В. С. ШИПАЧЕВ

# ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ВШ

В.С.ШИПАЧЕВ

# ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ АКАДЕМИКА А. Н. ТИХОНОВА

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений

МОСКВА
ВЫСШАЯ ШКОЛА
1989

ББК 22.11
Ш 63
УДК 517

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского автомобильно-дорожного института (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Рябов); проф. А. Г. Сокольский (Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе)

**Шипачев В. С.**

Ш 63 Основы высшей математики: Учеб. пособие для втузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова.— М.: Высш. шк., 1989.— 479 с.: ил.
ISBN 5-06-000048-6

В пособии изложен общий курс математики для студентов втузов. Основная особенность книги — сочетание необходимого теоретического материала с широким использованием методов решения основных типов задач по всем разделам курса. Пособие отличается высоким уровнем строгости и методической продуманностью изложения, точностью формулировок основных понятий и теорем, краткостью и доступностью доказательств.

Ш $\frac{1602010000\,(4309000000) — 386}{001\,(01) — 89}$ 92—89

ББК 22.11
517

ISBN 5-06-000048-6

*«История человеческой мысли, игнорирующая в ней роль математики, есть постановка на сцене «Гамлета», если не без самого Гамлета, то по меньшей мере без Офелии».*

*А. Н. Уайтхед*

## К читателю

Одной из характерных особенностей математики является ее абстрактность. Вот почему каждое отдельно взятое математическое понятие, начиная с простейшего, усваивается нелегко. И несмотря на это, математика доступна самому широкому кругу людей. «В целом,— утверждал акад. А. Н. Колмогоров,— последовательно современное изложение математики, начинающееся с весьма общих понятий множества, отображения, группы, упрощает ее. Открывая в разнообразных частных фактах общую их основу, мы делаем изложение более кратким и в конечном счете более простым и доходчивым».[1)]
Простота и доходчивость — это тоже особенность математики. А вот раскрыть эту особенность, вызвать к математике интерес по возможности у всех учащихся — дело далеко не простое. И главную роль в этом, конечно, играет педагог. Успех во многом зависит не только от его профессиональной и общей эрудиции, от его умения просто, четко и кратко выражать свои мысли, но и от самой личности педагога, его способности если не загораться, то по крайней мере чувствовать красоту в ее проявлениях.

В процессе преподавания математики на успех может рассчитывать только тот педагог, который увлечен своим предметом, которого учащиеся любят и уважают за принципиальность и объективность, в котором они видят не только квалифицированного специалиста, но и человека.

Лекции и практические занятия по математике дают положительный эффект, если на них между преподавателями и учащимися царит атмосфера доверия, взаимопонимания и взаимоуважения. Но достичь этого могут только те преподаватели, для которых интересы учащихся, их математическая подготовка превыше всего.

Дорогой читатель! Математика в отличие от других наук является делом прежде всего молодых людей. История свидетельствует, что жизнь многих крупных математиков оборвалась очень рано: Галуа, заложивший основы теории групп, непонятый при жизни, был убит на дуэли на 21-м году, Абель умер в 27 лет, Урысон — в 26 лет, Рамануджан — в 33 года, Риман — в 40 лет. Величайшие открытия Ньютона — дифференциальное исчисление и закон тяготения — были сделаны им в возрасте 24 лет. Можно назвать имена математиков, достигших серьезных результатов несколько позднее. Сложнее привести примеры, когда математический успех приходил к ученому на склоне лет.

---

[1)] *Колмогоров А. Н.* Современная математика и математика в современной школе.— Математика в школе, 1971, № 6.

Вот почему независимо от Вашего положения, возраста и уровня знаний, проникнитесь мыслью о том, что математика — самая могущественная из всех наук, она источник всех наших познаний, и, как автор этой книги, я хотел бы вызвать у Вас не просто интерес, а увлеченность математикой, чтобы она стала для Вас необходимостью, а для людей особо одаренных — целью жизни. Математике человечество обязано всеми величайшими открытиями, давшими миру гениев.

Изучение математики развивает логическое мышление, приучает человека к точности, к умению выделять главное, сообщает необходимые сведения для понимания сложнейших задач, возникающих в различных областях деятельности современного человека.

В связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие инженеры и научные работники нуждаются в серьезной математической подготовке.

Выпускник современной средней школы должен не только уметь строить графики функций, но и использовать методы исследования поведения функций, основанные на дифференциальном исчислении, а также владеть техникой дифференцирования и интегрирования хотя бы простых функций независимо от того, продолжит ли он обучение в вузе или нет. Сегодня математика нужна всем. Это веление времени, настоятельная жизненная необходимость. Ускорение научно-технического прогресса невозможно без увеличения объема математических знаний на всех уровнях, начиная в первую очередь с техникума, средней школы и ПТУ.

Современный инженер или научный работник должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть всеми новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности.

Автору искренне хотелось бы вызвать у молодежи интерес к математике, поскольку дальнейшее развитие науки и техники немыслимо без глубокого ее знания. В наше время подтверждается предвидение великого К. Маркса о том, что наука тогда достигает совершенства, когда начинает пользоваться математикой.

*Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием.*

*С. Д. Пуассон*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие представляет собой обобщение многолетнего опыта преподавания автором высшей математики на нематематических факультетах и на Всесоюзных курсах повышения научной квалификации учителей средних школ в Московском государственном университете.

Цель книги — показать в простом изложении как четкость и конкретность, так и доступность для широкого круга читателей основных понятий и теорем высшей математики; научить студентов самостоятельно решать задачи.

Поскольку в книге имеется большое количество подробно решенных типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал и способствующих более глубокому его пониманию, она найдет применение в педагогической деятельности в вузах, техникумах, средней школе, на курсах повышения квалификации учителей, а также на подготовительных отделениях вузов.

К каждому параграфу сформулированы «Вопросы для самопроверки», в основном по теории. Цель этих вопросов — помочь в самостоятельной работе над теоретическим материалом.

В конце каждой главы (кроме гл. 4) даны контрольные задачи для повторения и углубления материала соответствующей главы. Большинство из этих задач предлагалось в виде контрольных заданий для учащихся Всесоюзной заочной математической школы АПН СССР при МГУ. Эти задачи будут весьма полезны учащимся старших классов, учителям при подборе материала для упражнений, а также студентам для самостоятельной работы.

В конце книги к контрольным задачам даны ответы, решения и указания. Здесь автор хотел бы дать некоторые рекомендации. Прежде чем начать решать эти задачи, надо сначала изучить нужный раздел, добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий и теорем. При этом надо самостоятельно проводить параллельно с текстом все вычисления, решать все примеры как разобранные, так и помещенные без решения. Это будет хорошей тренировкой и гарантией качественного усвоения материала.

Следует обратить особое внимание на формулировки с «$\varepsilon$-$N$»- и «$\varepsilon$-$\delta$»-терминологией. Важно ясное и четкое понимание сути определений, роли и места каждого слова. Для этого следует детально разобрать предлагаемые примеры и задачи.

И последнее. Изучение материала следует проводить строго последовательно начиная с первой главы, с первого параграфа и с первого пункта, так как в математике все понятия тесно связаны между собой. Из одного понятия следует другое и пропуск какого-либо из них может вызвать непонимание последующего. В этом заключена специфика математики.

При написании данного пособия была использована часть материала из книги автора «Высшая математика» М., 1985, которая имеет гриф учебника для студентов вузов, и его методические разработки, изданные для ВЗМШ.

Автор надеется, что данное пособие облегчит работу студентов, преподавателей и учащихся старших классов в изучении основ высшей математики. Он также полагает, что пособие будет полезным широкому кругу лиц, занимающихся заочно или самообразованием. Им оно заменит в какой-то степени и лектора, и преподавателя.

Автор выражает свою признательность акад. А. Н. Тихонову, профессорам Д. П. Костомарову, Ю. А. Рябову и А. Г. Сокольскому за участие в работе над рукописью данного учебного пособия. Он также благодарит всех преподавателей кафедры высшей математики Московского автомобильно-дорожного института, принявших участие в обсуждении рукописи.

*Автор*

*Будь благословенно божественное число, породившее богов и людей.*

*Пифагор*

ГЛАВА 1

# ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

## § 1. МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В математике все понятия делятся на *первичные*[1] и *определяемые* через первичные или уже известные.

Основным первичным понятием математики, ее фундаментом является понятие *множество*. Слова: *совокупность*, *семейство*, *система*, *набор*, *объединение* и т. п. являются синонимами слова *множество*. Примерами множеств служат множество учащихся в данной аудитории; совокупность тех из них, кто получает по математике только хорошие и отличные оценки; семейство звезд Большой Медведицы; множество страниц данной книги; множество всех рациональных чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное число объектов произвольной природы.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или *точками*. Множества чаще всего обозначают большими буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми буквами. Если $x$ — элемент множества $X$, то пишут $x \in X$ ($x$ принадлежит $X$). Если $x$ не является элементом множества $X$, то пишут $x \notin X$ ($x$ не принадлежит $X$). Если $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы, то запись $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ означает, что множество $X$ состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

[1] Следует особо подчеркнуть, что первичные понятия не могут быть определены. Они, как правило, разъясняются на примерах. С их помощью определяются другие понятия.

ветствующих понятий и теорем. При этом надо самостоятельно проводить параллельно с текстом все вычисления, решать все примеры как разобранные, так и помещенные без решения. Это будет хорошей тренировкой и гарантией качественного усвоения материала.

Следует обратить особое внимание на формулировки с «$\varepsilon$-$N$»- и «$\varepsilon$-$\delta$»-терминологией. Важно ясное и четкое понимание сути определений, роли и места каждого слова. Для этого следует детально разобрать предлагаемые примеры и задачи.

И последнее. Изучение материала следует проводить строго последовательно начиная с первой главы, с первого параграфа и с первого пункта, так как в математике все понятия тесно связаны между собой. Из одного понятия следует другое и пропуск какого-либо из них может вызвать непонимание последующего. В этом заключена специфика математики.

При написании данного пособия была использована часть материала из книги автора «Высшая математика» М., 1985, которая имеет гриф учебника для студентов вузов, и его методические разработки, изданные для ВЗМШ.

Автор надеется, что данное пособие облегчит работу студентов, преподавателей и учащихся старших классов в изучении основ высшей математики. Он также полагает, что пособие будет полезным широкому кругу лиц, занимающихся заочно или самообразованием. Им оно заменит в какой-то степени и лектора, и преподавателя.

Автор выражает свою признательность акад. А. Н. Тихонову, профессорам Д. П. Костомарову, Ю. А. Рябову и А. Г. Сокольскому за участие в работе над рукописью данного учебного пособия. Он также благодарит всех преподавателей кафедры высшей математики Московского автомобильно-дорожного института, принявших участие в обсуждении рукописи.

*Автор*

*Будь благословенно божественное число, породившее богов и людей.*

*Пифагор*

# ГЛАВА 1

# ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

## § 1. МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В математике все понятия делятся на *первичные*[1)] и *определяемые* через первичные или уже известные.

Основным первичным понятием математики, ее фундаментом является понятие *множество*. Слова: *совокупность*, *семейство*, *система*, *набор*, *объединение* и т. п. являются синонимами слова *множество*. Примерами множеств служат множество учащихся в данной аудитории; совокупность тех из них, кто получает по математике только хорошие и отличные оценки; семейство звезд Большой Медведицы; множество страниц данной книги; множество всех рациональных чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное число объектов произвольной природы.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или *точками*. Множества чаще всего обозначают большими буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми буквами. Если $x$ — элемент множества $X$, то пишут $x \in X$ ($x$ принадлежит $X$). Если $x$ не является элементом множества $X$, то пишут $x \notin X$ ($x$ не принадлежит $X$). Если $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы, то запись $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ означает, что множество $X$ состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

---

[1)] Следует особо подчеркнуть, что первичные понятия не могут быть определены. Они, как правило, разъясняются на примерах. С их помощью определяются другие понятия.

Пусть $X$ и $Y$ — два множества. Если $X$ и $Y$ состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они *совпадают*, а пишут $X=Y$. Если в $X$ нет элементов, не принадлежащих $Y$, то говорят, что $X$ *содержится* в $Y$ или что $X$ есть *подмножество множества* $Y$. В этом случае пишут $X\subset Y$ или $Y\supset X$ ($X$ содержится в $Y$ или $Y$ содержит $X$).

○[1] **Примеры. 1.** Множество четных чисел $X$ есть подмножество множества $Y$ целых чисел: $X\subset Y$. **2.** Множество рациональных чисел $Q$ есть подмножество множества $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел[2]: $Q\subset \mathbf{R}$. **3.** Множество студентов всех факультетов института $X$ и множество всех студентов того же института $Y$ совпадают: $X=Y$. ●

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество с установленным порядком расположения элементов называют *упорядоченным*. Упорядоченное множество в отличие от просто множества записывают внутри круглых скобок. Например, из одного и того же множества $\{x_1, x_2\}$ можно получить два упорядоченных множества: $(x_1; x_2)$ и $(x_2; x_1)$.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными множествами вещественных чисел. Всюду, где это не может привести к неточности, для краткости вещественные числа будем называть просто числами.

Пусть $P(x)$ — какое-то свойство числа $x$. Тогда запись $\{x\,|\,P(x)\}$ обозначает множество всех таких чисел, которые обладают свойством $P(x)$.

○ **Примеры. 1.** Множество $\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$ есть совокупность корней уравнения $x^2-3x+2=0$, т. е. это множество состоит из двух элементов: 1 и 2. **2.** Множество $\{x\,|\,3<x<7\}$ является совокупностью всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $3<x<7$. **3.** Множество $\{x\,|\,x>7 \text{ и } x<3\}=\varnothing$, т. е. это пустое множество. ●

Если $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные числа, то запись

---

[1] Здесь и далее знаки ○ и ● означают соответственно начало и конец примеров.

[2] Вместо термина *вещественные числа* часто используют термин *действительные числа*. Обычно множество всех вещественных чисел обозначают через $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{R}^1$).

$x = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(x = \min\{x_1, \ldots, x_n\})$ [1] означает, что число $x$ максимальное (минимальное) из чисел $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$.

В заключение отметим, что первичными понятиями являются *точка*, *прямая* и *плоскость*. Для всех остальных понятий будут даны определения.

?

Вопросы для самопроверки

1. Какую роль в математике играют первичные понятия?
2. Назовите основное первичное понятие.
3. Приведите примеры различных множеств.
4. Приведите пример совпадающих множеств.
5. Сколько можно образовать подмножеств из множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$?
6. Почему пустое множество является подмножеством любого множества?
7. Что означает запись $\{x \mid P(x)\}$?
8. Приведите понятия, кроме множества, являющиеся первичными.

## § 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Понятие вещественного числа принадлежит к основным математическим понятиям. Существуют различные подходы к определению вещественного числа (метод сечений, определение вещественного числа как бесконечная десятичная дробь и др.), однако наиболее логичным и простым является аксиоматический метод введения вещественного числа. Заметим, что все методы введения вещественного числа эквивалентны, так как ни в одном из них не устанавливается факт существования вещественного числа. Поэтому во всех случаях необходимо вводить аксиому существования вещественного числа. Поскольку же использование аксиом неизбежно, проще всего их сразу сформулировать и перейти к непосредственному изложению основного материала.

Напомним, что множество вещественных чисел разбивается на два множества — рациональных и иррациональных чисел. *Рациональным* называется число, которое можно представить в виде $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — целые числа, причем $q \neq 0$. *Иррациональным* называется всякое вещественное число, которое не яв-

[1] От лат. maximum (minimum) — наибольший (наименьший).

ляется рациональным. Всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ является либо целым, либо его можно представить в виде конечной или периодической бесконечной десятичной дроби. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, рациональные числа $^3/_4$ и $^1/_3$ представляются соответственно следующими десятичными дробями: 0,75 и 0,333...; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и $\pi$ представляются соответственно непериодическими бесконечными десятичными дробями: 1,41421356... и 3,14159... .

Приведем основные свойства вещественных чисел, которые примем за аксиомы, выведем из них некоторые следствия, а затем определим вещественные числа.

## I. Сложение и умножение вещественных чисел

Для любой пары $a$ и $b$ вещественных чисел определены, и притом единственным образом, два вещественных числа $a+b$ и $a \cdot b$, называемые их *суммой* и *произведением*, обладающими следующими свойствами.

*Каковы бы ни были числа $a$, $b$ и $c$:*

1°. $a+b=b+a$ (переместительное свойство).

2°. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сочетательное свойство).

3°. $a \cdot b=b \cdot a$ (переместительное свойство).

4°. $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (сочетательное свойство).

5°. $(a+b) \cdot c=ac+bc$ (распределительное свойство).

6°. *Существует единственное число 0 такое, что $a+0=a$ для любого числа $a$.*

7°. *Для любого числа $a$ существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$.*

8°. *Существует единственное число $1 \neq 0$ такое, что для любого числа $a$ имеет место равенство $a \cdot 1=a$.*

9°. *Для любого числа $a \neq 0$ существует такое число $a^{-1}$, что $a \cdot a^{-1}=1$; число $a^{-1}$ обозначается также символом $\frac{1}{a}$.*

Замечание. Числа $-a$ и $a^{-1}$, о которых говорится в свойствах 7° и 9°, единственны.

В самом деле, если бы существовало, например, еще одно число $b \neq -a$, удовлетворяющее условию $a+b=0$, то $a+b+(-a)=-a$, откуда $a+(-a)+b=-a$, $0+b=-a$ и $b=-a$, т. е. получено противоречие. (Самостоятельно докажите единственность числа $a^{-1}$.)

## II. Сравнение вещественных чисел

Для любых двух различных вещественных чисел $a$ и $b$ установлено одно из отношений: $a=b$ ($a$ равно $b$), $a>b$ или $b>a$ ($a$ больше $b$ или $b$ больше $a$). Отношение $=$ обладает свойством: если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

Отношение $>$ обладает следующими свойствами. *Каковы бы ни были числа* $a$, $b$ и $c$:

$10^0$. *Если* $a>b$ *и* $b>c$, *то* $a>c$.

$11^0$. *Если* $a>b$, то $a+c>b+c$.

$12^0$. *Если* $a>0$ и $b>0$, то $a \cdot b>0$.

Вместо $a>b$ пишут также $b<a$ ($b$ меньше $a$). Запись $a \geqslant b$ (или, что то же, $b \leqslant a$) обозначает, что либо $a=b$, либо $a>b$[1]. Соотношения $a<b$, $a \leqslant b$, $a>b$, $a \geqslant b$ называются *неравенствами*. Неравенства $a<b$ и $a>b$ называются *строгими неравенствами*.

Число $a$, удовлетворяющее неравенству $a>0$, называется *положительным*, а число $a$, удовлетворяющее неравенству $a<0$,— *отрицательным*.

Отметим, что свойствам I и II удовлетворяет и множество только рациональных чисел.

## III. Непрерывность вещественных чисел

$13^0$. *Пусть $X$ и $Y$ — два множества, состоящие из вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$, то существует хотя бы одно число $c$, такое, что для любых чисел $x$ и $y$ выполняются неравенства*

$$x \leqslant c \leqslant y.$$

Следует заметить, что свойством непрерывности обладает множество всех вещественных чисел, но им

---

[1] Например, можно написать $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Разумеется, можно написать более точно: $2=2$, $2<5$, однако, неравенства $2 \leqslant 2$ и $2 \leqslant 5$ также верны, так как означают, что «два не больше двух» и «два не больше пяти».

не обладает множество только рациональных чисел. Действительно, пусть множество $X$ состоит из рациональных чисел $x$, для которых выполняется неравенство $x<\sqrt{2}$, а множество $Y$ состоит из рациональных чисел $y$, для которых выполняется неравенство $y>\sqrt{2}$. Тогда, очевидно, для любого $x\in X$ и любого $y\in Y$ выполняется неравенство $x\leqslant y$, однако не существует рационального числа $c$ такого, чтобы выполнялись неравенства $x\leqslant c\leqslant y$. В самом деле, таким числом могло бы быть только $\sqrt{2}$, которое, как известно, не является рациональным.

Из свойств I—III вытекают все остальные свойства вещественных чисел. Приведем некоторые из них, но в дальнейшем будем использовать и другие свойства, не проводя их формального доказательства (такое доказательство всякий раз легко провести).

*Каковы бы ни были числа $a$, $b$, $c$ и $d$:*

14°. *Число $x=b+(-a)$ является решением уравнения $a+x=b$.*

□ Действительно, в силу свойств 1°, 2°, 6°, 7° имеем $a+b+(-a)=b$. ■ [1]

Число $b+(-a)$ называется *разностью* чисел $b$ и $a$ и обозначается символом $b-a$. Отметим, что если $a<b$ (или, что то же, $b>a$), то разность $b-a>0$. В самом деле, из неравенства $b>a$ в силу свойства 11° получаем $b+(-a)>a+(-a)$ или $b-a>0$.

15°. *Число $x=ba^{-1}$ является решением уравнения $ax=b$, если $a\neq 0$.*

□ Действительно, в силу свойств 3°, 4°, 8°, 9° имеем $a\cdot ba^{-1}=b$. ■

Число $ba^{-1}$ называется *частным* чисел $b$ и $a$ и обозначается символом $\frac{b}{a}$ или $b:a$.

16°. *Если $a<b$, то $-a>-b$.*

□ В самом деле, так как $a<b$, то $b-a>0$. Следовательно, согласно свойству 11°, $b-a+(-b)>0+(-b)$, откуда получаем $-a>-b$. ■

В частности, если $a>0$, то $-a<0$, а если $a<0$, то $-a>0$ (здесь использован тот факт, что $-0=0$; действительно, на основании свойства 6° $(-0)+0=$

---

[1] Здесь и далее знак □ означает начало доказательства, а ■ — конец доказательства.

$=-0$, а согласно свойству $7^0$, $(-0)+0=0$, откуда следует, что $-0=0$).

$17^0$. *Если* $a>b$ *и* $c>d$, *то* $a+c>b+d$, *т. е. неравенства одного знака можно почленно складывать.*

□ В самом деле, если $a>b$ и $c>d$, то, согласно свойству $11^0$, имеем $a+c>b+c$ и $c+b>d+b$. Поэтому на основании свойства $10^0$ $a+c>b+d$. ■

$18^0$. *Если* $a<b$ *и* $c>d$, *то* $a-c<b-d$, *т. е. неравенства противоположных знаков можно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое.*

□ В самом деле, так как $c>d$, то, согласно свойству $16^0$, $-c<-d$. Складывая почленно неравенства $a<b$ и $-c<-d$ (это можно делать на основании свойства $17^0$), получаем $a-c<b-d$. ■

$19^0$. $a-a=0$.

□ В самом деле, $a-a=a+(-a)=0$. ■

$20^0$. $a\cdot 0=0$.

□ Действительно, $a\cdot 0=a\cdot(b-b)=ab-ab=0$. ■

$21^0$. $-(-a)=a$.

□ В самом деле, $-(-a)=(-(-a))+(-a)+a=0+$ $+a=a$ ■

$22^0$. $(-a)b=-ab$.

□ Действительно, $(-a)b=(-a)b+ab+(-ab)=$ $=[(-a)+a]\cdot b-ab=0\cdot b-ab=0-ab=-ab$. ■

Отметим, что, заменяя сумму $(-a)b+ab$ произведением $[(-a)+a]b$, мы воспользовались свойством $5^0$. Из свойства $22^0$, в частности, получаем $(-1)a=-a$.

$23^0$. *Если* $a<0$ *и* $b>0$, *то* $ab<0$.

□ В самом деле, так как $a<0$, то $-a>0$, поэтому, согласно свойству $12^0$, $(-a)b>0$. Следовательно, $(-a)b=-ab>0$ и, значит, $ab<0$. ■

$24^0$. *Если* $a<0$ *и* $b<0$, *то* $ab>0$.

□ Действительно, так как $b<0$, то $-b>0$. Поэтому на основании свойства $23^0$ $(-b)a<0$. Следовательно, $(-b)a=-ab<0$ и, значит, $ab>0$. ■

$25^0$. *Если* $a\neq 0$, *то* $a\cdot a=a^2>0$.

Справедливость данного утверждения следует из равенств $12^0$ и $24^0$. В частности, $1=1^2>0$, т. е. $1>0$.

$26^0$. *Если* $a>0$, *то и* $a^{-1}>0$.

□ В самом деле, согласно свойствам $9^0$ и $25^0$, $aa^{-1}=1>0$, а если предположить, что $a^{-1}\leqslant 0$, то в силу свойств $20^0$ и $23^0$ получим, что $aa^{-1}\leqslant 0$, т. е. имеет место противоречие. Следовательно, $a^{-1}>0$. ■

Итак, мы видим, что из основных свойств I—III вещественных чисел вытекают остальные их свойства. Поэтому можно считать, что вещественные числа представляют собой множество элементов, обладающих свойствами I—III. Такое определение вещественных чисел называется *аксиоматическим*, а свойства I—III — *аксиомами вещественных чисел.*

В заключение отметим, что исходя из свойств I—III любое вещественное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$a,\ a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

где $a$ — любое целое число, а $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — числа, принимающие целые значения от 0 до 9 $(0 \leqslant a_n \leqslant 9)$. Однако рассматривать этот вопрос мы не будем [1]. Заметим, что можно определить вещественные числа как бесконечные десятичные дроби, а затем доказать их основные свойства I—III [2]. Все другие построения вещественных чисел приводят к множествам элементов, обладающих свойствами I—III.

В дальнейшем при рассмотрении теоретических задач с участием вещественных чисел нас не будет интересовать природа этих чисел, а будут интересовать только те свойства, которыми эти числа обладают.

?

### Вопросы для самопроверки

1. Какие числа образуют множество вещественных чисел?
2. В чем заключается аксиоматический метод введения вещественных чисел?
3. Перечислите основные свойства (аксиомы) вещественных чисел.
4. Каким основным свойством отличается множество всех вещественных чисел от множества только рациональных чисел?

## § 3. НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $a$ и $b$ — два числа, причем $a<b$. Будем использовать следующие обозначения:

---

[1] С этим вопросом можно ознакомиться в кн.: *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1989, т. I.

[2] Такое построение вещественных чисел приведено в кн.: *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М., 1981, ч. I.

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b];\ \ \{x|a<x\leqslant b\}=(a,b];$$
$$\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b);$$
$$\{x|a<x<b\}=(a,b);\ \ \{x|a\leqslant x\}=[a,+\infty);$$
$$\{x|a<x\}=(a,+\infty);$$
$$\{x|x\leqslant b\}=(-\infty,b];\ \ \{x|x<b\}=(-\infty,b).$$

Множество всех вещественных чисел будем обозначать так: $\{x|-\infty<x<+\infty\}$ или $(-\infty, +\infty)$.

Все эти множества называются *промежутками*, причем $[a, b]$ называют *отрезом* (или *сегментом*), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$ — *полуинтервалами*, а $(a, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ и $(-\infty, +\infty)$ — *интервалами*. *Промежутки* $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и $(a, b)$ называются *конечными*; $a$ и $b$ — их *концы*. Остальные промежутки называются *бесконечными*.

Интервал $(a, b)$ отличается от отрезка $[a, b]$ лишь тем, что ему не принадлежат концы $a$ и $b$. Это отличие играет существенную роль во многих вопросах математического анализа. Кроме того, интервал $(a, b)$ не содержит ни наибольшего, ни наименьшего числа, в то время как в отрезке $[a, b]$ такими числами являются соответственно $b$ и $a$.

?

**Вопросы для самопроверки**

1. Какие числовые множества называются промежутками?
2. Из отрезка $[a, b]$ удален интервал $(a, b)$. Что осталось?
3. Из отрезка $[1, 8]$ удален интервал $(3, 5)$. Что осталось? Запишите множество оставшихся чисел с помощью промежутков.

## § 4. ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $X$ — непустое множество чисел.

**Определение.** *Множество $X$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует число $c$ такое, что для любого $x\in X$ выполняется неравенство $x\leqslant c$ $(x\geqslant c)$*[1].

Число $c$ в этом случае называется *верхней (нижней)* гранью множества.

Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

[1] Для сокращения записи в данном определении объединены два опрделения, одно из которых соответствует словам, заключенным в скобках. Этим приемом будем пользоваться в дальнейшем.

○ **Примеры. 1.** Любой конечный промежуток ($[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, b)$) ограничен. **2.** Интервал $(a, +\infty)$ есть множество, ограниченное снизу, но не ограниченное сверху. **3.** Интервал $(-\infty, +\infty)$ есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу. ●

Очевидно, что любое ограниченное сверху (снизу) множество $X$ имеет бесконечно много верхних (нижних) граней, образующих множество чисел, ограничивающих $X$ сверху (снизу). В самом деле, если число $c$ является верхней (нижней) гранью множества $X$, то любое число $c'$, большее (меньшее) числа $c$, также является верхней (нижней) гранью множества $X$, так как из справедливости неравенства $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$ следует, что $x \leqslant c'$ $(x \geqslant c')$.

Возникает вопрос о существовании наименьшего из чисел ограниченного сверху множества и наибольшего из чисел ограниченного снизу множества.

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X$ сверху, называется *точной верхней гранью* множества $X$ и обозначается символом $\sup X$[1], а наибольшее из чисел, ограничивающих множество $X$ снизу, называется *точной нижней гранью* этого множества и обозначается символом $\inf X$[2].

○ **Примеры. 1.** Пусть $X = (a, b)$. Тогда число $b$, а следовательно, и всякое большее число является верхней гранью данного множества, а число $a$ и всякое меньшее число — его нижней гранью. Очевидно, число $b$ — точная верхняя грань множества $X$, а число $a$ — точная нижняя грань, т. е. $b = \sup X$, $a = \inf X$. **2.** Пусть $X = (a, +\infty)$. Тогда число $a$ и всякое меньшее число является нижней гранью множества $X$. Очевидно, число $a = \inf X$, а верхних граней и, следовательно, точной верхней грани данное множество не имеет. ●

Свойство точной верхней (нижней) грани. Точная верхняя грань ($\sup X$) обладает следующим важным свойством: *как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$*[3], *найдется число $x \in X$ такое, что $x > \sup X - \varepsilon$.*

Если бы такого числа $x$ не нашлось, то число $\sup X - \varepsilon$ было бы также верхней гранью, и тогда число $\sup X$ не было бы точной верхней гранью.

---

[1] supremum (лат.) — наивысшее.
[2] infinum (лат.) — наинизшее.
[3] ε — греческая буква «эпсилон».

Другими словами, данное свойство выражает тот факт, что число $\sup X$ является наименьшим среди чисел, ограничивающих множество $X$ сверху, и уменьшено быть не может.

Аналогичным свойством обладает и точная нижняя грань: *как бы мало ни было число* $\varepsilon>0$, *найдется число* $x\in X$ *такое, что* $x<\inf X+\varepsilon$.

○ **Пример.** Доказать, что множество $X=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ограничено. Установить, какие числа являются его гранями. Найти точные верхнюю и нижнюю грани этого множества.

Решение. При любом натуральном $n$ выполняются неравенства $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$, поэтому данное множество $X$ ограничено. Таким образом, число 1 — верхняя грань, а число 0 — его нижняя грань.

Докажем, что число 1 является точной верхней гранью множества $X$, т. е. что $\sup X=1$. Для этого, согласно свойству точной верхней грани, надо показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное число $n$ такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}>1-\varepsilon$. Этим числом $n$ является $n=1$, так как $1>1-\varepsilon$ — верное неравенство для любого $\varepsilon>0$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что число 0 является точной нижней гранью множества $X$. Для этого надо проверить, что для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное число $n$ такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}<0+\varepsilon$ или $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Решая неравенство, получаем $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Взяв какое-нибудь натуральное число $n>\frac{1}{\varepsilon}$, получим требуемое неравенство, а это, согласно свойству точной нижней грани, и означает, что число 0 является точной нижней гранью множества $X$, т. е. $\inf X=0$.

Отметим, что данному множеству $X$ точная грань 1 принадлежит и является его наибольшим числом, а точная нижняя грань 0 не принадлежит и в этом множестве нет наименьшего числа. ●

Определение точной верхней грани $\sup X$ можно сформулировать и по-другому:

*число* $\sup X$ *называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества* $X$, *если*: 1) *для любого* $x \in X$ *выполняется неравенство* $x \leqslant \sup X$; 2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $x \in X$ *такое, что* $x > \sup X - \varepsilon$.

В этом определении первое условие точно показывает, что число $\sup X$ ограничивает множество $X$ сверху, а второе условие, что никакое число, меньшее $\sup X$, множество $X$ сверху не ограничивает, т. е. уже не является верхней гранью.

Аналогично определяется точная нижняя грань $\inf X$. (Сделайте это самостоятельно.)

Возникает вопрос, при каких условиях числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Ответ дает следующая важная теорема.

**Теорема 1.1.** *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

□ *Доказательство. Пусть* $X$ — непустое множество, ограниченное сверху. Тогда множество $Y$ чисел, ограничивающих $X$ сверху, не пусто. Из определения верхней грани следует, что для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ имеет место неравенство $x \leqslant y$. Согласно свойству непрерывности вещественных чисел $13^0$ (см. § 2), существует такое число $c$, что для любых $x$ и $y$ выполняются неравенства

$$x \leqslant c \leqslant y. \tag{1}$$

Из первого из неравенств (1) в силу определения верхней грани следует, что число $c$ ограничивает множество $X$ сверху, т. е. является верхней гранью, а из второго неравенства, что оно наименьшее из таких чисел[1], т. е. является точной верхней гранью, причем может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $X$.

Случай существования точной нижней грани у непустого ограниченного снизу множества рассматривается аналогично. ■

Если множество $X$ не ограничено сверху (снизу), условимся писать $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

[1] Так как $c \leqslant y$ для всех $y \in Y$.

## ? Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение ограниченного сверху (снизу) множества $X$; приведите примеры.

2. Дайте определение точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (снизу) множества $X$; приведите примеры.

3. Сформулируйте свойство точной верхней (нижней) грани.

4. Докажите, что множество $X$, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань.

5. Что означает символическая запись: а) $\sup X = +\infty$; б) $\inf X = -\infty$?

## § 5. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА

Понятия абсолютной величины числа и неравенства, связанные с абсолютными величинами, широко используются в математике.

**Определение.** *Абсолютной величиной (или модулем) числа $x$ называется само число $x$, если $x \geqslant 0$, или число $-x$, если $x<0$.*

Абсолютная величина числа $x$ обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Например, $|+5|=5$; $|-5|=-(-5)=5$; $|0|=0$.

Из определения вытекает ряд свойств абсолютной величины числа.

$1^0$. $|x| \geqslant 0$.

□ Действительно: 1) *если* $x \geqslant 0$, *то* $|x|=x \geqslant 0$; 2) если $x<0$, *то* $|x|=-x$; но $-x>0$, так как $x<0$, *т. е.* $|x|>0$.

Из 1) и 2) получаем, что $|x| \geqslant 0$. ■

$2^0$. $|x|=|-x|$.

□ В самом деле: 1) если $x \geqslant 0$, то $-x \leqslant 0$, тогда $|-x|=-(-x)=x=|x|$, так как $x \geqslant 0$; 2) если $x<0$, то $-x>0$, тогда $|-x|=-x=|x|$, так как $x<0$.

Из 1) и 2) получаем, что $|x|=|-x|$. ■

$3^0$. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

□ Действительно: 1) если $x \geqslant 0$, то $|x|=x$ и $-x \leqslant 0$, тогда $-x \leqslant 0 \leqslant x=|x|$, откуда $-x \leqslant |x|$ или $-|x| \leqslant x$; 2) если $x<0$, то $|x|=-x$ и $-x>0$, тогда $x<0<-x=$ $=|x|$, откуда $x<|x|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. ■

Следующие три свойства докажем в виде теорем.

**Теорема 1.2.** *Пусть $\varepsilon$ — положительное число. Тогда неравенства $|x| \leqslant \varepsilon$ и $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$ равносильны.*

□ Доказательство. Пусть $|x| \leqslant \varepsilon$. Тогда:

1) если $x \geqslant 0$, то $|x| = x \leqslant \varepsilon$, откуда $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x \leqslant \varepsilon$, откуда $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$. Объединяя 1) и 2), при любом $x$ получаем $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Пусть справедливы неравенства $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Это значит, что одновременно выполняются неравенства $x \leqslant \varepsilon$ и $x \geqslant -\varepsilon$. Из последнего имеем $-x \leqslant \varepsilon$. Так как, по определению, $|x|$ есть либо $x$, либо $-x$, то $|x| \leqslant \varepsilon$. ■

**Теорема 1.3.** *Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.*

□ Доказательство. Пусть $x$ и $y$ — любые числа. Согласно свойству $3^0$, для них справедливы неравенства

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{и} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

складывая которые почленно получаем

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant (|x|+|y|).$$

По теореме 1.2 это двойное неравенство равносильно неравенству $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. ■

Заметим, что $|x-y| \leqslant |x|+|y|$. Действительно, $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x|+|-y| = |x|+|y|$ (проверьте это самостоятельно).

**Теорема 1.4.** *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.*

□ Доказательство. Для любых чисел $x$ и $y$ имеем

$$x = y + (x-y).$$

По теореме 1.3, справедливо неравенство

$$|x| = |y+(x-y)| \leqslant |y| + |x-y|,$$

откуда получаем $|x-y| \geqslant |x|-|y|$. ■

Заметим, что $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. Действительно, $|x+y| = |x-(-y)| \geqslant |x|-|-y| = |x|-|y|$ (проверьте это самостоятельно).

И в заключение отметим, что, каковы бы ни были два числа $x$ и $y$, имеют место соотношения

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{и} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{если } y \neq 0.$$

которые легко проверить, рассмотрев случаи, когда $x$ и $y$ — числа одного знака (оба положительны или оба отрицательны) и когда они имеют различные знаки. Например, проверим $|xy|=|x||y|$ в случае, когда $x>0$, $y<0$. Имеем $|x|=x$, $|y|=-y$ и $xy<0$; следовательно, $|xy|=-(xy)=x(-y)=|x||y|$.

○ **Пример 1.** Найти решения следующих уравнений: 1) $|x|=x+2$; 2) $|x|=x-2$; 3) $x+2|x|=3$; 4) $x^2+3|x|-4=0$.

Решение. 1) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x+2$, откуда $0=2$ — неверное равенство. Следовательно, решений нет. При $x<0$ получаем $-x=x+2$, откуда $x=-1$. Это есть решение уравнения.

2) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x-2$, откуда $0=-2$ — неверное равенство. Следовательно, решений нет. При $x<0$ получаем $-x=x-2$, откуда $x=1>0$, что противоречит сделанному предположению $x<0$. Таким образом, уравнение не имеет решений.

3) При $x\geqslant 0$ имеем $x+2x=3$, откуда $x_1=1$. При $x<0$ получаем $x-2x=3$, откуда $x_2=-3$. Следовательно, $x_1=1$ и $x_2=-3$ — решения уравнения.

4) Воспользуемся тем, что $|x|^2=x^2$ [1]. Тогда $|x|^2+3|x|-4=0$. Заменяя $|x|$ на $y$, получим $y^2+3y-4=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-4$. Так как $y=|x|\geqslant 0$, то $y_2=-4$ не подходит. Остается $y_1=|x|=1$, а это равносильно $x=-1$ и $x=1$. Можно решить уравнение и стандартным способом, рассмотрев случаи $x\geqslant 0$ и $x<0$. (Сделайте это самостоятельно.)

**Пример 2.** Доказать, что $||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

Решение. Так как, по определению, $||x|-|y||$ есть либо $|x|-|y|$, либо $-(|x|-|y|)=|y|-|x|$, то для доказательства данного неравенства надо показать, что: 1) $|x|-|y|\leqslant|x-y|$ и 2) $|y|-|x|\leqslant|x-y|$. Но неравенство 1) доказано в теореме 1.4, а неравенство 2) также следует из этой теоремы и свойства $2^0$:

$$|x-y|=|-(x-y)|=|y-x|\geqslant|y|-|x|. \bullet$$

?

### Вопросы для самопроверки

1. Что называется абсолютной величиной числа?
2. Докажите равносильность неравенств $|x|<\varepsilon$ и $-\varepsilon<x<\varepsilon$.

---

[1] Действительно, положив $x=y$ в соотношении $|xy|=|x||y|$, получим $|x|^2=|x^2|=x^2$, так как $x^2\geqslant 0$.

3. Что больше: $|2-3|$ или $|2|+|-3|$?
4. Найдите $|-x|$, если $x<0$.
5. Верно ли, что $|x^3|\neq|x|^3$, если $x<0$?
6. Докажите, что $|x^2|=|x|^2$; $\sqrt{x^2}=|x|$.
7. Запишите без знака модуля выражение $|x-y|$, если $x<y$.

## § 6. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод математической индукции относится к самым важным методам математических доказательств. Он применяется для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа $n$. Сформулируем его в общем виде: чтобы доказать некоторое утверждение, зависящее от натурального числа $n$ (например, какую-нибудь формулу), надо: 1) проверить его справедливость при $n=1$ [1]; 2) предполагая справедливость утверждения для некоторого $n(n>1)$, доказать его справедливость для $n+1$. Затем делается вывод о справедливости данного утверждения для любого натурального числа $n$.

○ **Пример 1.** Доказать методом математической индукции, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. 1) Проверяем верность данной формулы при $n=1$. Левая часть равна 1. Правая часть $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}=1$. Значит, формула верна при $n=1$.

2) Предполагая, что данная формула верна для некоторого $n(n>1)$, докажем, что при $n+1$ имеет место такая же формула:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Действительно,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

[1] Если при $n=1$ утверждение не имеет смысла, то проверку справедливости утверждения надо делать для наименьшего значения $n$, при котором утверждение имеет смысл.

$$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6},$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции делаем вывод, что данная формула верна для любого натурального числа $n$. ●

Метод математической индукции удобен для нахождения сумм конечного числа слагаемых.

○ **Пример 2.** Найти сумму

$$1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Решение. Обозначим эту сумму через $S_n$, т. е.

$$S_n=1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Чтобы получить для $S_n$ выражение, не требующее алгебраического сложения $n$ слагаемых, вычислим несколько первых значений этой суммы:

$$S_1=1;\ \ S_2=1+3=4;\ \ S_3=1+3+5=9;$$
$$S_4=1+3+5+7=16.$$

Видим, что это последовательные квадраты натуральных чисел. Естественно предположить, что $S_n=n^2$. Чтобы доказать справедливость этого равенства, воспользуемся методом математической индукции. Имеем: 1) $S_1=1=1^2$. Значит, формула верна при $n=1$; 2) предполагая, что она верна для некоторого $n$, докажем, что при $n+1$ имеет место формула $S_{n+1}=(n+1)^2$. Действительно,

$$S_{n+1}=S_n+[2(n+1)-1]=n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции делаем вывод, что формула $S_n=n^2$ верна для любого натурального числа $n$ и

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \text{ ●}$$

**Упражнение.** Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

(*Отв.* $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. Указание: замените каждое слагаемое на разность по формуле $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ или примените индукцию.)

## ? Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит метод математической индукции?
2. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального $n$ справедлива формула

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

## § 7. ФАКТОРИАЛ И ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА

**1. Факториал.** Для вычисления суммы первых $n$ натуральных чисел имеется удобная формула

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых $n$ натуральных чисел такой формулы нет, но зато это часто встречающаяся в комбинаторике и в других разделах математики величина имеет специальное обозначение: $n!$ (эн факториал). Итак, по определению,

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n=n!$$

Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений $n$ число $n!$ очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет $n!$ с ростом $n$, выпишем эти числа для $n$ от 1 до 10: $1!=1$[1], $2!=1\cdot 2=2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, $4!=3!\cdot 4=24$, $5!=4!\cdot 5=120$, $6!=720$, $7!=5040$, $8!=40\,320$, $9!=362\,880$, $10!=3\,628\,800$.

Из определения $n!$ следует, что факториалы двух соседних натуральных чисел $n$ и $n+1$ связаны формулой

$$(n+1)!=n!\cdot(n+1). \qquad (1)$$

Заметим, что если в это равенство подставить $n=0$, то получим $1!=0!\cdot 1$, поэтому полагают

$$0!=1; \qquad (2)$$

это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

[1] По определению полагают $1!=1$.

○ **Пример 1.** Доказать формулу $(n+1)!-n!=n!\cdot n$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Имеем: 1) при $n=1$ $(1+1)!-1!=1!\cdot 1$, откуда $1=1$, значит, формула верна; 2) предполагая ее верность для некоторого $n$, докажем, что при $n+1$ имеет место формула $(n+2)!-(n+1)!=(n+1)!(n+1)$. Действительно, по формуле (1) получаем

$$(n+2)!-(n+1)!=n!(n+1)(n+2)-n!(n+1)=$$
$$=n!(n+1)[(n+2)-1]=n!(n+1)(n+1)=(n+1)!(n+1),$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции заключаем, что формула верна для любого натурального числа $n$.

**Пример 2.** Найти сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots$ $\ldots+n\cdot n!$

Решение. Заменим каждое слагаемое разностью по формуле $(n+1)!-n!=n!\cdot n$ (см. пример 1), получаем

$$(1+1)!-1!+(2+1)!-2!+(3+1)!-3!+\ldots$$
$$\ldots+(n+1)!-n!=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\ldots+(n+1)!-$$
$$-n!=(n+1)!-1,$$

так как все слагаемые в левой части равенства, за исключением второго и предпоследнего, взаимно уничтожаются. Следовательно, $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots$ $\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ ●

**Упражнение.** Найти сумму $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$. $\left(\textit{Отв. } 1-\frac{1}{n!}\right.$. Указание: замените каждое слагаемое разностью по формуле $\left.\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}.\right)$

**2. Формула бинома Ньютона.** В математике широко используются замечательные числа, называемые биномиальными коэффициентами. Они имеют специальное обозначение $C_n^k$ и находятся по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (3)$$

где $n$ — целые неотрицательные числа, а $k$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $0\leqslant k\leqslant n$.

Если числитель и знаменатель дроби (3) сократить на $(n-k)!$, то получим формулу

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

которую удобно запомнить и с помощью которой проще производить вычисления. В знаменатель этой дроби входит произведение всех первых $k$ натуральных чисел, а в числитель — произведение $k$ натуральных чисел, записанных в порядке убывания начиная с числа $n$. В комбинаторике эта формула определяет биномиальный коэффициент $C_n^k$ как *число сочетаний из $n$ элементов по $k$.*

○ **Пример 3.** Вычислить $C_{20}^6$.

Решение. Имеем

$$C_{20}^6=\frac{20!}{6!\,14!}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=38\,760. \quad ●$$

С помощью биномиальных коэффициентов доказываются многие математические утверждения и, в частности, очень важная *формула бинома Ньютона*[1)]

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^nb^n, \tag{4}$$

с названием которой связано и название коэффициентов $C_n^k$.

□ Формулу (4) докажем методом математической индукции, но предварительно покажем, что для биномиальных коэффициентов выполняется соотношение

$$C_n^{k+1}+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}. \tag{5}$$

Действительно,

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}=C_{n+1}^{k+1},$$

---

[1)] Ньютон Исаак (1642—1727) — великий английский физик, механик, астроном и математик.

что и требовалось показать.

Докажем теперь формулу (4). 1) Проверяем верность формулы (4) при $n=1$:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a+b,$$

так как в силу соглашения (2) $C_1^0 = \frac{1!}{0!\,1!} = 1$, $C_1^1 = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$.

2) Предполагая, что формула (4) верна для некоторого $n$, докажем, что при $n+1$ имеет место такая же формула, т. е. что

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}. \qquad (6)$$

В самом деле,

$$(a+b)^{n+1} = \left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + C_n^n b^n\right)\cdot(a+b) = C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + C_n^n ab^n + C_n^0 a^n b + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n b^{n+1} =$$
$$= C_n^0 a^{n+1} + \left(C_n^0 + C_n^1\right) a^n b + \ldots + \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) a^{n-k} b^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + \left(C_n^{n-1} + C_n^n\right) ab^n + C_n^n b^{n+1},$$

откуда, в силу того что $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^0 + C_n^1 = C_{n+1}^1$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^{n-1} + C_n^n = C_{n+1}^n$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ (см. формулы (2), (3) (5)), следует формула (6). Из 1) и 2) на основании метода математической индукции заключаем, что формула (4) верна для любого натурального числа $n$. ■

Формулу (4) обычно коротко записывают так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

[Символ $\Sigma$ (греческая буква «сигма») обозначает знак суммирования (сложения).]

Из формулы (4), в частности, при $n=2$ и $n=3$ получаем хорошо знакомые формулы:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

**Упражнение.** Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(a+b)^6$. (*Отв.* $a^6+6a^5b+15a^4b^2+$ $+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.)

### Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $n!$?
2. Найдите число $n!$ для $n=11$; 12.
3. Может ли $n!$ кончаться ровно пятью нулями?
4. Докажите формулу бинома Ньютона.

## § 8. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**1.1.** Докажите, что множество $X=(0, 1)$ ограничено. Какие числа являются гранями? Найти точную верхнюю грань этого множества.

**1.2.** Докажите, что множество $X=\{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ всех целых чисел не ограничено ни снизу, ни сверху, т. е. $\sup X=+\infty$ и $\inf X=-\infty$.

**1.3.** Докажите, что множество $X=\{1, 2, 3, ...\}$ натуральных чисел не ограничено сверху, т. е. $\sup X=+\infty$.

**1.4.** Докажите следующее утверждение: *каковы бы ни были числа $a$ и $b$, $0<a<b$, существует такое целое число $n>0$, что $an>b$.*

**1.5.** Пусть $X$ и $Y$ — два непустых числовых множества. Докажите, что если $Y\subset X$, то $\sup X\geqslant \sup Y$.

**1.6.** Пусть $X$ и $Y$ — два непустых числовых множества. Докажите, что $\sup\{z\,|\,z=x+y;\ x\in X,\ y\in Y\}=\sup X+\sup Y$.

**1.7.** Решите уравнение $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\dfrac{x-1}{x+1}$.

**1.8.** Решите уравнение $|(x^2+2x+5)+(x-5)|=|x^2+2x+5|+$ $+|x-5|$.

**1.9.** Решите уравнение $|\sin x|-\sin x=2$.

**1.10.** Решите уравнение $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$.

**1.11.** Решите уравнения, раскрыв модули: 1) $|x+4|=|x-4|$; 2) $|x-1|+|1-2x|=2|x|$; 3) $||3-2x|-1|=2|x|$.

**1.12.** Решите неравенство $||x^2-3x|>|x^2|-|3x|$.

**1.13.** Решите неравенство $|x-3|+|x+3|>8$, раскрыв модули.

**1.14.** Докажите методом математической индукции, что $4^n>n^2$ для любого натурального $n$.

**1.15.** Докажите методом математической индукции, что $n!>2^n$ для $n>3$.

**1.16.** Докажите методом математической индукции неравенства $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ для $n>1$.

**1.17.** Найдите сумму $1+3+6+...+\dfrac{n(n+1)}{2}$.

**1.18.** Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}$.

*То, что может превышать геометрию, превышает нас.*

*Б. Паскаль*

# ГЛАВА 2
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия — область математики, изучающая геометрические образы алгебраическими методами. В XVII в. французским математиком Декартом был разработан и впервые применен метод координат, давший возможность связать друг с другом геометрические и алгебраические понятия.

## § 1. МЕТОД КООРДИНАТ

В основе метода координат лежит построение системы координат. Таких систем существует много. Познакомимся с прямоугольной (или декартовой) и полярной системами координат.

**1. Направленные отрезки и их величины. Основное тождество.** Напомним, что множество точек прямой, состоящее из двух граничных точек и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком.*

Одним из основных понятий аналитической геометрии является понятие направленного отрезка.

Рассмотрим произвольную прямую. Укажем на ней два взаимно противоположных направления. Выберем одно из них и на рисунке обозначим его стрелкой (рис. 1). Пусть, кроме того, выбрана единица масштаба для измерения длин отрезков.

Прямая с выбранным на ней направлением называется *осью*[1)].

---

[1)] Здесь и далее предполагается, что ось расположена горизонтально и положительным направлением является направление слева направо.

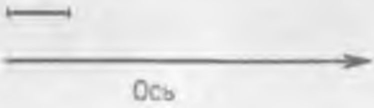



Рис. 1

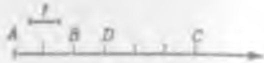



Рис. 2

Рассмотрим на оси две произвольные точки $A$ и $B$.

**Определение 1.** *Отрезок с граничными точками $A$ и $B$ называется направленным, если указано, какая из точек $A$ и $B$ считается началом, а какая — концом отрезка.*

Направленный отрезок с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначим $\overline{AB}$[1] и будем считать, что он направлен от начала к концу.

В записи $\overline{AB}$ букву, обозначающую начало направленного отрезка, пишут первой, а букву, обозначающую его конец,— второй.

Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается так: $|\overline{AB}|$ или $|AB|$.

Для направленных отрезков, лежащих на оси, введем важное понятие величины направленного отрезка.

**Определение 2.** *Величиной $AB$ направленного отрезка $\overline{AB}$ называется вещественное число, равное $|\overline{AB}|$, если направления отрезка и оси совпадают, и равное $-|\overline{AB}|$, если эти направления противоположны.*

Из определения следует, что величины направленных отрезков $AB$ и $BA$ при любом направлении оси отличаются только знаками:

$$AB = -BA.$$

Заметим, что $|\overline{AB}|$ и $|\overline{BA}|$ обозначают одно и то же число.

Пусть даны какая-нибудь ось, масштабная единица и точки $A$, $B$, $C$, $D$, расположенные так, что расстояние между $A$ и $B$ равно двум, между $C$ и $D$ — трем (рис. 2). Тогда направление направленного отрезка $AB$ и оси совпадают, а направление направленного отрезка $CD$ и оси противоположно. Следовательно, $AB = |\overline{AB}| = 2$, $CD = -|\overline{CD}| = -3$. Если рас-

[1] Иногда обозначают $\overrightarrow{AB}$.

сматривать направленные отрезки $\overline{BA}$ и $\overline{DC}$, то $BA = -|\overline{BA}| = -2$, $DC = |\overline{DC}| = 3$. При этом $|\overline{BA}| = |\overline{AB}| = 2$ и $|\overline{CD}| = |\overline{DC}| = 3$.

Если точки $A$ и $B$ направленного отрезка $\overline{AB}$ совпадают, то величина направленного отрезка $\overline{AB}$ равна нулю, а направление не определено.

В дальнейшем направленные отрезки оси будем называть просто *отрезками*, опуская слово «направленный».

**Основное тождество.** *Для любых трех точек $A$, $B$ и $C$ на оси величина отрезка $\overline{AC}$ равна сумме величин отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$*, т. е.

$$AB + BC = AC. \tag{1}$$

□ Докажем основное тождество. Пусть сначала точки $A$, $B$ и $C$ различны. Тогда, чтобы доказать равенство (1), нужно рассмотреть шесть случаев взаимного расположения точек $A$, $B$ и $C$ на оси[1] (рис. 3). Случай I очевиден. Рассмотрим, например, случай II. Имеем $AB - CB = AC$. Но $-CB = BC$. Следовательно, $AB + BC = AC$, т. е. получено равенство (1). Остальные случаи доказываются аналогично.

Пусть теперь некоторые из точек $A$, $B$ и $C$ совпадают, например точка $B$ совпадает с точкой $A$. Тогда

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC,$$

т. е. снова получено равенство (1).

Итак, установлено, что равенство (1) действительно справедливо при любом расположении точек $A$, $B$ и $C$ на оси. ■

**2. Координаты на прямой. Числовая прямая.** Рассмотрим какую-нибудь прямую. Выберем на ней направление (тогда она станет осью) и некоторую точку $O$ (начало координат). Прямая с выбранным направлением и началом координат называется *координатной прямой* (при этом считаем, что единица масштаба выбрана).

Пусть $M$ — произвольная точка на координатной прямой (рис. 4). Поставим в соответствие точке $M$

---

[1] Так как из трех точек можно составить $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ перестановок.

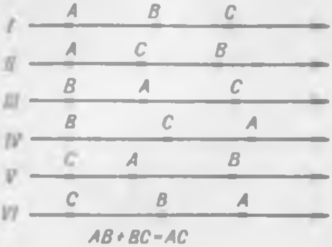



Рис. 3


Рис. 4

вещественное число $x$, равное величине $OM$ отрезка $\overline{OM}: x = OM$. Число $x$ называется *координатой* точки $M$. Из определения величины отрезка следует, что если направление отрезка $\overline{OM}$ совпадает с направлением оси, то точка $M$ расположена правее точки $O$ и координата $x$ положительна, если не совпадает — то точка $M$ расположена левее точки $O$ и координата $x$ отрицательна, если же точка $M$ совпадает с точкой $O$, то координата $x$ равна нулю.

Тот факт, что точка $M$ имеет координату $x$, символически записывают в виде $M(x)$.

Таким образом, каждой точке координатной прямой соответствует определенное вещественное число — ее координата. Справедливо и обратное, каждому вещественному числу $x$ соответствует некоторая точка на координатной прямой, а именно такая точка $M$, координата которой равна $x$. Такое соответствие называется *взаимно однозначным*.

Итак, вещественные числа можно изображать точками координатной прямой, т. е. координатная прямая служит изображением множества всех вещественных чисел. Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*[1)], а любое число — точкой этой прямой. Около точки на числовой прямой часто указывают число — ее координату.

Изображение вещественных чисел в виде точек числовой прямой делает геометрически наглядно представление о числах и их свойствах. Числовым промежуткам геометрически соответствуют проме-

[1)] Надо заметить, что координатных прямых много, а числовая прямая одна — множество вещественных чисел. Иногда числовую прямую называют числовой осью.

Рис. 5

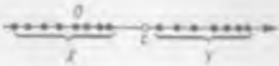


Рис. 6

жутки на числовой прямой. Например, отрезок $[a, b]$ изображается на числовой прямой отрезком $\overline{M_1M_2}$ в виде точек $M(x)$, расположенных между двумя точками $M_1$ и $M_2$ (рис. 5), одна из которых изображает число $a$ (имеет координату $a$), другая — число $b$ (имеет координату $b$), т. е. для любого $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $a \leqslant x \leqslant b$.

Рассмотрим еще один пример. Свойство непрерывности вещественных чисел 13° имеет простой геометрический смысл. Действительно, если взять числовую прямую, то на ней каждая точка $x \in X$ расположена левее каждой точки $y \in Y$. Поэтому множество $X$ расположено целиком левее множества $Y$. Согласно свойству непрерывности, между множествами $X$ и $Y$ есть точка $c$, «отделяющая одно множество от другого» (рис. 6). При этом точка $c$ может принадлежать как множеству $X$, так и множеству $Y$, а также не принадлежать ни одному из них. Таким образом, числовая прямая является как бы сплошной линией без «дырок». В каком бы месте мы ни «разрезали» прямую на две части, разрез пройдет через одну из точек прямой.

Пусть $a$ — произвольная точка числовой прямой и $\delta$[1] — положительное число. Интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$ называется *δ-окрестностью точки $a$* (рис. 7).

На числовой прямой ограниченное множество $X$ представляет собой множество точек, гранями которого являются концы промежутков, содержащих все точки этого множества.

○ **Пример 1.** Построить на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям: 1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|2x-3|=$ $=2x-3$; 4) $|1-x|=2$; 5) $|2+x|=2$.

Решение. 1) Уравнение $|x|=2$ равносильно двум уравнениям: $x=2$ и $x=-2$. Следовательно, имеем две точки $M_1(-2)$ и $M_2(2)$, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (рис. 8).

---

[1] $\delta$ — греческая буква «дельта».

Рис. 7

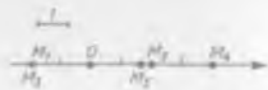


Рис. 8

2) Уравнение $|x-1|=3$ равносильно двум уравнениям: $x-1=3$ и $x-1=-3$, откуда находим $x=-2$ и $x=4$ и соответствующие точки $M_3(-2)$ и $M_4(4)$ (рис. 8), координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

3) Так как $|x|=x$ при $x \geqslant 0$, то данное равенство справедливо для тех $x$, при которых $2x-3 \geqslant 0$, откуда получаем $x \geqslant \frac{3}{2}$. Следовательно, точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, расположены справа от точки $M_5\left(\frac{3}{2}\right)$, включая точку $M_5$. В остальных случаях решения аналогичны. (Постройте остальные точки самостоятельно.)

**Пример 2.** Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам: 1) $x>2$; 2) $x-3 \leqslant 0$; 3) $2x-3 \leqslant 0$; 4) $1<x \leqslant 3$; 5) $x^2-9<0$; 6) $x^2-5x+6<0$; 7) $12-x<0$; 8) $3x-5>0$; 9) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 10) $x^2-8x+15 \leqslant 0$; 11) $x^2-8x+15>0$; 12) $x^2-25<0$; 13) $16-x^2 \leqslant 0$. К каждому случаю сделать рисунок.

Решение. 1) Точки расположены справа от точки $M_1(2)$.

2) Прибавляя к каждой части неравенства $x-3 \leqslant 0$ число 3, получим $x \leqslant 3$. Следовательно, точки расположены слева от точки $M_2(3)$, включая точку $M_2$.

3) Прибавляя к каждой части неравенства $2x-3 \leqslant 0$ число 3 и деля почленно на 2, получим $x \leqslant \frac{3}{2}$. Следовательно, точки расположены слева от точки $M_3\left(\frac{3}{2}\right)$, включая точку $M_3$.

4) Точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_4(1)$ и $M_5(3)$, включая точку $M_5$.

5) Данное неравенство равносильно неравенству $x^2<9$. Так как $\sqrt{x^2}=|x|$, то $|x|<3$ или $-3<x<3$

(см. теорему 1.2). Следовательно, точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_6(-3)$ и $M_7(3)$.

6) Найдем корни трехчлена, стоящего в левой части данного неравенства $x_1=2$ и $x_2=3$, и представим его в виде

$$(x-2)(x-3)<0.$$

Произведение двух множителей отрицательно, когда эти множители имеют разные знаки. Следовательно, возможны два случая:

либо $\begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x-2>0, \\ x-3<0. \end{cases}$ Первая система

несовместна (не имеет решения), решение второй $2<x<3$. Следовательно, точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_8(2)$ и $M_9(3)$. В остальных случаях решения аналогичны. (Выполните их самостоятельно.)

**Пример 3.** Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:
1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leqslant 2$; 4) $|x-2|<3$; 5) $|x-1|\geqslant 2$; 6) $|x^2-5x+6|>x^2-5x+6$; 7) $|x|<x+1$.

Решение. 1) Данное неравенство равносильно неравенствам $-1<x<1$ (см. теорему 1.2). Следовательно, точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_1(-1)$ и $M_2(2)$.

2) Если $|x|>\alpha$ $(\alpha>0)$, то либо $x>\alpha$, либо $x<-\alpha$ (докажите самостоятельно). В данном случае $x>2$ или $x<-2$. Таким образом, точки расположены вне промежутка, ограниченного точками $M_3(-2)$ и $M_4(2)$.

3) Данное неравенство равносильно неравенствам $-2\leqslant x\leqslant 2$. Итак, точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_5(-2)$ и $M_6(2)$, включая точки $M_5$ и $M_6$.

4) Данное неравенство равносильно неравенствам $-3<x-2<3$. Прибавляя к каждой части этих неравенств число 2, получаем $-1<x<5$. Следовательно, точки расположены внутри промежутка, ограниченного точками $M_7(-1)$ и $M_8(5)$.

5) Если $|x-1|\geqslant 2$, то либо $x-1\geqslant 2$, либо $x-1\leqslant$ $\leqslant -2$. Решая каждое из этих неравенств, получаем

либо $x \geqslant 3$, либо $x \leqslant -1$. Следовательно, точки расположены вне промежутка, ограниченного точками $M_9(-1)$ и $M_{10}(3)$, включая точки $M_9$ и $M_{10}$.

6) Так как $|x| > x$ только при $x < 0$ (см. свойство $3^0$ абсолютной величины числа), то данное неравенство справедливо для тех $x$, при которых $x^2 - 5x + 6 < 0$. Как следует из примера 2, случай 6), решение этого неравенства $2 < x < 3$.

7) При $x \geqslant 0$ данное неравенство равносильно неравенству $x < x + 1$, которое удовлетворяется при всех значениях $x$. При $x < 0$ неравенство равносильно неравенству $-x < x + 1$. Решая его, получаем $x > -\frac{1}{2}$. Таким образом, точки расположены справа от точки $M_{11}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ●

В заключение докажем две важные теоремы.

**Теорема 2.1.** *Каковы бы ни были две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, всегда справедливо равенство*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \tag{2}$$

□ Доказательство. Рассмотрим три точки $O$, $M_1$, $M_2$ (рис. 9). Согласно основному тождеству (1),

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

откуда

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Но $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$. Следовательно, $M_1M_2 = x_2 - x_1$. ■

Теорема имеет простой смысл: чтобы найти величину $M_1M_2$ отрезка $\overline{M_1M_2}$, надо от координаты его конца отнять координату начала.

**Теорема 2.2.** *Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — любые две точки и $d$ — расстояние между ними,* то

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{3}$$

□ Доказательство. По теореме 2.1,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

Но расстояние между точками $M_1$ и $M_2$ равно длине отрезка $\overline{M_1M_2}$, т. е. модулю величины этого отрезка. Следовательно,

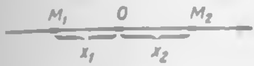



Рис. 9

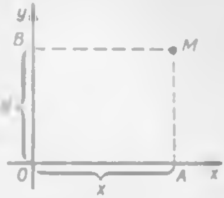



Рис. 10

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \blacksquare$$

Замечание. Так как числа $x_2 - x_1$ и $x_1 - x_2$ берутся по модулю, то можно писать $d = |x_1 - x_2|$.

Принимая во внимание замечание, теорему 2.2 можно сформулировать так: чтобы найти расстояние между точками $M_1$ и $M_2$, надо от координаты одной из них отнять координату другой и полученную разность взять по модулю.

○ **Пример 4.** Даны точки $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$. Найти величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DB}$.

Решение. На основании теоремы 2.1 имеем

$$AB = -1 - 5 = -6, \quad CD = 2 - (-8) = 10,$$

$$DB = -1 - 2 = -3.$$

**Пример 5.** Даны точки $A(3)$ и $B(-2)$. Найти расстояние $d$ между ними.

Решение. На основании теоремы 2.2 имеем

$$d = |-2 - 3| = |-5| = 5. \bullet$$

**3. Прямоугольная (или декартова) система координат на плоскости.** Две взаимно перпендикулярные оси $Ox$ и $Oy$, имеющие общее начало $O$ и одинаковую единицу масштаба (рис. 10), образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.

Ось $Ox$ называется *осью абсцисс*, ось $Oy$ — *осью ординат*. Точка $O$ пересечения осей называется *началом координат*. Плоскость, в которой расположены оси $Ox$ и $Oy$, называется *координатной плоскостью* и обозначается $Oxy$.

Пусть $M$ — произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры $MA$ и $MB$ соответственно на оси $Ox$ и $Oy$. *Прямоугольными координатами* $x$ и $y$ точки $M$ будем называть соответственно величины

$OA$ и $OB$ направленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $x=OA$, $y=OB$.

Координаты $x$ и $y$ точки $M$ называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*.

Тот факт, что точка $M$ имеет координаты $x$ и $y$, символически обозначают так: $M(x;\ y)$. При этом первой в скобках указывают абсциссу, а второй — ординату. Начало координат имеет координаты (0; 0).

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке $M$ плоскости соответствует пара чисел $(x;\ y)$ — ее прямоугольные координаты и, обратно, каждой паре чисел $(x;\ y)$[1] соответствует, и притом одна, точка $M$ на плоскости $Oxy$ такая, что ее абсцисса равна $x$, а ордината — $y$.

Итак, прямоугольная система координат на плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, которое дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями, квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV так, как показано на рис. 11.

На рис. 11 указаны также знаки координат точек в зависимости от их расположения в той или иной четверти.

**4. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.** Рассмотрим некоторые простейшие задачи на применение прямоугольных координат на плоскости.

I. Расстояние между двумя точками. **Теорема 2.3.** *Для любых двух точек $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ плоскости расстояние $d$ между ними выражается формулой*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (4)$$

□ Доказательство. Опустим из точек $M_1$ и $M_2$ перпендикуляры $M_1B$ и $M_2A$ соответственно на оси

[1] Речь идет об упорядоченной паре чисел (упорядоченном множестве), т. е. о наборе из двух чисел, в котором указано, какое число является первым, а какое — вторым. Если $x\neq y$, то пары $(x;\ y)$ и $(y;\ x)$ различны, так как в первой из них первым числом является $x$, а во второй — $y$.

