, при изгибании катеноида (п. 46) он налагается на прямой геликоид, и обратно (п. 50).

В дифференциальной геометрии доказывается, что в любой точке регулярной поверхности с постоянной гауссовой кривизной существует окрестность, изометричная простой области на плоскости, сфере или псевдосфере. Это свойство данных поверхностей позволяет изгибать их в поверхности другой формы, но неизменной кривизны.

Изменение формы поверхности постоянной гауссовой кривизны при изгибании компенсируется сохранением длины дуг линий на преобразованной поверхности.

Например, сфера, как выпуклая и замкнутая поверхность, в целом неизгибаема, но в отдельном куске, ограниченном меридианами или параллелями, непрерывно изгибаема.

На рис. 79 дана проекция сферы — окружность m с центром O и радиусом R . Непрерывное изгибание части сферы, ограниченной двумя полуокружностями больших кругов (например, меридианов), в поверхность вращения той же кривизны можно представить так: при сжатии дуги pp_1 — полуокружности m — большого круга сферы к оси вращения Oz , расстояние $OM = R$ будет уменьшаться, а вдоль оси Oz — увеличиваться, т. е. дуга pp_1 , сужаясь, перейдет в равную ей по длине дугу $p'p'_1$, но другой формы (рис. 80).

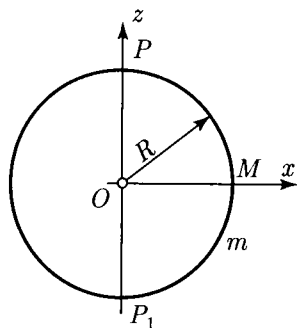


Рис. 79

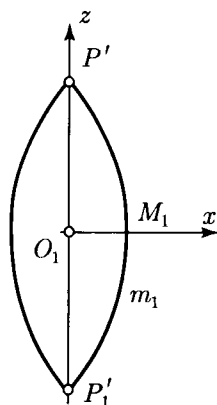


Рис. 80

В результате изгибания двух симметричных дуг сферы — полуокружностей — получим проекцию новой поверхности вращения. Эта поверхность — другой формы, но той же положительной гауссовой кривизны — напоминает веретено и имеет особые конические точки p' и p'_1 в полюсах поверхности (п. 17).

Свойства, сохраняющиеся при изгибании поверхности, относятся к ее *внутренней геометрии*, а связанные с формой — к *внешним свойствам*. Примером свойств, принадлежащих внутренней геометрии, будут все вышерассмотренные *инварианты*, а также сохраняющиеся при изгибании углы, площади фигур и др.

Примерами внешних свойств поверхностей, изменяющихся при изгибании, служат форма соприкасающегося параболоида, нормальная кривизна и другие элементы поверхностей.

Из преобразований, сохраняющих *внутреннюю геометрию поверхностей*, наибольший интерес при проектировании оболочек пространственных конструкций представляет изгибание линейчатой поверхности в плоскость (п. 34).

34. Развертывающиеся поверхности. Все регулярные поверхности разделяются на две группы: развертывающиеся и неразвертывающиеся, или косые (§ 11).

Простейший пример *развертывающейся поверхности* — развертка цилиндра (рис. 81).

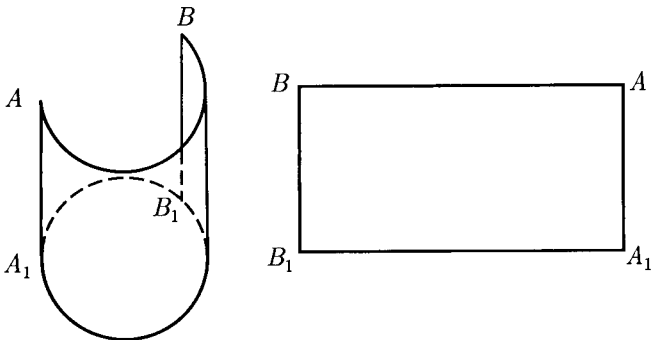


Рис. 81

В общем случае к развертывающимся поверхностям относятся те линейчатые поверхности, образующие m, \dots которых в каждой своей точке M, M_1, \dots имеют совпадающие касательные плоскости β, β_1, \dots и, следовательно, параллельные нормали $n, n_1 \dots$ в тех же точках (рис. 82). Другими словами,

развертывающаяся поверхность является *огibaющей однопараметрического семейства плоскостей*.

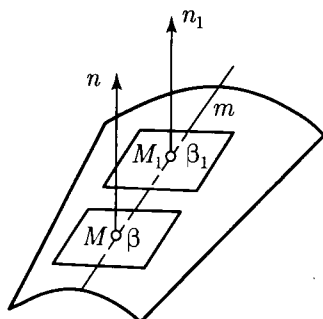


Рис. 82

К *неразвертывающимся поверхностям* относятся все нелинейчатые поверхности, т. е. не содержащие прямых линий, а также линейчатые или косые, если их *касательные плоскости в данной точке вдоль прямолинейных образующих изменяют свое положение* (п. 38, 39 и др.). Для таких поверхностей строятся *приближенные развертки* [11].

Общим видом развертывающейся поверхности можно считать *поверхность касательных*, образованную касательными t, \dots в каждой точке p, \dots к пространственной кривой n (рис. 83).

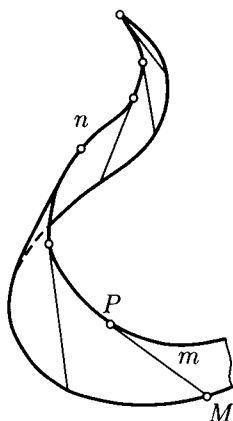


Рис. 83

Линия n , в каждой своей точке p, \dots *огibaющая семейство касательных*, называется *ребром возврата поверхности*.

Доказательство изгибаемости поверхности касательных в изометрическую ей плоскость приводится в учебниках по дифференциальной геометрии, включенных в список литературы.

Способность поверхности касательных разворачиваться в плоскость можно показать геометрически посредством касательной плоскости, проведенной через прямолинейные образующие в данной точке поверхности, совпадающей с соприкасающейся плоскостью пространственной кривой (п. 7), а значит, обращаемой поверхность в плоскость.

Пример *неразворачиваемой поверхности* показан на рис. 84.

К разворачиваемым поверхностям относятся *цилиндрическая* (рис. 85) и *коническая* поверхности (рис. 86), как имеющие неизменные касательные плоскости к прямолинейным образующим в данной точке, а также разновидности поверхности касательных — *торсовая поверхность* (рис. 87) и *винтовой тора*, или *эвольвентный геликоид* (рис. 128).

С аналитической точки зрения необходимым и достаточным условием разворачиваемости поверхности служит *нулевая гауссова кривизна* $K = 0$. В этом случае одна из главных кривизн k_1 или k_2 должна соответствовать прямолинейным образующим, т. е. обратиться в нуль.

Замкнутая плоская фигура, все точки которой находятся во взаимно однозначном соответствии с заданной линейчатой разворачиваемой поверхностью, называется *разверткой* (рис. 81, развертка цилиндра — прямоугольник A_1ABB_1).

Развертка является изометричной фигурой по отношению к исходной поверхности. Поэтому на развертке *сохраняются длины линий, величины углов и размеры площадей кусков поверхностей*.

Эти свойства развертки используются в технике и строительстве для изготовления изделий из листового материала, а также раскроя поверхностей оболочек, в том числе пневматических (рис. 147–149).

Глава III

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В данной главе рассматриваются *регулярные* (п. 13) и *нерегулярные* (п. 54) *поверхности оболочек*, применяемых в покрытиях большепролетных сооружений промышленного, гражданского и других назначений, а также в технике.

Регулярные поверхности по закону их образования объединяются в следующие классы: *линейчатые поверхности, поверхности вращения, поверхности переноса, винтовые и циклические поверхности*. Для каждого класса мы приводим вывод соответствующих уравнений.

Другая классификация поверхностей относится только к оболочкам пространственных конструкций, применяемых в строительстве, и заключается в разделении их по характеру *гауссовой кривизны: положительной, отрицательной или нулевой*. Эта классификация приводится в литературе по оболочкам пространственных конструкций ¹⁾.

Однако единой классификации поверхностей *вообще не существует* ввиду того, что одна и та же поверхность может принадлежать разным классам.

В данной главе одновременно рассматриваются полные *дифференциально-геометрические характеристики* различных видов поверхностей каждого класса в отдельности, с примерами *вычисления их гауссовой и средней кривизн по их уравнениям в координатной и векторно-параметрической формах*.

Нерегулярные поверхности оболочек классифицируются в зависимости от их *функционального предназначения* и подразделяются на *составные, расчетно-экспериментальные* оболочки и *оболочки произвольной формы*.

§ 11. Линейчатые поверхности

Линейчатые поверхности вместе с поверхностями вращения (§ 12) представляют собой *самый распространенный и обшир-*

¹⁾ В пособии даются первая и вторая классификации поверхностей.

ный класс поверхностей, применяемых в технике и строительстве.

Линейчатые поверхности образуются *перемещением прямой линии в пространстве по определенному закону*, выраженному в аналитической или графической форме (п. 13, 14).

Исходной поверхностью класса линейчатых поверхностей служит поверхность общего вида с *тремя направляющими скрещивающимися прямыми*, определяющими закон перемещения образующей прямой (рис. 32).

Если наложить некоторые условия на закон образования линейчатой поверхности общего вида, то можно получить *частные виды линейчатых поверхностей с одной и двумя направляющими линиями*.

Рассмотрим произвольную кривую n , принятую за направляющую некоторой линейчатой поверхности и заданную уравнением

$$\rho = \rho(u),$$

где ρ — ее текущий радиус-вектор (рис. 84). Проведем из каждой точки M кривой n в направлении образующей единичный вектор \mathbf{m} , определяемый зависимостью

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u).$$

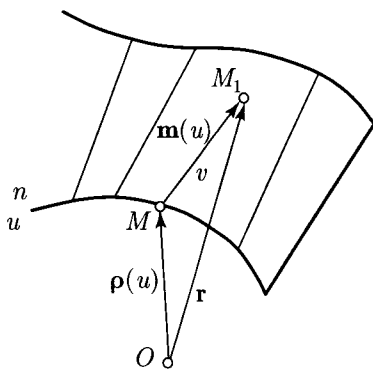


Рис. 84

Примем за параметр u длину дуги кривой n , а за параметр v произвольный отрезок MM_1 образующей в положительном направлении вектора \mathbf{m} . Тогда радиус-вектор точки M_1 образующей представляет собой сумму векторов \overline{OM} и $\overline{MM_1}$, т. е.

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1},$$

а уравнение поверхности в векторной форме примет вид

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{m}(u), \quad (123)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M_1 .

Но в отличие от линейчатой развевывающейся поверхности (рис. 83), поверхность с уравнением (123) неразвевывающаяся, так как при изменении параметра v нормаль и касательная плоскость при движении по образующей t поворачиваются.

Ограничивая «свободу» перемещения прямолинейной образующей по направляющей произвольной кривой, получим известные в геометрии *цилиндрические, конические* и другие поверхности.

35. Цилиндрическая поверхность. Поверхность, образованная перемещением прямой t параллельно самой себе по кривой n , называется *цилиндрической* (рис. 85). Поскольку при этом направление вектора \mathbf{s} постоянно, то векторное уравнение цилиндрической поверхности с учетом (123) примет вид

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{s}. \quad (124)$$

Образующая t в данной точке M поверхности соответствует одной из главных кривизн цилиндрической поверхности. Она совпадает с действительной асимптотой, одновременно представляющей собой геодезическую и линию кривизны.

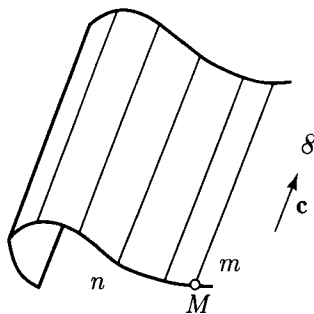


Рис. 85

Таким образом, цилиндрическая поверхность по своим дифференциально-геометрическим характеристикам является поверхностью нулевой кривизны ($K = 0$), развевывающейся, состоящей повсюду из параболических точек, с неопределенной линией сжатия.

36. Коническая поверхность. Поверхность, образованная перемещением прямой t , проходящей через неподвижную точку C , по кривой n , называется *конической* (рис. 86).

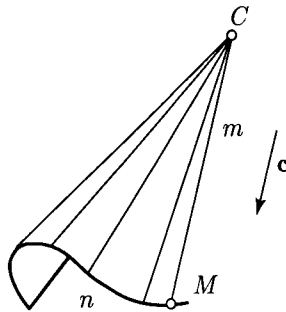


Рис. 86

Если за вектор c принять радиус-вектор r , направленный из вершины C поверхности, то с учетом (124) получим векторное уравнение конической поверхности

$$r = \rho(u) + c. \quad (125)$$

Дифференциально-геометрические характеристики конической поверхности сходны с цилиндрической, т.е. $K = 0$, за исключением вершины C , являющейся особой конической точкой, совпадающей с вырожденной линией сжатия поверхности. При удалении точки C в бесконечность коническая поверхность вырождается в цилиндрическую.

37. Торсовая поверхность. В основе образования поверхности тора лежит поверхность касательных (рис. 83), у которой образующие PM, \dots в каждой точке P, \dots пространственной кривой n продолжены так, чтобы полукасательные PM, PM_1, \dots составили две полости Φ_1 и Φ_2 одной поверхности, называемой *торсом* (рис. 87, образующие M_1M, \dots).

Поскольку полости поверхности Φ_1 и Φ_2 отличаются только знаками направления полукасательных, то составим уравнение одной из них, например, Φ_1 положительного знака.

Примем длину дуги \widehat{PN} пространственной кривой за параметр u . Тогда можно написать

$$\rho = \rho(u).$$

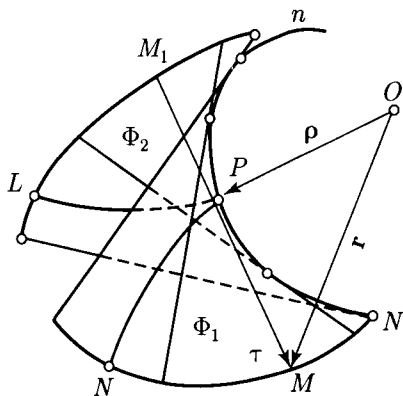


Рис. 87

Длину отрезка полукасательной PM от точки касания P до точки M образующей обозначим параметром v . Тогда можно написать

$$v = |\overline{PM}|,$$

а радиус-вектор \overline{OM} точки M представляет собой сумму векторов

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM},$$

где $\overline{OP} = \rho$ — радиус-вектор точки P , а \overline{PM} коллинеарен единичному касательному вектору τ дуги PN кривой n с надлежащим знаком параметра u :

$$\overline{PM} = v\tau.$$

Отсюда векторное уравнение поверхности тора Φ_1 примет вид

$$\mathbf{r} = \rho + v\tau. \quad (126)$$

Сечение поверхности нормальной плоскостью, перпендикулярной в точке P направляющей кривой n , представляет собой кривую с двумя ветвями PL и PN , где точка P есть двойная особая точка возврата первого рода.

Совокупность точек возврата, как известно, образует особую линию — ребро возврата, которая определила другое наименование поверхности тора, как *поверхности с ребром возврата*.

Поверхность с ребром возврата, или торовая — поверхность нулевой кривизны ($K = 0$), развертывающаяся, состоящая в целом из параболических точек, совпадающих на ребре возврата с особыми двойными точками возврата первого рода. Что касается линий кривизны, то они представляют собой только одно семейство прямолинейных образующих, соответствующих одной

из главных кривизн поверхности и одновременно являющихся асимптотическими и геодезическими линиями. Линия сжатия вырождается в ребро возврата поверхности.

Цилиндрические поверхности применяются в оболочках, перекрывающих промышленные здания на прямоугольном плане, а конические — чаще в составных оболочках (п. 55).

Поверхность тора с направляющей цилиндрической винтовой линией, как поверхность касательных, образует эвольвентный геликоид (винтовой торс) рассматриваемый ниже (п. 51).

От линейчатых разворачивающихся поверхностей с одной направляющей перейдем к изучению линейчатых неразворачивающихся поверхностей с двумя направляющими и дополнительным условием — плоскостью параллелизма (рис. 33).

38. Коноидальная поверхность. К коноидальным поверхностям относятся коноид (рис. 88, 89) и прямой геликоид (рис. 126), как имеющий с прямым коноидом единый закон образования.

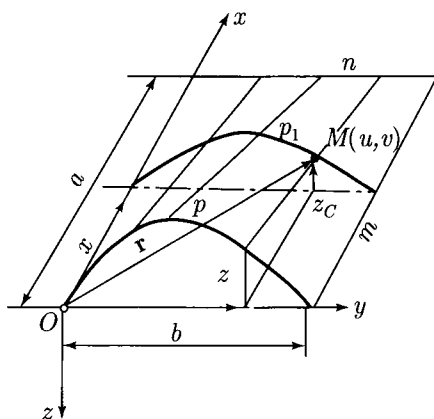


Рис. 88

Коноид образуется перемещением прямой, параллельной плоскости параллелизма, по двум направляющим линиям — прямой и кривой¹⁾.

На рис. 88 в качестве примера показан прямой коноид, заданный образующей m , параллельной координатной плоскости Oxz ,

¹⁾ Далее приводится вычисление гауссовой кривизны прямого коноида, которое описано подробно, поскольку в отечественной литературе по оболочкам пространственных конструкций такое вычисление отсутствует.

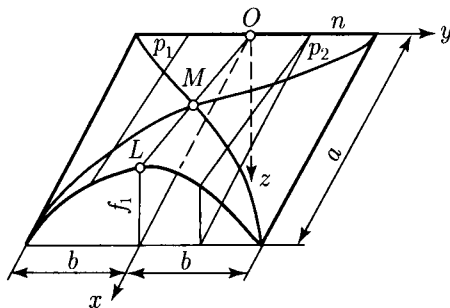


Рис. 89

принятой за плоскость параллелизма, а также направляющими: прямой n , перпендикулярной образующей m , и квадратной параболой p в координатной плоскости Oyz , смещенной по оси Oy

$$z = -\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(y - \frac{b}{2} \right)^2.$$

Выразим координату x через a и параметр u ($x = au$), а координату y через параметр v ($y = v$).