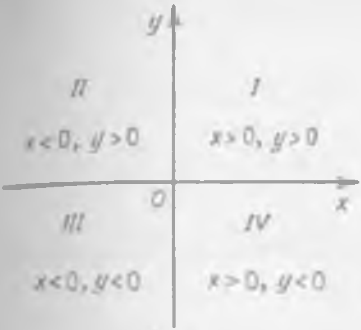



Рис. 11

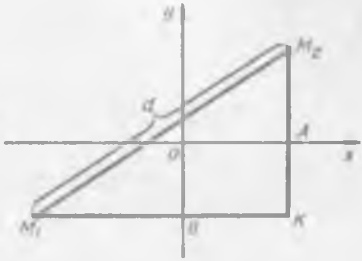



Рис. 12

$Oy$ и $Ox$ и обозначим через $K$ точку пересечения прямых $M_1B$ и $M_2A$ (рис. 12). Точка $K$ имеет координаты $(x_2;\ y_1)$. По теореме 2.2,

$$|M_1K|=|x_2-x_1|;\quad |M_2K|=|y_2-y_1|.$$

Так как треугольник $M_1M_2K$ прямоугольный, то, по теореме Пифагора,

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{|M_1K|^2+|M_2K|^2}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \blacksquare$$

○ **Пример 6.** Найти расстояние $d$ между точками $M_1(-2;\ 3)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. По формуле (4) имеем

$$d=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}. \bullet$$

II. Площадь треугольника. **Теорема 2.4.** *Для любых трех точек $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь $S$ треугольника $ABC$ выражается формулой:*

$$S=\frac{1}{2}\left|[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\right|. \qquad (5)$$

□ Доказательство. Площадь треугольника $ABC$, изображенного на рис. 13, можно найти так:

$$S_{ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}, \qquad (6)$$

где $S_{ADEC}$, $S_{BCEF}$, $S_{ABFD}$ — площади соответствующих трапеций. Поскольку

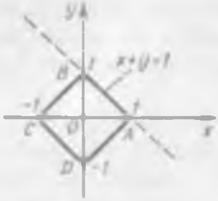



Рис. 23

Рис. 24

часть этой прямой, лежащую в I четверти, и отразив ее симметрично относительно осей $Ox$ и $Oy$, получим искомое множество — квадрат, изображенный на рис. 23.

Решение 2. Рассмотрим уравнение $|x|+|y|=1$ в координатных четвертях.

1) В I четверти $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, поэтому $|x|=x$ и $|y|=y$ и уравнение принимает вид $x+y=1$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, есть прямая. Следовательно, к искомому множеству точек I четверти принадлежит участок $AB$ этой прямой (рис. 23).

2) Во II четверти $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, поэтому $|x|=-x$, $|y|=y$ и уравнение принимает вид $-x+y=1$. Таким образом, искомому множеству точек в пределах II четверти принадлежит участок $BC$ прямой $-x+y=1$.

3) В III четверти $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, поэтому $|x|=-x$, $|y|=-y$ и уравнение принимает вид $-x-y=1$. Следовательно, искомому множеству точек в III четверти принадлежит участок $CD$ прямой $-x-y=1$.

4) В IV четверти $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, поэтому $|x|=x$, $|y|=-y$ и уравнение принимает вид $x-y=1$. Следовательно, искомым множеством точек в IV четверти является участок $DA$ прямой $x-y=1$, замыкающий квадрат $ABCD$. ●

При решении примеров следует обращать внимание на симметрию искомого множества точек относительно координатных осей.

○ **Пример 3.** Найти множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x|-|y|=1$.

Решение. Так как искомое множество точек симметрично относительно координатных осей $Oy$ и $Ox$, то можно использовать любое из двух решений примера 2. Для краткости рассмотрим первое решение. В I четверти уравнение $|x|-|y|=1$ принимает вид $x-y=1$. Следовательно, к искомому множеству точек в I четверти принадлежит участок $AB$ прямой $x-y=1$, отразив его симметрично относительно координатных осей, получаем все искомое множество точек, изображенное на рис. 24.

(Второе решение этого примера выполните самостоятельно.)

**Пример 4.** Найти множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-2y)\times\times(2x-y+1)>0$.

Решение. Произведение двух сомножителей положительно тогда и только тогда, когда у них одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} x-y>0, \\ 2x-y+1>0 \end{cases} \quad (3) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x-y<0, \\ 2x-y+1<0. \end{cases} \quad (4)$$

Неравенство первой степени $Ax+By+C>0$ задает полуплоскость, ограниченную прямой $Ax+By+C=0$ (см. § 3, п. 4). Поэтому решение каждой из систем (3) и (4) — пересечение соответствующих полуплоскостей; получаем ответ: пара вертикальных углов на рис. 25.

**Пример 5.** Показать, что уравнение $x^2+2x+y^2=0$ задает на плоскости некоторую окружность. Найти ее центр и радиус.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$(x^2+2x+1)+y^2=1 \quad \text{или} \quad (x+1)^2+y^2=1.$$

Теперь ясно, что это уравнение окружности с центром в точке $C(-1;\ 0)$ и радиусом 1.

**Пример 6.** Установить, какое множество точек задает неравенство $x^2+y^2\leqslant 4x+4y$.

Решение. Перепишем это неравенство в виде

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4\leqslant 8 \quad \text{или} \quad (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 8.$$

Это неравенство показывает, что расстояние от каждой точки искомого множества до точки (2; 2) меньше или равно $\sqrt{8}$. Очевидно, что точки, удовлетворяющие этому условию, заполняют круг радиуса $\sqrt{8}$ с центром в точке (2; 2). Так как в неравенстве допускается равенство, то граница круга также принадлежит искомому множеству.

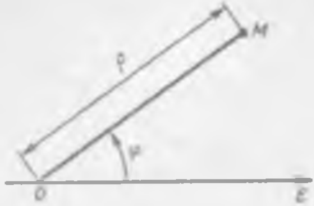


Рис. 15

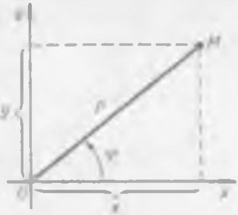


Рис. 16

*отрезка* $M_1M_2$, *т. е.* $|M_1M|=|MM_2|$, *то* $\lambda=1$ *и по формулам* (7) *получаем*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким образом, *каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат.*

○ **Пример 8.** Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. Найти точку $M(x;\ y)$, которая в два раза ближе к $M_1$, чем к $M_2$.

Решение. Искомая точка $M$ делит отрезок $M_1M_2$ в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$. Применяя формулы (7), находим координаты этой точки: $x=3$, $y=2$.

**5. Полярные координаты.** Рассмотрим теперь полярную систему координат. Эта система состоит из некоторой точки $O$, называемой *полюсом*, и исходящего из нее луча $OE$, называемого *полярной осью*. Кроме того, задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть $M$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через $\rho$ расстояние точки $M$ от точки $O$, а через $\varphi$ — угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом $OM$ (рис. 15).

*Полярными координатами* точки $M$ называются числа $\rho$ и $\varphi$. Число $\rho$ считают первой координатой и называют *полярным радиусом*, число $\varphi$ — второй координатой и называют *полярным углом*.

Точка $M$ с полярными координатами $\rho$ и $\varphi$ обозначается так: $M(\rho;\ \varphi)$.

Обычно считают, что полярные координаты $\rho$ и $\varphi$ изменяются в следующих пределах: $0\leqslant\rho<+\infty$,

$0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится рассматривать углы, большие $2\pi$, а также отрицательные углы, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Установим связь между полярными координатами точки и ее прямоугольными координатами. При этом будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка $M$ имеет прямоугольные координаты $x$ и $y$ и полярные координаты $\rho$ и $\varphi$ (рис. 16). Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{8}$$

Формулы (8) выражают прямоугольные координаты через полярные, а выражение полярных координат через прямоугольные следует из этих формул:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{9}$$

Формула $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ определяет два значения полярного угла $\varphi$, так как $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$. Из этих двух значений угла $\varphi$ выбирают то, при котором удовлетворяются равенства (8).

○ **Пример 9.** Даны прямоугольные координаты точки (2; 2). Найти ее полярные координаты, считая, что полюс совмещен с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

Решение. По формулам (9) имеем $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Согласно второму из этих равенств, $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$. Но так как $x = 2 > 0$ и $y = 2 > 0$, то следует взять $\varphi = \pi/4$. ●

?

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется направленным отрезком и его величиной?
2. Что называется основным тождеством? Докажите его.
3. Что называется осью и координатной прямой?
4. Почему множество всех вещественных чисел называют числовой прямой?
5. Раскройте геометрический смысл свойства непрерывности вещественных чисел.
6. Чему равны величина направленного отрезка и расстояние между двумя точками на числовой прямой?
7. Что такое прямоугольная система координат?

8. Покажите, как с помощью прямоугольной системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством упорядоченных пар чисел $(x;\ y)$.

9. Приведите простейшие задачи аналитической геометрии, которые решаются методом координат.

10. Что такое полярная система координат?

11. Раскройте связь между прямоугольной и полярной системами координат.

## § 2. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

**1. Определение уравнения линии.** Рассмотрим соотношение вида

$$F(x,\ y)=0, \tag{1}$$

связывающее переменные величины $x$ и $y$. Равенство вида (1) будем называть *уравнением с двумя переменными* $x$, $y$, если это равенство справедливо не для всех пар чисел $x$ и $y$. Примеры уравнений: $2x+3y=0$, $x^2+y^2-25=0$, $\sin x+\sin y-1=0$.

Если (1) справедливо для всех пар чисел $x$ и $y$, то оно называется *тождеством*. Примеры тождеств: $(x+y)^2-x^2-2xy-y^2=0$, $(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$.

Уравнение (1) будем называть *уравнением множества точек* $(x;\ y)$, если этому уравнению удовлетворяют координаты $x$ и $y$ любой точки множества и не удовлетворяют координаты никакой точки, не принадлежащие этому множеству.

Важным понятием аналитической геометрии является понятие уравнения линии. Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и некоторая линия $L$ (рис. 17).

**Определение.** *Уравнение* (1) *называется уравнением линии* $L$ (*в заданной системе координат*), *если этому уравнению удовлетворяют координаты* $x$ *и* $y$ *любой точки, лежащей на линии* $L$, *и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.*

Из определения следует, что линия $L$ представляет собой множество всех тех точек плоскости $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Если (1) является уравнением линии $L$, то будем говорить, что уравнение (1) *определяет* (*задает*) линию $L$.

Линия $L$ может определяться не только уравнением вида (1), но и уравнением вида

$$F(\rho, \ \varphi)=0,$$

содержащим полярные координаты.

Рассмотрим несколько простейших примеров определения линий уравнениями.

○ 1) $x-y=0$. Записав это уравнение в виде $y=x$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрисы I и III координатных углов. Это линия, определенная уравнением $x-y=0$ (рис. 18).

2) $x^2-y^2=0$. Представив уравнение в виде $(x-y)\times\times(x+y)=0$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению,— это две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов (рис. 19).

3) $x^2+y^2=0$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из одной точки (0; 0). В данном случае уравнение определяет вырожденную линию.

4) $x^2+y^2+1=0$. Так как при любых $x$ и $y$ числа $x^2$ и $y^2$ неотрицательны, то $x^2+y^2+1>0$. Значит, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, т. е. никакого геометрического образа на плоскости данное уравнение не определяет. Оно определяет «пустое» множество точек.

5) $\rho=a\cos\varphi$, где $a$ — положительное число, переменные $\rho$ и $\varphi$ — полярные координаты. Обозначим через $M$ точку с полярными координатами $(\rho;\ \varphi)$, через $A$ — точку с полярными координатами $(a;\ 0)$ (рис. 20). Если $\rho=a\cos\varphi$, где $0<\varphi<\pi/2$, то угол $OMA$ прямой, и обратно. Следовательно, множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют данному уравнению, есть окружность с диаметром $OA$ (рис. 20).

6) $\rho=a\varphi$, где $a$ — положительное число, $\rho$ и $\varphi$ — полярные координаты. Обозначим через $M$ точку с полярными координатами $(\rho;\ \varphi)$. Если $\varphi=0$, то $\rho=0$. Таким образом, при увеличении угла $\varphi$ точка $M(\rho;\ \varphi)$, начавшая свое движение в полюсе, движется вокруг него, одновременно удаляясь от полюса. Множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho=a\varphi$, называется *спи-*


Рис. 17

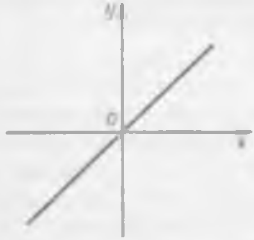



Рис. 18

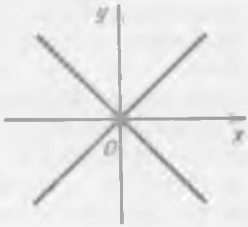



Рис. 19

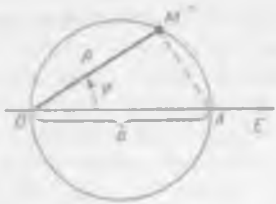



Рис. 20


Рис. 21

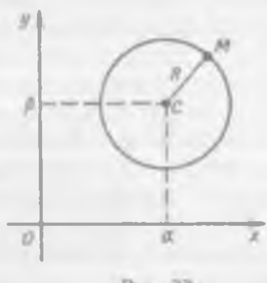



Рис. 22

*ралью Архимеда* (рис. 21). При этом предполагается, что φ может принимать любые неотрицательные значения.

Если точка *M* совершает один полный оборот вокруг полюса, то φ возрастает на $2\pi$, а ρ — на $2a\pi$, т. е. спираль рассекает любую прямую, проходящую через полюс, на равные отрезки (не считая отрезка, содержащего полюс), которые имеют длину $2a\pi$. ●

В рассмотренных примерах по заданному уравнению линии были исследованы ее свойства и тем самым установлено, что представляет собой эта линия.

Рассмотрим теперь обратную задачу: для заданного (какими-то его свойствами) множества точек, т. е. для заданной линии $L$, найти ее уравнение.

○ **Пример 1.** Вывести уравнение (в заданной прямоугольной системе координат) множества точек, каждая из которых отстоит от точки $C(\alpha;\ \beta)$ на расстоянии $R$. Иными словами, вывести уравнение окружности радиуса $R$ с центром в точке $C(\alpha;\ \beta)$ (рис. 22).

Решение. Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y)$ до точки $C$ вычисляется по формуле $|MC|=$ $=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. Если точка $M$ лежит на окружности, то $|MC|=R$ или $MC^2=R^2$, т. е. координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2. \tag{2}$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2\neq R^2$, т. е. координаты точки $M$ не удовлетворяют уравнению (2). Таким образом, искомое уравнение окружности имеет вид (2). Полагая в (2) $\alpha=0$, $\beta=0$, получим уравнение окружности радиуса $R$ с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=R^2. \ ●$$

**2. Примеры на нахождение множеств точек.** Рассмотрим еще несколько примеров на нахождение множеств точек по уравнениям и неравенствам, связывающим их координаты.

● **Пример 2.** Найти множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x|+|y|=$ $=1$.

Решение 1. Так как $|-m|=|m|$, то вместе с точкой $(a;\ b)$ искомому множеству принадлежат также точки $(-a;\ b)$, $(-a;\ -b)$, $(a;\ -b)$. Это означает, что $Ox$ и $Oy$ — оси симметрии искомого множества. Поэтому найдем его часть, лежащую в I четверти, а остальное получим, симметрично отразив эту часть относительно осей координат.

В I четверти $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, поэтому $|x|=x$, $|y|=y$ и данное уравнение принимает вид $x+y=1$. Нарисовав

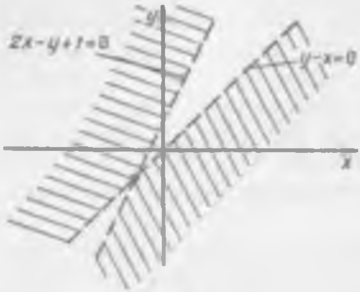



Рис. 25

**Пример 6.** На плоскости даны точки $A$ и $B$. Найти множество точек $M$, удаленных от $A$ вдвое дальше, чем от $B$.

Решение. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы начало координат попало в точку $A$, а положительная полуось абсцисс пошла от $A$ к $B$. За единицу масштаба возьмем длину отрезка $AB$. Тогда точка $A$ имеет координаты $(0; 0)$, точка $B$ — координаты $(1; 0)$. Координаты точки $M$ обозначим через $(x; y)$. Условие $|AM|=2|BM|$ запишем в координатах так:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (4) § 1. Получено уравнение искомого множества точек. Чтобы понять, какое множество описывается этим уравнением, преобразуем его так, чтобы оно приняло знакомый вид. Возводя обе части в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем равносильное уравнение

$$3x^2-8x+4+3y^2=0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9},$$

или в следующем виде:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}$. Таким образом, искомое множество точек является окружностью (или ее частью).

Для решения несущественно, что $|AM|$ именно в два раза больше $|BM|$, поэтому на самом деле решена общая задача. Именно, доказано, что множество точек $M$, отношение расстояний которых до данных точек $A$ и $B$ постоянно

$$\frac{|AM|}{|BM|}=k$$


Рис. 26

($k$ — заданное положительное число, не равное 1), является окружностью.

Мы исключили случай $k=1$. В этом случае искомое множество — прямая (точка $M$ равноудалена от точек $A$ и $B$). (Докажите это аналитически.) ●

Рассмотренные примеры показывают, как метод координат позволяет применять алгебраические методы при решении геометрических задач. Теперь рассмотрим пример, когда алгебраическую задачу можно решить геометрически с помощью метода координат.

○ **Пример 7.** Установить, при каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a \end{cases}$$

не имеет решений, имеет единственное решение, имеет бесчисленное множество решений. Какие еще случаи возможны?

Р е ш е н и е. Первое уравнение системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Второе уравнение является уравнением прямой, отсекающей на осях отрезки, равные $a$. Решить систему — значит найти точки, координаты которых удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т. е. найти точки пересечения прямой $x+y=a$ и окружности. Из рис. 26 следует, что при $a>\sqrt{2}$ и при $a<-\sqrt{2}$ прямая не пересекает окружности, т. е. система не имеет решений; при $a=\pm\sqrt{2}$ получаем касательные к окружности, т. е. система имеет единственное (двойное) решение; при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ прямая пересекает окружность, т. е. система имеет два решения. Других случаев не может быть. ●

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется уравнением с двумя переменными и тождеством? Приведите примеры.

2. Дайте определение уравнения линии и самой линии. Приведите примеры.

3. Выведите уравнение окружности с центром в данной точке.

## § 3. ПРЯМЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть дана некоторая прямая, не перпендикулярная оси $Ox$. Назовем *углом наклона* данной прямой к оси $Ox$ угол $\alpha$, на который нужно повернуть ось $Ox$, чтобы положительное направление совпало с одним из направлений прямой. Угол $\alpha$ может иметь различные значения, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где $n$ — натуральное число. Как правило, в качестве угла наклона берут наименьшее неотрицательное значение угла $\alpha$, на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось $Ox$, чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой (рис. 27). В этом случае $0 \leqslant \alpha < \pi$.

Тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$ называют *угловым коэффициентом* этой прямой и обозначают буквой $k$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

Из формулы (1), в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т. е. прямая параллельна оси $Ox$, то $k = 0$. Если $\alpha = \pi/2$, т. е. прямая перпендикулярна к оси $Ox$, то выражение $k = \operatorname{tg} \alpha$ теряет смысл. В таком случае говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение данной прямой, если известны ее угловой коэффициент $k$ и величина $b$ отрезка $OB$[1], который она отсекает на оси $Oy$ (см. рис. 27).

Обозначим через $M$ произвольную точку плоскости с координатами $x$ и $y$. Если провести прямые

---

[1] Более точно, $b$ является величиной направленного отрезка $OB$ на оси $Oy$. Однако для краткости будем говорить просто «величина отрезка $OB$».

$BN$ и $NM$, параллельные осям, то образуется прямоугольный треугольник $BNM$. Точка $M$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины $NM$ и $BN$ удовлетворяют условию

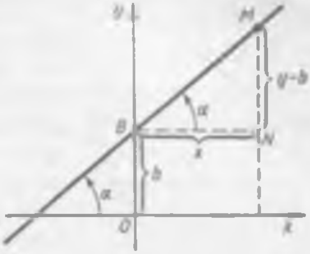



Рис. 27

$$\frac{NM}{BN}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Но $NM=CM-CN=CM-OB=y-b$, $BN=x$. Отсюда, учитывая формулу (1), получаем, что точка $M(x;\ y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{y-b}{x}=k,$$

которое после преобразования принимает вид

$$y=kx+b. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Если $k=0$, то прямая параллельна оси $Ox$ и ее уравнение имеет вид $y=b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси $Ox$, имеет уравнение вида (2). Очевидно, верно и обратное: любое уравнение вида (2) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент $k$ и отсекает на оси $Oy$ отрезок, величина которого $b$.

○ **Пример 1.** Составить уравнение прямой, отсекающей на оси $Oy$ отрезок $b=3$ и образующей с осью $Ox$ угол $\alpha=\pi/6$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi/6)=1/\sqrt{3}$. Подставляя $k$ и $b$ в уравнение (2), получаем искомое уравнение прямой:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3, \qquad \text{или} \qquad \sqrt{3}y-x-3\sqrt{3}=0.$$

**Пример 2.** Построить прямую, заданную уравнением

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

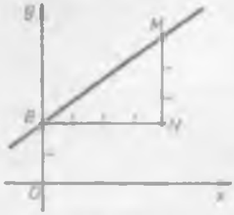


Рис. 28

Решение. Отложим на оси $Oy$ отрезок $OB$, величина которого равна 2 (рис. 28); проведем через точку $B$ параллельно оси $Ox$ отрезок, величина которого $BN=4$, и через точку $N$ параллельно оси $Oy$ отрезок, величина которого $NM=3$. После этого проводим прямую $BM$. Это и есть искомая прямая. Она имеет данный угловой коэффициент $k=\frac{3}{4}$ и отсекает на оси $Oy$ отрезок величины $b=2$. ●

**2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом.** В ряде случаев возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и угловой коэффициент $k$. Запишем уравнение прямой в виде (2), где $b$ пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2): $y_1=kx_1+b$. Определяя $b$ из этого равенства и подставляя в уравнение (2), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3}$$

Замечание. Если прямая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно оси $Ox$, т. е. ее угловой коэффициент обращается в бесконечность, то уравнение прямой имеет вид $x-x_1=0$. Формально это уравнение можно получить из уравнения (3), если разделить уравнение (3) на $k$ и затем устремить $k$ к бесконечности.

○ **Пример 3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 1)$ и образующей с осью $Ox$ угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Подставляя данные координаты и значение углового коэффициента $k$ в уравнение (3), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-1=x-2 \quad \text{или} \quad y-x+1=0. \ ●$$

**3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.** Пусть даны две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

Приняв в (3) точку $M(x; y)$ за $M_2(x_2; y_2)$, получим

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Определяя $k$ из последнего равенства и подставляя его в уравнение (3), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Это уравнение, если $y_1 \neq y_2$, можно записать в виде

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

Если $y_1=y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y=y_1$. В этом случае прямая параллельна оси $Ox$. Если $x_1=x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1$ и $M_2$, параллельна оси $Oy$, ее уравнение имеет вид $x=x_1$.

○ **Пример 4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 1)$ и $M_2(5; 4)$.

Решение. Подставляя данные координаты точек $M_1$ и $M_2$ в соотношение (4), получаем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3} \quad \text{или} \quad 3x-2y-7=0. \ ●$$

**4. Общее уравнение прямой.** **Теорема 2.6.** *В прямоугольной системе координат $Oxy$ любая прямая задается уравнением первой степени*

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

*и, обратно, уравнение* (5) *при произвольных коэффициентах $A$, $B$, $C$ ($A$ и $B$ не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат $Oxy$.*

□ Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси $Ox$, то, как было показано в п. 1, она определяется уравнением первой степени: $y=kx+b$, т. е. уравнением вида (5), где $A=k$, $B=-1$ и $C=b$. Если прямая перпендикулярна оси $Ox$, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине $a$ отрезка, отсекаемого прямой на оси $Ox$ (рис. 29). Уравнение этой прямой имеет вид $x=a$, т. е. также является уравнением первой степени вида (5), где $A=1$, $B=0$, $C=-a$. Тем самым первое утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (5), причем хотя бы один из коэффициентов $A$ и $B$ не равен нулю.

Если $B \neq 0$, то (5) можно записать в виде $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. Полагая $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$, получаем уравнение $y=kx+b$, т. е. уравнение вида (2), которое определяет прямую.

Если $B=0$, то $A \neq 0$ и (5) принимает вид $x=-\frac{C}{A}$. Обозначая $-\frac{C}{A}$ через $a$, получаем $x=a$, т. е. уравнение прямой, перпендикулярной оси $Ox$. ■

Линии, определяемые в прямоугольной системе координат уравнением первой степени, называются *линиями первого порядка.* Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой* (или *полным уравнением прямой*). При различных значениях $A$, $B$, $C$ оно определяет всевозможные прямые.

○ **Пример 5.** Дано общее уравнение $12x-5y-65=0$. Написать уравнение с угловым коэффициентом.

Решение. Разрешив уравнение прямой относительно $y$, получаем уравнение с угловым коэффициентом:

$$y=\frac{12}{5}x-13.$$

Здесь $k=\frac{12}{5}$, $b=-13$. ●

**5. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках».** Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax+By+C=0$ является неполным, т. е. какой-то из коэффициентов равен нулю.

1) $C=0$; уравнение имеет вид $Ax+By=0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $B=0$ $(A \neq 0)$; уравнение имеет вид $Ax+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси $Oy$. Как было

показано в теореме 2.6, это уравнение приводится к виду $x=a$, где $a=-\frac{C}{A}$, $a$ — величина отрезка, который отсекает прямая на оси $Ox$ (см. рис. 29). В частности, если $a=0$, то прямая совпадает с осью $Oy$. Таким образом, уравнение $x=0$ определяет ось ординат.

3) $A=0$ $(B\neq 0)$; уравнение имеет вид $By+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси $Ox$. Этот факт устанавливается аналогично предыдущему случаю. Если положить $-\frac{C}{B}=b$, то уравнение принимает вид $y=b$, где $b$ — величина отрезка, который отсекает прямая на оси $Oy$ (рис. 30). В частности, если $b=0$, то прямая совпадает с осью $Ox$. Таким образом, уравнение $y=0$ определяет ось абсцисс.

Пусть теперь дано уравнение $Ax+By+C=0$ при условии, что ни один из коэффициентов $A$, $B$, $C$ не равен нулю. Преобразуем его к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Вводя обозначения $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$, получаем

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (6)$$

Уравнение (6) называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа $a$ и $b$ являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения удобна для геометрического построения прямой.

○ **Пример 6.** Прямая задана уравнением $3x-5y+15=0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат $Ox$ и $Oy$ отрезки, величины которых


Рис. 29

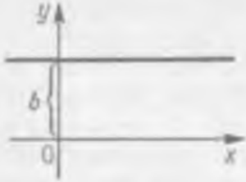



Рис. 30

соответственно равны $a=-5$, $b=3$, и проведем прямую через точки $M_1(-5;\ 0)$ и $M_2(0;\ 3)$ (рис. 31). ●

**6. Угол между двумя прямыми.** Рассмотрим две прямые $L_1$ и $L_2$. Пусть уравнение $L_1$ имеет вид $y=k_1x+b_1$, где $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, а уравнение $L_2$ — вид $y=k_2x+b_2$, где $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ (рис. 32). Пусть $\varphi$ — угол между прямыми $L_1$ и $L_2$: $0\leqslant\varphi<\pi$.

Из геометрических соображений устанавливаем зависимость между углами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\varphi$: $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$ или $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}. \qquad (7)$$

Формула (7) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi-\varphi$.

○ **Пример 7.** Две прямые заданы уравнениями $y=2x+3$ и $y=-3x+2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Очевидно, $k_1=2$, $k_2=-3$, поэтому по формуле (7) находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-2}{1+(-3)2}=\frac{-5}{-5}=1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен $\pi/4$, другой угол $\pi-\pi/4=3\pi/4$. ●

**7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.** Если прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны, то $\varphi=0$ и $\operatorname{tg}\varphi=0$. В этом случае числитель правой части формулы (7) равен нулю: $k_2-k_1=0$, откуда

$$k_2=k_1.$$

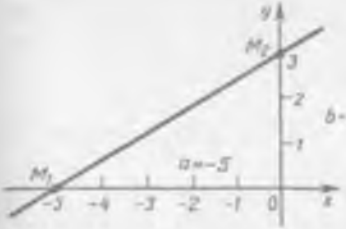



Рис. 31

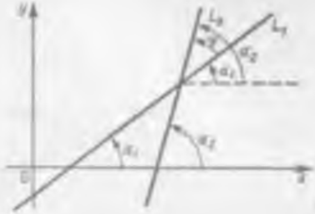



Рис. 32

Таким образом, условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Если прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны, т. е. $\varphi=\pi/2$, то из (7) находим $\operatorname{ctg}\varphi=(1+k_2k_1)/(k_2-k_1)$. В этом случае $\operatorname{ctg}\pi/2=0$ и $1+k_2k_1=0$, откуда

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Таким образом, условие перпендикулярности двух прямых состоит в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

○ **Пример 8.** Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

Решение. Приведя уравнение каждой прямой к виду уравнения с угловым коэффициентом (2), получаем

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6} \quad \text{и} \quad y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{30}.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны $k_1=$ $=k_2=2/3$. Отсюда заключаем, что прямые параллельны.

**Пример 9.** Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Решение. После приведения уравнений к виду уравнения с угловым коэффициентом (2) получаем

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{7}{5} \quad \text{и} \quad y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}.$$

Здесь $k_1=3/5$, $k_2=-5/3$. Так как $k_2=-1/k_1$, то прямые перпендикулярны. ●

**8. Расстояние от точки до прямой. Теорема 2.7.** *Расстояние $d$ от данной точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $L$,*

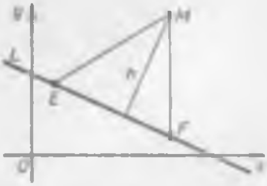


Рис. 33

*заданной уравнением* $Ax+By+C=0$, *на плоскости определяется формулой*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (8)$$

Идея доказательства этой формулы состоит в следующем. Рассмотрим на прямой $L$ две произвольные точки $E$ и $F$ с координатами $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Вычислим длину отрезка $EF$ и площадь $S_{MEF}$ треугольника $MEF$ (формулы для нахождения длины отрезка и площади треугольника известны). Тогда расстояние от точки $M$ до прямой $L$ — это длина высоты $h$ треугольника $MEF$ (рис. 33):

$$d=h=\frac{2S_{MEF}}{|EF|}.$$

□ Доказательство. Запишем уравнение прямой $L$ через координаты $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ точек $E$ и $F$ по формуле (4):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

откуда

$$(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)=0. \qquad (9)$$

Площадь $S_{MEF}$ треугольника $MEF$ запишем по формуле (5) из § 2:

$$2S_{MEF}=|[(x_2-x_1)(y_0-y_1)-(x_0-x_1)(y_2-y_1)]|.$$

Кроме того,

$$|EF|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Тогда

$$d=\frac{|[(x_2-x_1)(y_0-y_1)-(x_0-x_1)(y_2-y_1)]|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}. \qquad (10)$$

С помощью уравнения (9) выразим теперь коэффициенты $A$, $B$, $C$ уравнения $Ax+By+C=0$ прямой $L$ через координаты точек $E$ и $F$. Для этого перепишем уравнение (9) в виде

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+[x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)]=0,$$

откуда получаем, что $A=y_1-y_2$; $B=x_2-x_1$; $C=x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)$. Тогда

$$2S_{MEF}=|Ax_0+By_0+C|;\quad |EF|=\sqrt{A^2+B^2}$$

и формулу (10) можно переписать в виде

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

что и требовалось доказать. ■

○ **Пример 10.** Пусть прямая $L$ задана уравнением $3x-4y+10=0$ и дана точка $M(4;\ 3)$. Найти расстояние $d$ от точки $M$ до прямой $L$.

Решение. По формуле (8) имеем

$$d=\frac{|3\cdot 4-4\cdot 3+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

Таким образом, искомое расстояние равно 2. ●

**9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.** Пусть прямые $L_1$ и $L_2$ заданы уравнениями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим эти уравнения как систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными $x$ и $y$. Решая эту систему, найдем

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Пусть $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$. Тогда найденные формулы дают решение системы (11). Это значит, что прямые $L_1$ и $L_2$ не параллельны и пересекаются в одной точке с координатами $(x;\ y)$.

Пусть теперь $A_1B_2-A_2B_1=0$. Возможны два случая: 1) $A_2C_1-A_1C_2=0$ и $B_1C_2-B_2C_1=0$; 2) $A_2C_1-A_1C_2\neq 0$ $(B_1C_2-B_2C_1\neq 0)$.

В первом случае имеем $A_2=\mu A_1$, $B_2=\mu B_1$, $C_2=\mu C_1$ или

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\mu,$$

где $\mu\neq 0$ — некоторое число. Это означает, что коэффициенты уравнений пропорциональны, откуда следует, что второе уравнение получается из первого умножением на число $\mu$. В этом случае прямые $L_1$ и $L_2$ совпадают, т. е. уравнения определяют одну и ту же прямую. Очевидно, система (11) имеет бесконечно много решений.

Во втором случае, если, например, $A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0$, то, допустив, что система имеет решение $(x_0;\ y_0)$, получим противоречие. В самом деле, подставляя в уравнения вместо $x$ и $y$ значения $x_0$ и $y_0$, умножая первое уравнение на $A_2$, второе — на $A_1$ и вычитая из первого уравнения второе, получим $A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, что противоречит предположению. Таким образом, система (11) решения не имеет. В этом случае прямые $L_1$ и $L_2$ не имеют точек пересечения, т. е. они параллельны.

Итак, две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо совпадают, либо параллельны.

**Упражнение.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно прямой $y = x + 1$. (*Отв.* $7x + 7y - 6 = 0$.)

**10. Примеры решения геометрических задач методом координат.** Рассмотрим геометрические задачи, которые удобно решать с помощью метода координат и которые довольно сложно решить чисто геометрическими методами.

○ **Пример 11.** Найти множество точек плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до двух противоположных вершин данного прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до двух других его вершин.

Решение. Введем на плоскости систему координат так, чтобы ее начало было центром данного прямоугольника (рис. 34). Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка искомого множества. Применяя формулу расстояния между двумя точками (4) из § 1, имеем

$$|MA|^2 + |MC|^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + (y+b)^2,$$

$$|MB|^2 + |MD|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем тождество $0 \equiv 0$. Следовательно, искомое множество точек — вся плоскость.

**Пример 12.** Установить, какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, идущими

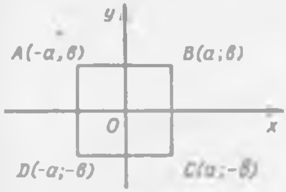



Рис. 34

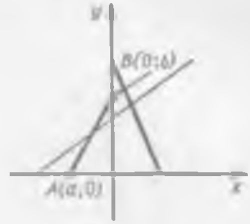



Рис. 35

по двум взаимно перпендикулярным дорогам с одинаковой скоростью.

Решение. Пусть первый пешеход движется вдоль оси $Ox$ из точки $A(a;\ 0)$ со скоростью $v$, а второй — вдоль оси $Oy$ из точки $B(0;\ b)$ с той же скоростью (рис. 35). Тогда в момент времени $t$ первый пешеход находится в точке $(a+vt;\ 0)$, а второй — в точке $(0;\ b+vt)$. Обозначим через $(x;\ y)$ координаты середины отрезка между пешеходами. В силу следствия из теоремы 2.5 получаем

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+vt}{2}, \\ y=\dfrac{b+vt}{2}. \end{cases}$$

Исключим из этих равенств $t$:

$$t=\frac{2x-a}{v},\quad t=\frac{2y-b}{v},$$

откуда

$$\frac{2x-a}{v}=\frac{2y-b}{v} \qquad \text{или} \qquad y=x+\frac{b-a}{2}.$$

Таким образом, искомая линия — прямая, параллельная биссектрисе угла между направлениями движения пешеходов.

Замечание. Отметим, что если скорости пешеходов не равны, то, аналогично, полученное уравнение искомой линии будет иметь вид

$$y=\frac{v_2}{v_1}x+\frac{bv_1-av_2}{2},$$

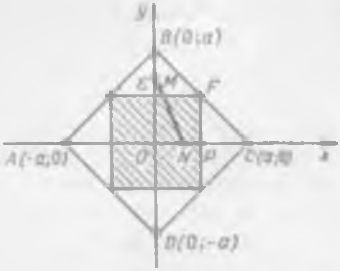



Рис. 36

т. е. это также прямая, но угол ее наклона к оси $Ox$ уже другой (здесь $v_1$ и $v_2$ — скорости движения пешеходов).

**Пример 13.** Найти множество середин отрезков, концы которых лежат на разных диагоналях квадрата.

Решение. Выберем систему координат, как показано на рис. 36, где $ABCD$ — данный квадрат. Пусть точки $M(0; y)$ и $N(x; 0)$ — произвольные точки соответственно на отрезках $OB$ и $OC$ (половинах диагоналей квадрата). Тогда

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant a, \end{cases}$$

отрезок $MN$ лежит в I четверти и середины отрезков $MN$ имеют координаты $(x/2;\ y/2)$, где

$$\begin{cases} 0 \leqslant x/2 \leqslant a/2, \\ 0 \leqslant y/2 \leqslant a/2, \end{cases}$$

т. е. заполняют квадрат $OEFP$. Воспользовавшись симметрией данного квадрата, получаем, что искомое множество — квадрат с вершинами в середине его сторон. ●

С помощью метода координат легко решаются и многие задачи школьного курса математики. Приведем пример.

○ **Пример 14.** Даны две окружности, имеющие внешнее касание. Установить, какое множество точек образуют точки, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины.

Геометрическое решение. Точки, принадлежащие прямой, перпендикулярной линии центров и проходящей через общую точку этих окружностей, обладают указанным свойством. Действительно, согласно свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности (рис. 37),

$$|MA| = |MC| \quad \text{и} \quad |MC| = |MB|,$$

откуда $|MA| = |MB|$.


Рис. 37

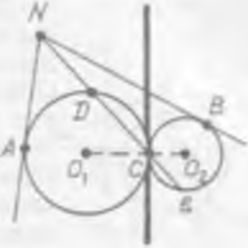



Рис. 38

Докажем, что точки, не принадлежащие этой прямой, не обладают рассматриваемым свойством. Для этого возьмем произвольную точку $N$ плоскости, не лежащую на перпендикуляре к линии центров $O_1O_2$, проведенном через $C$ — общую точку двух окружностей (рис. 38). Проведем прямую $NC$. По теореме о произведении длины секущей на ее внешнюю часть[1] получаем

$$|NA|^2=|NC||ND| \quad \text{и} \quad |NB|^2=|NC||NE|,$$

т. е. $|NA| \neq |NB|$.

Итак, искомое множество точек, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины, есть прямая, перпендикулярная линии центров и проходящая через общую точку этих окружностей.

Возникает вопрос: каково множество точек, из которых можно провести к двум окружностям касательные равной длины (для произвольно расположенных окружностей)?

Если взять две пересекающиеся в точках $C$ и $D$ окружности (рис. 39), то легко показать, что длины отрезков касательных, проведенных из точки $M$ прямой $CD$, равны (речь идет о тех точках этой прямой, из которых можно провести касательные). Действительно, по теореме о произведении длины отрезка секущей на ее внешнюю часть,

$$|AM|^2=|MD||MC| \quad \text{и} \quad |MB|^2=|MD||MC|.$$

Следовательно, $|AM|=|MB|$.

---

[1] Если из точки, лежащей вне окружности, проведены к ней касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению длины всей секущей на длину ее внешней части.

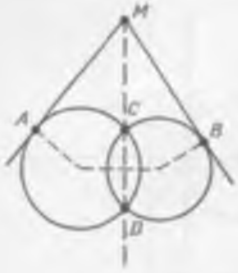



Рис. 39

Теперь следует доказать, что вне прямой $CD$ нет точек, обладающих указанным свойством. Однако оказывается, что сделать это чисто геометрически трудно.

Если же рассматривать эту задачу для случая двух непересекающихся окружностей, то оказывается, что при решении трудно опираться на приведенные теоремы о свойствах касательной и приходится искать новый метод решения. Кроме того, надо учесть, что теорема о квадрате длины касательной не входит в обязательный школьный курс.

Таким образом, чисто геометрическое решение задачи довольно сложно. Применим метод координат. Итак, решим следующую задачу.

**Пример 15** (обобщение примера 14). Даны две окружности. Выяснить, какое множество точек образуют те точки, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины.

Решение. Если $MN$ и $MP$ — отрезки касательных к окружностям с центрами $O_1$ и $O_2$ (рис. 40), то надо найти множество точек $M$ таких, что $|MN|=|MP|$. Заметив, что

$$|MN|^2=|MP|^2; \ |MN|^2=|MO_1|^2-|O_1N|^2; \ |MP|^2= \\ =|MO_2|^2-|O_2P|^2,$$

перепишем условие задачи так:

$$|MO_1|^2-|O_1N|^2=|MO_2|^2-|O_2P|^2,$$

или

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=|O_1N|^2-|O_2P|^2,$$

а поскольку

$$|O_1N|^2-|O_2P|^2=R^2-r^2=C=\text{const},$$

задачу можно сформулировать иначе так.

**Пример 16.** Найти множество точек, для которых разность квадратов расстояний до двух заданных точек $O_1$ и $O_2$ постоянна.

Решение с помощью метода координат. Направим ось абсцисс по прямой $O_1O_2$ и начало координат выберем в середине отрезка $O_1O_2$ (рис. 41).

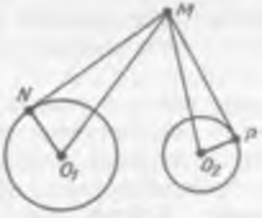



Рис. 40

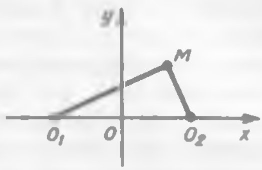



Рис. 41

Пусть $|O_1O_2|=d$; тогда $\left(-\frac{d}{2};\ 0\right)$ — координаты точки $O_1$, а $\left(\frac{d}{2};\ 0\right)$ — координаты точки $O_2$. Возьмем произвольную точку плоскости $M(x;\ y)$. По формуле расстояния между двумя точками (4) из § 1 получим

$$|MO_1|^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2;\quad |MO_2|^2=\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2;$$

отсюда

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2-\left(x-\frac{d}{2}\right)^2-y^2=2xd.$$

Так как $|MO_1|^2-|MO_2|^2=C$, то для искомого множества точек получим уравнение первой степени:

$$2xd=C.$$

Если $d\neq 0$, то искомые точки принадлежат прямой $x=\frac{C}{2d}$, параллельной оси ординат, т. е. прямой, перпендикулярной прямой $O_1O_2$.

Обратно: взяв точки, принадлежащие прямой $x=\frac{C}{2d}$, и выполнив все преобразования в обратном порядке, получим, что для любой точки этой прямой

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=C.$$

Итак, получен следующий результат. Множество точек, разность квадратов расстояний которых до двух заданных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей заданные точки.

Теперь возможно легко ответить на вопрос примера 15 о множестве точек, из которых можно провести к двум окружностям касательные равной длины для любого случая взаимного расположения окружностей.

Решение. Используем результат примера 16, в котором доказано, что искомое множество — прямая (возможно, без некоторого интервала). Поэтому достаточно выяснить, где проходит эта прямая, например найти две ее точки. Кроме того, воспользуемся тем фактом, что общие точки двух окружностей удовлетворяют условию задачи — из них можно провести касательные длины нуль. Рассмотрим все возможные случаи взаимного расположения данных окружностей.

1) Пусть данные окружности расположены одна вне другой (рис. 42). Точки $M$ и $N$ (середины их общих внешних касательных) удовлетворяют условию, поэтому прямая $MN$ — искомая. (Как следствие (см. пример 16) отсюда получаем, что прямая, проходящая через середины общих внешних касательных к двум окружностям, перпендикулярна их линии центров.)

2) Пусть данные окружности касаются внешним образом (рис. 43). Рассуждая аналогично, заметим, что середина $M$ общей внешней касательной и точка $N$ касания окружностей удовлетворяют условию (вместо точки $N$ можно было взять середину второй общей внешней касательной, которая на рис. 43 изображена штриховой линией), поэтому прямая $MN$ — искомое множество. (Одновременно мы получили, что прямая, проходящая через середину общей внешней касательной двух окружностей перпендикулярно их линии центров, проходит и через их общую точку.)

3) Если окружности пересекаются (рис. 44), то, так как точки $M$ и $A$ удовлетворяют условию, искомой является прямая $MA$ без интервала $AB$ (из точек этого интервала нельзя провести касательные к окружностям). Кроме того, тем самым доказано, что точки $M$, $A$ и $B$ лежат на одной прямой, которая перпендикулярна линии центров.

4) Пусть теперь окружности касаются внутренним образом (рис. 45). Искомая прямая — общая касательная, так как она проходит через точку $N$, удовлетворяющую условию, и перпендикулярна линии центров (рис. 45). Это легко показать и иначе: для любой

точки этой прямой $|MA|=|MN|=|MB|$, где $A$ и $B$ — точки касания.

5) Теперь рассмотрим случай, когда одна окружность лежит внутри другой и их центры $O_1$ и $O_2$ не совпадают (рис. 46).

Сведем этот случай к случаю 3). Для этого проведем окружность с центром $O_3$, не принадлежащим прямой $O_1O_2$, которая пересекает обе данные окружности. Рассмотрим прямые, на которых лежат общие хорды окружностей с центрами $O_1$ и $O_3$, $O_2$ и $O_3$. Пусть $M$ — точка пересечения этих прямых. По доказанному в случае 3),

$$|MO_1|^2-|MO_3|^2=R_1^2-R_3^2; \quad |MO_2|^2-|MO_3|^2= \\ =R_2^2-R_3^2,$$

откуда

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=R_1^2-R_2^2,$$

т. е. точка $M$ принадлежит искомому множеству, поэтому все искомое множество — прямая, проходящая через точку $M$ перпендикулярно прямой $O_1O_2$.

6) Если окружности являются концентрическими, то искомое множество пусто. В самом деле, множество точек, из которых можно провести к первой окружности касательные данной длины,— окружность, концентрическая данной; для второй окружности — также концентрическая ей окружность, но другого радиуса (рис. 47). Общих точек у этих множеств нет.

З а м е ч а н и е. Прямая $x=(R^2-r^2)/(2d)$ называется *радикальной осью* двух данных окружностей. Из каждой ее точки, внешней по отношению к данным двум окружностям, можно провести к ним равные касательные. ●

Теперь можно без труда решить следующую задачу (чисто геометрическое решение которой также довольно трудно).

○ **Пример 17.** Даны три окружности, каждая из которых пересекает две другие. Доказать, что прямые, которым принадлежат их общие хорды, пересекаются в одной точке.

Р е ш е н и е. Задача решается аналогично случаю 5) из примера 16 (рис. 48). Точка $M$ пересечения общих хорд окружностей с центрами $O_1$ и $O_2$ и $O_2$ и $O_3$

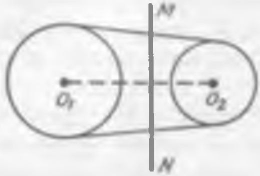



Рис. 42

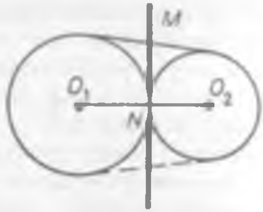



Рис. 43

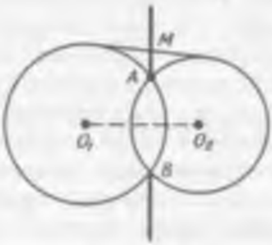



Рис. 44

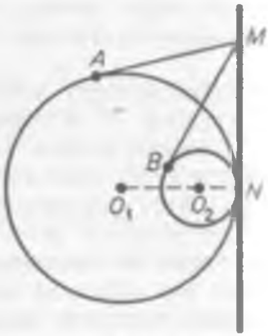



Рис. 45

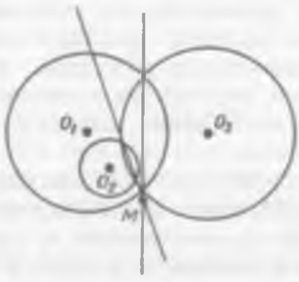



Рис. 46

Рис. 47

обладает тем свойством, что разность квадратов расстояний от нее до точек $O_1$ и $O_2$ ($O_2$ и $O_3$) постоянна, а именно

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=R_1^2-R_2^2,$$
$$|MO_2|^2-|MO_3|^2=R_2^2-R_3^2.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$|MO_1|^2-|MO_3|^2=R_1^2-R_3^2,$$

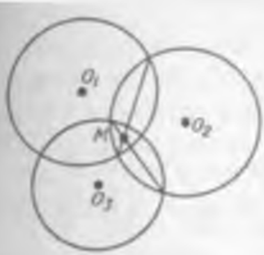



Рис. 48

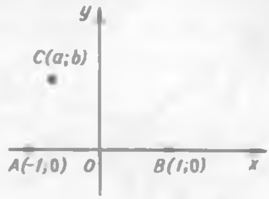



Рис. 49

т. е. точка $M$ должна лежать на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей с центрами $O_1$ и $O_3$, и принадлежать общей хорде этих окружностей. Следовательно, точка $M$ лежит на пересечении трех прямых, которым принадлежат их общие хорды.

**Пример 18.** Найти множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин $A$ и $B$ треугольника $ABC$ равна квадрату расстояния до третьей его вершины — точки $C$.

Решение. Введем систему координат, как показано на рис. 49; вершина $A$ имеет координаты $(-1;\ 0)$, вершина $B$ — координаты $(1;\ 0)$. Пусть вершина $C$ имеет координаты $(a;\ b)$ и $M(x;\ y)$ — произвольная точка искомого множества. Тогда условие задачи можно записать так:

$$|MA|^2+|MB|^2=|MC|^2.$$

Применив формулу расстояния между двумя точками, получим

$$\left[(x+1)^2+y^2\right]+\left[(x-1)^2+y^2\right]=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, можно преобразовать последнее уравнение так:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=2\left(a^2+b^2-1\right). \qquad (12)$$

Теперь видно, что если $a^2+b^2-1>0$, то искомое множество — окружность с центром в точке $D(-a;\ -b)$ и радиусом $\sqrt{2a^2+2b^2-2}$; если $a^2+b^2=1$, то искомое множество состоит из одной точки $D(-a;\ -b)$; если $a^2+b^2-1<0$, то искомое множество пусто.

Заметим, что точка $D$ симметрична вершине $C$ относительно начала координат $O$ (рис. 50). Отсюда вытекает, что центр $D$ найденной окружности — вер-

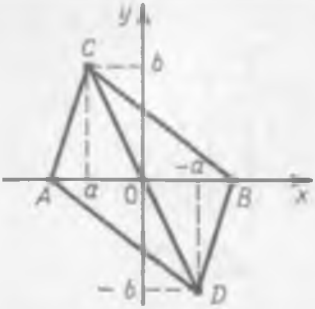



Рис. 50

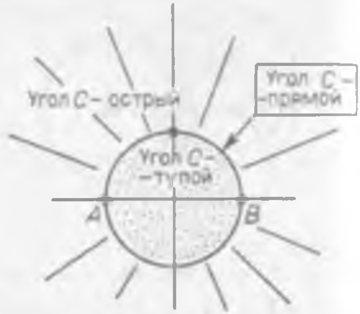



Рис. 51

шина параллелограмма $ACBD$, противоположная вершине $C$.

Выясним теперь смысл условий, при которых получены разные ответы на вопрос задачи. Известно, что $a^2+b^2=1$ — уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат, неравенства $a^2+b^2>1$ и $a^2+b^2<1$ задают соответственно внешнюю область и внутренность единичного круга, ограниченного этой окружностью.

Отсюда вытекает, что искомое множество точек — окружность, точка или пустое множество, в зависимости от того, лежит ли вершина $C$ вне единичного круга с центром в начале координат, на ограничивающей его окружности (конечно, без точек $A$ и $B$) или внутри этого круга соответственно.

Если вершина $C$ лежит на указанной окружности, то угол $ACB=90^\circ$ как вписанный в нее угол, опирающийся на диаметр. Поэтому исследование условий, при которых получаются разные ответы, заключается в выяснении того, острый, прямой или тупой угол $C$ в треугольнике $ABC$ (рис. 51).

Наконец, заметим, что

$$2(a^2+b^2-1)=\left[(a-1)^2+b^2\right]+\left[(a+1)^2+b^2\right]-4$$

(чтобы в этом убедиться, надо раскрыть скобки в правой части последнего равенства и привести подобные члены). Но

$$(a-1)^2+b^2=|BC|^2;\ (a+1)^2+b^2=|AC|^2;\ 4=|AB|^2,$$

поэтому радиус окружности (12) равен $\sqrt{|BC|^2+|AC|^2-|AB|^2}$.

Итак, если угол при вершине $C$ острый, то искомое множество представляет собой окружность радиуса $\sqrt{|BC|^2+|AC|^2-|AB|^2}$ с центром в вершине $D$ параллелограмма $ACBD$;

если угол при вершине $C$ прямой, то искомое множество — вершина $D$ параллелограмма $ACBD$;

если угол при вершине $C$ тупой, то искомое множество пусто.

Замечание. Попутно установлено, что если $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника, то:

условие $a^2+b^2>c^2$ означает, что угол против стороны $c$ острый;

условие $a^2+b^2=c^2$ означает, что угол против стороны $c$ прямой;

условие $a^2+b^2<c^2$ означает, что угол против стороны $c$ тупой. ●

Последние задачи — частные случаи следующей общей теоремы, которую также можно доказать с помощью метода координат.

**Теорема о квадратах расстояний.** *Если заданы точки $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ на плоскости и числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$, $\mu$, то множество точек $M$, для которых выполняется условие*

$$\lambda_1|MA_1|^2+\lambda_2|MA_2|^2+\ldots+\lambda_n|MA_n|^2=\mu,$$

*является либо окружностью, либо прямой, либо одной точкой, либо всей плоскостью, либо пустым множеством*[1].

Рассмотрим, как можно с помощью метода координат решить следующую задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в 1970 г. (МГУ, химфак).

○ **Пример 19.** В треугольнике $ABC$ известно, что угол $ACB=60°$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$. На стороне $AB$ взята точка $D$ так, что $|AD|=2|DB|$, причем $|CD|=2\sqrt{2}$. Найти площадь $S_{ABC}$.

Решение. Пусть $O$ — центр описанной окружности. Введем систему координат с началом в точке $E$

---

[1] См. § 2 кн.: *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. М., 1978.

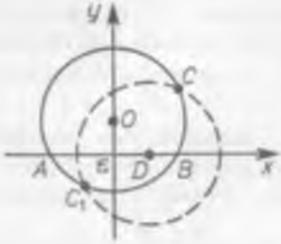



Рис. 52

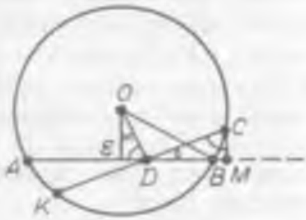



Рис. 53

(середина отрезка $AB$), оси координат направим, как показано на рис. 52. Вычислим длины следующих отрезков:

$$|AB|=R\sqrt{3}=6;\ \ |DE|=\frac{1}{6}|AB|=1;\ \ |OE|=\frac{R}{2}=\sqrt{3}.$$

В выбранной системе координат точка $C$ имеет координаты $(x;\ y)$, координаты точек $O$ и $D$ соответственно равны $(0;\ \sqrt{3})$ и $(1;\ 0)$.

Для вычисления площади треугольника $ABC$ нужно найти его высоту, т. е. ординату точки $C$. Поскольку точка $C$ принадлежит описанной окружности, ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2+(y-\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2.$$

Для нахождения ординаты точки $C$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+(y-\sqrt{3})^2=12, \\ (x-y)^2+y^2=8. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $y=\sqrt{2}$ (значение $y=-\sqrt{2}$, также удовлетворяющее системе, не годится, так как в этом случае $\widehat{AC_1B}=120°$, что не соответствует условию задачи).

Итак, высота треугольника $ABC$ равна $\sqrt{2}$, следовательно,

$$S_{ABC}=6\sqrt{2}/2=3\sqrt{2}.$$

Приведем теперь для сравнения геометрическое решение этой задачи (рис. 53). Так же, как и в первом решении, найдем сначала, что $|AB|=6$; тогда $|AD|=4$, $|BD|=2$ ($E$ — середина хорды $AB$). По теореме о хордах, пересекающихся внутри круга,

$$|AD||DB|=|DC||KD|,$$

откуда

$$|KD|=\frac{|AD||DB|}{|DC|}=2\sqrt{2}=|CD|,$$

т. е. $D$ — середина хорды $KC$. Отсюда сразу получаем, что

$$[OD]\perp[KC]^{1)}. \qquad (13)$$

Пусть $CM$ — высота треугольника $ABC$, тогда $\widehat{CDM}=\widehat{EOD}$ (из (13) и из того, что $[OE]\perp[AB]$, следует, что рассматриваемые углы имеют соответственно перпендикулярные стороны). Но легко найти угол $EOD$:

$$\widehat{EOB}=60^\circ;\quad \frac{|ED|}{|BD|}=\frac{1}{2}=\frac{|OE|}{|OB|},$$

поэтому $OD$ — биссектриса угла $EOB$, значит,

$$\widehat{EOD}=30^\circ=\widehat{CDM},$$

откуда следует, что $|CM|=(1/2)|CD|=\sqrt{2}$ и задача решена. ●

Приведенные примеры показывают, что использование метода координат при решении геометрических задач оказывается очень полезным.

Его преимущества очевидны особенно в тех случаях, когда решение задачи чисто геометрическими способами сложно или требует применения мало известных теорем; координатный метод позволяет получать решение задачи в общем виде, в то время как геометрическое решение требует рассмотрения частных случаев отдельно (так, в примере 19 чисто

---

[1] Обозначение $[OD]$ означает отрезок прямой с концами $O$ и $D$.

геометрическое решение при других числовых данных очень трудно).

?

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$?

2. Выведите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Выведите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

4. Что такое уравнение прямой «в отрезках»?

5. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

6. Как определяется расстояние от точки до прямой?

7. Докажите, что уравнение прямой всегда выражается уравнением первой степени и, обратно, всякое уравнение первой степени есть уравнение прямой.

8. В чем состоит геометрический смысл параметров $k$ и $b$ в уравнении прямой с угловым коэффициентом?

9. Исследуйте общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ при $A=0$, при $B=0$ и при $C=0$.

10. Как выражаются уравнения прямых, параллельных осям $Ox$ и $Oy$, а также уравнения самих осей координат?

11. Как привести уравнение с угловым коэффициентом к общему уравнению прямой?

12. Как можно найти точку пересечения двух прямых?

## § 4. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим три вида линий: эллипс, гиперболу и параболу,— уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. Такие линии называются *линиями второго порядка.*

**1. Эллипс.**

**Определение.** *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, бо́льшая расстояния между фокусами.*

Для вывода уравнения эллипса введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам. Выведем уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Обозначим фокусы эллипса через $F_1$ и $F_2$ (рис. 54). Пусть $M$ — произвольная точка эллипса. Расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами обозначим через $2c$, сумму расстояний от точки $M$ до фокусов — через $2a$. Так как, по определению,

$|F_1M|+|F_2M|>|F_1F_2|$, то $2a>2c$ или $a>c$.

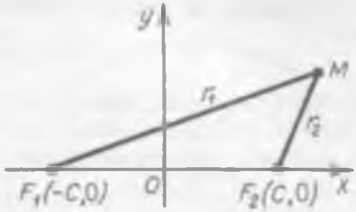


Рис. 54

Обозначим, далее, через $r_1$ и $r_2$ расстояние от точки $M$ до фокусов ($r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$). Числа $r_1$ и $r_2$ называются *фокальными радиусами* точки $M$. Из определения следует, что точка $M(x;\ y)$ лежит на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1+r_2=2a. \tag{1}$$

Чтобы получить искомое уравнение эллипса, нужно в равенстве (1) заменить переменные $r_1$ и $r_2$ их выражениями через координаты $x$ и $y$. Так как $F_1$ и $F_2$ расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$; приняв это во внимание и применяя формулу (4) § 1, находим

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть искомое уравнение эллипса. Однако для практического использования оно неудобно, поэтому уравнение эллипса приводят обычно к более простому виду. Для этого перенесем второй корень уравнения (3) в правую часть уравнения, а затем возведем обе части равенства в квадрат. Получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{4}$$

Снова возведем обе части равенства в квадрат:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Отсюда

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{5}$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{a^2-c^2}, \tag{6}$$

геометрический смысл которой раскрыт далее. Так как, по условию, $a>c$, то $a^2-c^2>0$ и, следовательно, $b$ — число положительное. Из равенства (6) имеем

$$b^2=a^2-c^2,$$

поэтому уравнение (5) можно переписать в виде

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Разделив обе части на $a^2b^2$, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Так как уравнение (7) получено из уравнения (3), то координаты любой точки эллипса, удовлетворяющие уравнению (3), будут удовлетворять и уравнению (7). Однако при упрощении уравнения (3) обе его части дважды были возведены в квадрат и могли появиться «лишние» корни и уравнение (7) могло оказаться неравносильным уравнению (3). Убедимся в том, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют и уравнению (3), т. е. уравнения (3) и (7) равносильны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что величины $r_1$ и $r_2$ для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), удовлетворяют соотношению (1). Действительно, пусть координаты $x$ и $y$ некоторой точки удовлетворяют уравнению (7). Тогда, подставляя в выражение (2) для $r_1$ значение $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, полученное из (7), после несложных преобразований найдем $r_1=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}$. Так как $|x|\leqslant a$ [это следует из (7)] и $\frac{c}{a}<1$, то $a+\frac{c}{a}x>0$ и поэтому $r_1=a+\frac{c}{a}x$.

Аналогично найдем, что $r_2=a-\frac{c}{a}x$. Складывая почленно эти равенства, получаем соотношение (1), что и требовалось установить. Таким образом, любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), принадлежит эллипсу, и наоборот, т. е. (7) — уравнение эллипса. Уравнение (7) называется *каноническим* (или *простейшим*) уравнением эллипса. Таким образом, эллипс — линия второго порядка.

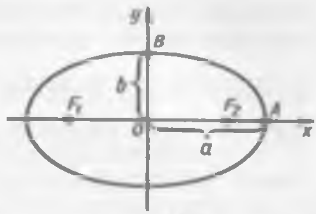



Рис. 55

Исследуем теперь форму эллипса по его каноническому уравнению (7). Заметим, что уравнение (7) содержит члены только с четными степенями координат $x$ и $y$, поэтому эллипс симметричен относительно осей $Ox$ и $Oy$, а также относительно начала координат. В силу сказанного, будет известна форма всего эллипса, если установить вид той его части, которая лежит в I координатном угле. Для этого разрешим уравнение (7) относительно $y$: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и, учитывая, что в I четверти $y \geqslant 0$, рассмотрим уравнение

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{8}$$

Из равенства (8) вытекают следующие утверждения:

1) если $x=0$, то $y=b$. Следовательно, точка $(0; b)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через $B$;

2) при возрастании $x$ от 0 до $a$ $y$ уменьшается;

3) если $x=a$, то $y=0$. Следовательно, точка $(a; 0)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через $A$;

4) при $x>a$ получаем мнимые значения $y$. Следовательно, точек эллипса, у которых $x>a$, не существует.

Итак, частью эллипса, расположенной в I координатном угле, является дуга $BA$[1].

Отражая эту дугу симметрично относительно обеих координатных осей, получаем весь эллипс (рис. 55).

Замечание. Если $a=b$, то уравнение (7) принимает вид $x^2+y^2=a^2$. Это уравнение окружности

---

[1] В гл. V будет введено понятие направления выпуклости графика функции $y=f(x)$ и показано, что дуга $BA$ направлена выпуклостью вверх.

радиуса $a$. Таким образом, окружность — частный случай эллипса. Заметим, что эллипс можно получить из окружности радиуса $a$, если сжать ее в $\frac{a}{b}$ раз вдоль оси $Oy$. При таком сжатии точка $(x; y)$ перейдет в точку $(x; y_1)$, где $y_1 = y\frac{b}{a}$. Подставляя $y = y_1\frac{a}{b}$ в уравнение окружности, получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Оси симметрии эллипса называются его *осями*, а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром* эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются его *вершинами*. Так как на основании равенства (6) $a \geqslant b$, то $2a$ — длина большой оси симметрии эллипса, $2b$ — малой оси. Следовательно, числа $a$ и $b$ являются длинами соответственно большой и малой полуосей эллипса.

Введем еще одну величину, характеризующую форму эллипса.

**Определение.** *Эксцентриситетом эллипса называется отношение* $\frac{c}{a}$, *где* $c$ — *половина расстояния между фокусами,* $a$ — *большая полуось эллипса.*

Эксцентриситет обычно обозначают буквой $\varepsilon$: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как $c < a$, то $0 \leqslant \varepsilon < 1$, т. е. эксцентриситет эллипса меньше единицы. Принимая во внимание, что $c^2 = a^2 - b^2$, найдем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Из последнего равенства легко получить геометрическое истолкование эксцентриситета эллипса. При очень малом $\varepsilon$ числа $a$ и $b$ почти равны, т. е. эллипс близок к окружности. Если же $\varepsilon$ близко к единице, то число $b$ мало по сравнению с числом $a$ и эллипс сильно вытянут вдоль большей оси. Таким образом, эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных — велики, т. е. близки к единице. Таким образом, планеты движутся почти по окружности, а кометы то приближаются к Солнцу (Солнце находится в одном из фокусов), то удаляются от него.

○ **Пример 1.** Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; 3)$ и $M_2(1; 3\sqrt{5}/2)$.

Решение. Пусть искомое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Этому уравнению удовлетворяют координаты данных точек. Подставляя вместо $x$ и $y$ сначала координаты точки $M_1$, а затем координаты точки $M_2$, получаем систему уравнений:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1;\quad \frac{1}{a^2}+\frac{45}{4b^2}=1.$$

Обозначая $\frac{1}{a^2}=m$; $\frac{1}{b^2}=n$, приходим к системе

$$\begin{cases} 4m+9n=1, \\ m+\frac{45}{4n}=1, \end{cases}$$

решая которую находим $m=1/16$, $n=1/12$, откуда $a^2=16$, $b^2=12$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1. \bullet$$

**Упражнение.** Покажите, что уравнение $3x^2+16y^2=$ $=192$ определяет эллипс. Найдите его полуоси, фокусы и эксцентриситет. (*Отв.* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1$; $a=8$; $b=2\sqrt{3}$; $F_1(2\sqrt{13};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{13};\ 0)$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{4}$.)

**2. Гипербола.**

**Определение.** *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности*

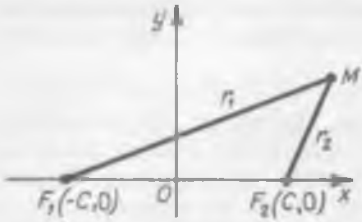


Рис. 56

*расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.*

Для вывода уравнения гиперболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам. Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат.

Обозначим фокусы гиперболы через $F_1$ и $F_2$ (рис. 56). Пусть точка $M$ — произвольная точка гиперболы. Расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами обозначим через $2c$, а модуль разности расстояний от точки $M$ до фокусов — через $2a$. Так как, по определению, $||F_1M|-|F_2M||<|F_1F_2|$, то $2a<2c$ или $a<c$. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* точки $M$ и обозначаются через $r_1$ и $r_2$. Из определения следует, что точка $M(x; y)$ лежит на данной гиперболе в том и только том случае, когда $|r_1-r_2|=2a$. Отсюда

$$r_1-r_2=\pm 2a. \qquad (9)$$

По аналогии с эллипсом, чтобы получить искомое уравнение гиперболы, нужно в равенстве (9) заменить переменные $r_1$ и $r_2$ их выражениями через координаты $x$ и $y$. Так как фокусы $F_1$ и $F_2$ расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c; 0)$ и $(c; 0)$. По формуле (4) из § 1 находим

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2};\quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (10)$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (11)$$

Уравнение (11) является искомым *уравнением гиперболы*. Упростим это уравнение аналогично тому, как было упрощено уравнение (3) для эллипса. Перенесем второй корень в правую часть уравнения, а затем возведем обе части в квадрат. Получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

или

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (12)$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2.$$

Отсюда

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \qquad (13)$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{c^2-a^2}, \qquad (14)$$

геометрический смысл которой будет раскрыт далее. Так как $c>a$, то $c^2-a^2>0$ и $b$ число положительное. Из равенства (14) имеем

$$b^2=c^2-a^2.$$

Уравнение (13) принимает вид

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (15)$$

Это и есть *каноническое уравнение гиперболы*.

Как и для эллипса, можно доказать равносильность уравнения (15) и (11). (Сделайте это самостоятельно.)

Исследуем формулу гиперболы по уравнению (15).

Так как уравнение (15) содержит члены только с четными степенями текущих координат $x$ и $y$, то по аналогии с эллипсом достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в I координатном угле. Разрешим уравнение (15) относительно $y$, считая $y\geqslant0$. Получаем

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (16)$$

Из равенства (16) вытекают следующие утверждения:

1) если $0\leqslant x<a$, то $y$ имеет мнимые значения, т. е. точек гиперболы с абсциссами $0\leqslant x<a$ нет;

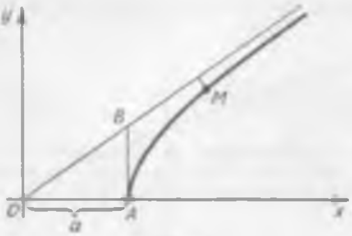



Рис. 57

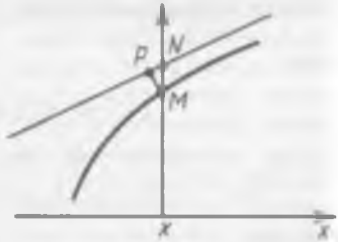



Рис. 58

2) если $x=a$, то $y=0$, т. е. точка $(a; 0)$ принадлежит гиперболе. Обозначим ее через $A$;

3) если $x>a$, то $y>0$. При возрастании $x$ также возрастает $y$ и $y\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Переменная точка $M(x; y)$ на гиперболе перемещается с ростом $x$ «вправо» и «вверх», причем ее начальное положение — точка $A(a; 0)$ (рис. 57). Здесь необходимо уточнить, как именно точка $M$ «уходит в бесконечность». Для этого кроме уравнения (16) рассмотрим уравнение

$$y=\frac{b}{a}x, \tag{17}$$

которое, как уже известно, определяет прямую с угловым коэффициентом $k=\frac{b}{a}$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в I координатном угле, изображена на рис. 57. Для ее построения можно использовать прямоугольный треугольник $OAB$ с катетами $|OA|=a$ и $|AB|=b$.