Поскольку координата z_C точки M параболы сечения $x = C$ поверхности плоскостью изменяется по линейному закону $z_C = z(1 - u)$, где параметр u изменяется от 0 до 1, то параметрические и векторное уравнения коноида соответственно имеют вид:

$$x = au, \quad y = v, \quad z = \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) (1 - u),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}au + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) (1 - u).$$

Находим частные производные:

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{i}a - \mathbf{k} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right),$$

$$\mathbf{r}'_v = \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

$$E = \mathbf{r}'_u{}^2 = \left(\mathbf{i}a - \mathbf{k} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \right)^2 =$$

$$= a^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
 F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = \\
 &= \left(\mathbf{i}a - \mathbf{k} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \right) \left(\mathbf{j} + \mathbf{k} \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right) = \\
 &= - \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u), \\
 G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = \left(\mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2 = \\
 &= 1 + \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Находим векторное произведение

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & -\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \\ 0 & 1 & \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \end{vmatrix} = \\
 &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \\ 1 & \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \end{vmatrix} - \\
 &\quad - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a & -\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \\ 0 & \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \end{vmatrix} + \\
 &+ \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \mathbf{j} \cdot \frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) + \mathbf{k}a.
 \end{aligned}$$

Находим величину

$$\begin{aligned}
 \sqrt{EG - F^2} &= \\
 &= \left(\left(a^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2 \right)^{1/2} = \\
 &= \left(a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1 - u) \right)^2 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^{1/2} = \\
 & = \sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Единичный вектор нормали к поверхности равен

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \\
 &= \frac{\mathbf{i} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \mathbf{j} \cdot \frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) + \mathbf{k}a}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Находим вторые частные производные:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}''_{uu} &= \mathbf{0}, \\
 \mathbf{r}''_{vv} &= \mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} (1-u), \\
 \mathbf{r}''_{uv} &= -\mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$$\begin{aligned}
 L &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uu} = \\
 &= \frac{\mathbf{i} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \mathbf{j} \cdot \frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) + \mathbf{k}a}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} \cdot \mathbf{0} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uv} = \frac{\mathbf{i} \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \mathbf{j} \cdot \frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) + \mathbf{k}a}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(-\mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) \right) = \\
 &= - \frac{\frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N = \mathbf{nr}''_{vv} &= \frac{\mathbf{i} \left(\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \mathbf{j} \cdot \frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) + \mathbf{k}a}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} \cdot \\
 &\quad \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{2}{b} (1-u) = \\
 &\quad = \frac{\frac{2a}{b} (1-u)}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения (103)

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0.$$

Находим коэффициенты этого уравнения:

$$\begin{aligned}
 EG - F^2 &= a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2, \\
 2MF - EN - LG &= \\
 &= 2 \left(-\frac{\frac{2a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} \right) \times \\
 &\quad \times \left(-\left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(a^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2 \right) \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\frac{2a}{b} (1-u)}{b} - \\
 &\quad \sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2} - \\
 &\quad - 0 \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 \right) = \\
 &= \frac{\frac{4a}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u)}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} - \\
 &\quad - \frac{\frac{2a}{b} (1-u) \left(a^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2 \right)}{\sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right) (1-u) \right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^2}} = \frac{2a}{b} (1-u).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\left(\frac{4}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)-\left(a^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2\right)}{\sqrt{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2}}, \\
 LN - M^2 &= \\
 &= 0 \cdot \frac{\frac{2a}{b}(1-u)}{\sqrt{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2}} - \\
 &- \left(\frac{\frac{2a}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2}} \right)^2 = \\
 &= - \frac{\frac{4a^2}{b^2}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2}{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение для определения главных кривизн имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \left(a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2\right)k^2 + \\
 & \quad + \frac{2a(1-u)}{b} \cdot \\
 & \cdot \frac{\left(\frac{4}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)-\left(a^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2\right)}{\sqrt{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2}} \cdot k - \\
 & \quad - \frac{\frac{4a^2}{b^2}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2}{a^2+a^2\left(\frac{2}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)(1-u)\right)^2+\left(-\frac{b}{4}+\frac{1}{b}\left(v-\frac{b}{2}\right)^2\right)^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, гауссова кривизна согласно (104) равна

$$\begin{aligned}
 K = k_1 k_2 &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\
 &= \frac{\frac{4a^2}{b^2} \left(v - \frac{b}{2}\right)^2}{a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2}\right) (1-u)\right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2}\right)^2\right)^2} = \\
 &= \frac{\frac{4a^2}{b^2} \left(v - \frac{b}{2}\right)^2}{\left(a^2 + a^2 \left(\frac{2}{b} \left(v - \frac{b}{2}\right) (1-u)\right)^2 + \left(-\frac{b}{4} + \frac{1}{b} \left(v - \frac{b}{2}\right)^2\right)^2\right)^2},
 \end{aligned}$$

средняя кривизна из (105)

$$H \neq 0.$$

Кривизна кручения коноида

$$k_{uv} = M \neq 0.$$

Таким образом, нахождение гауссовой кривизны коноида с использованием векторного уравнения приводит к сложным вычислениям.

На практике за направляющие кривые принимают дуги окружностей или параболы.

Прямой коноид $z = z(x, y)$ с направляющей параболой p на квадратном плане (рис. 89) задается в координатной форме уравнением [8]

$$z = -f_1 \frac{y^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{x}{a},$$

где f_1 — стрела подъема параболы p .

Кривизна кручения поверхности согласно (112а) равна

$$k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{b^2} \cdot \frac{f_1}{a} \neq 0 \quad (\text{при } y \neq 0).$$

Гауссова кривизна находится из (111):

$$K = \frac{z''_{xx} z''_{yy} - z''_{xy}{}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{k_x k_y - k_{xy}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

где

$$k_x k_y - k_{xy}^2 = -\left(\frac{2f_1 y}{ab^2}\right)^2.$$

Подставляя значения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, получаем

$$K = - \frac{\left(\frac{2f_1 y}{ab^2}\right)^2}{\left[1 + \left(f_1 \frac{y^2 - b^2}{ab^2}\right)^2 + \left(2f_1 \frac{xy}{ab^2}\right)^2\right]^2}.$$

Прямой коноид представляет собой линейчатую неразвертывающуюся поверхность третьего порядка, в целом отрицательной кривизны ($K < 0$); форма коноида уплощается при приближении к прямолинейной направляющей n .

Главные кривизны k_1 и k_2 , которым соответствуют линии перегиба p_1 и p_2 в точке перегиба M ($k = 0$), направлены под углом 45° к образующим a , ... и соответствуют главным направлениям — биссектрисам углов (п. 27) между ортогональными асимптотическими прямыми (a и n) основания поверхности (рис. 89, главные направления в данной точке не показаны).

Геодезической будет направляющая прямая n , совпадающая с линией сжатия (п. 30), как прямая, перпендикулярная образующим поверхности.

Конoidalными оболочками, как одиночными, так и сочлененными друг с другом, перекрывают преимущественно промышленные здания на прямоугольном плане (рис. 90).

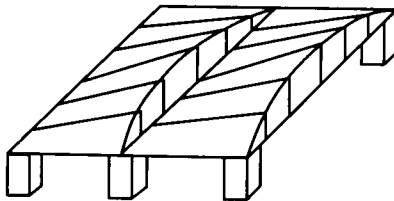


Рис. 90

Поверхность коноида имеет достаточную жесткость конструкции, хорошо отводит атмосферные осадки и при наличии стеклянной диафрагмы равномерно освещает дневным светом внутренние помещения.

39. Линейчатый, или гиперболический параболоид. Она и та же поверхность — *линейчатый, или гиперболический параболоид* — может быть получена, исходя из различных законов образования, и соответственно отнесена к двум разным классам.

Первый из них входит в класс линейчатых неразвертывающихся поверхностей (§ 11), а второй — в класс поверхностей переноса (§ 13).

Линейчатый параболоид получается перемещением по двум скрещивающимся прямым прямой, параллельной плоскости параллелизма, что сближает его с коноидом (частный случай коноида).

На рис. 91 показан простейший линейчатый параболоид, отнесенный к ортогональным асимптотам a и b по направлению осей координат Ox и Oy и образованный перемещением по двум скрещивающимся прямым AD и BC прямой AB , параллельной координатной плоскости Oxz . Очевидно, что поверхность можно получить и перемещением по двум скрещивающимся прямым AB и DC прямой BC , параллельной плоскости Oyz .

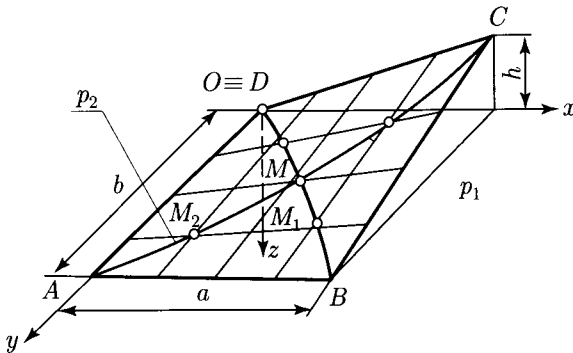


Рис. 91

В результате имеем два семейства взаимно пересекающихся асимптотических прямых, ограниченных контуром $ABCD$, представляющим собой неплоский четырехугольник, так называемую *косую плоскость*.

Согласно обозначениям, приведенным на рис. 91, уравнение линейчатого равностороннего параболоида, отнесенного к ортогональным асимптотам, имеет вид

$$z = -\frac{h}{ab} xy.$$

Кривизна кручения поверхности согласно (112а) выражается коэффициентом

$$k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{h}{ab} \neq 0.$$

Отсюда следует, что главные направления поверхности не совпадают с осями Ox и Oy прямоугольной системы координат

и, следовательно, направления главных кривизн проецируются в биссектрисы углов между асимптотическими образующими (п. 27).

Геометрически переход от линейчатого гиперболического параболоида к нелинейчатому можно осуществить путем построения парабол p_1 и p_2 соответственно по точкам $BM_1M \dots D$ и $AM_2M \dots C$ пересечения прямолинейных образующих разных семейств, соединенных гладкими кривыми (рис. 118, главные параболы p_1 и p_2).

Линейчатый параболоид представляет собой поверхность отрицательной кривизны ($K < 0$), неразвертывающуюся, с двумя семействами действительных асимптот и состоящую повсюду из гиперболических точек.

Геодезическими будут прямые AB и AD , совпадающие с двумя линиями сжатия поверхности. Другие геометрические характеристики линейчатого параболоида приводятся ниже (п. 48).

Гиперболический параболоид, как линейчатая поверхность, чаще применяется в большепролетных металлических конструкциях различных сооружений, преимущественно общественных зданий: стадионов, рынков и других, имеющих в плане многоугольник, окружность или эллипс.

На рис. 92 изображен один из многочисленных вариантов архитектурной композиции, состоящей из четырех сочлененных косых плоскостей на прямоугольном плане.

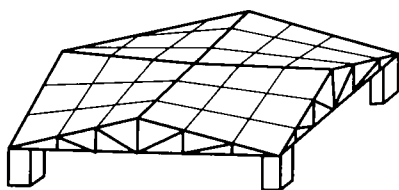


Рис. 92

Жесткость конструкции линейчатого параболоида, как поверхности двоякой отрицательной кривизны, в сочетании с простотой изготовления каркаса из прямолинейных элементов, позволяет использовать его в висячих конструкциях ¹⁾.

¹⁾ Висячие покрытия состоят из стальных тросов (вант), работающих на растяжение.

§ 12. Поверхности вращения

Особенностью этого класса поверхностей является *способность подвергаться круговому переносу без изменения формы*, что расширяет возможность применения их в технике по сравнению с другими поверхностями.

В основе поверхности вращения лежит круговой поворот или круговой перенос некоторой линии относительно неподвижной прямой.

Поверхность, образованная вращением плоской линии m вокруг неподвижной прямой — *оси вращения*, — лежащей в плоскости этой оси, называется *поверхностью вращения* (рис. 93; за ось вращения принята координатная ось Oz).

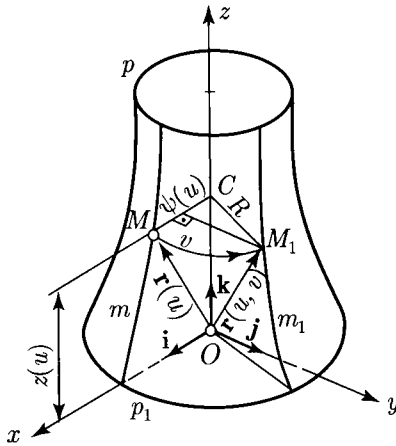


Рис. 93

Линия сечения поверхности вращения осевой плоскостью называется *меридианом*, а плоскостью, перпендикулярной оси вращения, — *параллелью*. Поэтому каждая точка M меридиана m поверхности перемещается в плоскости, перпендикулярной оси вращения, по *окружности* p радиуса R с центром C на оси вращения.

Меридиан, расположенный в плоскости Oxz , называется *главным*, а параллели наибольшего и наименьшего радиусов называются соответственно *экватором* и *горлом*.

Меридианы и параллели составляют *ортогонально-сопряженную сеть координатных линий, соответствующих линиям кривизны поверхности вращения* (п. 26). При этом меридианы, как конгруэнтные линии (т.е. переводимые друг в друга

вращением), соответствуют одной из главных кривизн поверхности вращения, а параллели — линиям постоянной кривизны. Одно из главных направлений поверхности совпадает с направлением касательной к меридиану в данной точке, а второе перпендикулярно ему в той же точке. Поэтому говорят, что поверхность вращения отнесена к главным направлениям.

Нормали к поверхности вращения, проведенные через точки одного меридиана, всегда пересекают ее ось вращения и образуют при вращении вокруг оси поверхность центров, или фокальную поверхность, а нормали, проведенные через точки параллели — конус вращения с вершиной на оси (рис. 54).

Кроме того, меридианы, экватор, горло, а также кривые, пересекающие меридианы и параллели под определенным углом, относятся к геодезическим линиям (рис. 60).

Чтобы вывести параметрические уравнения поверхности вращения $r = r(u, v)$ общего вида (рис. 93), зададим образующую кривую m — меридиан — в координатной плоскости Oxz уравнениями

$$x = \psi(u), \quad z = \varphi(u),$$

с произвольной точкой $M(\psi(u), 0, \varphi(u))$.

При повороте образующей m около оси Oz на угол v ее точка M переходит в точку

$$M_1(\psi(u) \cos v, \psi(u) \sin v, \varphi(u)).$$

Отсюда получим параметрические уравнения поверхности вращения общего вида:

$$x = \psi(u) \cos v, \quad y = \psi(u) \sin v, \quad z = \varphi(u), \quad (127)$$

или векторное уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\psi(u) \cos v + \mathbf{j}\psi(u) \sin v + \mathbf{k}\varphi(u), \quad (128)$$

где линии $v = \text{const}$ — меридианы, а линии $u = \text{const}$ — параллели.

Уравнение поверхности вращения $z = z(x, y)$ в координатной форме записывается в виде

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (129)$$

Поверхности вращения с центрами в начале координат и плоскостями координат, представляющими их плоскости симметрии, называются *центральными*, как, например, однополостный гиперболоид вращения (рис. 98).

В зависимости от формы образующей линии — прямой или кривой — поверхности вращения соответственно разделяются на линейчатые и нелнейчатые.

Сначала рассмотрим линейчатые поверхности вращения. Заметим, что кривизна кручения любой поверхности вращения всегда равна

$$k_{xy} = M = 0.$$

40. Прямой круговой конус. Это — поверхность вращения второго порядка, которая образуется вращением вокруг оси Oz прямой m , пересекающей ее в точке O начала координат (рис. 94, показаны две полости конуса).

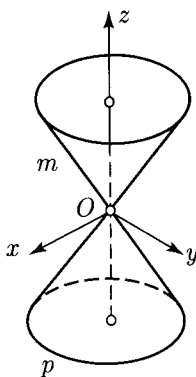


Рис. 94

Уравнение прямого кругового конуса записывается в виде

$$z^2 = p^2(x^2 + y^2).$$

Параметрические и векторное уравнения соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, & y &= u \sin v, & z &= pu, \\ \mathbf{r} &= iu \cos v + ju \sin v + kpu. \end{aligned}$$

Координатная сеть поверхности состоит из окружностей $u = \text{const}$ (параллелей) и прямых $v = \text{const}$ (меридианов), представляющих собой два семейства линий кривизны.

Для нахождения гауссовой и средней кривизн прямого кругового конуса дважды продифференцируем, например, векторное уравнение в следующей последовательности ¹⁾.

¹⁾ Пример служит образцом для вычисления гауссовой и средней кривизн поверхностей вращения в дальнейшем изложении.

1) Находим первые частные производные вектора \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u &= \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v + \mathbf{k}p, \\ \mathbf{r}'_v &= -\mathbf{i}u \sin v + \mathbf{j}u \cos v + \mathbf{k} \cdot 0.\end{aligned}$$

2) Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы поверхности согласно (65):

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{r}'_u{}^2 = (\mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v + \mathbf{k}p)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + p^2 = 1 + p^2, \\ F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = (\mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v + \mathbf{k}p)(-\mathbf{i}u \sin v + \mathbf{j}u \cos v + \mathbf{k} \cdot 0) = \\ &= -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = 0, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = (-\mathbf{i}u \sin v + \mathbf{j}u \cos v + \mathbf{k} \cdot 0)^2 = \\ &= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2;\end{aligned}$$

тогда в силу (66) имеем

$$I = (1 + p^2) du^2 + u^2 dv^2.$$

3) Находим единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности по формуле уравнения (79):

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Числитель этой дроби равен

$$\begin{aligned}[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & p \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} \sin v & p \\ u \cos v & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} \cos v & p \\ -u \sin v & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = \\ &= -\mathbf{i}pu \cos v - \mathbf{j}pu \sin v + \mathbf{k}u.\end{aligned}$$

Знаменатель равен

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1 + p^2)u^2 - 0^2} = u\sqrt{1 + p^2}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{-\mathbf{i}pu \cos v - \mathbf{j}pu \sin v + \mathbf{k}u}{u\sqrt{1 + p^2}} = \\ &= -\mathbf{i} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cos v - \mathbf{j} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \sin v + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}.\end{aligned}$$

4) Находим вторые частные производные вектора \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''_{uu} &= \mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0, \\ \mathbf{r}''_{uv} &= -\mathbf{i} \sin v + \mathbf{j} \cos v + \mathbf{k} \cdot 0, \\ \mathbf{r}''_{vv} &= 0\mathbf{i}u \cos v - \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k} \cdot 0.\end{aligned}$$

5) Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы поверхности согласно (80):

$$L = \mathbf{nr}''_{uu} = \left(-\mathbf{i} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos v - \mathbf{j} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \sin v + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot (\mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}M = \mathbf{nr}''_{uv} &= \left(-\mathbf{i} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos v - \mathbf{j} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \sin v + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (-\mathbf{i} \cdot \sin v + \mathbf{j} \cdot \cos v + \mathbf{k} \cdot 0) = \\ &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos v \sin v - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \sin v \cos v = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N = \mathbf{nr}''_{vv} &= \left(-\mathbf{i} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos v - \mathbf{j} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \sin v + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (-\mathbf{i}u \cos v - \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k} \cdot 0) = \\ &= \frac{pu}{\sqrt{1+p^2}} \cos^2 v + \frac{pu}{\sqrt{1+p^2}} \sin^2 v = \frac{pu}{\sqrt{1+p^2}}; \\ \Pi &= \frac{pu}{\sqrt{1+p^2}}.\end{aligned}$$

6) Находим главные кривизны поверхностей из (106), поскольку $F = M = 0$:

$$k_1 = \frac{L}{E} = 0, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{p}{u\sqrt{1+p^2}}.$$

Отсюда получаем гауссову и среднюю кривизны соответственно из (107) и (108):

$$K = \frac{LN}{EG} = 0, \quad H = \frac{LG + EN}{EG} = \frac{p}{2u\sqrt{1+p^2}}.$$

Кривизна кручения поверхности равна

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главные кривизны в данной точке поверхности конуса можно найти по упрощенной схеме (рис. 55). Главная кривизна k_1 соответствует асимптотической прямой m радиуса кривизны $R_1 = \infty$, а главная кривизна k_2 соответствует кривой

эллиптического типа радиуса кривизны R_2 и определяется в той же точке по теореме Мёнье.

Сечениями конуса плоскостью, в зависимости от ее положения относительно оси вращения и образующих, будут: эллипсы (в частности, окружности), параболы, гиперболы и пересекающиеся в его вершине две прямые.

Прямой круговой конус является поверхностью нулевой кривизны, линейчатой, развертывающейся, состоящей в основном из параболических точек, кроме вершины — особой конической точки.

Геодезическими являются прямолинейные образующие с единственным семейством асимптот. Линия сжатия вырождается в точку вершины конуса. При удалении образующих в бесконечность поверхность вырождается в прямой круговой цилиндр (п. 41).

В строительстве прямой круговой конус применяется большей частью в постройках башенного типа в виде куполов (рис. 95). В форме усеченного конуса конструируют заводские трубы, в сантехнике — пробковые краны и другие изделия.

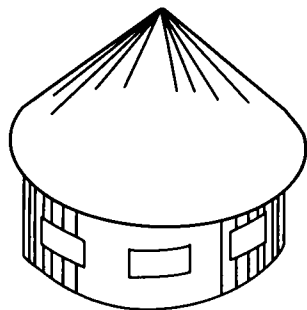


Рис. 95

41. Прямой круговой цилиндр¹⁾. Это поверхность вращения второго порядка, образованная вращением вокруг оси Oz прямой m , параллельной этой оси (рис. 96).

Если за образующие цилиндра принять пару параллельных прямых в виде $x + R = 0$ и $x - R = 0$, представляющую собой распавшуюся кривую второго порядка $x^2 - R^2 = 0$, где R — постоянное расстояние прямых от оси вращения Oz , равное радиусу цилиндра, то, подставив в последнее уравнение вместо

¹⁾ Здесь и в дальнейшем дается сокращенный вывод гауссовой и средней кривизн поверхностей вращения.

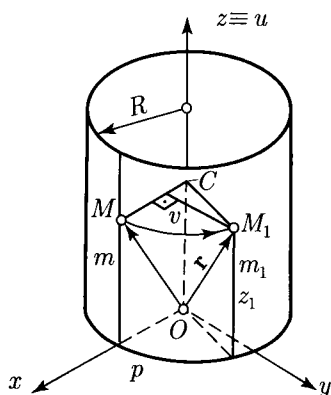


Рис. 96

переменной x^2 величину $x^2 + y^2$, получим уравнение прямого кругового цилиндра в координатах

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Параметрические и векторное уравнения выводятся на основе схемы рис. 96 соответственно в виде

$$x = R \cos v, \quad y = R \sin v, \quad z = u$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}R \cos v + \mathbf{j}R \sin v + \mathbf{k}u,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M_1 поверхности.

Координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются соответственно окружностями p , совпадающими с двумя семействами линий кривизны поверхности, и образующими прямыми m .