Покажем, что точка $M$, перемещаясь по гиперболе в бесконечность, неограниченно приближается к прямой (17), которая является *асимптотой гиперболы* [1].

Возьмем произвольное значение $x\,(x\geqslant a)$ и рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $N(x; Y)$, где $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и $Y=\frac{b}{a}x$. Точка $M$ лежит на гиперболе, точка $N$ — на

---

[1] В гл. V, § 15, п. 5 дано определение асимптоты графика функции $y=f(x)$ и показано, что прямая $y=\frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы, а в п. 4 рассмотрен вопрос о направлении выпуклости гиперболы.

прямой (17). Поскольку обе точки имеют одну и ту же абсциссу $x$, прямая, соединяющая точки $M$ и $N$, перпендикулярна оси $Ox$ (рис. 58). Найдем длину отрезка $MN$.

Прежде всего заметим, что при $x \geqslant a$

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Это означает, что при одной и той же абсциссе точка гиперболы лежит под соответствующей точкой асимптоты. Таким образом,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Из полученного выражения следует, что дробь при $x \to +\infty$ стремится к нулю, так как знаменатель растет, а числитель — постоянная величина $ab$. Следовательно, $|MN| = Y - y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Обозначим через $P$ основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на прямую (17); $MP$ — расстояние от точки $M$ до этой прямой. Очевидно, $|MP| < |MN|$, а так как $|MN| \to 0$, то и подавно $|MP| \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. точка $M$ неограниченно приближается к прямой (17). А это мы и хотели показать. Аналогичное рассуждение можно провести для любого координатного угла.

Итак, ветвь рассматриваемой гиперболы, лежащая в I координатном угле, проходит через точку $A(a; 0)$ и направлена «направо» и «вверх», асимптотически приближаясь к прямой $y = \frac{b}{a}x$ (см. рис. 57).

Вид всей гиперболы теперь можно легко установить с помощью симметрии относительно координатных осей (рис. 59). Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой) и имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, первая из которых уже рассмотрена, а вторая представляет собой ее симметричное отражение относительно оси $Ox$ (или оси $Oy$).

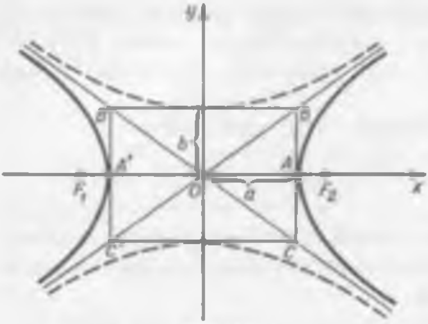



Рис. 59

Оси симметрии называются *осями гиперболы*, а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром гиперболы*. Одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются ее *вершинами* (на рис. 59 они обозначены буквами $A'$ и $A$). Эта ось называется *действительной осью* гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется *мнимой осью* гиперболы. Прямоугольник $BB'C'C$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 59) называется *основным прямоугольником* гиперболы. Величины $a$ и $b$ называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

переставляя буквы $x$ и $y$, $a$ и $b$, можно привести к уравнению (15). Отсюда ясно, что оно определяет гиперболу, расположенную так, как показано на рис. 59 штриховыми линиями; вершины ее лежат на оси $Oy$. Эта гипербола называется *сопряженной* по отношению к гиперболе (15). Обе эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется *равносторонней*, и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Так как основной прямоугольник равносторонней гиперболы является квадратом, то асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

**Определение.** *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение* $\frac{c}{a}$, *где* $c$ — *половина расстояния между фокусами,* $a$ — *действительная полуось гиперболы.*

Эксцентриситет гиперболы (как и эллипса) обозначим буквой $\varepsilon$. Так как $c>a$, то $\varepsilon>1$, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы. Принимая во внимание, что $c^2=a^2+b^2$, найдем

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$

Из последнего равенства легко получить геометрическое истолкование эксцентриситета гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, т. е. ближе он к единице, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, а это означает, что основной прямоугольник более вытянут в направлении действительной оси. Таким образом, эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

Для равносторонней гиперболы ($a=b$) получаем $\varepsilon=\sqrt{2}$.

○ **Пример 2.** Дано уравнение гиперболы $3x^2-4y^2=12$. Найти ее действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет; составить уравнение ее асимптот.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду

$$\frac{3x^2}{12}-\frac{4y^2}{12}=1, \text{ или } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,$$

откуда находим, что действительная полуось $a=2$, а мнимая полуось $b=\sqrt{3}$. Так как асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm\frac{b}{a}x$, фокусы — координаты $(-c; 0)$ и $(c, 0)$; эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$, а $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$, то для данной гиперболы получаем координаты фокусов $(-\sqrt{7}; 0)$ и $(\sqrt{7}; 0)$; эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{a}$ и уравнение асимптот $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x$. ●

**Упражнение.** Составьте уравнение гиперболы, если известно, что расстояние между ее вершинами равно 16 и фокусы ее находятся в точках $(-10; 0)$ и $(10; 0)$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.\right)$

В следующем пункте рассмотрим важное свойство эллипса и гиперболы.

**3. Директрисы эллипса и гиперболы.**

**Определение** 1. *Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии* $\frac{a}{\varepsilon}$ *от него, называются директрисами эллипса (здесь a — большая полуось, ε — эксцентриситет эллипса).*

Уравнение директрис эллипса, заданного каноническим уравнением (7), имеет вид

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для эллипса $\varepsilon<1$, то $\frac{a}{\varepsilon}>a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса, а левая — левее его левой вершины (рис. 60).

**Определение** 2. *Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии* $\frac{a}{\varepsilon}$ *от него, называются директрисами гиперболы (здесь a — действительная полуось, ε — эксцентриситет гиперболы).*

Уравнение директрис гиперболы, заданной каноническим уравнением (15), имеет вид

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для гиперболы $\varepsilon>1$, то $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между

центром и правой вершиной гиперболы, а левая — между центром и левой вершиной (рис. 61).

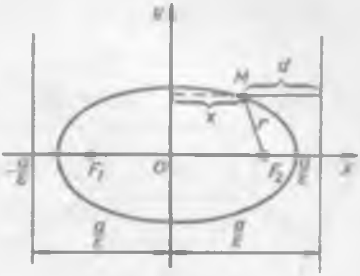



Рис. 60

С помощью понятий директрисы и эксцентриситета можно сформулировать общее свойство, присущее эллипсу и гиперболе. Имеют место следующие две теоремы.

**Теорема 2.8.** *Если $r$ — расстояние от произвольной точки $M$ эллипса до какого-нибудь фокуса, $d$ — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса.*

□ Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе $F_2$ и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса (см. рис. 60). Расстояние от точки $M$ до правой директрисы определяется равенством

$$d=\frac{a}{\varepsilon}-x, \tag{18}$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенства (2) и (4) имеем

$$r=r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

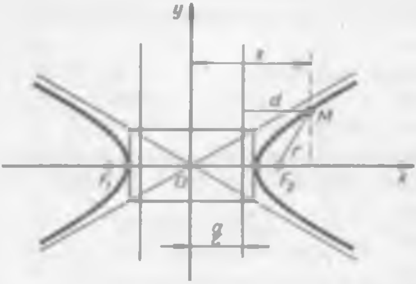
Полагая $c/a=\varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки $M$ до правого фокуса;

$$r=a-\varepsilon x. \tag{19}$$

Из соотношений (18) и (19) имеем

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{(a-\varepsilon x)\varepsilon}{a-\varepsilon x}=\varepsilon. \ ■$$

**Теорема 2.9.** *Если $r$ — расстояние от произвольной точки $M$ гиперболы до какого-нибудь фокуса,*



*$d$ — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.*

Рис. 61

□ Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе $F_2$ и правой директрисе. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы (рис. 61). Рассмотрим два случая.

1) Точка $M$ находится на правой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки $M$ до правой директрисы определяется равенством

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}, \tag{20}$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенств (10) и (12) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a.$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки $M$ до правого фокуса:

$$r = \varepsilon x - a. \tag{21}$$

Из отношений (20) и (21) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - a/\varepsilon} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon.$$

2) Точка $M$ находится на левой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки $M$ до правой директрисы определяется равенством

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Из равенств (10) и (12) имеем

$$r=r_1\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\left(\frac{c}{a}x-a\right).$$

Полагая $c/a=\varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки $M$ до правого фокуса:

$$r=-(\varepsilon x-a). \tag{23}$$

Из соотношений (22) и (23) имеем

$$\frac{r}{d}=\frac{-(\varepsilon x-a)}{-x+\dfrac{a}{\varepsilon}}=\frac{(-\varepsilon x+a)\varepsilon}{(-\varepsilon x+a)}=\varepsilon. \blacksquare$$

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий: *множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соответствующей директрисы является величиной постоянной, равной* $\varepsilon$, *есть эллипс, если* $\varepsilon<1$, *и гипербола, если* $\varepsilon>1$.

Возникает вопрос, что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $\varepsilon=1$. Оказывается, это новая линия второго порядка, называемая параболой.

**4. Парабола.**

**Определение.** *Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.*

Для вывода уравнения параболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус перпендикулярно директрисе, и будем считать положительным направлением направление от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. Выведем уравнение параболы в выбранной системе координат.

Пусть $M(x;\,y)$ — произвольная точка параболы. Обозначим через $r$ расстояние от точки $M$ до фокуса $F(r=|FM|)$, через $d$ — расстояние от точки $M$ до директрисы, а через $p$ — расстояние от фокуса до директрисы (рис. 62). Величину $p$ называют *параметром параболы*, его геометрический смысл раскрыт далее. Точка $M$ будет лежать на данной параболе в том и только том случае, когда

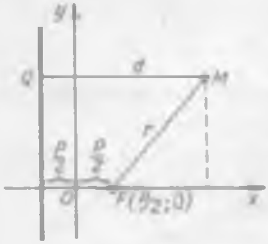



Рис. 62

$$r=d. \tag{24}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (24) заменить переменные $r$ и $d$ их выражениями через координаты $x$ и $y$. Фокус $F$ имеет координаты $(p/2;\ 0)$; поэтому по формуле (4) из § 1 находим

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}. \tag{25}$$

Обозначим через $Q$ основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на директрису. Очевидно, точка $Q$ имеет координаты $(-p/2;\ y)$; отсюда и из формулы (4) § 1 получаем

$$d=|MQ|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{26}$$

Заменяя в равенстве (24) $r$ и $d$ их выражениями (25) и (26), найдем

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{27}$$

Это и есть искомое уравнение параболы. Приведем уравнение параболы к более удобному виду; для этого возведем обе части равенства (27) в квадрат. Получаем

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

или

$$y^2=2px. \tag{28}$$

Проверим, что уравнение (28) после возведения в квадрат обеих частей равенства (27) не приобрело «лишних» корней. Для этого достаточно показать, что для любой точки, координаты $x$ и $y$ которой удовлетворяют уравнению (28), выполнено соотношение (24). Действительно, из уравнения (28) вытекает, что $x\geqslant 0$, поэтому для точек с неотрицательными абсциссами $d=\frac{p}{2}+x$. Подставляя значение $y^2$ из (28) в выражение (25) для $r$ и учитывая, что $x \geqslant 0$, получаем, что $r=\frac{p}{2}+x$, т. е. величины $r$ и $d$ равны, что и требовалось показать. Таким образом, уравнению (28) удовлетворяют координаты точек данной параболы и только они, т. е. уравнение (28) является уравнением данной параболы.

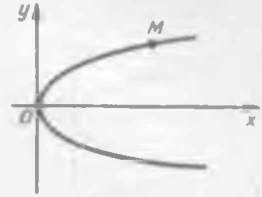


Рис. 63

Уравнение (28) называется *каноническим уравнением параболы*. Это уравнение второй степени. Таким образом, парабола есть линия второго порядка.

Исследуем теперь форму параболы по ее уравнению (28).

Так как уравнение (28) содержит $y$ только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси $Ox$. Следовательно, достаточно рассмотреть только ее часть, лежащую в верхней полуплоскости. Для этой части $y \geqslant 0$, поэтому, разрешая уравнение (28) относительно $y$, получаем

$$y=\sqrt{2px}. \tag{29}$$

Из равенства (29) вытекают следующие утверждения:

1) если $x<0$, то уравнение (29) дает мнимые значения $y$. Следовательно, левее оси $Oy$ ни одной точки параболы нет;

2) если $x=0$, то $y=0$. Таким образом, начало координат лежит на параболе и является самой «левой» ее точкой;

3) при возрастании $x$ возрастает и $y$, причем если $x \to +\infty$, то и $y \to +\infty$.

Таким образом, переменная точка $M(x; y)$, перемещающаяся по параболе, исходит из начала координат с ростом $x$ и движется «вправо» и «вверх», причем при $x \to +\infty$ точка $M$ бесконечно удаляется как от оси $Oy$, так и от оси $Ox$.

Симметрично отражая рассмотренную часть параболы относительно оси $Ox$, получаем всю параболу (рис. 63), заданную уравнением (28).

Точка $O$ называется *вершиной параболы*, ось симметрии (ось $Ox$) — *осью параболы*. Число $p$, т. е. параметр параболы, как известно, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Выясним, как влияет

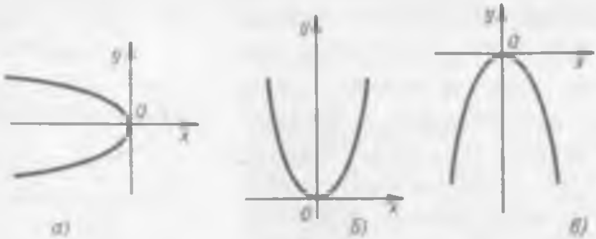



Рис. 64

параметр параболы на ее форму. Для этого возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например $x=1$, и найдем из уравнения (28) соответствующие значения ординаты: $y=\pm\sqrt{2p}$. Получаем на параболе две точки $M_1(1;\ +\sqrt{2p})$ и $M_2(1;\ -\sqrt{2p})$, симметричные относительно ее оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Отсюда заключаем, что это расстояние тем больше, чем больше $p$. Следовательно, параметр $p$ характеризует «ширину» области, ограниченной параболой. В этом и состоит *геометрический смысл* параметра $p$.

Парабола, уравнение которой $y^2=-2px$, $p>0$, расположена слева от оси ординат (рис. 64, *а*). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось $Ox$.

По аналогии с предыдущим, можно утверждать, что уравнение $x^2=2py$, $p>0$ является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось $Oy$ (рис. 64, *б*). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение $x^2=-2py$, $p>0$ определяет параболу, лежащую ниже оси $Ox$, с вершиной в начале координат (рис. 64, *в*). Уравнение параболы, изображенной на рис. 65, имеет вид

$$x^2=2p(y-a),\ \ p>0,\ \ a<0,$$

а параболы, изображенной на рис. 66, следующий вид:

$$y^2=2p(x-b),\ \ p>0,\ \ b>0.$$

○ **Пример 3.** Дано уравнение параболы $y^2=6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти координаты ее фокуса.

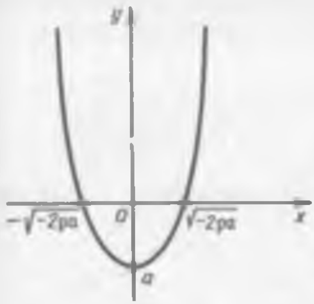



Рис. 65

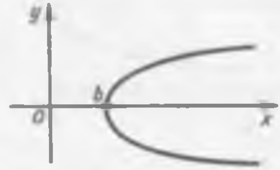



Рис. 66

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы (29), заключаем, что $2p=6$, откуда $p=3$. Так как фокус параболы имеет координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса — уравнение $x=-\frac{p}{2}$, то для данной параболы получаем координаты фокуса $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ и уравнение директрисы $x=-\frac{3}{2}$. ●

**Упражнение.** Напишите уравнение параболы с вершиной в начале координат и уравнение директрисы, если известно, что осью симметрии является ось $Ox$ и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y=2$ лежит на параболе. (*Отв.* $y^2=x$; $x=-1/4$.)

В заключение рассмотрим еще несколько примеров на нахождение множества точек по уравнениям, связывающим их координаты.

○ **Пример 4.** Даны точки $A(-1; 0)$ и $B(2; 0)$. Точка $M(x; y)$ движется так, что в треугольнике $AMB$ угол $ABM$ остается вдвое больше угла $MAB$. Определить траекторию точки $M$ (рис. 67).

Решение. Выразим $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} A$ через координаты точек $A$, $B$ и $M$:

$$\operatorname{tg} B=\frac{y}{2-x}; \quad \operatorname{tg} A=\frac{y}{x-(-1)}=\frac{y}{x+1}.$$

Составим уравнение движения точки. По условию, $B=2A$, следовательно, уравнение имеет вид $\operatorname{tg} B=$ $=\operatorname{tg} 2A$, или

$$\operatorname{tg} B=\frac{2\operatorname{tg} A}{1-\operatorname{tg}^2 A}.$$

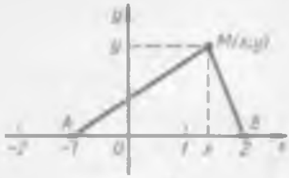


Рис. 67

Подставляя в уравнение найденные выражения для $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} A$

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2},$$

после упрощения получаем искомое уравнение

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1,$$

т. е. траектория движения точки — гипербола.

**Пример 5.** Дана окружность и точка $A$ внутри нее. Найти множество центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через точку $A$.

Решение. Пусть $M$ — произвольная точка искомого множества, тогда окружность радиуса $MA$ касается данной окружности. Пусть $O$ — центр данной окружности, $R$ — длина ее радиуса, $B$ — точка касания (рис. 68). Тогда $|OB|=R=|OM|+|MB|=|OM|+|MA|$. Итак, для точки $M$

$$|MO|+|MA|=R,$$

т. е. сумма расстояний от нее до двух данных точек $O$ и $A$ постоянна. Значит, точка $M$ лежит на эллипсе с фокусами в точках $O$ и $A$ (см. определение эллипса).

Покажем, что все точки указанного эллипса принадлежат искомому множеству. Пусть $N$ — произвольная точка этого эллипса, т. е. $|NO|+|NA|=R$. Заметим, что точка $N$ лежит внутри данного круга, так как $|ON|<|ON|+|NA|=R$. Пусть луч $ON$ пересекает данную окружность в точке $C$ (рис. 69). Так как $|ON|+|NC|=R$ и $|ON|+|NA|=R$, то $|NC|=|NA|$. Поэтому окружность с центром в точке $N$ и радиусом $NA$ проходит через точку $C$ и касается в ней данной окружности.

**Пример 6.** Доказать, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках, то эти точки пересечения лежат на одной окружности.

Решение. Примем оси данных парабол за оси координат $Ox$ и $Oy$ (рис. 70). Тогда уравнения парабол имеют вид

$$y^2=2p(x-a) \tag{30}$$


Рис. 68

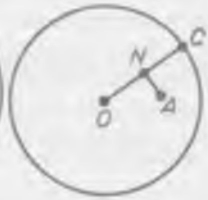



Рис. 69

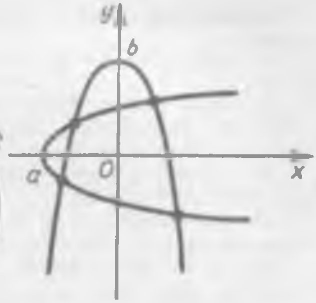



Рис. 70

и

$$x^2 = 2q(y - b). \tag{31}$$

Сложив почленно уравнения (30) и (31), получим

$$x^2 + y^2 = 2px - 2pa + 2qy - 2qb,$$

откуда

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pa - 2qb. \tag{32}$$

По условию, параболы пересекаются в четырех точках, значит, координаты этих точек удовлетворяют и уравнению (30), и уравнению (31), поэтому и уравнению (32).

Но уравнение (32) задает в зависимости от знака правой его части или окружность (если правая часть больше нуля), или точку (если правая часть равна нулю), или пустое множество. Так как координаты точек удовлетворяют уравнению (32), то оно задает окружность, на которой они лежат. ●

?

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение эллипса и выведите его каноническое уравнение.

2. Исследуйте форму эллипса по его каноническому уравнению.

3. Что такое эксцентриситет эллипса и каков его геометрический смысл?

4. Дайте определение гиперболы и выведите его каноническое уравнение.

5. Исследуйте форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

6. Что такое эксцентриситет гиперболы и каков его геометрический смысл?

7. Каким важным свойством обладают эллипс и гипербола?

8. Дайте определение параболы и выведите ее каноническое уравнение.

9. Исследуйте форму параболы по ее каноническому уравнению.

10. Чему равен эксцентриситет параболы?

11. В чем состоит геометрический смысл параметра $p$ в уравнении параболы?

12. Почему эллипс, гипербола и парабола называются линиями второго порядка?

13. Как найти точку пересечения параболы с прямой, с окружностью, с эллипсом и с другой параболой?

14. Какая связь между эллипсом и окружностью?

## § 5. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ФАКТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

**1.** Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки числовой прямой, то формула

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

выражает величину отрезка $\overline{M_1M_2}$, а формула

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

— расстояние между точками.

**2.** Как только на плоскости выбрана система координат $Oxy$, каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — ее координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно: каждой точке соответствует одна пара чисел и обратно.

**3.** Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**4.** Площадь треугольника с вершинами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ находится по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]\right|.$$

**5.** Если точка $M(x; y)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

6. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax+By+C=0,$$

где $A$, $B$ и $C$ — некоторые числа, причем $A$ и $B$ не равны нулю одновременно (т. е. $A^2+B^2\neq 0$),— прямая. Обратно, каждая прямая $L$ задается уравнением вида

$$Ax+By+C=0.$$

При этом числа $A$, $B$ и $C$ определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности: если умножить все эти числа на одно и то же число $\mu$ $(\mu\neq 0)$, то полученное уравнение

$$(\mu A)x+(\mu B)y+\mu C=0$$

определяет ту же прямую $L$.

7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $(x_1;\ y_1)$ с данным угловым коэффициентом $k$, имеет вид

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

8. Уравнение прямой, пересекающей ось $Ox$ в точке $(a;\ 0)$, а ось $Oy$ в точке $(0;\ b)$, имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

— уравнение прямой «в отрезках».

9. Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, таково:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

10. Если прямая $L_1$ имеет угловой коэффициент $k_1$, а прямая $L_2$ — угловой коэффициент $k_2$, то:

а) $k_1=k_2$ — условие параллельности прямых $L_1$ и $L_2$;

б) $k_1\cdot k_2=-1$ — условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$.

11. Расстояние $d$ от точки $A(x_0;\ y_0)$ до прямой $L$, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

**12.** Прямая $Ax+By+C=0$ разбивает плоскость на две полуплоскости: множество точек $(x; y)$, для которых $Ax+By+C>0$, и множество точек $(x; y)$, для которых $Ax+By+C<0$.

**13.** Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $a$ и $b$ — данные числа, $R>0$ — окружность с центром в точке $(a; b)$ радиуса $R$.

**14.** Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a$ и $b$ — данные положительные числа,— эллипс с полуосями $a$ и $b$ и центром в начале координат.

**15.** Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a$ и $b$ — данные положительные числа,— гипербола с действительной и мнимой полуосями $a$ и $b$ и центром симметрии в начале координат.

**16.** Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2=2px\,(x^2=2py),$$

где $p$ — данное число,— парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии $Ox$ (осью симметрии $Oy$).

## § 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**2.1.** Постройте точки $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(-1; 7)$, $D(-2; -3)$, $E(0; 2)$, $F(4; 0)$.

**2.2.** Не строя точку $A(1; -3)$, выясните, в какой четверти она расположена.

**2.3.** В каких четвертях может находиться точка, если ее абсцисса положительна?

**2.4.** На оси $Ox$ взята точка с координатой $(-5)$. Каковы ее координаты на плоскости?

**2.5.** Точки $A(3; 2)$ и $B(a; -1)$ расположены на прямой, параллельной оси $Oy$. Найдите значение $a$.

**2.6.** Точка $M$ является серединой отрезка $OA$, соединяющего начало координат $O$ с точкой $A(-5; 2)$. Найдите координаты точки $M$.

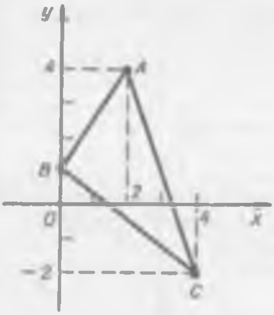



Рис. 71

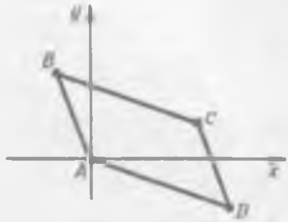



Рис. 72

**2.7.** Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Покажите, что формула расстояния между точками $A$ и $B$ не зависит от знаков их координат.

**2.8.** а) Какая точка дальше от оси $Ox$: $A(2; -5)$ или $B(3; 4)$? б) Какая из этих точек дальше от оси $Oy$? в) Чему равны расстояния от точки $A(a; b)$ до осей $Ox$ и $Oy$ соответственно?

**2.9. Постройте точки** $A(4;1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$ и $D(0; 0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Какова его площадь? Чему равна длина стороны этого квадрата? Найдите координаты середин сторон квадрата.

**2.10.** Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2; 4)$, $B(0; 1)$; $C(4; -2)$ (рис. 71).

**2.11.** Точки $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ и $C(4; -1)$ — середины сторон треугольника. Найдите координаты его вершин.

**2.12.** На плоскости даны точки $A(0; 0)$, $B(x_1; y_1)$ и $D(x_2; y_2)$ (рис. 72). Какие координаты должна иметь точка $C$, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?

**2.13.** Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины — точки $A(5; 1)$ и $B(-2; 2)$. Найдите координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.

**2.14.** Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3; 1)$; $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ и $D(5; -2)$.

**2.15.** Даны полярные координаты точки: $\rho = 10$; $\varphi = 30°$. Найдите ее прямоугольные декартовы координаты, если известно, что полюс полярной системы находится в точке (2; 3), а полярная ось параллельна оси абсцисс.

**2.16.** Найдите расстояние между точками, зная их полярные координаты: $\rho_1 = 3$, $\varphi_1 = 30°$; $\rho_2 = 5$, $\varphi_2 = 120°$.

**2.17.** Найдите множество точек, координаты которых связаны следующими соотношениями: **1.** а) $y = |x|$; б) $x = |y|$; в) $|y| = |x|$. **2.** $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{y}{|y|}$. **3.** $x + |x| = y + |y|$. **4.** $(x-y)(x-2y) = 0$. **5.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$. **6.** $x + y > 0$. **7.** $x + y > 1$. **8.** $x - y < 1$. **9.** $\begin{cases} x - y > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases}$ **10.** $(x-y)(x-2y) > 0$.

**2.18.** Составьте уравнения, которые описывают следующие множества точек: а) прямую, параллельную оси абсцисс, проходя-

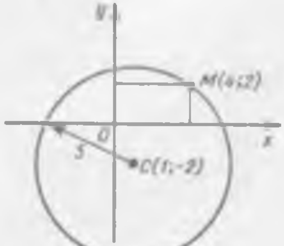



Рис. 73

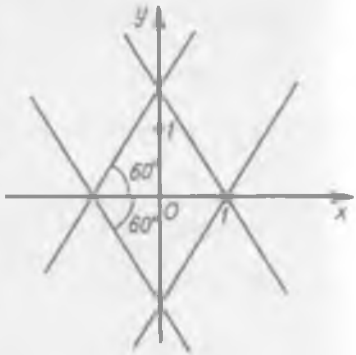



Рис. 74

щую через точку (1; 0); б) прямую, параллельную прямой $y=x$ и проходящую через точку $(-3; 7)$; в) множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси $Oy$.

**2.19.** Придумайте соотношения между $x$ и $y$, которые задают на координатной плоскости: а) пару прямых $y=3x$ и $y=x-3$; б) прямую $y=x$ и точку $(-1; 2)$; в) всю часть плоскости выше прямой $y=x$ (включая эту прямую); г) часть плоскости между прямыми $y=0$ и $y=1$ (без этих прямых); д) внутренность квадрата с вершинами в точках (0; 0), (0; 1), (1; 1); (1; 0).

**2.20.** На плоскости даны три точки: $A(3; -6)$, $B(-200; 400)$, $C(1000; -2000)$. Докажите, что они лежат на одной прямой.

**2.21.** Найдите, какие три из точек $A(1; 3)$; $B(-2; 1)$, $C(-1; 7)$, $D(3; 1)$ лежат на одной прямой.

**2.22.** Примените формулу для расстояния между двумя точками на координатной плоскости к доказательству следующей теоремы: в параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех сторон.

**2.23.** Установите: а) лежит ли точка $N(4{,}1; 1{,}9)$ на окружности с центром $C(1; -2)$ и радиусом 5 (попробуйте воспользоваться рис. 73); б) лежит ли точка $K(0; 2\sqrt{6}-2)$ на этой же окружности; в) лежит ли точка $A(160; -1)$ на окружности с центром $(147; -6)$ и радиусом 13.

**2.24.** Напишите уравнение окружности с центром $C(-2; 3)$ и радиусом, равным 5. Известно, что точка $A(a; -1)$ лежит на этой окружности. Найдите $a$.

**2.25.** Напишите уравнение каждой из четырех прямых, изображенных на рис. 74.

**2.26.** Напишите уравнение прямой, параллельной биссектрисе I координатного угла и проходящей через точку $(0; -5)$.

**2.27.** Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x+1$ и, кроме того: а) проходящей через точку (0; 2); б) проходящей через точку $(1; -1)$.

**2.28.** Дана прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки $A$ и $B$ с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Напишите уравнение высоты $AD$ треугольника $AOB$, найдите ее длину и площадь треугольника $AOB$.

**2.29.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $(-1; 1)$ так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

**2.30.** Найдите уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

**2.31.** Найдите множество точек $M$, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек $A$ и $B$ равна данной величине $a$. При каких значениях $a$ задача имеет решение?

**2.32.** Найдите координаты точки, лежащей на окружности $x^2+y^2=1$ и одинаково удаленной от точек $(1; 3)$ и $(-2; 2)$.

**2.33.** Найдите уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$, проходящей через точку $(1; 2)$.

**2.34.** Составьте уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=$ $=2ax$ и $x^2+y^2=2by$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

**2.35.** Составьте уравнения общих касательных к окружностям $x^2+y^2=6x$ и $x^2+y^2=6y$.

**2.36** Составьте уравнение параболы, проходящей через точку $(6; 9)$, с вершиной в начале координат и осью симметрии $Oy$.

**2.37.** Ординаты точек окружности $x^2+y^2=36$ уменьшены в два раза. Найдите уравнение полученной кривой.

**2.38.** Найдите полуоси эллипса $3x^2+5y^2-30=0$.

**2.39.** Найдите уравнение эллипса, проходящего через точки $(1; 4)$ и $(7; 2)$ и симметричного относительно осей $Ox$ и $Oy$.

**2.40.** Дан эллипс $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Найдите уравнение гиперболы, имеющей фокус в вершинах данного эллипса, а вершины — в его фокусах.

**2.41.** Найдите уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-$ $-6y-17=0$, перпендикулярного прямой $5x+2y-13=0$.

**2.42.** Найдите наименьшее из расстояний от точки $M_0$ до точек окружности $\Gamma$, если:

а) $M_0(6; -8)$; $\Gamma$: $x^2+y^2=9$;

б) $M_0(-7; 2)$; $\Gamma$: $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

**2.43.** Определите, пересекает ли заданная прямая $L$ данную окружность $\Gamma$, касается ее или проходит вне ее:

а) $L$: $2x-y-3=0$; $\Gamma$: $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

б) $L$: $x-2y-1=0$; $\Gamma$: $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

в) $L$: $x-y+10=0$; $\Gamma$: $x^2+y^2-1=0$.

**2.44.** Постройте эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найдите: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

**2.45.** Определите, пересекает ли заданная прямая $L$ данный эллипс $\Gamma$, касается его или проходит вне его:

а) $L$. $2x-y-3=0$, $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

б) $L$. $2x+y-10=0$, $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

в) $L$: $3x+2y-20=0$, $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1$.

**2.46.** Постройте гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найдите: а) действительную и мнимую полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

**2.47.** Постройте гиперболу $16x^2-9y^2=-144$, «сопряженную» гиперболе $16x^2-9y^2=144$ задачи 2.46. Найдите: а) эксцентриситет; б) уравнения директрис.

**2.48.** Найдите множества точек, координаты которых связаны соотношениями:

а) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0, \\ 3x+5y-15<0, \\ y+2>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0, \\ y+3>0, \\ x+y-2<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0, \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y^2-10x<0, \\ 5x-3y-15<0, \\ y-2<0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2\geqslant 144. \end{cases}$

**2.49.** Найдите множество точек, для которых произведение расстояний до двух данных пересекающихся прямых равно $C=\text{const}$.

**2.50.** Найдите множество центров окружностей, проходящих через данную точку $A$ и касающихся данной прямой $L$.

*Без знания математики нельзя понять ни основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления.*

*А. Н. Колмогоров*

# ГЛАВА 3
# ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

В этой главе рассмотрена основная теория математики — теория пределов. Эта теория является фундаментом, на котором построено великолепное сооружение, носящее название «математический анализ». Математический анализ в настоящее время является незаменимым инструментом исследования в самых различных областях науки и техники. Знание дифференциального и интегрального исчисления сейчас необходимо каждому инженеру и научному работнику. Но для того чтобы изучить математический анализ и научиться правильно его применять, необходимо сначала освоить теорию пределов.

Начало изучения теории пределов положено в элементарной математике, где с помощью предельных переходов определяется длина окружности, объем цилиндра, конуса и т. д. Эта теория также использована при определении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Операция предельного перехода является одной из основных операций математического анализа. В настоящей главе будет рассмотрена простейшая форма операции предельного перехода, основанная на понятии предела числовой последовательности.

## § 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Прогрессии.** Числовые последовательности встречаются уже в программе средней школы. Примерами таких последовательностей служат: 1) последовательность членов арифметической и геометрической прогрессий; 2) последовательность периметров правильных $n$-угольников, вписанных в данную окружность; 3) последовательность $x_1=1$, $x_2=1{,}4$ $x_3=1{,}41$, ... приближенных значений $\sqrt{2}$. Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

**Определение 1.** *Если каждому числу $n$ из натурального ряда чисел*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

*поставлено в соответствие вещественное число $x_n$*, то *множество вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

*называется числовой последовательностью или просто последовательностью*[1].

Числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$, ... будем называть *элементами* (или *членами*) последовательности (1), символ $x_n$ — *общим элементом* (или *членом*) последовательности, а число $n$ — его *номером*[2]. Сокращенно последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}$. Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает

последовательность $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$.

Формула, задающая $x_n$, называется *формулой общего элемента* (или *члена*) последовательности $\{x_n\}$. Например, последовательность $\{n^2\}$ задана формулой $x_n=n^2$. С помощью этой формулы можно вычислить любой элемент последовательности: $x_1=1^2=1$, $x_5=5^2=25$, $x_{10}=10^2=100$ и т. д.

○ **Пример 1.** Дана формула общего элемента последовательности: $x_n=\frac{n}{n+1}$. Написать пять первых элементов последовательности.

---

[1] Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n;\ x_n)$, в которых первое число принимает последовательность значения 1, 2, 3, ..., $n$..., т. е. $(1;\ x_1)$, $(2;\ x_2)$, $(3,\ x_3)$, ..., $(n;\ x_n)$, ... .

[2] Номер элемента надо понимать в обычном смысле, например, как номер, под которым выступает хоккеист или футболист.

Решение. Положив последовательно $n=1, 2, 3, 4, 5$ в общем элементе $x_n$, получаем $x_1=1/2$, $x_2=2/3$, $x_3=3/4$, $x_4=4/5$, $x_5=5/6$. ●

**Упражнения.** Написать пять первых элементов каждой из последовательностей, заданных их общими элементами:

1. $x_n=\frac{1}{2n+1}$. (*Отв.* $x_1=1/3$; $x_2=1/5$, $x_3=1/7$, $x_4=1/9$, $x_5=1/11$.)

2. $x_n=\frac{n+2}{n^3+1}$. (*Отв.* $x_1=3/2$; $x_2=4/9$, $x_3=5/28$, $x_4=6/65$, $x_5=7/126$.)

3. $x_n=\frac{n}{2^{n+1}}$. (*Отв.* $x_1=1/2^2$, $x_2=2/2^3$, $x_3=3/2^4$, $x_4=4/2^5$, $x_5=5/2^6$.)

4. $x_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n^2}$. (*Отв.* $x_1=2$; $x_2=-3/2^2$, $x_3=4/3^2$, $x_4=-5/4^2$, $x_5=6/5^2$.)

○ **Пример 2.** Зная несколько первых элементов последовательности, написать формулу общего элемента последовательности $1$; $1/3^2$; $1/5^2$; $1/7^2$; ....

Решение. Знаменатели заданных элементов последовательности образуют последовательность всех нечетных натуральных чисел в степени 2. Поэтому в качестве искомой можно выбрать формулу

$$x_n=\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Однако знание нескольких первых элементов последовательности еще не определяет саму последовательность. Поэтому данную задачу следует рассматривать как задачу отыскания некоторой простой индуктивной закономерности, согласующейся с заданными элементами последовательности. ●

**Упражнения.** Зная несколько первых элементов последовательности, написать формулу общего элемента таких последовательностей:

1. $1$; $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$; ... (*Отв.* $x_n=\frac{1}{n!}$.)

**2.** $1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25};\ \ldots$ (*Отв.* $x_n=\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$.

Указание: $1;\ \frac{3^2}{2^2};\ \frac{5^2}{3^2};\ \frac{7^2}{4^2};\ \ldots$).

**3.** 2; 10; 26; 82; 242; 730; ... (*Отв.* $x_n=3^n+(-1)^n$.

Указание: $3-1;\ 3^2+1;\ 3^3-1;\ 3^4+1;\ 3^5-1;\ 3^6+1;\ \ldots$).

Формула, задающая $x_n$, не является единственной. Так, например, последовательность $-1,\ 1,\ -1, 1, -1, 1, \ldots$ задается формулой $x_n=(-1)^n$ или формулой $x_n=\cos \pi n$. Не всегда последовательность $\{x_n\}$ можно задать аналитически, например последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$.

Последовательность $\{x_n\}$ считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Например, если $x_n=1+(-1)^n$, то последовательность запишется в виде 0, 2, 0, 2, .... Обращая дробь 1/3 в десятичную, также получаем последовательность

$$x_1=0{,}3,\quad x_2=0{,}33,\quad x_3=0{,}333,\quad \ldots,\quad x_n=\underbrace{0{,}333\ldots3}_{n\ \text{троек}}\ldots$$

Часто используют рекуррентный способ задания последовательности $\{x_n\}$. Этот способ состоит в том, что дается: 1) первый элемент последовательности $x_1$ (или несколько первых элементов) и 2) формула (или рекуррентное соотношение), указывающая, какие действия нужно выполнить, чтобы вычислить следующий элемент (или несколько следующих элементов). Так, если известно, что: 1) первый элемент $x_1=1$ и 2) при любом $n\geqslant 1$ $x_{n+1}=(n+1)x_n$, то, последовательно выполняя действия, определенные данной формулой, находим

$$\begin{aligned}
&(n=1)\quad x_2=x_{1+1}=(1+1)\cdot x_1=2\cdot 1!=2!,\\
&(n=2)\quad x_3=x_{2+1}=(2+1)\cdot x_2=3\cdot 2!=6=3!,\\
&(n=3)\quad x_4=x_{3+1}=(3+1)\cdot x_3=4\cdot 3!=24=4!,\\
&(n=4)\quad x_5=x_{4+1}=(4+1)\cdot x_4=5\cdot 4!=120=5!,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Таким образом, данное рекуррентное соотношение определяет последовательность 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, ..., $n!$ ...,[1], в которой общий элемент задается формулой

[1] Напомним, что $n!$ — сокращенное обозначение произведения $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$; по определению $1!=1$.

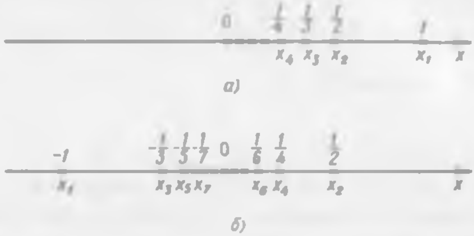



Рис. 75

$x_n = n!$ Заметим, что при строгом выводе формулы общего элемента надо применить метод математической индукции. (Сделайте это самостоятельно.)

**Упражнения.** Написать пять первых элементов и формулу общего элемента таких последовательностей:

**1.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n!$ (*Отв.* 1!, 1!, 1!, 1!, 1!, $x_n = 1!$)

**2.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$. (*Отв.* 1, 4, 7, 10, 13; $x_n = 3n - 2$.)

Приведем еще один пример. Последовательность $\{x_n\}$ задается двумя первыми элементами $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при любом $n \geqslant 3$. Здесь рекуррентное соотношение связывает $x_n$ с двумя предыдущими. Для получения последовательности нужно знать два первых элемента последовательности. Запишем ее несколько первых элементов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots .$$

Эта последовательность обладает рядом интересных и важных свойств. Ее элементы называются *числами Фибоначчи* (по имени итальянского математика XII—XIII вв.). Если в первом примере найти формулу общего элемента, зная первый и рекуррентное соотношение, легко, то для чисел Фибоначчи найти формулу общего элемента довольно трудно[1].

Геометрически последовательность $\{x_n\}$ изображается на числовой прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности. На рис. 75

[1] С числами Фибоначчи и их свойствами можно ознакомиться, например, в книге: *Н. Н. Воробьев*. Числа Фибоначчи. М., 1984.

изображены соответственно последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

Может оказаться, что одна и та же точка числовой прямой соответствует нескольким элементам последовательности, например для последовательности с общим элементом $x_n=(-1)^n$ все элементы с четными номерами попадут в точку с координатой 1, а с нечетными номерами — в точку с координатой —1; для последовательности с общим элементом $x_n=5$, т. е. последовательности 5, 5, 5, 5, ..., все элементы попадут в одну и ту же точку с координатой 5.

Введем понятие арифметических действий над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$... и $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$, .... *Произведением* последовательности $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, ... на число $m$ назовем последовательность

$$mx_1,\ mx_2,\ \ldots,\ mx_n,\ \ldots.$$

*Суммой* данных последовательностей назовем последовательность

$$x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n,\ \ldots;$$

*разностью* — последовательность

$$x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots,\ x_n-y_n,\ \ldots;$$

*произведением* — последовательность

$$x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2,\ \ldots,\ x_n\cdot y_n,\ \ldots;$$

*частным* — последовательность

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots,$$

если все элементы последовательности, на которую делят, отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$m\{x_n\}=\{mx_n\},\quad \{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},$$
$$\{x_n\}-\{y_n\}=\{x_n-y_n\},\quad \{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n\cdot y_n\},$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \quad y_n \neq 0\ ^{1)}.$$

Арифметическая прогрессия. **Определение 2.** *Последовательность* $\{x_n\}$[2], *определяемая первым элементом* $x_1$ *и рекуррентным соотношением*

$$x_{n+1}=x_n+d,$$

*где* $d$ — *постоянное число, называется арифметической прогрессией. Число* $d$ *называется разностью арифметической прогрессии.*

Рекуррентное соотношение, определяющее арифметическую прогрессию, словами формулируется так: *всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом* $d$.

Запишем несколько первых членов арифметической прогрессии: $x_1=x_1$, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_2+d=x_1+$ $+d+d=x_1+2d$ и т. д. Каждый раз прибавляем еще одно слагаемое $d$. Например, четные числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $x_1=2$ и разностью $d=2$:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ \ldots.$$

□ Докажем методом математической индукции формулу общего члена арифметической прогрессии

$$x_n=x_1+d(n-1). \tag{2}$$

1) Для $n=1$ имеем $x_1=x_1+d\cdot 0$, т. е. формула (2) верна.

2) Предполагая справедливость формулы (2) для некоторого $n$, докажем, что она справедлива для $n+1$, т. е. докажем формулу $x_{n+1}=x_1+d[(n+1)-1]$.

Действительно, по определению арифметической прогрессии, $x_{n+1}=x_n+d$. Отсюда, используя формулу (2), находим

$$x_{n+1}=x_1+(n-1)d+d=x_1+d[(n+1)-1],$$

что и требовалось доказать. На основании метода математической индукции заключаем, что формула (2) справедлива для любого $n$.

---

[1] $y_n \neq 0$ означает, что значения $y_n$ отличны от нуля при любом $n$.

[2] Иногда члены прогрессий обозначают буквой $a$.

$$S_n=\frac{x_1(q^n-1)}{q-1} \text{ или } S_n=\frac{x_1(1-q^n)}{1-q}. \blacksquare \qquad (7)$$

○ **Пример 5.** В геометрической прогрессии 1; $-2$; 4; $-8$; 16; найти 11-й член и сумму 6 членов.

Решение. Найдем сначала знаменатель геометрической прогрессии. Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением. Имеем

$$q=\frac{x_{n+1}}{x_n};\ q=\frac{x_5}{x_4}=\frac{16}{-8}=-2.$$

По формуле (3) вычислим 11-й член:

$$x_{11}=x_1q^{11-1}=1(-2)^{10}=1024;$$

а по первой из формул (7) вычислим сумму шести членов:

$$S_6=\frac{1\cdot[(-2)^6-1]}{-2-1}=\frac{64-1}{-3}=-21. \bullet$$

Обращаем внимание, что дальнейшее успешное изучение материала возможно только при условии полного понимания определения последовательности.

**2. Ограниченные и неограниченные последовательности.**

**Определение 4.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если существует число* $M$ (число $m$) *такое, что любой элемент* $x_n$ *этой последовательности удовлетворяет неравенству* $x_n\leqslant M\,(x_n\geqslant m)$.

**Определение 5.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа* $m$ *и* $M$ *такие, что любой элемент* $x_n$ *этой последовательности удовлетворяет неравенствам* $m\leqslant x_n\leqslant M$.

Обозначим $A=\max\{|m|,\ |M|\}$. Тогда условие ограниченности последовательности можно записать в виде $|x_n|\leqslant A$ или $-A\leqslant x_n\leqslant A$. Действительно, так как $A\geqslant|M|\geqslant M$, а $-A\leqslant -|m|\leqslant m$, то для всех элементов последовательности $\{x_n\}$ выполняются неравенства $-A\leqslant x_n\leqslant A$.

**Определение 6.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется неограниченной, если для любого положительного числа* $A$ *существует элемент* $x_n$ *этой последовательности, удовлетворяющий неравенству* $|x_n|>A$[1].

[1] Если $|x_n|>A$ $(A>0)$, то либо $x_n>A$, либо $x_n<-A$ (докажите это самостоятельно).

Из данных определений следует, что если последовательность ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $(-\infty, M]$, а если последовательность ограничена снизу — промежутку $[m, +\infty)$, а в случае ограниченности и сверху и снизу — промежутку $[m, M]$. Неограниченная последовательность может быть ограничена сверху (снизу). Рассмотрим несколько примеров.

○ **1.** Последовательность $\{n\}$, или, что то же, 1, 2, 3, ..., $n$, ..., ограничена снизу, но не ограничена сверху ($m=1$).

**2.** Последовательность $\{-n\}$, или, что то же, $-1$, $-2$, $-3$, ..., $-n$, ..., ограничена сверху, но не ограничена снизу ($M=-1$).

**3.** Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, или, что то же, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ..., ограничена, так как любой элемент $x_n$ этой последовательности удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ ($m=0$, $M=1$).

**4.** Последовательность $\{(-1)^n n\}$, или, что то же, $-1$, 2, $-3$, 4, $-5$, ..., $(-1)^n n$, ..., — неограниченная. В самом деле, каково бы ни было число $A$, среди элементов $x_n$ этой последовательности найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство $|x_n| > A$. ●

**Упражнения.** Ограничены ли последовательности: **1.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. (*Отв.* Да.) **2.** $\{2n\}$. (*Отв.* Нет.) **3.** $\{\ln n\}$. (*Отв.* Нет.) 4. $\{\sin n\}$. (*Отв.* Да.) **5.** 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, ... (*Отв.* Нет.) (Ответы обоснуйте).

**3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.**

**Определение 7.** *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа $A$ (сколь большим бы мы его не взяли) существует номер $N$ такой, что при $n > N$*[1] *выполняется неравенство $|x_n| > A$.*

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограничен-

[1] «При $n > N$» — означает для всех элементов последовательности с номерами $n > N$.

Выведем формулу суммы $n$ членов арифметической прогрессии. Предварительно докажем основное свойство членов конечной арифметической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_n$: *суммы членов прогрессии, равноотстоящих от концов, равны, т. е.*

$$x_m + x_n = x_k + x_l,$$

*если* $m+n=k+l$.

Действительно, используя формулу (2), получим

$$x_m + x_n = x_1 + d(m-1) + x_1 + d(n-1) =$$
$$= 2x_1 + d(m+n-2) = 2x_1 + d(k+l-2) =$$
$$= x_1 + d(k-1) + x_1 + d(l-1) = x_k + x_l,$$

что и требовалось доказать.

Найдем теперь сумму $S_n$. Запишем ее дважды, расставив слагаемые в разном порядке:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n,$$
$$S_n = x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1.$$

Складывая почленно и используя доказанное свойство и формулу (2), находим

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) +$$
$$+ (x_n + x_1) = n(x_1 + x_n) = n[2x_1 + d(n-1),$$

откуда получаем следующие две формулы:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)\cdot n}{2} \quad \text{и} \quad S_n = \frac{[2x_1 + d(n-1)]\cdot n}{2} \ ■$$

○ **Пример 3.** Написать формулу общего члена последовательности, если известны несколько ее первых членов: 3, 5, 7, 9, 11, ... .

Решение. Заданные числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $x_1 = 3$ и разностью $d=2$. По формуле (2) имеем $x_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$.

**Пример 4.** Сумма первых $n$ членов последовательности выражается формулой $S_n = 3n^2$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией; найти ее первый член и разность.

Решение. Имеем $x_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 = 3(2n-1)$. Так как разность $x_n - x_{n-1} = 3(2n-1) - 3(2n-3) = 6n - 3 - 6n + 9 = 6$ не зависит от $n$, то данная последовательность является арифметической прогрессией с разностью $d=6$. Первый член прогрессии $x_1 = S_1 = 3$. ●

Геометрическая прогрессия. **Определение 3.** *Последовательность $\{x_n\}$, определенная первым элементом $x_1$ и рекуррентным соотношением*

$$x_{n+1}=x_n\cdot q,$$

*где $q$ — постоянное число $(q\neq 1)$, называется геометрической прогрессией. Число $q$ называется знаменателем геометрической прогрессии.*

Рекуррентное соотношение, определяющее геометрическую прогрессию, словами формулируется так: *всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число $q$.*

Запишем несколько первых членов геометрической прогрессии: $x_1=x_1$, $x_2=x_1\cdot q$, $x_3=x_2\cdot q=x_1\cdot qq=x_1q^2$ и т. д. Например, числа 2, 6, 18, 54, 162, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=3$ и первым членом $x_1=2$.

Формула общего члена геометрической прогрессии

$$x_n=x_1q^{n-1} \tag{3}$$

доказывается точно так же, как формула общего члена арифметической прогрессии. (Проделайте это самостоятельно.)

□ Выведем формулу суммы $n$ членов геометрической прогрессии[1]. Для этого рассмотрим сумму

$$S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n \tag{4}$$

и умножим обе части равенства (4) на $q$. Так как $x_1q=x_2$, $x_2q=x_3$, ..., $x_nq=x_{n+1}$, то

$$S_n\cdot q=x_1q+x_2q+\ldots+x_nq=x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}. \tag{5}$$

Вычтем почленно из равенства (5) равенство (4). Все члены, кроме $x_{n+1}=x_nq$ и $x_1$, уничтожаются. Поэтому получаем

$$S_nq-S_n=x_{n+1}-x_1=x_nq-x_1,$$

откуда

$$S_n=\frac{x_nq-x_1}{q-1} \quad \text{или} \quad S_n=\frac{x_1-x_nq}{1-q} \tag{6}$$

Так как $x_n=x_1q^{n-1}$, то формулы (6) можно записать в другом виде:

---

[1] Вывод формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии дан в следующем параграфе (см. пример 7).

□ Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число, $N_1$ — номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \varepsilon/2$, а $N_2$ — номер, начиная с которого $|\beta_n| < \varepsilon/2$. (Такие номера $N_1$ и $N_2$ найдутся по определению бесконечно малой последовательности.) Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут одновременно выполняться два неравенства: $|\alpha_n| < \varepsilon/2$, $|\beta_n| < \varepsilon/2$. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon^{1)}.$$

Это означает, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. ■

**Следствие**. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

**Теорема 3.3.** *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

□ Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1$ такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N_1$, а так как последовательность $\{\beta_n\}$ тоже бесконечно малая, то для $\varepsilon = 1$ существует номер $N_2$ такой, что $|\beta_n| < 1$ при $n > N_2$. Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая. ■

**Следствие.** *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Замечание. Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть любой последова-

---

[1] Здесь использовано свойство абсолютных величин: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (см. теорему 1.3).

тельностью и может не иметь смысла. Например, если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n$, то все элементы последовательности $\{\alpha_n/\beta_n\}$ равны единице и данная последовательность является ограниченной. Если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n^2$, то последовательность $\{\alpha_n/\beta_n\}$ бесконечно большая, и наоборот, если $\alpha_n=1/n^2$, а $\beta_n=1/n$, то $\{\alpha_n/\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Если начиная с некоторого номера элементы последовательности $\{\beta_n\}$ равны нулю, то последовательность $\{\alpha_n/\beta_n\}$ не имеет смысла.

**Упражнение.** Показать, что частное двух бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ может быть любой последовательностью, используя в качестве примеров последовательности $\{n\}$ и $\{n^2\}$.

**Теорема 3.4.** *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.*

□ Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная, а $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Требуется доказать, что последовательность $\{x_n\cdot\alpha_n\}$ бесконечно малая. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому существует число $A>0$ такое, что любой элемент $x_n$ удовлетворяет неравенству $|x_n|\leqslant A$. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то для положительного числа $\varepsilon/A$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon/A$. Тогда при $n>N$

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<A\cdot\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\cdot\alpha_n\}$ бесконечно малая. ■

**Следствие.** *Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.*

?

### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение последовательности.
2. Когда последовательность считается заданной? Приведите примеры.
3. В чем заключается рекуррентное задание последовательности? Приведите пример.
4. Дайте геометрическую интерпретацию последовательности. Приведите примеры.

5. Дайте определение арифметических действий над последовательностями.

6. Почему из определения последовательности следует, что она имеет бесконечное число элементов?

7. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.

8. Выведите формулу суммы $n$ членов арифметической прогрессии.

9. Сформулируйте определение геометрической прогрессии.

10. Выведите формулу суммы $n$ членов геометрической прогрессии.

11. Сформулируйте определения ограниченной и неограниченной последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.

12. Приведите пример ограниченной последовательности, которая: а) имеет и наибольший и наименьший элемент; б) имеет наибольший, но не имеет наименьшего элемента; в) имеет наименьший, но не имеет наибольшего элемента.

13. Сформулируйте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.

14. Приведите пример неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой.

15. Можно ли назвать бесконечно малой последовательность с общим элементом $x_n=0$?

16. Приведите пример, когда значения элементов бесконечно малой последовательности, возрастая, стремятся к нулю. Как называется такая последовательность?

17. Приведите пример, когда значения элементов бесконечно большой последовательности при возрастании $n$ убывают. Как называется такая последовательность?

18. Дана последовательность $1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; 4; \frac{1}{5}; \ldots; n; \frac{1}{n}; \ldots$. Почему эта последовательность не является бесконечно малой, несмотря на то что, какое бы малое число $\varepsilon>0$ мы ни взяли, среди элементов последовательности всегда найдутся элементы, по модулю меньшие чем $\varepsilon$? Почему эта последовательность не является бесконечно большой, несмотря на то что, какое бы большое число $A>0$ мы ни взяли, среди элементов последовательности всегда найдутся элементы, по модулю большие чем $A$? Как называется эта последовательность?

19. Является ли бесконечно малая последовательность ограниченной?

20. Известно, что последовательность $\{x_n\}$ является: а) бесконечно малой; б) бесконечно большой. Следует ли отсюда, что последовательность $\{1/x_n\}$ (при условии $x_n\neq 0$ для всех $n$) является: а) бесконечно большой; б) бесконечно малой?

## § 2. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этом параграфе рассмотрено одно из важнейших в математическом анализе понятий — понятие предела числовой последовательности.

**1. Понятие сходящейся последовательности.**

**Определение.** *Число $a$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для* ***любого*** *положительного числа $\varepsilon$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство*

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{1}$$

При этом последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся.*

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a$, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a\ ^{1)}, \text{ или } x_n\to a \text{ при } n\to\infty.$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся.*

Из определения предела следует, что, каким бы малым мы ни взяли число $\varepsilon>0$, начиная с некоторого номера $N$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ будут отличаться от числа $a$ меньше чем на $\varepsilon$, т. е. $|x_n-a|<\varepsilon$ при $n>N$. Это и означает, что элементы последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближаются к числу $a$ при неограниченном возрастании номера $n$.

В определении не случайно отмечено слово «любого», на этом слове «держится» все определение.

Для примера рассмотрим вопрос о пределе последовательности

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots .$$

С ростом $n$ эта последовательность предела не имеет, так как колеблется между значениями $+1$ и $-1$ и ни к какому числу не приближается (строгое доказательство см. в замечании к теореме 3.6).

«Докажем», используя определение, что последовательность имеет «предел, равный 0». Действительно, для $\varepsilon=2$ неравенство $|(-1)^n-0|<\varepsilon$ выполняется для всех номеров $n$. Следовательно, можно взять $N=1$ и все «доказано». Ошибка заключена в том, что, например, для $\varepsilon=1/2$ неравенство $|(-1)^n-0|<\varepsilon$ уже не выполняется ни для какого $n$, т. е. при «доказательстве» нарушено основное требование

---

[1] Limes (лат.) — предел. Эта запись читается так: «предел $x_n$ при $n$, стремящемся к бесконечности, равен $a$».

определения, чтобы неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ выполнялось бы для **любого** $\varepsilon>0$, в частности, и для $\varepsilon=1/2$, хотя бы начиная с некоторого номера $N$.

Сформулируем следующее определение: *число $a$ не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого номера $N$ найдется номер $n>N$ такой, что выполняется неравенство $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$.*

Сравнивая данные определения, видим, что для построения отрицания надо слова «существует» и «любого» взаимно заменить, а неравенство заменить ему противоположным.

Это правило можно использовать и для построения отрицания в любых других определениях, данных в смысле «$\varepsilon-N$».

○ **Пример 1.** Используя определение предела, показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Решение. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Так как $|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, то для нахождения значений $n$, удовлетворяющих неравенству $|x_n-1|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, откуда получим $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Следовательно, за $N$ можно взять целую часть числа $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, т. е. $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$ будет выполняться при всех $n>N$. Так как $\varepsilon$ — любое, то доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

По определению, $a$ в данном примере равно 1.

Для более четкого понимания определения предела проверим проведенные вычисления на конкретных числах.

Возьмем, например, $\varepsilon=0{,}01$. Тогда $N=\left[\frac{1-0{,}01}{0{,}01}\right]=$ $=99$ и при $n>N=99$ имеем $|x_n-1|<0{,}01$. В частности, при $n<N$ ($n=97$, $n=98$) неравенство $|x_n-1|<\varepsilon=0{,}01$ не выполняется. В самом деле, пусть $n=98$. Тогда

$$|x_{98}-1|=|98/99-1|=|-1/99|=1/99>1/100,$$

а если взять $n>99$, например $n=100$, то

$$|x_{100}-1|=|100/101-1|=|-1/101|=1/101<1/100.$$

Таким образом, неравенство $|x_n-1|<0{,}01$ выполняется только для номеров $n$, больших чем 99.

Если взять значение $\varepsilon<0{,}01$, например $\varepsilon=0{,}001$, то значение номера $N$ увеличится. В самом деле, $N=\left[\frac{1-0{,}001}{0{,}001}\right]=999$ и при $n>N=999$ получаем $|x_n-1|<0{,}001$.

В заключение покажем, что число 2 не является пределом данной последовательности. Для этого рассмотрим абсолютную величину разности

$$|x_n-2|=\left|\frac{n}{n+1}-2\right|=\left|-\frac{n+2}{n+1}\right|=\frac{n+2}{n+1}$$

и решим относительно $n$ неравенство $\frac{n+2}{n+1}<\varepsilon$. Но в данном случае этого можно не делать, так как при любом значении номера $n$ ($n$ может быть только числом целым и положительным) число $\frac{n+2}{n+1}>1$, а следовательно, оно не может быть меньше произвольно заданного положительного числа $\varepsilon$, например $\varepsilon=1/2$. Это и доказывает, что число 2 не является пределом последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

**Пример 2.** Используя определение предела, доказать, что если $|q|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0. \qquad (2)$$

Решение. Возьмем любое число $\varepsilon>0$ и $q\neq0$. Так как $|q^n-0|=|q|^n$, то для нахождения значений $n$, удовлетворяющих неравенству $|q^n-0|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $|q|^n<\varepsilon$ или, чтобы не иметь дела с отрицательными логарифмами ($|q|<1$), $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. После логарифмирования получим

$$n \lg \frac{1}{|q|} > \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда $n > \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg(1/|q|)}$. Следовательно, если взять $N = \left[\frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg(1/|q|)}\right]$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon$ — любое, то, согласно определению, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Если $q=0$, то соотношение (2) очевидно, так как неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$ выполняется при любом $n$.

**Пример 3.** Используя определение предела, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N$ такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Так как $\sqrt[n]{n} > 1$, то $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$, откуда получаем $n < (1+\varepsilon)^n$. Воспользуемся тем, что

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \quad (3)$$

(здесь применена формула бинома Ньютона[1]), и докажем, что неравенство $n < (1+\varepsilon)^n$ выполняется при $n > 1 + 2/\varepsilon^2$. Действительно, пусть $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$; тогда из неравенства (3) следует, что $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, откуда $n < 1 + 2/\varepsilon^2$. Поэтому при $n > 1 + 2/\varepsilon^2$ неравенство $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$ не выполняется и, следовательно, выполняется неравенство $n < (1+\varepsilon)^n$, а значит, и неравенство $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. Таким образом, если взять

[1] Напомним, что формула бинома Ньютона имеет вид $(a+b)^n = a^n + n\ a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$.

$N=[1+2/\varepsilon^2]$, то при $n>N$ будет выполняться неравенство $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$. А так как $\varepsilon$ — любое, то, согласно определению, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ●

**Упражнения.** а) Используя определение предела, докажите, что: **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$.

**3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n}=1$. (Указание: представить выражение общего элемента последовательности в виде $x_n=(3^n-1)/3^n=1-1/3^n$ или $x_n-1=-1/3^n$.)
**4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}=0$.

б) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$. Найдите номер $N$, начиная с которого выполняется неравенство $\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$, где $\varepsilon=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$. (*Отв.* Неравенство $\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ выполняется при $n>N=$ $=[1/\varepsilon-1]$.
При $\varepsilon=0{,}1$ неравенство выполняется начиная с $N=10$, при $\varepsilon=0{,}01$ — начиная с $N=100$, при $\varepsilon=0{,}001$ — начиная с $N=1000$.)

Замечание 1. Пусть $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом некоторое число $a$. Тогда разность $\{x_n-a\}=\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, так как для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$ [1]. Следовательно, любой элемент $x_n$ сходящейся последовательности, имеющий пределом число $a$, можно представить в виде

$$x_n=a+\alpha_n, \tag{4}$$

где $\alpha_n$ — элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Очевидно, справедливо и обратное: если

---

[1] Отсюда, в частности, следует, что всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число $a=0$.

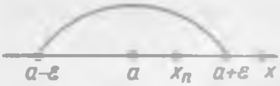



Рис. 76

$x_n$ можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (докажите это самостоятельно). Представление (4) будет использовано при доказательстве теорем 3.7—3.9 о пределах последовательностей.

○ **Пример 4.** Показать, что предел последовательности $C, C, C, \ldots$ с общим членом $x_n = C = \text{const}$ равен числу $C$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

Решение. Действительно, последовательность $\{x_n - C\} = C - C = 0$ бесконечно малая и поэтому, в силу представления (4), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$. ●

Замечание 2. Предел числовой последовательности имеет геометрическое истолкование. Неравенство (1) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\,^{1)},$$

которые означают, что элемент $x_n$ находится в ε-окрестности точки $a$ (рис. 76). Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: *число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки $a$ существует номер $N$ такой, что все элементы $x_n$ с номерами $n > N$ находятся в этой ε-окрестности.*

○ Для иллюстрации сказанного снова вернемся к примеру 1. Если $\varepsilon = 0{,}01$, а $n > 99$, то все члены последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ начиная с члена с номером $n = 100\,(x_{100})$ попадут в заданную ε-окрестность числа $a = 1$ $(-0{,}01 < x_n - 1 < 0{,}01$ или $1 - 0{,}01 < x_n < 1 + 0{,}01)$. т. е. на числовой прямой будут принадлежать интервалу (0, 99; 1,01). ●

Следует отметить, что число $N$ в определении предела последовательности зависит как от рассматриваемой последовательности, так и от произвольно взятого ε. Чем меньше ε, тем больше $N$ (см. пример 1), кроме случая, когда последовательность состоит из одного элемента. Например, последова-

---

[1] См. теорему 1.2.

тельность 1, 1, 1, 1, ..., заданная общим элементом $x_n=1$, имеет своим пределом число 1 (см. пример 4) и неравенство $|x_n-1|$ выполняется для любого числа $N$ независимо от взятого $\varepsilon$.

Замечание 3. Очевидно, что бесконечно большие последовательности не имеют предела в том смысле, как этот предел был определен ранее. Поэтому обычно считают, что бесконечно большие последовательности имеют предел, равный $\infty$, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty\ ^{1)}.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $A>0$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $x_n>A$ $(x_n<-A)$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty\right)$. Во всех этих случаях говорят, что бесконечно большая последовательность имеет *бесконечный предел*, соответственно равный $\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

В связи с введением понятия «бесконечный предел» условимся называть первоначально определенный предел конечным пределом.

**Упражнение.** Приведите примеры таких последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=$ $=-\infty$ и, кроме того:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$. (*Отв.* $\{x_n\}=\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$.)
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$. (*Отв.* $\{x_n\}=\{2n\}$ и $\{y_n\}=$ $=\{-n\}$.)
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1$. (*Отв.* $\{x_n\}=\{n+1\}$ и $\{y_n\}=$ $=\{-n\}$.)
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ не существует. (*Отв.* $\{x_n\}=\{n+$ $+(-1)^n\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$.) (Ответы обоснуйте.)

**2. Основные свойства сходящихся последовательностей.** Прежде чем перейти к доказательству следующей теоремы, докажем лемму.

---

[1] Напомним, что здесь последовательность $\{x_n\}$ такова, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n|>A$.

**Лемма 3.1.** *Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу $c$, то $c=0$.*

□ Доказательство. Предположим обратное, что $c\neq 0$. Положим $\varepsilon=|c|/2$. Тогда, по определению бесконечно малой последовательности, существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$. Так как $\alpha_n=c$, а $\varepsilon=|c|/2$, то последнее неравенство можно переписать в виде $|c|<|c|/2$, откуда $1<1/2$. Полученное противоречие показывает, что предположение $c\neq 0$ не может иметь места. ■

**Теорема 3.5.** *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

□ Доказательство. Предположим обратное, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела $a$ и $b$. Тогда по формуле (4) для элементов $x_n$ получим

$$x_n=a+\alpha_n \quad \text{и} \quad x_n=b+\beta_n,$$

где $\alpha_n$ и $\beta_n$ — элементы бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Вычитая из первого соотношения второе, найдем, что $\alpha_n-\beta_n=b-a$. Так как все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n-\beta_n\}$ имеют одно и то же постоянное значение $b-a$, то по доказанной лемме 3.1 $b-a=0$, т. е. $b=a$. ■

**Теорема 3.6.** *Сходящаяся последовательность ограничена.*

□ Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и число $a$ — ее предел. Пусть, далее, $\varepsilon$ — произвольное положительное число и $N$ — номер, начиная с которого выполняется $|x_n-a|<\varepsilon$. Тогда для всех $n>N$

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<|a|+\varepsilon.^{1)}$$

Пусть $A=\max\{|a|+\varepsilon, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Очевидно, $|x_n|\leqslant A$ для всех номеров $n$, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. ■

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ ограничена, но не сходится. Проведем рассуждения от противного. Предположим, что предел данной последователь-

---

[1] См. сноску на с. 118.

ности — число $a$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности и для $\varepsilon = 1/2$, существует номер $N$ такой, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < 1/2$. Так как $x_n$ принимает попеременно значения 1 и $-1$, то можно записать $|1-a| < 1/2$ и $|(-1)-a| < 1/2$. Используя эти неравенства, имеем

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leqslant |1-a| + |a-(-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

т. е. $2 < 1$. Полученное противоречие доказывает расходимость данной последовательности.

○ **Пример 5.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, а последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел, отличный от нуля $(y_n \neq 0)$. Что можно сказать о последовательностях: 1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{y_n/x_n\}$; 3) $\{x_n/y_n\}$?

Решение. 1) Так как последовательность $\{y_n\}$ сходится, то по теореме 3.6 она является ограниченной, т. е. для всех $n$ выполняется неравенство $|y_n| < A$, а так как последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то начиная с некоторого номера $n$ будет выполняться неравенство $|x_n| > A + M$, где $M$ — любое положительное число. Тогда начиная с некоторого номера $n$ выполняется неравенство

$$|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n| > (A + M) - A = M,$$ [1]

т. е. $|x_n + y_n| > M$, а это, по определению бесконечно большой последовательности, и означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ бесконечно большая.

2) Последовательность $\{y_n/x_n\}$ бесконечно малая, так как ее можно представить в виде $\{1/x_n\} \cdot \{y_n\}$, где последовательность $\{1/x_n\}$, по теореме 3.1, бесконечно малая, последовательность $\{y_n\}$, согласно теореме 3.6, ограниченная, а по теореме 3.4, последовательность $\{1/x_n \cdot y_n\}$ бесконечно малая.

3) Так как последовательность $\{y_n/x_n\}$ (см. случай 2) бесконечно малая, то, по теореме 3.1, последовательность $\{x_n/y_n\}$ бесконечно большая. ●

Докажем следующие основные теоремы.

**Теорема 3.7.** *Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся*

---

[1] Здесь использовано свойство абсолютных величин $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ (см. теорему 1.4).

*последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ Доказательство. Пусть $a$ и $b$ — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда, по формуле (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

По теореме 3.2, последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\}$ также бесконечно малая и поэтому последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a \pm b$. ■

○ **Пример 6.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$?

Решение. Проведем рассуждения от противного. Предположим, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Тогда, согласно теореме 3.7, последовательность $\{y_n\}$ также сходится, так как $\{y_n\} = \{(x_n + y_n) - x_n\}$. Но, по условию, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ расходится. ●

**Теорема 3.8.** *Произведение сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ Доказательство. Пусть $a$ и $b$ — соответственно пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда, по формуле (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Согласно теоремам 3.2—3.4, последовательность $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{x_n y_n - ab\}$ также бесконечно малая и поэтому последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a \cdot b$. ■

○ **Пример 7.** Пусть последовательность $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q$, причем $|q| < 1$ и $x_1 \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}. \tag{5}$$

Решение. Так как (см. формулу (7) § 1)

$$S_n = \frac{x_1 - x_1 q^n}{1-q} = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \cdot q^n$$

и $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (см. пример 2), то, переходя к пределу при $n \to \infty$ и применяя теоремы 3.7—3.8, получаем

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \lim_{n \to \infty} q^n = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \cdot 0 = \frac{x_1}{1-q}. \ \bullet$$

Предел (5) называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* и часто обозначают через $S$.

Например, суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots$, где $x_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, т. е. $|q| = \frac{1}{2} < 1$, является

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

**Теорема 3.9.** *Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля*[1]*, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т. е.*

---

[1] Согласно условию $\lim\limits_{n \to \infty} y_n \neq 0$, элементы $y_n$ начиная с некоторого номера $N$ не обращаются в нуль, поэтому частное $\{x_n/y_n\}$ имеет смысл для всех $n > N$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

□ Доказательство. Пусть $a$ и $b$ $(b\neq 0)$ — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда, по формуле (4),

$$x_n=a+\alpha_n,\quad y_n=b+\beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{by_n}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Согласно свойствам бесконечно малых последовательностей, множитель $\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$ — бесконечно малая последовательность. Покажем, что $\{1/y_n\}$ есть ограниченная последовательность. Так как $y_n\to b$, $b\neq 0$ при $n\to\infty$, то для $\varepsilon=|b|/2$ найдется номер $N$ такой, что для всех $n>N$ будет $|y_n-b|<|b|/2$. Тогда

$$|y_n|=|b-(b-y_n)|\geqslant|b|-|y_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2},\text{[1]}$$

откуда $|y_n|>|b|/2$, и, следовательно, $|1/y_n|<2/|b|$ для всех $n>N$, что и означает ограниченность последовательности $\{1/y_n\}$.

По теореме 3.4, последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ бесконечно малая, поэтому последовательность $\{x_n/y_n-a/b\}$ также бесконечно малая. Следовательно, последовательность $\{x_n/y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a/b$. ■

Теоремы, доказанные в этом пункте, имеют очень большое как теоретическое, так и практическое значение. Но несмотря на свою простоту, их правильное применение представляет значительную трудность для многих начинающих. Особое внимание следует обратить на тот факт, что применение теорем требует существования конечных пределов. Покажем, какие ошибки можно сделать, если не учитывать этот факт.

---

[1] См. сноску на с. 129.

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}$. С одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5+0=5,$$

с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{\infty}{\infty}=1.$$

Получено неверное равенство $5=1$.

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$. С одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1,$$

с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\infty\cdot 0=0.$$

Получено неверное равенство $1=0$.

Наконец, рассмотрим последовательность 1, 1, 1, 1, ... с общим элементом $x_n=1$. С одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}[(n+1)-n]=\lim_{n\to\infty}(n+1)-\lim_{n\to\infty}n=\infty-\infty=0.$$

Опять получено неверное равенство $1=0$.

Во всех рассмотренных случаях допущена грубая ошибка: неправильно применены теоремы о пределах частного, произведения и разности — последовательности $\{5n+1\}$, $\{n\}$ и $\{n+1\}$ не имеют конечных пределов.

Еще раз подчеркнем, что запись $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ не обозначает никакого числа, а является лишь выражением того, что элементы последовательности $\{x_n\}$ по абсолютной величине неограниченно возрастают. Поэтому с символом $\infty$ нельзя обращаться как с числами и писать $\frac{\infty}{\infty}=1$, или $\infty\cdot 0=0$, или $\infty-\infty=0$.

Такого рода неточности часто встречаются при нахождении предела последовательности, заданной в виде отношения или разности двух выражений. Например, теорему о пределе частного непосредственно применить не удается, если числитель или знаменатель не имеют конечных пределов или предел знаменателя равен нулю. В таких случаях следует предварительно преобразовать данную последовательность. Часто бывает полезно разделить числитель и знаменатель на одно и то же выражение или умножить. Этот прием будет неоднократно использован в дальнейшем.

Рассмотрим теперь наиболее типичные примеры.

○ **Пример 8.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности и сразу применить теорему о пределе частного нельзя, так как в условии этой теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на $n^2$. Затем, применяя теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n+1/n^2}{3-1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-1/n^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

**Пример 9.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right)$.

Решение. В первом слагаемом в выражении, стоящем под знаком предела, как и в примере 8, применить сразу теорему о пределе частного нельзя. Поэтому, разделив сначала числитель и знаменатель на $n$, а затем применив теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+1/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}=\frac{5}{1+0}=5.$$

Второе слагаемое выражения, стоящего под знаком предела, можно рассматривать как произведение ограниченной последовательности $\{\sin n\}$ ($|\sin n|\leqslant 1$) и бесконечно малой $\{1/n\}$. По теореме 3.4, второе слагаемое является бесконечно малой последовательностью и предел ее равен нулю. Следовательно, окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=5+0=5.$$

Более компактно решение примера можно записать следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+1/n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}+\lim_{n\to\infty}\left(\sin n\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{1+0}+0=5.$$

Когда вырабатывается определенный навык, подробную запись можно сократить.

**Пример 10.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+1}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{n+1/n}=0,$$

так как при $n\to\infty$ последовательность $\{2-3/n\}$ ограниченная (покажите это самостоятельно), последовательность $\{n+1/n\}$ бесконечно большая (покажите это самостоятельно), а по теореме 3.1 последовательность $\left\{\dfrac{1}{n+1/n}\right\}$ является бесконечно малой. Следовательно, на основании теоремы 3.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{n+1/n}\right]=0.$$

**Пример 11.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+4}{n^2+5}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+4/n^3}{1/n+5/n^3} = \infty,$$

так как при $n\to\infty$ последовательность $\{z_n\}=\{2+4/n^3\}$ сходящаяся $(z_n\to 2)$, последовательность $\{1/z_n\}$ ограниченная (покажите это самостоятельно), последовательность $\{y_n\}=\{1/n+5/n^3\}$ бесконечно малая (покажите это самостоятельно), а по теореме 3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \left(y_n \cdot \frac{1}{z_n}\right) = 0,$$

то данная последовательность, в силу теоремы 3.1, есть бесконечно большая и ее предел равен $\infty$.

**Пример 12.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. Здесь, хотя в числителе и стоит сумма, теорему о пределе суммы непосредственно применить нельзя, поскольку число слагаемых не конечно, а зависит от $n$ (с увеличением $n$ число слагаемых тоже увеличивается). Поэтому проведем преобразование. Так как $1+2+3+\ldots+n$ есть сумма членов арифметической прогрессии с разностью $d=1$ и она равна $\frac{(1+n)n}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{2n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 13.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots 1/3^n}$.

Решение. Так как $1+q+q^2+\ldots+q^n$ — сумма $n+1$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $q$ (в числителе $q=1/2$, в знаменателе $q=1/3$) и она равна $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/2+1/2^2+\ldots 1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots+1/3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-1/2^{n+1})(1-1/3)}{(1-1/2)(1-1/3^{n+1})} =$$

$$=\frac{(1-0)(1-1/3)}{(1-1/2)(1-0)}=\frac{2/3}{1/2}=\frac{4}{3}.$$

**Пример 14.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

**Пример 15.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1}=\infty$ (покажите это самостоятельно) и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n+1}=\infty$ (покажите это самостоятельно), то применить непосредственно теорему о пределе разности нельзя. Поэтому сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, приведя его к общему знаменателю и разделив числитель и знаменатель на $n^3$. Затем, применяя теоремы о пределе частного, произведения и разности, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3/n}{(1+1/n^2)(3+1/n)}=\frac{1-0}{(1+0)(3+0)}=\frac{1}{3}. \bullet$$

**Упражнения.** Найти пределы: **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+11}+\frac{\cos n}{10n}\right)$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{1}{5}\right)$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$. (*Отв.* 0.) **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$. (*Отв.* 10.) **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$. (*Отв.* $\infty$.) **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$.

(Отв. $\infty$.) 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$. (*Отв.* 5.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+3n+2}$. (*Отв.* $\frac{1}{3}$. Указание: предварительно преобразовать числитель, используя формулу $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, доказанную в примере 1 гл. 1 § 6.) 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

(Отв. 0.)

**3. Предельный переход в неравенствах.**

Теорема 3.10. *Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n\geqslant b$ $(x_n\leqslant b)$, то и предел $a$ этой последовательности удовлетворяет неравенству $a\geqslant b$ $(a\leqslant b)$.*

□ Доказательство. Пусть все элементы $x_n$ начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n\geqslant b$. Требуется доказать неравенство $a\geqslant b$. Предположим обратное, что $a<b$.

Так как $a$ — предел $\{x_n\}$, то для $\varepsilon=b-a$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<b-a$, которое равносильно следующим двум неравенствам: $-(b-a)<x_n-a<b-a$. Из правого неравенства получаем $x_n<b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n\leqslant b$ рассматривается аналогично. ■

Замечание. Из теоремы следует, что знак нестрогого неравенства при переходе к пределу сохраняется. Однако при переходе к пределу в строгом неравенстве, $x_n>b$ $(x_n<b)$, может появиться и знак равенства, т. е. $a\geqslant b$ $(a\leqslant b)$. Возьмем, например, последовательность $\{1/n\}$. Очевидно, что $x_n=1/n>0$ $(b=0)$ для любого номера $n$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$ $(a=0)$.

○ **Пример 16.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, причем начиная с некоторого номера $n$ выполняется неравенство $x_n\leqslant y_n$. Доказать, что $a\leqslant b$.

Решение. Действительно, начиная с некоторого номера $n$, элементы последовательности $\{y_n-x_n\}$ неотрицательны, а поэтому, в силу теоремы 3.10, неотрицателен и ее предел:

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}y_n-\lim_{n\to\infty}x_n=b-a\geqslant 0,$$

отсюда следует, что $a\leqslant b$. ●

**Упражнения. 1.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ и все элементы $x_n\in[a, b]$, т. е. $a\leqslant x_n\leqslant b$ для любого номера $n$. Доказать, что и предел $c\in[a, b]$, т. е. $a\leqslant c\leqslant b$. **2.** Приведите пример последовательности, когда при переходе к пределу строгое неравенство не сохраняется. $\left(\textit{Отв.}\ \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}.\right)$

Следующая теорема играет важную роль в различных приложениях.

**Теорема 3.11.** *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, связанные неравенствами $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ — для всех $n$. Тогда если $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел $a$, то $\{y_n\}$ также имеет предел $a$.*

□ Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Для этого $\varepsilon$ для $\{x_n\}$ найдется номер $N_1$ такой, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при всех $n>N_1$, т. е.

$$\underline{a-\varepsilon<x_n}<a+\varepsilon. \tag{6}$$

Для этого же $\varepsilon$ для $\{z_n\}$ найдется номер $N_2$ такой, что $|z_n-a|<\varepsilon$ при всех $n>N_2$, т. е.

$$a-\varepsilon>\underline{z_n<a+\varepsilon.} \tag{7}$$

Возьмем $N=\max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n>N$ будут одновременно выполняться неравенства (6) и (7). Используя подчеркнутые их части, а также неравенства, данные в условии теоремы, можно записать

$$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon \text{ для } n>N.$$

Отсюда

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon \text{ или } |y_n-a|<\varepsilon \text{ для } n>N.$$

Последнее означает, что пределом $\{y_n\}$ является $a$. ■

○ **Пример 17.** Найти пределы последовательностей, заданных общими элементами:

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},\quad z_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}.$$

Так как $1 < \sqrt{1+1/n} < 1+1/n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, то, по теореме 3.11, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n} = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Действительно, с одной стороны,

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n,$$

с другой стороны,

$$y_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n,$$

т. е. получаем $x_n < y_n < z_n$. А так как, по только что доказанному, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, то, применяя еще раз теорему 3.11, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. ●

**Упражнение.** Пусть элементы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ для всех номеров $n$ и пусть последовательность $\{y_n\}$ бесконечно малая. Установить, существует ли предел последовательности $\{x_n\}$, и если да, то чему он равен и почему.

1. Сформулируйте определение предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию.

2. Приведите примеры, когда номер $N$ в определении предела последовательности зависит от $\varepsilon$; не зависит от $\varepsilon$.

3. Является ли бесконечно малая последовательность сходящейся?

4. Является ли бесконечно большая последовательность сходящейся?

5. Может ли последовательность иметь два разных предела?

6. Может ли неограниченная последовательность быть сходящейся?

7. Приведите пример ограниченной последовательности, но не являющейся сходящейся.

8. Приведите пример сходящейся и ограниченной последовательности.

9. Приведите примеры сходящихся последовательностей, когда: а) элементы последовательности с ростом $n$ приближаются к пределу только с одной стороны; б) с двух сторон одновременно. Дайте геометрическую интерпретацию.

10. Какая последовательность называется расходящейся?

11. Пусть в некоторой окрестности точки $a$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

12. Пусть в любой окрестности точки $a$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

13. Может ли последовательность с положительными элементами иметь отрицательный предел, а последовательность с отрицательными элементами — положительный предел?

14. Приведите пример, когда при переходе к пределу строгое неравенство сохраняется (не сохраняется).

15. Сформулируйте теорему о трех последовательностях.

## § 3. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей.

**Определение.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется возрастающей, если* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$; *неубывающей, если* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$; *убывающей, если* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$; *невозрастающей, если* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$.

Все такие последовательности объединяются общим названием *монотонные*. Возрастающие и убывающие последовательности называются также *строго монотонными*.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

○ 1) Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ убывающая и ограниченная.

2) Последовательность 1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, ... ..., $1/n$, $1/n$, ... невозрастающая и ограниченная.

3) Последовательность 1, 2, 3, ..., $n$, ... возрастающая и неограниченная.

4) Последовательность 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., $n$, $n$, ... неубывающая и неограниченная.

5) Последовательность 1/2, 2/3, 3/4, ..., $n/(n+1)$, ... возрастающая и ограниченная. ●

При исследовании на монотонность конкретных последовательностей чаще всего выясняют знак разности $x_{n+1}-x_n$ или (для положительных последовательностей) сравнивают с единицей отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

○ **Пример 1.** Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n=\frac{n}{2n+1}$ монотонно возрастающая.

Решение. Надо доказать, что $x_{n+1}>x_n$ для любого $n$. Найдем $x_{n+1}$, заменив $n$ на $n+1$, в выражении для $x_n$:

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Сравним значения дробей $x_n=\frac{n}{2n+1}$ и $x_{n+1}=\frac{n+1}{2n+3}$; для этого приведем их к общему знаменателю. Получаем

$$x_{n+1}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n=\frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Так как $2n^2+3n+1>2n^2+3n$, то первая дробь больше второй, значит, $x_{n+1}>x_n$ для любого $n$, что и требовалось доказать.

**Пример 2.** Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n=\frac{n}{5^n}$ монотонно убывающая.

Решение. Надо доказать, что $x_n>x_{n+1}$ для любого $n$. В самом деле, рассмотрим отношение последующего члена $x_{n+1}$ к предыдущему $x_n$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}=\frac{(n+1)5^n}{5^n 5n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1+\frac{1}{n}}{5}\leqslant\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}<1.$$

Следовательно, $x_n > x_{n+1}$ для любого $n$, что и требовалось доказать. ●

Отметим, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны: неубывающие последовательности — снизу ($x_n \geqslant x_1$ для всех $n$), невозрастающие — сверху ($x_n \leqslant x_1$ для всех $n$). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, т. е. просто ограничена, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают. Например, немонотонная последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится (см. замечание к теореме 3.6).

Имеет место следующая основная теорема о монотонных последовательностях.

**Теорема 3.12.** *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

□ Доказательство. Рассмотрим случай монотонно неубывающей последовательности. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ и существует число $M$ такое, что все элементы $x_n$ не больше $M$, т. е. $x_n \leqslant M$. Рассмотрим числовое множество $X$, состоящее из элементов данной последовательности. По условию, это множество ограничено сверху и непусто. Поэтому, в силу теоремы 1.1, множество $X$ имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее через $a$ и покажем, что $a$ — предел данной последовательности.

Поскольку $a$ — точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{x_n\}$, то, согласно ее свойству, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что $x_N > a - \varepsilon$. Так как $\{x_n\}$ — неубывающая последовательность, то при $n > N$ имеем $x_n > a - \varepsilon$. С другой стороны, по определению верхней грани, $x_n \leqslant a < a + \varepsilon$ для всех $n$. Таким образом, для $n > N$ получаем неравенства $a < \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, из которых вытекает неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Последнее и означает, что число $a$ — предел последовательности $\{x_n\}$.

Случай монотонно невозрастающей последовательности аналогичен. ■

Замечание. Условие ограниченности монотонной последовательности представляет собой необходимое и достаточное условие ее сходимости.

В самом деле, если монотонная последовательность ограничена, то, в силу теоремы, она сходится; если же монотонная последовательность сходится, то согласно теореме 3.6, она ограничена.

○ **Пример 3.** Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n = \frac{n!}{n^n}$ сходится и найти ее предел.

Решение. Данная последовательность имеет вид $1, \frac{1\cdot 2}{2^2}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}, \ldots, \frac{n!}{n^n}, \ldots$ . Докажем сначала сходимость. Для этого, очевидно, достаточно показать, что данная последовательность монотонна и ограничена. Действительно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n},$$

а так как $\frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$, то $x_{n+1} < x_n$, значит, последовательность монотонно убывающая и ограничена сверху. Так как $x_n > 0$, то она ограничена снизу, например, нулем. Следовательно, последовательность монотонна и ограничена. По теореме 3.12, она сходится, т. е. имеет конечный предел.

Найдем этот предел. Обозначим его через $a$. Так как все элементы $x_n > 0$, то, согласно теореме 3.10, $a \geqslant 0$. Здесь воспользуемся неравенством Бернулли[1]:

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh \; (h > -1),$$

доказательство которого проведем по индукции. При $n=1$ неравенство очевидно (в этом случае оно переходит в равенство). Предположим, что оно справедливо при $n=k$ и докажем его справедливость при $n=k+1$. Умножая обе части неравенства на $(1+h)$ (знак неравенства не изменится, так как $1+h>0$), получаем

$$(1+h)^{k+1} \geqslant (1+kh)(1+h) = 1 + kh + h + kh^2 \geqslant 1 + (k+1)h$$

(так как $kh^2 \geqslant 0$), что и требовалось доказать. Продолжая решение примера, имеем

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

---

[1] Бернулли Якоб (1654—1705) — швейцарский математик.

Следовательно, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\leqslant\frac{1}{2}$ или $x_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}x_n$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем неравенство $a\leqslant\frac{1}{2}a$, откуда $a=0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

**Пример 4.** Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$. Доказать, что эта последовательность имеет предел и найти его.

Решение. Данная последовательность имеет вид

$$x_1=\sqrt{2},\ \ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,$$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{корней}},\ \ldots.$$

Проверим факт существования предела. Для этого установим, что последовательность монотонна и ограничена. Из неравенства

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2x_n}>\sqrt{x_n^2}=x_n$$

следует, что $x_n<x_{n+1}$, т. е. последовательность монотонно возрастающая и ограничена снизу. Покажем, что последовательность ограничена и сверху. В самом деле, так как $x_1=\sqrt{2}<2$, то $x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$, $x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2$, ... .

Предположим, что доказано неравенство $x_n<2$. Тогда $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$, а так как $x_1<2$, то по индукции доказано, что для любого $n$ выполняется неравенство $x_n<2$, т. е. последовательность ограничена и сверху.

Таким образом, установлено, что данная последовательность монотонна и ограничена. Согласно теореме 3.12, она имеет конечный предел. Теперь, зная, что предел существует, найдем его. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$, так как общий элемент $x_{n+1}$

задает ту же последовательность, что и $x_n$. Возводя в квадрат равенство $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, получаем $x_{n+1}^2=2+x_n$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty}(2+x_n),$$

приходим к уравнению $a^2=2+a$. Решая полученное уравнение, находим $a_1=2$, $a_2=-1$. Так как, по доказанному ранее, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и по условию $x_1>0$, то предел должен быть положительным, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$. ●

Заметим, что теорема 3.12 устанавливает только факт существования предела и ничего не говорит о самом пределе. Однако и это в теории пределов имеет большое значение. Иногда важно только знать, что предел существует.

**2. Число e.** Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим элементом $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

и докажем, что она сходится. Для этого достаточно показать, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху.

Применяя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

Аналогично запишем $n+1$-й элемент:

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Прежде всего заметим, что $\left(1-\frac{k}{n}\right)<\left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ при $0<k<n$, т. е. каждое слагаемое в выражении $x_{n+1}$ больше соответствующего слагаемого в выражении $x_n$, и, кроме того, у $x_{n+1}$ по сравнению с $x_n$ добавляется еще одно положительное слагаемое. Поэтому $x_n<x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена снизу.

Для доказательства ограниченности данной последовательности сверху заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (1) меньше единицы. Учитывая также, что $1/n!<1/2^{n-1}$ при $n>2$, получаем

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Применим формулу для суммы геометрической прогрессии в последнем выражении; тогда

$$x_n<1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

т. е. последовательность ограничена сверху.

Таким образом, доказано, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастающая и ограничена. Согласно теореме 3.12, она имеет конечный предел. Этот предел называют *числом* e. Следовательно, по определению,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e имеет большое значение во многих вопросах теории и практики. В настоящем параграфе дано только определение числа e. Дальше будет приведен способ вычисления этого числа с любой степенью точности.

Здесь лишь отметим, что, так как $x_n<3$ и из (1) непосредственно очевидно, что $2<x_n$, то число e заключено в пределах $2\leqslant e\leqslant 3$. Доказывается также, что e — число иррациональное. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов, играющих в математике важную роль.

Натуральные логарифмы обозначаются $\ln x$ ($\ln x=\log_e x$). Установим связь между логарифмами чисел по любому основанию $a>0$ и натуральными логарифмами. Для этого воспользуемся вытекающим из определения логарифма тождеством $x=a^{\log_a x}$. Прологарифмируем обе части этого равенства по основанию e; получим

$$\ln x=\ln a^{\log_a x}=\log_a x\cdot\ln a,$$

откуда

$$\log_a x=\frac{1}{\ln a}\ln x,\quad \text{или}\quad \log_a x=M\ln x.$$

Число $M$ называется *модулем перехода*.

○ **Пример 5.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$ $=$e. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[\lim_{n\to\infty}1+\right.$$

$$\left.+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]=\mathrm{e}\cdot[1+0]=\mathrm{e}.$$

**Пример 6.** Найти последовательные целые числа, между которыми содержится выражение $6(1-1{,}01^{-100})$.

Решение. Представим данное выражение в виде

$$6(1-1{,}01^{-100})=6\left[1-\left(1+\frac{1}{100}\right)^{-100}\right].$$

Воспользуемся тем, что $2<(1+1/n)^n<3$. Тогда $1/2>$ $>(1+1/n)^{-n}>1/3$, $-1/2<-(1+1/n)^{-n}<-1/3$. Прибавляя к каждой части неравенства 1, находим $1/2<1-(1+1/n)^{-n}<2/3$. Полагая $n=100$ и умножая почленно на 6, окончательно получаем

$$3<6\left[1-\left(1+\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]<4,$$

что и требовалось найти. ●

?

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения: а) невозрастающей и возрастающей последовательностей; б) неубывающей и убывающей последовательностей.
2. Приведите пример немонотонной последовательности.
3. Приведите пример монотонной ограниченной (неограниченной) последовательности.
4. Докажите теорему о сходимости монотонной последовательности для случая невозрастающей последовательности.
5. Предел какой последовательности назван числом e?

## § 4. ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКАХ

Изучение теории пределов закончим доказательством теоремы, которая будет в дальнейшем неоднократно использована при доказательстве других важных теорем.

Пусть дана последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, что каждый последующий содержится в предыдущем: $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots$ $\ldots\supset[a_n, b_n]\supset$, ..., т. е.

$$a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n \quad \text{для всех } n, \tag{1}$$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. Назовем ее *последовательностью вложенных отрезков*. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.13.** *Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка $c$, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности, т. е. такая, что $a_n\leqslant c\leqslant b_n$.*

□ Доказательство. Из неравенств (1) следует, что левые концы отрезков образуют монотонно неубывающую последовательность

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots, \tag{2}$$

а правые концы — монотонно невозрастающую последовательность

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots \qquad (3)$$

При этом последовательность (2) ограничена сверху, а последовательность (3) ограничена снизу, так как $a_n \leqslant b_1$, а $b_n \geqslant a_1$ для любого $n$. Следовательно, на основании теоремы 3.12 эти последовательности имеют пределы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''$. Тогда из условия

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c'' - c' = 0$$

следует, что $c' = c''$, т. е. последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел. Обозначая этот предел через $c$, получаем, что для любого $n$ справедливы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, т. е. точка $c$ принадлежит всем отрезкам последовательности (1).

Покажем теперь, что точка $c$ является единственной. Допустим, что существует еще точка $c_1$ ($c_1 \neq c$), принадлежащая всем отрезкам последовательности (1). Тогда для любого $n$ должно выполняться неравенство $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c|$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geqslant |c_1 - c| \neq 0$, что противоречит условию теоремы. ■

Замечание. Теорема неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы. Например, для последовательности вложенных интервалов

$$(0,\ 1) \supset (0,\ 1/2) \supset (0,\ 1/4) \supset \ldots \supset (0,\ 1/2^n) \supset \ldots \quad (4)$$

не существует точки, принадлежащей всем интервалам. В самом деле, какую бы точку $c$ на интервале $(0,\ 1)$ ни взять, всегда найдется номер $N$ такой, что при $n > N$ имеет место $1/2^n < c$ и точка $c$ не будет принадлежать интервалам последовательности (4) начиная с интервала $(0,\ 1/2^N)$. Точка нуль также не принадлежит им, так как является общим левым концом всех интервалов.

○ **Пример 7.** Построить последовательность вложенных отрезков с точкой $c = 1$, принадлежащей всем отрезкам.

Решение. Искомой является последовательность вложенных отрезков $[1/2,\ 1]$, $[2/3,\ 1]$, $[3/4,\ 1]$, $[4/5,\ 1]$, ... ..., $[n/(n+1),\ 1]$, ..., так как левые концы отрезков образуют последовательность $\{n/(n+1)\}$, предел которой при $n \to \infty$ равен 1 (см. пример 1 из § 2). ●

?

## Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему о вложенных отрезках.
2. Дайте геометрическую интерпретацию последовательности вложенных отрезков.
3. Приведите пример последовательности вложенных отрезков, стягивающихся к точке $c=3$.

## § 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**3.1.** Последовательность $\{x_n\}$ задается двумя первыми элементами $x_1=0$, $x_2=1$ и рекуррентным соотношением $x_{n+2}=x_{n+1}-x_n$ для любого $n\geqslant 1$. Найдите $x_{90}$ и $x_{383}$.

**3.2.** Докажите, что последовательность $\{3^{\sqrt{n}}\}$ является бесконечно большой.

**3.3.** Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ является бесконечно малой.

**3.4.** Докажите вторую часть теоремы 3.1: если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, $(\alpha_n\neq 0)$, то $\{x_n\}=\{1/\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность.

**3.5.** Покажите, что неограниченная последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не является бесконечно большой.

**3.6.** Докажите, что последовательность $\{1+1/2+\ldots+1/2^n\}$ имеет своим пределом число 2.

**3.7.** Докажите, что последовательность $\{n/2^n\}$ имеет своим пределом число 0.

**3.8.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

**3.9.** Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

**3.10.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, а последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел $a\neq 0$. Что можно сказать о последовательности $\{x_n\cdot y_n\}$?

**3.11.** Приведите примеры таких последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ и, кроме того: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n$ не существует.

**3.12.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, а последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел $a\neq 0$. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n\cdot y_n\}$?

**3.13.** Известно, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ расходятся. Могут ли последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ быть сходящимися? расходящимися? Ответы обоснуйте примерами последовательностей $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$.

**3.14.** Найдите: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n^2+n-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-n}{2n+1}-\dfrac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)$.

**3.15.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a$ — любое число).

**3.16.** Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}}$.

**3.17.** Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$.

**3.18.** Докажите, что последовательность с общим элементом $x_n = \frac{2^n}{n!}$ сходится и найдите ее предел.

**3.19.** Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. Докажите, что эта последовательность сходится, и найдите ее предел.

*Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает*

*Н. Винер*

# ГЛАВА 4

# ФУНКЦИЯ

Переходя к изучению функции, отметим, что понятие функции является основным не только в математическом анализе, где оно изучается специально, но во всей математике в целом.

## § 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

**1. Определение функции и основные понятия.**

**Определение 1.** *Пусть $X$ и $Y$ — некоторые числовые множества. Функцией $f$ называется множество упорядоченных пар чисел $(x; y)$*[1] *таких, что $x \in X$, $y \in Y$ и каждое $x$ входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое $y$ входит по крайней мере в одну пару. При этом говорят, что числу $x$ поставлено в соответствие число $y$ и пишут $y = f(x)$. Число $y$ называется значением функции $f$ в точке $x$. Переменную $y$ называют зависимой переменной, а переменную $x$ — независимой переменной (или аргументом); множество $X$ — областью определения (или существования) функции, а множество $Y$ — множеством значений функции.*

В отдельных учебниках функцию понимают как определенное соответствие между элементами двух множеств. При этом понятие соответствия вводится как первичное, что, естественно, вызывает некоторые

[1] Напомним, что пара чисел $x$ и $y$ называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел мы записываем в виде $(x; y)$, где $x$ — первое число, $y$ — второе.

трудности в его раскрытии[1], а главное — в четком понимании самого понятия функции. Предлагаемое же определение функции через понятие множества, во-первых, лишено этих недостатков и, во-вторых, отвечает современному уровню преподавания математики.

Кроме буквы $f$ для обозначений функций используют другие буквы латинского и греческого алфавитов, например $y=y(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=A(x)$, $y=F(x)$ и т. д. Другими буквами обозначают зависимую и независимую переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

Наряду с термином «функция» используют равнозначный термин «отображение» и вместо $y=f(x)$ пишут $f: x \mapsto y$ и говорят, что *отображение $f$ отображает число $x$ в число $y$*, или, что то же самое, *число $y$ является образом числа $x$ при отображении $f$*.

При вычислениях запись $y=f(x)$ обычно удобнее записи $f: x \mapsto y$. Например, запись $f(x)=x^2$ проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \mapsto x^2$.

Пусть на некотором множестве $X$ определена функция $f(x)$; тогда значение этой функции, соответствующее некоторому значению аргумента $x_0$, обозначится $f(x_0)$. Например, если $f(x)=x^2$, то $f(3)=$ $=3^2=9$, $f(-2)=(-2)^2=4$ и т. д.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянная функция часто обозначается буквой $C$ ($f(x)=C$).

О функции $f(x)$, определенной на некотором множестве $X$, говорят, что она ограничена сверху (снизу) на этом множестве, если существует число $M(m)$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$). Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве $X$, называется *ограниченной на этом множестве*. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в следующем виде: существует число $M>0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

○ **Примеры.** 1) Функция $f(x)=\sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\sin x| \leqslant 1$ при любом $x$

---

[1] Попробуйте, например, объяснить, что означает термин «соответствие».

($M=1$); 2) функция $f(x)=\frac{1}{x}$ не является ограниченной сверху на интервале $(0,\ 1)$, так как не существует числа $M$ такого, что для любого $x\in(0,\ 1)$ выполняется неравенство $\frac{1}{x}\leqslant M$. ●

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве $X$, а $Y$ — множество ее значений и пусть она ограничена сверху (снизу) на множестве $X$. Тогда число $M\ (m)$ и всякое большее (меньшее) число называется *верхней (нижней) гранью множества значений функции* $Y$, а наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество $Y$ сверху (снизу),— *точной верхней (нижней) гранью функции на множестве* $X$, которая обозначается $\sup\limits_{X} f(x)$ ($\inf\limits_{X} f(x)$).

Если множество $Y$ не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup\limits_{X} f(x)=+\infty$ ($\inf\limits_{X} f(x)=-\infty$). В этом случае для любого числа $A$ существует такая точка $x'\in X$, что $f(x')>A$ ($f(x')<A$).

○ **Пример.** Функция $f(x)=\frac{x}{1+x}$ в промежутке $X=[0,\ +\infty)$ имеет точную нижнюю грань $m=0$ и точную верхнюю грань $M=1$. Действительно, функция ограничена на данном промежутке, так как для любого $x\in[0,\ +\infty)$ выполняются неравенства $0\leqslant\frac{x}{1+x}<1$ ($m=0$, $M=1$). Значит, $m$ и $M$ являются соответственно нижней и верхней гранями множества значений функции $Y=[0,\ 1)$. Кроме того, так как $f(x)\geqslant 0$, то $m=0$ — точная нижняя грань множества значений функции. Для доказательства, что $M=1$ — точная верхняя грань функции $f(x)$, воспользуемся свойством точной верхней грани: для любого $\varepsilon>0$ существует число $x\in[0,\ +\infty)$ такое, что $\frac{x}{1+x}>1-\varepsilon$ или $x>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, т. е. при $x$, удовлетворяющем последнему неравенству, выполняется неравенство $f(x)>1-\varepsilon$, а

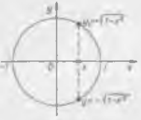


Рис. 77

это и доказывает, что $M=1$ является точной верхней гранью функции $f(x)=\frac{x}{1+x}$, или, в принятых обозначениях, $1=\sup\limits_{[0;+\infty)}\frac{x}{1+x}$, а $0=\inf\limits_{[0;+\infty)}\frac{x}{1+x}$. Заметим, что точная верхняя грань $M=1$ не принадлежит множеству значений функции $Y$, а точная нижняя грань $m=0$ принадлежит $Y$. ■

Над функциями можно производить различные арифметические операции. Если даны две функции $f$ и $g$, определенные на одном и том же множестве $X$, а $C$ — некоторое число, то функция $C\cdot f(x)$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x\in X$ значение $C\cdot f(x)$; функция $f\pm g$ — как функция, принимающая в каждой точке $x\in X$ значение $f(x)\pm g(x)$; $f\cdot g$ — как функция, принимающая в каждой точке $x\in X$ значение $f(x)\cdot g(x)$; $f/g$ — как функция, принимающая в каждой точке $x\in X$ значение $f(x)/g(x)$ (при $g(x)\neq 0$).

На плоскости функцию изображают в виде графика — множества точек $(x;\ y)$, координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$, называемым *уравнением графика*.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую) и может состоять из отдельных точек, например график функции $y=n!$ (рис. 79).

Заметим, что не всякая линия является графиком какой-либо функции. Например, окружность $x^2+y^2=1$ не есть график функции, так как каждое $x\in(-1,\ 1)$ входит не в одну, а в две пары чисел $(x;\ y)$ этого множества с разными значениями $y\cdot y_1=+\sqrt{1-x^2}$ и $y_2=-\sqrt{1-x^2}$, что противоречит требованию однозначности в определении функции (рис. 77). Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является графиком функции $y=-\sqrt{1-x^2}$, а другая ее часть, лежащая в верхней полуплоскости,— графиком функции $y=+\sqrt{1-x^2}$.

**2. Способы задания функций**. Задать функцию $f$ — значит указать, как по каждому значению аргумента

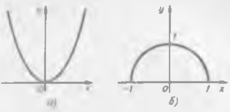


Рис. 78

$x$ находить соответствующее ему значение функци $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: *аналитический*, *табличный* и *графический*.

1) Аналитический способ. Этот способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие и в каком порядке действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента. Рассмотрим примеры.

○ **1.** Формула $y=x^2$ задает функцию, область определения которой — числовая прямая $(-\infty, +\infty)$, а множество значений — полупрямая $[0, +\infty)$ (рис. 78, *а*).

**2.** Формула $y=\sqrt{1-x^2}$ задает функцию, областью определения которой является отрезок $[-1, 1]$, а множеством значений — отрезок $[0, 1]$ (рис. 78, *б*).

**3.** Формула $y=n!$ ставит в соответствие каждому натуральному числу (т. е. целому положительному числу) $n$ число $y=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$. Например, если $n=3$, то $y=3!=6$. Таким образом, формула $y=n!$ задает функцию, область определения которой $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, а множество значений — $\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$ (рис. 79).

**4.** $y=\operatorname{sgn} x$[1] $= \begin{cases} +1, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$

Данная функция задана с помощью нескольких формул. Она определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из трех чисел: $-1$, $0$ и $+1$ (рис. 80).

**5.** Формула Дирихле[2]

---

[1] Термин sgn происходит от лат. signum — знак.

[2] Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859) — немецкий математик.

Рис. 79

Рис. 80

$$y=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из двух чисел: 0 и 1. ●

Заметим, что функцию Дирихле изобразить графически не представляется возможным.

2) Табличный способ. Приведем следующую таблицу:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 3 | 0,6 | 4 | 0,8 | 1,5 | 2 |
| $y$ | −1 | 10 | 1 | −2 | −8 | 0,5 | −2 | 1 | 2 |

Поставим в соответствие каждому $x$, записанному в первой строке таблицы, число $y$, стоящее во второй строке под этим числом $x$, и будем говорить, что полученная функция задана таблицей. Областью определения данной функции является множество, состоящее из девяти чисел $x$, указанных в первой строке таблицы, а множеством ее значений — множество, состоящее из девяти чисел $y$, приведенных во второй ее строке.

С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента.

Табличный способ часто используют для задания функций. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и др. Примером табличного способа задания функции служит расписание движения поезда, которое определяет местоположение поезда в отдельные моменты времени.

3) Графический способ. Графический способ задания функции обычно используют в практике физических измерений, когда соответствие между переменными $x$ и $y$ задается с помощью графика. Такая операция обычно называется «снятием» значений с графика. Во многих случаях графики чертят самопишущие приборы. Например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют специальный самопишущий прибор — барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой линии изменение давления в зависимости от высоты.

Существуют и другие способы задания функций, например при проведении расчетов на ЭВМ функции задаются с помощью программ.

**3. Понятия сложной и обратной функций.**

**Определение 2.** *Если на некотором множестве $X$ определена функция $z=\varphi(x)$ со множеством значений $Z$, а на множестве $Z$ — функция $y=f(z)$, то функция $y=f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией от $x$ [или суперпозицией (иногда композицией) функций $\varphi(x)$ и $f(z)$], а переменная $z$ — промежуточной переменной сложной функции.*

○ **Пример.** Функция $y=\sin x^2$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y=f(z)=\sin z$, $z=\varphi(x)=x^2$. ●

**Определение 3.** *Пусть $X$ и $Y$ — некоторые множества и пусть задана функция $f$, т. е. множество пар чисел $(x; y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$, в котором каждое число $x$ входит в одну и только одну пару, а каждое число $y$ — по крайней мере в одну пару. Если в каждой паре этого множества числа $x$ и $y$ поменять местами, то получим множество пар чисел $(y; x)$, которое называется обратной функцией $\varphi$ к функции $f$.*

Обратную функцию будем обозначать символом $x=\varphi(y)$.

Обратная функция, вообще говоря, не является функцией, так как каждое число $y$ может входить не

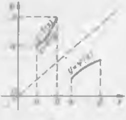


Рис. 81

только в одну, но и в несколько пар. Так, например, для функции $y=x$ обратная функция $x=y$ однозначна (каждое число $y$ входит в одну пару), для функции $y=x^2$ обратная функция $x=\pm\sqrt{y}$ двузначна (каждое число $y$ входит в две пары), а обратная функция $x=\operatorname{Arcsin} y$ для функции $y=\sin x$ многозначна (каждое число $y$ входит в бесконечное число пар). Геометрически данный факт очевиден.

Из определения следует, что если обратная функция однозначна, т. е. является функцией в обычном смысле, то множество значений $Y$ функции $f$ служит областью определения обратной функции $\varphi$, а область определения $X$ функции $f$ — множеством значений обратной функции $\varphi$. Пусть, например, функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, отрезок $[\alpha, \beta]$ является множеством ее значений и каждое $y\in[\alpha, \beta]$ соответствует ровно одному $x$ из $[a, b]$. Тогда, по определению, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, множеством значений которой служит отрезок $[a, b]$ (рис. 81).

Таким образом, функция $y=f(x)$ и обратная функция $x=\varphi(y)$ имеют один и тот же график. Например, функция $y=5x$ и обратная функция $x=1/5y$ изображаются графически одной прямой.

Если оси $Ox$ и $Oy$ поменять местами, для чего следует повернуть в пространстве плоскость $Oxy$ вокруг биссектрисы I координатного угла на 180°, то новое положение графика обратной функции $x=\varphi(y)$ является графиком функции $y=\varphi(x)$ (рис. 81).

Рассмотрение сложной и обратной функций будет далее продолжено.

**4. Классификация функций.** Постоянная функция $f(x)=C$, $C=\text{const}$, степенная функция $x^{\alpha}$ ($\alpha$ — любое число), показательная функция $a^x$ $(0<a\neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0<a\neq 1)$, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$,

$\operatorname{arcctg} x$ называются *простейшими элементарными функциями*[1].

Эти функции играют важную роль в раскрытии основных понятий анализа и составляют базу для изучения более сложных функций.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией этих функций, составляют *класс элементарных функций*. Примерами элементарных функций являются $f(x)=|x|\ (|x|=\sqrt{x^2})$; $f(x)=\lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}}+\sin 3x$; $f(x)=\ln|\sin 3x|-e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ и т. д.

Имеет место следующая классификация элементарных функций:

1) Функция вида

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

где $m \geqslant 0$ — целое число, $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ — любые числа — коэффициенты ($a_0 \neq 0$), называется *целой рациональной функцией* или *многочленом* степени $m$. Многочлен первой степени называется также *линейной функцией*.

2) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},$$

называется *дробно-рациональной функцией*.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует *класс рациональных функций*.

3) Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*.

Например, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-4x+4}}+(\sqrt[5]{x}+x)^2$ и т. д. — иррациональные функции.

[1] Предполагается, что читатель имеет представление о простейших элементарных функциях по крайней мере в рамках элементарной математики.

4) Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется *трансцендентной функцией*. Это, например, функции $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sin x+x$ и т. д.

**5. Построение графиков функций.** Предложим следующую методику построения графиков функций, основанную на применении некоторых правил построения по уже известным графикам функций.

Пусть дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=f(x-a)$. График функции $y=f(x-a)$ может быть получен следующим образом: отправляясь от произвольной точки $x$, в которой ордината $f(x)$ известна, найдем точку $x_1$, в которой ордината $f(x_1-a)$ имеет ту же величину, т. е. выполняется равенство

$$f(x_1-a)=f(x).$$

Для того чтобы данное равенство выполнялось, очевидно, достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$x_1-a=x,$$

откуда находим $x_1=x+a$[1].

Правило 1. *Чтобы получить график функции $y=f(x-a)$ из графика функции $y=f(x)$, нужно график функции $y=f(x)$ сдвинуть вдоль оси $Ox$ на $a$ вправо, если $a>0$, или на $|a|$ влево, если $a<0$.*

○ **Пример 1.** Используя правило 1, построить графики функций: **1.** $y=(x-2)^2$. **2.** $y=\log_{1/2}(x-2)$. **3.** $y=\frac{1}{x+2}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 82, 83 и 84. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=(x+2)^2$. **2.** $y=\log_{1/2}(x+2)$. **3.** $y=3^{x+2}$. **4.** $y=\frac{1}{x-2}$. **5.** $y=\frac{1}{x+1}$. **6.** $y=\sqrt{x+1}$. **7.** $y=\sqrt{x-1}$. **8.** $y=\log_2(x-2)$. **9.** $y=\log_2(x+2)$. **10.** $y=\cos(x+\pi/6)$. **11.** $y=\operatorname{tg}(x-\pi/2)$. **12.** $y=\arccos(x-2)$. **13.** $y=\operatorname{arcctg}(x-1/4)$.

Пусть дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=f(x)+c$.

---

[1] В самом деле, если $x_1=x+a$, то $f(x_1-a)=f(x+a-a)=f(x)$.

П р а в и л о 2. *Чтобы получить ординату графика функции $y=f(x)+c$ в точке $x$ из ординаты графика $y=f(x)$ в той же точке, нужно график $y=f(x)$ сдвинуть вдоль оси $Oy$ вверх на $c$, если $c>0$, или на $|c|$ вниз, если $c<0$.*

○ **Пример 2.** Используя правило 2, построить графики функций: **1.** $y=x^2+3$. **2.** $y=\sin x+2$; $y=\frac{1}{x}-1$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 85, 86 и 87. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=x^2-3$. **2.** $y=\sin x-2$. **3.** $y=\frac{1}{x}+1$. **4.** $y=\sqrt{x}+1$. **5.** $y=3^x-1$. **6.** $y=\log_{1/2}x+1$. **7.** $y=\sqrt[3]{x}+1$. **8.** $y=\operatorname{arctg} x+1$. **9.** $y=(1/2)^x+1$.

Дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=-f(x)$.

П р а в и л о 3. *Чтобы получить ординату графика функции $y=-f(x)$ в точке $x$ из ординаты графика функции $y=f(x)$ в той же точке, нужно у ординаты графика функции $y=f(x)$ изменить знак на обратный. Таким образом, график функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси $Ox$.*

○ **Пример 3.** Используя правило 3, построить графики функций: **1.** $y=-x^2$. **2.** $y=-\cos x$. **3.** $y=-\sqrt{x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 88, 89 и 90. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=-x^3$. **2.** $y=-\sqrt[3]{x}$. **3.** $y=-\frac{1}{x}$. **4.** $y=-3^x$. **5.** $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$. **6.** $y=-\log_3 x$. **7.** $y=-\sin x$. **8.** $y=-\operatorname{tg} x$. **9.** $y=-\operatorname{arcctg} x$.

Дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=f(-x)$.

П р а в и л о 4. *Чтобы получить ординату графика функции $y=f(-x)$ в точке $x$ из ординаты графика $y=f(x)$ в той же точке, нужно значение $x$ умножить на $-1$. Таким образом, график функции $y=f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси $Oy$.*

Рис. 82

Рис. 83

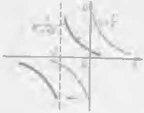


Рис. 84

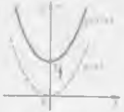


Рис. 85

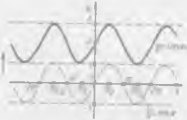


Рис. 86

Рис. 87

Рис. 88

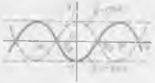


Рис. 89

○ **Пример 4.** Используя правило 4, построить графики функций: **1.** $y=\sqrt{-x}$. **2.** $y=\log_2(-x)$. **3.** $y=3^{-x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 91, 92 и 93. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: 1. $y=\log_{1/2}(-x)$. 2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$. 3. $y=\sqrt[3]{-x}$. 4. $y=\arcsin(-x)$. 5. $y=\operatorname{arcctg}(-x)$.

Дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=kf(x)$.

Правило 5. *Чтобы получить ординату графика функции $y=kf(x)$ в точке $x$ из ординаты графика функции $y=f(x)$ в той же точке, нужно значение ординаты $f(x)$ умножить на число $k$.*

При этом от умножения всех значений функции $f(x)$ на $k>1$ ординаты графика функции увеличиваются в $k$ раз и происходит «растяжение» графика функции $y=f(x)$ от оси $Ox$ в $k$ раз, а от умножения на $k$ при $0<k<1$ ординаты графика функции уменьшаются в $k$ раз и происходит «сжатие» графика функции $y=f(x)$ к оси $Ox$ в $k$ раз.

○ **Пример 5.** Используя правило 5, построить графики функций: **1.** $y=2x^2$. **2.** $y=2\sin x$. **3.** $y=1/2\sqrt{x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 94, 95 и 96. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=\frac{1}{2}x^2$. **2.** $y=\frac{1}{2}\sin x$. **3.** $y=2\sqrt{x}$. **4.** $y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. **5.** $y=\frac{3}{x}$. **6.** $y=\frac{1}{2}\log_{1/2}x$. **7.** $y=2\cdot 2^x$. **8.** $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x$. **9.** $y=\frac{1}{2}\arccos x$. **10.** $y=2\operatorname{arctg}x$. **11.** $y=2\log_{1/2}x$.

Дан график функций $y=f(x)$. Построим график функции $y=f(kx)$. Отправляясь от произвольной точки $x$, в которой известна ордината $f(x)$, найдем точку $x_1$, в которой график функции $y=f(kx_1)$ имеет ту же ординату, т. е. выполняется равенство

$$f(x)=f(kx_1).$$

Для того чтобы это равенство выполнялось[1], очевидно, достаточно выполнение равенства $x=kx_1$, откуда находим $x_1=\frac{1}{k}x$.

[1] Проверьте данный факт.

Рис. 90

Рис. 91

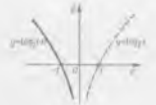


Рис. 92

Рис. 93

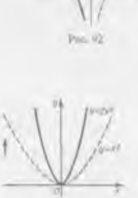


Рис. 94

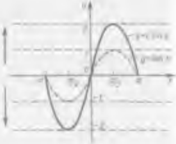


Рис. 95

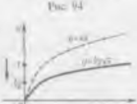


Рис. 96

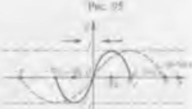


Рис. 97

П р а в и л о 6. *Чтобы построить график $y=f(kx)$, достаточно значение $x$ разделить на число $k$.*

При этом от деления на $k>1$ всех значений аргумента функции $y=f(x)$ график функции «сжимается» к оси $Oy$ в $1/k$ раз, а от деления на $k$ при $0<k<1$ график функции «растягивается» от оси $Oy$ в $1/k$ раз.

○ **Пример 6.** Используя правило 6, построить графики функций: **1.** $y=\sin 2x$. **2.** $y=\arcsin 2x$. **3.** $y=\sqrt{(1/2)x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 97, 98 и 99.

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=\sin(x/2)$. **2.** $y=\arcsin(x/2)$. **3.** $y=\sqrt{2x}$. **4.** $y=\sqrt[3]{8x}$. **5.** $y=5^{x/2}$. **6.** $y=(0,5)^{3x}$. **7.** $y=\log_{1/3}2x$. **8.** $y=\cos(x/2)$. **9.** $y=\mathrm{tg}\,2x$. **10.** $y=\arccos 3x$.

Прежде чем сформулировать следующее правило, построим график функции, последовательно применяя несколько правил.

○ **Пример 7.** Построить график функции $y=2x^2-8x+5$.

Преобразуем квадратный трехчлен, выделяя полный квадрат, к виду

$$y=2x^2-8x+5=2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=2\left[(x-2)^2-\frac{3}{2}\right]=$$
$$=2(x-2)^2-3$$

и построение будем выполнять в следующем порядке: 1) график функции $y=x^2$ считаем известным; 2) по правилу 5 строим график функции $y=2x^2$; 3) по правилу 1 строим график функции $y=2(x-2)^2$; 4) по правилу 2 строим график искомой функции $y=2(x-2)^2-3$ (рис. 100).

Получен график параболы $y=2x^2$, смещенный на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз. Аналогично строится график любого квадратного трехчлена. ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=2(x-5)^2-1$. **2.** $y=-2-(1/2)(x+3)^2$. **3.** $y=x^2-4x+1$. **4.** $y=3x-x^2$. **5.** $y=4-2x^2-2x$. **6.** $y=4x-x^2-3$.

Дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=|f(x)|$. Имеем

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x)<0.\text{[1]} \end{cases}$$

---

[1] К сожалению, иногда пишут неверное равенство

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Правило 7. *Чтобы получить график функции $y=|f(x)|$ из графика функции $y=f(x)$, надо участки графика $y=f(x)$, лежащие выше оси $Ox$, оставить без изменения, а участки ниже оси $Ox$ зеркально отразить относительно этой оси.*

○ **Пример 8.** Используя правило 7, построить график функции $y=|x|$.

Строим график функции $y=x$ (рис. 101). Далее, участок графика $y=x$, лежащий выше оси $Ox$ (при $x\geqslant 0$), оставляем без изменения, а участок ниже оси $Ox$ (при $x<0$) зеркально отражаем относительно этой оси; в результате получаем график функции $y=|x|$.

**Пример 9.** Построить график функции $y=|x+1|$.

Строим график функции $y=x+1$ (рис. 102). Затем участок графика $y=x+1$, лежащий выше оси $Ox$ (при $x\geqslant -1$), оставляем без изменения, а участок ниже оси $Ox$ (при $x<-1$) зеркально отражаем относительно этой оси; в результате получаем график функции $y=|x+1|$. Этот же график можно было получить, построив сначала график функции $y=|x|$ и применив затем правило 1.

**Пример 10.** Построить график функции $y=|1-|x||$.

Построение проведем в следующем порядке: 1) график функции $y=|x|$ считаем известным (см. рис. 101); 2) строим график $y=-|x|$ (по правилу 3); 3) строим график $y=1-|x|$ (по правилу 2); 4) строим график искомой функции $y=|1-|x||$ (по правилу 7). График функции $y=|1-|x||$ построен на рис. 103. ●

Дан график функции $y=f(x)$. Построим график функции $y=f(|x|)$. Так как $f(|-x|)=f(|x|)$, то функция $y=f(|x|)$ является четной, следовательно, ее график симметричен относительно оси $Oy$. Кроме того, при $x\geqslant 0$ $f(|x|)=f(x)$.

Правило 8. *Чтобы получить график функции $y=f(|x|)$ из графика функции $y=f(x)$, надо построить график функции $y=f(x)$ при $x\geqslant 0$ и отразить его зеркально относительно оси $Oy$.*

○ **Пример 11.** Используя правило 8, построить графики функций: **1.** $y=\sqrt{|x|}$. **2.** $y=\log_3|x|$. **3.** $y=\sin|x|$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 104, 105 и 106. ●

Иногда правила 7 и 8 приходится применять одновременно, т. е. строить графики функций вида $y=|f(|x|)|$.

Рис. 98

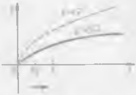


Рис. 99

Рис. 100

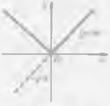


Рис. 101

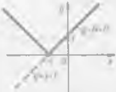


Рис. 102

Рис. 103

Рис. 104

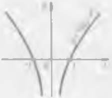


Рис. 105

○ **Пример 12.** Построить график функции $y=|2x^2-8|x|+5|$.

График функции $y=2x^2-8x+5$ уже построен (см. рис. 100). Замечая, что $x^2=|x|^2$, строим график функции $y=2x^2-8|x|+5$ по правилу 8. Строим часть параболы $y=2x^2-8x+5$ при $x\geqslant 0$ и отражаем ее зеркально относительно оси $Oy$ (рис. 107). Согласно правилу 7 построим график модуля (рис. 108). ●

В следующих примерах графики функций будем строить, используя различные правила, не указывая конкретно, какие.

○ **Пример 13.** Построить график функции $y=\left|\frac{x+5}{x+3}\right|$.

Преобразуем данную дробно-линейную функцию, выделяя целую часть, к виду $y=\left|1+\frac{2}{x+3}\right|$ и построим график в следующем порядкє. 1) график функции $y=\frac{1}{x}$ считаем известным; 2) строим график $y=\frac{1}{x+3}$; 3) строим график $y=\frac{2}{x+3}$; 4) строим график $y=1+\frac{2}{x+3}$; 5) строим график $y=\left|1+\frac{2}{x+3}\right|$ (рис. 109).

Заметим, что строить промежуточные графики можно как на одном рисунке, так и на разных. В данном случае для наглядности это следует выполнить на разных рисунках (сделайте это самостоятельно).

**Пример 14.** Построить график функции $y=\left(1/4\right)^{3x+1}+1$.

Представим функцию в виде $y=\left(1/4\right)^{3x+1}+1=$ $=\left(1/4\right)^{3(x+1/3)}+1$ и построение графика проведем в таком порядке: 1) график функции $y=\left(1/4\right)^{x}$ считаем

Рис. 106

Рис. 107

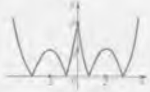


Рис. 108

Рис. 109

Рис. 110

Рис. 111

известным; 2) строим график $y=\left(1/4\right)^{[illegible]}$; 3) строим график $y=\left(1/4\right)^{[illegible]}$; 4) строим график $y=\left(1/4\right)^{[illegible]}+1$ (рис. 110).

**Пример 15.** Построить график функции $y=-\operatorname{arctg}(4x-1)$.

Представим функцию в виде $y=-\operatorname{arctg}(4x-1)=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ и построим ее график в следующем порядке: 1) график функции $y=\operatorname{arctg}x$ считаем известным; 2) строим график $y=\operatorname{arctg}4x$; 3) строим график $y=\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$; 4) строим график $y=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ (рис. 111). ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=1+\frac{1}{x+2}$. **2.** $y=\frac{1}{x+3}-1$. **3.** $y=\frac{4x+7}{2x-5}$. **4.** $-\left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$. **5.** $y=3^{x-2}$. **6.** $y=(0,25)^{x+3}$. **7.** $y=-2^{2x-1}$. **8.** $y=-(0,5)^{x+1}+1$. **9.** $y=2^{x+2}$. **10.** $y=-\arcsin\frac{x+2}{3}$. **11.** $y=2\operatorname{arctg}(2x-1)$. **12.** $y=3\operatorname{arcctg}(3x+1)$. **13.** $y=2\arccos\frac{1-x}{2}$. **14.** $y=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+2}{2}$.

Рассмотрим теперь правила сложения, умножения и деления графиков.

Даны графики функций $y_1=f(x)$ и $y_2=g(x)$. Построим график функции $y=f(x)+g(x)$[1].

Правило 9. *Чтобы получить график функции $y=f(x)+g(x)$ из графиков функций $y_1$ и $y_2$, нужно сложить соответствующие значения ординат графиков функций $y_1$ и $y_2$.*

○ **Пример 16.** Используя правило 9, построить график функции $y=x+\sin x$.

Функция $y$ определена на всей числовой прямой. Ее график получаем графическим сложением соответствующих значений ординат $y_1$ и $y_2$: $y=y_1+y_2$.

Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\sin x$ (штриховые линии на рис. 112). В точках $x=0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; ... имеем $y_2=0$, $y_1=x$ и $y=y_1+0=x$, т. е. в этих точках график функции проходит через прямую $y_1=x$. В точках $x=\pm\pi/2$; $\pm 3\pi/2$; ... имеем $y_2=\pm 1$, $y_1=x$ и $y=x\pm 1$, т. е. в этих точках к ординате $y_1=x$ прибавляем $+1$ (соответственно $-1$). Отмечая найденные точки и соединяя их плавной кривой, получаем график искомой функции (сплошная линия на рис. 112). ●

[1] Разность всегда можно свести к сумме. $y=f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$.

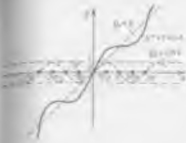


Рис. 112

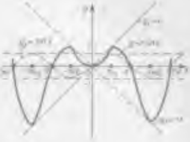


Рис. 113

**Упражнения.** Постройте графики функций: 1. $y=|x|+x$. 2. $y=3^x+3^{-x}$. 3. $y=\sin x+|\sin x|$. 4. $y=x^2+\frac{1}{x}$. 5. $y=|x|+\frac{1}{x}$. 6. $y=x+\cos x$.

Даны графики функций $y_1=f(x)$ и $y_2=g(x)$. Построим график функции $y=f(x)\cdot g(x)$.

П р а в и л о 10. *Чтобы получить график функции $y=f(x)\cdot g(x)$ из графиков функций $y_1$ и $y_2$, надо умножить соответствующие значения ординат графиков функций $y_1$ и $y_2$.*

○ **Пример 17.** Используя правило 10, построить график функции $y=x\cdot\sin x$.

Функция $y$ определена на всей числовой прямой. Так как функции $y_1=x$ и $y_2=\sin x$ нечетные, то функция $y$, как произведение нечетных функций, четная, следовательно, построение будем производить при $x\geqslant 0$.

Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\sin x$. График функции $y$ получим умножением соответствующих ординат $y_1$ и $y_2$: $y=y_1\cdot y_2$. В точках $x=\pi$; $2\pi$; ... имеем $y_2=0$ и $y=y_1\cdot y_2=0$, а в точках $x=\pi/2$; $3\pi/2$; ... $y_2=\pm 1$ и $y=y_1\cdot(\pm 1)=\pm x$, т. е. соответствующие точки графика функции $y$ лежат на прямых $y_1=x$ и $y_2=-x$ и график «колеблется» между этими прямыми при $x\to+\infty$. Таким образом, для построения данного графика целесообразно построить график вспомогательной функции $y_3=-x$.

При $x\to 0+$ (т. е. справа) функции $\sin x$ и $x$ эквивалентны ($\sin x\sim x$) (см. § 6), поэтому $y=y_1\cdot y_2=x\cdot x=x^2$. Построив часть графика при $x\geqslant 0$ и отражая ее относительно оси $Oy$, получаем искомый график (рис. 113). ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y = |x| \sin x$. **2.** $y = x \cdot |x|$. **3.** $y = x|\sin x|$. **4.** $y = x(x^2 - 1)$.

Даны графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Построим график функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Правило 11. *Чтобы получить график функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ из графиков функций $y_1$ и $y_2$, нужно разделить соответствующие значения ординат графиков функций $y_1$ и $y_2$ в точках, где $y_2 \neq 0$.*

○ **Пример 18.** Используя правило 11, построить график функции $y = \frac{|x-1|}{x}$.

Функция $y$ определена по всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. Строим графики функций $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = x$ (рис. 114). График функции $y$ получим делением соответствующих значений ординат графиков функций $y_1$ и $y_2$ во всех точках, за исключением $x=0$.

Из рисунка видно, что при $x \to 0-$ (т. е. слева) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ и $y = y_1/y_2 \to -\infty$, а при $x \to 0+$ (т. е. справа) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ и $y = y_1/y_2 \to +\infty$. Таким образом, прямая $x=0$ является асимптотой графика функции $y$. Определение асимптоты дано в гл. 5 § 15 п. 5.

В точке $x=1$ имеем $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ и $y = y_1/y_2 = 0$.

При $x \to +\infty$ получаем $y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \to 1$, поэтому прямая $y=1$ является асимптотой правой ветви графика функции $y$, а при $x \to -\infty$ имеем $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \to -1$, поэтому прямая $y = -1$ является асимптотой левой ветви графика функции $y$. Асимптоты будем изображать штриховой линией.

Таким образом, график искомой функции состоит из двух ветвей, изображенных на рис. 114 сплошной линией.

График данной функции может быть построен и другим способом. Функцию $y = \frac{|x-1|}{x}$ можно задать двумя формулами:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x} \text{ при } x-1\geq 0,\\ -\dfrac{(x-1)}{x} \text{ при } x-1<0,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x} \text{ при } x\geq 1,\\ \dfrac{1-x}{x} \text{ при } x<1.\end{cases}$$


Рис. 114

Построив отдельно дробно-линейные функции $y=\frac{1-x}{x}$ и $y=\frac{x-1}{x}$ и сохраняя только те их участки, которые соответствуют указанным промежуткам, получим искомый график. (Сделайте это самостоятельно.) ●

**Упражнения.** Постройте графики функций: **1.** $y=\frac{x}{|x-1|}$. **2.** $y=\frac{|7x+2|}{2x+1}$. **3.** $y=\frac{2x+4}{|3x+5|}$. **4.** $y=\frac{1}{\arcsin x}$. **5.** $y=\frac{1}{3^x+3^{-x}}$. **6.** $y=\frac{1}{4^{3x-1}+2}$.

(Указание к упражнениям 4—6: обозначить знаменатель через $y_1(x)$, построить сначала график функции $y_1(x)$, а затем график функции $y=\frac{1}{y_1(x)}$.)

Осталось рассмотреть правило построения графиков сложных функций. Понятие сложной функции введено в п. 3.

Дан график функции $u=\varphi(x)$. Построим график функции $y=f[\varphi(x)]$.

Правило 12. *Чтобы построить график функции $y=f[\varphi(x)]$, надо сначала построить график функции $u=\varphi(x)$, а затем, зная свойства функции $y=f(u)$, построить график сложной функции $y=f[\varphi(x)]$.*

○ **Пример 19.** Используя правило 12, построим график функции $y=2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Рис. 115

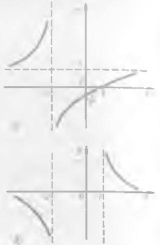


Рис. 116

Функция $y$ определена на всей числовой прямой, кроме точки $x=-1$. Сначала строим график функции $u=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$ (рис. 115, *а*), а затем, используя свойства показательной функции, построим график функции $y=2^u=2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Если $x\to-1-$, то $u\to+\infty$, $y=2^u\to+\infty$.

Если $x\to-1+$, то $u\to-\infty$, $y=2^u\to0$.

Если $x\to-\infty$, то $u\to1$, $y=2^u\to2$.

Если $x\to+\infty$, то $u\to1$, $y=2^u\to2$.

Таким образом, прямые $x=-1$ и $y=2$ являются асимптотами графика функции $y$. В точке $x=1$ имеем $u=0$, $y=2^0=1$.

На основании полученных данных строим искомый график (рис. 115, *б*); стрелка изображена для того, чтобы показать, что точка $(-1; 0)$ графику не принадлежит.

**Пример 20.** Используя правило 12, построить график функции $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Строим сначала график функции $u=\frac{x-1}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$ (рис. 116, *а*), а затем график функции $y=\log_{1/2}u=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$. По определению, логарифмическая функция $y=\log_{1/2}u$ определена лишь при тех значениях $x$, для которых $u>0$, т. е. $\frac{x-1}{x+2}>0$ для $x$, удовлетворяющих неравенствам $-\infty<x<-2$ и $1<x<+\infty$, которые являются областью определения функции $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Рис. 117

Если $x\to-\infty$, то $u\to1$, $y=\log_{1/2}u\to0$.

Если $x\to-2-$, то $u\to+\infty$, $y=\log_{1/2}u\to-\infty$.

Если $x\to+\infty$, то $u\to1$, $y=\log_{1/2}u\to0$.

Если $x\to1+$, то $u\to0$, $y=\log_{1/2}u\to+\infty$.

Таким образом, прямые $x=-2$, $x=1$ и $y=0$ являются асимптотами графика функции $y$. На основании полученных данных строим искомый график (рис. 116, *б*).

**Пример 21.** Используя правило 12, построить график функции $y=\arccos(1/x)$.

Как и ранее, сначала строим график функции $u=1/x$ (рис. 117, *а*), а затем график функции $y=\arccos u=\arccos(1/x)$. По определению, функция $y=\arccos u$ определена лишь при тех $x$, для которых $-1\leqslant u\leqslant1$, т. е. для $x$, удовлетворяющих неравенствам $-1\leqslant1/x\leqslant1$. Значит, областью определения функции $y=\arccos\frac{1}{x}$ являются два промежутка: $-\infty<x\leqslant-1$ и $1\leqslant x<+\infty$.

Если $x=-1$, то $u=-1$, $y=\arccos(-1)=\pi$.

Если $x=+1$, то $u=+1$, $y=\arccos1=0$.

Если $x\to-\infty$, то $u\to0$, $y=\arccos u\to\pi/2$.

Если $x\to+\infty$, то $u\to0$, $y=\arccos u\to\pi/2$.