Коэффициенты первой квадратичной формы на основании (65) будут равны:

$$E = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_u = (\mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 1)^2 = 1,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = (\mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 1)(-\mathbf{i}R \sin v + \mathbf{j}R \cos v + \mathbf{k} \cdot 0) = 0,$$

$$G = \mathbf{r}'_v \mathbf{r}'_v = (-\mathbf{i}R \sin v + \mathbf{j}R \cos v + \mathbf{k} \cdot 0)^2 = R^2,$$

$$I = du^2 + R^2 dv^2.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности находятся из (80):

$$L = \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uu} = (-\mathbf{i} \cos v - \mathbf{j} \sin v) \cdot 0 = 0,$$

$$M = \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uv} = (-\mathbf{i} \cos v - \mathbf{j} \sin v) \cdot 0 = 0,$$

$$N = \mathbf{nr}''_{vv} = (-\mathbf{i} \cos v - \mathbf{j} \sin v)(-\mathbf{i}R \cos v - \mathbf{j}R \sin v) = R,$$

$$\Pi = R dv^2.$$

Главные кривизны находятся из (106):

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

Отсюда получаются гауссова и средняя кривизны соответственно из (107) и (108):

$$K = \frac{LN}{EG} = 0, \quad H = \frac{LG + EN}{2EG} = \frac{1}{2R} \neq 0.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главным кривизнам k_1 и k_2 в данной точке цилиндра соответствуют прямая m радиуса кривизны $R_2 = 0$ и окружность p радиуса кривизны R_1 .

Сечения поверхности плоскостями в зависимости от расположения относительно оси вращения будут: эллипсы, окружности, пары параллельных прямых.

Прямой круговой цилиндр представляет собой поверхность нулевой, или одинарной кривизны ($K = 0$), линейчатую, развертывающуюся, с одним семейством действительных асимптотических прямых, повсюду состоящую из параболических точек. Геодезическими могут быть образующие прямые, направляющие окружности и винтовые линии (рис. 59). Линия сжатия не определена.

В форме прямого кругового цилиндра изготавливают резервуары для хранения жидкости и газа, детали сантехнического оборудования (водопроводные трубы, краны и другие изделия).

Форма цилиндра используется в постройках башенного типа, колоннах и в декоративном оформлении зданий.

Прямой круговой цилиндр с горизонтальной осью часто применяется в многоволновых оболочках, перекрывающих заводские здания, ангары, складские помещения и другие промышленные объекты (рис. 97).

Развертки цилиндра используются при изготовлении различных технических изделий промышленного и хозяйственного назначения.

42. Однополостный гиперболоид вращения. Это центральная поверхность второго порядка, образованная вращением гиперболы m около мнимой оси Oz (рис. 98).

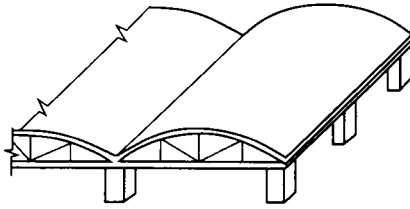


Рис. 97

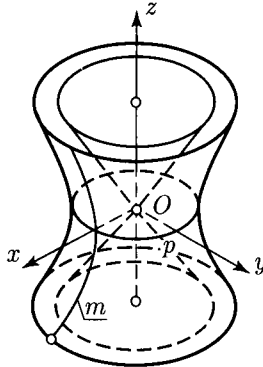


Рис. 98

Наименование поверхности «гиперboloид вращения» вызвано его постоянным элементом — гиперболой, а слово «однополостный» позволяет отличить его от разрывного двуполостного гиперболоида вращения.

Однополостный гиперболоид вращения является частным случаем эллиптического гиперболоида, или поверхности с тремя направляющими скрещивающимися прямыми (рис. 32).

Уравнение однополостного гиперболоида вращения с центром O в начале координат можно получить, если в уравнение образующей гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вместо переменной x подставить $\sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда уравнение поверхности в координатах будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Параметрическое и векторное уравнения соответственно будут:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u$$

и

$$\mathbf{r} = i a \operatorname{ch} u \cos v + j a \operatorname{ch} u \sin v + \mathbf{k} \operatorname{sh} u,$$

где sh обозначает гиперболический синус, а ch — гиперболический косинус.

Координатная сеть однополостного гиперboloида вращения состоит из окружностей (параллелей) $u = \text{const}$ и гипербол (меридианов) $v = \text{const}$, совпадающих с линиями кривизны поверхности.

Первая и вторая квадратичные формы поверхности находятся по образцу примера с круговым прямым конусом (п. 40):

$$I = (a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u) du^2 + a^2 \text{ch}^2 u dv^2,$$

$$II = \frac{-ac du^2 + ac \text{ch}^2 u dv^2}{\sqrt{a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u}}.$$

Главные кривизны определяются из (106):

$$k_1 = -\frac{ac}{(a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{c}{a(a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u)^{1/2}}.$$

Гауссова и средняя кривизны определяются из (107) и (108):

$$K = -\frac{c^2}{(a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u)^2} < 0, \quad H = \frac{c[(a^2 + c^2) \text{sh}^2 u - (a^2 - c^2)]}{2a(a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u)^{3/2}}.$$

Кривизна кручения поверхности равна

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главная кривизна k_1 соответствует гиперболу меридиана в данной точке поверхности с радиусом кривизны R_1 , а главная кривизна k_2 в направлении параллели p определяется радиусом кривизны R_2 в той же точке (рис. 54).

Сечение поверхности плоскостью $z = 0$ дает окружность минимального радиуса — горло. Сечение плоскостью π , касательной в точке M горла, дает две пересекающиеся прямые AB и A_1B_1 , определяемые уравнениями

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \text{при } x = \pm a.$$

Поэтому однополостный гиперboloид вращения можно получить вращением прямой AB или A_1B_1 , скрещивающейся относительно оси Oz соответственно с правым или левым отклонением (рис. 99).

Внутри однополостного гиперboloида вращения существует асимптотический конус вращения с вершиной в начале координат (рис. 98, конус с вершиной O). Следовательно, на однополостном гиперboloиде вращения расположены все конические

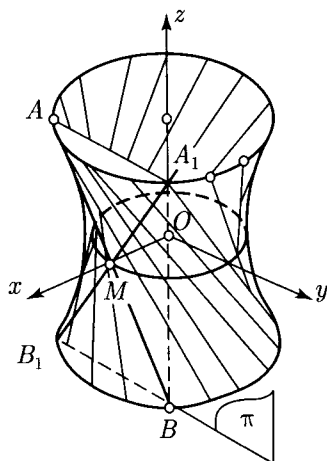


Рис. 99

сечения, за исключением парабол, замененных параллельными образующими, проходящими через диаметрально противоположные стороны поверхности (на рис. 99 не показаны).

Однополостный гиперboloид вращения представляет собой поверхность отрицательной кривизны $K < 0$, неразвертывающуюся, с двумя семействами действительных асимптот, или дважды линейчатую, состоящую повсюду из гиперболических точек. Геодезическими будут все меридианы — гиперболы, окружности горла, а также спирали, вьющиеся по поверхности в противоположные стороны (на рис. 98 и 99 не показаны). Линия сжатия вырождается в окружность горла поверхности (рис. 67).

Однополостный гиперboloид преимущественно применяется в многоволновых оболочках и сооружениях башенного типа с металлическим каркасом: радио- и телебашнях (например, башня Шухова), маяках, а также в градирнях и резервуарах большой емкости.

На рис. 100 показано перспективное изображение водонапорной башни в виде цилиндрического вертикального столба и резервуара, опирающихся на металлические стержни — линейчатые образующие однополостного гиперboloида вращения.

43. Сфероидальные поверхности. Далее мы рассмотрим *нелинейчатые поверхности вращения* (т. е. не содержащие прямых линий, но подчиняющиеся закону вращения), среди которых важное место занимает сфера.

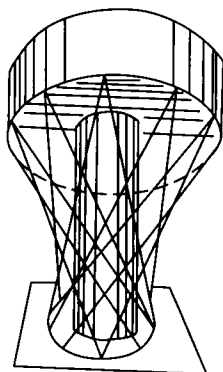


Рис. 100

К сфероидальным поверхностям вращения, кроме сферы, отнесем различные виды эллипсоидов и, в частности, эллипсоид вращения.

Сфера есть центральная поверхность второго порядка, которая образуется вращением окружности $x^2 + z^2 = R^2$ вокруг оси Oz , на которой расположен диаметр сферы (рис. 101).

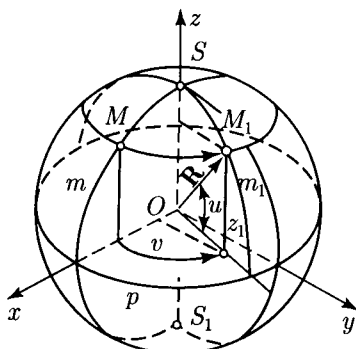


Рис. 101

Подставив в уравнение окружности вместо переменной x^2 выражение $x^2 + y^2$, получим уравнение сферы в координатах

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

На основании схемы, показывающей перемещение точки M в M_1 путем вращения меридиана m в положение m_1 (рис. 101), где \mathbf{R} — радиус-вектор точки M_1 (т. е. $R = |\mathbf{R}|$), параметрические и векторное уравнения сферы будут иметь соответственно следующий вид:

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u$$

и

$$\mathbf{r} = iR \cos u \cos v + jR \cos u \sin v + kR \sin u.$$

Координатная сеть сферы состоит из окружностей $u = \text{const}$ — параллелей p — и $v = \text{const}$ — меридианов m , — совпадающих с ее линиями кривизны.

Коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E = \mathbf{r}'_u{}^2 = R^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = R^2,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = 0,$$

$$G = \mathbf{r}'_v{}^2 = R^2 \cos^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) = R^2 \cos^2 u,$$

$$I = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = \mathbf{nr}''_{uu} = R \cos^2 u + R \sin^2 u = R,$$

$$M = \mathbf{nr}''_{uv} = 0,$$

$$N = \mathbf{nr}''_{vv} = R \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) = R \cos^2 u,$$

$$II = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

Главные кривизны находим из (106):

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{R}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{R}.$$

Гауссову и среднюю кривизны находим из (107) и (108) или (91) и (92):

$$K = \frac{1}{R^2} > 0, \quad H = \frac{1}{R} \neq 0.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главные кривизны сферы k_1 и k_2 соответствуют окружностям равных радиусов кривизны в каждой точке поверхности. Любое сечение сферы есть окружность.

Сфера представляет собой замкнутую центральную нелинейчатую выпуклую поверхность постоянной положительной кривизны ($K > 0$), без краев и действительных асимптот, неразвертывающуюся, состоящую в целом из омбилических (шаровых) точек, кроме полюсов — особых изолированных точек пересечения меридианов ($\cos \varphi = 0$) при определенной параметризации поверхности (п. 17).

Геодезическими линиями являются большие круги сферы, так как главные нормали совпадают с нормальными к поверхности. Фокальная поверхность, или поверхность центров сферы представляет собой конус вращения с вершиной в центре сферы, т. е. вырождается в точку. Кроме того, сфера — единственная из класса поверхностей вращения, имеющая бесконечное множество осей вращения, с предельными точками, равноудаленными от центра поверхности.

Другая особенность сферы заключается в том, что по сравнению с другими поверхностями с равными площадями она имеет наибольший объем.

Стереографическая проекция сферы используется в картографии для изображения земной поверхности и решения других задач геометрии поверхностей (см. рис. 159).

В форме сферы, как открытой поверхности, сооружают купольные покрытия зданий, в том числе церквей и зданий специального назначения, например, обсерваторий (рис. 102). При помощи сферы образуются другие поверхности: тороидальные (п. 44), циклические (п. 52), циклиды Дюпена (п. 53) и поверхности постоянной гауссовой кривизны (п. 33).

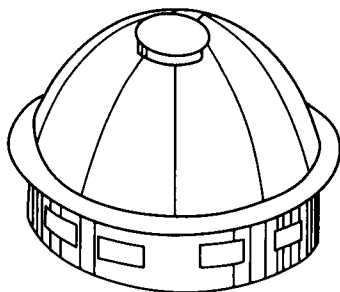


Рис. 102

Путем равномерного сжатия по направлению к плоскости экватора сфера преобразуется в эллипсоид вращения.

Эллипсоид вращения также получается вращением эллипса m вокруг его большой оси (рис. 103), принятой за координатную ось Oz , и описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a и c — полуоси эллипса. При $a < c$ эллипсоид называется *вытянутым*, а при $a > c$ — *сжатым*.

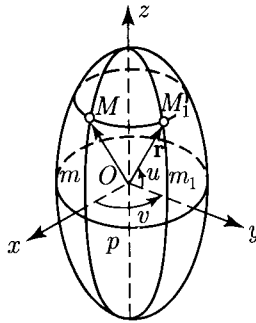


Рис. 103

Если образующий меридиан m эллипсоида задать в координатной плоскости Oxz в виде кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, то в соответствии с рис. 103 получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u) = \mathbf{i}a \sin u + \mathbf{k}c \cos u.$$

Тогда параметрические и векторное уравнения поверхности можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \cos v, & y &= a \sin u \sin v, & z &= c \cos u; \\ \mathbf{r} &= \mathbf{i}a \sin u \cos v + \mathbf{j}a \sin u \sin v + \mathbf{k}c \cos u. \end{aligned}$$

Координатными линиями будут окружности $u = \text{const}$ и эллипсы $v = \text{const}$, совпадающие с линиями кривизны поверхности.

Главные кривизны находятся из (103) или (106).

Гауссова и средняя кривизны находятся соответственно из (104) и (105) или (107) и (108).

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главные кривизны k_1 и k_2 , определяемые по схеме рис. 55, в данной точке эллипсоида вращения соответствуют эллипсам с разными полуосями и радиусами кривизны R_1 и R_2 .

Эллипсоид вращения представляет собой замкнутую, выпуклую центральную поверхность второго порядка, положительной кривизны ($K > 0$), неразвертывающуюся, без действительных асимптот, состоящую из эллиптических точек, за исключением полюсов — омбилических точек (п. 31), которые, как и на сфере, могут переходить в особые изолированные точки (п. 17). Стереографическая проекция эллипсоида вращения есть окружность (см. приложение, пример 3).

Геодезическими линиями будут меридианы и экватор. При $a = c$ эллипсоид вращения является сферой.

В практике строительства открытый эллипсоид вращения, как и сфера, применяется в купольных покрытиях различных зданий, а также в качестве декоративного оформления интерьеров и других внутренних помещений.

В технике это обшивки вагонов, автомобилей и других объектов, не несущих нагрузки.

44. Тороидальные поверхности. К тороидальным поверхностям отнесем поверхности вращения четвертого порядка, образованные вращением окружности постоянного радиуса вокруг оси, расположенной в ее плоскости, причем центр окружности расположен вне оси.

В зависимости от положения образующей окружности относительно оси вращения (не пересекает ось, касается оси, пересекает ось) тороидальные поверхности соответственно называются: *кольцом* (рис. 104 и 105), *открытым тором* (рис. 106) и *закрытым тором* (рис. 107).

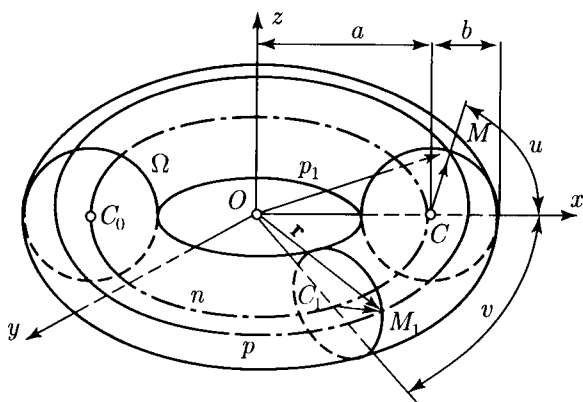


Рис. 104

Закрытый тор, в свою очередь, содержит во внутренней области вторую поверхность (рис. 107, штриховые линии).

Тороидальную поверхность, например, кольцо, можно получить, как огибающую семейства сфер постоянного радиуса b с центрами C_0, \dots на окружности n — линии центров (рис. 104, сфера Ω), заданную в координатной форме уравнением

$$4a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2.$$

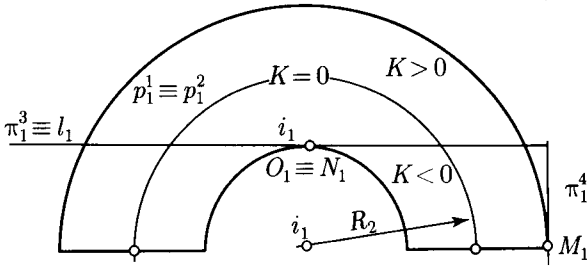
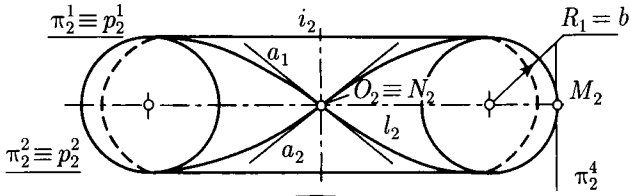


Рис. 105

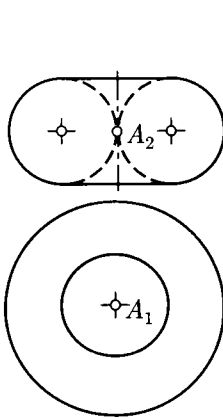


Рис. 106

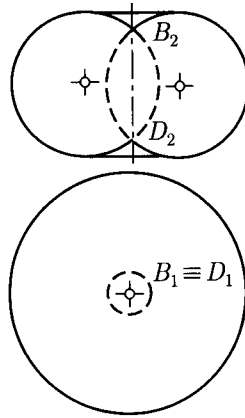


Рис. 107

Напишем параметрические и векторное уравнения кольца, образованного вращением окружности радиуса b , расположенной в координатной плоскости Oxz с центром C на линии n , на основе схемы рис. 104:

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u,$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(a + b \cos u) \cos v + \mathbf{j}(a + b \cos u) \sin v + \mathbf{k}b \sin u.$$

Координатная сеть поверхности состоит из окружностей $v = \text{const}$ — меридианов — и окружностей $u = \text{const}$ — параллелей, совпадающих с линиями кривизны.

Коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_u{}^2 = b^2, \\ F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = 0, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = (a + b \cos u)^2, \\ I &= b^2 du^2 + (a + b \cos u)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{nr}''_{uu} = b, \\ M &= \mathbf{nr}''_{uv} = 0, \\ N &= \mathbf{nr}''_{vv} = (a + b \cos u) \cos u, \\ II &= b du^2 + (a + b \cos u) \cos u dv^2. \end{aligned}$$

Главные кривизны находят из (106):

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{b}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{\cos u}{a + b \cos u}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся из (107) и (108) или из (91) и (92):

$$K = \frac{\cos u}{b(a + b \cos u)} > 0, \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{\cos u}{a + b \cos u} \right) \neq 0$$

(здесь мы рассматриваем наружную область).

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главная кривизна k_1 в данной точке M кольца соответствует окружности меридиана m радиуса кривизны $R_1 = b$, а главная кривизна k_2 в направлении параллели p в той же точке определяется радиусом кривизны $R_2 = \frac{a + b \cos u}{\cos u}$ на продолжении отрезка C_0M нормали n_0 к поверхности до пересечения с осью Oz (рис. 104; нормаль n_0 , центр кривизны и радиус кривизны не показаны).

На рис. 105 показаны ортогональные проекции полукольца с касательными плоскостями π^1 , π^2 , π^3 и π^4 в данных точках поверхности, выявляющими геометрически ее строение (п. 32).

Касательные плоскости $\pi^1(\pi^1_1, \pi^1_2)$ и $\pi^2(\pi^2_1, \pi^2_2)$ соприкасаются с поверхностью по двум параболическим линиям — полуокруж-

ностям $p^1(p_1^1, p_2^1)$ и $p^2(p_1^2, p_2^2)$ с $K = 0$, отделяющим внешнюю область ($K > 0$) от внутренней ($K < 0$).

Касательная плоскость $\pi^3(\pi_1^3, \pi_2^4)$ в гиперболической точке $O(O_1, O_2)$ одновременно пересекает поверхность в двойной особой узловой точке $N(N_1, N_2)$, совпадающей с точкой $O(O_1, O_2)$, по лемнискате $l(l_1, l_2)$ с асимптотами a_1 и a_2 (п. 4).

Касательная плоскость $\pi^4(\pi_1^4, \pi_2^4)$ касается поверхности по наружной области ($K > 0$) в эллиптической точке $M(M_1, M_2)$.

Сечение кольца плоскостью, наклонной к его оси вращения, касающейся внутренней гиперболической области, дает две пересекающиеся между собой окружности Вилларсо (рис. 105, окружности не показаны). Поверхность центров кольца вырождается в ее ось вращения $I(i_1, i_2)$ (рис. 105).