Таким образом, прямая $y=\pi/2$ является асимптотой графика. На основании полученных данных строим искомый график (рис. 117, *б*). ●

**Упражнения.** Построить графики функций: **1.** $y=2^{|x|}$. **2.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. (*Отв.* Рис. 118.) **3.** $y=2^{x}$. **4.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1/x}$. **5.** $y=1+3^{x/(x-1)}$. **6.** $y=2^{x^2-2x}$. **7.** $y=2^{\operatorname{tg} x}$. **8.** $y=2^{\sin x}$. **9.** $y=2^{x^2-4x+5}$. **10.** $y=\log_{1/2}(x-x^2)$. **11.** $y=\log_2\frac{x+4}{2-x}$. **12.** $y=\log_2|\sin x|$. **13.** $y=\log_{1/2}\cos x$. **14.** $y=\log_{1/2}|x^2-3x+2|$. **15.** $y=\log_2(\sqrt[3]{x+1}+1)$. **16.** $y=\log_{1/2}\frac{2|x|-1}{|x|-2}$. (*Отв.* Рис. 119.) **17.** $y=\log_4|x+2|$. **18.** $y=|\log_4|x+2||$. **19.** $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-1}{x+1}$. **20.** $y=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{2-x}$. **21.** $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **22.** $y=\frac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$. (*Отв.* Рис. 120. Указание: числитель и знаменатель дроби предварительно разделить на $2^{1/x}$).

В заключение отметим, что умение строить графики функций, заданных формулами, имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Изучение функций гораздо проще и нагляднее, если оно сопровождается рассмотрением графиков этих функций. Вот почему инженер или научный работник, получив интересующую его функцию в виде формулы, всегда, когда надо выяснить общий характер поведения функции, ее особенности, начинает строить эскиз графика этой функции.

Далее, с помощью дифференциального исчисления будут рассмотрены более точные и совершенные методы построения графиков функций.

### ? Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции. В чем заключается однозначность функции? Что называется областью определения и областью значений функции? С помощью какого понятия определяется функция?
2. Что называется постоянной функцией?
3. Сформулируйте условие ограниченности функции.

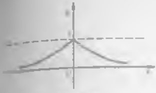


Рис. 118

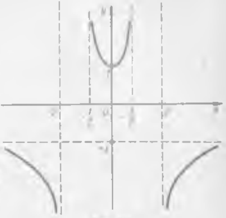


Рис. 119

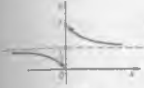


Рис. 120

**4.** Дайте определение точной верхней (нижней) грани функции.

**5.** Что означает запись $\sup\limits_X f(x) = +\infty$ $(\inf\limits_X f(x) = -\infty)$?

**6.** Что называется графиком функции? Приведите примеры функции и не функции. Дайте геометрическую интерпретацию.

**7.** Что значит задать функцию? Какие существуют способы задания функции?

**8.** Сформулируйте определения сложной и обратной функции. Приведите примеры.

**9.** Перечислите простейшие элементарные функции.

**10.** Какая функция называется элементарной? Приведите примеры.

**11.** Приведите пример не элементарной функции.

**12.** Сформулируйте определения рациональной, иррациональной и трансцендентной функций. Приведите примеры.

**13.** Опишите этапы построения графика функции $y = bf(kx+a)+c$, где $a$, $b$, $k$, $c$ — некоторые числа, если известен способ построения графика функции $y = f(x)$.

## § 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

**1. Предел функции при $x \to x_0$.** Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке $X$[1] и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из $X$ последовательность точек, отличных от $X_0$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

---

[1] Напомним, что здесь $X$ может быть любым промежутком вида $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, +\infty)$ и т. д.

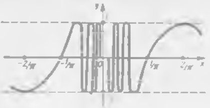



Рис. 121

сходящуюся к $x_0$ [1]. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots, \qquad (2)$$

и можно говорить о существовании ее предела.

**Определение 1.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности* (1) *значений аргумента $x$, отличных от $x_0$, соответствующая последовательность* (2) *значений функции сходится к числу $A$.*

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Функция $f(x)$ может иметь в точке $x_0$ только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Рассмотрим примеры.

○ 1. Функция $f(x) = C = \text{const}$ имеет предел в каждой точке $x_0$ числовой прямой, равный $C$. В самом деле, если (1) — любая последовательность, сходящаяся к $x_0$, то последовательность (2) имеет вид $C, C, \ldots, C, \ldots$, т. е. $f(x_n) = C$. Отсюда заключаем, что $f(x_n) \to C$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

2. Функция $f(x) = x$ имеет в любой точке $x_0$ числовой прямой предел, равный $x_0$. В этом случае последовательности (1) и (2) тождественны, т. е. $f(x_n) = x_n$. Следовательно, если $x_n \to x_0$, то $f(x_n) \to x_0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = f(x_0) = x_0$.

Заметим, что определение 1 удобно использовать, когда требуется доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела. Для этого надо показать, что существуют две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ значений аргумента $x$ такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = \lim\limits_{n \to \infty} x''_n = a$, но соответ-

[1] Предполагается, что такая последовательность существует.

ствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ значений функции имеют разные пределы.

**3.** Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ (рис. 121), определенная для всех $x\neq 0$, в точке $x=0$ не имеет предела. Действительно, возьмем две последовательности значений аргумента $x$: $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$ и $\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots$, сходящиеся к нулю. Соответствующими последовательностями значений функции являются $f\left(\frac{1}{\pi}\right), f\left(\frac{1}{2\pi}\right), f\left(\frac{1}{3\pi}\right), \ldots, f\left(\frac{1}{n\pi}\right), \ldots$ и $f\left(\frac{2}{\pi}\right), f\left(\frac{2}{5\pi}\right), f\left(\frac{2}{9\pi}\right), \ldots, f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right), \ldots$. Так как $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)=\sin n\pi=0$ при любом $n$, а $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)=\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}=1$, то для первой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

а для второй последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}=1.$$

Таким образом, для двух сходящихся к нулю последовательностей значений аргумента $x$ соответствующие последовательности значений функции имеют разные пределы. А это, по определению предела функции, и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

**4.** Функция $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$ имеет в точке $x=0$ предел, равный 1. Действительно, возьмем любую последовательность значений аргумента $x$, сходящуюся к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и $x_n\neq 0$, тогда, в силу теорем 3.7 — 3.9, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = \frac{0 + 0 - 1}{0 - 1} = 1$$

(при этом $x_n \neq 1$, так как при $x = 1$ рассматриваемая функция не определена). Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ и так как он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к нулю, то на основании определения предела функции заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5. Функция Дирихле, значения которой в рациональных точках равны единице, а в иррациональных — нулю, не имеет предела ни в одной точке $x_0$ числовой прямой. Действительно, для сходящейся в точке $x_0$ последовательности рациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен единице, а для сходящейся в точке $x_0$ последовательности иррациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен нулю. ●

Существует другое определение предела функции.

**Определение 2.** *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $x \in X$, $x \neq x_0$, *удовлетворяющих неравенству* $|x - x_0| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Неравенства $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$.

Первое определение основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его часто называют определением «*на языке последовательностей*». Второе определение называют определением «*на языке* $\varepsilon - \delta$».

**Теорема 4.1.** *Первое и второе определения предела функции эквивалентны*[1].

□ Доказательство. 1) Пусть $A$ — предел $f(x)$ в точке $x_0$ согласно первому определению. Покажем, что $A$ — предел согласно второму определению.

[1] Т. е. если функция имеет предел в точке $x_0$ согласно одному из определений, то этот же предел функция имеет и согласно другому определению.

Предположим обратное, т. е. что $A$ не является пределом этой функции согласно второму определению. Это значит, что не для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, чтобы из неравенства $0<|x-x_0|<\delta$ следовало бы равенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, т. е. существует такое $\varepsilon=\varepsilon_0>0$, для которого, какое бы $\delta>0$ ни взять, найдется хоть одна точка $x\neq x_0$ такая, что $|x-x_0|<\delta$, но $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$. Будем выбирать в качестве $\delta$ последовательно числа

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Тогда:

для $\delta=1$ в $X$ существует такое $x_1\neq x_0$, что $|x_1-x_0|<1$, а $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

для $\delta=1/2$ в $X$ существует такое $x_2\neq x_0$, что $|x_2-x_0|<1/2$, а $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

для $\delta=1/3$ в $X$ существует такое $x_3\neq x_0$, что $|x_3-x_0|<1/3$, а $|f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

.........................................................................................

для $\delta=1/n$ в $X$ существует такое $x_n\neq x_0$, что $|x_n-x_0|<1/n$, а $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

.........................................................................................

В результате получаем последовательность точек, отличных от $x_0$,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящуюся к точке $x_0$, так как $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому, согласно первому определению предела функции, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу $A$. Следовательно, для $\varepsilon_0$ найдется номер $N$ такой, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|f(x_n)-A|<\varepsilon_0$. Но этого быть не может, так как для всех $x_n$ выполняется неравенство $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает, что число $A$ — предел функции $f(x)$ в точке $x_0$ согласно второму определению.

2) Пусть теперь $A$ — предел $f(x)$ в точке $x_0$ согласно второму определению. Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $0<|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Покажем, что $A$ — предел $f(x)$ согласно первому

определению. Возьмем любую последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, сходящуюся к точке $x_0$ $(x_n \neq x_0)$. Тогда для указанного значения $\delta > 0$, соответствующего $\varepsilon$ согласно второму определению, найдется такое $N$, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_0| < \delta$. Но вместе с этим, в силу второго определения, выполняется и неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. А так как $\varepsilon$ было выбрано произвольно, то это и означает, что $f(x_n) \to A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся в точке $x_0$ $(x_n \neq x_0)$, т. е. число $A$ является пределом $f(x)$ в точке $x_0$ согласно первому определению. ■

После того как мы установили эквивалентность обоих определений предела функции, можно использовать любые из них в зависимости от того, какое более удобно при решении той или иной задачи.

○ **Пример 1.** Используя определение 2, доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ в точке $x = 1$ имеет предел, равный 1, т. е. $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому $\varepsilon$ найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$|3(x-1)| < \varepsilon, \text{ или } |x - 1| < \varepsilon/3.$$

Отсюда видно, что если взять $\delta \leqslant \varepsilon/3$, то для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$. В частности, если $\varepsilon = 1$, то $\delta \leqslant 1/3$, если $\varepsilon = 1/2$, то $\delta \leqslant 1/6$, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta \leqslant 0{,}03$, и т. д.; таким образом, $\delta$ зависит от $\varepsilon$. Поэтому в определении предела иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

**Пример 2.** Используя определение 2, доказать, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, определенная для всех $x \neq 0$, в точке $x = 0$ имеет предел, равный 0, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Как и ранее, по этому $\varepsilon$ надо найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 0| < \delta$ следовало бы неравенство

$|f(x)-0|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$ $\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1 \text{ при } x\neq 0\right)$. Отсюда видно, что если взять $\delta\leqslant\varepsilon$, то, как только $|x|<\delta$, справедливо неравенство $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

**Упражнения.** Используя определение 2, доказать, что: **1.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$. **2.** $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. **4.** $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$ $(f(x)=C=\text{const})$. **5.** $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

Заметим, что определение предела функции «на языке последовательностей» называют также определением предела функции по Гейне[1], а определение предела функции «на языке $\varepsilon-\delta$» — определением предела функции по Коши[2].

**2. Предел функции при $x\to x_0-$ и при $x\to x_0+$.** В дальнейшем будем использовать понятие односторонних пределов функции, которые определяются следующим образом.

**Определение 3.** *Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности* (1), *элементы $x_n$ которой больше (меньше) $x_0$, соответствующая последовательность* (2) *сходится к A.*

$$\text{Обозначение:}\quad \lim_{x\to x_0+} f(x)=A\quad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)=A\right)$$

○ В качестве примера рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{sgn}x$[3]. Эта функция имеет в точке $x=0$ правый и левый пределы: $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn}x=1$, $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn}x=-1$. В самом деле, если (1) — любая сходящаяся к нулю последовательность значений аргумента этой функ-

[1] Гейне Генрих Эдуард (1821—1881) немецкий математик.
[2] Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик.
[3] Определение функции $\operatorname{sgn}x$ приведено в п. 2 § 1.

ции, элементы $x_n$ которой больше нуля $(x_n>0)$, то $\operatorname{sgn} x_n=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n=1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x=1$. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x=-1$. ●

Можно дать равносильное определение односторонних пределов функции «на языке $\varepsilon-\delta$»: *число $A$ называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

**Теорема 4.2.** *Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*

□ Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$. Тогда, согласно определению предела функции слева и справа, для любого $\varepsilon>0$ существуют числа $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ такие, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $x_0-\delta_1<x<x_0$, и для всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $x_0<x<x_0+\delta_2$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Возьмем $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это, согласно определению 2, и означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке $x_0$, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Тем самым как для $x_0-\delta<x<x_0$, так и для $x_0<x<x_0+\delta$ справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это, согласно определению односторонних пределов, и означает, что

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} (x) = A. \blacksquare$$

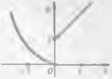


Рис. 122

○ **Пример 3.** Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \leqslant 0, \\ x+1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

в точке $x=0$ не имеет предела (рис. 122).

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. При $x \leqslant 0$ функция задается формулой $f(x) = x^2$. Так как предел функции $x^2$ в точке $x=0$ равен нулю (докажите самостоятельно), то, по теореме 4.2, левый предел данной функции в этой точке также равен нулю, т. е.

$$\lim_{x \to 0 -} f(x) = \lim_{x \to 0 -} x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Аналогично доказывается, что правый предел данной функции в точке $x=0$ равен 1, т. е. $\lim\limits_{x \to 0 +} f(x) = \lim\limits_{x \to 0 +} (x+1) = \lim\limits_{x \to 0} (x+1) = 1$. Следовательно, в точке $x=0$ данная функция имеет правый и левый пределы, но они не равны. Согласно теореме 4.2, это и означает, что данная функция в точке $x=0$ предела не имеет, т. е. $\lim\limits_{x \to 0 -} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0 +} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует. ●

**Упражнение.** Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ x+3 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

в точке $x=1$ не имеет предела.

○ **Пример 4.** Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x < 0, \\ \sin x \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

в точке $x=0$ имеет предел.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. Вычислим в точке $x=0$ односторонние пределы функции $f(x)$. Имеем $\lim\limits_{x \to 0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to 0 -} x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ (см. пример 2, п. 1); $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \sin x = 0$

Рис. 123

(см. пример 3 § 3). Следовательно, в точке $x=0$ данная функция имеет правый и левый пределы и они равны. Согласно теореме 4.2, это означает, что данная функция в точке $x=0$ имеет предел и он равен нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$. ●

**3. Предел функции при $x\to\infty$, при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.** Кроме рассмотренных понятий предела фунции при $x\to x_0$ и односторонних пределов существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

**Определение 4.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности* (1) *значений аргумента соответствующая последовательность* (2) *значений функции сходится к $A$.*

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

**Определение 5.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если для любой бесконечно большой последовательности* (1) *значений аргумента, элементы $x_n$ которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность* (2) *значений функции сходится к $A$.*

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$[1].

○ Рассмотрим пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$. Эта функция при $x\to\infty$ имеет предел, равный нулю. Действительно, если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последова-

---

[1] Если пределы функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ равны $A$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Например, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ $(A=0)$.

тельность значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}, \ldots$ по теореме 3.1 является бесконечно малой и поэтому имеет предел, равный нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ (рис. 123). ●

Определения 4 — 5 даны «на языке последовательностей». Можно дать равносильные определения «на языке $\varepsilon-\delta$». Рекомендуем сделать это самостоятельно. В качестве примера сформулируем определение предела функции при $x\to+\infty$.

**Определение 6.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta$ такое, что для всех $x\in X$, удовлетворяющих неравенству $x>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

○ **Пример 5.** Используя соответствующее определение предела «на языке $\varepsilon-\delta$», доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$.

Решение. Равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$ «на языке $\varepsilon-\delta$» означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $|x|>\delta$ следует неравенство $\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{|2x+1|}<\varepsilon$ или $|2x+1|>\frac{1}{\varepsilon}$. Найдем значения $x$, для которых выполняется последнее неравенство. Так как $|2x+1|>|2x|-1$, то достаточно решить неравенство $|2x|-1>\frac{1}{\varepsilon}$, откуда получаем $|x|>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Если взять $\delta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$, то для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x|>\delta$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$.

**Пример 6.** Используя соответствующее определение предела «на языке $\varepsilon-\delta$», доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+2}=\frac{5}{3}$

Решение. Равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$ «на языке $\varepsilon-\delta$» означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta$ такое, что из неравенства $x>\delta$ следует неравенство $\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|=\frac{14}{|3x+9|}<\varepsilon$. Найдем значения $x$, для которых выполняется последнее неравенство. Так как $x>0$, то, решая неравенство $\frac{14}{3x+9}<\varepsilon$, получаем $x>\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$. Если положить $\delta=\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$, то для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $x>\delta$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$. ●

**Упражнения.** Используя соответствующее определение предела «на языке $\varepsilon-\delta$», доказать, что:
**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2}{3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.
**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

○ **Пример 7.** Доказать, что функция $\sin x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению 5. Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента, элементы которой положительны, что последовательность $\{\sin x_n\}$ значений функции расходится. Положим $x_n=\frac{\pi}{2}(2n+1)$. Тогда $x_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, последовательность $\{\sin x_n\}$ принимает значения $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$, а последовательность $\{(-1)^n\}$ (см. замечание к теореме 3.6) расходится, что и требовалось доказать. ●

**Упражнение.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ не существует.

? Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте два определения предела функции. Что означает эквивалентность этих определений?
2. Приведите пример функции, не имеющей предела в данной точке.

3. При каких условиях из существования односторонних пределов функции следует существование предела функции и наоборот?

4. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$?

5. Сформулируйте два определения предела функции при $x\to+\infty$.

6. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x$ не существует.

## § 3. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Определение предела функции «на языке последовательностей» дает возможность перенести доказанные ранее теоремы о пределах последовательностей на функции. Покажем это на примере двух теорем.

**Теорема 4.3.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке $x_0$ пределы $B$ и $C$. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $C\neq 0$) имеют в точке $x_0$ пределы, равные соответственно $B\pm C$, $B\cdot C$ и $\frac{B}{C}$.*

□ **Доказательство.** Пусть $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ — произвольная, сходящаяся к $x_0$ последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют пределы $B$ и $C$. Но тогда, в силу теорем 3.7—3.9, последовательности $\{f(x_n)\pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ и $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (при $C\neq 0$) имеют пределы, соответственно равные $B\pm C$, $B\cdot C$ и $\frac{B}{C}$. Согласно определению 1 предела функции, это означает, что

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=B\pm C,\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=B\cdot C,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{C}\ \blacksquare$$

**Следствие.** *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}[C\cdot g(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, где $f(x)=C$ — постоянный множитель.*

В самом деле, $\lim\limits_{x\to x_0}[Cg(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$

$=C\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$ (см. пример 1 п. 1 § 2).

**Теорема 4.4.** *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x_0$, и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в точке $x_0$ предел, равный $A$, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

*Пусть, кроме того, выполняются неравенства $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

□ Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ — произвольная, сходящаяся к $x_0$ последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $h(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ значений этих функций имеют предел, равный $A$, т. е. $f(x_n)\to A$, $h(x_n)\to A$ при $n\to\infty$. Используя неравенства, данные в условии теоремы, можно записать

$$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant h(x_n).$$

Отсюда по теореме 3.11 следует, что $g(x_n)\to A$.

В силу определения 1 предела функции, это означает, что

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A. \ \blacksquare$$

Замечание. Теоремы 4.3 и 4.4 верны также и в случае, когда $x_0$ является одним из символов $\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

○ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+5)$.

Решение. На основании теоремы 4.3 (предел суммы и произведения) имеем

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+x+5)=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}5=$$

$$=3\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+5=3\cdot 1\cdot 1+1+5=9,$$

так как $\lim\limits_{x\to 1}x=1$ (см. пример 2 п. 1 § 2).

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Решение. Предел числителя

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1+1+1=3,$$

а предел знаменателя

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=$$

$$=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1-1+1=1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то, применяя теорему 4.3 (предел частного), окончательно получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)}=\frac{3}{1}=3.$$

**Пример 3.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x=0$.

Решение. Пусть $0<x<\pi/2$. Возьмем дугу $\overset{\frown}{AM}$ окружности единичного радиуса и угол, радианная мера которого равна $x$ (см. рис. 124). Тогда $\overset{\frown}{AM}=x$, $KM=\sin x$. Так как $0<KM<\overset{\frown}{AM}$, то

$$0<\sin x<x, \tag{1}$$

а так как $\lim\limits_{x\to 0+}x=0$ (см. пример 2 п. 1 § 2), то из неравенств (1) и теоремы 4.4 следует, что $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x=0$.

Докажите самостоятельно, что $\lim\limits_{x\to 0-}\sin x=0$.

**Пример 4.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$.

Решение. Для любого $x\neq 0$ выполняются неравенства

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}<1+\frac{1}{x^2}.$$

Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ (докажите это самостоятельно). По теореме 4.4 получаем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$. ●

**?** Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теоремы 4.3 и 4.4 о пределе функций.
2. Докажите теорему 4.3 при $x\to+\infty$. Где в доказательстве теоремы использовано, что $C\neq 0$?

## § 4. ДВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛА

**1. Первый замечательный предел:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

□ Докажем данное равенство. Рассмотрим дугу окружности радиуса $R=1$ с центральным углом, радианная мера которого равна $x$ $(0<x<\pi/2)$ (рис. 124). Тогда

$$OA=1,\ \sin x=MK,\ \operatorname{tg} x=AT. \qquad (1)$$

Очевидно, что площадь треугольника $OAM$ меньше площади сектора $OAM$, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника $OAT$ или, что то же самое, $\frac{1}{2}OA\cdot MK<\frac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AM}<\frac{1}{2}OA\cdot AT$. Принимая во внимание равенства (1), последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда получаем

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Разделив эти неравенства на $\sin x$, получим $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$, откуда находим $0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$.

Так как $\sin\frac{x}{2}<1$, то $\sin^2\frac{x}{2}<\sin\frac{x}{2}$. Поэтому, учитывая первое неравенство (2), для всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $0<x<\pi/2$, получаем

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x.$$

Итак, $0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon$ при $0<x<\pi/2$.

Рис. 124

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\min\{\varepsilon,\ \pi/2\}$. Тогда для всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $0<x<\delta$, будет выполняться неравенство $x<\varepsilon$, поэтому

$0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon$, откуда

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon.$$

Это означает, что 1 является правым пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, т. е. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$. Заметим теперь, что функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ четная, так как $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$. Поэтому и левый предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ равен 1. Отсюда, в силу теоремы 4.2, следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ■

Замечание. Используя неравенства $\sin x<x$ и $1-\cos x<x$ при $0<x<\pi/2$, полученные в ходе рассмотрения первого замечательного предела, легко доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. (Сделайте это самостоятельно.)

С помощью первого замечательного предела вычисляются многие другие пределы.

○ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Решение. Знаменатель дроби при $x\to 0$ стремится к нулю. Поэтому теорема 4.3 здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\sin\frac{x}{2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5/4}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5/4}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5/4}{1}=1{,}25. \blacksquare$$

**2. Второй замечательный предел:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

□ Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (см. гл. 3 § 3 п. 2). Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Действительно, пусть $x>1$. Положим $n=[x]$; тогда $x=n+\alpha$, где $n$ — натуральное число, а $\alpha$ удовлетворяет условию $0\leqslant\alpha<1$. Так как $n\leqslant x<n+1$, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$, то

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x\to+\infty$ $(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

Откуда по теореме 4.4 получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$



Пусть теперь $x<-1$. Положим $x=-y$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e$$

при $x\to-\infty$.

Объединяя оба случая, окончательно имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \blacksquare$$

Второй замечательный предел имеет широкое применение. С его помощью находятся многие другие пределы.

○ **Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Решение. Сделаем замену переменной, полагая $1/x=\alpha$. Тогда очевидно, что $\alpha\to\infty$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha=e.$$

**Пример 5.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $x=3t$. Тогда при $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=$$

$$=e\cdot e\cdot e=e^3. \bullet$$

?

Вопросы для самопроверки

1. Докажите первый и второй замечательные пределы.

2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

## § 5. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

**1. Бесконечно малые функции.**

**Определение 1.** *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0-$ и $x\to x_0+$.

Так как предел бесконечно малой функции равен нулю, т. е. $|f(x)-A|=|f(x)-0|=|f(x)|$, то можно дать равносильное определение бесконечно малой функции «на языке $\varepsilon-\delta$»: *функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x=x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in X$, $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$,* и «на языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x=x_0$, если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, отличных от $x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ является бесконечно малой.*

Так же как бесконечно малые последовательности, бесконечно малые функции играют существенную роль: общее понятие предела функции может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.5.** *Для выполнения равенства* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\alpha(x)=f(x)-A$$

*была бесконечно малой при $x\to x_0$.*

□ Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Рассмотрим разность $f(x)-A=\alpha(x)$ и покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$. Действительно, пределы каждой из функций $f(x)$ и $A$ при $x\to x_0$ равны $A$ и поэтому, в силу теоремы 4.3,

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}A=A-A=0.$$

Достаточность. Пусть $f(x)-A=\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Так как $f(x)=A+\alpha(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[A+\alpha(x)\right]=\lim_{x\to x_0} A+\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=$$
$$=A+0=A. \blacksquare$$

Из теоремы 4.5 получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x=x_0$ предел, равный $A$:

$$f(x)=A+\alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

При этом обычно говорят, что функция $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ отличается от $A$ на бесконечно малую функцию.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые последовательности. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.6.** *Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x\to x_0$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из первого определения предела функции и теорем 3.2—3.4.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x\to x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0-$ и $x\to x_0+$.

○ **Пример 1.** Доказать, что функция $f(x)=(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ при $x\to 1$ является бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ (докажите это самостоятельно), то, согласно определению 1, функция $(x-1)$ бесконечно малая при $x\to 1$, а так как функция $\sin\frac{1}{x-1}\,(x\neq 1)$ ограничена $\left(\left|\sin\frac{1}{x-1}\right|\leqslant 1\right)$, то данная функция $f(x)$ представляет собой произведение бесконечно малой функции на ограниченную. По теореме 4.6 это означает, что $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to 1$, т. е. $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$. ●

**2. Бесконечно большие функции.**

**Определение 2.** *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.*

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что *функция стремится к бесконечности при $x \to x_0$* или что она имеет *бесконечный предел в точке $x = x_0$*.

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) и говорят, что *функция имеет в точке $x_0$ бесконечный предел, равный* $+\infty$ ($-\infty$).

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty.$$

Так, например, пишут $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$.

«На языке последовательностей» это же определение записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$, если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x$, элементы $x_n$ которой больше $x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой положительного знака.

Точное определение подобных пределов рекомендуем читателю дать самостоятельно.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так, например. функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$).

Предлагаем самостоятельно сформулировать определение бесконечно большой функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

В заключение покажем, что между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, т. е. функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот.

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — бесконечно малая функция в точке $x_0$, то для числа $1/\varepsilon$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \dfrac{1}{\varepsilon}$. Но тогда для тех же $x$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая функция в точке $x = x_0$, что и требовалось доказать. (Обратное утверждение рекомендуем доказать самостоятельно.)

○ **Пример 2.** Используя определение 2, доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$ является бесконечно большой, т. е. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x} = \infty$.

Решение. Согласно определению надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - 1| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, т. е. $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > \varepsilon$.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и решим неравенство $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$. Получаем $|x-1|<1/\varepsilon$. Таким образом, в качестве $\delta$ можно взять число $1/\varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=1/\varepsilon$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$. Это и означает, что данная функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x\to 1$.

**Пример 3.** Доказать, что функция $f(x)=\log_a x\,(a>1)$ при $x\to+\infty$ является бесконечно большой, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

Решение. Надо показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $x>\delta$ следует неравенство $\log_a x>\varepsilon$.

Берем любое $\varepsilon>0$ и рассматриваем неравенство $\log_a x>\varepsilon$. Если взять $\delta=a^\varepsilon$, то при $x>\delta$ будет выполняться неравенство $\log_a x>\varepsilon$, а это означает, что данная функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x\to+\infty$.

**Пример 4.** Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.

Решение. Надо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$ следует неравенство $f(x)+g(x)>\varepsilon$, т. е. функция $f(x)+g(x)$ удовлетворяет определению бесконечно большой функции положительного знака в точке $x_0$.

Предварительно покажем, что если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$, то существует $\delta'$-окрестность точки $x_0$, в которой

$$|f(x)|<M, \tag{1}$$

где $M$ — некоторое положительное число. Действительно, по условию задачи, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, тогда на основании определения предела функции для $\varepsilon=1$ существует $\delta'>0$ такое, что из неравенства $|x-x_0|<\delta'$, $x\neq x_0$ следует неравенство $|f(x)-A|<1$. Так как $|f(x)-A|\geqslant|f(x)|-|A|$ (см. теорему 1.4), то $|f(x)|-|A|<1$, откуда $|f(x)|<|A|+1=M$, что и требовалось показать.

Возьмем теперь любое $\varepsilon > 0$. Так как, по условию, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то, согласно определению бесконечно большой функции при $x \to x_0$, для числа $\varepsilon + M > 0$ существует $\delta > 0\, (\delta \leqslant \delta')$ такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ следует неравенство

$$g(x) > \varepsilon + M. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем, что при $|x - x_0| < \delta \leqslant \delta'$ справедливо неравенство $f(x) + g(x) \geqslant g(x) - |f(x)| > \varepsilon + M - M = \varepsilon$, а это означает, что функция $f(x) + g(x)$ удовлетворяет определению бесконечно большой функции при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$. ●

**?** Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции: а) при $x \to x_0$; б) при $x \to \infty$. Приведите примеры таких функций.
2. Какова связь между понятиями предела функции и бесконечно малой функцией?
3. Сформулируйте определение бесконечно большой функции: а) при $x \to x_0$; б) при $x \to \infty$.
4. Что означают записи: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$? Дайте соответствующие определения.
5. Какова связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями?

## § 6. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

Мы уже знаем, что сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями. Этого, вообще говоря, нельзя сказать о частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам. Так, например, если $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Если же $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

Пусть при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ (говорят также, что $\alpha(x)$ имеет *более высокий порядок малости*, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$);

2) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ ($A$ — число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* (имеют как бы «одинаковую скорость» стремления к нулю);

3) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*. Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. В некоторых случаях оказывается недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить, как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило:

4) *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, *то* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой n-го порядка относительно* $\beta(x)$.

Существуют аналогичные правила для сравнения бесконечно малых функций при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$, при $x \to +\infty$, а также при $x \to x_0$ справа и слева.

○ Рассмотрим примеры.

1. Функции $\sin x$ и $x$ являются при $x \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Функции $\sin 3x$ и $\sin x$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3 \cdot \sin 3x)}{(3x)}}{(\sin x)/x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 3.$$

3. Функция $\alpha(x) = 1 - \cos x$ является при $x \to 0$ бесконечно малой второго порядка малости по отношению к бесконечно малой $x$, так как

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

При сравнении бесконечно малых функций часто используют символ $o$ («$o$ малое»). Если функция $\alpha(x)$ в точке $x_0$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $\beta(x)$ в этой же точке, то это условно записывают так:

$$\alpha(x)=o(\beta(x)).$$

Заметим также, что если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке $x_0$, то функция $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждый из сомножителей. В самом деле,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

и поэтому $\alpha(x)\beta(x)=o(\beta(x))$, $\alpha(x)\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

○ 1. Функции $\alpha(x)=\frac{1+x}{x}$ и $\beta(x)=\frac{1}{x}$ являются при $x\to0$ эквивалентными бесконечно большими, так как

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}(1+x)=1.$$

В этом случае говорят также, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют *одинаковый порядок роста* при $x\to0$.

2. Функция $\alpha(x)=x^2+4$ является при $x\to\infty$ бесконечно большой более низкого порядка, чем $\beta(x)=x^3-2$ (имеет менее высокий порядок роста), так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x^2}{x-2/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

3. Бесконечно большие при $x\to\infty$ функции $\alpha(x)=2x^2+1$ и $\beta(x)=x^2-1$ имеют одинаковый порядок роста, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1-1/x^2}=2.$$

4. Функция $\alpha(x)=x^4+x+1$ является при $x\to\infty$ бесконечно большой второго порядка по отношению к бесконечно большой $\beta(x)=x^2+1$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^2+1/x^4}{1+2/x^2+1/x^4}=1.$$

?

### Вопросы для самопроверки

1. Что значит сравнить две бесконечно малые функции?
2. Приведите примеры бесконечно малой функции $\alpha(x)$:
   а) одного порядка малости с функцией $\beta(x)$ в точке $x_0$;
   б) эквивалентной функции $\beta(x)$ в точке $x_0$;
   в) более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$.
3. Что означает символическая запись $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$?
4. Докажите, что: а) $x^3=o(x^2)$ при $x\to 0$; б) $(x-1)^2=0(x-1)$ при $x\to 1$.
5. Верно ли равенство $x^3=0(\beta(x))$ при $x\to 0$, если $\beta(x)=x^2\sin x$?
6. Докажите, что $1/x^4=o(1/x^3)$ при $x\to\infty$.
7. Верно ли равенство $\frac{1}{x^4}=o(\beta(x))$ при $x\to\infty$, если $\beta(x)=\frac{1}{x^3\sin x}$?
8. Докажите, что $\sin x-x=o(x)$ при $x\to 0$.
9. Сравните следующие бесконечно большие функции при $x\to\infty$:
   а) $\alpha(x)=x^2+5x$ и $\beta(x)=x^3+2x^2$;
   б) $\alpha(x)=2x^2+1$ и $\beta(x)=(x-1)^2$;
   в) $\alpha(x)=\sqrt{x+1}$ и $\beta(x)=\sqrt{x}$.

## § 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Мы познакомились с понятием предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$, $x\to x_0-$, $x\to x_0+$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$, с непосредственным применением теоремы 4.3 о пределах суммы, произведения и частного двух функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих конечные пределы, для вычисления пределов и т. д. Осталось рассмотреть те случаи вычисления пределов, которые не охватываются рассмотренными ранее способами.

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть *неопределенность* вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, если числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x\to x_0$, $x\to x_0+$, $x\to x_0-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$. В этих случаях о пределе отношения $f(x)/g(x)$ ничего определенного сказать нельзя, так как этот предел может быть равен нулю, бесконечности, числу, отличному от нуля, а может и вовсе не существовать. Раскрыть эти неопределенности — значит вычислить предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. На конкретных примерах посмотрим, как это делается.

○ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. Непосредственно теорему 4.3 (предел частного) применить нельзя, так как предел знаменателя при $x \to -2$ равен нулю. Здесь и предел числителя при $x \to -2$ также равен нулю. Следовательно, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Необходимо, как говорят, *раскрыть эту неопределенность*. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x+2$, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Это можно сделать, так как в определении предела функции при $x \to -2$ значение функции в точке $x = -2$ не выходит. Получаем

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4}.$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрыта. Применяя теорему 4.3, окончательно находим

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x+4)}{\lim\limits_{x \to -2} (x^2-2x+4)} = \frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \quad \bullet$$

При вычислении пределов отношения двух многочленов при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель дроби надо делить на $x$ в старшей степени; величина дроби от этого не изменится. При этом, если в числителе и знаменателе многочлены одной степени, предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, если разной степени, то предел равен 0 или $\infty$.

○ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив на $x^2$ числитель и знаменатель дроби, а затем применив теорему 4.3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+2/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}=\frac{1+0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.$$

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив на $x^2$ числитель и знаменатель дроби, а затем применив теорему 4.3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(4/x^2)}=\frac{0+0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

**Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив на $x^3$ числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+5/x^3}{1/x+3/x^3}=\infty,$$

так как при $x \to \infty$ функция $h(x) = 1 + 5/x^3$ имеет предел, равный 1, функция $\frac{1}{h(x)}$ ограниченная (докажите это самостоятельно), функция $g(x) = 1/x + 3/x^3$ бесконечно малая (также докажите самостоятельно) и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) \cdot \frac{1}{h(x)} = 0$ (произведение ограниченной на бесконечно малую), т. е. данная дробь, как обратная, есть бесконечно большая функция при $x \to \infty$. ●

**Упражнения.** Найти: 1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + x + 1}{x^6 + x^3 + 1}$. 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x + 9}{2x + 6}$.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$. 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{3x^4 + 3x + 4}$. 5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^3 - 4x}{x^4 + 2x^2 + 4}$.
6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$.

Вычисление пределов функций мы продолжим после того, как рассмотрим понятие непрерывности функции.

?

Вопросы для самопроверки

1. Что означают записи: $x \to x_0$, $x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$?

2. В каких случаях говорят о наличии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$?

3. Что означают слова «неопределенность раскрыта»?

4. Почему $x \neq x_0$ при $x \to x_0$?

## § 8. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

**1. Определение непрерывности функции.** Пусть на некотором промежутке $X$ определена функция $f(x)$ и точка $x_0$ принадлежит этому промежутку[1].

**Определение 1.** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е.*

[1] Заметим, что этого не требовалось, когда мы рассматривали предел функции $f(x)$ в точке $x_0$. В этом заключено отличие понятия непрерывности функции от понятия ее предела.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Так как $\lim_{x\to x_0} x=x_0$, то соотношение (1) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x),$$

т. е. для непрерывной функции знаки функции и предела можно переставлять.

Можно дать равносильное определение непрерывности функции «на языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если для любой последовательности значений аргумента $x$: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к $x_0$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к $f(x_0)$.*

По аналогии с определением предела функции можно сформулировать определение непрерывности функции «на языке $\varepsilon-\delta$».

**Определение 2.** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.*

Эквивалентность этих определений очевидна.

○ **Пример 1.** Используя определение 1, доказать непрерывность функции $f(x)=2x^2+2x+1$ в точке $x=1$.

Решение. Сначала найдем предел данной функции при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x+1)=3\lim_{x\to 1} x^2+2\lim_{x\to 1} x+1=3\cdot 1+2\cdot 1+1=6.$$

Затем вычислим значение функции в точке $x=1$:

$$f(1)=3\cdot 1+2\cdot 1+1=6.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что предел функции и ее значение в точке $x=1$ равны, т. е. $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Согласно определению 1, это означает, что данная функция непрерывна в точке $x=1$. Аналогично можно показать, что эта функция непрерывна в любой точке числовой прямой. ●

Если $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\,(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0))$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке $x_0$ справа (слева)*. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и слева и справа, то она *непрерывна в этой точке*. В самом деле, в силу теоремы 4.2, в данном случае предел функции в точке $x_0$ равен ее значению в этой точке.

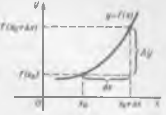


Рис. 125

Дадим, наконец, еще одно определение непрерывности функции, которое, по существу, является перефразировкой первого определения. Перенесем в равенстве (1) $f(x_0)$ в левую часть и внесем $f(x_0)$ под знак предела. Так как условия $x \to x_0$ и $(x-x_0) \to 0$ равносильны, то получаем

$$\lim_{(x-x_0)\to 0} [f(x)-f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

Разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента $x$ в точке $x_0$* и обозначается, как правило, $\Delta x$ (читается: «дельта икс»), а разность $f(x)-f(x_0)$ — приращением функции в точке $x_0$, вызванным приращением аргумента $\Delta x$, и обозначается $\Delta y$. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Отметим, что $\Delta y$ является функцией аргумента $\Delta x$ при фиксированной точке $x_0$. Геометрический смысл приращений ясен из рис. 125. Равенство (2) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) и является еще одним определением непрерывности функции, которое можно сформулировать так.

**Определение 3.** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.*

Последнее определение для практического использования иногда более удобно, и будем его также использовать.

○ **Пример 2.** Исследовать на непрерывность функцию Дирихле:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,}\\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Решение. Возьмем любую точку $x_0$ на числовой прямой. Возможны два случая: 1) число $x_0$ рационально и 2) число $x_0$ иррационально.

В случае 1) $f(x_0)=1$. В любой окрестности рациональной точки существуют иррациональные точки, в которых $f(x)=0$. Следовательно, в любой окрестности точки $x_0$ есть точки $x$, в которых приращение функции $\Delta y=f(x)-f(x_0)=0-1=-1$.

В случае 2) $f(x_0)=0$. В любой окрестности иррациональной точки имеются рациональные точки, в которых $f(x)=1$. Следовательно, в любой окрестности точки $x_0$ есть точки $x$, в которых приращение функции $\Delta y=f(x)-f(x_0)=1-0=1$.

Таким образом, приращение функции $\Delta y$ может принимать как значение, равное 1, так и значение, равное $-1$, т. е. не стремится к нулю при $\Delta x\to 0$. Согласно определению 3, это означает, что функция Дирихле не является непрерывной в точке $x_0$. А так как точка $x_0$ выбиралась произвольно, то этим доказано, что функция Дирихле не является непрерывной в каждой точке и, следовательно, на всей числовой прямой. ●

**2. Арифметические действия над непрерывными функциями.**

**Теорема 4.7.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x_0)\neq 0$).*

□ Доказательство. Так как непрерывные в точке $x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы, равные $f(x_0)$ и $g(x_0)$, то, по теореме 4.3, пределы функций $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и соответственно равны $f(x_0)\pm g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$, $f(x_0)/g(x_0)$. Но эти величины равны значениям соответствующих функций в точке $x_0$. Следовательно, по определению 1, функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке $x_0$. ■

?

### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте три определения непрерывности функции в точке $x_0$.

2. В чем различие между понятиями непрерывности функции и пределом функции в точке $x_0$?

3. Почему из непрерывности функции слева и справа в точке $x_0$ следует непрерывность функции в этой точке? На основании какой теоремы?

4. Сформулируйте теорему об арифметических действиях над непрерывными функциями.

## § 9. НЕПРЕРЫВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из важных свойств элементарных функций является их непрерывность в каждой точке области их определения. На примере некоторых функций мы и проверим данный факт, используя определение непрерывности функций в точке и теорему 4.7.

**1. Непрерывность рациональных функций.** Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке $x_0$ числовой прямой, служит постоянная функция $f(x)=C$. В самом деле, в этом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C=f(x_0)$ (см. пример 1 п. 1 § 2), т. е. постоянная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой.

Непрерывна также в каждой точке $x_0$ числовой прямой функция $f(x)=x$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0)$ (см. пример 2 п. 1 § 2), т. е. предел функции в точке $x_0$ равен ее значению в этой точке. Из сказанного и теоремы 4.7 следует, что в любой точке $x_0$ функции $x^2=x\cdot x$, $x^3=x^2\cdot x$, $x^4=x^3\cdot x$, ..., $x^n=x^{n-1}\cdot x$ ($n$ — натуральное число) непрерывны. Как мы знаем, функция $f(x)=x^n$ называется степенной, а функция вида

$$P(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

где $n\geqslant 0$ — целое число, $C_0$, $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ — любые числа,— многочленом.

Каждое из слагаемых $C_0x^n$, $C_1x^{n-1}$, $C_2x^{n-2}$, ..., $C_n$ есть произведение двух непрерывных функций (постоянной и степенной). По теореме 4.7, оно непрерывно в любой точке $x$. Многочлен $P(x)$ является таким образом суммой функций, непрерывных в любой точке $x$, и, следовательно, непрерывен в любой точке $x$.

Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна во всех таких точках $x$, в которых ее знаменатель не равен нулю (т. е. во всех точках, за исключением корней знаменателя), как частное непрерывных функций.

Например, функция $R(x)=\frac{3x^2+7x-1}{x^2-1}$ непрерывна во всех точках $x$, отличных от $+1$ и $-1$.

**2. Непрерывность тригонометрических функций.** Рассмотрим тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Покажем, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке $x$. Воспользуемся определением 3 непрерывности функции. Придавая аргументу $x$ приращение $\Delta x$, получим приращение функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

или

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Переходя к пределу в левой и правой части равенства при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]=0,$$

так как

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0\ ^{1)}.$$

---

[1)] Здесь использован первый замечательный предел, который получается в результате замены переменной $t=\Delta x/2$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (очевидно, что $t=\frac{\Delta x}{2}\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая. Таким образом, функция $\sin x$ непрерывна в любой точке $x$. Непрерывность функции $\cos x$ в любой точке $x$ доказывается аналогично.

Из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ по теореме 4.7 следует непрерывность функций $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\sec=\frac{1}{\cos x}$ во всех точках, где $\cos x\neq 0$, т. е. во всех точках, кроме $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, и функций $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ во всех точках, кроме $x=n\pi$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

**3. Непрерывность функции** $f(x)=|x|$. Функция $f(x)=|x|$, график которой изображен на рис. 101, определена и непрерывна во всех точках числовой прямой. В самом деле, в точках полупрямой $(0,\ +\infty)$ она непрерывна, так как при $x>0$ $f(x)=x$ (см. п. 1). В точках полупрямой $(-\infty,\ 0)$ функция $f(x)$ также непрерывна, так как $f(x)=-x$ при $x<0$, ее можно представить как произведение двух непрерывных функций $(-1)$ и $x$ и применить теорему 4.7 о непрерывности произведения. Чтобы установить непрерывность функции $|x|$ в точке $x=0$, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-}|x|=\lim_{x\to 0-}(-x)=-\lim_{x\to 0-}x=0;$$

$$\lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0+}x=0.$$

Итак, пределы функции в точке $x=0$ слева и справа совпадают и равны значению функции в этой точке. Отсюда следует, что функция $|x|$ непрерывна в точке $x=0$ и, следовательно, непрерывна во всех точках числовой прямой.

Таким образом, мы убедились, что рассмотренные функции непрерывны в каждой точке области их определения. На основании теоремы 4.7 о непрерывности суммы, разности, произведения и частного можно утверждать, что функции, получаемые из них путем конечного числа арифметических действий, являются также непрерывными функциями в каждой точке области их определения.

Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a, b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале $(a, b)$, и непрерывна в точке $a$ справа, а в точке $b$ слева, т. е.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \text{ и } \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

**4. Продолжение вычисления пределов функции.** После того как мы установили, что элементарные функции обладают свойством непрерывности в каждой точке области их определения, открылись широкие возможности для вычислений пределов элементарных функций.

○ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$

Решение. Так как функция $f(x)=\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ непрерывна в точке $x=\pi/2$, т. е. предел функции и ее значение в этой точке равны, то, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1+\sin x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\sin(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)} = \frac{1+1}{1-(-1)} = 1$$

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Функция $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ не определена в точке $x=0$, т. е. не является непрерывной в этой точке. Поэтому сразу переходить к пределу, как в предыдущем примере, нельзя. Для нахождения предела надо функцию $f(x)$ тождественно преобразовать так, чтобы она при $x \neq 0$ совпала с некоторой функцией $F(x)$, непрерывной в точке $x=0$, т. е. найти такую непрерывную функцию $F(x)$, чтобы $f(x)=F(x)$ при $x \neq 0$ или $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0)$. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+1}+1$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=F(x).$$

Таким образом, $f(x)=F(x)$ при $x\neq 0$. Но функция $F(x)$ непрерывна в точке $x=0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функция $f(x)=\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$ не определена в точке $x=\pi/4$. Для нахождения предела преобразуем дробь:

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin 2x-(1+\cos 2x)}{\sin x-\cos x}=\frac{2\sin x\cos x-2\cos^2 x}{\sin x-\cos x}=$$

$$=\frac{2\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=2\cos x.$$

При $x\neq\pi/4$ имеем

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}=2\cos x.$$

Но функция $2\cos x$ непрерывна в точке $x=\pi/4$. Поэтому, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\pi/4}2\cos x=2\lim_{x\to\pi/4}\cos x=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}. \bullet$$

При вычислении пределов функций при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$, содержащих радикалы, надо рассматривать арифметическое значение корня $\sqrt{x^2}=|x|$ при $x>0$ и $x<0$.

○ **Пример 4.** Найти: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

**Решение.** Во всех случаях имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

1) При $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x}=\frac{1}{1}=1.$$

2) При $x<0$ имеем $\sqrt{x^2}=-x$, следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x}=-\frac{1}{1}=-1.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ не существует, так как пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ разные.

**Пример 5.** Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

**Решение.** Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. При $x<0$ $\sqrt{x^2}=-x$, $\sqrt[3]{x^3}=x$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(1+1/x^3)}-\sqrt{x^2(4-1/x^2)}}{x(1+7/x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}-|x|\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}+x\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)}=\frac{1+2}{1}=\frac{3}{1}=3. \bullet$$

Будем говорить, что сумма двух бесконечно больших функций разных знаков есть неопределенность вида $\infty-\infty$.

В этом случае о пределе суммы ничего определенного сказать нельзя, так как этот предел может быть равен нулю, бесконечности, числу, отличному от нуля, а может и вовсе не существовать.

○ **Пример 6.** Найти: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Решение. 1) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Для нахождения предела умножим и разделим на сумму $\sqrt{x^2+4x}+x$, в результате получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}.$$

Теперь имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия данной неопределенности разделим дробь на $x$, а затем перейдем к пределу. Получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2(1+4/x)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{1+4/x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1}=\frac{4}{1+1}=2.$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=+\infty$, так как сумма двух положительных бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция (докажите самостоятельно).

Из 1) и 2), в частности, следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$ не существует. ●

Будем говорить, что произведение бесконечно малой функции на бесконечно большую есть неопределенность вида $0\cdot\infty$.

○ **Пример 7.** Найти $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $1-x=y$. Так как $\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, то при $x \to 1$ новая переменная $y \to 0$. Кроме того, если $1-x=y$, то $x=1-y$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0} y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to 0} y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cdot 1=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}.$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Здесь удобно воспользоваться первым замечательным пределом. Для этого преобразуем дробь:

$$\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}y\right)/y}=\frac{2/\pi}{\left(\sin\frac{\pi}{2}y\right)/\left(\frac{\pi}{2}y\right)}.$$

Окончательно имеем

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\frac{2/\pi}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}\right)}=\frac{2/\pi}{1}=\frac{2}{\pi}. \quad \bullet$$

Заметим, что раскрытие неопределенностей в ряде случаев дело не простое. Требуется некоторая сообразительность и, конечно, практика решения большого числа примеров.

Итак, мы познакомились с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$. Существуют и другие неопределенности. С ними познакомимся после того, как рассмотрим правило Лопиталя.



**Упражнения.** Найти: **1.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$. (*Отв.* 10.)
**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-1}{3x^2+x+2}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2}{3}.\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. (*Отв.* 1.)
**4.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{5}.\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 4x}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{2}.\right)$
**6.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}.\right)$ **7.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$. (*Отв.* $-12$.)
**8.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$. (*Отв.* $-1$.) **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$. (*Отв.* 4.)
**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$. (*Отв.* 2.) **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{2}.\right)$
**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1}$. (*Отв.* 14.)
**13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{2}.\right)$
**14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$. (*Отв.* 9.) **15.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$.
(Указание: сделать подстановку $x-1=y$.) (*Отв.* 3.)
**16.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{3}.\right)$
**17.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$. (*Отв.* 3.)
**18.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{1}{3}.\right)$
**19.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4})$. (*Отв.* 3.)
**20.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{3}{2}.\right)$
**21.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{1}{2}.\right)$
**22.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2}.)$ (*Отв.* 0.) **23.** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$. (*Отв.* 1.)
**24.** $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}$. (*Отв.* $x$.) **25.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$. (*Отв.* $-\infty$.)

## Вопросы для самопроверки

1. Докажите, что функция $f(x)=\cos x$ непрерывна в любой точке $x$.

2. Почему можно утверждать, что функция $f(x)=\dfrac{x^5+x^4+x^3-5}{x^2+5}$ непрерывна на всей числовой прямой?

## § 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

**Определение.** *Точка $x_0$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке $x_0$ не является непрерывной.*

Разрывы функций классифицируются следующим образом.

Разрыв первого рода. Точка $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

○ **Пример.** Для функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$ точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода (см. рис. 80), так как

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x=1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x=-1. \bullet$$

Разрыв второго рода. Точка $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

○ **Пример.** Для функции $f(x)=1/x$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 123), так как

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}=+\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}=-\infty. \bullet$$

В примере 2 п. 1 § 8 нами было установлено, что функция Дирихле не является непрерывной в любой точке $x_0$ числовой прямой, а в примере 5 п. 2 § 2, что функция Дирихле в любой точке $x_0$ не имеет предела. Следовательно, остается заключить, что в любой точке $x_0$ функция Дирихле имеет разрыв второго рода.

?

Вопросы для самопроверки

1. Какие точки называются точками разрыва функции?
2. Дайте определения точек разрыва первого и второго рода.
3. Укажите, в какой точке и какого рода разрыв имеет функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

## § 11. ТЕОРЕМА О НЕПРЕРЫВНОСТИ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

**Теорема 4.8.** *Пусть функция $z=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $y=f(z)$ непрерывна в точке $z_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x_0$.*

□ Доказательство. Возьмем из $X$ любую последовательность точек

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

сходящуюся в точке $x_0$. Тогда, в силу непрерывности функции $z=\varphi(x)$ в точке $x_0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x_0)=z_0,$$

т. е. соответствующая последовательность точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, ..., $z_n$, ... сходится к точке $z_0$. В силу же непрерывности функции $f(z)$ в точке $z_0$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)]=f[\varphi(x_0)].$$

Следовательно, предел функции $f[\varphi(x)]$ в точке $x_0$ равен ее значению в этой точке, что и доказывает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке $x_0$. ■

○ **Пример.** Доказать непрерывность функции $y=\sin x^2$ в точке $x=0$.

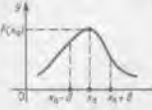




Рис. 126

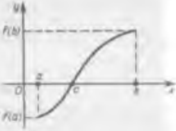




Рис. 127

Решение. Так как функция $z=x^2$ непрерывна в точке $x=0$, а функция $y=\sin z$ непрерывна в точке $z=0$, то по доказанной теореме сложная функция $y=$ $=\sin x^2$ непрерывна в точке $x=0$. ●

?

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение сложной функции.
2. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
3. Докажите непрерывность функции $y=\sin 3x$ на всей числовой прямой.

## § 12. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.**

Теорема 4.9. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0)\neq 0$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что $f(x_0)$.*

□ Доказательство. Пусть $f(x_0)>0$ (рис. 126). Тогда, в силу второго определения непрерывности функции для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ выполняется для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, или, что то же самое, выполняются неравенства

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \qquad (1)$$

для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Возьмем $\varepsilon=f(x_0)$. Тогда из левого неравенства (1) получаем $f(x)>0$ для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, что и требовалось доказать.

Если же $f(x_0)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Так как $-f(x_0)>0$, то по доказанному существует $\delta$-

окрестность точки $x_0$, в которой $-f(x)>0$ и, следовательно, $f(x)<0$. ■

**2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.** Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через нулевое значение при смене знаков.

Теорема 4.10 (**первая теорема Больцано — Коши**)[1]. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c)=0$.*

□ Доказательство. Пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$ (рис. 127). Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка $[a, b]$ равно нулю, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из полученных отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_1, b_1]$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_2, b_2]$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

вложенных отрезков, причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, и на концах каждого отрезка $[a_n, b_n]$ функция имеет значения разных знаков.

По теореме 3.13 о вложенных отрезках, существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам. Докажем, что $f(c)=0$. Действительно, если допустить, что $f(c)>0$, то по теореме 4.9 об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки $c$, в которой $f(x)>0$. В эту окрестность при достаточно большом $n$ попадет отрезок $[a_n, b_n]$, в котором, следовательно, будет $f(x)>0$, а это противоречит выбору последовательности вложенных отрезков. Аналогично доказывается, что $f(c)$ не может быть меньше нуля. Остается принять, что $f(c)=0$. При этом очевидно, что точка $c \in (a, b)$. ■

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе с

---

[1] Больцано Бернард (1781—1848) — чешский математик.

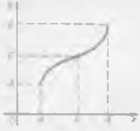


Рис. 128

одной полуплоскости, границей которой является ось $Ox$, в другую пересекает эту ось.

Обратим внимание на то, что при доказательстве теоремы 4.10 применен метод деления отрезка пополам. Этот метод будем неоднократно использовать далее.

Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

**Теорема 4.11 (вторая теорема Больцано — Коши).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Пусть, далее, $C$ — любое число, заключенное между $A$ и $B$. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется точка $c$ такая, что $f(c)=C$.*

Другими словами, непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения.

□ Доказательство. Пусть для определенности $A<B$ и $A<C<B$ (рис. 128). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=f(x)-C.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ (как разность непрерывных функций) и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0,$$
$$\varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Согласно теореме 4.10 существует точка $c\in(a, b)$ такая, что $\varphi(c)=f(c)-C=0$, т. е. $f(c)-C=0$. Отсюда $f(c)=C$ ■

**Следствие.** *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке $X$, то множество ее значений $Y$ также представляет некоторый промежуток.*

□ Доказательство. Пусть $m=\inf\limits_{X} f(x)$, $M=\sup\limits_{X} f(x)$.

где $m$ и $M$ — числа, называемые соответственно *точной нижней и верхней гранями функции*[1].

Возьмем любое $y$ из $Y$, не равное $m$ и $M$, и выберем два значения $y_1$ и $y_2$ функции $f(x)$ так, чтобы выполнялись неравенства $m \leqslant y_1 < y < y_2 \leqslant M$. Существование таких значений функции $f(x)$ следует из определения точных граней (если $M = +\infty$ $(m = -\infty)$, то $y_2 < M$ $(m < y_1)$). Тогда по теореме 4.11 о промежуточных значениях непрерывной функции существует точка $x$ такая, что $f(x) = y$. Следовательно, множество $Y$ представляет собой некоторый промежуток (конечный или бесконечный) с концами $m$ и $M$, которые в зависимости от конкретного случая могут ему принадлежать или не принадлежать. ■

Доказанные теоремы имеют большое теоретическое и практическое значение.

○ **Пример 1.** Доказать, что уравнение $x^5 - 18x + 2 = 0$ имеет корень на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. Положим $f(x) = x^5 - 18x + 2$. Эта функция непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и на его концах принимает значения разных знаков: $f(-1) = 19 > 0$, $f(1) = -15 < 0$. Следовательно, она удовлетворяет условиям теоремы 4.10, согласно которой существует по крайней мере одна точка $c$ $(-1 < c < 1)$, в которой $f(c) = 0$. Число $c$ и является корнем данного уравнения.

**Пример 2.** Доказать, что функция $f(x) = x^3/4 - \sin \pi x + 3$ принимает значение, равное 3, внутри отрезка $[-2, +2]$.

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы 4.11. Она непрерывна на отрезке $[-2, +2]$ и на концах этого отрезка принимает разные значения: $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$. Так как $1 < 3 < 5$, то, согласно теореме 4.11, внутри отрезка $[-2, +2]$ существует точка $c$, в которой функция принимает значение, равное 3, т. е. $f(c) = 3$. ●

**3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке.** Напомним, что функция $f(x)$ называется ограниченной на отрезке $[a, b]$, если существует число $M > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$ или $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, т. е. гра-

[1] Напомним, что точной верхней (нижней) гранью функции $f(x)$, определенной на $X$, называется наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней, ограничивающих $Y$ сверху (снизу).

фик функции $f(x)$ не выходит из полосы, ограниченной прямыми $y=M$ и $y=-M$ (рис. 129).

**Теорема 4.12 (первая теорема Вейерштрасса)**[1]. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Функция $f(x)$, непрерывная в точке $x_0$, ограничена в некоторой ее окрестности.*

□ Доказательство. Возьмем $\varepsilon=1$. Тогда, согласно второму определению непрерывности функции в точке, для данного $\varepsilon$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<1$.

Используя это неравенство, получаем $|f(x)|=|(f(x)-f(x_0))+f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+|f(x_0)|$, т. е. $|f(x)|<M$, где $M=1+|f(x_0)|$. Отсюда заключаем, что функция $f(x)$ ограничена в $\delta$-окрестности точки $x_0$. ■

□ Доказательство теоремы. Предположим обратное, т. е. допустим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда по крайней мере на одном из двух полученных отрезков функция $f(x)$ не ограничена (в противном случае она была бы ограничена на $[a, b]$). Обозначим этот отрезок через $[a_1,\ b_1]$. Разделим отрезок $[a_1,\ b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2,\ b_2]$ тот из отрезков, на котором функция $f(x)$ не ограничена, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность

$$[a,\ b]\supset[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\ldots\supset[a_n,\ b_n]\supset\ldots$$

вложенных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ не ограничена, причем $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

По теореме 3.13 о вложенных отрезках, существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$, по условию, определена и непрерывна в точке $c$, следовательно, согласно доказанной лемме, в некоторой окрестности точки $c$ она ограничена. При достаточно большом $n$ в эту окрестность попадает отрезок $[a_n,\ b_n]$, на котором функция $f(x)$ также ограничена, что противоречит выбору последовательности вложенных отрезков.

[1] Вейерштрасс Карл (1815—1897) — немецкий математик.

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом $(a, b)$. Так, например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не ограничена, так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$.

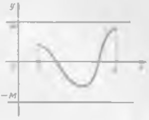



Рис. 129

Доказательство теоремы для интервала «не проходит» в том месте, где утверждается, что в точке $c$ функция определена и непрерывна. Для интервала точка $c$ может совпасть с его концом и тогда $f(x)$ не будет определена и непрерывна в точке $c$.

**4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней.** В том случае, когда точные грани функции являются значениями функции, говорят, что функция *достигает своих точных граней.* Однако, как известно (см. теорему 1.1), не всякому множеству принадлежат его точные грани. Следующий пример показывает, что точные грани функции не всегда достигаются.

○ Пусть на отрезке $[0, b]$, $b\geqslant 1$, определена функция $f(x)=x-[x]$, график которой изображен на рис. 130. Множеством ее значений является полуинтервал $[0, 1)$. Функция ограничена и сверху и снизу, имеет на данном отрезке точную верхнюю грань, равную 1, и точную нижнюю грань, равную 0. Очевидно, функция принимает значение, равное 0, но не принимает значения, равного 1. Следовательно, можно сказать, что функция достигает своей точной нижней и не достигает своей точной верхней грани. ●

Возникает вопрос, при каком условии функция достигает своих точных граней. Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 4.13 (вторая теорема Вейерштрасса).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней, т. е. существуют точки $x_1$, $x_2\in[a, b]$ такие, что* (рис. 131)

$$f(x_1)=M=\sup_{[a,b]} f(x),\quad f(x_2)=m=\inf_{[a,b]} f(x)$$

Рис. 130

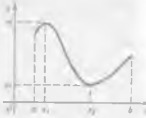


Рис. 131

□ Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, по теореме 4.12, она ограничена на этом отрезке. Следовательно, согласно теореме 1.1 существуют точная верхняя $M$ и точная нижняя $m$ грани функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Покажем, что функция $f(x)$ достигает $M$, т. е. существует такая точка $x_1 \in [a, b]$, что $f(x_1) = M$. Будем рассуждать от противного. Пусть функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a, b]$ значения, равного $M$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную, всюду положительную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

По теореме 4.7, функция $F(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. В этом случае, согласно теореме 4.12, функция $F(x)$ ограничена, т. е. найдется положительное число $\mu$ такое, что для всех $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu, \quad \text{откуда} \quad f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}.$$

Получено, что число $M - 1/\mu$, меньшее чем $M$, является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Но это противоречит тому, что число $M$ является точной верхней, т. е. наименьшей верхней гранью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Полученное противоречие и доказывает, что существует точка $x_1 \in [a, b]$, в которой $f(x_1) = M$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на $[a, b]$ своей точной нижней грани $m$. ■

Замечание. После того как доказано, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих точных верхней $M$ и нижней $m$ граней, можно назвать точную верхнюю грань *максимальным*, а точную нижнюю грань — *минимальным значением* функции $f(x)$ на этом отрезке и сформулировать теорему 4.13 в следующем виде: *непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимальное и минимальное значение.*

○ **Пример 3.** Доказать, что функция $f(x)=2^{|x|}\times\times\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}+(x^2-5x+6)\sin\sqrt{x^2+1}$ ограничена на отрезке $[0, 1]$ и существуют такие значения $x$, при которых функция принимает на этом отрезке наибольшие и наименьшие значения.

Решение. Так как на отрезке $[0, 1]$ функции $2^{|x|}$, $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$, $(x^2-5x+6)$, $\sin\sqrt{x^2+1}$ непрерывны, то, по теореме 4.7, данная функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке. Следовательно, по теореме 4.12, она ограничена на отрезке $[0, 1]$, а по теореме 4.13, существуют на этом отрезке значения $x_1$ и $x_2$, в которых функция принимает наибольшее $(f(x_1)=\sup\limits_{[0,1]} f(x))$ и наименьшее $(f(x_2)=\inf\limits_{[0,1]} f(x))$ значения. ●

**5. Понятие равномерной непрерывности функции.** Важным свойством функции, непрерывной на отрезке, является свойство *равномерной непрерывности.* Оно широко используется при доказательстве ряда фундаментальных теорем.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на некотором промежутке $X$, и пусть точка $x_0\in X$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то, по второму определению непрерывности, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$. Ясно, что $\delta$ зависит от $\varepsilon$, но $\delta$ зависит также и от $x_0$. При изменении $x_0$ в пределах рассматриваемого промежутка (при постоянном $\varepsilon$) число $\delta$ различно для разных $x_0$. Чем «круче» график функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$, тем меньше $\delta$, соответствующее этой точке (рис. 132).

Таким образом, при заданном $\varepsilon$ каждой точке $x$ рассматриваемого промежутка соответствует некото-

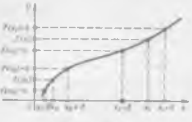


Рис. 137

рое $\delta>0$. Если бы точек было конечное число, то из конечного множества чисел $\delta$ можно было бы выбрать наименьшее положительное $\delta$, которое зависело бы только от $\varepsilon$ и было «пригодно» для всех $x$. Для бесконечного числа точек это, вообще говоря, сделать нельзя, так как этим точкам соответствует бесконечное множество чисел $\delta$, среди которых могут быть и сколь угодно малые.

Возникает вопрос, существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon>0$ можно было бы найти $\delta>0$, не зависящее от $x$, т. е. $\delta$ было бы общим для всех $x$ из рассматриваемого промежутка. Этот вопрос приводит к понятию равномерной непрерывности функции.

**Определение.** *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на некотором промежутке $X$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых двух точек $x'$, $x''\in X$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$.*

По определению, $\delta$ зависит только от $\varepsilon$ и является общим для всех $x'$, $x''$ промежутка $X$.

Понятие равномерной непрерывности функции относится к наиболее сложным и трудным для понимания вопросам математического анализа.

Понятие равномерной непрерывности функции на промежутке $X$ отличается от понятия непрерывности на этом промежутке тем, что величина $\delta$ зависит только от $\varepsilon$ и не зависит от $x$ (для любого $\varepsilon>0$ существует «свое» $\delta>0$, общее для всех $x\in X$), а при «обычной» непрерывности $\delta$ зависит и от $\varepsilon$ и от $x$. В этом случае, как было показано ранее, $\delta$ в зависимости от $x$ может принимать сколь угодно малые значения.

Из определения равномерной непрерывности следует, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на некотором промежутке $X$, то она и просто непрерывна на этом промежутке, т. е. непрерывна в любой точке $x_0 \in X$. В самом деле, взяв в определении в качестве $x'$ данную фиксированную точку $x_0 \in X$, а в качестве $x''$ — любую точку этого промежутка, мы придем к определению непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$. Обратное утверждение неверно (подумайте, почему?).

Рассмотрим примеры функций как обладающих, так и не обладающих на данном промежутке $X$ свойством равномерной непрерывности.

○ **Пример 4.** Используя определение равномерной непрерывности, доказать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

Решение. График функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ изображен на рис. 121. Функция непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого как угодно малого $\delta > 0$ существует хотя бы одна пара точек $x'$ и $x''$ интервала $(0, 1)$ таких, что $|x'' - x'| < \delta$, но $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим две последовательности точек, принадлежащих интервалу $(0, 1)$, $\{x_n''\}$ и $\{x_n'\}$ с общими элементами

$$x_n'' = 1 \Big/ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \text{ и } x_n' = 1 \Big/ \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и таких, что $f(x_n'') = 1$, а $f(x_n') = -1$. Обе эти последовательности, а следовательно, и их разность являются бесконечно малыми. Поэтому для любого как угодно малого $\delta > 0$ существует номер $n$ такой, что $|x_n'' - x_n'| < \delta$, в то время как для любого номера $n$

$$|f(x_n'') - f(x_n')| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| =$$

$$= |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Это и доказывает, что рассматриваемая функция не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

**Пример 5.** Используя определение равномерной непрерывности, доказать, что функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и $\delta=\varepsilon$. Тогда из неравенства $|x''-x'|<\delta$ следует неравенство $|f(x'')-f(x')|=|x''-x'|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

**Пример 6.** Используя определение равномерной непрерывности, доказать, что функция $f(x)=x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой[1].

Решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon>0$ и для любого как угодно малого $\delta>0$ найдется хотя бы одна пара точек $x'$ и $x''$ таких, что

$$|x''-x'|<\delta, \text{ но } |f(x'')-f(x')|\geqslant\varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и рассмотрим две последовательности точек $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ с общими элементами $x_n'=\sqrt{n}$ и $x_n''=\sqrt{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Тогда

$$|x_n''-x_n'|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$$

при $n\to\infty$, а

$$|f(x_n'')-f(x_n')|=|x_n''^2-x_n'^2|=n+1-n=1.$$

Следовательно, для любого как угодно малого $\delta>0$ найдется пара точек $x_n'$ и $x_n''$ таких, что $|x_n''-x_n'|<\delta$, в то время как $|f(x_n'')-f(x_n')|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}$, это и доказывает, что рассматриваемая функция не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой. ●

Следующая теорема устанавливает условие, при котором непрерывная функция является и равномерно непрерывной.

**6. Теорема о равномерной непрерывности функции.** Теорема 4.14 (теорема Кантора)[2]. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она и равномерно непрерывна на нем.*

---

[1] Хотя эта функция и является непрерывной в каждой точке числовой прямой.