Тороидальные поверхности являются замкнутыми, неразвертывающимися поверхностями разнозначной гауссовой кривизны ($K > 0$, $K < 0$, $K = 0$), состоящими из эллиптических точек по наружной области, гиперболических по внутренней области и разделяющих их двух параболических линий — окружностей. Кроме того, в гиперболической области существуют два семейства действительных асимптот a_1 и a_2 .

Геодезическими линиями будут скружности меридианов, экватора p , горла p_1 и спирали, вьющиеся по поверхности в разных направлениях (рис. 104, спирали не показаны).

Открытый тор имеет двойную особую точку соприкосновения (рис. 106, точка A), а закрытый тор — две двойные особые точки самопересечения (рис. 107, точки B и D).

Тороидальные поверхности применяются в покрытиях зданий различного назначения. На рис. 108 показана состоящая из сочлененных полуколец оболочка, покрывающая потолок станции метро «Тимирязевская» в Москве.

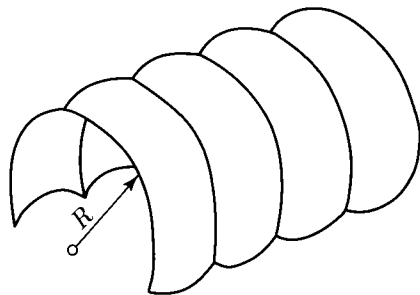


Рис. 108

Форму тора имеют термоядерные реакторы. В машиностроении форму тора придают глобoidным передаткам, а также корпусам вентиляей, кранов и т. п. В плоскостях, проходящих через ось вращения кольца, располагают обмотки трансформаторов переменного тока.

45. Параболоиды вращения. Здесь рассматриваются параболоиды вращения *второго и четвертого порядков*, с разным расположением образующих их парабол к оси вращения.

Параболоид вращения второго порядка образуется поворотом квадратной параболы $z = \frac{x^2}{a}$ около действительной оси вращения Oz (рис. 109) с уравнением в координатах

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a}.$$

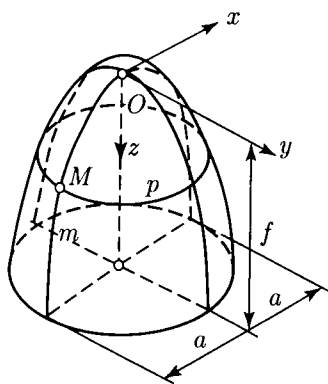


Рис. 109

Параметрические и векторное уравнения соответственно будут:

$$x = au \cos v, \quad y = au \sin v, \quad z = au^2,$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}au \cos v + \mathbf{j}au \sin v + \mathbf{k}au^2.$$

Координатные линии представляют собой параболы $v = \text{const}$ (меридианы) и окружности $u = \text{const}$ (параллели).

Первая и вторая квадратичные формы поверхности имеют вид соответственно:

$$I = a^2(1 + 4u^2) du^2 + a^2u^2 dv^2$$

и

$$II = \frac{2a du^2 + 2au^2 dv^2}{\sqrt{1 + 4u^2}}.$$

Главные кривизны находятся из (106):

$$k_1 = \frac{2}{a(1 + 4u^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{2}{a(1 + 4u^2)^{1/2}}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся соответственно из уравнений (107) и (108) или (91) и (92):

$$K = \frac{4}{a^2(1 + 4u^2)^2} > 0, \quad H = \frac{2 + 4u^2}{a(1 + 4u^2)^{3/2}} \neq 0.$$

Кривизна кручения поверхности равна

$$k_{uv} = M = 0.$$

На практике полая оболочка параболоида вращения $z = z(x, y)$ чаще задается уравнением

$$z = f \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right),$$

где f — стрелка подъема параболы m , a — полуоси основания поверхности радиуса a .

Геометрически главной кривизне k_1 в данной точке поверхности соответствует квадратная парабола m — меридиан поверхности радиуса кривизны R_1 , а главная кривизна k_2 в направлении параллели p в той же точке определяется радиусом кривизны по схеме рис. 55.

Параболоид вращения второго порядка представляет собой нелинейчатую, неразвертывающуюся поверхность положительной кривизны ($K > 0$), без действительных асимптот, состоящую из эллиптических точек с вершиной O — омбилической точкой (п. 31), совпадающей с особой изолированной точкой (п. 17), которая при удалении в бесконечность обращается в единственную бесконечно удаленную точку на оси вращения поверхности. Поэтому все сечения параболоида вращения плоскостями, наклонными к его оси вращения, являются эллипсами, проецирующимися на плоскость, перпендикулярную оси, в окружности, аналогично эллипсам наклонного сечения прямого кругового цилиндра, проецирующимся на плоскость его основания.

Поверхность может вырождаться в цилиндр вращения, как касающаяся бесконечно удаленной плоскости в несобственной

точке оси поверхности (образующие параболы переходят в параллельные прямые).

Геодезическими служат меридианы — параболы и линии, проходящие через точки пересечения их с параллелями (рис. 60).

Параболоид вращения четвертого порядка образуется вращением вокруг мнимой оси Oz параболы m , заданной уравнением $z^2 = 2px$, вершина которой S совпадает с началом координат (рис. 110). Уравнение этой поверхности получим при замене переменной x в уравнении параболы на $\sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда уравнение поверхности $z = z(x, y)$ в координатах запишется в виде

$$z^2 = 2p\sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$z^4 = 4p^2(x^2 + y^2).$$

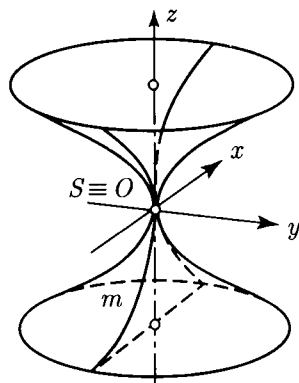


Рис. 110

В отличие от параболоида вращения второго порядка, поверхность параболоида четвертого порядка центральная, отрицательной кривизны ($K < 0$), в целом состоящая из гиперболических точек, кроме двойной особой точки соприкосновения $S \equiv 0$ на мнимой оси вращения Oz , разделяющей поверхность на две полости.

Геометрически главной кривизне k_1 в данной точке соответствует меридиан — парабола m , а главная кривизна k_2 определяется радиусом кривизны R_2 (по образцу на рис. 54).

Гауссова и средняя кривизны определяются соответственно из формул (109) и (110).

В форме параболоида вращения второго порядка преимущественно конструируют купола различных зданий, телевизионные

антенны, звукоулавливатели и разные приборы. Свойство параболы отражать лучи света в виде пучка параллельных прямых широко используется в прожекторах и других приборах специального назначения.

Параболоид вращения четвертого порядка с одной полостью находит применение в покрытиях с радиальной сетью стальных тросов, подвешенных к опорному вертикальному столбу (рис. 111).

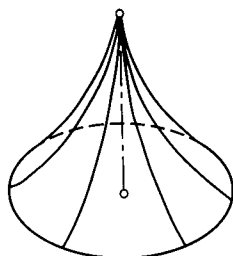


Рис. 111

46. Катеноид. Поскольку катеноид относится к группе минимальных поверхностей, то сначала остановимся на их общих свойствах, частично описанных выше (п. 24).

Минимальной называется поверхность, которая при заданном контуре имеет наименьшую площадь. Наглядно модель минимальной поверхности представляется мыльной пленкой, стягивающей проволочный контур.

Минимальные поверхности характеризуются отрицательной гауссовой кривизной $K < 0$ и средней кривизной $H = 0$, с двумя действительными семействами ортогональных асимптот.

Катеноид образуется вращением вокруг базиса, за который принимается ось вращения Oz (рис. 112), цепной линии¹⁾, заданной уравнением

$$x = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a}),$$

где буквой a (OM) обозначено кратчайшее расстояние цепной линии t от базиса, равное отрезку нормали $n_0 = x$ (MC) в точке M к поверхности. При этом отрезок $MC = OM$ принят за радиус R цепной линии с центром C . Тогда параметрические

¹⁾ Цепная линия получается в результате провисания тяжелой нити (например, стального троса), закрепленной с двух концов, под влиянием силы тяжести.

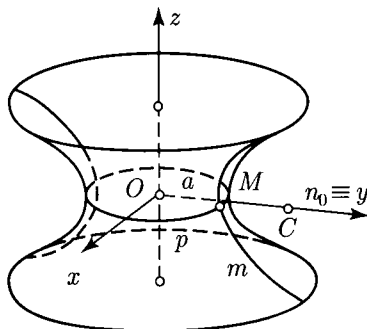


Рис. 112

и векторное уравнения будут иметь соответственно следующий вид:

$$x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} \frac{u}{a} \sin v, \quad z = u$$

и

$$\mathbf{r} = i a = \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v + j a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v + k u.$$

Координатная сеть состоит из цепных линий — меридианов $v = \text{const}$ — и параллелей — окружностей $u = \text{const}$, — совпадающих с линиями кривизны поверхности.

Коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_u{}^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}, \\ F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = 0, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}, \\ I &= \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uu} = -\frac{1}{a}, \\ M &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_{vv} = 0, \\ N &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{vv} = a, \\ II &= -\frac{1}{a} du^2 + a dv^2. \end{aligned}$$

При замене параметров

$$u_1 = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} - a^2}, \quad v_1 = v$$

первая квадратичная форма катеноида приводится к виду, как у прямого геликоида (п. 50),

$$I = du_1^2 + (u_1^2 + a^2) dv_1^2.$$

Главные кривизны находятся из (103) или (106):

$$k_1 = -\frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}}, \quad k_2 = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся соответственно из (107) и (108) или (91) и (92):

$$K = -\frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^4 \left(\frac{u}{a}\right)^2} < 0, \quad H = 0,$$

т. е. катеноид является минимальной поверхностью вращения.

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главная кривизна k_1 соответствует цепной линии меридиана в данной точке поверхности с радиусом кривизны R_1 , а главная кривизна k_2 в направлении параллели в той же точке поверхности определяется радиусом кривизны $R_2 = R_1$ противоположного знака по схеме рис. 54.

Катеноид является *единственной минимальной поверхностью из класса поверхностей вращения*.

Катеноид представляет собой центральную нелинейчатую поверхность вращения отрицательной кривизны ($K < 0$), неразвертывающуюся, состоящую повсюду из гиперболических точек с взаимно ортогональными асимптотами, напоминающими двухзаходную пару из «правой» и «левой» винтовых линий, вьющихся вверх по поверхности до некоторой параллели и вновь опускающихся при приближении к горловой окружности (рис. 112, асимптотические линии не показаны).

Из геодезических линий отметим, как всегда, меридианы и окружность горла. Нахождение других геодезических приводит к сложным вычислениям, связанным с эллиптическими интегралами.

Катеноид может изгибаться в прямой геликоид с переходом параллелей и меридианов катеноида соответственно в винтовые линии и прямолинейные образующие прямого геликоида (п. 50).

Катеноид применяется в современных пленочных покрытиях сооружений на круглом плане, а также для создания опытных моделей оболочек (п. 56).

На практике, в целях упрощения расчета оболочек катеноида, цепную линию иногда заменяют параболой.

§ 13. Поверхности переноса

В основе образования этого класса поверхностей лежит ортогональное преобразование — параллельный перенос [15], в котором точке M_1 плоскости π соответствует единственная точка M'_1 той же плоскости π , причем все точки перемещаются в одном направлении на постоянный вектор переноса \mathbf{a} (рис. 113).

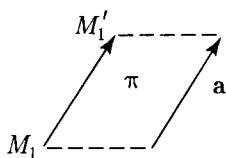


Рис. 113

Если перемещать в пространстве каждую точку M_1 произвольной кривой m по кривой n на постоянный вектор $\mathbf{a} = \overline{M_1 M'_1}$, так чтобы новое положение кривой m_1 стало параллельным исходному m , то получим произвольную нелинейчатую поверхность переноса Φ , которую можно продолжать до бесконечности (рис. 114).

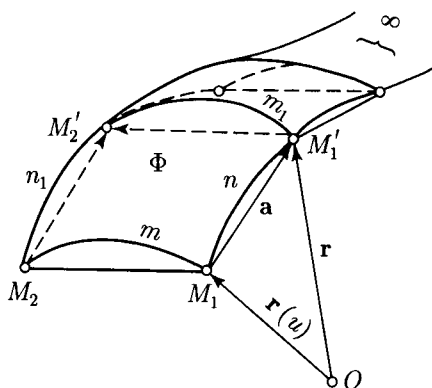


Рис. 114

Поверхность, полученную перемещением в пространстве кривой параллельной самой себе, назовем *поверхностью переноса*. Очевидно, что простейшей поверхностью переноса будет рассмотренная выше цилиндрическая поверхность (рис. 85, 94).

Отнесем образующую m к параметру u , а направляющую n к параметру v . В этом случае радиус-вектор \mathbf{r} точки M_1' определяется равенством

$$\mathbf{r} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_1'},$$

где $\overline{OM_1}$ есть радиус-вектор точки M_1 кривой m_1 , рассматриваемый как непрерывная функция параметра u , т. е. $\mathbf{r} = \psi(u)$. Тогда вектор переноса $\overline{MM_1'}$ каждой точки кривой зависит от изменения параметра v кривой n и $\overline{M_1M_1'} = \varphi(v)$. Поэтому векторное уравнение произвольной поверхности переноса $r = r(u, v)$ запишется в виде

$$\mathbf{r} = \psi(u) + \varphi(v), \quad (130)$$

или в координатной форме поверхности $z = z(x, y)$

$$z = \psi(x) + \varphi(y). \quad (131)$$

Отсюда ясно, что образующую и направляющую линии поверхности переноса можно поменять местами.

Линии переноса m и n образуют сопряженную сеть (называемую *сетью переноса*, или *сетью Чебышёва*), так как противоположные стороны поверхности переноса равны.

В оболочках переноса, применяемых в строительстве, за образующие и направляющие линии поверхностей переноса принимают линии, расположенные в плоскостях, параллельных соответствующим координатным плоскостям, т. е. имеющие коэффициент кручения $k_{xy} = M = 0$. Эти свойства допускают изготовление сборных и монолитных оболочек переноса с помощью подвижной опалубки.

47. Эллиптический параболоид. Это поверхность второго порядка, образованная перемещением квадратной параболы p_1 , параллельной координатной плоскости Oxz , по другой квадратной параболе p_2 , расположенной в координатной плоскости Oyz , причем эти параболы (*главные параболы*) имеют общую вершину O , а их ветви обращены в одну сторону от касательной плоскости Oxy в той же точке (рис. 115).

Уравнение поверхности в координатах, запишем согласно (131):

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \quad \text{при} \quad a \neq b > 0$$

(при $a = b$ поверхность преобразуется в параболоид вращения — см. п. 45). Если за координатные линии принять параболы — линии $u = x = \text{const}$ и $v = y = \text{const}$ как линии сечений поверхно-

сти плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz , — то векторное уравнение запишется в виде

$$\mathbf{r} = ix + jy + k \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right).$$

Координатные линии эллиптического параболоида одновременно являются его линиями кривизны. При $h \neq 0$ сечения поверхности плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy , будут эллипсы, подобные эллипсу q (рис. 115).

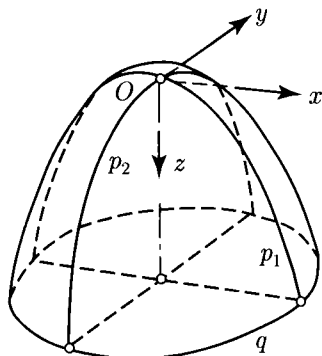


Рис. 115

Семейства этих парабол и эллипсов определили наименование поверхности — эллиптический параболоид.

Главные кривизны поверхности, заданной векторным уравнением, находятся из уравнения (103), решение которого трудоемко.

На практике пологая оболочка эллиптического параболоида $z = z(x, y)$ задается в координатах уравнением

$$z = f_1 \frac{x^2}{a^2} + f_2 \frac{y^2}{b^2}, \quad (132)$$

где f_1 и f_2 — стрелки подъема парабол p_1 и p_2 , a и b — пролеты по направлениям осей координат x и y (рис. 116). При допущении, что площадь пологой оболочки с постоянной гауссовой кривизной в каждой точке приближенно равна площади плана, коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$E = 1,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

$$I = dx^2 + dy^2.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы равны:

$$L = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$M = 0,$$

$$N = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\Pi = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Так как гауссова кривизна в каждой точке поверхности принята постоянной, то при вычислении главных кривизн достаточно определить кривизны главных парабол p_1 и p_2 в их общей вершине — точке O начала координат — из (106).

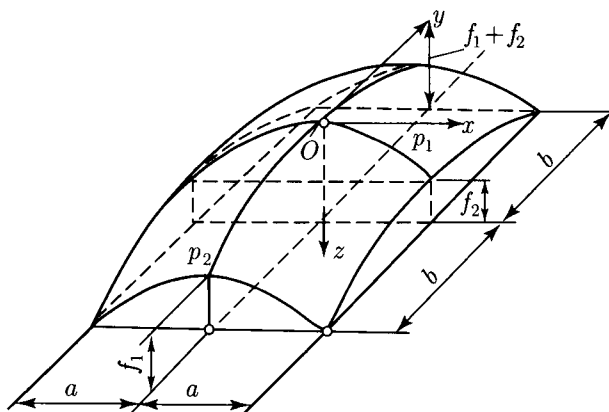


Рис. 116

Подставив в (106) значения коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности, получим согласно (132):

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2f_1}{a^2}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2f_2}{b^2}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся из (91) и (92):

$$K = \frac{2f_1}{a^2} \cdot \frac{2f_2}{b^2} = \frac{4f_1 f_2}{a^2 b^2}, \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{2f_1}{a^2} + \frac{2f_2}{b^2} \right) = \frac{f_1}{a^2} + \frac{f_2}{b^2}.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{xy} = M = 0.$$

Геометрически главным кривизмам k_1 и k_2 в данной точке O эллиптического параболоида соответствуют главные параболы

p_1 и p_2 , определяемые по схеме рис. 51, с радиусами кривизны $R_1 \neq R_2$ и центрами кривизны C_1 и C_2 , расположенными на нормали $n_0 \equiv Oz$ по одну сторону от касательной плоскости (рис. 115, радиусы кривизны и центры кривизны не показаны).

Эллиптический параболоид представляет собой поверхность положительной кривизны $K > 0$, нелинейчатую, неразвертывающуюся, состоящей повсюду из эллиптических точек, без действительных асимптот.

Геодезическими будут главные параболы.

В строительстве эллиптический параболоид предназначается для покрытия сооружений на прямоугольном плане, преимущественно в многоволновых оболочках. Наличие двух семейств конгруэнтных парабол облегчает монтаж и бетонирование оболочки.

Отсутствие коэффициента кручения поверхности ($k_{xy} = 0$) позволяет использовать эллиптический параболоид при расчете других поверхностей переноса, например, круговой поверхности переноса положительной кривизны (рис. 122).

48. Гиперболический параболоид. Способ построения парабол на линейчатом параболоиде, или косо́й плоскости (рис. 91) позволяет подойти к другому закону формообразования этой поверхности.

Поверхность второго порядка, образованная параллельным перемещением одной параболы p_1 по другой p_2 , если они расположены в координатных плоскостях Oxz и Oyz , а ветви направлены в противоположные стороны, называется *гиперболическим параболоидом* (рис. 117).

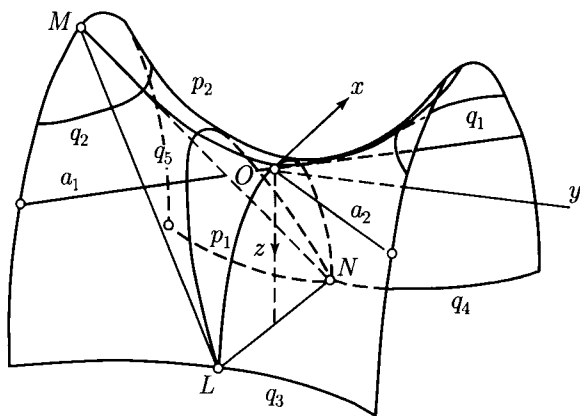


Рис. 117

Уравнение этой поверхности с главными направлениями x и y , совпадающими с осями Ox и Oy прямоугольной системы координат, запишем в виде

$$z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}.$$

Параболы p_1 и p_2 , принадлежащие координатным плоскостям Oxz и Oyz , называются *главными*. Параболы, параллельные главным, составляют координатную сеть поверхности, совпадающую с семейством ее линий кривизны.

Строение гиперболического параболоида исследуем посредством секущих и касательных плоскостей, частично рассмотренных выше (рис. 70).

Сечения поверхности гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz , — это конгруэнтные параболы, параллельные соответственно главным парабололам p_1 и p_2 (на рис. 117 сечения не показаны). Координатная плоскость Oxy при $z = 0$ пересекает поверхность параболоида по двум асимптотическим прямым a_1 и a_2 , называемым *главными прямолинейными образующими*. Сечения поверхности параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy , при $z \neq 0$ — это семейства гипербол q_1 и q_2 , q_3 и q_4 , ... Сечения поверхности параболоида плоскостями, наклонными к координатной плоскости Oxz и параллельными оси Ox , — тоже гиперболы q_5 , ...

В предельном положении, когда наклонная к оси Oz плоскость касается главной параболы p_2 в точке M , гипербола q_5 вырождается в две прямые ML и MN , пересекающиеся в той же точке, так как при удалении в бесконечность две ветви гиперболы неограниченно сближаются со своими асимптотами.

Наличие семейств парабол и гипербол определили второе наименование линейчатого параболоида — *гиперболический параболоид*, или сокращенно *гипар*.

Семейства гипербол q_1 и q_2 , q_3 и q_4 , ... также являются линиями кривизны гипара, ибо касательные к ним совпадают с главными направлениями поверхности. Переход гипербол в пары пересекающихся прямых ML и MN позволяет перейти к прямолинейному опорному контуру оболочки.

Геодезическими будут главные параболы, а также линии не параллельных между собой нормальных сечений поверхности (наклонных к осям координат), построенных по образцу геодезической линии на поверхности вращения отрицательной кривизны (рис. 61, штриховая линия).

Повышенный интерес к свойствам сечений гипара и других поверхностей, включенных в пособие, не случаен, так как с точки зрения работы оболочки под нагрузкой не безразличен выбор ее формы, соприкасающейся с опорным контуром (п. 19). Даже направления вогнутости и выпуклости координатных линий оболочки оказывают влияние на ее напряженное состояние.

Например, вогнутая главная парабола гипара под нагрузкой испытывает сжатие, а выпуклая — растяжение.

На практике пологая оболочка гипара $z = z(x, y)$, отнесенная к осям Ox и Oy прямоугольной системы координат (рис. 118), задается уравнением

$$z = f_1 \frac{x^2}{a^2} - f_2 \frac{y^2}{b^2}, \quad (133)$$

где f_1 и f_2 — стрелки подъема и провисания контурных парабол, a и b — полупролеты по направлениям осей координат Ox и Oy .

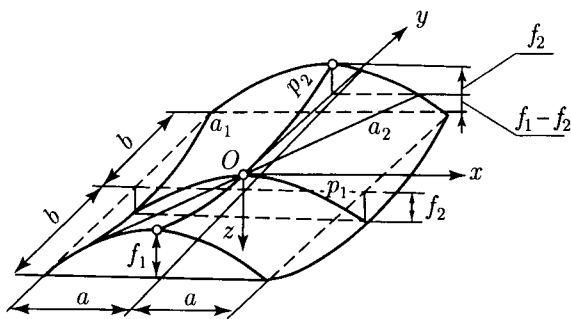


Рис. 118

Поскольку данный гипар представляет собой пологую оболочку, площадь которой приближенно равна площади плана, а гауссова кривизна постоянна в каждой точке поверхности, то главные кривизны k_1 и k_2 в ее вершине — точке O , — вычисляются по аналогии с эллиптическим параболоидом (п. 47), отличаясь только знаком:

$$k_1 = \frac{2f_1}{a^2}, \quad k_2 = -\frac{2f_2}{b^2}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся соответственно из (91) и (92):

$$K < 0, \quad H \neq 0 \quad (\text{в общем случае}).$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{xy} = M = 0.$$

Геометрически главные кривизны k_1 и k_2 суть квадратные параболы с общей вершиной O , но с разными знаками кривизны, т. е. ветви парабол направлены в противоположные стороны от касательной плоскости Oxy ($z = 0$), с центрами кривизны C_1 и C_2 на нормали в точке O поверхности по разные стороны от нее, определяемыми по схеме рис. 52.

При изменении размеров стрелок f_1 и f_2 контурных парабол, равных главным параболам p_1 и p_2 , либо площади ($2a \times 2b$) плана оболочки можно получать гипары разной формы.

Например, при $f = f_1 = f_2$ (рис. 119) уравнение поверхности (133) примет вид

$$z = f \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (134)$$

с уравнением асимптот a_1 и a_2 , составляющих сечение поверхности плоскостью Oxy ($z = 0$),

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

причем асимптоты направлены в углы прямоугольного плана, т. е. по его диагоналям. В частности, при $a = b$ имеем равносторонний гипар с ортогональными асимптотами, расположенными под углом 45° к координатным осям Ox и Oy с уравнением асимптот $x = \pm y$.

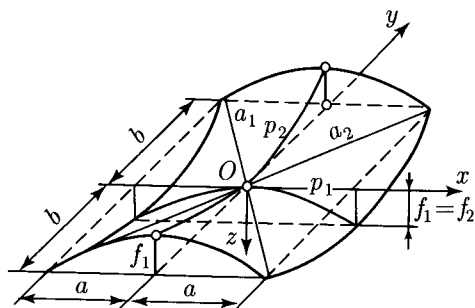


Рис. 119

Если гиперболический параболоид (рис. 118) отнесен к своим асимптотам a_1 и a_2 , т. е. косоугольной системе координат x_1 и y_1 (рис. 120, поверхность не показана), то уравнение поверхности (134) видоизменится. Вывод соответствующего уравнения предоставляем читателю (для этого потребуется координаты x, y выразить через x_1, y_1 по формулам, известным из аналитической геометрии).

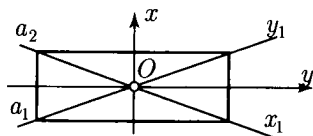


Рис. 120

Гиперболический параболоид представляет собой универсальную поверхность отрицательной кривизны ($K < 0$), неразвертывающуюся, с двумя семействами действительных прямолинейных асимптот, т.е. дважды линейчатую, состоящую из конгруэнтных семейств парабол и повсюду из гиперболических точек.

Оболочка гипара, как поверхность переноса, применяется в многоволновых покрытиях различных сооружений, преимущественно общественного назначения, а также отдельных зданий. Оболочка обладает жесткостью конструкции в сочетании с эстетическими свойствами: выразительностью и причудливостью формы. Помимо этого качества, гипар имеет хорошие акустические свойства за счет рассеивания звуковых волн от вогнутой области поверхности.

Поверхность легко бетонируется благодаря каркасу конгруэнтных парабол, посредством постоянного виброшаблона.

На рис. 121 изображен крестовый свод, состоящий из двух пересекающихся гипаров. Представление о многоволновой оболочке радиального типа из восьми сочлененных кусков гипаров дает рис. 142.

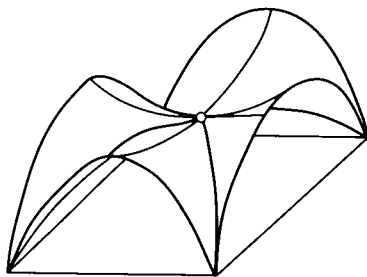


Рис. 121

49. Круговая поверхность переноса. Здесь рассматриваются круговые поверхности переноса четвертого порядка положительной и отрицательной кривизны, включая минимальную поверхность.

Круговая поверхность переноса положительной кривизны ($K > 0$) образуется перемещением дуги окружности r_1 , парал-

лельной координатной плоскости Oxz , по другой дуге окружности p_2 , расположенной в координатной плоскости Oyz , с радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно, если эти дуги имеют центры кривизны C_1 и C_2 на оси Oz по одну сторону от точки O начала координат (рис. 122)¹⁾.

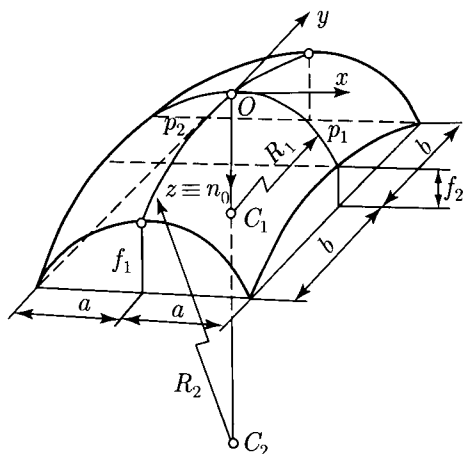


Рис. 122

Пусть уравнение дуги образующей окружности p_1 радиуса кривизны R_1 после некоторых преобразований имеет вид

$$z = R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2},$$

а уравнение дуги направляющей окружности p_2 с радиусом кривизны R_2 имеет вид

$$z = R_2 - \sqrt{R_2^2 - y^2}.$$

Тогда уравнение круговой поверхности переноса положительной кривизны $K > 0$ из (131) запишется в виде

$$z = R_1 + R_2 - (\sqrt{R_1^2 - x^2} + \sqrt{R_2^2 - y^2}). \quad (135)$$

Координатная сеть поверхности состоит из двух семейств конгруэнтных дуг окружностей $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, совпадающих с линиями кривизны.

¹⁾ Другой способ образования поверхностей переноса предложил математик Софус Ли (см. [10]).

Если оболочка полая с постоянной гауссовой кривизной в каждой ее точке, то радиусы кривизны R_1 и R_2 в точке O начала координат вычисляются по известной формуле для нахождения кривизны плоской кривой (36)

$$R_1 = \frac{(1 + z_x'^2)^{3/2}}{|z_{xx}''|}, \quad R_2 = \frac{(1 + z_y'^2)^{3/2}}{|z_{yy}''|}.$$

Главные кривизны определяются из (93):

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Гауссова и средняя кривизны получаются из (91) и (92) соответственно:

$$K > 0, \quad H > 0.$$

Если поверхность оболочки связана с размерами площади плана $2a \times 2b$ и стрелок подъема f_1 и f_2 контурных кривых (рис. 122), то выражения для радиусов главных кривизн примут вид

$$R_1 = \frac{a^2 + f_1^2}{2f_1}, \quad R_2 = \frac{b^2 + f_2^2}{2f_2}.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{xy} = M = 0.$$

Геометрически главные кривизны k_1 и k_2 соответствуют дугам окружностей p_1 и p_2 с радиусами кривизны R_1 и R_2 и центрами кривизны C_1 и C_2 на нормали $n_0 \equiv Oz$ в точке O по одну сторону поверхности (рис. 51).

Круговая поверхность переноса положительной кривизны представляет собой выпуклую нелинейчатую и неразвертывающуюся поверхность, без действительных асимптот, состоящую из эллиптических точек, кроме особых угловых точек пересечения контурных дуг окружностей.

Геодезическими линиями будут дуги главных окружностей p_1 и p_2 , а также нормальные сечения плоскостями, наклонными к координатным плоскостям Oxz и Oyz (по образцу рис. 61).

Круговая поверхность переноса отрицательной кривизны образуется аналогично поверхности переноса положительной кривизны, но центры кривизны C_1 и C_2 дуг окружностей расположены по разные стороны от касательной плоскости Oxy (рис. 52).

Уравнение рассматриваемой поверхности имеет вид

$$z = R_1 - R_2 - (\sqrt{R_1^2 - x^2} - \sqrt{R_2^2 - y^2}). \quad (136)$$

Поверхность, описываемая этим уравнением, представляет собой вогнутую (седловидную) нелинейчатую и неразвертывающуюся поверхность ($K < 0$; $H \neq 0$ в общем случае), с двумя действительными асимптотами, состоящую из гиперболических точек, кроме особых угловых точек. Геодезическими линиями будут дуги p_1 и p_2 , а также линии нормальных наклонных сечений по образцу рис. 61.

При равных по величине радиусах $R_1 = R_2 = R$ главных кривизн разных знаков уравнение поверхности переноса отрицательной кривизны ($K < 0$) на основе уравнения (136) примет вид (рис. 123)

$$z = -(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - y^2}). \quad (137)$$

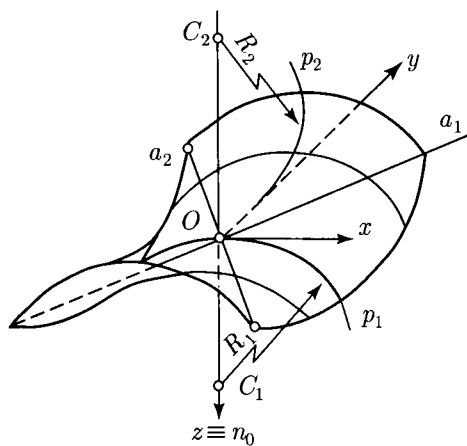


Рис. 123

Главные кривизны находятся из (93) и в силу расположения центров кривизны равны

$$k_1 = \frac{1}{R}, \quad k_2 = -\frac{1}{R},$$

а гауссова и средняя кривизны определяются соответственно из (91) и (92):

$$K < 0, \quad H = 0.$$

Последние формулы характеризуют *единственную минимальную поверхность переноса* этого класса. Кроме того, сечение

поверхности (137) плоскостью Oxy при $z = 0$ дает две ортогональные асимптоты a_1 и a_2 с уравнениями $x = \pm y$, пересекающиеся в точке O начала координат и являющиеся биссектрисами прямых углов между осями Ox и Oy (п. 27).

Круговая поверхность переноса положительной кривизны ($K > 0$) удобна при изготовлении в заводских условиях и при сборке на стройплощадке. Этой поверхностью часто перекрывают как промышленные здания, так и сооружения общественного назначения в виде отдельных или сочлененных оболочек на прямоугольном плане.

На рис. 124 изображена многоволновая оболочка из круговых поверхностей переноса положительной кривизны, перекрывающая цеха завода.

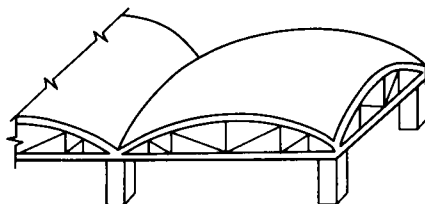


Рис. 124

Круговая поверхность переноса отрицательной кривизны большей частью используется в мембранных покрытиях¹⁾.

Минимальная поверхность кругового переноса незаменима при создании опытных моделей поверхностей из различных материалов (п. 56).

§ 14. Винтовые поверхности

Особенностью этого класса поверхностей, как и поверхностей вращения, является возможность сдвигаться без изменения формы; кроме того, некоторые поверхности этого класса могут изгибаться в поверхность вращения.

Винтовая поверхность общего вида образуется винтовым движением плоской линии вокруг некоторой прямой, называемой *винтовой осью*, в плоскости этой оси (п. 6).

По форме образующей — прямой или кривой — винтовые поверхности разделяются на линейчатые и нелинейчатые, а по расположению образующей относительно винтовой оси — на за-

¹⁾ Мембрана — гибкая оболочка, работающая на растяжение.

крытые, если поверхность пересекает винтовую ось, и открытые, если она не пересекает ее.

Пусть кривая m , заданная в виде $z = \varphi(u)$ в координатной плоскости Oxz , пересекает координатную ось Oz , принятую за винтовую. При повороте образующей кривой m около оси Oz на угол v ее точка M перейдет в точку M_1 нового положения m_1 кривой поверхности вращения Φ (рис. 125). Чтобы движение точки M стало винтовым, одновременно переместим точку M_1 параллельно оси Oz на заданный отрезок $a = M_1M_2$ в положение точки M_2 . Тогда кривая m_1 , проходящая через точку M_2 , займет положение кривой m_2 , при этом начальная точка M_0 кривой m опишет винтовую линию q , а кривая m — кусок винтовой поверхности (рис. 125, закрытая винтовая нелинейчатая поверхность Φ_1).

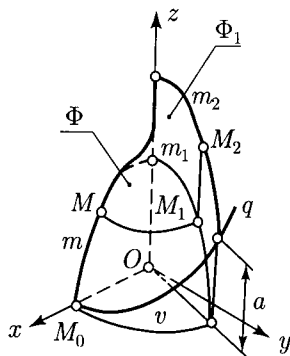


Рис. 125

Выразив координаты точки $M(x, y, z)$ в параметрической форме, получим параметрические уравнения произвольной винтовой поверхности в виде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u) + av, \quad (138)$$

или в векторной форме

$$r = iu \cos v + ju \sin v + k(\varphi(u) + av). \quad (139)$$

При $a = 0$ винтовая поверхность Φ_1 вырождается в поверхность вращения Φ (рис. 125).

50. Прямой геликоид. Прямой геликоид, или винтовой коноид образуется винтовым движением прямой $t = OM_0$ около оси Oz под прямым углом к ней (рис. 126, образующие t расположены на главной нормали ν).

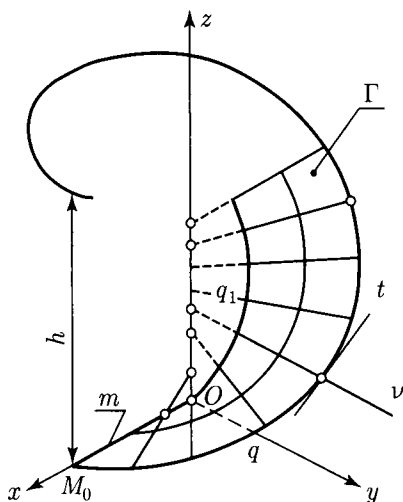


Рис. 126

Первое наименование поверхности связано с французским словом «*hélice*», которое в переводе означает «винтовая линия», а второе — с перемещением образующей прямой, как на коноиде (рис. 88), но параллельно координатной плоскости Oxy , принятой за плоскость параллелизма, с заменой направляющей параболы винтовой линией.

Прямой геликоид имеет две полости и может быть открытого типа (образующие не пересекают ось Oz) или закрытого типа (образующие пересекают ось Oz). На рис. 126 показана одна полость открытого геликоида Γ , ограниченного по контуру винтовыми линиями q и q_1 , и закрытого — с образующими в виде штриховых линий.

Прямой геликоид в координатной форме можно задать уравнением

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Параметрические и векторные уравнения с учетом (138) соответственно записываются в виде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

и

$$r = iu \cos v + ju \sin v + kav.$$

Координатная сеть состоит из двух семейств ортогональных асимптот — винтовых цилиндрических линий $u = \text{const}$ и прямолинейных образующих $v = \text{const}$, т. е. является асимптотической.

Коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_u{}^2 = 1, \\ F &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = 0, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = u^2 + a^2, \\ I &= du^2 + (u^2 + a^2) dv^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uu} = 0, \\ M &= \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \\ N &= \mathbf{n} \mathbf{r}''_{vv} = 0, \\ II &= -\frac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du dv. \end{aligned}$$

Главные кривизны поверхности находятся из (103):

$$k_1 = \frac{a}{u^2 + a^2}, \quad k_2 = -\frac{a}{u^2 + a^2}.$$

Гауссова и средняя кривизны находятся из (104) и (105) или (91) и (92) соответственно:

$$K = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2} < 0, \quad H = 0.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M \neq 0.$$

Прямой геликоид изгибается в катеноид, в силу равенства их первых квадратичных форм (п. 46). При этом образующие прямые m, \dots и винтовые линии q, \dots геликоида переходят соответственно в меридианы m, \dots и параллели p, \dots катеноида.

Линии кривизны прямого геликоида находятся из (101) или (102) в виде логарифмических спиралей

$$u + \sqrt{u^2 + a^2} = Ce^v, \quad u - \sqrt{u^2 + a^2} = Ce^{-v}.$$

Асимптотические линии находятся из (116) в виде $du dv = 0$ или геометрически с помощью соприкасающейся плоскости (п. 7), проведенной через касательную t и главную нормаль ν винтовой линии q в ее точке M (рис. 126, соприкасающаяся плоскость не показана).

Прямой геликоид представляет собой *единственную минимальную поверхность класса винтовых поверхностей*. Он име-

ет отрицательную кривизну $K < 0$, не разворачивается в плоскость, т. е. является кривой линейчатой поверхностью с двумя семействами действительных ортогональных асимптот, а значит, это поверхность гиперболического строения. Линия сжатия, как перпендикуляр к образующим m, \dots , совпадает с винтовой осью Oz , которая одновременно будет геодезической.

Прямой геликоид находит применение в строительстве и технике.

На рис. 127 показан гараж в виде прямого кругового цилиндра для стоянки автомобильного транспорта, его пандус для въезда автомобилей на стоянку сооружен в форме прямого геликоида.

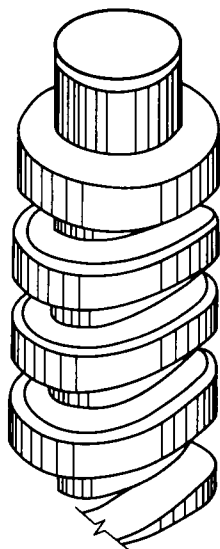


Рис. 127

В дорожном строительстве в форме прямого геликоида сооружают круговые повороты шоссейных и железных дорог (рис. 130, поверхность Γ).