[2] Кантор Георг (1845—1918) — немецкий математик, основатель современной теории множеств.

□ Доказательство. Докажем сначала, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon>0$ отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, любые два из которых или не имеют общих точек, или имеют только одну общую граничную точку и на каждом из которых для любых двух точек $x'$, $x''$ выполняется неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$.

Предположим обратное, т. е. допустим, что существует $\varepsilon>0$, для которого такое разбиение отрезка $[a, b]$ невозможно. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и выберем тот из отрезков, для которого такое разбиение невозможно. Обозначим его $[a_1, b_1]$. Разделим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из отрезков, для которого такое разбиение невозможно и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных отрезков

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots,$$

обладающих тем свойством, что ни один из них нельзя разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых для любых двух точек $x'$ и $x''$ выполняется неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. По теореме 3.13 о вложенных отрезках существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $c$, то для рассматриваемого $\varepsilon$ найдется $\delta$ такое, что $|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$ для любого $x$ из $\delta$-окрестности точки $c$. Тогда для любых двух точек $x'$ и $x''$ $\delta$-окрестности точки $c$ выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|=|(f(x'')-f(c))+(f(c)-f(x'))|\leqslant$$

$$\leqslant|f(x'')-f(c)|+|f(c)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е.

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

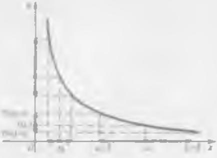


Рис. 117

В $\delta$-окрестность точки $c$ при достаточно большом $n$ попадает отрезок $[a_n, b_n]$ и, следовательно, для любых двух точек $x'$ и $x''$ этого отрезка справедливо неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, а это противоречит выбору последовательности вложенных отрезков.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. По только что доказанному, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков, в каждом из которых разность между любыми двумя значениями функции $f(x)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon/2$. Обозначим через $\delta$ длину наименьшего из отрезков разбиения и рассмотрим любые две точки $x'$ и $x''$ отрезка $[a, b]$, отстоящие друг от друга на расстоянии, меньшем чем $\delta$, т. е. $|x'' - x'| < \delta$. Возможны два случая: 1) точки $x'$ и $x''$ принадлежат одному отрезку разбиения; 2) точки $x'$ и $x''$ принадлежат двум соседним отрезкам разбиения. В первом случае $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; во втором случае, обозначая через $x_0$ общую граничную точку соседних отрезков, имеем

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x'))| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x'') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек $x'$ и $x''$ отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

З а м е ч а н и е. Теорема не верна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

○ **Пример.** Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$. Данная функция непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем. Это следует из того, что для любого фиксированного $\varepsilon>0$, какое бы $\delta>0$ ни взять, всегда найдутся точки $x'$ и $x''$, достаточно близкие к нулю, расстояние между которыми меньше $\delta$, а модуль разности $|f(x'')-f(x')|$ больше $\varepsilon$ (рис. 133). ●

Теорема Кантора дает возможность сразу утверждать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, если установлена непрерывность функции на этом отрезке.

○ **Пример 7.** Доказать, что функция $f(x)=x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(-1, 1)$[1], причем сделать это двумя способами: 1) используя теорему Кантора; 2) используя определение равномерной непрерывности.

Решение. I способ. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Она непрерывна на этом отрезке и, следовательно, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на нем. Отсюда следует, что функция $f(x)=x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(-1, 1)$. В самом деле, интервал $(-1, 1)$ представляет собой подмножество отрезка $[-1, 1]$, т. е. $(-1, 1)\subset[-1, 1]$, и так как неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ выполняется для любых $x', x''\in[-1, 1]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, то оно выполняется и для любых $x', x''\in(-1, 1)$, удовлетворяющих тому же неравенству, что и требовалось доказать.

II способ. Возьмем любые две точки $x'$ и $x''$ из интервала $(-1, 1)$. Тогда

$$|f(x'')-f(x')|=|x''^2-x'^2|=|(x''+x')(x''-x')|=$$
$$=|x''+x'|\,|x''-x'|<2|x''-x'|,$$

так как модуль суммы $|x''+x'|$ ограничен числом 2.

Возьмем теперь любое $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\varepsilon/2$. Тогда для любых $x', x''\in(-1, 1)$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<2\cdot\delta=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

---

[1] Хотя эта функция и не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой (см. пример 6).

Это и означает, по определению равномерной непрерывности, что функция $f(x)=x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(-1, 1)$. ●

В заключение заметим, что теорема Кантора имеет очень большое теоретическое значение. С ее помощью доказан ряд фундаментальных теорем.

?

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

2. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0)=0$, то функция $f(x)$: а) имеет определенный знак в некоторой окрестности точки $x_0$; б) не имеет определенного знака ни в какой окрестности точки $x_0$? Приведите соответствующие примеры.

3. Сформулируйте первую теорему Больцано — Коши.

4. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения одного знака, то на $[a, b]$ нет такой точки, в которой функция обращается в нуль? Приведите пример.

5. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

6. Может ли непрерывная на интервале функция быть ограниченной на этом интервале?

7. Может ли неограниченная на отрезке или интервале функция быть непрерывной на этих промежутках?

8. Может ли ограниченная на отрезке функция принимать значения своих точных граней?

9. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

10. Может ли непрерывная на интервале функция достичь на этом интервале своих точных граней?

11. Дайте определение понятия равномерной непрерывности функции.

12. В чем состоит отличие понятия равномерной непрерывности от понятия непрерывности функции?

13. Сформулируйте теорему Кантора.

14. Может ли непрерывная на интервале функция быть равномерно непрерывной на этом интервале и, наоборот, равномерно непрерывная на интервале функция быть непрерывной?

15. Является ли функция $f(x)=x^2$ равномерно непрерывной на интервале $(1, 5)$?

## § 13. ТЕОРЕМА О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Введем ряд предварительных понятий. Будем говорить, что функция $f(x)$ *не убывает* (*не возрастает*) на множестве $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Неубывающие и невозрастающие функции объединяют общим названием *монотонные функции*.

Если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X$. Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными*.

○ **Примеры. 1.** Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ является неубывающей на всей числовой прямой.

**2.** Функция $f(x) = x$ является возрастающей на всей числовой прямой. ●

**Теорема 4.15.** *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке $X$, и пусть $Y$ — множество ее значений. Тогда на множестве $Y$ обратная функция $x = \varphi(y)$ однозначна, строго монотонна и непрерывна.*

□ Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на $X$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $y_1 < y_2$ ($y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$) (рис. 134).

Однозначность обратной функции $x = \varphi(y)$ следует из того, что, в силу возрастания функции $y = f(x)$ на $X$, справедливо неравенство $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ при $x_1 \neq x_2$, и, значит, каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$.

Докажем теперь, что обратная функция $x = \varphi(y)$ возрастает на $Y$. Действительно, если $y_1 < y_2$, то и $x_1 < x_2$ ($x_1 = \varphi(y_1)$ и $x_2 = \varphi(y_2)$), так как если бы было $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания $f(x)$ следовало бы, что $y_1 \geqslant y_2$, что противоречило бы предположению $y_1 < y_2$. Таким образом, факт строгой монотонности обратной функции $x = \varphi(y)$ установлен.

И наконец, покажем, что обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна на $Y$. В силу следствия из теоремы 4.11, множество $Y$ является промежутком с концами $m$ и $M$, где $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$. Пусть $y_0 \in Y$, $x_0 = \varphi(y_0)$. Рассмотрим сначала случай, когда $m < y_0 < M$ (рис. 135). В этом случае точка $x_0$ является, очевидно, внутренней точкой промежутка $X$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $(x_0 - \varepsilon) \in X$ и $(x_0 + \varepsilon) \in X$, и положим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда, в силу возрастания $f(x)$, получим

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

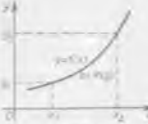



Рис. 114

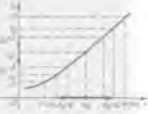


Рис. 115

Возьмем теперь $\delta > 0$ таким, чтобы выполнялись неравенства $y_1 \leqslant y_0 - \delta$ и $y_0 + \delta \leqslant y_2$. Тогда, если $y$ удовлетворяет неравенствам

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

то

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу возрастания $\varphi(y)$, имеем

$$\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2).$$

Учитывая, что $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$ и $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, получаем $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$ при условии $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.

Таким образом, доказано, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $y$, удовлетворяющих неравенству $|y - y_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, т. е. обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0$. Но $y_0$ — произвольная точка интервала $(m, M)$. Значит, обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна на $(m, M)$.

Если $m \in Y$ или $M \in Y$, то, рассуждая аналогично, можно доказать непрерывность $\varphi(y)$ справа в точке $m$ и слева в точке $M$.

Итак, факт непрерывности обратной функции $x = \varphi(y)$ на $Y$ доказан.

В случае убывания функции $f(x)$ теорема доказывается аналогично. ■

Замечание. Если обратная функция $x = \varphi(y)$ однозначна, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Такие функции называют также *взаимно обратными*.

○ **Пример.** Функция $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ возрастает, непрерывна, и множеством ее значении является отрезок $[-1, 1]$. По теореме 4.15, на отрезке $[-1, 1]$ существует непрерывная возрастающая обратная функция со множеством значений $[-\pi/2, \pi/2]$. Эту обратную функцию обозначают $x = \arcsin y$. График ее совпадает с графиком функции $y = \sin x$, рассматриваемой при $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ (рис. 136).

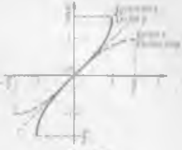


Рис. 136

Если теперь $x$ и $y$ поменять местами, т. е. если рассматривать функцию $y = \arcsin x$, то получим график, изображенный на рис. 136 сплошной линией. ●

## ? Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример немонотонной функции.
2. Дайте определение обратной функции.
3. В чем отличие функции от обратной функции? Проиллюстрируйте геометрически.
4. В каком случае обратная функция является функцией в обычном смысле и что из этого следует?
5. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции.
6. Найдите функцию, обратную функции $y = \cos x$, заданной на отрезке $[0, \pi]$. Установите область определения, множество значений обратной функции и нарисуйте ее график.
7. Можно ли рассматривать функцию $y = \sin x$ как обратную функции $y = \arcsin x$?

*Учиться надо только весело... Чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом.*

А. Франс

*Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и не понятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно.*

Д. Юнг

# ГЛАВА 5

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

## § 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

**1. Определение производной.** Пусть на некотором промежутке $X$ определена функция $y=f(x)$. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и придадим аргументу $x$ в точке $x_0$ произвольное приращение $\Delta x$ такое, что точка $x_0+\Delta x$ также будет принадлежать $X$. Функция получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

**Определение.** *Производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).*

Для обозначения производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ используют символы $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$ (читается: «игрек штрих от $x_0$» или «эф штрих от $x_0$»).

Итак, по определению,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения $x_0$ выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty \quad \left(\text{или} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty\right),$$

то говорят, что в точке $x_0$ функция имеет бесконечную производную знака плюс (или знака минус). В отличие от бесконечной производной определенную ранее производную функции иногда называют *конечной производной.*

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от $x$, также определенную на $X$.

Из определения производной вытекает и способ ее вычисления.

○ **Пример 1.** Найти производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$.

Решение. Придавая аргументу $x$ в точке $x_0$ приращение $\Delta x$, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0$ равна числу $2x_0$, что в принятых обозначениях можно записать так: $f'(x_0) = 2x_0$. ●

**Упражнения.** Используя определение производной, найти производные следующих функций в точке $x = x_0$: **1.** $f(x) = 5x^2$. (*Отв.* $10x_0$.) **2.** $f(x) = x^3$. (*Отв.* $3x_0^2$.) **3.** $f(x) = \sqrt{x}$. $\left(\text{Отв. } \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\right)$ **4.** $f(x) = \frac{1}{x}$. $\left(\text{Отв. } -\frac{1}{x_0^2}.\right)$ **5.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\left(\text{Отв. } -\frac{2}{x_0^3}.\right)$ **6.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\left(\text{Отв. } -\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}.\right)$ **7.** $f(x) = \sin 2x$. (*Отв.* $2\cos 2x_0$.) **8.** $f(x) = \cos\frac{x}{2}$. $\left(\text{Отв. } -\frac{\sin x_0/2}{2}.\right)$ **9.** $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. $\left(\text{Отв. } -\frac{2}{(2x_0+1)^2}.\right)$ **10.** $f(x) = \sqrt{1+3x}$. $\left(\text{Отв. } \frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}.\right)$

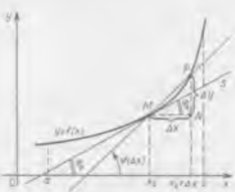



Рис. 137

**2. Геометрический смысл производной.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a, b)$. Пусть, далее, точка $M$ на графике функции соответствует некоторому значению аргумента $x_0$, а точка $P$ — значению $x_0+\Delta x$, где $\Delta x$ — приращение аргумента. Проведем через точки $M$ и $P$ прямую и назовем ее *секущей*. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью $Ox$ (рис. 137). Очевидно, что этот угол зависит от $\Delta x$. *Касательной $S$ к графику функции $f(x)$* в точке $M$ будем называть предельное положение секущей $MP$ при неограниченном приближении точки $P$ по графику к точке $M$ (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$). Из рис. 137 следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{PN}{MN}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ секущая $MP$ переходит в касательную, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\operatorname{tg}\varphi_0,$$

где $\varphi_0$ — угол, который образует касательная с осью $Ox$. С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Следовательно, $f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi_0$. Таким образом, *производная функции $f(x)$ в точке $x_0$ равна угловому* коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$ в *точке* $M(x_0; f(x_0))$.

○ **Пример 2.** Найти угловой коэффициент касательной к параболе $f(x)=x^2$ в точке $M(1/2; 1)$ и угол между касательной в этой точке и осью $Ox$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=x^2$ в точке $M(1/2; 1)$ равен значению производной этой функции в точке $x_0=1/2$, то задача и сводится к отысканию значения производной в этой точке.

Ранее было установлено (см. пример 1), что $f'(x_0)=(x^2)'|_{x=x_0}=2x_0$. Подставляя $1/2$ вместо $x_0$, получаем $f'(1/2)=2\cdot 1/2=1$. Следовательно, угловой коэффициент касательной равен 1, т. е. $k=1$ или $\operatorname{tg}\varphi_0=1$ ($\varphi_0$ — угол между касательной и осью $Ox$), откуда получаем искомый угол: $\varphi_0=\operatorname{arctg} 1=\pi/4$. ●

Если в некоторой точке производная равна нулю ($k=0$), то касательная к графику функции в этой точке параллельна оси $Ox$, а если же производная обращается в бесконечность ($k=\infty$), то это значит, что касательная в этой точке параллельна оси $Oy$.

○ **Пример 3.** Составить уравнение касательной к параболе $f(x)=x^2$ в точке $M(1/2; 1)$.

Решение. Чтобы составить искомое уравнение касательной, достаточно написать известное из аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$, с данным угловым коэффициентом $k$

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

и вместо $k$ подставить значение производной функции $f'(x_0)$. Подставляя в уравнение координаты точки $M(1/2; 1)$ и значение производной функции $f'(x_0)=$ $=f'(1/2)=1$ (см. пример 1), получим уравнение искомой касательной

$$y-1=1\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ или } y=x+\frac{1}{2}. \ ●$$

**Упражнение.** Составить уравнение касательной к параболе $f(x)=4-x^2$ в точке пересечения ее с осью $Ox$ при $x>0$. Построить параболу и касательную. (*Отв.* $y=-4x+8$.)

○ **Пример 4.** Составить уравнение касательной, проведенной из точки $M(1; -3)$ к параболе $f(x)=x^2$.

**Решение.** Уравнение касательной к кривой $f(x)=x^2$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

Так как $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$ (см. пример 1) и эта прямая проходит через точку $(x; y)=(1; -3)$, то из (1) получаем

$$-3-x_0^2=2x_0(1-x_0).$$

Из этого уравнения находим $x_0=-1$ или $x_0=3$.

Если $x_0=-1$, то $f(x_0)=x_0^2=1$, $f'(x_0)=2x_0=-2$ и уравнение касательной принимает вид $y-1=-2(x+1)$, т. е. $y=-2x-1$.

Если $x_0=3$, то $f(x_0)=9$, $f'(x_0)=6$ и уравнение касательной таково: $y=6x-9$.

Таким образом, через точку $M(1; -3)$ к данной параболе можно провести две касательные. ●

**Упражнение.** Составить уравнения касательных к графику функции $f(x)=\sqrt{x}$, проходящих через точку (2; 3/2). $\left(\textit{Отв.}\ \ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{4}x+1.\right)$

Отметим, что геометрический смысл производной играет важную роль в раскрытии многих понятий математического анализа и в решении ряда геометрических задач.

**3. Физический смысл производной.** Предположим, что функция $y=f(t)$ описывает закон движения материальной точки $M$ по прямой линии, т. е. $y=f(t)$ — путь, пройденный точкой от начала отсчета за время $t$.

Тогда за время $t_0$ пройден путь $y=f(t_0)$, а за время $t_1$ — путь $y=f(t_1)$. За промежуток времени $\Delta t=t_1-t_0$ точка $M$ пройдет отрезок пути $\Delta y=f(t_1)-f(t_0)=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ (рис. 138). Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ называется *средней скоростью движения* ($v_{ср}$) за время $\Delta t$, а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ опреде-


Рис. 138

ляет *мгновенную скорость* точки в момент времени $t_0$ $(v_{\text{мгн}})$.

○ **Пример 5.** Найти среднюю и мгновенную скорость в момент времени $t_0$ точки, прямолинейное движение которой задано уравнением $y=\sqrt{t}$ (где $y$ — путь, а $t$ — время, $t \geq 0$).

Решение. За время $t_0$ точка пройдет путь $y=\sqrt{t_0}$, а за время $t_1$ — путь $y=\sqrt{t_1}$. За промежуток времени $\Delta t=t_1-t_0$ точка пройдет отрезок пути $\Delta y=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_0}=\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0}$. Тогда средняя скорость движения точки на отрезке времени $[t_0, t_0+\Delta t]$ равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0}}{\Delta t},$$

а мгновенная скорость движения в момент времени $t_0$

$$v_{\text{мгн}}=y'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0})(\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})}{\Delta t(\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)-t_0}{\Delta t(\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})}=\frac{1}{2\sqrt{t_0}}. \bullet$$

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость ни выражала функция $y=f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — средняя скорость изменения $y$ относительно изменения $x$, а $y'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения $y$ при некотором $x=x_0$.

○ **Пример 6.** Найти скорость свободно падающего тела в пустоте в некоторый фиксированный момент времени $t$.

Решение. Из физики известно, что закон свободного падения тела в пустоте определяется формулой $s=\frac{gt^2}{2}$, где $g$ — постоянная величина. Придадим некоторому значению $t$ приращение $\Delta t$; тогда пройденный путь $s$ получит приращение

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}.$$

Средняя скорость падения тела на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dfrac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t+\Delta t),$$

а скорость падения тела в момент времени $t$

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}g(2t+\Delta t) = gt.$$

Отсюда, в частности, следует, что скорость свободно падающего тела пропорциональна времени движения (падения). ●

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

**4. Правая и левая производные.** По аналогии с понятием правого и левого предела функции вводятся понятия правой и левой производных функций $f(x)$ в точке $x_0$.

**Определение.** *Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется правое (левое) предельное значение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (при условии, что это предельное значение существует).*

Обозначение: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left( f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ производную, то она имеет в этой точке и правую и левую производные, совпадающие между собой.

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке $x_0$ и правую и левую производные, но не имеющие производной в этой точке. Примером такой функции служит функция $f(x)=|x|$. Эта функция имеет в точке $x=0$ правую производную, равную $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ (при $x \geq 0$ $\Delta y = \Delta x$), и левую производную, равную $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ (при $x<0$ $\Delta y = -\Delta x$), но не имеет в точке $x=0$ производной, так как $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, т. е. односторонние пределы различны (см. теорему 4.2). Геометрически это означает, что график функции $f(x) = |x|$ в точке $O\ (0;\, 0)$ не имеет касательной.

**Упражнение.** Показать, что функция $f(x) = 3|x| + 1$ в точке $x=0$ не имеет производной.

?

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$.

2. Каков геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$?

3. Дайте определение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\, f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.

4. Каков физический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$?

5. Дайте определение правой (левой) производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$. Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке $x_0$?. Приведите пример функции, у которой существуют правая и левая производные в некоторой точке, но не существует производная в этой точке.

## § 2. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

### 1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке.

**Определение.** *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, если ее приращение $\Delta y$ в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{1}$$

*где $A$ — некоторое число, не зависящее от $\Delta x$, а $\alpha(\Delta x)$ — функция аргумента $\Delta x$, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.*

Выясним теперь связь между дифференцируемостью в точке и существованием производной в той же точке.

**Теорема 5.1.** *Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в данной точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.*

□ Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в данной точке $x_0$, т. е. $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Тогда, предположив, что $\Delta x \neq 0$ и разделив равенство на $\Delta x$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \alpha(\Delta x)\right) = A = f'(x_0).$$

Отсюда следует, что производная в точке $x_0$ существует.

Достаточность. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Пусть $f'(x_0) = A$. Тогда функция $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ (см. теорему 4.5). Из последнего равенства имеем

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Получено представление (1), тем самым доказапо, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. ■

Таким образом, для функций одной переменной дифференцируемость и существование производной — понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной часто называют *дифференцированием*.

○ **Пример 1.** Используя определение, показать, что функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в точке $x = x_0$.

Решение. Запишем приращение функции $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$ в виде (1):

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = 2x_0\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\,(A = f'(x_0))$ (см. теорему 5.1).

Надо показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Для этого запишем приращение функции в точке $x_0$ другим способом:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Приравнивая правые части, получаем $\alpha(\Delta x)=\Delta x$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, находим, что $\lim\alpha(\Delta x)=0$, что и требовалось показать. ●

**Упражнение.** Используя определение, показать, что функция $f(x)=x^3$ дифференцируема в точке $x=x_0$.

**2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.**

**Теорема 5.2.** *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в данной точке $x_0$, то она и непрерывна в этой точке.*

□ Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то ее приращение в этой точке может быть представлено соотношением (1). Тогда, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=A\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,$$

что и означает непрерывность функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ согласно третьему определению непрерывности функции в точке $x_0$. ■

Замечание. Обратное утверждение не верно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т. е. не иметь производной в этой точке.

○ Примером такой функции служит функция $f(x)=|x|$. Эта функция, как известно, непрерывна в точке $x=0$, но, как показано в п. 4 § 1, не имеет в этой точке производной, т. е. не является дифференцируемой.

Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой прямой. Покажем, что в точке $x=0$ эта функция не является дифференцируемой. В самом деле, в точке $x=0$ приращению аргумента $\Delta x$ соответствует приращение функции $\Delta y=\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{\Delta x}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Это значит, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$ не имеет конечной производной, т. е. не является дифференцируемой. График функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке $O(0;\ 0)$ имеет своей касательной ось $Oy$, угловой коэффициент которой $k=\operatorname{tg}\varphi_0$ не имеет конечного значения, т. е. «обращается в бесконечность». ●

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $f(x)$ имеет производную или что она дифференцируема на указанном промежутке.

?

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке $x_0$.
2. Какова связь между понятиями дифференцируемости функции в точке и производной функции в этой точке? Докажите соответствующую теорему.
3. Какова связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции в точке? Приведите пример функции, непрерывной в точке, но не дифференцируемой в этой точке.
4. Может ли функция, имеющая производную в точке, быть непрерывной в этой точке?

## § 3. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

**1. Определение и геометрический смысл дифференциала.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, т. е. приращение $\Delta y$ можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)=0$. Первое слагаемое $A\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой одного порядка с $\Delta x$ (покажите это самостоятельно), оно линейно относительно $\Delta x$. Слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta x$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=0\right)$. Таким образом, первое слагаемое является главной частью приращения функции $f(x)$.

**Определение.** *Дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется главная, линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции:*

$$dy = A\Delta x. \qquad (1)$$

Если учесть теорему 5.1, т. е. принять во внимание, что $A = f'(x_0)$, то формулу (1) можно записать в виде

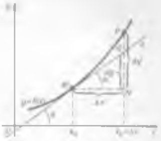


Рис. 139

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \qquad (2)$$

Дифференциалом независимой переменной $x$ назовем приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Окончательно соотношение (2) принимает вид

$$dy = f'(x_0)\,dx. \qquad (3)$$

С помощью равенства (3) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции $dy$ к дифференциалу $dx$ независимой переменной, т. е.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции имеет геометрический смысл.

Пусть точка $M$ на графике функции $y = f(x)$ соответствует значению аргумента $x_0$, точка $P$ — значению аргумента $x_0 + \Delta x$, прямая $MS$ — касательная к графику $y = f(x)$ в точке $M$, $\alpha$ — угол между касательной и осью $Ox$. Пусть, далее, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, $Q$ — точка пересечения касательной $MS$ с прямой $PN$ (рис. 139). Тогда приращение функции $\Delta y$ равно величине отрезка $NP$. В то же время из прямоугольного треугольника $MNQ$ получаем $NQ = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x = dy$, т. е. дифференциал функции $dy$ равен величине отрезка $NQ$. Из геометрического рассмотрения видно, что величины отрезков $NP$ и $NQ$ различны.

Таким образом, дифференциал $dy$ функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равен приращению «ординаты касательной» $MS$ к графику этой функции в точке

$M(x_0; f(x_0))$, а приращение функции $\Delta y$ есть приращение «ординаты самой функции» $y=f(x)$ в точке $x$, соответствующее приращению аргумента, равному $\Delta x$.

**2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.** Из определения дифференциала следует, что он зависит линейно от $\Delta x$ и является главной частью приращения функции $\Delta y$. Само же $\Delta y$ зависит от $\Delta x$ более сложно. Например, если $f(x)=x^3$, то $\Delta y = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, в то время как

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}\right)\Delta x = 3x_0^2\Delta x$$

Кроме того, для вычисления дифференциала можно воспользоваться равенством $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Во многих задачах приращение функции в данной точке приближенно заменяют дифференциалом функции в этой точке:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y.$$

Абсолютная погрешность при такой замене равна $|\Delta y - \mathrm{d}y|$ и является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$.

В частности, если $x_0=2$, $\Delta x=0{,}1$, то $\Delta y = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 1{,}261$, $\mathrm{d}y = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 = 1{,}2$ и абсолютная погрешность $|\Delta y - \mathrm{d}y| = 0{,}061$.

**Упражнение.** Найти приближенно приращение $\Delta y$ функции $f(x)=x^2$, если $x_0=2$ и $\Delta x=0{,}01$. (*Отв.* 0,04.)

○ **Пример.** Покажем, что если $\alpha$ мало, то можно использовать приближенную формулу

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Действительно, возьмем функцию $f(x)=\sqrt{x}$. Тогда при малых $\Delta x$

$$\Delta y = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} \approx \mathrm{d}y \quad \text{или} \quad \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} \approx$$

$$\approx (\sqrt{x})'\Big|_{x=x_0} \Delta x = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}\right)\Delta x =$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}\right)\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x,$$

откуда, положив $x_0=1$, $\Delta x=\alpha$, получим

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{\alpha}{2}.$$

В частности, при $\alpha=0{,}0003$ найдем $\sqrt{1{,}0003}\approx$ $\approx 1{,}00015$. ●

**Упражнение.** Вывести приближенную формулу $\sqrt{a^2+h}\approx a+h/(2a)$. Найти приближенно $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{33}$. (*Отв.* 10,05; 1,02; 6,41; 2,08; 2,01.)

Рассмотрим теперь правила дифференцирования и вычисления производных простейших элементарных функций. Заметим, что при выводе формул и практическом вычислении производных обычно пишут не $x_0$, а просто $x$, но при этом $x$ считают фиксированным.

?

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференциала функции в точке $x_0$.
2. Почему в определении дифференциала выражение $A\Delta x$ называется главной, линейной относительно $\Delta x$ частью приращения функции $f(x)$?
3. Каков геометрический смысл дифференциала?

## § 4. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

**Теорема 5.3.** *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:*

$$1.\ (u\pm v)'=u'\pm v' \quad 2.\ (u\cdot v)'=u'v+uv'$$

$$3.\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (1)$$

□ **Доказательство.** Для вывода формул (1) воспользуемся определением производной, очевидным равенством $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y$ и теоремой 4.3. Рассмотрим отдельно каждый случай:

$$1.\ (u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

$$2.\ (u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) v(x+\Delta x) - u(x) v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x) v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) v(x) + \Delta u v(x) + u(x) \Delta v + \Delta u \Delta v - u(x) v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+ u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v \cdot u' + uv' + 0 \cdot u' =$$

$$= u'v + uv',$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, а множители $u$ и $v$ являются постоянными и не зависят от $\Delta x$.

$$3.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) v(x) - u(x) v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u] v(x) - u(x)[v(x) + \Delta v]}{\Delta x v(x)[v(x) + \Delta v]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u v - uv - u\Delta v}{\Delta x v (v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \Delta v} =$$

$$=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \blacksquare$$

?

### Вопросы для самопроверки

1. Докажите правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций.
2. Что можно сказать, если выполнены все условия теоремы о правилах дифференцирования, кроме условия $v(x)\neq 0$, т. е. выполнено условие $v(x)=0$?
3. Почему при доказательстве правил дифференцирования произведения и частного $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$?

## § 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОСТОЯННОЙ, СТЕПЕННОЙ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

**1. Производная постоянной функции.** *Производная функции $y=f(x)=C$, где $C$ — постоянное число, выражается формулой*

$$y'=0.$$

□ Доказательство. Для любых $x$ и $\Delta x$ имеем $f(x+\Delta x)=C$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$. Отсюда при любом $\Delta x\neq 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и, следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0. \blacksquare$$

Замечание. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е. $(Cu)'=Cu'$. Действительно, если $v=C$ ($C=\text{const}$), то, по формуле 2 (см. теорему 5.3), $(Cu)'=(C)'u+Cu'=0\cdot u+Cu'=Cu'$, что и требовалось показать.

**2. Производная степенной функции.** *Производная функции $y=x^n$, показатель $n$ которой является целым положительным числом, выражается формулой*

$$y'=nx^{n-1}.$$

□ Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона, можно записать

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=\Big|\, x^n+nx^{n-1}\Delta x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^2\Big]-x^n=nx^{n-1}\Delta x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}.$$

Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=0,\ \ldots,\ \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=0,$$

то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.\ \blacksquare$$

Замечание. Случай степенной функции, показатель которой является любым вещественным числом, будет рассмотрен в п. 2 § 9.

**3. Производные тригонометрических функций.**

1) *Производная функции* $y=\sin x$ *выражается формулой*

$$y'=\cos x.$$

□ Доказательство. Имеем

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cos(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1$ (*первый замечательный предел*), *а* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$ в силу непрерывности функции $\cos x$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x.\ \blacksquare$$

2) *Производная функции $y=\cos x$ выражается формулой*

$$y' = -\sin x.$$

□ Доказательство. Имеем

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=-\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\sin(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\sin x$ в силу непрерывности функции $\sin x$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin x. \blacksquare$$

3) *Производная функции $y=\operatorname{tg} x$ выражается формулой*

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right).$$

□ Доказательство. Так как $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то по теореме 5.3 получаем

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

следовательно,

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

4) *Производная функция $y=\operatorname{ctg} x$ выражается формулой*

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}(x\neq n\pi).$$

□ Доказательство. Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то, аналогично предыдущему,

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

следовательно,

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \ \blacksquare$$

**4. Производная логарифмической функции.** *Производная функции* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ *выражается формулой*

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

□ Доказательство. Имеем

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right].$$

Положив $\frac{x}{\Delta x} = h$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{h \to \infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

(*второй замечательный предел*), а так как логарифмическая функция является непрерывной, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacksquare$$

**Следствие.** *Если* $y=\log_e x=\ln x$, *то* $y'=(\ln x)'=$ $=\frac{1}{x}$.

○ **Пример.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)=$ $=5+x^3+3x^2+\sin x+\cos x+2\,\mathrm{tg}\,x-3\,\mathrm{ctg}\,x+\log_2 x+$ $+3\ln x$.

**Решение.** Имеем

$$f'(x)=(5+x^3+3x^2+\sin x+\cos x+2\,\mathrm{tg}\,x-3\,\mathrm{ctg}\,x+\log_2 x+3\ln x)'=(5)'+(x^3)'+3(x^2)'+(\sin x)'+(\cos x)'+2(\mathrm{tg}\,x)'-3(\mathrm{ctg}\,x)'+(\log_2 x)'+3(\ln x)'=$$

$$=3x^2+6x+\cos x-\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{1}{x}\log_2 e+\frac{3}{x}. \quad ●$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x)=4x^5-3\sin x+5\,\mathrm{ctg}\,x$. $\left(\textit{Отв.}\ 20x^4-3\cos x-\frac{5}{\sin^2 x}.\right)$
2. $f(x)=\log_2 x+3\log_3 x$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{\ln 24}{x\ln 2\ln 3}.\right)$
3. $f(x)=4\cos x-2\,\mathrm{tg}\,x+5$. $\left(\textit{Отв.}\ -4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}.\right)$
4. $f(x)=5\ln x-7\cos x+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{5}{x}+7\sin x-4\,\mathrm{ctg}\,2x.\right)$
5. $f(x)=x\sin x$. $(\textit{Отв.}\ \sin x+x\cos x.)$
6. $f(x)=x^2\,\mathrm{tg}\,x$. $(\textit{Отв.}\ x(\sin 2x+x)\sec^2 x.)$
7. $f(x)=x^2\log_3 x$. $\left(\textit{Отв.}\ x\frac{2\ln x+1}{\ln 3}.\right)$
8. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}.\right)$
9. $f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}+x\,\mathrm{ctg}\,x$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{\sin x-x^2+x\cos x(\sin x-\ln x)}{x\sin^2 x}.\right)$

**10.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$ $\left(\mathit{Отв.}\ -\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}\right)$

**11.** $f(x)=\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1+x^2}$. $\left(\mathit{Отв.}\ \dfrac{(1+x^2)(\sin x\cos x+x)-x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}\right)$

?

Вопросы для самопроверки

1. Выведите формулы для производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции.
2. Почему при выводе формулы производной логарифмической функции знаки функции и предела поменяли местами?

## § 6. ТЕОРЕМА О ПРОИЗВОДНОЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.15 об обратной функции и функция $x=\varphi(y)$ является для нее обратной. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.4.** *Если функция $y=f(x)$ имеет в точке $x_0$ производную $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ производную, причем*

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

□ Доказательство. Дадим аргументу $y$ обратной функции $x=\varphi(y)$ некоторое приращение $\Delta y\neq 0$ в точке $y_0$. Функция $x=\varphi(y)$ получит некоторое приращение $\Delta x$, причем, в силу возрастания (или убывания) обратной функции, $\Delta x\neq 0$. Следовательно, можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y\to 0$. Так как обратная функция $x=\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0$ (см. теорему 4.15), то $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$. Но при $\Delta x\to 0$ предел правой части равенства существует и равен $1/f'(x_0)$. Следовательно, существует предел и левой части равенства, который по определению равен $\varphi'(y_0)$. Таким образом, получаем

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare \tag{1}$$

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки $x_0$ график функции $y=f(x)$ (или обратной функции $x=\varphi(y)$). Пусть точке $x_0$ на этом графике соответствует точка $M$ (рис. 140). Как известно, производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла $\alpha$ наклона касательной, проходящей через точку $M$, к оси $Ox$. Производная обратной функции $\varphi'(y_0)$ равна тангенсу угла $\beta$ наклона этой же касательной к оси $Oy$. Так как углы $\alpha$ и $\beta$ в сумме составляют $\pi/2$, то формула (1) выражает следующий очевидный факт:

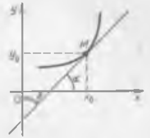


Рис 140

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

?

**Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
2. Что можно сказать о производной обратной функции, если $f'(x_0)=0$? Приведите пример такого случая.
3. Каков геометрический смысл теоремы о производной обратной функции?

## § 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Опираясь на доказанную выше теорему 5.4, продолжим вычисление производных простейших элементарных функций.

**1. Производная показательной функции.** *Производная функции* $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ *выражается формулой*

$$y'=a^x\ln a.$$

□ Доказательство. Показательная функция $y=a^x$ является обратной для логарифмической функции $x=\log_a y$. Таким образом,

$$x'(y)=\frac{1}{y}\log_a e,$$

а в силу теоремы 5.4 о производной обратной функции и известного из элементарной математики соотношения $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{y}{\log_a e}=a^x\ln a. \blacksquare$$

**Следствие.** *Если* $y=e^x$, *то* $y'=(e^x)'=e^x$.

**2. Производные обратных тригонометрических функций.**

1) *Производная функции* $y=\arcsin x$ *выражается формулой*

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1).$$

□ Доказательство. Функция $y=\arcsin x$ является обратной для функции $x=\sin y$. Так как $x'(y)=\cos y$, то, по теореме 5.4 о производной обратной функции, получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Корень взят со знаком плюс, потому что $\cos y$ положителен на интервале $-\pi/2<y<\pi/2$. Учитывая, что $\sin y=x$, окончательно получаем

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacksquare$$

2) *Производная функции* $y=\arccos x$ *выражается формулой*

$$y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство аналогично предыдущему

3) *Производная функции* $y=\operatorname{arctg} x$ *выражается формулой*

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

□ Доказательство. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$. Так как $x'(y)=\frac{1}{\cos^2 y}$, то

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\cos^2 y.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 y}=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2$, следовательно,

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \ ■$$

4) *Производная функции* $y=\operatorname{arcctg} x$ *выражается формулой*

$$y'(x)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

○ **Пример.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)=5^x+\arcsin x+3\arccos x+\operatorname{arctg} x-3\operatorname{arcctg} x$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=(5^x+\arcsin x+3\arccos x+\operatorname{arctg} x-3\operatorname{arcctg} x)'=$$

$$=(5^x)'+(\arcsin x)'+3(\arccos x)'+(\operatorname{arctg} x)'-$$

$$-3(\operatorname{arcctg} x)'=5^x\ln 5+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{1+x^2}=$$

$$=5^x\ln 5-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{1+x^2}. \ ●$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x)=\arcsin x+6^x+5\arccos x$. $\left(\textit{Отв.}\ 6^x\ln 6-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. $f(x)=x\arccos x$. $\left(\textit{Отв.}\ \arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$x'(y)=\frac{1}{y}\log_a e,$$

а в силу теоремы 5.4 о производной обратной функции и известного из элементарной математики соотношения $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{y}{\log_a e}=a^x\ln a. \ \blacksquare$$

**Следствие.** *Если* $y=e^x$, *то* $y'=(e^x)'=e^x$.

**2. Производные обратных тригонометрических функций.**

1) *Производная функции* $y=\arcsin x$ *выражается формулой*

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1).$$

□ Доказательство. Функция $y=\arcsin x$ является обратной для функции $x=\sin y$. Так как $x'(y)=\cos y$, то, по теореме 5.4 о производной обратной функции, получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Корень взят со знаком плюс, потому что $\cos y$ положителен на интервале $-\pi/2<y<\pi/2$. Учитывая, что $\sin y=x$, окончательно получаем

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ \blacksquare$$

2) *Производная функции* $y=\arccos x$ *выражается формулой*

$$y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

3) *Производная функции* $y=\operatorname{arctg} x$ *выражается формулой*

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

□ Доказательство. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$. Так как $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, то

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, следовательно,

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \ \blacksquare$$

4) ***Производная функции*** $y = \operatorname{arcctg} x$ *выражается формулой*

$$y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

○ **Пример.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x) = 5^x + \arcsin x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x$.

Решение. Имеем

$$f'(x) = (5^x + \arcsin x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x)' =$$

$$= (5^x)' + (\arcsin x)' + 3(\arccos x)' + (\operatorname{arctg} x)' -$$

$$- 3(\operatorname{arcctg} x)' = 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} =$$

$$= 5^x \ln 5 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2}. \ \bullet$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = \arcsin x + 6^x + 5 \arccos x$. $\left(\textit{Отв.}\ 6^x \ln 6 - \right.$
$\left. - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. $f(x) = x \arccos x$. $\left(\textit{Отв.}\ \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

3. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x$. $\left(Отв.\ \dfrac{2}{1+x^2}.\right)$

4. $f(x)=4e^x+\operatorname{arctg} x+\arcsin x$. $\left(Отв.\ 4e^x+\dfrac{1}{1+x^2}+\right.$

$\left.+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

5. $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. $\left(Отв.\ \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}\right)$

?

Вопросы для самопроверки

1. Выведите формулы производных для показательной функции и обратных тригонометрических функций.

2. Почему при выводе формулы производной для показательной функции функция $y=a^x$ является обратной для функции $x=\log_a y$?

## § 8. ПРАВИЛО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

**1. Правило дифференцирования сложной функции.**

**Теорема 5.5.** *Если функция $x=\varphi(t)$ имеет производную в точке $t_0$, а функция $y=f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0=\varphi(t_0)$, то сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет производную в точке $t_0$ и имеет место следующая формула:*

$$y'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0) \tag{1}$$

□ Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ предполагается дифференцируемой в точке $x_0$, то приращение этой функции может быть записано в виде

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Разделив равенство (2) на $\Delta t$, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3}$$

Равенство (3) справедливо при любых достаточно малых $\Delta x$. Возьмем $\Delta x$ равным приращению функции $x=\varphi(t)$, соответствующему приращению $\Delta t$ аргумента $t$. Устремим в этом равенстве $\Delta t$ к нулю. Так как, по условию, функция $x=\varphi(t)$ имеет в точке $t_0$ производную, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, по третьему определению непрерывности функции в точке, $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Но тогда устремится к нулю и $\alpha(\Delta x)$, т. е. получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=0\cdot\varphi'(t_0)=0. \qquad (4)$$

Из соотношения (4) следует существование предела всей правой части равенства (3) при $\Delta t\to 0$, равного $f'(x_0)\varphi'(t_0)$. Значит, существует предел при $\Delta t\to 0$ и левой части равенства (3), который, по определению производной, равен производной сложной функции $y=f[\varphi(t)]$. Тем самым доказана дифференцируемость сложной функции и установлена формула (1). ■

**Замечание.** В данной теореме мы рассматривали сложную функцию, где $y$ зависела от $t$ через промежуточную переменную $x$. Возможна и более сложная зависимость — с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается прежним.

Так, например, если $y=f(x)$, где $x=\varphi(u)$, a $u=\psi(v)$ и $v=\chi(t)$, то производную $y'(t)$ следует искать по формуле

$$y'(t)=y'(x)\,x'(u)\,u'(v)\,v'(t). \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры дифференцирования сложной функции.

○ **Пример 1.** Вычислить производную функции $y=e^{\operatorname{arctg} x}$.

**Решение.** Данную функцию можно представить в виде $y=e^u$, где $u=\operatorname{arctg} x$. Тогда, по формуле (1),

$$y'(x)=y'(u)\,u'(x)=e^u\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Заменив $u$ на $\operatorname{arctg} x$, окончательно получим

$$y'=e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

**Пример 2.** Вычислить производную функции $y=\operatorname{tg}^2(x^2+1)$.

**Решение.** Данную функцию можно представить в виде $y=u^2$, где $u=\operatorname{tg} v$, а $v=x^2+1$. Используя формулу (5), получим

$$y'(x)=y'(u)\,u'(v)\,v'(x)=(u^2)'(\operatorname{tg} v)'(x^2+1)'=$$
$$=2u\sec^2 v\cdot 2x=2\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1)\cdot 2x=$$
$$=4x\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1).$$

Разумеется, нет необходимости в таких подробных записях. Обычно результат следует писать сразу, представляя последовательно в уме промежуточные аргументы.

Так, например, вычисление производной в последнем примере можно записать в таком виде:

$$y'(x)=2\operatorname{tg}(x^2+1)\frac{1}{\cos^2(x^2+1)}\cdot(x^2+1)'=2\operatorname{tg}(x^2+1)\times$$
$$\times\sec^2(x^2+1)\cdot 2x=4x\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1).$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

**1.** $f(x)=\sin 3x$. (*Отв.* $3\cos 3x$.)
**2.** $f(x)=\sin(x^2+5x+2)$. (*Отв.* $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$.)
**3.** $f(x)=\sin^2 x$. (*Отв.* $\sin 2x$.)
**4.** $f(x)=\sin^3 x$ (*Отв.* $3\sin^2 x\cos x$.)
**5.** $f(x)=\cos^{100} x$. (*Отв.* $-100\sin x\cos^{99} x$.)
**6.** $f(x)=\operatorname{tg}(x^2+3)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}.\right)$
**7.** $f(x)=\ln\sin x$. (*Отв.* $\operatorname{ctg} x$.)
**8.** $f(x)=\ln\operatorname{tg} 5x$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{10}{\sin 10x}.\right)$
**9.** $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$. (*Отв.* $e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x$.)
**10.** $f(x)=\ln(x^2+2x)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2(x+1)}{x(x+2)}.\right)$
**11.** $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. (*Отв.* $\operatorname{arctg} x$.)
**12.** $f(x)=\sin^2 x^3$. (*Отв.* $3x^2\sin 2x^3$.) **13.** $f(x)=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{5}{8}\operatorname{tg} 2x\cdot\sec^{10} 2x.\right)$
**14.** $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$. (*Отв.* $-\sin 4x$.)
**15.** $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{-2\cos^2 x}{\sin^3 x}.\right)$
**16.** $f(x)=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}$. (*Отв.* $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}$.)
**17.** $f(x)=x^2e^{-x}$. (*Отв.* $xe^{-x}(2-x)$.)
**18.** $f(x)=(x+2)e^{-x^2}$. (*Отв.* $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$.)

**19.** $f(x)=e^{\frac{1}{\cos x}}$. $\left(Отв.\ e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}.\right)$

**20.** $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}$. $\left(Отв.\ \frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}.\right)$

**21.** $f(x)=10^{1-\sin^3 2x}$.
(*Отв.* $10^{1-\sin^3 2x}\ln 10\cdot(-3\sin 2x\sin 4x)$.)

**22.** $f(x)=\sin(2^x)$. (*Отв.* $2^x(\ln 2)\cos 2^x$.)

**23.** $f(x)=\arccos(1-2x)$. $\left(Отв.\ \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.\right)$

**24.** $f(x)=\arcsin(e^{4x})$. $\left(Отв.\ \frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}.\right)$

**25.** $f(x)=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$. $\left(Отв.\ \frac{5}{(5x+3)\left[1+\ln^2(5x+3)\right]}.\right)$

**26.** $f(x)=\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}$. $\left(Отв.\ \frac{2\operatorname{arcctg}(1/x)}{1+x^2}.\right)$

**27.** $f(x)=\operatorname{tg}\sin\cos x$. $\left(Отв.\ \frac{-\sin x\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin\cos x)}.\right)$

**28.** $f(x)=\ln^5\sin x$. (*Отв.* $5\operatorname{ctg}x\cdot\ln^4\sin x$.)

**2. Дифференциал сложной функции.** Вы уже знаете, что если $x$ является независимой переменной, то дифференциал дифференцируемой функции $y=f(x)$ имеет следующую форму, т. е. вид:

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{6}$$

◻ Сейчас мы покажем, что эта форма универсальна и справедлива также и в том случае, когда $x$ является не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $t$, т. е. $y$ является сложной функцией от $t$. Действительно, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$: $y=f[\varphi(t)]$. Тогда, так как аргумент $t$ является независимой переменной, то для указанной сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ и для функции $x=\varphi(t)$ дифференциалы представимы в форме (6), т. е. в виде

$$dy=\{f[\varphi(t)]\}'\,dt,\quad dx=\varphi'(t)\,dt. \tag{7}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\{f[\varphi(t)]\}'=f'(x)\cdot\varphi'(t). \tag{8}$$

Подставляя (8) в первую из формул (7), получаем

$$dy = f'(x)\ \varphi'(t)\,dt,$$

а так как, согласно второй формуле (7), $\varphi'(t)\,dt = dx$, то окончательно находим

$$dy = f'(x)\,dx,$$

совпадающее с формой (6), что и требовалось показать. ■

Таким образом, получили, что формула (6) верна и для сложной функции. Это свойство дифференциала сложной функции принято называть *инвариантностью его формы*.

○ **Пример 3.** Найти дифференциал сложной функции $y = \sin x$, где $x = t^2$.

Решение. По формуле (6) имеем

$$dy = (\sin x)'\,dx = \cos x\,dx,$$

а так как $x = t^2$, $dx = (t^2)'\,dt = 2t\,dt$, то, подставляя в выражение для $dy$, окончательно получаем

$$dy = 2t\cos t^2\,dt. \ ■$$

Далее введем понятия второго и последующих дифференциалов функции $y = f(x)$, которые уже не обладают инвариантностью формы. Поэтому доказанное свойство называют также *инвариантностью формы первого дифференциала*.

?

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
2. Применима ли теорема о производной сложной функции к функции $y = \sin(\sqrt{x})$ в точке $x = 0$? Существует ли производная этой функции в точке $x = 0$?

## § 9. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С ЛЮБЫМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Понятие логарифмической производной функции.** Вычислим производную функции $y = \ln|x|$ $(x \neq 0)$. Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, а $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$ (последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная функции выражается следующей формулой:

$$y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Учитывая полученную формулу (1), вычислим производную сложной функции $y = \ln|u|$, где $u = f(x)$ — дифференцируемая функция. Имеем

$$y' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{2}$$

Производная от логарифма функции $(\ln|f(x)|)'$ и называется *логарифмической производной* функции $f(x)$. Для упрощения записи при логарифмическом дифференцировании знак модуля у функции $f(x)$ можно опустить.

В качестве примера вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где $u$ и $v$ — некоторые функции от $x$ $(u > 0)$, имеющие в данной точке производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Так как $\ln y = v(x) \ln u(x)$, то по формуле (2) получим

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Учитывая, что $y = u(x)^{v(x)}$, получаем следующую формулу для производной показательно-степенной функции:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \tag{3}$$

○ **Пример 1.** Вычислить производную функции $y = x^x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) = x$ и $v(x) = x$. Используя формулу (3), получим

$$y' = x^x \left[ 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x (\ln x + 1). \quad \bullet$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

**1.** $f(x)=x^{\sin x}$. $\left(\textit{Отв.}\ \ x^{\sin x}\left[\cos x \ln x+\frac{\sin x}{x}\right]\right)$

**2.** $f(x)=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$. $\left(\textit{Отв.}\ \ (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\ \left(\cos x\cdot\ln \operatorname{tg} x+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{1}{\cos x}\right).\right)$

**3.** $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$. $\left(\textit{Отв.}\ (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).\right)$

Производную показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$ можно вычислить и другим способом. Представим функцию в виде $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ и вычислим $y'$.

$$y'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'=e^{v(x)\ln u(x)}\left[v(x)\ln u(x)\right]'=$$
$$=y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Подставляя $y=u(x)^{v(x)}$, снова приходим к формуле (3).

Логарифмическая производная очень удобна при нахождении производной степенной функции с любым вещественным показателем.

**2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем.** *Производная функции* $y=x^{\alpha}$ ($\alpha$ — *любое вещественное число*) *определяется формулой*

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{4}$$

□ Доказательство. Так как $y=x^{\alpha}$, то

$$\ln y=\alpha\ln x.$$

Используя формулу (2), получаем

$$\frac{y'}{y}=\left[\alpha\ln x\right]'=\frac{\alpha}{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $y=x^{\alpha}$, получаем формулу для производной степенной функции:

$$y'=(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}. \ \blacksquare$$

○ **Пример 2.** Вычислить производную функции $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$.

Решение. Данную функцию представим в виде $f(x)=(1+\cos^2 x)^{1/2}$. Используя формулу (4), получим

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{1/2-1}\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-1/2}\,2\cos x\,(-\sin x)=-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}.\ ●$$

**Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x)=x^{1/x}$. (*Отв.* $x^{1/x-2}(1-\ln x)$.)
2. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+2$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}.\right)$
3. $f(x)=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\right)$
4. $f(x)=\sqrt[7]{x}\,\ln x$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^6}}.\right)$
5. $f(x)=\sqrt[3]{x}\,\mathrm{arcctg}\,x$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{\mathrm{arcctg}\,x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}.\right)$
6. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}.\right)$
7. $f(x)=\sqrt{2x-\sin 2x}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}.\right)$
8. $f(x)=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\right)$
9. $f(x)=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$. (*Отв.* $\sqrt{1-x^2}$.)
10. $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$.
(*Отв.* $\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}$.)
11. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{-2\cos^2 x}{\sin^3 x}.\right)$
12. $f(x)=e^{\sqrt[7]{x^2}}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}.\right)$

13. $f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$. $\left(Отв.\ \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.\right)$

14. $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$. $\left(Отв.\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.\right)$

15. $f(x)=\sqrt[5]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$. $\left(Отв.\ \dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\dfrac{x+3}{4}}}.\right)$

16. $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$. $\left(Отв.\ \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.\right)$

17. $f(x)=\ln(x\sin x\cdot\sqrt{1-x^2})$. $\left(Отв.\ \dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\right.$
$\left.-\dfrac{x}{1-x^2}\right)$

18. $f(x)=\sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$. $\left(Отв.\ \dfrac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\cdot\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}.\right)$

Таким образом, вычислены производные всех простейших элементарных функций и мы можем составить следующую таблицу.

**3. Таблица производных простейших элементарных функций.**

I. $(C)'=0$.

II. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$, в частности $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

IV. $(a^x)'=a^x\ln a$, в частности $(e^x)'=e^x$.

V. $(\sin x)'=\cos x$.

VI. $(\cos x)'=-\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Указанная таблица вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правилом дифференцирования сложной функции составляет основу дифференциального исчисления.

Из правил и формул дифференцирования можно сделать важный вывод: *производная любой элементарной функции также функция элементарная*. Таким образом, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

В п. 1 § 3 было установлено, что дифференциал $dy$ функции $y=f(x)$ всегда равен производной этой функции $f'(x)$, умноженной на дифференциал аргумента $dx$. Поэтому приведенные формулы для отыскания производных легко преобразовать в формулы для отыскания дифференциалов простейших элементарных функций:

1. $d(C)=0\ \ dx=0\ (C=\text{const})$.
2. $d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\ dx$.
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e\ \ dx$.
4. $d(a^x)=a^x \ln a \cdot dx$.
5. $d(\sin x)=\cos x\, dx$.
6. $d(\cos x)=-\sin x\, dx$.
7. $d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$.
8. $d(\operatorname{ctg} x)=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.
9. $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$.
12. $d(\operatorname{arcctg} x)=-\frac{dx}{1+x^2}$.

**13.** $f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.\right)$

**14.** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.\right)$

**15.** $f(x)=\sqrt[5]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\dfrac{x+3}{4}}}.\right)$

**16.** $f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.\right)$

**17.** $f(x)=\ln(x\sin x\cdot\sqrt{1-x^2})$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\right.$ $\left.-\dfrac{x}{1-x^2}.\right)$

**18.** $f(x)=\sqrt[5]{\operatorname{arctg}e^{5x}}$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\cdot\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}.\right)$

Таким образом, вычислены производные всех простейших элементарных функций и мы можем составить следующую таблицу.

**3. Таблица производных простейших элементарных функций.**

I. $(C)'=0$.

II. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=$ $=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$, в частности $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

IV. $(a^x)'=a^x\ln a$, в частности $(e^x)'=e^x$.

V. $(\sin x)'=\cos x$.

VI. $(\cos x)'=-\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Указанная таблица вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правилом дифференцирования сложной функции составляет основу дифференциального исчисления.

Из правил и формул дифференцирования можно сделать важный вывод: *производная любой элементарной функции также функция элементарная*. Таким образом, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

В п. 1 § 3 было установлено, что дифференциал $dy$ функции $y=f(x)$ всегда равен производной этой функции $f'(x)$, умноженной на дифференциал аргумента $dx$. Поэтому приведенные формулы для отыскания производных легко преобразовать в формулы для отыскания дифференциалов простейших элементарных функций:

1. $d(C)=0\ \ dx=0\ (C=\text{const})$.
2. $d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\ dx$.
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e\ \ dx$.
4. $d(a^x)=a^x \ln a\ \ dx$.
5. $d(\sin x)=\cos x\, dx$.
6. $d(\cos x)=-\sin x\, dx$.
7. $d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$.
8. $d(\operatorname{ctg} x)=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.
9. $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$.
12. $d(\operatorname{arcctg} x)=-\frac{dx}{1+x^2}$.

Формулы для отыскания дифференциалов суммы, разности, произведения и частного функций имеют вид

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v; \quad \mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u; \quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

Ограничимся выводом формулы произведения. (Вывод остальных предоставляем читателю). По определению дифференциала имеем

$$\mathrm{d}(uv) = (uv)'\,\mathrm{d}x = (u'v + uv')\,\mathrm{d}x = vu'\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v,$$

так как $u'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ и $v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$.

○ **Пример 3.** Найти дифференциал функции $y = x^3 \sin 3x$.

Решение. По только что доказанной формуле имеем

$$\mathrm{d}y = x^3\mathrm{d}(\sin 3x) + \sin 3x\,\mathrm{d}(x^3) = x^3(\sin 3x)'\mathrm{d}x + \sin 3x\,(x^3)'\mathrm{d}x = x^3 3\cos 3x\,\mathrm{d}x + \sin 3x\; 3x^2\,\mathrm{d}x = 3x^2(x\cos 3x + \sin 3x)\,\mathrm{d}x. \ \bullet$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит прием логарифмического дифференцирования?
2. Выведите формулу производной для степенной функции с любым вещественным показателем.
3. Почему операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций?
4. Докажите, что $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$.

## § 10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**1. Понятие производной $n$-го порядка.** Как уже отмечалось в § 1 данной главы, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента $x$. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка*.

Производная от производной некоторой функции называется *производной второго порядка* (или *второй производной*). Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* (или *третьей производной*) и т. д. Производные начиная со второй называются производными высшего порядка и обозначаются $y''$, $y'''$, $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., $y^{(n)}$, ... или $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... .

Производная $n$-го порядка есть производная от производной $(n-1)$-го порядка, т. е. $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Здесь мы ограничимся физическим толкованием второй производной $f''(x)$. Если функция $y=f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то, как известно, первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени $x$, а вторая производная в таком случае равна скорости изменения скорости, т. е. ускорению движущейся точки в момент времени $x$.

**Упражнения.** Найти производные второго порядка от следующих функций:
1. $f(x)=e^{-x^2}$. (*Отв.* $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.) 2. $f(x)=\operatorname{tg} x$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.\right)$ 3. $f(x)=\operatorname{ctg} x$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{2\cos x}{\sin^3 x}.\right)$ 4. $f(x)=\arcsin\frac{x}{2}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.\right)$ 5. $f(x)=\sin^2 x$. (*Отв.* $2\cos 2x$.) 6. $f(x)=\cos^2 x$. (*Отв.* $-2\cos 2x$.) 7. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.\right)$ 8. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}.\right)$ 9. $f(x)=\ln(2x-3)$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{-4}{(2x-3)^2}.\right)$

Найти производные третьего порядка от следующих функций:

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}.\right)$ 2. $f(x)=xe^{-x}$. (*Отв.* $e^{-x}(3-x)$.) 3. $f(x)=e^x\cos x$. (*Отв.* $-2e^x(\cos x+\sin x)$.) 4. $f(x)=x^2\sin x$. (*Отв.* $(6-x^2)\cos x-6x\sin x$.) 5. $f(x)=x^3 2^x$. (*Отв.* $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\times\ln^2 2+18x\ln 2+6)$.) 6. $f(x)=x\ln x$. (*Отв.* $-1/x^2$.)

**2. $n$-е производные некоторых функций.**

1) *Вычислим $n$-ю производную степенной функции* $y=x^\alpha$ $(x>0)$ ($\alpha$ — любое вещественное число). Последовательно дифференцируя, имеем [1]

---

[1] При строгом выводе формул $n$-х производных следует применить метод математической индукции.

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}.$$

В частном случае, если $\alpha = m$, где $m$ — натуральное число, получим

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(m-1)]\cdot 1 = m!,$$
$$(x^m)^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad n > m.$$

Нетрудно заметить, что, зная общий вид $n$-й производной, можно сразу записать производную любого порядка, не вычисляя при этом предшествующие производные.

Например, $(x^3)^{(3)} = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, $(x^3)^{(2)} = 3\cdot 2\cdot x = 6x$, а $(x^3)^{(4)} = 0$.

2) *Вычислим n-ю производную показательной функции* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y' = a^x \ln a, \quad y^{(2)} = a^x (\ln a)^2,$$
$$y^{(3)} = a^x (\ln a)^3, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

В частности, если $y = e^x$, то для любого $n$

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3) *Вычислим n-ю производную функции* $y = \sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(2)} = -\sin x = \sin(x+\pi) =$$
$$= \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, производную любого порядка от $\sin x$ можно вычислить по формуле

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)} = \sin\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) = -\sin x$.

4) Аналогично получается *формула n-й производной функции* $y=\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

**Упражнения.** Найти производные $n$-го порядка от следующих функций:

**1.** $f(x)=\ln x$. $\left(\textit{Отв.}\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.\right)$

**2.** $f(x)=\sin 3x$. $\left(\textit{Отв.}\ 3^n\cdot\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right).\right)$

**3.** $f(x)=e^{x/2}$. $(\textit{Отв.}\ e^{x/2}(1/2)^n.)$

**4.** $f(x)=2^{3x}$. $(\textit{Отв.}\ 2^{3x}(3\ln 2)^n.)$

**5.** $f(x)=\cos^2 x$. $\left(\textit{Отв.}\ 2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right).\right)$

Функция, имеющая $n$-ю производную в точке $x$, называется $n$ раз дифференцируемой в этой точке. Функция, имеющая в точке $x$ производные любого порядка, называется бесконечно дифференцируемой в этой точке.

**3. Формула Лейбница для $n$-й производной произведения двух функций.** Пусть $y=uv$, где $u$ и $v$ — некоторые функции от переменной $x$, имеющие производные любого порядка. Тогда

$$\begin{aligned}
y' &= u'v+uv',\\
y'' &= u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',\\
y''' &= u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=\\
&= u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что правые части разложений напоминают разложения различных степеней бинома $(a+b)^n$ по формуле бинома Ньютона, но вместо показателей степени стоят числа, определяющие порядок производных, а сами функции $u$ и $v$ можно рассматривать как «производные нулевого порядка» $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$. Учитывая это, запишем, по аналогии, общий вид $n$-й производной произведения двух функций

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \qquad (1)$$

ормула (1) называется *формулой Лейбница*[1]. Докажем эту формулу методом математической индукции.

□ При $n=1$ формула принимает вид $(uv)'=u'v+uv'$, что совпадает с формулой дифференцирования произведения двух функций. Для $n=2$ и $n=3$ она также проверена. Поэтому достаточно, предположив справедливость формулы (1) для некоторого $n$, доказать ее справедливость для $n+1$. С этой целью продифференцируем эту формулу, т. е. найдем $y^{(n+1)}=(y^{(n)})'$:

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+n\left[u^{(n)}v'+u^{(n-1)}v''\right]+\frac{n(n-1)}{2!}\times$$

$$\times\left[u^{(n-1)}v''+u^{(n-2)}v'''\right]+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\times$$

$$\times\left[u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}\right]+\ldots+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+(n+1)u^{(n)}v'+\left(n+\frac{n(n-1)}{2!}\right)\times$$

$$\times u^{(n-1)}v''+\ldots+\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\right]\times$$

$$\times u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\ldots+(n+1)u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, мы можем представить в виде

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots1}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)(n-k-2)\ldots1}+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots1}{k!(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots1}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)=$$

[1] Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий философ и математик.

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k\,(n-k+1)}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots1}{k!\,(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots1}=$$

$$=\frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{k!}.$$

Тогда

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+(n+1)\,u^{(n)}v'+\frac{(n+1)\cdot n}{2!}\,u^{(n-1)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}\,u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\ldots$$

$$\ldots+(n+1)\,u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.\ \blacksquare$$

○ **Пример 1.** Вычислить пятую производную функции $y=x^5e^x$.

Решение. Полагая $u=x^5$ и $v=e^x$, найдем

$$u'=5x^4,\ \ u''=20x^3,\ \ u'''=60x^2,\ \ u^{(4)}=120x,\ \ u^{(5)}=120;$$

$$v'=v''=v'''=v^{(4)}=v^{(5)}=e^x.$$

Подставляя найденные значения производных в формулу (1), получим

$$y^{(5)}=120e^x+5\cdot120xe^x+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}60x^2e^x+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}20x^3e^x+$$

$$+5\cdot5x^4e^x+x^5e^x=$$

$$=e^x(120+600x+600x^2+200x^3+25x^4+x^5).$$

**Пример 2.** Вычислить $n$-ю $(n\geqslant2)$ производную функции $y=x^2\cos x$.

Решение. Полагая $u=\cos x$ и $v=x^2$, найдем

$$u^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ \ v'=2x,\ \ v''=2,\ \ v'''=v^{(4)}=v^{(5)}=\ldots=0.$$

Подставляя найденные значения производных в формулу (1), получим

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)x^2+2n\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]x+\frac{2n(n-1)}{1\cdot2}\times$$

$$\times\cos\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right].\ \bullet$$

Существует другой, более короткий вывод формулы Лейбница.

□ Запишем ее в виде

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \qquad (2)$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, $0!=1$, $C_n^k$ — биномиальные коэффициенты. Как и ранее, воспользуемся методом индукции. При $n=1$ формула уже была проверена. Предполагая ее справедливость при некотором $n$, докажем справедливость для $n+1$. Имеем

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(u^{(n-k)}v^{(k)}\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}.$$

Заменим во второй сумме $k$ на $k-1$. Получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}=\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)}v^{(k)}.$$

Тогда

$$(uv)^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)}v^{(k)}+uv^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)\times$$

$$\times u^{(n+1-k)}v^{(k)}+uv^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)},$$

так как $C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$ и $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$ при $1\leqslant k\leqslant n$. Формула Лейбница доказана. ■

○ **Пример 3.** Вычислить $y^{(10)}$ функции $y=x^2e^{3x}$.

Решение. Применяя формулу Лейбница (2), получаем

$$(x^2e^{3x})^{(10)}=x^2\left(e^{3x}\right)^{(10)}+C_{10}^1\left(x^2\right)'\left(e^{3x}\right)^{(9)}+$$
$$+C_{10}^2\left(x^2\right)^{(2)}\left(e^{3x}\right)^{(8)}+\dots+\left(x^2\right)^{(10)}e^{3x}.$$

Но так как $(x^2)^{(n)}=0$ при $n\geqslant 3$, $(e^{3x})^{(k)}=e^{3x}3^k$, то

$$(x^2e^{3x})^{(10)}=x^2e^{3x}3^{10}+10\cdot 2xe^{3x}3^9+45\cdot 2e^{3x}3^8=$$
$$=3^9e^{3x}(3x^2+20x+30). \bullet$$

Формулу Лейбница удобно применять, когда один из сомножителей является многочленом степени $n$. В этом случае все члены формулы Лейбница начиная с $(n+2)$-го обращаются в нуль.

**4. Дифференциалы высших порядков.** Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков. Для удобства мы будем наряду с обозначениями дифференциалов символами $dy$ и $dx$ использовать обозначения $\delta y$ и $\delta x$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке $x$ некоторого промежутка, тогда ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx,$$

который назовем *дифференциалом первого порядка*, является функцией двух переменных: аргумента $x$ и его дифференциала $dx$. Пусть функция $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке $x$. Будем рассматривать $dx$ в выражении для $dy$ как постоянный множитель. Тогда функция $dy$ представляет собой функцию только аргумента $x$ и ее дифференциал в точке $x$ имеет вид (при рассмотрении дифференциала от $dy$ будем использовать обозначения для дифференциалов)

$$\delta(dy)=\delta\left[f'(x)\,dx\right]=\left[f'(x)\,dx\right]'\delta x=f''(x)\,dx\,\delta x.$$

Дифференциал $\delta(dy)$ от дифференциала $dy$ в некоторой точке $x$, взятый при $\delta x=dx$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ в точке $x$ и обозначается $d^2y$, т. е.

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2y)$ от дифференциала $d^2y$, взятый при $\delta x=dx$, называется *дифференциалом третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначается $d^3y$ и т. д. Дифференциал $\delta(d^{(n-1)}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$, взятый при $\delta x=dx$, называется *дифференциалом n-го порядка* (*или n-м дифференциалом*) функции $f(x)$ и обозначается $d^ny$.

□ Покажем, что для $n$-го дифференциала функции справедлива формула

$$d^n y = y^{(n)} (dx)^n, \quad n = 1, \ 2, \ \ldots . \tag{2}$$

Ее доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ и $n=2$ она доказана. Пусть эта формула верна для дифференциалов порядка $n-1$:

$$d^{n-1} y = y^{(n-1)} (dx)^{n-1},$$

и функция $y^{(n-1)}$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке $x$. Тогда

$$d^n y = \delta (d^{n-1} y) = \delta \left[ y^{(n-1)} (dx)^{n-1} \right] = \left[ y^{(n-1)} (dx)^{n-1} \right]' \delta x = \\ = y^{(n)} \delta x \, (dx)^{n-1},$$

полагая $\delta x = dx$, получим

$$d^n y = \delta (d^{n-1} y) |_{\delta x = dx} = y^{(n)} (dx)^n. \ \blacksquare$$

Из формулы (2) следует, что для любого $n$ справедливо равенство

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{(dx)^n} \quad \text{или} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т. е. $n$-я производная функции $y=f(x)$ в некоторой точке $x$ равна отношению $n$-го дифференциала этой функции в точке $x$ к дифференциалу аргумента в степени $n$.