Из частей прямого геликоида состоят винтовые лестницы, резьбы прямоугольного профиля и другие изделия из металла.

51. Эвольвентный геликоид. Эвольвентный геликоид Σ образуется движением прямой m , во всех положениях касательной к цилиндрической винтовой линии n (рис. 128), и относится к линейчатым открытым винтовым поверхностям с ребром возврата — винтовой линией. Поэтому поверхность получила второе название — *винтовой торс*.

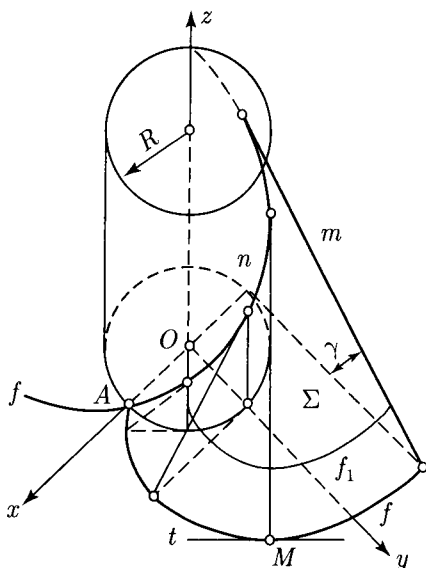


Рис. 128

Параметрические и векторное уравнения соответственно будут:

$$x = a(\cos v - u \sin v), \quad y = a(\sin v + u \cos v), \quad z = b(u + v),$$

$$r = \mathbf{i}a(\cos v - u \sin v) + \mathbf{j}a(\sin v + u \cos v) + \mathbf{k}b(u + v).$$

Переходим к вычислению главных кривизн¹⁾.

Находим производные:

$$\mathbf{r}'_u = -\mathbf{i}a \sin v + \mathbf{j}a \cos v + \mathbf{k}b,$$

$$\mathbf{r}'_v = -\mathbf{i}a(\sin v + u \cos v) + \mathbf{j}a(\cos v - u \sin v) + \mathbf{k}b,$$

$$\mathbf{r}''_{uu} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{r}''_{uv} = -\mathbf{i}a \cos v - \mathbf{j}a \sin v + \mathbf{k} \cdot 0,$$

$$\mathbf{r}''_{vv} = -\mathbf{i}a(\cos v - u \sin v) - \mathbf{j}a(\sin v + u \cos v) + \mathbf{k} \cdot 0).$$

Находим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

¹⁾ Вычисление главных кривизн показано подробно ввиду отсутствия такого вычисления в отечественной литературе по оболочкам пространственных конструкций.

$$\begin{aligned}
 E = \mathbf{r}'_u{}^2 &= (-\mathbf{i}a \sin v + \mathbf{j}a \cos v + \mathbf{k}b)^2 = \\
 &= a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v + b^2 = a^2 + b^2, \\
 F = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v &= (-\mathbf{i}a \sin v + \mathbf{j}a \cos v + \mathbf{k}b)(-\mathbf{i}a(\sin v + u \cos v) + \\
 &\quad + \mathbf{j}a(\cos v - u \sin v) + \mathbf{k}b) = \\
 &= a^2(\sin^2 v + u \sin v \cos v) + a^2(\cos^2 v - u \sin v \cos v) + b^2 = \\
 &= a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v + b^2 = a^2 + b^2, \\
 G = \mathbf{r}'_v{}^2 &= (-\mathbf{i}a(\sin v + u \cos v) + \mathbf{j}a(\cos v - u \sin v) + \mathbf{k}b)^2 = \\
 &= a^2(\sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 2u \sin v \cos v) + \\
 &\quad + a^2(\cos^2 v + u^2 \sin^2 v - 2u \sin v \cos v) + b^2 = \\
 &= a^2(\sin^2 v + u^2 \cos^2 v + \cos^2 v + u^2 \sin^2 v) + b^2 = \\
 &= a^2(1 + u^2) + b^2.
 \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$I = (a^2 + b^2) du^2 + 2(a^2 + b^2) du dv + (a^2(1 + u^2) + b^2) dv^2.$$

Находим векторное произведение

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin v & a \cos v & b \\ -a(\sin v + u \cos v) & a(\cos v - u \sin v) & b \end{vmatrix} = \\
 &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a \cos v & b \\ a(\cos v - u \sin v) & b \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -a \sin v & b \\ -a(\sin v + u \cos v) & b \end{vmatrix} + \\
 &\quad + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -a \sin v & a \cos v \\ -a(\sin v + u \cos v) & a(\cos v - u \sin v) \end{vmatrix} = \\
 &= \mathbf{i}ab \begin{vmatrix} \cos v & 1 \\ \cos v - u \sin v & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{j}ab \begin{vmatrix} \sin v & 1 \\ \sin v + u \cos v & 1 \end{vmatrix} - \\
 &\quad - \mathbf{k}a^2 \begin{vmatrix} \sin v & \cos v \\ \sin v + u \cos v & \cos v - u \sin v \end{vmatrix} = \\
 &= \mathbf{i}ab(\cos v - \cos v + u \sin v) + \mathbf{j}ab(\sin v - \sin v - u \cos v) - \\
 &\quad - \mathbf{k}a^2(\sin v \cos v - u \sin^2 v - \sin v \cos v - u \cos^2 v) = \\
 &= \mathbf{i}abu \sin v - \mathbf{j}abu \cos v + \mathbf{k}a^2u.
 \end{aligned}$$

Находим величину

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2(1 + u^2) + b^2) - (a^2 + b^2)^2} = \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2(1 + u^2) + b^2 - a^2 - b^2)} = au\sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Единичный вектор нормали к поверхности равен

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\mathbf{i}abu \sin v - \mathbf{j}abu \cos v + \mathbf{k}a^2u}{au\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \mathbf{i} \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \mathbf{j} \frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathbf{k} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}$$

Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$$L = \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uu} = \left(\mathbf{i} \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \mathbf{j} \frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathbf{k} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \mathbf{0} = 0,$$

$$\begin{aligned}M = \mathbf{n} \mathbf{r}''_{uv} &= \left(\mathbf{i} \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \mathbf{j} \frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathbf{k} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \\ &\cdot (-\mathbf{i}a \cos v - \mathbf{j}a \sin v + \mathbf{k} \cdot 0) = \\ &= -\frac{ab \sin v \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab \sin v \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N = \mathbf{n} \mathbf{r}''_{vv} &= \left(\mathbf{i} \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \mathbf{j} \frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathbf{k} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \\ &\cdot (-\mathbf{i}a(\cos v - u \sin v) - \mathbf{j}a(\sin v + u \cos v) + \mathbf{k} \cdot 0) = \\ &= -\frac{ab \sin v(\cos v - u \sin v)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab \cos v(\sin v + u \cos v)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-\sin v \cos v + u \sin^2 v + \sin v \cos v + u \cos^2 v) = \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}(u \sin^2 v + u \cos^2 v) = \frac{abu}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}$$

Следовательно, вторая квадратичная форма имеет вид

$$\text{II} = \frac{abu}{\sqrt{a^2 + b^2}} dv^2.$$

Главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения (103)

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0.$$

Находим коэффициенты этого уравнения:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (a^2 + b^2)(a^2(1 + u^2) + b^2) - (a^2 + b^2)^2 = \\ &= (a^2 + b^2)(a^2(1 + u^2) + b^2 - a^2 - b^2) = a^2u^2(a^2 + b^2), \\ 2MF - EN - LG &= 2 \cdot 0 \cdot (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2) \frac{abu}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \\ &\quad - 0 \cdot (a^2(1 + u^2) + b^2) = -abu\sqrt{a^2 + b^2}, \\ LN - M^2 &= 0 \cdot \frac{abu}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 0^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$a^2u^2(a^2 + b^2)k^2 - abu\sqrt{a^2 + b^2}k = 0.$$

Упрощаем это выражение:

$$k(\sqrt{a^2 + b^2}auk - b) = 0.$$

Отсюда получаем главные кривизны:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{b}{au\sqrt{a^2 + b^2}},$$

а гауссова кривизна согласно (91) есть

$$K = k_1k_2 = 0.$$

Средняя кривизна согласно (92) равна

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}u} \neq 0.$$

Кривизна кручения поверхности

$$k_{uv} = M = 0.$$

Геометрически главная кривизна k_1 в данной точке поверхности соответствует прямолинейной образующей m, \dots с радиусом кривизны $R_1 = 0$, а главная кривизна k_2 определяется радиусом кривизны R_2 нормального сечения поверхности, перпендикулярного образующей в той же точке.

Ортогональной траекторией образующих поверхности будет эвольвента f . Эвольвенты f_1, \dots также можно получить, как сечения поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy . Семейство эвольвент поверхности вошло в определение ее наименования — эвольвентный геликоид.

Очевидно, что прямолинейные образующие поверхности и перпендикулярные им эвольвенты будут двумя семействами линий кривизны.

Поверхность эвольвентного геликоида содержит одно семейство действительных асимптотических прямых, совпадающих с геодезическими линиями. Линией сжатия является направляющая поверхности — цилиндрическая винтовая линия.

Эвольвентный геликоид, или винтовой торс представляет собой линейчатую развертывающуюся винтовую поверхность нулевой кривизны ($K = 0$), состоящую из параболических точек, за исключением двойной особой точки возврата второго рода — это точка A пересечения начала винтовой линии с контурной эвольвентой поверхности.

Равнонаклонность прямолинейных образующих эвольвентного геликоида с углом наклона γ к координатной плоскости Oxy (рис. 128), вызванная свойством цилиндрической винтовой линии постоянного шага (рис. 13), позволяет получить поверхность более общего вида, если заменить винтовую линию произвольной пространственной кривой, на которой расположены вершины равнонаклонных прямых круговых конусов.

Поверхность Σ_1 , огибающая семейство конусов с вершинами S, S_1, \dots , расположенными на пространственной кривой p , называется *поверхностью одинакового ската*, или *уклона* (рис. 129).

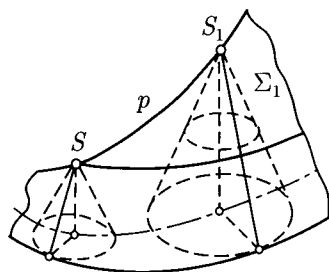


Рис. 129

В виде поверхности одинакового ската сооружают котлованы площадок, насыпи и выемки шоссейных и железных дорог в горной и сильнопересеченной местности с криволинейными контурами, а также подземных сооружений различной формы.

На рис. 130 изображено в косоугольной аксонометрии земляное сооружение, состоящее из полотна кривой дороги заданного радиуса R с подъемом по внешней стороне бровки. Участок полотна дороги представляет собой кусок поверхности прямо-

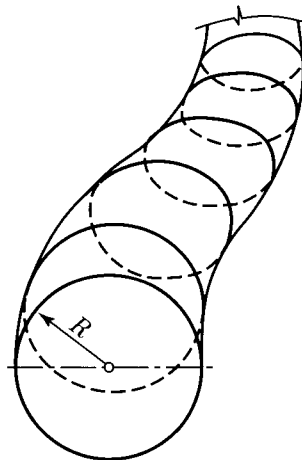


Рис. 131

$$(x - \varphi_0)^2 + (y - \psi_0)^2 + (z - \gamma_0)^2 = a^2. \quad (140)$$

52. Каналовая и трубчатая поверхности. Одной из разновидностей циклических поверхностей является *каналовая поверхность*. Она образуется непрерывным перемещением по произвольной линии f (*линии центров*) окружности m переменного радиуса R , расположенной в нормальной плоскости к f , с центром $O \dots$ на f (рис. 132).

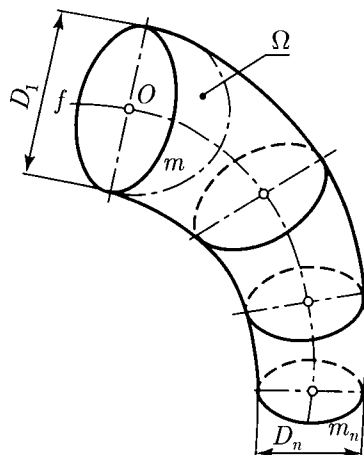


Рис. 132

Если считать каналовую поверхность огибающей семейства сфер (рис. 132, полусферы Ω , ... диаметров D_1, \dots, D_n), то уравнение семейства можно записать в виде

$$(\rho - \mathbf{r}_0)^2 - R^2 = 0,$$

где ρ — текущий радиус-вектор сферы, \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра сферы, R — переменный радиус сферы.

Выразим длину дуги линии f через параметр s в виде (31)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

При дифференцировании по параметру получим

$$(\rho - \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\tau} + \frac{dR}{ds},$$

где $(\rho - \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\tau} = 0$, поскольку плоскость окружности m перпендикулярна линии центров.

Каналовая поверхность представляет собой нелинейчатую, неразвертывающуюся поверхность разнозначной кривизны, с областями по внешней стороне ($K > 0$) и по внутренней ($K < 0$), которые отделяются друг от друга двумя параболическими линиями ($K = 0$). Поверхность центров каналовой поверхности вырождается в кривую, совпадающую с линией центров этой поверхности.

Упрощенно каналовую поверхность можно в частном случае получить движением окружности m переменного радиуса по трем произвольным линиям a , b и c , проведенным из трех заданных точек A , B и C плоскости π окружности, в положение окружности, параллельной заданной (рис. 133).

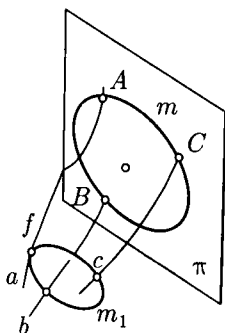


Рис. 133

Частным случаем каналовой поверхности является трубчатая, образованная движением окружности m постоянного радиуса,

расположенной в нормальной плоскости к линии центров f (рис. 134).

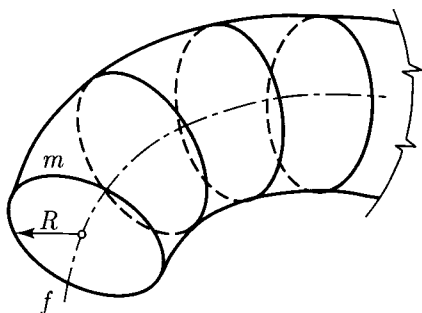


Рис. 134

Если окружность или сфера постоянного радиуса R перемещается по линии центров q в виде винтовой линии, то получается *винтовая трубчатая поверхность* (рис. 135).

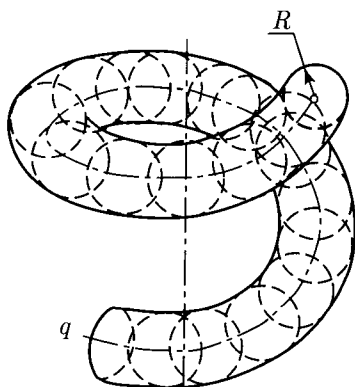


Рис. 135

Циклические поверхности, особенно каналовые, применяются в различных областях техники и строительства. В форме циклических поверхностей производят обшивки турбореактивных двигателей самолетов, зубчатые сцепления червячных передач и других механизмов. Форму каналовой поверхности имеют улитки, снабжающие водой гидростанции. Из соединения каналовой и цилиндрической поверхностей состоят несущие конструкции подземных тоннелей, а также части вентиляционных установок воздухопроводов и патрубков (рис. 136).

Трубчатые поверхности, кроме использования в сантехнике, предохраняют теплосети и кабели высокого напряжения от со-

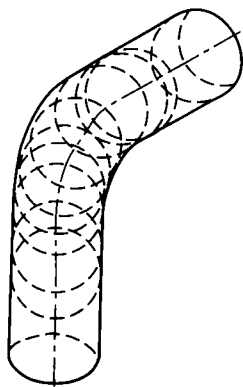


Рис. 136

прикосновения с грунтом и подземными водами. Винтовая трубчатая поверхность используется в змеевиках для охлаждения жидкости или газа, а также для изготовления пружин различного назначения.

53. Циклиды Дюпена. Циклиды были впервые открыты французским ученым Дюпеном и названы его именем. Циклиды можно определить как огибающие поверхности семейства сфер, касающихся трех заданных сфер, на основании *теоремы Дюпена* о трех взаимно пересекающихся линиях кривизны, т. е. *триортogonalной системе линий*.

В зависимости от расположения производящих сфер в пространстве получаются разные виды циклид, при условии, что циклиды соприкасаются с каждой из огибающих семейства сфер *по двум системам линий кривизны в виде окружностей разных радиусов*. Циклиды суть единственные из всех ранее рассмотренных поверхностей, отвечающих этому условию.

На рис. 137 изображена одна из циклид, полученная инверсионным Преобразованием кольца со смещенным центром инверсии и имеющая два семейства линий кривизны l и m в виде окружностей разных по величине радиусов [5].

Циклида, как и кольцо, имеет разнозначные кривизны с областями $K > 0$ по внешней стороне, $K < 0$ по внутренней и $K = 0$ по разделяющей их параболической линии.

В отличие от циклических поверхностей, поверхность центров циклид вырождается в две кривые.

Практическое применение циклид в строительстве не замечено, но, как разновидности циклических поверхностей, они

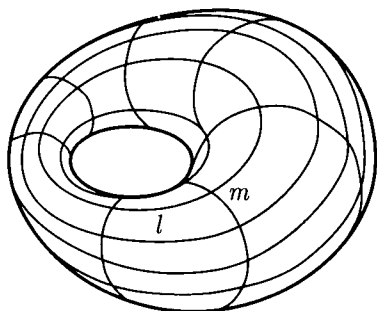


Рис. 137

представляют определенный интерес с точки зрения изучения теории поверхностей.

§ 16. Нерегулярные поверхности

54. Понятие нерегулярной поверхности оболочки. В современном строительстве и архитектуре намечаются не только тенденция к усложнению и оригинальности пространственных конструкций, но и внимание к эстетическим и экологическим качествам сооружений, что заставляет архитекторов, конструкторов и проектировщиков обращаться наряду с регулярными поверхностями оболочек к нерегулярным, предоставляющим большую свободу в осуществлении их творческих замыслов.

В отличие от регулярных поверхностей, функции, описывающие нерегулярные поверхности, могут *иметь производные не в каждой их точке* или вообще *не подчиняться математическим законам*. Общее представление о нерегулярной поверхности дает форма части земной поверхности (рис. 138). С геометрической точки зрения, это *топографическая поверхность*, заданная горизонталями с указанием чисел — отметок, но линии между горизонталями описываются произвольно и могут не быть всюду дифференцируемыми.

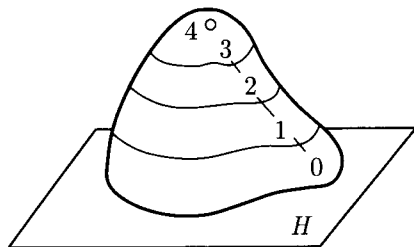


Рис. 138

К нерегулярным поверхностям относятся формы живой природы — животных и растений, а также созданных человеком бытовых предметов и т. п.

В основе образования нерегулярных поверхностей оболочек лежат *приближенные и расчетно-экспериментальные методы*.

К числу приближенных методов, используемых при расчете нерегулярных формообразований, принадлежит известный в практике так называемый *дискретный метод*, который заключается в нахождении координат отдельных узловых точек поверхности, с последующим их соединением линиями, образующими точечно-линейный каркас. Поверхности, полученные таким способом, часто называют *каркасными* (рис. 139). Для построения точечно-линейного каркаса на чертеже контур поверхности в плане разбивается на отдельные части в виде прямоугольников, пересекающихся в узловых точках A_1 , A_2 , A_3 и A_4 . Координаты узловых точек измеряются с модели поверхности или считываются с заранее составленных таблиц с помощью компьютера. Гладкость линий каркаса поверхности может быть обеспечена путем построения лекальных кривых, соединяющих узловые точки. Однако построенные таким способом лекальные кривые могут отличаться от формы заданной поверхности, так как многое в этой работе зависит от квалификации чертежника-конструктора.

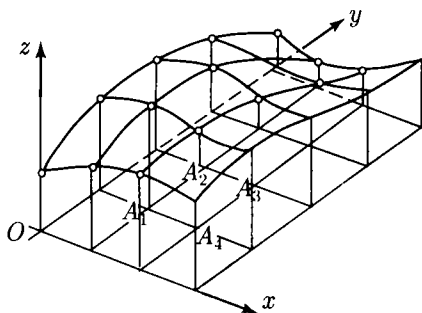


Рис. 139

Более точный чертеж нерегулярных поверхностей оболочек получается методом конечных элементов — МКЭ [21], сущность которого заключается в разбиении частей поверхности на элементы в виде трапеции, прямоугольника или треугольника. Чем меньше размеры разбивочных элементов, тем больше форма поверхности соответствует заданной. Среди разнообразных типов нерегулярных поверхностей оболочек рассмотрим составные, расчетно-экспериментальные и оболочки произвольной формы.

55. Составные оболочки. К составным оболочкам относятся тонкостенные пространственные конструкции, объединяющие несколько поверхностей в единую архитектурную композицию. Такая композиция представляет собой совокупность различных или однотипных по форме поверхностей, имеющих в местах соединений перегибы или изломы с особыми точками и линиями, нарушающими гладкость функций, описывающих эти поверхности.

Основным конструктивным элементом составных оболочек часто служит центральная регулярная оболочка положительной кривизны ($K > 0$) в виде поверхности переноса, сопряженной по линиям пересечения с четырьмя кусками произвольной поверхности той же кривизны (рис. 140).

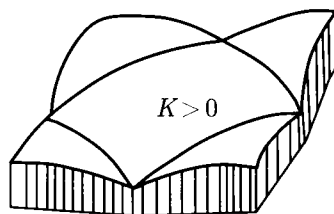


Рис. 140

На рис. 141 показана составная оболочка радиального типа отрицательной кривизны ($K < 0$) на восьмиугольном плане из частей пересекающихся между собой гипаров, усеченных по торцам плоскостями, наклонными к уровню земли.

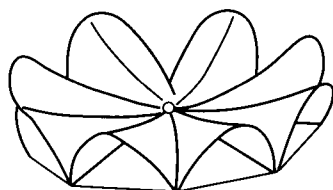


Рис. 141

На рис. 142 изображена составная оболочка из двух полусфер, соединенных произвольной поверхностью вращения ($K < 0$), которая также может применяться в пневматических конструкциях (п. 57).

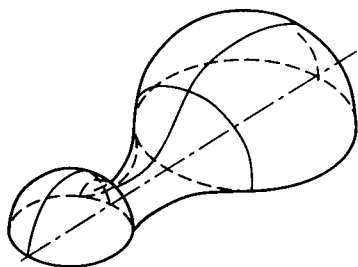


Рис. 142

Расчет составной оболочки сводится к вычислению локальных координат каждой ее части, которые затем относят к общим координатам всей оболочки путем итерации ¹⁾.

К составным оболочкам причисляют *складчатые покрытия*, в том числе многогранные, характеризующиеся поперечными сечениями в виде волнистых или ломаных очертаний поверхностей (рис. 143, многогранная складчатая оболочка).

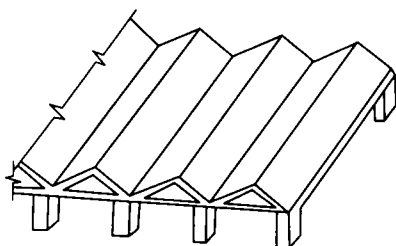


Рис. 143

Приведенные примеры далеко не исчерпывают разнообразие и универсальность составных оболочек. Они широко применяются в современном строительстве, начиная от покрытий небольших зданий бытового назначения и вплоть до покрытий огромных сооружений общественного назначения: стадионов, вокзалов, рынков и т. п.

56. Расчетно-экспериментальные оболочки. В эту группу оболочек входят поверхности, которые трудно описываются уравнениями; они получаются путем предварительного расчета или заранее проведенного эксперимента по заданным условиям.

Одним из примеров воздвигнутых в Москве расчетных поверхностей является известная стрела монумента «Покорителям

¹⁾ Итерация — процесс неоднократного приближенного решения уравнений с последующим переходом к более точному решению.

космоса», с очертаниями, близкими по форме к двум пересекающимся в вершине монумента параболоам.

Для создания опытных моделей поверхностей с новыми свойствами используются современные водорастворимые пенообразователи, пленки которых имеют высокое поверхностное натяжение. Поверхности, полученные таким способом, позволяют конструктору-проектировщику предварительно выяснить не только геометрические свойства поверхности, но и количество материала, расходуемого на единицу ее площади.

В качестве опытных моделей часто выбирают минимальные поверхности, например, катеноид (п. 46), с последующей отливкой модели из гипса.

Другим способом создания нерегулярных поверхностей новой формы является изменение контура модели.

На рис. 144 показана тросовая сеть, ограниченная подвижным замкнутым контуром, с тремя сторонами в виде отрезков прямых и с четвертой изогнутой стороной, расположенной в нормальной плоскости модели. Используя подвижность контура модели, можно получать разнообразные по форме поверхности.

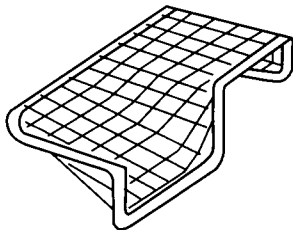


Рис. 144

Классическим примером реальной висячей оболочки, созданной расчетно-экспериментальным способом, служит покрытие большепролетного сооружения — Универсального зала Релей-арены (США). Сооружение состоит из ортогональной стальной сети, покрытой мембраной седловидной формы, опирающейся на две равнонаклонные параболические арки из железобетона (рис. 145, показана часть фасада сооружения, совмещенная с его разрезом).

Геометрически срединная поверхность этой оболочки, определенная опытным путем, является минимальной поверхностью с цепной линией; на схеме сооружения она обозначена пунктиром, а ее расчетное провисание — штриховой линией. В действительности контур построенной оболочки, изображенный на схеме сплошной линией, провисает ниже расчетного и не яв-

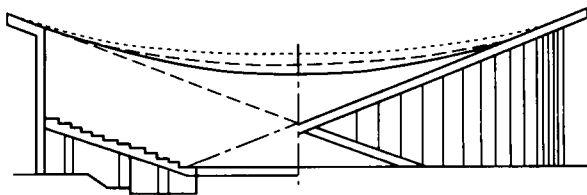


Рис. 145

ляется минимальной поверхностью. В целом всякая оболочка мембраны представляет собой поверхность отрицательной кривизны, напоминающей форму гипара с уплощением в вершинах параболических арок.

Строительство Релей-арены в свое время дало толчок к развитию сооружений подобного типа во всем мире.

57. Оболочки произвольной формы. Под оболочками произвольной формы подразумеваются поверхности, образование которых не подчиняется строгим математическим законам¹⁾, а также созданные из легко деформирующихся материалов и изменяющие свою первоначальную форму под воздействием внешних условий. Например, на рис. 146 изображена сетчатая металлическая оболочка произвольной формы, созданная по замыслу конструктора или архитектора.

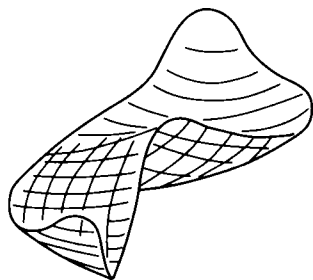


Рис. 146

К произвольным поверхностям, изменяющим форму под влиянием внешних условий, относятся пространственные конструкции в виде так называемых *мягких оболочек*, изготовленные из синтетических материалов: тканей, пленок, резины и др.

Мягкие оболочки образуются двумя основными способами — *пневматическим* и *механическим*.

¹⁾ В технике это так называемые сложные графические поверхности: обшивки судов и самолетов, кузова автомобилей, лопасти турбин и т. п.

Пневматические конструкции формируются под давлением воздуха или газа. Предварительно напряженная пневматическая оболочка, получаемая за счет избыточного давления воздуха или газа, называется *воздухоопорной*, а формируемая под воздействием атмосферного давления — *воздухонесомой*.

Исходной формой образования любой пневматической оболочки служит ее раскрой, напоминающий развертку регулярной поверхности.

Воздухоопорные оболочки, изменяющие форму при повышении или понижении давления, называются *трансформирующимися*.

На рис. 147 дана схема фасада, совмещенная с разрезом трансформирующейся воздухоопорной оболочки кольцеобразной формы, с расположенным в ее центре шаром, опирающимся на цилиндрическую колонку. При повышении давления воздуха в центральной части всей конструкции и разрежении на периферии происходит изменение исходной формы оболочки в заданное состояние.

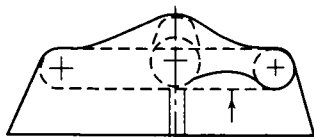


Рис. 147

С точки зрения геометрии, процесс трансформации воздухоопорной конструкции можно свести к топологическому преобразованию — растяжению центрального шара в соосный эллипсоид вращения с одновременным сжатием кольцеобразной формы оболочки в поверхность, напоминающую гантель [22].

К оболочкам произвольной формы, образованных механическим способом, относятся *тентовые покрытия*, напряженное состояние которых осуществляется посредством металлических оттяжек, закрепленных в опорных точках оболочки на разных уровнях (рис. 148, растяжки не показаны). Другой тип тентовой оболочки с внутренним конусообразным контуром иллюстрирует рис. 149.

В заключение изложения материала пособия приведем пример нетрадиционного для оболочек пространственных конструкций формообразования гладкой поверхности по наперед заданным условиям: контурных гладких дуг \overline{AB} и \overline{BS} кривых, пересекающих координатные оси Ox , Oy , Oz в точках A , B , S соответственно (рис. 150). В основе воспроизведения отсека

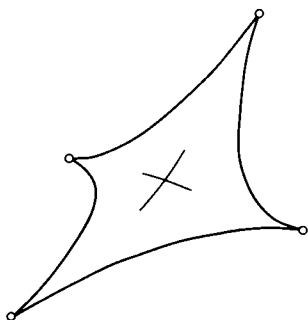


Рис. 148

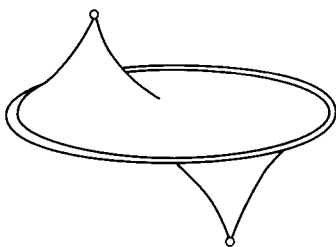


Рис. 149

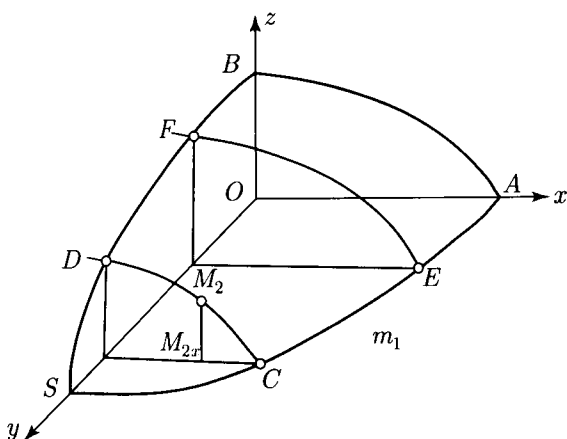


Рис. 150

гладкой поверхности по этим условиям положено пропорциональное деление отрезка прямой в данном отношении.

Сначала устанавливают пропорциональную зависимость между абсциссами и аппликатами исходной дуги \overline{AB} кривой и искомой (рис. 151), например, дуги \overline{CD} промежуточного сечения поверхности:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

Чтобы определить координаты неизвестных точек дуги \overline{CD} промежуточного сечения, возьмем произвольную точку M_1 на исход-

ной дуге \overline{AB} кривой и переведем ее в соответственную точку M_2 дуги \overline{CD} , разделив отрезки абсциссы и аппликаты в отношении

$$\frac{OM_{1x}}{OM_{2x}} = \frac{OM_{1y}}{OM_{2y}}.$$

На пересечении линий связи, проведенных из точек M_{2x} абсциссы и M_{2y} аппликаты, получим искомую точку M_2 промежуточной дуги \overline{CD} сечения поверхности. Соединив гладкой кривой точки D , M_2 и C , получим дугу \overline{CD} , подобную дуге \overline{AB} . Аналогично находятся координаты точек промежуточного сечения дуги \overline{EF} поверхности.

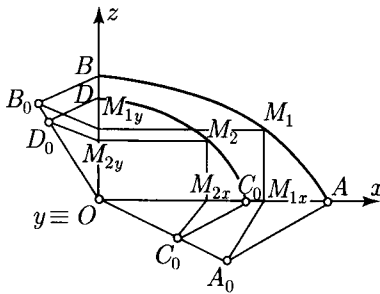


Рис. 151

В таком же порядке строится другой — левый отсек гладкой поверхности, симметричный заданному относительно оси Ozy (на рис. 150 отсек поверхности не показан).

При изменении формы контурных линий получают разнообразные по внешнему виду поверхности. В пособии рассмотрены часто встречающиеся в строительстве и технике регулярные и нерегулярные поверхности оболочек. Вопрос о расширении классов и видов поверхностей оболочек в строительстве и технике остается открытым.

Приложение

Приложение содержит связанные с поверхностями оболочек пространственных конструкций примеры и упражнения, решаемые графическими и аналитическими способами.

Примеры

1. Построить в ортогональных и аксонометрической проекциях чертежи поверхности вращения, усеченной горизонтальной плоскостью и эвольвентного геликоида, с нахождением их линий пересечения (рис. 152, 153) на основе законов их образования (п. 51).

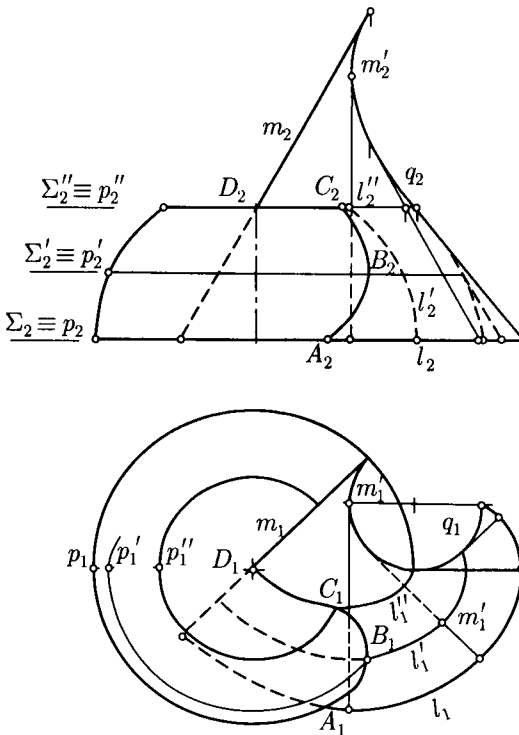


Рис. 152

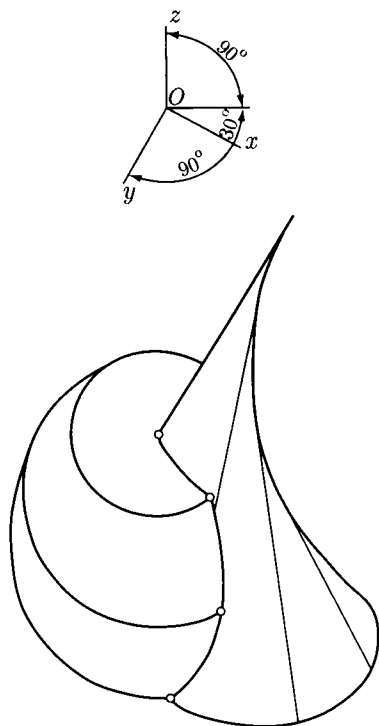


Рис. 153

Решение. Линия пересечения данных поверхностей определяется по *точкам пересечения* параллелей поверхности вращения с поверхностью эвольвентного геликоида и прямолинейных образующих эвольвентного геликоида с поверхностью вращения с помощью *вспомогательных секущих плоскостей* (общий способ).

Сначала отмечается горизонтальная проекция A_1 точки пересечения одноименных проекций p_1 и l_1 дуги окружности поверхности вращения с эвольвентой сечения геликоида (вспомогательная плоскость Σ_2 не обязательна), а по линии связи определяется фронтальная проекция A_2 точки на соответствующих фронтальных проекциях дуги окружности и эвольвенты, проецирующихся в прямые p_2 и l_2 . Горизонтальные проекции B_1 и C_1 точек линии пересечения поверхностей находятся на пересечении пар горизонтальных проекций p'_1, l'_1 и p''_1, l''_1 дуг окружностей и эвольвент посредством вспомогательных секущих горизонтальных поверхностей, соответственно проецирующихся в прямые: $\Sigma'_2 \equiv p'_2$ и $\Sigma''_2 \equiv p''_2$. Фронтальные проекции B_2 и C_2

точек определяются аналогично по линиям связи на одноименных проекциях дуг окружностей и эвольвент. Горизонтальную проекцию D_1 точки пересечения прямолинейной образующей $m(m_1, m_2)$ эвольвентного геликоида с усеченной плоскостью поверхности вращения можно получить по линии связи из известной фронтальной проекции D_2 точки. Проекции точек A_1, B_1, C_1 соединяют плавными кривыми A_1C_1 и A_2C_2 первой ветви линии пересечения до точки излома $C(C_1, C_2)$. Вторая ветвь линии пересечения поверхностей на горизонтальной плоскости проекций есть проекция C_1D_1 дуги эвольвенты l''_1 , а на фронтальной плоскости проекций — отрезок C_2D_2 прямой.

Косоугольная аксонометрия поверхности вращения и эвольвентного геликоида (рис. 154) с линией их пересечения строится координатным методом по ортогональному чертежу.

2. Построить в ортогональных и аксонометрической проекциях чертежи половины однополостного гиперboloида вращения $\Phi(\Phi_1, \Phi_2)$ и его части $\Gamma(\Gamma_1, \Gamma_2)$, описанных около общей сферы радиуса R , с нахождением их линий пересечения (рис. 154, 155) на основе закона их образования (п. 42).

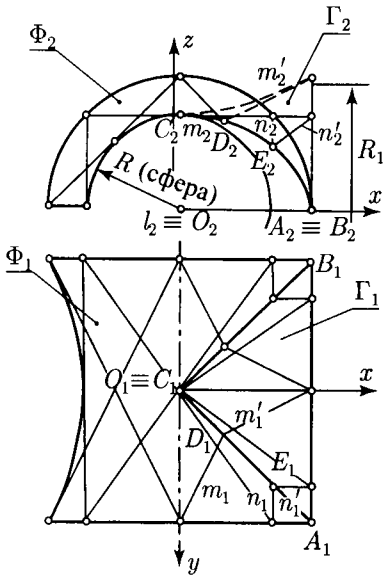


Рис. 154

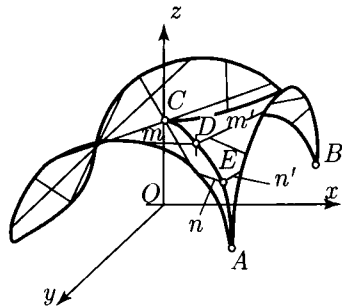


Рис. 155

Решение. Поскольку данные поверхности вращения второго порядка, описанные около третьей поверхности вращения вто-

рого порядка (в данном примере около сферы радиуса R), то по известной теореме Монжа они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка. Поэтому линиями пересечения поверхностей будут две дуги эллипсов, проецирующихся на горизонтальную плоскость проекций двумя отрезками прямых A_1C_1 и B_1C_1 . Фронтальные проекции A_2, B_2, C_2 концевых точек дуг эллипсов определяются по их горизонтальным проекциям A_1, B_2, C_2 . Промежуточные точки D и E дуг эллипсов находятся по горизонтальным проекциям D_1 и E_1 . Они определяются точками пересечения горизонтальных проекций m'_1, m_1 и n'_1, n_1 образующих с соответствующими проекциями дуг эллипсов, проецирующихся прямыми A_1C_1 и B_1C_1 . Фронтальные проекции D_2 и E_2 точек определяются по линиям связи на соответствующих проекциях образующих поверхностей. Фронтальные проекции $A_2 \equiv C_2, D_2, E_2, C_2$ точек линий пересечения соединяют плавной кривой — проекцией совпавших дуг эллипсов.

Косоугольная аксонометрия двух частей пересекающихся однополостных гиперболоидов вращения и линия пересечения строятся координатным методом по ортогональному чертежу.

3. Построить в ортогональных проекциях и аксонометрии чертежи четырех сочлененных косых плоскостей (гипаров) и полуэллипсоида вращения (рис. 156, 157) с нахождением их линий пересечения с учетом законов их образования (п. 39, 43).

Решение. Линия пересечения поверхностей строится по точкам пересечения образующих прямой косою плоскости с полуэллипсоидом вращения посредством вспомогательных секущих плоскостей. Чтобы избежать построения проекций сечений вспомогательными плоскостями в виде эллипсов, используется стереографическая проекция сферы [9].

Свойство стереографической проекции сферы, а также эллипсоида и параболоида вращения состоит в том, что любое их сечение p при центральном проецировании из северного полюса S лучами SF_1, \dots на плоскость π' , касательную к южному полюсу S' , или плоскость экватора π_1 , отображается окружностью (p_2 , рис. 158).

Пусть на ортогональном чертеже (рис. 159) показана стереографическая проекция сечения полусферы плоскостью Σ_2 , наклонной к плоскости $\pi(\pi_2)$ экватора, в виде окружности $q(q_2)$, проецирующейся на фронтальную плоскость проекций отрезком E_2F_2 , равным диаметру окружности, а на горизонтальную — эллипсом (рис. 159, эллипс не показан).