○ **Пример 3.** Вычислить дифференциал $d^3 y$ функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получим

$$dy = y' dx = (4x^3 - 6x) \, dx,$$

$$d^2 y = d(dy) = d \left[ (4x^3 - 6x) \, dx \right] = \left[ (4x^3 - 6x) \, dx \right]' dx = \\ = (12x^2 - 6)(dx)^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = d \left[ (12x^2 - 6)(dx)^2 \right] = \left[ (12x^2 - 6)(dx)^2 \right]' dx = \\ = 24x (dx)^3. \ \bullet$$

Заметим, что если $x$ является не независимой переменной, а функцией какой-то переменной $t$ то формула (2) не верна (при $n>1$ не обладает свойством инвариантности формы дифференциалов). В частности, при $n=2$ $d^2 y = d(y' dx) = dy' \cdot dx + y' \cdot d(dx) = = y'' (dx)^2 + y' d^2 x$ или $d^2 y = y'' (dx)^2 + y' d^2 x$.

Видим, что форма второго дифференциала изменилась, появилось слагаемое $y' d^2 x$. Если $x$ — независимая переменная, то оно равно нулю, так как в этом случае $dx$ — постоянная величина и, следовательно, $d^2x = d(dx) = 0 \cdot dx = 0$.

**Упражнения.** Найти дифференциалы высших порядков от следующих функций:
1. $f(x) = 4^{-x^2}$, найти $d^2y$. (*Отв.* $4^{-x^2} 2 \ln 4 (2x^2 \times \times \ln 4 - 1)(dx)^2$.) 2. $f(x) = \sin^2 x$; найти $d^3y$. (*Отв.* $-4 \sin 2x (dx)^3$.)

?

**Вопросы для самопроверки**

1. Почему производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию аргумента $x$?
2. Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$.
3. Приведите пример функции, у которой существует $f'(x)$, но не существует $f''(x)$.
4. Является ли производная $f'(x)$ непрерывной функцией в точке $x$, если в этой точке существует $f''(x)$?
5. Дайте определение $n$-й производной функции $y = f(x)$.
6. Известно, что $n$-я производная функции $y = f(x)$ существует в точке $x$. Что можно сказать о существовании производных меньшего порядка в этой точке и ее окрестности?
7. Выведите формулу Лейбница.
8. Дайте определение $n$-го дифференциала функции $y = f(x)$.

## § 11. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**1. Параметрическое задание функции.** Пусть даны две функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

одной независимой переменной $t$, определенные и непрерывные в одном и том же промежутке. Если $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то обратная функция $t = \Phi(x)$ однозначна, также непрерывна и строго монотонна. Поэтому $y$ можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной $x$ посредством переменной $t$, называемой параметром:

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ *задана параметрически с помощью уравнений* (1). Отметим, что функция $\psi[\Phi(x)]$ непрерывна в силу теоремы о непрерывности сложной функции.

○ **Пример 1.** Пусть $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Так как функция $x = R\cos t$ убывает при $0 \leqslant t \leqslant \pi$, то данные уравнения задают параметрически функцию $y$ от $x$. Если выразить $t$ через $x$ из первого уравнения и подставить во второе, то получим искомую функцию переменной $x$ в явном виде.

Еще проще придем к цели, если заметим, что

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=R^2.$$

Отсюда $y=\sqrt{R^2-x^2}$ или $y=-\sqrt{R^2-x^2}$. Так как функция $y=R\sin t$ неотрицательна для $0\leqslant t\leqslant\pi$, то выбираем знак плюс перед радикалом: $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Взяв $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, получим $y=-\sqrt{R^2-x^2}$.

Таким образом, видим, что, когда $t$ изменяется от 0 до $2\pi$, формулы $x=R\cos t$ и $y=R\sin t$ определяют две функции переменной $x$, графики которых образуют целую окружность.

**Пример 2.** Пусть $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Нетрудно понять, что данные равенства являются параметрическими уравнениями эллипса, если вспомнить (см. значение п. 1, § 7, гл. 2), что эллипс получается из уравнения окружности радиуса $a$ сжатием в $a/b$ раз вдоль оси $Oy$. Из примера 1 следует, что параметрическими уравнениями окружности $x^2+y^2=a^2$ являются равенства $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Отсюда ясно, что параметрические уравнения эллипса получаются из параметрических уравнений окружности умножением ординаты $y$ на $b/a$ и имеют вид $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Существует еще более простое решение. Исключая из этих уравнений параметр $t$ (разрешая их относительно $\cos t$ и $\sin t$, возводя полученные равенства в квадрат и складывая), получим

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

— уравнение эллипса. ●

Параметрическое задание функции имеет особенно важное значение при изучении движения точки. Если точка движется на плоскости, то ее координаты $x$, $y$ являются функциями времени $t$. Задав эти функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, мы полностью определим движение точки. В каждом промежутке времени, в котором функция $\varphi(t)$ строго монотонна, можно, поступая как раньше, определить функцию $y=\psi[\Phi(x)]$, графиком которой является кривая, описанная за этот промежуток времени движущейся точкой. В последнем примере функции описывали движение точки по эллипсу.

**2. Дифференцирование функции, заданной параметрически.** Предположим теперь, что функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$ на некотором промежутке. Из последнего неравенства вытекает (как увидим далее) строгая монотонность функции $x=\varphi(t)$ (см. теорему 5.12) и, следовательно, однозначность обратной функции $t=\Phi(x)$. По теореме 5.4 о производной обратной функции, функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)},$$

а по теореме 5.5 о производной сложной функции, функция $y=\psi[\Phi(x)]$ имеет производную

$$y'_x=\psi'(\Phi(x))\,\Phi'(x).$$

Следовательно,

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad\text{или, короче,}\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, мы доказали, что производная функции, представленной параметрически, выражается формулой

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2}$$

○ **Пример 3.** Найти $y'_x$, если $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

Решение. По формуле (2) получаем

$$y'_x=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-\operatorname{ctg} t\quad (t\neq 0;\ \pi).$$

**Пример 4.** Найти $y'_x$, если $x=2t+t^2$, $y=t^2-2t^3$.

Решение. По формуле (2) получаем

$$y'_x=\frac{2t-6t^2}{2+2t}=\frac{2t(1-3t)}{2(1+t)}=\frac{t(1-3t)}{1+t}.\ ●$$

Пусть существуют вторые производные функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в некоторой точке $t$. Тогда можно вычислить вторую производную функции, заданной параметрически. Заметим, что функция $y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ в свою очередь, задана параметрически уравнениями

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \psi_1(t), \quad x = \varphi(t).$$

Поэтому по формуле (2) имеем

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования частного.

Итак, получено, что

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

или, короче,

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{3}$$

Аналогично можно получить производную от $y$ по $x$ любого порядка.

○ **Пример 5.** Найти $y''_{xx}$, если $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

Решение. $y'_t = \cos t$, $y''_t = -\sin t$; $x'_t = -\sin t$, $x''_t = -\cos t$. Подставляя в формулу (3), находим

$$y''_{xx} = \frac{(-\sin t)(-\sin t) - (-\cos t)(\cos t)}{(-\sin t)^3} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{(-\sin t)^3} = -\frac{1}{\sin^3 t} \; \bullet$$

**Упражнения.** Для следующих функций, заданных параметрически, найти $y'_x$ и $y''_{xx}$:

**1.** $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3} - t$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{t^2-1}{2t};\ \frac{1+t^2}{4t^3}.\right)$

**2.** $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{3}{2}e^t;\ \frac{3}{4e^t}.\right)$

**3.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $\left(\textit{Отв.}\ \operatorname{ctg}\frac{t}{2};\ -\frac{1}{4a\sin^4(t/2)}\right)$

?

Вопросы для самопроверки

1. Что такое параметрическое задание функции?
2. При каких условиях справедлива формула (2) для производной функции, заданной параметрически?

## § 12. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**Теорема 5.6 (теорема Ферма)** [1]. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,\ b)$ и в некоторой точке $x_0$ этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке $x_0$ существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.*

□ Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет наибольшее значение, т. е. $f(x)\leqslant f(x_0)$ для любого $x\in(a,\ b)$. Это означает, что $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0$ для любой точки $x_0+ +\Delta x\in(a,\ b)$. Поэтому если $\Delta x>0\ (x>x_0)$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0$, и, следовательно,

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0,$$

если же $\Delta x<0\ (x<x_0)$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$, поэтому

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0,$$

т. е. правая производная в точке $x_0$ неположительная, а левая — неотрицательная. По условию, $f'(x_0)$ существует и, значит, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. Это возможно только в случае, когда $f'_+(x_0)= =f'_-(x_0)=0$. Но тогда и $f'(x_0)=0$.

Аналогично рассматривается случай, когда в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет наименьшее значение. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $x_0$ дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее (наименьшее) значение, то в точке $(x_0;\ f(x_0))$ касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси $Ox$ (рис. 141).

[1] Ферма Пьер (1601—1665) — французский математик.

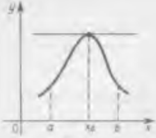



Рис. 141

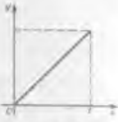



Рис. 142

Замечание. Теорема не верна, если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a, b]$. Так, например, функция $f(x)=x$ на отрезке $[0, 1]$ в точке $x=0$ принимает наименьшее, а в точке $x=1$ — наибольшее значение, однако как в той, так и другой точке производная в нуль не обращается, а равна единице (рис. 142).

**Теорема 5.7 (теорема Ролля)**[1]. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *определена функция* $f(x)$, *причем*: 1) $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$; 2) $f(x)$ *дифференцируема на* $(a, b)$; 3) $f(a)=f(b)$. *Тогда существует точка* $c\in(a, b)$, *в которой* $f'(c)=0$.

□ Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она имеет на этом отрезке максимальное значение $M$ и минимальное значение $m$, т. е. существуют такие точки $x_1$, $x_2\in[a, b]$, в которых $f(x_1)=m$ и $f(x_2)=M$ и выполняются неравенства

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

Возможны два случая: 1) $M=m$; 2) $m<M$.

В первом случае $f(x)=\text{const}=M=m$. Поэтому производная $f'(x)$ равна нулю в любой точке $[a, b]$ и теорема доказана.

Во втором случае, так как $f(a)=f(b)$, то хотя бы одно из двух значений $m$ или $M$ не принимается на концах отрезка $[a, b]$, т. е. существует точка $c\in(a, b)$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на интервале $(a, b)$. В этом случае, так как $f(x)$ дифференцируема в точке $c$, из теоремы Ферма следует, что $f'(c)=0$. ■

[1] Ролль Мишель (1652—1719) — французский математик.

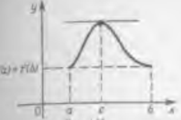


Рис. 143


Рис. 144

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на концах этого отрезка равные значения, существует точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси $Ox$ (рис. 143). На рис. 143 в точке $c$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

○ **Пример 1.** Установить, удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. Функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, и на отрезке $[-1, 1]$ (рис. 144). На концах этого отрезка значения функции совпадают: $f(-1)=f(1)=0$.

Однако, производная $f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в точке $x=0$ не существует. Но так как эта точка является внутренней точкой отрезка $[-1, 1]$, то условие существования конечной производной на интервале $(-1, 1)$, требуемое в теореме Ролля, не выполняется. Поэтому теорема Ролля к данной функции на отрезке $[-1, 1]$ неприменима. И действительно, $f'(x)\neq 0$ на $[-1, 1]$. ●

**Упражнение.** На рис. 142, 145, 146 соответственно изображены графики следующих функций: 1) $f(x)=x$, $x\in[0,1]$; 2) $f(x)$, равная $x$, если $0\leqslant x<1$, и равная 0, если $x=1$; 3) $f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля данные функции, и если нет, то укажите для каждой функции два условия, которые выполняются, и третье, которое не выполняется (объясните, почему).

Рис. 145

Рис. 146

**Теорема 5.8 (теорема Лагранжа)** [1]. *Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на $(a, b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

□ Доказательство. Введем в рассмотрение на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (как разность двух непрерывных функций $f(x)$ и линейной функции $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$);

2) $F(x)$ дифференцируема на $(a, b)$, т. е. внутри $[a, b]$ имеет производную, равную $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3) $F(a)=0$ и $F(b)=0$, т. е. $F(a)=F(b)$.

Следовательно, по теореме Ролля, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c)=0$, т. е. $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Отсюда получаем $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 147). Величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэф-

---

[1] Лагранж Жозеф-Луи (1736—1813) — французский математик.

фициент секущей, проходящей через точки $M_1(a;\ f(a))$ и $M_2(b;\ f(b))$ графика функции $y=f(x)$, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к графику $y=f(x)$ в точке $(c;\ f(c))$. Из теоремы Лагранжа следует, что существует точка $c$ такая, что касательная к графику в точке $(c;\ f(c))$ параллельна секущей $M_1M_2$. Таких точек может быть и несколько, но по крайней мере одна всегда существует.

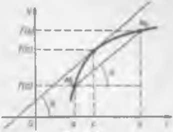


Рис. 147

Замечание 1. Равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \quad a<c<b \tag{1}$$

называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*.

Замечание 2. Так как точка $c$ лежит между точками $a$ и $b$, то можно записать

$$c=a+\theta(b-a), \quad 0<\theta<1.$$

Здесь $\theta(b-a)$ — часть длины отрезка $[a, b]$. Учитывая это, формулу Лагранжа можно записать в виде

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad 0<\theta<1.$$

Замечание 3. Если положить $a=x$, $b=x+\Delta x$, то получим

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Такая запись формулы Лагранжа часто бывает удобнее, чем запись (1).

Теорема Лагранжа лежит в основе доказательства многих формул и теорем анализа.

○ **Пример 2.** Проверить, что функция $f(x)=2x-x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[1,\ 3]$, и найти имеющуюся в формуле Лагранжа точку $c$.

Решение. Функция $f(x)=2x-x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так как она непрерывна на отрезке $[1,\ 3]$ и имеет конечную производную $f'(x)=2-2x$ в каждой внутренней точке отрезка, т. е. дифференцируема на $(1,\ 3)$. По теореме Лагранжа, между двумя точками $x_1=1$ и $x_2=3$ существует точка $x=c$, удовлетворяющая равенству

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

Подставляя значение $x_1=1$ и $x_1=3$, получаем

$$f'(c)=2-2c=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)}{3-1}=\frac{-4}{2}$$

или $1-c=-1$, откуда находим $c=2$. ●

**Теорема 5.9 (теорема Коши).** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на $(a, b)$. Пусть, кроме того, $g'(x)\neq 0$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (2)$$

□ Доказательство. Покажем сначала, что $g(b)\neq g(a)$, т. е. что формула (2) имеет смысл. Действительно, если допустить, что $g(b)=g(a)$, то, по теореме Ролля, для функции $g(x)$ найдется точка $\xi\in(a, b)$, в которой $g'(\xi)=0$. А это противоречит условию, что $g'(x)\neq 0$ на $(a, b)$. Перейдем к доказательству формулы (2).

Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Нетрудно заметить, что $F(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $(a, b)$ и, кроме того, подстановка $x=a$ и $x=b$ дает $F(a)=0$ и $F(b)=0$, т. е. $F(a)=F(b)$. По теореме Ролля, для $F(x)$ существует точка $c$, $a<c<b$, такая, что $F'(c)=0$.

Так как $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$, то

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Откуда, учитывая, что $g'(c)\neq 0$, получаем формулу (2). ■

Формула (2) называется *формулой Коши* или *обобщенной формулой конечных приращений*.

Замечание. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если положить $g(x)=x$.

○ **Пример 3.** Проверить, что функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют



условиям теоремы Коши на отрезке $[1, 4]$, и найти имеющуюся в формуле Коши точку $c$.

Решение. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, так как они непрерывны на отрезке $[1, 4]$, их производные $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20$ существуют во всех точках интервала $(1, 4)$, т. е. дифференцируемы на этом интервале, и, кроме того, $g'(x)\neq 0$ на $[1, 4]$. По теореме Коши, между двумя точками $x_1=1$ и $x_2=4$ существует точка $x=c$, удовлетворяющая равенству

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Подставляя значения $x_1=1$ и $x_2=4$, получаем

$$\frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}.$$

Решая уравнение, находим $c_1=2$ и $c_2=4$. Так как точка $x=c$ должна удовлетворять неравенствам $1<c<4$, то искомой точкой является $c_1=2$. ●

?

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Ферма. В чем состоит ее геометрический смысл?
2. Верна ли теорема, если $f(x)=f(x_0)$ для нескольких значений $x\in(a, b)$?
3. Приведите пример функции, принимающей наименьшее значение в точке и не имеющей производной в этой точке. Что отсюда следует?
4. Сформулируйте теорему Ролля и раскройте ее геометрический смысл.
5. Останется ли справедливой теорема Ролля, если опустить одно из ее трех условий? Приведите соответствующие примеры.
6. Сформулируйте теорему Лагранжа и объясните ее геометрический смысл.
7. Сформулируйте теорему Коши.
8. Покажите, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

## § 13. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Снова вернемся к вопросу раскрытия неопределенностей, который рассматривался в гл. 4. Здесь познакомимся с простым и весьма эффективным методом раскрытия неопределенностей, называемым *правилом Лопиталя*.

**1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$.** Следующая теорема дает правило раскрытия данной неопределенности.

**Теорема 5.10 (теорема Лопиталя)**[1]. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$*[2] *и $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки $a$. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□ **Доказательство.** Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящейся к точке $a$, причем $x_n \neq a$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $a$, положив их равными нулю, т. е. $f(a) = g(a) = 0$. Тогда, очевидно, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, x_n]$, дифференцируемы на $(a, x_n)$ и, по условию, $g'(x) \neq 0$.

Таким образом, для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены все условия теоремы Коши на $[a, x_n]$, т. е. внутри $[a, x_n]$ существует точка $\xi_n$ такая, что

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

По сделанному доопределению, $f(a) = g(a) = 0$, следовательно,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \tag{1}$$

---

[1] Лопиталь Гийом Франсуа (1661—1704) — французский математик.

[2] Теорема остается справедливой и в случае, когда $x \to a-$ и $x \to a+$.

Пусть теперь в формуле (1) $n\to\infty$. Тогда, очевидно, $\xi_n\to a$ при $n\to\infty$ (рис. 148). Так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то правая часть формулы (1) имеет предел при $n\to\infty$, равный $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Следовательно, при $n\to\infty$ существует предел и левой части формулы (1), причем

Рис. 148

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Так как $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к $a$, то отсюда заключаем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\ \text{существует и}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \blacksquare$$

Доказанную теорему обычно называют *правилом Лопиталя*.

○ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Функции $f(x)=x^2-1+\ln x$ и $g(x)=e^x-e$ определены в окрестности точки $x=1$. Далее, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$, т. е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Предел отношения их производных существует:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e},$$

причем $g'(x)=e^x\neq 0$. Следовательно, эти функции удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, согласно которой $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, т. е.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.\ \bullet$$

Замечание 1. Обычно при вычислении пределов с помощью правила Лопиталя записывают только необходимые преобразования, а проверку выполнения условий делают по ходу вычислений. Если при этом окажется, что отношение производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет собой неопределенность и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя применяют повторно.

● **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

В этом примере правило Лопиталя применено дважды. ●

**Упражнения.** Найти: **1.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. (*Отв.* $\frac{1}{2}$.) **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. (*Отв.* 1.) **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. (*Отв.* $\frac{3}{5}$.) **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. (*Отв.* 2.) **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cdot\cos x}{x^4}$. (*Отв.* $\frac{1}{3}$.) **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$. (*Отв.* 1.)

Замечание 2. Теорема остается верной и в случае, когда $x\to\infty$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. В самом деле, пусть, например, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует (конечный или бесконечный). Сделаем подстановку $x=1/t$; тогда $t\to 0$ при $x\to\infty$ и

$$f(x)=f(1/t)\to 0,\quad g(x)=g(1/t)\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Применяя к функциям $f(1/t)$ и $g(1/t)$ теорему 5.10 и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

○ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1,\ \ \ln 1=0,\ \text{ а }\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2-1}{x^2+1}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x^2}{1+1/x^2}=-\frac{1-0}{1+0}=-1.\ \bullet$$

**Упражнения.** Найти: **1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg} x}$. (*Отв.* 0.)
**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. (*Отв.* $\frac{2}{3}$.)

**2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.** Для этой неопределенности справедливо утверждение, аналогичное теореме 5.10, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то теорема останется справедливой.

○ **Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя $n$ раз, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}.$$

Здесь уже никакой неопределенности нет. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0. \bullet$$

**Упражнения.** Найти: 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$. (*Отв.* 0.)
2. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}$. (*Отв.* 0.) 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$ (*Отв.* $+\infty$.)
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$ (*Отв.* 0.) 5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$. (*Отв.* 1.)
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$. (*Отв.* $+\infty$.) 7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ (*Отв.* 1.)

**3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.** *Неопределенности вида* $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$, как известно, можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а затем раскрыть с помощью правила Лопиталя.

○ **Пример 5.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Но $x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$, и мы получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+}x=0.$$

**Пример 6.** Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Но $\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$, и мы получили при том же условии $x\to\pi/2$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

**Упражнения.** Найти: **1.** $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot \operatorname{ctg} x)$. (*Отв.* 1.)

**2.** $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$. (*Отв.* 0.) **3.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$. (*Отв.* $\frac{2}{\pi}$.)

**4.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. (*Отв.* $-\frac{1}{2}$.) **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

(*Отв.* $-\frac{1}{2}$.) **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. (*Отв.* 0.)

И наконец, рассмотрим *неопределенности вида* $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$. Такие неопределенности имеют место при рассмотрении функций $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и $\infty$, а $g(x)$ — соответственно к 0, $\infty$ и 0. Эти неопределенности с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которая уже рассмотрена.

● **Пример 7.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0^0$. Но $x^x=e^{x\ln x}$, и мы получили в показателе степени неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая уже рассмотрена (см. пример 5). Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}=e^0=1.$$

**Пример 8.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $1^\infty$. Но $(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}=e^{\ln(1+x^2)/(e^x-1-x)}$ и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x}=\frac{2}{1}=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=e^2.$$

**Пример 9.** Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty^0$. Но

$$(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^{\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/\cos x}}$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sec x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg}x}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\ \operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x\sec^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\cos x=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1.\ \bullet$$

**Упражнения.** Найти: **1.** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$. (*Отв.* 1.) **2.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$. (*Отв.* 1.) **3.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$. (*Отв.* 1.)

Рекомендуем для приобретения навыка раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя использовать также примеры, помещенные в гл. 4.

В заключение рассмотрим пример, когда правило Лопиталя неприменимо.

○ **Пример 10.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Однако правило Лопиталя здесь применить нельзя, т. е. предел отношения производных

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

не существует. Для раскрытия данной неопределенности разделим числитель и знаменатель на $x$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=$$

$$=1+0=1. \bullet$$

?

### Вопросы для самопроверки

1. Докажите теорему Лопиталя для случаев, когда $x\to a-$ и $x\to a+$.

2. Сформулируйте правило Лопиталя для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to a$.

3. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, представляющий неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, также не существует?

4. Почему в теореме Лопиталя не требуется, чтобы производные $f'(x)$ и $g'(x)$ обязательно существовали в самой точке $a$?

## § 14. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Рассмотрим одну из главных формул математического анализа, имеющую многочисленные применения как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах.

**1. Формула Тейлора.**

**Теорема 5.11** (**теорема Тейлора**)[1]. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $a$ и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$*[2]. *Пусть $x$ — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x\neq a$. Тогда между точками $a$ и $x$ найдется точка $\xi$ такая, что справедлива следующая формула:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (1)$$

□ Доказательство. Обозначим через $\varphi(x, a)$ многочлен относительно $x$ порядка $n$ в правой части формулы (1), т. е. положим

[1] Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик.

[2] Отсюда следует, что сама функция $f(x)$ и ее производные до порядка $n$ непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

$$\varphi(x,\ a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ ...\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Он называется *многочленом Тейлора порядка n* для функции $f(x)$.)

Далее обозначим через $R_{n+1}(x)$ разность

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,\ a).$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$R_{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad a<\xi<x.$$

Фиксируем любое значение $x$ из указанной окрестности. Для определенности считаем $x>a$. Обозначим через $t$ переменную величину, изменяющуюся на отрезке $a\leqslant t\leqslant x$, и рассмотрим на отрезке $[a,\ x]$ вспомогательную функцию

$$F(t)=f(x)-\varphi(x,\ t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (2)$$

Функция $F(t)$ удовлетворяет на $[a,\ x]$ всем условиям теоремы Ролля: 1) из формулы (2) и из условий, наложенных на функцию $f(x)$, вытекает, что $F(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[a,\ x]$, ибо $f(t)$ и ее производные до порядка $n$ непрерывны и дифференцируемы на $[a,\ x]$;

2) полагая в (2) $t=a$, имеем

$$F(a)=f(x)-\varphi(x,\ a)-R_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x)=0.$$

Полагая в (2) $t=x$, получим

$$F(x)=f(x)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(x-x)-\frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2-...$$

$$...-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

Таким образом, условие $F(a)=F(x)$ выполнено.

На основании теоремы Ролля внутри отрезка $[a,\ x]$ существует точка $\xi$ такая, что

$$F'(\xi)=0. \qquad (3)$$

Вычислим производную $F'(t)$. Дифференцируя равенство (2) по $t$, имеем

$$F'(t)=-f'(t)+\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}\times$$

$$\times(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+$$

$$+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Нетрудно заметить, что все члены в правой части равенства, за исключением двух последних, взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $t=\xi$ и используя равенство (3), получим

$$F'(\xi)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

Откуда

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \ ■$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора*, а выражение для $R_{n+1}(x)$ — *остаточным членом в форме Лагранжа*. Его можно переписать в другом виде. Так как точка $\xi\in(a, x)$, то найдется такое число $\theta$ из интервала $0<\theta<1$, что $\xi=a+\theta(x-a)$ и остаточный член принимает вид

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

Эта форма остаточного члена наиболее употребительна в приложениях.

**2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена.** Часто формулу Тейлора (1) записывают в ином виде. Положим в (1) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$. Тогда получим

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \qquad (5)$$

При $n=0$ из (5) получается формула Лагранжа

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Покажем, что если функция $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки $a$, то остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка чем $(x-a)^n$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)=0,$$

так как функция $f^{(n+1)}(\xi)$ ограничена, а $(x-a)\to 0$ при $x\to a$. Таким образом,

$$R_{n+1}(x)=o\left[(x-a)^n\right] \quad \text{при} \quad x\to a. \qquad (6)$$

Формула (6) называется остаточным членом в форме Пеано[1].

**3. Формула Маклорена.** *Формулой Маклорена*[2] принято называть формулу Тейлора (1) при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

Остаточный член имеет вид:

1) *в форме Лагранжа* $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$;

2) *в форме Пеано* $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

**4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.**

1) $f(x)=e^x$. Так как

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \qquad (7)$$

2) $f(x)=\sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=$$

$$=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном,}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном,}\end{cases}$$

---

[1] Пеано Джузеппе (1858—1932) — итальянский математик.

[2] Маклорен Колин (1698—1746) — шотландский математик.



то формула Маклорена имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}). \qquad (8)$$

3) $f(x)=\cos x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ (-1)^{n/2} & \text{при четном,}\end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}). \qquad (9)$$

В формуле (8) мы записали остаточный член в виде $o(x^{2n})$, а не в виде $o(x^{2n-1})$, так как следующий за последним член равен нулю (то же самое относится к формуле (9)).

4) $f(x)=(1+x)^\alpha$, где $\alpha$ — вещественное число. Так как

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

то формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+R_{n+1}^{(\alpha)},$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

В частном случае, когда $\alpha=n$ — натуральное число, $f^{(n+1)}(x)=0$, следовательно, $R_{n+1}(x)=0$, и мы получим известную вам формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n. \qquad (10)$$

Если нужно получить разложение двучлена $(a+x)^n$, то можно вынести $a^n$ за скобку и воспользоваться формулой (10). При этом получим

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right]$$

Таким образом, общий случай бинома Ньютона является частным случаем формулы Маклорена.

Приведенные выше разложения показывают, что с помощью формулы Маклорена функции можно с определенной степенью точности заменять многочленами, являющимися наиболее простыми элементарными функциями. Над многочленами удобно выполнять арифметические действия, дифференцировать их, многочлен непрерывен в любой точке и т. д. Формулы Тейлора и Маклорена позволяют приближенно заменять многочленами и более сложные функции. Кроме того, эти формулы имеют широкий круг приложений. Ограничимся рассмотрением двух из них.

**5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов.** Формула Тейлора является эффективным средством для вычисления пределов функций, с которыми часто приходится иметь дело при исследовании функций.

Рассмотрим примеры.

○ 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$. По формуле (8), взятой при $n=2$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1}=-\frac{1}{3!}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3}=$$

$$=-\frac{1}{3!}+0=-\frac{1}{6}.$$

**2.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}$. По формулам (7) — (9) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^3(x+o(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{1+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+0}{1+0}=\frac{1}{12}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. По формулам (7) и (8) имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{1}{6}+0}=2. \bullet$$

**6. Вычисление числа e.** В п. 2 § 3 гл. 3 мы ввели число e как предел последовательности $\{(1+1/n)^n\}$ и получили для e грубую оценку вида $2\leqslant e\leqslant 3$.

Покажем, как вычислить число e с любой необходимой точностью. Для этого запишем формулу (7) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1. \qquad (11)$$

Если заменить функцию $e^x$ ее многочленом Тейлора степени $n$, то получим приближенное равенство

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, \qquad (12)$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}^{(x)}|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Если рассматривать функцию $e^x$ для $-1\leqslant x\leqslant 1$, то

$$|R_{n+1}^{(x)}|\leqslant\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}. \qquad (13)$$

Полагая в (12) $x=1$, получаем приближенное значение числа

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

При этом абсолютная погрешность меньше $\frac{3}{(n+1)!}$.

Если требуется вычислить значение e с точностью до 0,001, то число $n$ определяется из неравенства

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001, \text{ или } (n+1)! > 3000,$$

которое выполняется при $n=6$. Следовательно,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

с точностью до 0,001.

Таким образом, использование формулы Маклорена дает возможность вычислить число e с любой точностью.

**?** Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Тейлора.
2. Что называется многочленом Тейлора степени $n$ для функции $f(x)$?
3. Получите остаточный член формы Пеано из формы Лагранжа.
4. Что называется формулой Маклорена для функции $f(x)$? Напишите остаточные члены этой формулы в формах Лагранжа и Пеано.
5. Почему нельзя назвать правую часть формулы Тейлора (1) многочленом степени $n+1$?
6. В каком случае остаточный член в формуле Тейлора обращается в нуль? Приведите пример.
7. Какого условия в формулировке теоремы Тейлора не хватает для вывода остаточного члена в форме Пеано? Сформулируйте его.

## § 15. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

### 1. Признак монотонности функции.

**Теорема 5.12.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на $(a, b)$, то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a, b)$.*

□ **Доказательство.** Для определенности рассмотрим случай $f'(x) \geq 0$. Пусть $x_1$ и $x_2$ — две произвольные точки из $(a, b)$ и $x_1 < x_2$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа, согласно которой имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

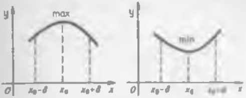



Рис. 149

Согласно условию $f'(c)\geqslant 0$, $x_2-x_1>0$, поэтому $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$ или $f(x_2)\geqslant f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ не убывает на $(a, b)$.

Доказательство для случая $f'(x)\leqslant 0$ аналогичное. ■

Замечание. Точно так же можно доказать, что если $f'(x)>0(<0)$ на $(a, b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a, b)$.

○ **Пример 1.** Определить промежутки, на которых функция $f(x)=x^3-12x+11$ возрастает и убывает.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производную функции $f'(x)=3x^2-12$. Из неравенства $3x^2-12>0$ или $x^2>4$, или $\sqrt{x^2}>2$, т. е. $|x|>2$ (либо $x>2$, либо $x<-2$), следует, что данная функция возрастает на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$, а из неравенства $3x^2-12<0$ или $x^2<4$, или $\sqrt{x^2}<2$, т. е. $|x|<2$ $(-2<x<2)$, следует, что данная функция убывает на интервале $(-2, 2)$. ●

**Упражнения.** Определить промежутки, на которых возрастают и убывают следующие функции:
1. $f(x)=3x^2-2x$. (*Отв.* Возрастает на интервале $(1/3, +\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty, 1/3)$.)
2. $f(x)=2-3x+x^3$. (*Отв.* Возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, +\infty)$ и убывает на $(-1, 1)$.)

**2. Отыскание точек локального экстремума функции.**

**Определение.** *Точка $x_0$ называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех $x$ из некоторой $\delta$-окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ при $x\neq x_0$* (рис. 149).

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием *локальный экстремум.*

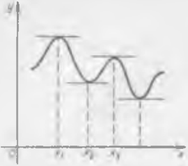


Рис. 150

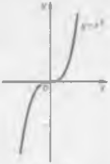


Рис. 151

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что в случае экстремума неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) не обязано выполняться для всех значений $x$ в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой окрестности точки $x_0$. Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

**Теорема 5.13 (необходимое условие локального экстремума).** *Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

□ Доказательство. Так как в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то существует такой интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, в котором значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений этой функции. Тогда, по теореме Ферма, производная функции в точке $x_0$ равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$. ■

Теорема 5.13 имеет следующий геометрический смысл. Если $x_1$, $x_2$, и $x_3$ — точки локального экстремума и в соответствующих точках графика существуют касательные, то эти касательные параллельны оси $Ox$ (рис. 150).

Иногда такие точки называют *стационарными;* мы будем называть их *точками возможного экстремума.* Если точка $x_0$ — точка возможного экстремума, т. е. $f'(x_0)=0$, то она может и не быть точкой локального максимума (минимума). Например, если $f(x)=x^3$, то

$f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но тем не менее в точке $x=0$ нет локального экстремума (рис. 151). Поэтому мы их и назвали точками возможного экстремума, а условие $f'(x_0)=0$ является лишь необходимым. Установим достаточное условие существования локального экстремума.

**Теорема 5.14 (достаточное условие локального экстремума).** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta$-окрестности точки $x_0$. Тогда, если $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для всех $x$ из $(x_0-\delta,\ x_0)$, а $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ для всех $x$ из $(x_0,\ x_0+\delta)$, то в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум), если же $f'(x)$ во всей $\delta$-окрестности точки $x_0$ имеет один и тот же знак, то в точке $x_0$ локального экстремума нет.*

Другими словами, если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак с $+$ на $-$, то $x_0$ — точка локального максимума, если $f'(x)$ в точке $x_0$ меняет знак с $-$ на $+$, то $x_0$ — точка локального минимума, если же знак $f'(x)$ в точке $x_0$ не изменяется, то в точке $x_0$ экстремума не существует.

□ Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак с $+$ на $-$ и пусть $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x,\ x_0]$. Получаем

$$f(x_0)-f(x)=f'(c)(x_0-x),\quad c\in(x,\ x_0).$$

Так как $f'(x)>0$ на $(x_0-\delta,\ x_0)$, то $f'(c)>0$ и, кроме того, $x_0-x>0$, следовательно,

$$f(x_0)-f(x)>0 \ \text{ или } \ f(x_0)>f(x). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь интервал справа от точки $x_0$, т. е. $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0,\ x]$. Получаем

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),\quad c\in(x_0,\ x).$$

Так как $f'(x)<0$ на $(x_0,\ x_0+\delta)$, то $f'(c)<0$ и, кроме того, $x-x_0>0$, следовательно,

$$f(x)-f(x_0)<0 \ \text{ или } \ f(x_0)>f(x). \tag{2}$$

Из неравенства (1) и (2) следует, что в рассматриваемой окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ при $x\neq x_0$, а это означает, что в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум.

Аналогично рассматривается случай перемены знака $f'(x)$ с $-$ на $+$.

Осталось рассмотреть случай, когда $f'(x)$ не меняет знака.

Пусть $f'(x)>0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, тогда, по теореме 5.12 (по признаку монотонности), функция $f(x)$ не убывает на $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, т. е. для любых $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а для любых $x>x_0$ — неравенство $f(x)>f(x_0)$. Это означает, что точка $x_0$ не является точкой локального экстремума, т. е. при переходе через нее в данном случае не сохраняется знак разности $f(x)-f(x_0)$ в окрестности этой точки. ■

Замечание. Теорема 5.14 остается справедливой, если функция $f(x)$ в самой точке $x_0$ не дифференцируема, а только непрерывна. Примером такой функции является $f(x)=|x|$, которая в точке $x=0$ непрерывна, но не дифференцируема.

○ В качестве примера рассмотрим вопрос об отыскании точек локального экстремума функции $f(x)=x^3-3x$. Находим производную: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$. Решая уравнение $3(x^2-1)=0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1=-1$ и $x_2=1$. Дальнейшее исследование удобно вести, сделав вспомогательный рисунок (рис. 152). Отметив на нем точки $x_1=-1$ и $x_2=1$ и исследовав знак $f'(x)$ в окрестности этих точек, получаем, что $f(x)$ в точке $x_1=-1$ имеет локальный максимум, а в точке $x_2=1$ — локальный минимум. Осталось найти $y_{\max}$ и $y_{\min}$. Имеем $y_{\max}=f(-1)=2$, $y_{\min}=f(1)=-2$.

На рис. 152 видны и интервалы монотонности $f(x)$: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ и $(1,\ +\infty)$, причем в первом и третьем из них функция возрастает, а во втором — убывает. ●

**3. Задачи на максимум и минимум.** Задачи, в которых требуется найти, при каких значениях аргумента некоторая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, играют важную роль в математике и ее приложениях.

С математической точки зрения наиболее просты задачи, когда функция задается формулой и является при этом дифференцируемой. В этом случае для исследования свойств функции, определения участков ее возрастания и убывания, поиска точек локального экстремума существенную роль играет производная.

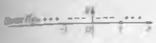


Рис. 152

Рис. 153

○ **Пример 2.** Найти максимумы и минимумы следующих функций: 1) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-x+3}$; 2) $f(x)=$ $=3x^4-4x^3-12x^2+2$; 3) $f(x)=(x-2)^5$.

Решение. 1) Область определения данной функции — вся числовая прямая, так как $x^2-x+3>0$ при любом $x$. Находим производную: $f'(x)=\frac{3(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$. Решая уравнение $3(2x-1)=0$, получаем точку возможного экстремума $x=1/2$. Исследовав знак $f'(x)$ на вспомогательном рисунке (рис. 153) в окрестности точки $x=1/2$, получаем, что в этой точке данная функция имеет локальный минимум, а $f(1/2)=-1/11$ — минимальное значение функции.

2) Область определения данной функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$. Решая уравнение $12x\times$ $\times(x^2-x-2)=0$, получаем три точки возможного экстремума: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$. Исследовав знак $f'(x)$ (рис. 154) в окрестности этих точек, получаем $x_1=-1$ и $x_3=2$ — точки локального минимума, $f(-1)=-3$ и $f(2)=-30$ — минимальные значения функции. $x_2=0$ — точка локального максимума, $f(0)=2$ — максимальное значение функции в этой точке.

3) Область определения данной функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x)=5(x-2)^4$. Производная обращается в нуль в единственной точке $x=2$. Так как $f'(x)$ положительна как слева, так и справа от этой точки, т. е. при переходе через точку $x=2$ знака не меняет, то данная функция не имеет точек экстремума.

**Пример 3** (задача о «наилучшей» консервной банке). Найти наилучший вариант изготовления консервной банки фиксированного объема $V$, имеющей форму прямого кругового цилиндра, и наименьшую поверхность $S$ (на ее изготовление должно пойти наименьшее количество жести).

Рис. 154

Рис. 155

Решение. Запишем формулы для объема банки и площади ее поверхности:

$$V=\pi R^2\cdot h,\quad S=2\pi R^2+2\pi Rh.$$

Выражая высоту банки $h$ через радиус $h=V/(\pi R^2)$ и подставляя полученное выражение в формулу для поверхности, получаем

$$S(R)=2\pi R^2+\frac{2V}{R},\quad 0<R<\infty.$$

Таким образом, задача о «наилучшей» консервной банке сводится к определению такого значения $R$, при котором достигает своего наименьшего значения функция $S(R)$. Вычислим производную функции $S(R)$:

$$S'(R)=4\pi R-\frac{2V}{R^2}=\frac{2}{R^2}(2\pi R^3-V).$$

Решая уравнение $\frac{2}{R^2}(2\pi R^3-V)=0$, получаем точку возможного экстремума $R=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Исследуем знак производной в окрестности этой точки (рис. 155). При $0<R<\sqrt[3]{V/(2\pi)}$ производная отрицательна и функция $S(R)$ убывает, при $\sqrt[3]{V/(2\pi)}<R<+\infty$ производная положительна и функция $S(R)$ возрастает. Следовательно, $R=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$ — точка локального минимума, $S(\sqrt[3]{V/(2\pi)})=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ — минимальное значение функции в этой точке.

Итак, радиус и высота банки, наилучшие с точки зрения условия минимальности $S(R)$, определяются формулами $R=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h=2R$, т. е. высота «наилучшей» банки равна ее диаметру.

Можно расширить поставленную задачу. Например, рассмотреть другой вариант: найти наилучшую форму консервной банки фиксированного объема $V$, имеющей наименьшую длину всех швов $l$ (необходимо минимизировать работу по сварке швов). Решите эту задачу самостоятельно. Заметим, что длина швов выражается формулой $l=4\pi R+h$, а радиус и высота банки, имеющей наименьшую длину швов, определяются следующими формулами: $R=\sqrt[3]{V/(2\pi^2)}$, $h=2\pi R$. ●

**4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.** Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в любой точке $M(x; f(x))$ этого графика $(a<x<b)$, причем касательная не параллельна оси $Oy$, поскольку ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

**Определение 1.** *Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ имеет на $(a, b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a, b)$* (рис. 156).

Из определения следует, что на участке выпуклости касательные к графику функции не пересекаются с самим графиком и имеют с ним лишь точки касания.

**Теорема 5.15.** *Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале $(a, b)$ вторую производную и $f''(x)\geqslant 0$ $(f''(x)\leqslant 0)$ во всех точках $(a, b)$ то график функции $y=f(x)$ имеет на $(a, b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).*

□ **Доказательство.** Для определенности рассмотрим случай $f''(x)\geqslant 0$ на $(a, b)$. Обозначим через $c$ произвольную точку $(a, b)$ (рис. 157). Требуется доказать, что график функции $y=f(x)$ лежит не ниже касательной, проходящей через точку $M(c, f(c))$.

Запишем, обозначая текущую ординату ее точек через $Y$, уравнение этой касательной: $Y-f(c)=$ $=f'(c)(x-c)$ или

$$Y=f(c)+f'(c)(x-c). \qquad (3)$$

Разложим функцию $y=f(x)$ в окрестности точки $c$ по формуле Тейлора при $n=1$. Получим

$$y=f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \quad \xi\in(c, x). \qquad (4)$$

Так как, по условию, $f(x)$ имеет $f''(x)$ на $(a, b)$, то, согласно теореме Тейлора, формула (4) справедлива для любого $x$ из $(a, b)$. Вычитая равенство (3) из равенства (4), имеем

Рис. 156

$$y-Y=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2. \qquad (5)$$

Так как, по условию, $f''(x)\geqslant 0$ на $(a, b)$, то правая часть равенства (5) неотрицательна, т. е. $y-Y\geqslant 0$ для всех $x$ из $(a, b)$ или $y\geqslant Y$. Последнее неравенство и доказывает, что график функции $y=f(x)$ всюду в пределах $(a, b)$ лежит не ниже касательной (3).

Аналогично доказывается теорема для случая $f''(x)\leqslant 0$. ■

**Определение 2.** *Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y=f(x)$, если в точке $M$ график имеет касательную, и существует такая окрестность точки $x_0$, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от точки $x_0$ имеет разные направления выпуклости.*

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой — над нею, т. е. в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается»

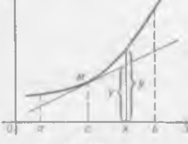


Рис. 157

Рис. 158

через нее. Отсюда и произошло название *точка перегиба* (рис. 158).

**Теорема 5.16 (необходимое условие точки перегиба).** *Пусть график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$ и пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке $x_0$ обращается в нуль, т. е. $f''(x_0)=0$.*

□ Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f''(x_0)\neq 0$. Тогда, в силу непрерывности второй производной, по теореме 4.9 об устойчивости знака непрерывной функции, существует окрестность точки $x_0$, в которой $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, и, значит, согласно теореме 5.15, график функции $y=f(x)$ имеет определенное направление выпуклости в этой окрестности. Но это противоречит наличию перегиба в точке $M(x_0; f(x_0))$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следует заметить, что не всякая точка $M(x_0; f(x_0))$, для которой $f''(x_0)=0$, является точкой перегиба. Например, график функции $f(x)=x^4$ не имеет перегиба в точке $(0; 0)$, хотя $f''(x)=12x^2=0$ при $x=0$ (рис. 159). Поэтому равенство нулю второй производной является лишь необходимым условием перегиба. Такие точки $M(x_0; f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0)=0$, будем называть *критическими*. Необходимо дополнительно исследовать вопрос о наличии перегиба в каждой критической точке, для чего следует установить достаточное условие перегиба.

**Теорема 5.17 (достаточное условие точки перегиба).** *Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x_0$, то график $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.*

□ Доказательство. Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки $x_0$ имеет разные знаки, на основании теоремы 5.15 заключаем, что направление выпуклости графика функции слева и справа от точки $x_0$ является различным. Это и означает наличие перегиба в точке $M(x_0; f(x_0))$. ■

Замечание. Теорема остается верной, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением самой точки $x_0$, и существует касательная к графику функции в точке $M$. Тогда, если в пределах указанной окрестности

Рис. 159

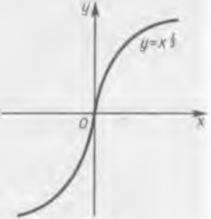



Рис. 160

$f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x_0$, то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$. Доказательство данного факта аналогично доказательству теоремы.

○ Рассмотрим пример: $f(x)=x^{1/3}$. Эта функция в точке $x=0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью $Oy$. Вторая производная в точке $x=0$ не существует. Однако график функции $y=x^{1/3}$ имеет перегиб в точке $O(0; 0)$, так как вторая производная

$f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^{5/3}}$ имеет слева и справа от точки $x=0$

разные знаки (рис. 160). ●

Итак, вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба графика функции исследуют с помощью второй производной.

○ В качестве примера продолжим рассматривать функцию $f(x)=x^3-3x$ (см. п. 2). Знак второй производной будем отмечать на вспомогательном рисунке (см. рис. 152). Находим вторую производную: $f''(x)=6x$. Из уравнения $6x=0$ получаем одну критическую точку: $O(0; 0)$. Отметив точку $x=0$ на вспомогательном рисунке (рис. 161) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем: слева от точки $x=0$ производная $f''(x)<0$ (график направлен выпуклостью вверх), а справа $-f''(x)>0$ (график направлен выпуклостью вниз), т. е. точка $O(0; 0)$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Этот график схематически изображен на рис. 162. ●


Рис. 161

Докажем теперь, что часть эллипса $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости ($y \geqslant 0$), имеет на интервале $(-a, a)$ выпуклость, направленную вверх. В самом деле, из уравнения эллипса получаем $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Далее находим

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad y''=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

Из выражения для второй производной вытекает, что эта производная отрицательна на интервале $(-a, a)$. Значит, данная кривая на всем интервале $(-a, a)$ направлена выпуклостью вверх (см. рис. 55).

Аналогично можно показать, что часть гиперболы $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости на интервалах $(a, +\infty)$ и $(-\infty, -a)$, имеет выпуклость, направленную вверх. (Предлагается сделать это самостоятельно.)

**5. Асимптоты графика функции.** При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют *асимптотами*[1].

Существует три вида асимптот: *вертикальные, горизонтальные и наклонные.*

**Определение 1.** *Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ *или* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ *равно* $+\infty$ *или* $-\infty$.

[1] Понятие асимптоты уже встречалось в аналитической геометрии при рассмотрении гиперболы (см. гл. 2, § 6, п. 2).

Рис. 162

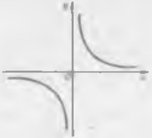


Рис. 163

Например, график функции $y=f(x)=1/x$ (рис. 163) имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как $f(x)\to+\infty$ при $x\to 0+$ и $f(x)\to-\infty$ при $x\to 0-$.

**Определение 2.** *Прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=A$.

Например, график рассмотренной выше функции $y=1/x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, так как $1/x\to 0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

**Определение 3.** *Прямая $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде*

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{6}$$

*где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.*

Выясним геометрический смысл наклонной асимптоты. Для определенности рассмотрим случай, когда $x\to+\infty$ (случай $x\to-\infty$ рассматривается аналогично).

Пусть $M(x;\ y)$ — точка графика функции $y=f(x)$, и пусть прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$. Текущую ординату точки на асимптоте обозначим через $\bar{y}$, точку на асимптоте — через $N(x;\ \bar{y})$ (рис. 164). Тогда $|MN|=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b)|=|\alpha(x)|\to 0$ при $x\to+\infty$. Опустим из точки $M$ перпендикуляр $MP$ на асимптоту. Расстояние $d$ от точки $M$ до асимптоты равно

$|MP|=|MN|\cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между асимптотой и осью $Ox$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} d=0$.

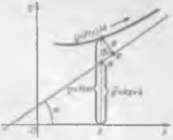


Рис. 164

Таким образом, расстояние от точки $M(x;\, y)$ графика функции до асимптоты стремится к нулю при $x\to+\infty$, т. е. график функции неограниченно приближается к асимптоте при $x\to+\infty$.

Рассмотрим способ отыскания наклонной асимптоты, т. е. способ определения чисел $k$ и $b$ в уравнении асимптоты. Разделив равенство (6) на $x$ и перейдя к пределу при $x\to+\infty$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=0$. Итак,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (7)$$

Далее, из соотношения (6) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b.$$

Таким образом,

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \qquad (8)$$

Мы доказали, что если прямая $\bar{y}=kx+b$ является наклонной асимптотой, то числа $k$ и $b$ находятся по формулам (7) и (8). Обратно, если оба предела (7) и (8) существуют, причем $k\neq 0$, то прямая $\bar{y}=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. В самом деле, полагая $\alpha(x)=f(x)-kx-b$ и используя равенство (8), получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$. Следовательно, справедливо равенство $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, т. е.

прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$.

Заканчивая рассмотрение наклонной асимптоты, сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**Теорема 5.18.** *Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[f(x)-kx\right]=b.$$

Целесообразно искать асимптоты в следующем порядке: 1) вертикальные асимптоты; 2) горизонтальные асимптоты; 3) наклонные асимптоты.

○ **Пример 4.** Найти асимптоты для графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$.

Решение. 1) Находим вертикальные асимптоты. Точка $x=0$ — точка разрыва второго рода данной функции, причем $y\to+\infty$ при $x\to0-$, $y\to-\infty$ при $x\to0+$. Следовательно, ось ординат $x=0$ — вертикальная асимптота.

2) Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(x+2-\frac{3}{x}\right)=\underset{(-\infty)}{+\infty},$$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

3) Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{2x-3}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2.$$

Следовательно, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой графика данной функции как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

График функции схематически изображен на рис. 165.

**Пример 5.** Доказать, что гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ имеет своими наклонными асимптотами прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Рис. 165

Решение. Так как $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, то

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right]=\pm\frac{b}{a};$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\mp\frac{b}{a}x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\right]=\pm\frac{b}{a}\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Следовательно, прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами данной гиперболы как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$. ●

**6. Схема исследования графика функции.** В данном пункте познакомимся с примерной схемой, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график. Для иллюстрации приведем примеры.

Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить в следующем порядке:

1) найти область определения функции;

2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

3) найти асимптоты;

4) найти точки возможного экстремума;

5) найти критические точки;

6) с помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;

7) построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1) — 6).

При этом в начале исследования полезно проверить, является данная функция четной или нечетной, чтобы при построении использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

○ **Пример 6.** Построить по изложенной выше схеме график функции

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Решение. 1) Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x=1$ (в этом случае знаменатель обращается в нуль).

2) Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью $Ox$, но пересекает ось $Oy$ в точке $(0; -1)$.

3) Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x=1$. Так как $y\to-\infty$ при $x\to1-$, $y\to+\infty$ при $x\to1+$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то $y\to+\infty$ $(y\to-\infty)$, следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+1}{x-1}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x}{1-1/x}=1$$

вытекает, что при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Рис. 166

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то критических точек нет.

6) Строим вспомогательный рисунок и исследуем знак первой и второй производных (рис. 166). Получаем, что функция на $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ возрастает, на $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ убывает, а на $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: максимум при $x=1-\sqrt{2}$, причем $f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$; минимум при $x=1+\sqrt{2}$, причем $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$. На $(-\infty, 1)$ график направлен выпуклостью вверх, а на $(1, +\infty)$ — вниз.

7) По полученным данным строим эскиз графика (рис. 167).

**Пример 7.** Построить график функции $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) График функции пересекает ось $Ox$ в точках, в которых $(x-1)^2=0$, т. е. в точке с абсциссой $x=1$, а ось $Oy$ — в точке с ординатой $y=1$.

3) Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. Далее, из существования предела

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x-2/x^2+1/x^3}{1+1/x^2}=\frac{0}{1}=0$$

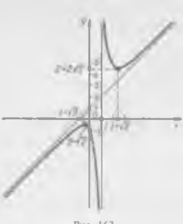


Рис. 167

следует, что

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} [f(x) - 0 \cdot x] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 2/x + 1/x^2}{1 + 1/x^2} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1,$$

т. е. наклонных асимптот нет, а прямая $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}.$$

Решая уравнение $2x^2 - 2 = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - (2x^2-2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Решая уравнение $4x(3 - x^2) = 0$, получаем три критических точки: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

6) Строим вспомогательный рисунок (рис. 168) и исследуем знак первой и второй производных.

Получаем, что на $(-\infty, -1)$ функция возрастает, на $(-1, 1)$ — убывает, а на $(1, +\infty)$ — снова возрастает. Точки экстремума: при переходе через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ изменяет знак с плюса на минус, а через точку $x = 1$ — с минуса на плюс, следовательно, в точке $x = -1$ — максимум, а в точке $x = 1$ — минимум, причем $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$. На $(-\infty, -\sqrt{3})$ график направлен выпуклостью вниз, на $(-\sqrt{3}, 0)$ — вверх, на $(0, \sqrt{3})$ — вниз, а на $(\sqrt{3}, +\infty)$ — снова вверх, следовательно, точки

Рис. 168

$x=-\sqrt{3},\ x=0,\ x=\sqrt{3}$ — абсциссы точек перегиба, причем $f(-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}/2$; $f(0)=1$, $f(\sqrt{3})=1-\sqrt{3}/2$.

7) По полученным данным строим график функции (рис. 169). ●

**Упражнения.** Построить графики следующих функций:

1. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$. (*Отв.* При $x=1$ — минимум, $f(1)=2$; при $x=-1$ — максимум, $f(-1)=-2$, $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=x$ — наклонная асимптота.)

2. $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. (*Отв.* При $x=0$ — максимум, $f(0)=0$; при $x=4$ — минимум, $f(4)=8$; $x=2$ — вертикальная асимптота, $y=x+2$ — наклонная асимптота.)

3. $f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$. (*Отв.* При $x=-3$ — максимум, $f(-3)=-49/12$; при $x=1$ — максимум, $f(1)=5/4$; при $x=2$ — минимум, $f(2)=9/8$; точка $x=9/7$ — абсцисса точки перегиба; $f(9/7)=913/756$; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ — наклонная асимптота; $\left(\frac{1}{2},0\right)$ — точка пересечения графика с осью $Ox$.)

○ **Пример 8.** Построить график функции $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Решение. 1) Функция определена при $x>0$, т. е. в интервале $0<x+\infty$.

2) График функции пересекает ось $Ox$ в точке, в которой $\ln x=0$, т. е. в точке с абсциссой $x=1$, а с осью $Oy$ пересечений не имеет, так как функция определена при $x>0$.

3) Вертикальной асимптотой является прямая $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ (докажите это самостоятельно). Отыскиваем асимптоты:

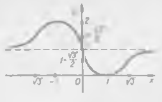



Рис 169

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}.$$

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

(здесь также было использовано правило Лопиталя).

Таким образом, $k=b=0$, т. е. наклонных асимптот нет; прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Решая уравнение $1-\ln x=0$, получаем одну точку возможного экстремума: $x=e$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

Решая уравнение $2\ln x-3=0$, $\ln x=\frac{3}{2}$, $x=e^{3/2}$, получаем одну критическую точку $x=e^{3/2}$.

6) На вспомогательном рисунке (рис. 170) исследуем знак первой и второй производных.

Получаем, что на $(0, e)$ производная $f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=\frac{1-0}{1}=1>0$, следовательно, функция возрастает; на $(e, +\infty)$ производная $f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{1-2\ln e}{e^4}=\frac{1-2}{e^4}=$

$= -\frac{1}{e^4} < 0$ — функция убывает. Точки экстремума: при переходе через точку $x = e$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, в точке $x = e$ — максимум, причем $f(e) = \frac{1}{e}$. На $(0, e^{3/2})$ вторая производная $f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$ — график направлен выпуклостью вверх, а на $(e^{3/2}, +\infty)$ производная $f''(e^2) = \frac{2\ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0$ — график направлен выпуклостью вниз, следовательно, точка $x = e^{3/2}$ — абсцисса точки перегиба, причем $f(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}}$. Таким образом, точка $\left(e^{3/2}; \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$ — точка перегиба графика функции.


Рис 170

7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 171). ●

**Упражнения.** Построить графики следующих функций:

1. $f(x) = x \ln x$. (*Отв.* При $x = 1/e$ — минимум, $f(1/e) = -1/e$; $(1; 0)$ — точка пересечения графика с осью $Ox$; $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$.)

2. $f(x) = x - \ln x$. (*Отв.* При $x = 1$ — минимум, $f(1) = 1$; $x = 0$ — вертикальная асимптота.)

3. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. (*Отв.* При $x = 1$ — максимум, $f(1) = 1$; $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $(e^{1/2}; 3/2e^{1/2})$ — точка перегиба, $(1/e; 0)$ — точка пересечения графика с осью $Ox$.)

○ **Пример 9.** Построить график функции $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) График функции пересекает оси координат в точке $O(0; 0)$.

3) Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. При отыска-

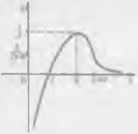


Рис. 171

нии наклонных асимптот необходимо рассмотреть отдельно случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, имеем

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = \infty$$

$\begin{pmatrix}\text{докажите это} \\ \text{самостоятельно}\end{pmatrix}$.

Следовательно, наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ нет, а так как и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, то горизонтальной асимптоты также нет. Далее имеем

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(здесь использовалось правило Лопиталя); таким образом, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты нет, прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x) = x(2 - x)e^{-x}.$$

Решая уравнение $x(2-x)e^{-x} = 0$ $(e^{-x} \neq 0)$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Решая уравнение $x^2 - 4x + 2 = 0$, получаем две критические точки: $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

6) Исследуем знаки первой и второй производных (рис. 172). Получаем, что на $(-\infty, 0)$ функция убывает, на $(0, 2)$ — возрастает, а на $(2, +\infty)$ — снова убывает. Точки экстремума: при переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, а через точку $x = 2$ — с плюса на минус, следовательно, в точке $x = 0$ минимум, а в точке

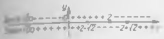



Рис. 172

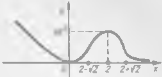



Рис. 173

$x=2$ максимум, причем $f(0)=0$, $f(2)=4e^{-2}$. На $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ график направлен выпуклостью вниз, на $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ — вверх, а на $(2+\sqrt{2}, +\infty)$ — снова вниз, следовательно, $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$ — абсциссы точек перегиба, причем $f(2-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}$, $f(2+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}$.

7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 173) ●

**Упражнения.** Построить графики следующих функций:

**1.** $f(x)=\frac{e^x}{x}$. (*Отв.* При $x=1$ — минимум, $f(1)=e$; точек перегиба нет; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$.)

**2.** $f(x)=x^2 e^{1/x}$. (*Отв.* При $x=1/2$ — минимум; $f(1/2)=1/4e^2$; точек перегиба нет; $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^2 e^{1/x}=0$.)

**3.** $f(x)=(1-x)e^x$. (*Отв.* При $x=0$ — максимум; $f(0)=1$; $(-1, 2/e)$ — точка перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота.)

○ **Пример 10.** Построить график функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

Решение. 1) Область определения функции — множество значений $x$, удовлетворяющих неравенству $x^2-1\geqslant 0$ или $|x|\geqslant 1$, т. е. либо $x\leqslant -1$, либо $x\geqslant 1$. Другими словами, функция определена в двух промежутках: $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Причем нетрудно заметить, что на этих промежутках функция неотрицательна.

2) Точек пересечения с осями координат график функции не имеет, так как $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

3) Так как функция непрерывна во всех точках области определения, то, очевидно, вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}{x}=1+1=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2-1}-x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0-0=0;$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}{x}=-1-1=-2;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}+2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(\sqrt{x^2+1}+x)+(\sqrt{x^2-1}+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)+\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0-0=0.$$

Таким образом, получаем, что график функции имеет две различные наклонные асимптоты: $y=2x$ при $x\to+\infty$ и $y=-2x$ при $x\to-\infty$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Экстремальных точек нет, так как числитель дроби в нуль не обращается. При $x=\pm 1$ производная $f'(x)=\infty$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{(x^2-1)^{3/2}-(x^2+1)^{3/2}}{(x^4-1)\sqrt{x^4-1}}.$$

Критических точек нет, так как числитель дроби в нуль не обращается.

6) Исследуем знак первой и второй производных (рис. 174). Получаем, что на $(-\infty,-1]$ функция убывает, график направлен выпуклостью вверх, а на $[1,+\infty)$ функция возрастает, график также направлен выпуклостью вверх. Экстремумов и точек перегиба нет. Сделаем вспомогательное вычисление: $f(\pm 1)=\sqrt{2}$.

7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 175).

**Упражнение.** Построить график функции $f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$. (*Отв.* Область определения: $|x|\geqslant 1$, экстремумов и точек перегиба нет; $y=0$ — горизонтальная асимптота.)

?

Вопросы для самопроверки

1. Докажите теорему 5.12 для случая возрастания функции.
2. Дайте определение локального экстремума функции.
3. Может ли функция иметь несколько локальных экстремумов?
4. Может ли локальный максимум некоторой функции оказаться меньше какого-то локального минимума этой же функции?

5. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие локального экстремума. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.

6. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?

7. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие локального экстремума.

8. Дайте определение направления выпуклости графика функции.

9. Сформулируйте теорему, с помощью которой решается вопрос о направлении выпуклости графика функции.

10. Дайте определение точки перегиба графика функции.

11. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба графика функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.

12. Какие точки называются критическими?

13. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба графика функции.

14. Может ли функция иметь экстремум в точке перегиба графика функции?

15. Дайте определения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот. Приведите примеры.

16. Докажите следующее утверждение: если прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, то существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k;\quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b. \qquad (\bullet)$$

и, обратно, если оба предела $(\bullet)$ существуют, то прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$.

17. Приведите схему построения графика функции.

## § 16. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**5.1.** При каких значениях $x$ касательные к графику функции $y=x^3-x$ параллельны прямой $y=x$?

**5.2.** Под каким углом к оси $Ox$ кривая $y=2x^3-x$ пересекает ось $Oy$?

**5.3.** В точках $(0;0)$, $(2;1)$, $(4;0)$ проведены касательные к параболе $y=\frac{4x-x^2}{4}$. Найдите углы их наклона к оси $Ox$.

**5.4.** Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Рис. 174

Рис. 175

**5.5.** Найдите угол наклона к оси $Ox$ касательной к гиперболе $xy=1$ в точке $(1; 1)$.

**5.6.** При каком значении $a$ кривая $y=\frac{ax-x^3}{4}$ пересекает ось $Ox$ под углом 45° (хотя бы в одной из точек пересечения)?

**5.7.** Является ли прямая $y=3x-4$ касательной к кривой $y=x^3-2$?

**5.8.** Составьте уравнение касательной, проведенной из точки $M(-1; 3)$ к гиперболе $y=1/x$.

**5.9.** Даны две параболы $y=8-3x-2x^2$ и $y=2+9x-2x^2$. Найдите уравнение прямой, которая касается обеих парабол.

**5.10.** Даны две прямые $y=-x$ и $y=5x-6$. Найдите значения параметров $a$ и $b$, при которых обе данные прямые касаются параболы $y=x^2+ax+b$.

**5.11.** Окружность задана уравнением $x^2+y^2-4x=0$. Найдите уравнения касательных к ней в точках ее пересечения с осью $Ox$.

**5.12.** Приведите пример (т. е. запишите формулу или аккуратно постройте график) всюду определенной функции, имеющей производную всюду, кроме точек $x=0$, $x=1$ и $x=2$.

**5.13.** Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ x^2, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

не имеет производной в точке $x=0$.

**5.14.** Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } x \text{ рациональное},\\ x, & \text{если } x \text{ иррациональное},\end{cases}$$

имеет производную в точке $x=0$.

**5.15.** Найти производную функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

и показать, что ее производная разрывна в точке $x=0$.

**5.16.** Разложите функцию $f(x)=\ln(1+x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

**5.17.** Разложите функцию $f(x)=\operatorname{tg}x$ по формуле Маклорена до члена с $x^3$ включительно.

**5.18.** Разложить следующие функции по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно:

а) $f(x)=e^{-x}$ до члена с $x^2$; б) $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена с $x^5$;
в) $f(x)=\ln(\cos x)$ до члена с $x^4$; г) $f(x)=\sin\sin x$ до члена с $x^3$.

**5.19.** С помощью формулы Маклорена найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+2\sin x-3x}{x^5};\quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right);\quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4};\quad \text{е) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}.$$

*Если бы мне вновь пришлось начать свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного.*

*Г. Галилей*

ГЛАВА 6

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

## § 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1. Понятие первообразной функции.** Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа, его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к решению обратной задачи: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

**Определение 1.** *Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке $X$, если для всех значений $x$ из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.*

Рассмотрим примеры.

○ **1.** Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на всей прямой, так как при любом значении $x$ $(\sin x)'=\cos x$.

**2.** Функция $F(x)=x^3$ является первообразной для функции $f(x)=3x^2$ на всей прямой, ибо в каждой точке $x$ $(x^3)'=3x^2$.

**3.** Функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, +1)$, так как в любой точке $x$ этого интервала $(\sqrt{1-x^2})'=$ $=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ●

Задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то функция $F(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как $[F(x)+C]'=f(x)$ для любого числа $C$. Например, для $f(x)=\cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x+C$, так как $(\sin x+C)'=\cos x$.

Покажем теперь, что множество функций $F(x)+C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$, а $C$ — произвольная постоянная, исчерпывает все первообразные для функции $f(x)$.

**Лемма 6.1.** *Функция, производная которой на некотором промежутке $X$ равна нулю, постоянна на этом промежутке.*

□ Доказательство. Пусть во всех точках промежутка $X$ производная функции $f(x)$ равна нулю, т. е. $f'(x)=0$. Тогда для любых двух точек $x_1$, $x_2 \in X$, по теореме Лагранжа,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad x_1<\xi<x_2.$$

Так как $f'(\xi)=0$, то $f(x_2)=f(x_1)$. Это и означает, что значения функции во всех точках промежутка одинаковы, т. е. $f(x)=C$, где $C$ — некоторое число. ■

**Теорема 6.1.** *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке $X$, то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная.*

□ Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $X$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда для любого $x \in X$

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

а это значит (по лемме 6.1), что функция $\Phi(x)-F(x)$ постоянна, т. е. $\Phi(x)-F(x)=C$, где $C$ — некоторое число. Следовательно, $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество функций $F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а $C$ — произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функций для $f(x)$.

**2. Неопределенный интеграл.**

**Определение 2.** *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,\text{[1]} = F(x)+C. \qquad (1)$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением*, а переменная $x$ — *переменной интегрирования*.

Символ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ обозначает, таким образом, совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Восстановление функции по ее производной или, что то же, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

○ **Пример 1.** Проверить, что $\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3+C$.

Решение. Дифференцируя результат интегрирования $(x^3+C)' = 3x^2$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно. ●

**Упражнения.** Проверить, что: **1.** $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

**2.** $\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

**4.** $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+C$. **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

**6.** $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+C$. **7.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

В связи с понятием первообразной возникает вопрос: для каких функций существуют первообразные (а значит, и неопределенные интегралы)? Здесь лишь отметим, что в § 4 будет доказано, что любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом

[1] Читается: «неопределенный интеграл $f(x)$ на $\mathrm{d}x$».

отрезке первообразную (следовательно, и неопределенный интеграл). В дальнейшем будем считать, что все функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны и формула (1) имеет смысл. В случае разрывной функции будем рассматривать ее интегрирование только в тех промежутках, в которых она непрерывна.