Тогда лучи $SE'(S_1E'_1, S_2E'_2)$ и $SF'(S_1F'_1, S_2F'_2)$, проведенные через концевые точки $E(E_1, E_2)$ и $F(F_1, F_2)$ диаметра E_2F_2

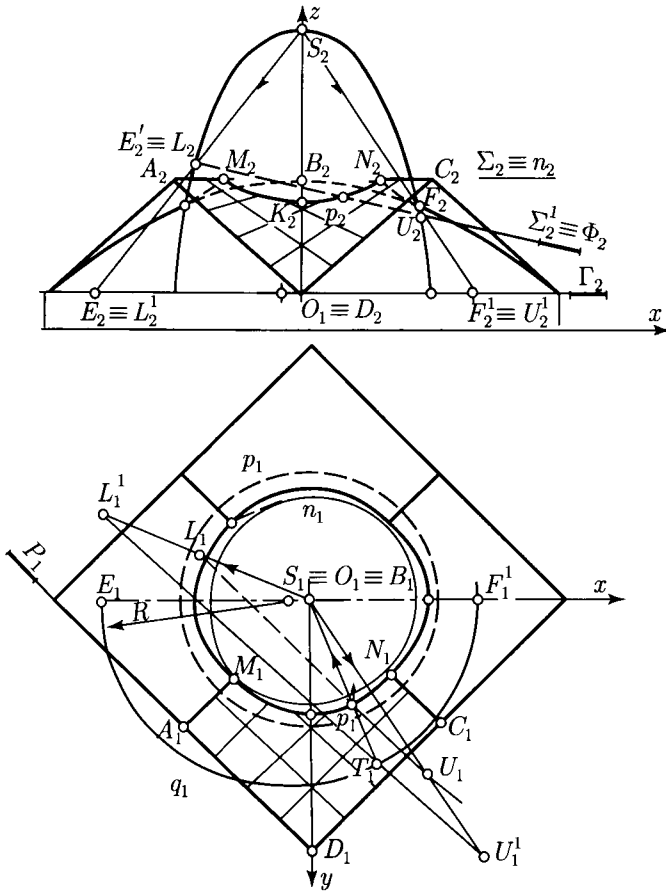


Рис. 156

окружности $q(q_1, q_2)$ до пересечения с плоскостью $\pi(\pi_2)$ экватора полусферы, переводят его в диаметр $E'_1 F'_1$ окружности q'_1 (стереографической) проекции полусферы (рис. 159, показана дуга окружности).

Переходя к построению линий пересечения заданных поверхностей, сначала определяют горизонтальные проекции M_1 и N_1 точек пересечений контурных образующих AB и BC , например, косою плоскости $ABCD$ с полуэллипсоидом вращения (рис. 156).

Для этого проводят через данные образующие косою плоскости вспомогательную фронтально проецирующую плоскость Σ_2 , пересекающую полуэллипсоид по проекции n_1 окружности в проекциях M_1 и N_1 точек.

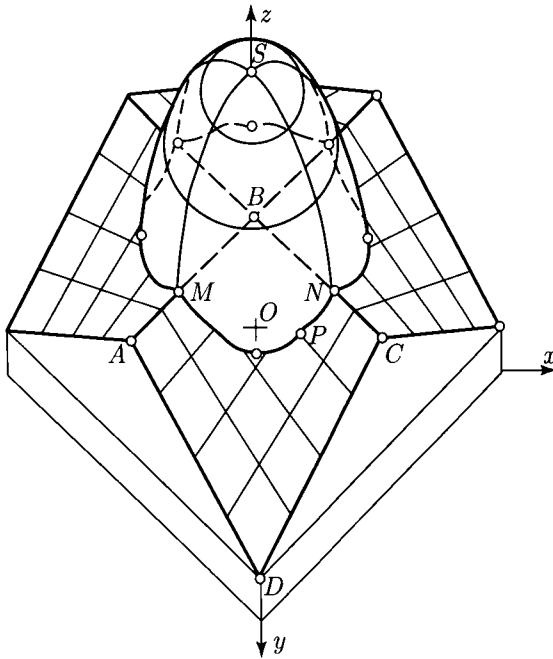


Рис. 157

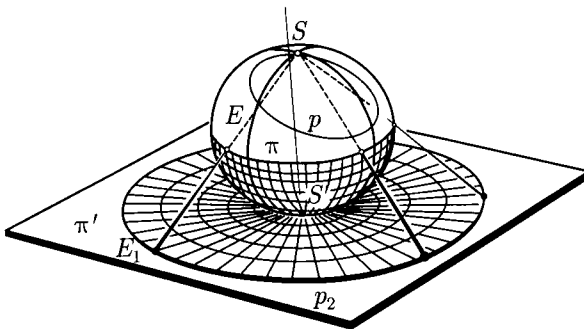


Рис. 158

Фронтальные проекции M_2 и N_2 точек получают по линиям связи на соответствующих проекциях образующих.

Промежуточные точки линии пересечения поверхностей, например, точку $P(P_1, P_2)$ пересечения образующей $LU(L_1U_1, L_2U_2)$ с полуэллипсоидом вращения находят в результате следующих построений.

Построим стереографическую проекцию отрезка LU при помощи лучей $SL'(S_1L'_1, S_2L'_2)$ и $SU'(S_1U'_1, S_2U'_2)$, проведенных

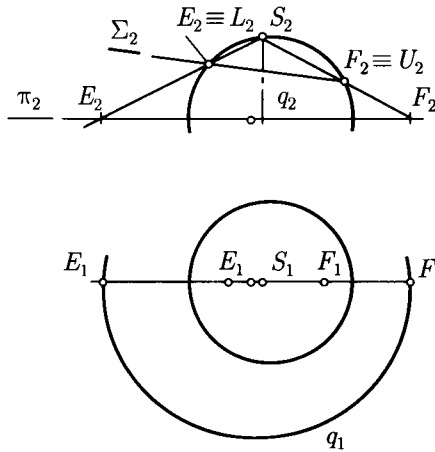


Рис. 159

через концевые точки $L(L_1, L_2)$ и $U(U_1, U_2)$, до пересечения с плоскостью π_2 экватора полуэллипсоида; получим отрезок $L'_1U'_1$ — ее центральную проекцию отрезка LU .

Затем по образцу рис. 159 проецируют отрезок E_2F_2 большой оси эллипса $q(q_2)$ сечения эллипсоида вращения фронтально проецирующей плоскостью $\Sigma_2 \equiv q_2$ в отрезок $E'_1F'_1$ диаметра дуги q'_1 или радиуса R окружности (проекции E и F большой оси эллипса окажутся соответственно конкурирующими с точками L и U образующей, п. 8).

Из точки T_1 пересечения центральной проекции отрезка $L'_1U'_1$ и дуги q'_1 окружности в плоскости π_2 экватора полуэллипсоида проводят обратный луч S_1T_1 до пересечения с горизонтальной проекцией L_1U_1 образующей косои плоскости в одноименной проекции P_1 искомой точки P . Фронтальную проекцию P_2 точки определяют по линии связи известным приемом.

Найдя достаточное количество горизонтальных ($M_1 \dots P_1 \dots N_1$) и фронтальных ($M_2 \dots P_2 \dots N_2$) проекций точек линии пересечения поверхностей, соединяют их плавными кривыми.

В таком же порядке находят линии пересечения других косои плоскостей с эллипсоидом вращения.

Косоугольную аксонометрию пересекающихся поверхностей строят по их ортогональным проекциям координатным методом (рис. 157).

4. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0.$$

Решение. Заданное уравнение можно привести к виду

$$-\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1,$$

который описывает однополостный гиперболоид вращения с центром O .

Упражнения

1. Построить в ортогональных и аксонометрических проекциях чертеж четырех сочлененных коноидов на квадратном плане, пересекающихся с прямым круговым цилиндром, заданными соответственно: геометрическими элементами определителей (п. 14); проекциями направляющих дуг n, \dots окружностей радиусов R_1, \dots и образующих прямых AB, \dots , а также плоскостью параллелизма P_1 коноидов; проекциями очеркового прямоугольника и окружности цилиндра радиуса R_1 (рис. 160). Найти линии пересечения поверхностей, определить характер гауссовой кривизны, а также асимптотическую линию, совпадающую с геодезической и линией сжатия поверхности.

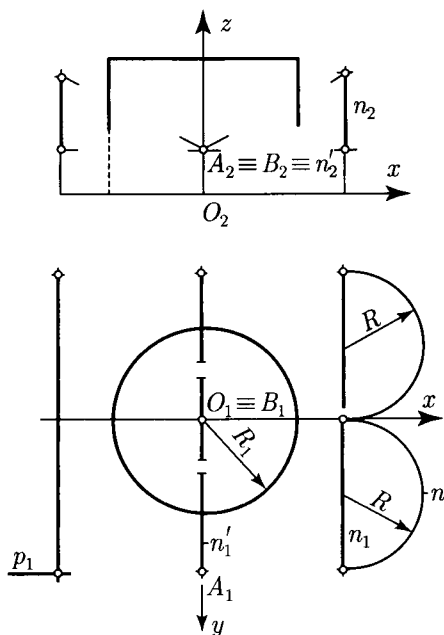


Рис. 160

2. Достроить недостающую проекцию наклонного цилиндра вращения, пересекающегося с конусом вращения, при условии, что цилиндр и конус описаны около общей сферы и заданы соответственно: определителями (п. 14); проекциями очерковых образующих прямых m, \dots и полуокружностью радиуса R_1 цилиндра; проекциями очеркового равностороннего треугольника n, \dots и окружностью основания радиуса R_2 конуса (рис. 161). Найти линии пересечения поверхностей, определить характер их гауссовой кривизны и указать линии кривизны и особую точку конуса.

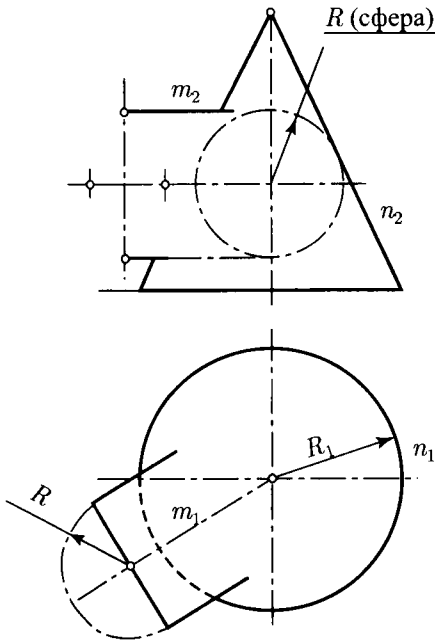


Рис. 161

3. Построить горизонтальные и фронтальные проекции четырех сочлененных косых плоскостей на квадратном основании, пересекающихся с параболоидом вращения и заданных соответственно определителями (п. 14); проекциями направляющих прямых $AB \dots$ и CD косых плоскостей $ABCD \dots$ с общей плоскостью параллелизма P_1 ; проекциями очерковой параболы P_1 и P_2 с окружностью основания радиуса R (рис. 162). Найти линии пересечения поверхностей, указать характер гауссовой кривизны и типы конструктивных точек обеих поверхностей. При решении упражнения применить стереографическую проекцию сферы.

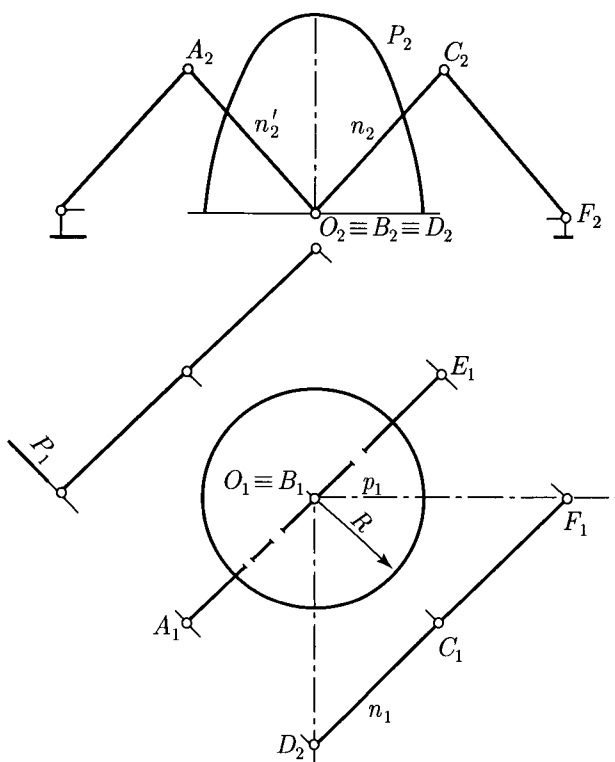


Рис. 162

4. Указать по ортогональному чертежу (рис. 163, упражнение повышенной сложности) способы образования, классы и виды, конструктивные точки двух пересекающихся поверхностей $\Phi(\Phi_1, \Phi_2)$ и $\Gamma(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (софокусных в точке $C_2 \equiv F_2$), если известно, что образующая дуга $m(m_1, m_2)$ окружности первой из них параллельна фронтальной плоскости проекций, а направляющая дуга $n(n_1, n_2)$ окружности параллельна профильной проекции.

Образующая дуга $l(l_1, l_2)$ второй поверхности есть полуэллипс с большой осью $PS(P_1S_1, P_2S_2)$ и малой осью $LL'(L_1L'_1, L_2L'_2)$, равной диаметру $q(q_1, q_2)$ основания поверхности. Построение проекций L_1, L'_1 и L_2, L'_2 точек линии пересечения поверхностей ясно из чертежа.

Показать, что проекции M_1 и M_2 симметричных точек линии пересечения поверхностей можно получить без построения их профильных проекций, если совместить дугу n'_1 направляющей окружности поверхности Φ с дугой l'_1 и полуэллипса поверхности Γ на продолженной горизонтальной плоскости проекций.

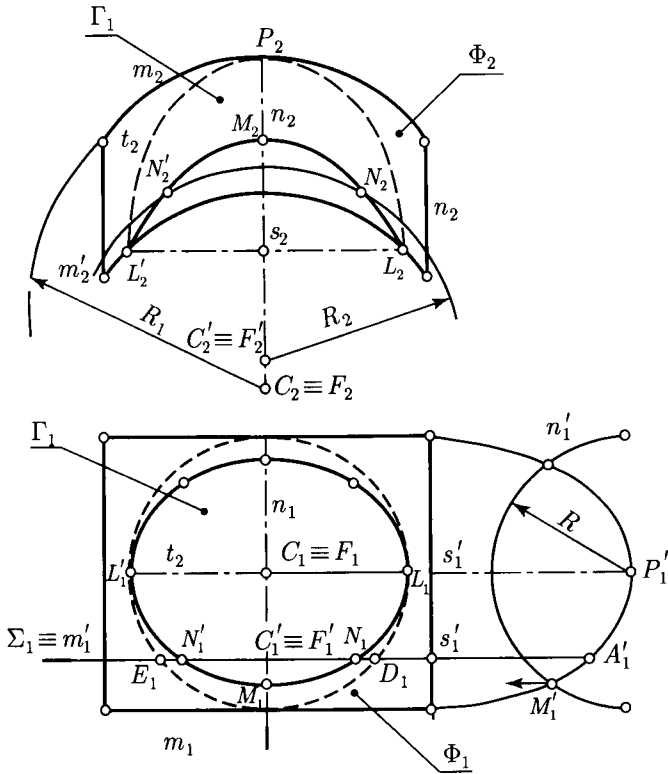


Рис. 163

Затем показать, что проекции N_1 и N_2 , например, промежуточной точки N и линии пересечения поверхностей, можно получить без построения эллипса k'_1 , софокусного в точке $C_2 \equiv F'_2$ с дугой m'_2 окружности, как сечения обеих поверхностей вспомогательной горизонтально проецирующей плоскостью Σ_1 в данной точке (рис. 164), преобразованием соответственно касательных прямых $A'_1 B'_1$ и $T' U'$, пересекающихся в искомой их общей точке $N' = U'$.

Фронтальные проекции N_2 симметричных точек N линии пересечения поверхностей определяются на пересечении линии связи с дугой m'_2 окружности сечения плоскостью Σ_1 (рис. 164), которые переносятся на фронтальную плоскость проекций. Горизонтальная проекция N_1 симметричных точек определяется по линиям связи на соответствующей проекции линии сечения $\Sigma_1 = m'_1$.

5. Описать вид поверхности, образованной движением прямой, пересекающей три скрещивающиеся прямые, а также ука-

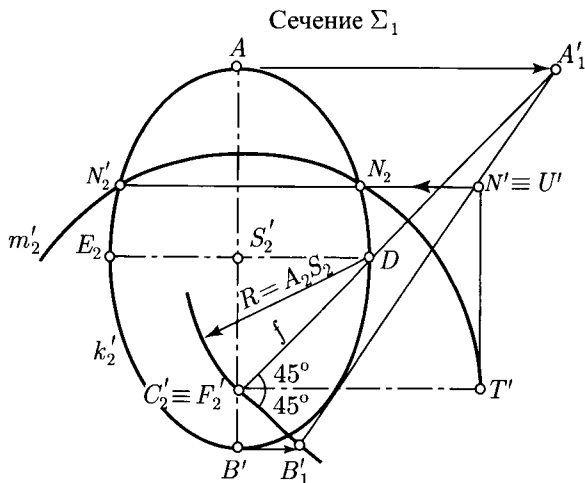


Рис. 164

зять частные случаи этой поверхности и тип их конструктивных точек.

6. Найти первую и вторую квадратичные формы пологой оболочки гипара постоянной гауссовой кривизны ($K < 0$), заданной уравнением

$$z = f \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

7. Составить каноническое уравнение поверхности, образованной параллельным перемещением одной главной параболы p_1 по другой p_2 с вершинами, направленными в одну сторону, указать геодезические линии и линии кривизны.

8. Описать класс и вид поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad z = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u).$$

9. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0;$$

указать характер гауссовой кривизны и асимптотические линии.

10. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

указать тип ее конструктивной точки и расположение особой двойной точки.

11. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = 25;$$

указать ее линии кривизны и геодезические линии.

12. Вычислить кривизну параболы $y = x^2$, используя формулу (36).

Литература

1. *Баврин И. И., Матросов В. Л.* Общий курс высшей математики. — М.: Просвещение, 1995.
2. *Бюшгенс С. С.* Дифференциальная геометрия. — М.: КомКнига, 2006.
3. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. — М.: Гостехиздат, 1949.
4. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. — М.: Физматгиз, 1963.
5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: пер. с нем. — Л.: ОНТИ, 1936.
6. *Даревский В. М., Ленов В. С. и др.* Дифференциальная геометрия поверхностей, используемых в строительных конструкциях типа оболочек. — М.: МИСИ, 1987.
7. *Дубровин Б. А. и др.* Современная геометрия. Т. 1 и 2. — М.: УРСС, 1998.
8. Железобетонные конструкции. Специальный курс / Под общ. ред. Байкова В. Н. — М.: Высшая школа, 1974.
9. *Зильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: пер. с нем. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
10. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М.: Гостехиздат, 1947.
11. *Кузнецов Н. С.* Начертательная геометрия. — М.: Высшая школа, 1959.
12. *Липницкий М. Е. и др.* Железобетонные пространственные покрытия зданий. — Л.: Гостехиздат, 1965.
13. *Маклакова Т. Г.* Функция, конструкция, композиция в архитектуре. — М.: АСВ, 2002.
14. Металлические конструкции. Т. 2. Конструкции зданий / Под ред. Горева В. В. — М.: Высшая школа, 2002.
15. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Геометрические преобразования. — М.: МГУ, 1951.
16. *Отто Ф., Шлейер Ф.* Тентовые и вантовые строительные конструкции: пер. с нем. — М.: Госстройиздат, 1970.
17. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. — М.: Интеграл-Пресс, 2001.
18. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1969.
19. Прикладная геометрия и инженерная графика. Сборник. Вып. 3. — Киев: Будивельник, 1968.

20. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: УРСС, 2003.
21. Современные пространственные конструкции. Справочник / Под ред. Духовичного Ю. А. и Жуковского Э. Э. — М.: Высшая школа, 1991.
22. *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии: пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
23. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1959.
24. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: КомКнига, 2006.
25. *Четверухин Н. Ф.* Проективная геометрия. — М.: Просвещение, 1969.

Учебное издание

ФИЛИППОВ Валерий Александрович

**ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Редактор *В.С. Аролович*

Оригинал-макет: *Д.А. Воробьёв*

Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 17.12.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 400 экз.
Заказ № 27

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

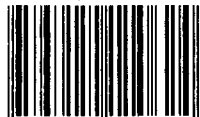
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-1062-4



9 785922 110624