Например, функция $f(x)=1/x$ определена и непрерывна для всех значений $x$, отличных от нуля, т. е. имеет разрыв в точке $x=0$ и непрерывна в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Если $x>0$, то одной из первообразных для $f(x)=1/x$ является $F(x)=\ln x$, так как $(\ln x)'=1/x$. Следовательно, для $x>0$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x+C.$$

Если $x<0$, то одной из первообразных для $f(x)=1/x$ является $F(x)=\ln(-x)$, так как $[\ln(-x)]'=(1/-x)\cdot(-1)=1/x$. Следовательно, для $x<0$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(-x)+C.$$

Объединяя оба случая, получаем формулу

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\begin{cases}\ln x+C & \text{при } x>0\\ \ln(-x)+C & \text{при } x<0\end{cases}=\ln|x|+C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой множество (семейство) кривых, являющихся графиками первообразных $y=F(x)+C$. Если $y=F(x)$ — какая-нибудь кривая, то, по теореме 6.1, все другие кривые получаются из нее параллельным сдвигом вдоль оси $Oy$ (рис. 176). Причем, если $y=F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то, согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла наклона касательной в каждой точке с абсциссой $x$ кривой $y=F(x)$ равен $f(x)$. Все другие кривые будут иметь в каждой точке с абсциссой $x$ параллельные касательные с тем же угловым коэффициентом касательной $f(x)$.

○ **Пример 2.** Какое семейство кривых образуют первообразные $y=F(x)+C$, если угловой коэффициент касательной в каждой точке с абсциссой $x$ кривой $y=F(x)$ равен $f(x)=x^2$?

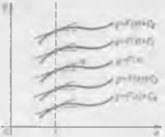


Рис 176

Решение. Имеем $F'(x)=f(x)=x^2$. По определению неопределенного интеграла,

$$y=\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C=$$
$$=\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C.$$

Следовательно, кривые образуют семейство кубических парабол $y=\frac{x^3}{3}+C$. ●

?

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной функции. Приведите примеры.
2. В чем состоит смысл действия интегрирования?
3. Объясните, почему при интегрировании появляется произвольная постоянная.
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

## § 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

$1^{\circ}$. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.*

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$$

□ Действительно, $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$ и

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x. \ ■$$

$2^{\circ}$. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е.*

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

□ В самом деле, так как $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\,\mathrm{d}x$, то

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \ \blacksquare$$

3°. *Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, т. е. если* $k = \text{const} \neq 0$, *то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

□ Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Из определения следует, что

$$k\int f(x)\,dx = k\left[F(x) + C\right] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)\,dx,$$

где $C_1 = kC$. ■

4°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций отдельно, т. е.*

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

□ В самом деле, пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x)$ и $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = \left[F(x) + C_1\right] \pm \left[G(x) + C_2\right] =$$
$$= \left[F(x) \pm G(x)\right] + \left[C_1 \pm C_2\right] = \left[F(x) \pm G(x)\right] + C =$$
$$= \int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx. \ \blacksquare$$

Отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

? Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
2. Докажите свойство 4° для суммы из трех слагаемых функций.

## § 3. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведем таблицу основных интегралов. Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

I $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$,

II $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

III $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

IV $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,

V $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$,

VI $\int e^x \, dx = e^x + C$,

VII $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$,

VIII $\int \cos x \, dx = \sin x + C$,

IX $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

X $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

XI $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0)$,

XII $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C$,

XIII $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$,

XIV $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

Отметим некоторые частные случаи формулы I:

$$\int 1 \cdot dx = x + C \ (\alpha = 0); \quad \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C \ (\alpha = 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \left(\alpha = -\frac{1}{2}\right).$$

В формуле II вместо $\int \frac{1}{x} dx$ для краткости написано $\int \frac{dx}{x}$; вообще, $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$ означает $\int \frac{1}{\varphi(x)} dx$.

Приведем еще одну очевидную формулу: $\int 0 \, dx = C$, т. е. *первообразные от функции, тождественно равной нулю, есть постоянные*.

?

**Вопросы для самопроверки**

1. Каким образом составляется таблица основных интегралов?
2. Укажите табличные интегралы, которые получены из таблицы производных действием, обратным дифференцированию.

## § 4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**1. Непосредственное интегрирование.** Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

○ **Пример 1.** Вычислить интеграл $\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx$.

Решение. Применив свойства 3° и 4°, имеем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=5\int\cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Далее, используя соответственно формулы VIII, I, II, III таблицы основных интегралов, находим

$$5\int\cos x\,dx=5(\sin x+C_1)=5\sin x+5C_1;$$

$$2\int dx=2(x+C_2)=2x+2C_2,$$

$$3\int x^2\,dx=3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_3\right)=x^3+3C_3;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_4;$$

$$4\int\frac{dx}{x^2+1}=4(\operatorname{arctg}x+C_5)=4\operatorname{arctg}x+4C_5.$$

Таким образом,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+$$
$$+(5C_1+2C_2+3C_3+C_4+4C_5).$$

Обычно все произвольные постоянные суммируют, результат обозначают одной буквой: $C = 5C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 + 4C_5$, поэтому окончательно получаем

$$\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Правильность полученного результата легко проверить дифференцированием. (Сделайте это самостоятельно.)

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Интеграл табличный. Поэтому можно переходить к непосредственному интегрированию. По формуле XIV, где $a=4$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + C. \bullet$$

Непосредственно вычислить интегралы с помощью таблицы на практике удается довольно редко. Приходится предварительно подынтегральное выражение тождественно преобразовывать таким образом, чтобы в результате получить табличные интегралы.

○ **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Применяя свойство 4°, имеем

$$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Получили два табличных интеграла. По формулам IX и X находим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, то

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx$$

По формулам IX и I получаем

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

**Пример 5.** Вычислить интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

Решение. Так как $1+2x^2 = (1+x^2) + x^2$, то

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx +$$

$$+ \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

По формулам I и III получаем

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \bullet$$

Таким образом, мы видим, что для интегрирования недостаточно просто знать формулы и уметь их применять, необходим еще и опыт, который постепенно приобретается в процессе решения примеров.

**Упражнения.** Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить следующие интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C.\right)$

2. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{x^5}{5} + \frac{5}{6} \times\right.$ $\left.\times x\sqrt[5]{x} + 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \ln|x| + C.\right)$

3. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$. (*Отв.* $2 \operatorname{arctg} x -$ $- 3 \arcsin x + C$.)

4. $\int (2^x+3^x)\,\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C\right)$

5. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ 2e^x+\frac{1}{2x^2}+C.\right)$

6. $\int (\sin x+5\cos x)\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ -\cos x+5\sin x+C.)$

7. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x.$ $(Отв.\ x-\cos x+C.)$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ -(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)+C.)$

9. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ \frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x+C.\right)$

10. $\int \frac{3-2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ 3\,\mathrm{tg}\,x+2\,\mathrm{ctg}\,x+C.)$

11. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ \cos x-\mathrm{ctg}\,x+C.)$

12. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ -(\mathrm{ctg}\,x+x)+C.)$

13. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ \frac{1}{2}(x-\sin x)+C.\right)$

14. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ \arcsin x-\ln|x+$
$+\sqrt{1+x^2}|+C.)$

15. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$ $(Отв.\ x-\mathrm{arctg}\,x+C.)$

16. $\int\left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+\ln|x+\right.$
$\left.+\sqrt{x^2+5}|+C.\right)$

17. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x$ $\left(Отв.\ \arcsin\frac{x}{2}+\right.$
$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C.\right)$

18. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$ $\left(Отв.\ x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\right)$

**2. Метод подстановки.** Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*. В его основе лежит следующая теорема.

**Теорема 6.2.** *Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $T$ и пусть $X$ — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$, т. е. на $T$ определена сложная функция $f[\varphi(t)]$. Тогда если на множестве $X$ функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то справедлива формула*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

□ Доказательство. Так как первообразная $F(x)$ определена на том же множестве, что и функция $f(x)$, и существует сложная функция $f[\varphi(t)]$, то существует и сложная функция $F[\varphi(t)]$. Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что $F'(x)=f(x)$, получаем

$$(F[\varphi(t)])'=(F[\varphi(t)])'_x\,\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ имеет на множестве $T$ первообразную $F[\varphi(t)]$ и, следовательно,

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=F[\varphi(t)]+C$$

Замечая, что $F[\varphi(t)]+C=(F(x)+C)|_{x=\varphi(t)}=\int f(x)\times$ $\times\,\mathrm{d}x\,|_{x=\varphi(t)}$, окончательно имеем

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

т. е. искомую формулу (1). ■

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*.

Из формулы (1) следует, что для вычисления интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ надо в функции $f(x)$ заменить $x$ через $\varphi(t)$ и положить $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. При этом получаем искомую функцию, выраженную через переменную $t$. Для возвращения к переменной $x$ необходимо заменить $t$ значением $t=\psi(x)$, которое находится из соотношения $x=\varphi(t)$.

Если функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\psi(x)$, то из (1) следует формула

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,|_{t=\psi(x)},$$

т. е. формулу (1) можно применять и в обратном порядке, т. е. справа налево. Для этого в дополнение к условиям теоремы достаточно потребовать, чтобы функция $x=\varphi(t)$ была строго монотонной.

○ **Пример 6.** Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$.

Решение. Интеграл не табличный, хотя и напоминает интеграл $\int \cos x\,dx$. Поэтому для его вычисления естественно сделать подстановку, полагая $t=3x$; тогда $dt=(3x)'\,dx=3dx$, $dx=\frac{1}{3}dt$. По формуле (1) получаем

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos t dt$$

— табличный интеграл. Применяя формулу VIII таблицы основных интегралов, находим

$$\frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, окончательно получаем

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Данный интеграл можно вычислить и непосредственно, заменив $dx$ через $\frac{1}{3}d(3x)$, т. е. внося под знак дифференциала множитель 3 и разделив на него интеграл. В результате получаем

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Здесь применена подстановка $t=3x$. Этот экономный и простой прием будет неоднократно использован в дальнейшем. ●

Тождественное преобразование подынтегрального выражения с выделением дифференциала новой переменной интегрирования — простейшая замена переменной. Таким путем устанавливается и общая формула

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(x)\,\mathrm{d}(ax).$$

○ **Пример 7.** Вычислить интеграл $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Вычислим данный интеграл непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной интегрирования. Имеем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{1/2\,\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{-1/2\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2}+C=$$

$$=-(1-x^2)^{1/2}+C.$$

Данный интеграл вычисляется с помощью подстановки $t=1-x^2$. (Выполните это самостоятельно.) ●

Существует другой несложный, но весьма эффективный прием, позволяющий упростить вычисление интегралов. Если числитель подынтегральной функции $f(x)$ равен производной знаменателя, то справедлива формула

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C. \qquad (2)$$

Действительно, используя подстановку $t=f(x)$, $\mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$, имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

○ **Пример 8.** Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

Замечая, что $(\sin x)'=\cos x$, по формуле (2) получаем

$$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C.$$

Данный интеграл можно вычислить и с помощью подстановки $t = \sin x$, и непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной. (Выполните это самостоятельно.)

**Пример 9.** Вычислить интеграл $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

Решение. Полагаем $t = e^x$, $x = \ln t$. Отсюда $dx = (\ln t)' dt = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)t} dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln(1+t) - \ln t + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, окончательно получаем

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2\ln(1 + e^x) - x + C.$$

**Пример 10.** Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

Решение. Положим $x - 1 = t$, следовательно, $x = t + 1$. Отсюда $dx = (t+1)' dt = dt$; тогда

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left( t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, окончательно получим

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

**Пример 11.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3}.$$

Положим $t = \sqrt[6]{x}$; тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. Находим

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}.$$

Выделяя делением целую часть дроби, получим

$$6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=6\left[\int (t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C. \bullet$$

И, вообще, если подынтегральное выражение не содержит других корней, кроме корня $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые числа $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$; $m$ — натуральное число, то следует применять подстановку $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

**Пример 12.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделав подстановку $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2=\frac{1+x}{1-x}$, $1-x=\frac{2}{t^2+1}$, $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Далее имеем

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}=2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=2\int dt-2\int \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2t-2\,\mathrm{arctg}\,t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

**Пример 13.** Вычислить интеграл $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

**Решение.** Положим $t=\sqrt{4x+1}$; тогда $t^2=4x+1$, $x=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$, $dx=\frac{1}{2}t\,dt$. Находим

$$\int\frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}dx=\int\frac{\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}+5}{t}\cdot\frac{1}{2}t\,dt=\int\left(\frac{3}{8}t^2+\frac{17}{8}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{17}{8}t+C=\frac{1}{8}\sqrt{4x+1}\,(4x+18)+C=$$

$$=\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{4x+1}+C. \bullet$$

Необходимо заметить, что удачный выбор подстановки обычно представляет известные трудности. Для их успешного преодоления необходимо хорошо владеть техникой дифференцирования и твердо знать табличные интегралы.

○ **Пример 14.** Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

**Решение.** Положим $\sqrt{x^2+a}+x=t$, откуда $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt$; таким образом

$$dx=\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}dt,$$

так что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+C.$$ [1]

**Пример 15.** Вычислить интеграл $\int\sin^n x\cos x\,dx$.

**Решение.** Положим $t=\sin x$, откуда $dt=\cos x\,dx$. Тогда

$$\int\sin^n x\cos x\,dx=\int t^n dt=$$

$$=\begin{cases}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C & \text{при } n\neq-1,\\ \ln|t|+C=\ln|\sin x|+C & \text{при } n=-1.\end{cases}$$

---

[1] Здесь выведен табличный интеграл XI.

**Пример 16.** Вычислить интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$.

**Решение.** Положим $x^2+1=t$, $2x\,dx=dt$, следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{t^{n-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C.$$

При $n=1$ аналогично получим

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C. \bullet$$

Заметим, что интегралы в примерах 15 и 16 можно вычислить непосредственно путем выделения дифференциала новой переменной. Убедитесь в этом.

**Упражнения.** Применяя метод замены переменной, вычислить следующие интегралы:

1. $\int \sin(3x+5)\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \ -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C.\right)$
2. $\int e^{2x}\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \ \frac{1}{2}e^{2x}+C.\right)$
3. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. $(\textit{Отв.}\ \ -\ln|\cos x|+C.)$
4. $\int e^{-x^2}x\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \ -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.\right)$
5. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \ \frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+\ln|e^x-1|+C.\right)$
6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7}$. $\left(\textit{Отв.}\ \ \frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C.\right)$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. $\left(\textit{Отв.}\ \ \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+C.\right)$
8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \ 6\left(\frac{2}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}-\right.\right.$

$\left.\left.-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.\right)$

**9.** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-$ $-1|+C.$)

**10.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}\,(t=1+\ln x)$. (*Отв.* $\ln|1+\ln x|+C.$)

**11.** $\int e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $-e^{\cos x}+C.$)

**12.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}x}{x}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C.\right)$

**13.** $\int x(5x-7)^{50}\,\mathrm{d}x$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{25}\left[\frac{1}{52}(5x-7)^{52}+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{7}{51}(5x-7)^{51}\right]+C.\right)$

**14.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C.$)

**15.** $\int \frac{5x+6}{\sqrt{1-3x}}\,\mathrm{d}x$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{2(44+15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+C.\right)$

**16.** $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}\,\mathrm{d}x\,(t=x^3-8)$.

$\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}+C.\right)$

**17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}}\,(t=\sqrt{e^x+1})$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C\right)$

**18.** $\int \frac{3^{1/x}\,\mathrm{d}x}{x^2}\ \left(t=\frac{1}{x}\right)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ -\frac{3^{1/x}}{\ln 3}+C.\right)$

**19.** $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (t=\operatorname{arctg} x)$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101}+C.\right)$

**20.** $\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-e^{2x}}}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \arcsin\frac{e^x}{2}+C.\right)$

**21.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $2\sin\sqrt{x}+C.$)

**22.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$. $\left(\text{\textit{Отв.}}\ \frac{1}{4\arccos^4 x}+C.\right)$

При интегрировании иногда приходится метод замены переменной применять несколько раз.

○ **Пример 17.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(-a \leqslant x \leqslant a)$.

Решение. Положим $x = a\sin t\,(-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. Функция $x = a\sin t$ монотонна и имеет непрерывную производную $x'_t$. При этом, когда $t$ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, переменная $x$ изменяется от $-a$ до $a$. Далее имеем $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$. Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,\mathrm{d}t = $$
$$= a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Снова получили не табличный интеграл. Преобразуем его. Так как $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, то

$$a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int \mathrm{d}t +$$
$$+\frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t.$$

Первый из двух последних интегралов табличный и вычисляется непосредственно:

$$\frac{a^2}{2}\int \mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}t + C_1.$$

Для вычисления второго интеграла сделаем подстановку $u = 2t$. Тогда $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2}$ и

$$\frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{a^2}{4}\sin u + C_2 = \frac{a^2}{4}\sin 2t + C_2.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] + C,$$

где $C = C_1 + C_2$. Для того чтобы вернуться к переменной $x$, из равенства $x = a\sin t$ находим

$$\sin t = \frac{x}{a},\quad \cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\,\frac{x}{a}\,\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Подставив, окончательно получаем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \quad \bullet$$

**3. Метод интегрирования по частям.** Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

**Теорема 6.3.** *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке $X$ и пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке, т. е. существует $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда на промежутке $X$ функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

□ Доказательство. Из равенства

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

следует

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x).$$

Первообразной функции $[u(x)v(x)]'$ на промежутке $X$ является функция $u(x)v(x)$. Функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на $X$ по условию теоремы. Следовательно, и функция $u(x)v'(x)$ имеет первообразную на промежутке $X$ (как разность интегрируемых функций). Интегрируя последнее равенство, получим формулу (2). ■

Формула (2) называется *формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.*

Так как $v'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$, $u'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, то ее можно записать в виде

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

Она позволяет свести вычисление $\int u\,\mathrm{d}v$ к вычислению интеграла $\int v\,\mathrm{d}u$, который может оказаться более простым для интегрирования.

○ **Пример 18.** Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $u=\operatorname{arctg} x$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$. Тогда

$$\mathrm{d}u=(\operatorname{arctg} x)'\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2};\quad \int \mathrm{d}v=\int \mathrm{d}x,\quad v=x$$

(здесь в качестве $v$ можно взять любую из первообразных вида $x+C$, где $C$ — произвольная постоянная. Мы взяли $v=x$, т. е. $C=0$). По формуле (3) имеем

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du}{}^{1)} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,$$

то окончательно получаем

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C. \bullet$$

Надо отметить, что метод интегрирования по частям представляет известные трудности для начинающих. Нельзя выбирать в формуле (3) $u$ и $dv$ произвольно, иначе можно получить еще более сложный интеграл, чем исходный.

○ **Пример 19.** Вычислить интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. В отличие от предыдущего примера здесь ситуация совсем не ясная. Можно положить $u=e^x$, $dv=x\,dx$, или $u=x$, $dv=e^x dx$, или, наконец, $u=xe^x$, $dv=dx$. Положим, например, $u=e^x$, $dv=x\,dx$. Тогда

$$du=(e^x)'\,dx=e^x dx; \quad \int dv=\int x\,dx, \quad v=\frac{1}{2}x^2.$$

По формуле (3) получаем

$$\int x e^x dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

Видим, что пришли к более сложному интегралу. Значит, выбор $u$ и $dv$ в данном случае неудачен. То же самое получится, если положить $u=xe^x$, $dv=dx$.

---

[1] Данный интеграл можно вычислить подстановкой $t=1+x^2$ (сделайте это самостоятельно) или непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной, заменив $x\,dx$ через $\frac{1}{2}d(x^2+1)$, что мы и сделали.

(Убедитесь в этом самостоятельно.) Остается рассмотреть последний случай.

Полагая $u=x$, $dv=e^x dx$, найдем

$$du=(x)'\,dx=dx;\ \int dv=\int e^x dx,\ v=e^x.$$

По формуле (3) получаем

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

Исходный интеграл вычислен. Значит, в данном случае $u$ и $dv$ выбраны верно. ●

Часто метод интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

○ **Пример 20.** Вычислить интеграл $\int e^x \cos x\,dx$.

Решение. Положим $u=e^x$, $dv=\cos x dx$[1]. Тогда

$$du=(e^x)'dx=e^x dx;\ \int dv=\int \cos x\,dx,\ v=\sin x.$$

По формуле (3) имеем

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x \sin x\,dx. \qquad (4)$$

Полученный интеграл снова вычисляем интегрированием по частям, положив $u=e^x$, $dv=\sin x\,dx$, откуда найдем $du=e^x$, $v=-\cos x$. Тогда

$$\int e^x \sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx.$$

Подставляя значение полученного интеграла в выражение (4), находим

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\left(-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\right)=$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,dx.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получаем

$$2\int e^x\cos x dx=e^x(\sin x+\cos x)+C_1$$

и окончательно имеем

$$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+C,$$

где $C=\frac{C_1}{2}$. (Так как $C$ — произвольная постоянная, то и $C_1/2$ — также произвольная постоянная.) ●

Практика показывает, что большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы:

[1] Здесь можно положить также $u=\cos x$, $dv=e^x dx$.



1) *К первой группе относятся интегралы вида*

$$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx,\ \int P(x)\ln x\,dx,$$
$$\int P(x)\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\arccos x\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен. Для их вычисления следует положить $u$ равным одной из указанных выше функций, а $dv=P(x)dx$ (см. пример 18).

2) *Ко второй группе относятся интегралы вида*

$$\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kx\,dx,\ \int P(x)\cos kx\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, а $k$ — некоторое число. Для их вычисления следует положить $u=P(x)$, а $dv=e^{kx}dx$, $dv=\sin kx\,dx$, $dv=\cos kx\,dx$ соответственно (см. пример 19).

3) *К третьей группе относятся интегралы вида*

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

где $a$ и $b$ — некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям (см. пример 20).

Разумеется, указанные три группы не исчерпывают всех интегралов, вычисляемых с помощью метода интегрирования по частям.

○ **Пример 21.** Вычислить интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

Решение. Этот интеграл не входит ни в одну из упомянутых трех групп. Тем не менее, полагая $u=x$, $dv=\frac{dx}{\sin^2 x}$, найдем $du=dx$, $v=-\mathrm{ctg}\,x$. По формуле (3) получаем

$$\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\int \mathrm{ctg}\,x\,dx=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=$$
$$=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\ln|\sin x|+C.$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. ●

**Упражнения.** С помощью метода интегрирования по частям вычислить следующие интегралы:

1. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. $\left(\textit{Отв.}\ \frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C.\right)$

2. $\int \arcsin x\,dx$. (*Отв.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.)

3. $\int \ln x\,dx$. (*Отв.* $x\ln x-x+C$.)

4. $\int x\ln x\,dx$. $\left(\text{Отв.}\ \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.\right)$

5. $\int x\cos^2 x\,dx$. $\left(\text{Отв.}\ \frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.\right)$

6. $\int x\sin x\,dx$. (*Отв.* $-x\cos x+\sin x+C$.)

7. $\int x^2\sin x\,dx$. (*Отв.* $-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C$.)

8. $\int x^2 e^x\,dx$. (*Отв.* $e^x(x^2-2x+2)+C$.)

9. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$. $\left(\text{Отв.}\ \frac{e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)}{13}+C.\right)$

10. $\int (4x^3+6x-7)\ln x\,dx$. $\Big(\text{Отв.}\ (x^4+3x^2-7x)\times$
$\times\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C.\Big)$

11. $\int (x^3+1)\cos x\,dx$. (*Отв.* $(x^3-6x+1)\sin x+(3x^2-$
$-6)\cos x+C$.)

12. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$. $\Big(\text{Отв.}\ x\ln(\sqrt{1-x}+$
$+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C.\Big)$

При интегрировании часто приходится применять сначала метод замены переменной, а затем метод интегрирования по частям.

○ **Пример 22.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^4}\,dx$$

Решение. Этот интеграл не входит ни в одну из трех групп интегралов, интегрируемых по частям. С помощью метода замены переменной преобразуем его. Положим $t=1+\frac{1}{x^2}$. Тогда $dt=-\frac{2dx}{x^3}$, откуда $\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}dt$. После несложных преобразований подынтегрального выражения и подстановки получим

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^5}\,dx=$$

$$=\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\,\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\ln t\,dt.$$

Видим, что пришли к интегралу, который легко интегрируется по частям. Полагая $u=\ln t$, $dv=\sqrt{t}\,dt$, найдем $du=\frac{dt}{t}$, $v=\frac{2}{3}t\sqrt{t}$. Следовательно,

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\ln t\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{2}{3}\int \sqrt{t}\,dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{4}{9}t\sqrt{t}\right]+C.$$

Наконец, возвращаясь к переменной $x$, окончательно получаем

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^5}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right]+C=$$

$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C. \bullet$$

**Упражнение.** Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}}dx$ (положить $t=\sqrt{x}$). (*Отв.* $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$.)

Вычислим интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ с помощью интегрирования по частям (ранее (см. пример 17 п. 2) он был вычислен с помощью замены переменной).

Положим $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$; тогда $du=-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$. Следовательно,

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (5)$$

Добавим и вычтем $a^2$ в числителе подынтегральной функции интеграла в правой части равенства. Тогда, разделив на $\sqrt{a^2-x^2}$, получим

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}x = a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I.$$

Подставив это выражение в (5), получим

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I.$$

Объединяя оба интеграла $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\, \mathrm{d}x$ в левой части, имеем

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\, \mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

В заключение вычислим интеграл

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$$

($n$ — целое положительное число), который понадобится в следующем параграфе. При $n=1$ имеем

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$$

Пусть $n>1$. Заменив в числителе единицу разностью $(x^2+1)-x^2$, получим

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, \mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$

Во втором интеграле положим

$$u = x, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}, \quad v = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$$

(см. пример 16 п. 2), поэтому

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

следовательно,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

т. е.

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \quad (n>1) \quad (6)$$

Формулы типа (6) называются *рекуррентными*[1]. Они позволяют свести вычисление интеграла $I_n$ к вычислению интеграла $I_{n-1}$ с индексом, меньшим на единицу, а в свою очередь, вычисление $I_{n-1}$ — к вычислению $I_{n-2}$ и т. д. В результате придем к известному интегралу $I_1$ и будет вычислен интеграл $I_n$.

○ **Пример 23.** Вычислить $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. По рекуррентной формуле (6) имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x;$$

окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \; ●$$

[1] От лат. recurrens — возвращающийся.

?

### Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?
2. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?
3. Напишите формулу интегрирования по частям. При каких условиях эта формула справедлива?
4. Какие интегралы наиболее удобно вычислять интегрированием по частям?
5. Каково назначение рекуррентных формул?

## § 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где $W(x)$ — некоторый многочлен, а $R(x)$ — многочлен степени ниже чем $Q(x)$.

○ **Примеры.**

1. $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$.

2. $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$. ●

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен $Q(x)$ может быть представлен в виде произведения

$$Q(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

где $A$ — коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а $\alpha$, $\beta$, …, $\gamma$ — корни уравнения $Q(x)=0$. Множители $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma)$ называются *элементарными множителями*. Если среди них есть совпадающие, то получим представление

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\dots(x-\gamma)^t, \qquad (2)$$

где $r$, $s, \dots, t$ — целые числа, которые называются *кратностями*, соответствующими корням $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, причем $r+s+\dots+t=n$, $n$ означает степень многочлена $Q(x)$.

Так, например, многочлен $Q(x)=5(x-1)^2(x+4)^3$ имеет следующие корни: $\alpha=1$, $\beta=-4$, при этом число 2 есть кратность корня 1; число 3 — кратность корня $(-4)$.

Среди корней представления (2) могут быть и комплексные. В высшей алгебре доказывается, что если $\alpha=a+bi$ — $r$-кратный комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами, то он имеет также сопряженный с ним $r$-кратный корень $\bar{\alpha}=a-bi$. Другими словами, если в представление (2) входит множитель $(x-\alpha)^r$, то оно содержит также и множитель $(x-\bar{\alpha})^r$. Перемножив эти два множителя, получим

$$(x-\alpha)^r(x-\bar{\alpha})^r=\{[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\}^r=$$
$$=[x^2-x(a+bi)-x(a-bi)+a^2+b^2]^r=$$
$$=[x^2-2ax+a^2+b^2]^r=(x^2+2px+q)^r,$$

где $p=-a$, $q=a^2+b^2$, $p^2-q<0$.

Таким образом, произведение множителей, соответствующих сопряженным комплексным корням, можно представить в виде квадратного трехчлена с вещественными коэффициентами. Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, представление (2) запишем в виде

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\dots$$
$$\dots(x^2+2px+q)^t(x^2+2ux+v)^\eta\dots . \qquad (3)$$

В высшей алгебре доказывается следующая теорема: *если рациональная функция* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *в соотношении (1) имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен* $Q(x)$ *представлен в виде (3), то эту функцию можно единственным образом представить в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^r}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{r-1}}+\dots+\frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)}+\dots$$

$$\ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t} + \ldots \quad (4)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ — некоторые числа. Разложение (4) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби.*

Равенство (4) имеет место для всех $x$, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q(x)$.

Чтобы определить числа $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$, умножим обе части разложения (4) на $Q(x)$. Так как равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, справедливо для всех $x$, то коэффициенты, стоящие при равных степенях $x$, равны между собой. Таким образом получим ряд уравнений первой степени, из которых найдем неизвестные числа $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ . Изложенный метод отыскания разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов.*

○ **Пример 1.** Разложить рациональную функцию $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на элементарные дроби.

Решение. Так как $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, то по формуле (4) имеем

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Умножая обе части равенства на $x^2-5x+6$, получаем

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3), \text{ или}$$
$$2x-1=(A+B)x-2A-3B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем уравнения первой степени: $\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$

откуда $A=5$, $B=-3$.

Таким образом,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

**Пример 2.** Найти разложение рациональной функции $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ на элементарные дроби.

Решение. Так как квадратный трехчлен $x^2+1$ имеет комплексные корни, то по формуле (4) имеем

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Умножая обе части равенства на $x(x^2+1)^2$, получаем

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x,$$

или

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Сравнивая коэффициенты при $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$ и $x^4$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x^4: A+B=0, \\ x^3: C=0, \\ x^2: 2A+B+D=1, \\ x^1: C+E=0, \\ x^0: A=-1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=-1$, $B=1$, $C=0$, $D=2$, $E=0$, поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}. \blacksquare$$

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (1) сводится к интегрированию рациональной функции $w(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$, интеграл от которой является табличным

$$\int w(x)\,\mathrm{d}x=a_0\frac{x^{m+1}}{m+1}+a_1\frac{x^m}{m}+\ldots+a_mx+C,$$

и интегрированию рациональной функции $\frac{R(x)}{Q(x)}$, что сводится к нахождению интегралов следующих четырех типов:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x=A\ln|x-\alpha|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x=-\frac{A}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}+C\ (k>1)$[1].

[1] Интегралы I и II типа интегрируют с помощью подстановки $t=x-\alpha$.

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^k}\,dx \quad (k>1).$$

При этом многочлен $x^2+2px+q$ не имеет вещественных корней, так что $p^2-q<0$.

Вычислим интеграл III типа, который принадлежит к числу интегралов, часто встречающихся на практике.

Выделим из трехчлена в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2.$$

Это разложение подсказывает подстановку $x+p=t$, $x=t-p$, $dx=dt$. Далее, $q-p^2=h>0$ и перейдем к переменной $t$. В результате интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx=\int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}A\int \frac{2t\,dt}{t^2+h}+(B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

Первый интеграл в правой части вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2+h}=\ln|t^2+h|+C=\ln|x^2+2px+q|+C.$$

Второй интеграл вычисляется по формуле XIII таблицы основных интегралов.

○ **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+4x+9=(x+2)^2+5$. Сделаем подстановку $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$; в результате получаем

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=\int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}\,dx=\int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}\,dt=$$

$$=\int \frac{6t-7}{t^2+5}\,dt=3\int \frac{2t\,dt}{t^2+5}-7\int \frac{dt}{t^2+5}=$$

$$=3\ln(t^2+5)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, получим

$$\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,\mathrm{d}x=3\ln\left(x^2+4x+9\right)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C. \quad \bullet$$

Теперь перейдем к вычислению интеграла IV типа $\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,\mathrm{d}x$, $q-p^2>0$, $r>1$. Введем новую переменную:

$$z=\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}},\quad x=z\sqrt{q-p^2}-p,\quad \mathrm{d}x=\sqrt{q-p^2}\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

Далее имеем

$$z^2+1=\frac{(x+p)^2}{q-p^2}+1=\frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \tag{6}$$

Таким образом, используя подстановку (5) и принимая во внимание (6), получаем

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,\mathrm{d}x=\int\frac{A\left(z\sqrt{q-p^2}-p\right)+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r}\sqrt{q-p^2}\,\mathrm{d}z=$$

$$=\int\frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}\,\mathrm{d}z=M\int\frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^r}+N\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^r},$$

где $M$, $N$ — постоянные числа, значения которых ясны из предпоследнего равенства. Ко второму интегралу последнего равенства можно применить рекуррентную формулу (см. § 4, п. 3, формулу (6)); положив в первом из интегралов $z^2+1=t$, получим

$$M\int\frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^r}=\frac{M}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^r}=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{t^{r-1}}+C=$$

$$=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}+C.$$

○ **Пример 4.** Вычислить интеграл $\int\frac{x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $z=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\frac{x-1}{2}$, откуда $x=1+2z$, $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}z$, а $x^2-2x+5=4(z^2+1)$, следовательно,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}\,2\mathrm{d}z=$$
$$=\int\frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{5}{4}\int\frac{z\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}.$$

Но

$$\int\frac{z\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1},$$
$$\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z.$$

Таким образом,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z+C=$$
$$=\frac{4z-5}{8(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z+C.$$

Возвращаясь теперь к переменной $x$, получаем

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C. \bullet$$

Итак, установлено, что интегрирование любой рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и конечного числа элементарных дробей, интегралы от которых выражаются через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Иными словами, любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

**Упражнения.** Вычислить следующие интегралы:

1. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$.)
2. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.)
3. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+$ $+1|+C$.)
4. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$. $\Big($*Отв.* $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+$

$+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.\Big)$

**5.** $\int\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^3+\text{[illegible]}}\,dx.$ $\Big(Отв.$ $\frac{x^3}{3}+x^2-x+$

$+\frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)+C.\Big)$

**6.** $\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$ $\Big(Отв.\ \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+$

$+C.\Big)$

**7.** $\int\frac{dx}{x^3+1}.$ $\Big(Отв.\ \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+C\Big)$

**8.** $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}.$ $\Big(Отв.\ -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+$

$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

**9.** $\int\frac{dx}{x^4-1}.$ $\Big(Отв.\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.\Big)$

**10.** $\int\frac{\text{[illegible]}}{x(1+x^2)^2}\,dx.$ $\Big(Отв.\ \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{\text{[illegible]}}{2(x^2+1)}+$

$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.\Big)$

**11.** $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$ $\Big(Отв.\ \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+$

$+C.\Big)$

В заключение отметим, что рассмотренные приемы и методы интегрирования не исчерпывают всех классов аналитически интегрируемых элементарных функций. В то же время из изложенного следует, что технически интегрирование сложнее дифференцирования. Необходимы определенные навыки и изобретательность, которые приобретаются исключительно практикой решения большого числа примеров. Кроме того, если дифференцирование не выводит из класса элементарных функций, то при интегрировании существуют такие элементарные функции (например, $e^{-x^2}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и т. д.), первообразные от которых не являются элементарными функциями. Такие первообразные хорошо изучены, их значения вычислены приближенно, для них составлены таблицы и графики.

?

Вопросы для самопроверки

1. Как рациональную дробь разложить на элементарные дроби?
2. Что такое метод неопределенных коэффициентов?
3. К интегралам каких типов приводит интегрирование рациональной дроби?
4. Приведите примеры элементарных функций, первообразные от которых не являются элементарными функциями.

## § 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1. Определение определенного интеграла.** Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a<b$. Разобьем этот отрезок на $n$ произвольных частей точками

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b.$$

Обозначим это разбиение через $\tau$, а точки $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$ будем называть *точками разбиения*. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. Через $\Delta x_i$ обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую будем называть *длиной* частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Составим сумму:

$$\sigma=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n= \\ =\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек $\xi_i$. Геометрический смысл суммы $\sigma$ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ..., $\Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$, если $f(x) \geqslant 0$ (рис. 177).

Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего частичного отрезка разбиения $\tau$: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$.

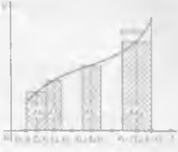


Рис. 171

**Определение.** *Если существует конечный предел $I$ интегральной суммы* (1) *при* $\lambda \to 0$, *то этот предел называется определенным интегралом*[1] *от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a, b]$ *и обозначается следующим образом:*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx^{2)} \qquad (2)$$

*или*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на* $[a, b]$. Числа $a$ и $b$ называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*. $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $x$ — *переменной интегрирования*.

Необходимо сделать ряд пояснений, так как имеет место не совсем обычный предельный переход. Данное определение определенного интеграла по форме напоминает первое определение предела функции «на языке последовательностей», где вместо функции стоит интегральная сумма (1), являющаяся переменной величиной, которая зависит от $\lambda$. Действительно, предположим, что отрезок $[a, b]$ последовательно разбивают на части сначала одним способом, затем — вторым, третьим и т. д. Причем длина наибольшего отрезка в каждом случае умень-

---

[1] В некоторых учебных пособиях, где неопределенный интеграл, как множество функций вида $F(x)+C$, называется «первообразной», определенный интеграл называют просто «интегралом».

[2] Читается: «определенный интеграл от $a$ до $b$ $f(x)$ на $dx$».

шается $\lambda \to 0$[1], когда $n \to \infty$. Таким образом, получаем последовательность разбиений $\{\tau_n\}$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, и можно дать определение определенного интеграла на уже знакомом «языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\{\tau_n\}$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ стремится всегда к одному и тому же пределу $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$.*

Можно дать определение определенного интеграла и «на языке $\varepsilon - \delta$»: *число $I$ называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ (т. е. отрезок разбит на части, длина которых $\Delta x_i < \delta$) независимо от выбора точек $\xi_i$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Доказать эквивалентность обоих определений можно по аналогии с эквивалентностью двух определений предела функции. Определение «на языке последовательностей» дает возможность перенести основные понятия теории пределов и на этот новый вид предела.

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (2) зависит только от вида функций $f(x)$ и от чисел $a$ и $b$. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл (2) определяется однозначно и представляет собой некоторое число.

○ **Пример 1.** Используя определение, вычислить интеграл $\int\limits_a^b C\,dx$, где $C$ — некоторое число.

---

[1] Вместо $\lambda \to 0$ было бы неправильно писать $n \to \infty$, так как можно привести пример (подумайте, какой?), когда увеличение числа точек разбиения $[a, b]$ еще не обязательно означает, что все $\Delta x_i$ неограниченно убывают; если же $\lambda \to 0$, то все $\Delta x_i \to 0$ и обязательно $n \to \infty$.

Решение. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < < x_i < \ldots < x_n = b$ и составим соответствующую интегральную сумму (1). Так как подынтегральная функция $f(x) = C$ постоянна, то для любого выбора промежуточных точек $\xi_i$ получим интегральную сумму вида

$$\sigma = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \ldots + C\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i.$$

Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= C\left[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_n)\right] = C(b - a).$$

Видим, что интегральная сумма для данной функции не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек $\xi_i$ и равна $C(b-a)$. Следовательно, и ее предел при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ равен той же величине.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b C\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(b-a).$$

**Пример 2.** Используя определение, вычислить интеграл $\int_0^1 x\,dx$.

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $n$ равных (в данном случае это удобно) частей точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1$. Длина каждого частичного отрезка $\Delta x_i = 1/n$. Причем если $n \to \infty$, то $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} = \frac{1}{n} \to 0$ и наоборот. В качестве промежуточных точек $\xi_i\ (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ возьмем правые концы частичных отрезков: $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Составим соответствующую интегральную сумму (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Вычислим предел интегральной суммы при $n \to \infty$. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, по определению,

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\quad\bullet$$

**Упражнение.** На примере 2 покажите, что при другом выборе промежуточных точек $\xi_i$ (например, $\xi_i=\frac{i-1}{n}$ — левые концы частичных отрезков) предел интегральной суммы, а значит, и величина данного интеграла не изменятся.

**2. Основные свойства определенного интеграла.** Интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ был введен для случая $a<b$. Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда $a=b$ и $a>b$.

1°. *Если $a=b$, то, по определению, полагаем*

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0. \tag{3}$$

*Если $a>b$, то также, по определению,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

2°. *Каковы бы ни были числа $a$, $b$, $c$, всегда имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

(здесь и в дальнейшем предполагается, что интегралы, входящие в доказываемые формулы, существуют).

□ Доказательство. Допустим сначала, что $a<c<b$. Так как предел интегральной суммы $\sigma$ не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$, то будем проводить разбиение так, чтобы точка $c$ всегда была бы точкой разбиения $[a, b]$. Если, например, $c=x_m$, то $\sigma$ можно разбить на две суммы:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\lambda\to 0$, мы и получим равенство (5).

Суть доказанного свойства состоит в том, что определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

Доказательство для другого расположения точек $a$, $b$, $c$ легко сводится к рассмотренному случаю. Пусть, например, $a<b<c$; тогда, по доказанному, имеем

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

откуда, учитывая (2), получаем

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

т. е. опять пришли к равенству (5). ■

3°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

□ Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек $\xi_i$

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, имеем

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=$$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

т. е. получено равенство (6). ■

4°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

□ Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек $\xi_i$

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \text{ и } \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,dx,$$

то получаем, что

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \blacksquare$$

Замечание. Свойство 4° имеет место для любого конечного числа слагаемых.

**3. Оценки интегралов. Формула среднего значения.**

1°. *Если всюду на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geqslant 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

□ Доказательство. В самом деле, любая интегральная сумма $\sigma$ для функции $f(x)$ на $[a, b]$ неотрицательна, так как

$$f(\xi_i) \geqslant 0,\ \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ в неравенстве $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0$, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \blacksquare$$

2°. *Если всюду на отрезке $[a, b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7)$$

□ Доказательство. Применяя оценку $1^\circ$ к функции $g(x)-f(x)\geqslant 0$, имеем

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но, согласно свойству $4^\circ$,

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

откуда получаем неравенство (7). ■

$3^\circ$. *Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя оценку $2^\circ$ к очевидным неравенствам

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

и проинтегрировав их почленно, учитывая свойство $3^\circ$, получим

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а это равносильно неравенству (8). ■

**Следствие.** *Если всюду на отрезке $[a, b]$, $a<b$, $|f(x)|\leqslant k$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant k(b-a). \tag{9}$$

□ Действительно, из неравенства $|f(x)|\leqslant k$ и оценок $2^\circ$ и $3^\circ$ следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx,$$

отсюда, принимая во внимание, что

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a, \tag{10}$$

получаем соотношение (9). ■

$4^\circ$. *Если $m$ и $M$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, $a<b$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{11}$$

□ Доказательство. По условию, для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Применяя оценку $2^0$ к этим неравенствам и проинтегрировав их почленно, получим

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx,$$

откуда, учитывая (10), получаем неравенства (11). ■

**Теорема 6.4 (о среднем).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка $c$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{12}$$

*Формула* (12) *называется формулой среднего значения.*

□ Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, по второй теореме Вейерштрасса, существуют числа $m$ и $M$ такие, что

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Отсюда, согласно оценке $4^0$, находим

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

и, следовательно,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Положим

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu \quad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

Так как $\mu$ заключено между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ (рис. 178), то, по теореме 4.11 о прохождении функции через любое промежуточное значение, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Поэтому

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=f(c),$$

а это равносильно равенству (12). ■

Величина $f(c)$ в формуле (12) называется *средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$*.

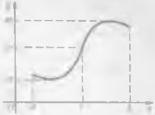


Рис. 178

Замечание. Теорема о среднем имеет четкий геометрический смысл: величина определенного интеграла при $f(x)\geqslant 0$ равна площади прямоугольника, имеющего высоту $f(c)$ и основание $b-a$.

**4. Условия существования определенного интеграла.**

**Теорема 6.5 (необходимое условие интегрируемости функции).** *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

□ Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Покажем, что в этом случае интегральную сумму $\sigma$ можно за счет выбора точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ сделать сколь угодно большой при любом разбиении отрезка $[a, b]$.

Действительно, так как $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ она обладает этим свойством хотя бы на одном частичном отрезке разбиения, скажем на $\Delta x_1$. Выберем тогда на остальных отрезках $\Delta x_2, \Delta x_3, ..., \Delta x_n$ точки $\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$ произвольно и обозначим

$$\sigma'=f(\xi_2)\Delta x_2+f(\xi_3)\Delta x_3+...+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Затем возьмем такое $\xi_1$ на $\Delta x_1$, чтобы

$$|f(\xi_1)|\geqslant\frac{|\sigma'|+M}{\Delta x_1},$$

где $M$ — любое наперед заданное положительное число. Это можно сделать, поскольку $f(x)$ не ограничена на $\Delta x_1$. Тогда

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1\geqslant|\sigma'|+M \text{ и } |\sigma|=|f(\xi_1)\Delta x_1+\sigma'|\geqslant$$
$$\geqslant|f(\xi_1)|\Delta x_1-|\sigma'|\geqslant M,$$

т. е. интегральная сумма $\sigma$ по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Поэтому интегральная сумма $\sigma$ не имеет конечного предела, а это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует. ■

**Замечание.** Обратная теорема не верна, т. е. условие ограниченности функции $f(x)$ необходимое, но не достаточное условие для интегрируемости функции. Поясним это утверждение на примере. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Функция Дирихле, очевидно, ограничена. Однако она не интегрируема на $[0, 1]$. Покажем это. Если при любом разбиении отрезка $[0, 1]$ выбрать точки $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а если взять $\xi_i$ иррациональными, то имеем

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Итак, при разбиении на сколь угодно малые отрезки интегральная сумма может принимать как значение, равное 0, так и значение, равное 1. Поэтому интегральная сумма $\sigma$ при $\lambda \to 0$ предела не имеет.

Таким образом, очевидно, что для существования определенного интеграла от некоторой функции $f(x)$ последняя помимо ограниченности должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость.

**Теорема 6.6** (достаточное условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

□ Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, по теореме Кантора, она и равномерно непрерывна на нем, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек $x'$, $x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (14)$$

Покажем, что это и есть такое $\delta$, при котором неравенство (13) выполняется при $\lambda<\delta$.

Пусть $\tau$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, длина которых $\Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$. Применяя теорему о среднем к каждому из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_i^*)\Delta x_i, \quad x_{i-1}\leqslant \xi_i^* \leqslant x_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Суммируя эти равенства по всем частичным отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^*,$$

где $\sigma^* = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i$. Возьмем теперь на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i$. Тогда

$$\sigma - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma - \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)]\Delta x_i.$$

Так как $|\xi_i - \xi_i^*| \leqslant \Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$, то, принимая во внимание неравенство (14), получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

т. е. требуемое неравенство (13). ■

Как следует из теоремы, условие непрерывности функции на отрезке $[a, b]$ является достаточным условием ее интегрируемости. Но это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Например, можно доказать, что существует определенный интеграл от функции, имеющих конечное число точек разрыва [1)].

---

[1)] См. кн.: *Шипачев В. С.* Высшая математика. М., 1985.

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое разбиение отрезка $[a, b]$?
2. Что такое интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и в чем состоит ее геометрический смысл?
3. Дайте определение определенного интеграла как предела интегральной суммы. Почему вместо $\lambda \to 0$ нельзя писать $n \to \infty$?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла. Докажите свойство 2° для случая расположения точек $b < c < a$.
5. Перечислите оценки интегралов.
6. Пусть $\int f(x)dx \geq 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$?
7. Сформулируйте теорему о среднем.
8. Почему в формуле среднего значения (12) точку $c$ нельзя считать произвольной?
9. Приведите пример, когда формула (12) справедлива для любой точки $c \in [a, b]$.
10. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции.
11. Всякая ли ограниченная функция интегрируема? Ответ обоснуйте примером.
12. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функции.
13. Приведите пример интегрируемой функции.

## § 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования $a$ и $b$. Если изменять, например, верхний предел, не выходя из отрезка $[a, b]$, то величина интеграла будет изменяться. Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела.

Таким образом, если имеем интеграл

$$\int_a^x f(t)dt, \; [1] (a \leq x \leq b)$$

с постоянным нижним пределом $a$ и переменным верхним пределом $x$, то величина этого интеграла является функцией верхнего предела $x$. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$ (рис. 179), т. е. положим

---

[1] Для удобства переменная интегрирования здесь обозначена буквой $t$, так как буквой $x$ обозначен верхний предел интегрирования.

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

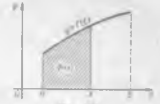


Рис. 179

и назовем ее *интегралом с переменным верхним пределом.* Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной на рис. 179 криволинейной трапеции, если $f(x)>0$. При этом функция $\Phi(x)$ возрастающая, так как с ростом $x$ площадь криволинейной трапеции увеличивается.

Теперь рассмотрим основную теорему дифференциального и интегрального исчислений, устанавливающую связь между производной и интегралом.

**Теорема 6.7.** *Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.*

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x). \qquad (2)$$

□ Доказательство. Возьмем любое значение $x\in[a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x\neq 0$ такое, чтобы $x+\Delta x\in[a, b]$, т. е. $a\leqslant x+\Delta x\leqslant b$. Тогда функция $\Phi(x)$, определенная выражением (1), получит новое значение:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Согласно свойству $2^{\circ}$ определенного интеграла (см. п. 2 § 6), имеем

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Отсюда находим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применяя теорему 6.4, получим

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x,$$

где $c$ — число, заключенное между $x$ и $x+\Delta x$. Разделим обе части равенства на $\Delta x$:

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c).$$

Если теперь $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$, $f(c) \to f(x)$. Поэтому, переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} f(c)=\lim_{c \to x} f(c)=f(x),$$

или $\Phi'(x)=f(x)$. ■

Таким образом, установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем функция $\Phi(x)$ (интеграл с переменным верхним пределом) является первообразной для $f(x)$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ лишь на постоянную (см. теорему 6.1), то установлена связь между неопределенным и определенным интегралами:

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt+C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Из теоремы, в частности, следует, что $\Phi(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. (Объясните, почему?) Случай, когда определенный интеграл имеет переменный нижний предел и постоянный верхний предел, легко сводится к рассмотренному с помощью свойства $1^{\circ}$ (см. формулу (4), § 6).

? Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется интегралом с переменным верхним пределом? В чем состоит ее геометрический смысл?

2. Чему равна производная от интеграла по его верхнему пределу? Докажите соответствующую теорему и объясните, почему ее считают основной в дифференциальном и интегральном исчислении.

## § 8. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, связано с большими трудностями. Поэтому существует другой практически более удобный метод вычисления определенных интегралов, который основан на тесной связи, существующей между понятиями неопределенного и определенного интегралов.

**Теорема 6.8 (основная теорема интегрального исчисления).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то справедлива следующая формула*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

*Формула (1) называется формулой Ньютона — Лейбница.*

□ Доказательство. Пусть $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда, по теореме 6.7, функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Таким образом, $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на $[a, b]$. Так как первообразные отличаются на постоянную (см. теорему 6.1), т. е.

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $C$ — некоторое число. Подставляя в это равенство значение $x = a$ и используя свойство $1^0$ (см. формулу (3), § 6), имеем

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

т. е. для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получаем формулу (1). ■

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать в виде

$$F(x)\Big|_a^b, \text{ или } \big[F(x)\big]_a^b;$$

тогда формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что в формуле (1) в качестве $F(x)$ может быть любая первообразная функции $f(x)$ из семейства $F(x)+C$.

Итак, полученная формула (1), с одной стороны, устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами, с другой стороны, дает простой метод вычисления определенного интеграла: *определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования.* Эта формула открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, так как задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла, которая рассмотрена достаточно полно.

**Пример 1.** Вычислить интеграл $\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Так как одной из первообразных для функции $f(x)=\sin x$ является функция $F(x)=-\cos x$, то, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Упражнения.** Вычислить следующие интегралы:

**1.** $\int_0^2 (3x^2-1)\,\mathrm{d}x$. (*Отв.* 6). **2.** $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. (*Отв.* $\ln 2$.)

3. $\int\limits_{1}^{2} e^x dx$. (*Отв.* $e(e-1)$.) 4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. (*Отв.* $\ln(3+\sqrt{10})$.) 5. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx$. (*Отв.* 2.) 6. $\int\limits_{a}^{b} x^n dx$ $(n \neq -1)$. $\left(\textit{Отв. } \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\right)$

Следующий пример показывает, что формальное использование формулы Ньютона — Лейбница без учета условий ее применимости может привести к неверному результату.

○ **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь формула Ньютона — Лейбница применена верно, так как функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна на $[-1, 1]$ и равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется на всем этом отрезке. Если же в качестве первообразной функции взять $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$, то формальное применение формулы Ньютона — Лейбница приводит к равенству

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}.$$

Получен неверный результат, так как $\pi/2 \neq -\pi/2$. Ошибка произошла из-за того, что при $x = 0$ функция

$F(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ разрывна и не может быть первообразной. Применение формулы Ньютона — Лейбница предполагает непрерывность первообразной $F(x)$ на заданном отрезке. ●

**Замечание.** Формула Ньютона — Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна. При некоторых условиях формула Ньютона — Лейбница может иметь место и для разрывных функций.

?

Вопросы для самопроверки

1. Докажите формулу Ньютона — Лейбница.
2. Почему формулу Ньютона — Лейбница считают основной формулой интегрального исчисления?

## § 9. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

**Теорема 6.9.** *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная функция на отрезке* $[a, b]$. *Тогда если:* 1) *функция* $x=\varphi(t)$ *дифференцируема на* $[\alpha, \beta]$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha, \beta]$; 2) *множеством значений функции* $x=\varphi(t)$ *является отрезок* $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\varphi(\beta)=b$ (рис. 180), *то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

**Доказательство.** По формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$. С другой стороны, рассмотрим сложную функцию $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\Phi'(t)=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(t)$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, и поэтому согласно формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

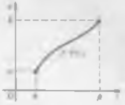


Рис. 180

Формула (1) называется *формулой замены переменной* или *подстановки в определенном интеграле*.

Замечание 1. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной мы должны были от новой переменной $t$ возвращаться к старой переменной $x$, то при вычислении определенного интеграла этого можно не делать, так как цель — найти число, которое, в силу доказанной формулы, равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

○ **Пример 1.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Рассмотрим подстановку $x = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Такая замена переменной удовлетворяет всем условиям теоремы 6.9. Действительно, во-первых, $f(x) = x^2\sqrt{a^2-x^2}$ непрерывна на $[0,\ a]$, во-вторых, функция $x = a\sin t$ дифференцируема на $[0,\ \pi/2]$ и $x'_t = a\cos t$ непрерывна на $[0,\ \pi/2]$ и, в-третьих, при изменении $t$ от 0 до $\pi/2$ функция $x = a\sin t$ возрастает от 0 до $a$, при этом $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\pi/2) = a$. Так как $\mathrm{d}x = (a\sin t)'\,\mathrm{d}t = a\cos t\,\mathrm{d}t$, то, применяя формулу (1), получаем

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = a^4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \bullet$$

Замечание 2. При использовании формулы (1) необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то замена переменной по указанной формуле может привести к неверному результату.

○ **Пример 2.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} dx$.

Решение. Имеем $\int\limits_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$. С другой стороны,

$$\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg} x$ формально приводит к следующему результату:

$$\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int\limits_0^{0} \frac{dt}{1 + t^2} = 0.$$

Получен неверный результат, так как $\pi \neq 0$. Это произошло потому, что функция $t = \operatorname{tg} x$ разрывна при $x = \pi/2$ и не удовлетворяет условиям теоремы 6.9.

**Упражнение.** 1) Найти ошибку, допущенную при следующем вычислении интеграла:

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2} = \left| \; x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \; \right|^{1)} = -\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{t^2\left(4 + \frac{1}{t^2}\right)} =$$

| $x$ | $-2$ | $2$ |
|---|---|---|
| $t$ | $-1/2$ | $1/2$ |

$$= -\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{4t^2 + 1} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t \Big|_{-1/2}^{1/2} = -\frac{\pi}{4}.$$

(Результат явно неверный, интеграл от всюду положительной функции $\left(\frac{1}{4 + x^2} > 0\right)$ оказался равным отрицательному числу $-\pi/4$.)

2) Вычислить данный интеграл. (*Отв.* $\pi/4$.)

---

[1] Здесь вертикальными линиями отделены вспомогательные записи. Замену пределов интегрирования удобно записывать в виде таблицы

| $x$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | $\beta$ |

.

? Вопросы для самопроверки

1. При каких условиях справедлива формула замены переменной в определенном интеграле?

2. Почему при замене переменной в определенном интеграле можно не возвращаться к старой переменной?

3. Приведите пример, когда нарушение условий теоремы 6.9 привело бы к неверному результату.

## § 10. ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

**Теорема 6.10.** *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывные вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (1)$$

□ Доказательство. Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ по условию имеют производные, то по правилу дифференцирования произведения

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

Откуда следует, что функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$. А так как функция $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее существует, т. е. она интегрируема на этом отрезке и, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)]\,dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Отсюда, согласно свойству 4° определенных интегралов (см. п. 2 § 6), получим

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

или, что то же,

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

т. е. формулу (1). ■

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

○ **Пример 1.** Вычислить $\int\limits_1^e \ln x\, dx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, отсюда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$ и по формуле (1) находим

$$\int\limits_1^e \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_1^2 xe^x dx$.

Решение. Положим $u=x$, $dv=e^x dx$, отсюда $du=dx$, $v=e^x$ и по формуле (1) имеем

$$\int\limits_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = [e^x(x-1)]_1^2 = e^2.$$

**Пример 3.** Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Положим $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, отсюда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$ и по формуле (1) получаем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}. \bullet$$

?

Вопросы для самопроверки

1. Докажите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
2. Где конкретно использовано в ходе доказательства условие непрерывности производных функций $u(x)$ и $v(x)$?

## § 11. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

**1. Площадь криволинейной трапеции.** Пусть на плоскости $Oxy$ дана фигура, ограниченная отрезком

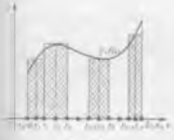



Рис. 181


Рис. 182

$[a, b]$ оси $Ox$, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на $[a, b]$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией, площадь $S$[1] которой может быть вычислена по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

□ Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, произвольно точку $\xi_i$ $(x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i)$ и рассмотрим ступенчатую фигуру (рис. 181). Ее площадь будем считать приближенно равной площади $S$ криволинейной трапеции:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Таким образом, получена интегральная сумма $\sigma$ для интеграла (1). Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы существует при $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}\to 0$ и площадь $S$ криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на $[a, b]$:

[1] С понятием площади произвольной плоской фигуры (а также объема тела и площади поверхности) можно познакомиться в любом полном учебнике по математическому анализу.

○ **Пример 1.** Вычислить $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, отсюда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$ и по формуле (1) находим

$$\int\limits_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_1^2 xe^x dx$.

Решение. Положим $u=x$, $dv=e^x dx$, отсюда $du=dx$, $v=e^x$ и по формуле (1) имеем

$$\int\limits_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = [e^x(x-1)]_1^2 = e^2.$$

**Пример 3.** Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, отсюда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$ и по формуле (1) получаем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}. \quad ●$$

?

Вопросы для самопроверки

1. Докажите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
2. Где конкретно использовано в ходе доказательства условие непрерывности производных функций $u(x)$ и $v(x)$?

## § 11. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

**1. Площадь криволинейной трапеции.** Пусть на плоскости $Oxy$ дана фигура, ограниченная отрезком

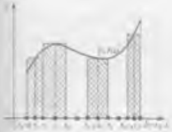


Рис. 181

Рис. 182

$[a, b]$ оси $Ox$, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на $[a, b]$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией, площадь $S$[1] которой может быть вычислена по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

□ Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, произвольно точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и рассмотрим ступенчатую фигуру (рис. 181). Ее площадь будем считать приближенно равной площади $S$ криволинейной трапеции:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Таким образом, получена интегральная сумма $\sigma$ для интеграла (1). Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы существует при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ и площадь $S$ криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на $[a, b]$:

[1] С понятием площади произвольной плоской фигуры (а также объема тела и площади поверхности) можно познакомиться в любом полном учебнике по математическому анализу.

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$.* В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

○ **Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^\alpha$, $\alpha>0$, прямой $x=1$ и осью $Ox$ (рис. 182).

Решение. По формуле (1) имеем

$$S=\int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

При этом если $\alpha=1$, то $S=1/2$; если $\alpha=2$, то $S=1/3$ и т. д. ●

Более сложные задачи на вычисление площадей решают, используя свойство аддитивности[1] площади: можно разбить фигуру на непересекающиеся части и вычислить площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

○ **Пример 2.** Найти площадь $S$ фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=1/x^2$, $y=0$, $x=3$.

Решение. Данную фигуру можно рассматривать как криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, прямыми $x=0$ и $x=3$ и графиком функции, которая на отрезке $[0, 1]$ равна $x$, а на отрезке $[1, 3]$ равна $1/x^2$. Записать первообразную такой функции нелегко. Поэтому разобьем данную криволинейную трапецию прямой $x=1$ на две части (рис. 183). Площади этих частей легко найти по формуле (1):

$$S_1=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2},\quad S_2=\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left.-\frac{1}{x}\right|_1^3=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$$

Согласно свойству аддитивности площади, $S=S_1+S_2=7/6$. ●

[1] Аддитивный — от лат. additivus (получаемый сложением).

Рис. 183

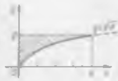


Рис. 184

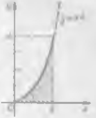


Рис. 185

Иногда при вычислении площадей фигур бывает полезно еще одно свойство площади, которое называется *инвариантностью*[1] *относительно перемещений*: одинаковые фигуры имеют одинаковые площади.

○ **Пример 3.** Найти площадь $S$ фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$.

Решение. Данная фигура (рис. 184) станет криволинейной трапецией, если отразить ее относительно прямой $y=x$ (рис. 185). График функции $y=\sqrt{x}$ отобразится при этом в график обратной функции $y=x^2$, прямая $y=2$ — в прямую $x=2$. Так как симметричные фигуры одинаковы, то они имеют равные площади, поэтому по формуле (1) имеем

$$S=\int\limits_0^2 x^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Замечание. Другое решение этой задачи можно получить, заметив, что данная фигура дополняется криволинейной трапецией (снизу) до прямоугольника, площадь которого равна 8. Поэтому

$$S=8-\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx=\left(8-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}.$$

Такое решение — еще один пример использования свойства аддитивности площади: данная фигура представляется как «разность» двух более простых фигур.

[1] Инвариантный — от франц. invariant (неизменяющийся).

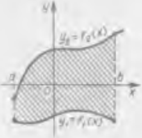



Рис. 186

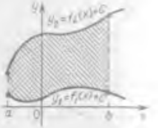



Рис. 187

Прием вычисления площадей, рассмотренный в замечании, можно сформулировать в более общем виде. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, причем при всех значениях $x$ из этого отрезка $y_1 \leqslant y_2$. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций, а также прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 186).

Если обе функции неотрицательны, то площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y_2=f_2(x)$, $y_1=f_1(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью абсцисс. Следовательно, площадь $S$ данной фигуры можно найти так:

$$S=\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (2)$$

Формула (2) справедлива для любых непрерывных функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, не обязательно положительных. Действительно, если функции $y_1$ и $y_2$ могут принимать и отрицательные значения (но по-прежнему $y_1 \leqslant y_2$) (рис. 186), то прибавим к обеим функциям одну и ту же постоянную $C$, которую выберем настолько большой, чтобы графики функций $y_3=f_1+C$ и $y_4=f_2+C$ оказались выше оси абсцисс (рис. 187). Фигура на рис. 187 получается из фигуры, изображенной на рис. 186, параллельным переносом и поэтому имеет такую же площадь. К фигуре на рис. 187 применима формула (2):

$$S=\int_a^b [f_2(x)+C]\,dx-\int_a^b [f_1(x)+C]\,dx=\int_a^b [(f_2(x)+C)-$$
$$-(f_1(x)+C)]\,dx.$$

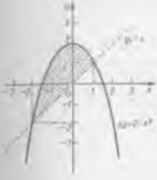


Рис. 188

Рис. 189

Поскольку $(f_2(x)+C)-(f_1(x)+C)=f_2(x)-f_1(x)$, формула (2) верна и для фигуры на рис. 186.

○ **Пример 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1=f_1(x)=x$ и $y_2=f_2(x)=2-x^2$ (рис. 188).

Решение. На рис. 188 видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Найдем их. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2 \end{cases}$$

В результате получаем $x_1=-2$, $x_2=1$. Искомую площадь находим теперь с помощью формулы (2):

$$S=\int_{-2}^{1}\left[(2-x^2)-x\right]\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

**Пример 5.** Найти площадь, заключенную между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке (3; 5) и осью $Oy$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $f(x)=x^2-2x+2$ в точке (3; 5) имеет вид $y-5=f'(3)\times(x-3)$. Поскольку $f'(x)=2x-2$ и $f'(3)=2\cdot3-2=4$, получаем уравнение касательной $y-5=4(x-3)$, или $y=4x-7$. Так как ветви параболы направлены вверх, то парабола лежит над касательной, т. е. $x^2-2x+2\geqslant 4x-7$ на отрезке [0, 3] (рис. 189). По формуле (2) находим искомую площадь

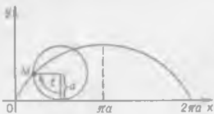



Рис. 190

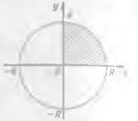



Рис. 191

$$S=\int_0^3\left[x^2-2x+2-(4x-7)\right]\mathrm{d}x=\int_0^3(x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=9. \bullet$$

**Упражнения.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

**1.** $y=4-x^2$, $y=0$. $\left(Отв.\ \frac{32}{3}.\right)$ **2.** $y^2=2px$, $x=h$. $\left(Отв.\ \frac{4}{3}h\sqrt{2ph}.\right)$ **3.** $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$. $(Отв.\ 1.)$ **4.** $y=x^2$, $y=2-x^2$. $\left(Отв.\ \frac{8}{3}.\right)$ **5.** $y=\sin 3x$, $y=0$, где $0\leqslant x\leqslant\pi/3$. $(Отв.\ 2/3.)$ **6.** $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$. $(Отв.\ 4\ln(4e).)$

При вычислении площади криволинейной трапеции в случае, когда верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, в формуле (1) надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Тогда получим

$$S=\int_\alpha^\beta\psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — значения параметра $t$, соответствующие значениям $x=a$ и $x=b$, т. е. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

○ **Пример 6.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды[1] $x=a(t-\sin t)$, $y=a\times(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, и осью $Ox$ (рис. 190).

[1] Циклоида — плоская кривая, которую описывает точка $M$ окружности, радиус которой $a$, катящейся без скольжения по прямой линии.

Решение. По формуле (3) имеем

$$S=\int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t=a^{2}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=a^{2}\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=a^{2}\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{0}^{2\pi}=3\pi a^{2}. \ \blacksquare$$

Интересно было бы с помощью интегрирования получить известную формулу для площади круга радиуса $R$.

○ **Пример 7.** Показать, что площадь $S$ круга, радиус которого $R$, равна $\pi R^2$.

Решение. Составим нужный интеграл. Для этого введем систему координат $Oxy$ и рассмотрим круг радиуса $R$ с центром в начале координат (рис. 191). Этот круг — множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2+y^2\leqslant R^2$. Четверть круга в I квадранте — это криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y=\sqrt{R^2-x^2}$, осью $Ox$ и прямыми $x=0$ и $x=R$. Следовательно,

$$\frac{S}{4}=\int_{0}^{R}\sqrt{R^{2}-x^{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Вычислим этот интеграл. Сделаем подстановку $x=R\sin t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$. Проверим законность такой замены переменной, т. е. выясним, выполняются ли условия теоремы 6.9. Имеем:

1) функция $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ непрерывна на отрезке $[0,\ R]$, а функция $x=\varphi(t)=R\sin t$ дифференцируема на отрезке $[0,\ \pi/2]$ и ее производная $\varphi'(t)=R\cos t$ непрерывна на этом отрезке;

2) при возрастании $t$ от 0 до $\pi/2$ функция $\varphi(t)=R\sin t$ возрастает от 0 до $R$, т. е. множество значений функции $x=\varphi(t)$ — отрезок $[0,\ R]$;

3) $\varphi(0)=0$, $\varphi(\pi/2)=R$.

Рис. 192

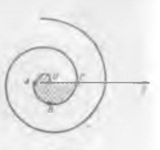


Рис. 193

Таким образом, подстановка $x = R\sin t$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.9. Применяя формулу (1) из § 9, находим

$$\frac{S}{4} = \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\; R\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Итак, получена формула площади круга: $S = \pi R^2$. ●

**2. Площадь криволинейного сектора.** Пусть кривая $AB$ задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = \rho(\varphi),\ \ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой $AB$ и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы $\alpha$ и $\beta$, будем называть *криволинейным сектором* (рис. 192). Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (4)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha, \beta]$ на $n$ частей точками $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2< \ldots$ $\ldots <\varphi_{i-1}<\varphi_i< \ldots <\varphi_n=\beta$, выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$ произвольно точку $\xi_i$ $(\varphi_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant\varphi_i)$ и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$.

В результате получена веерообразная фигура, площадь которой будем считать приближенно равной площади $S$ криволинейного сектора:

$$S\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. Таким образом, получена интегральная сумма $\sigma$ для интеграла (4). Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то предел этой суммы существует при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\varphi_i\}\to 0$ и площадь криволинейного сектора численно равна определенному интегралу от функции $\rho^2(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$:

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Отсюда следует справедливость формулы (4). ■

**Пример 8.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$, где $a$ — положительное число (рис. 193).

Решение. При изменении $\varphi$ от 0 до $2\pi$ полярный радиус опишет кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (4) имеем

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\,\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^3a^2. \;●$$

Заметим, что точка $C$ отстоит от полюса на расстоянии $\rho=2\pi a$. Поэтому круг радиуса $OC$ имеет площадь $\pi\cdot OC^2=4\pi^3a^2=3\cdot\frac{4}{3}\pi^3a^2=3S_{OABC}$, т. е. площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна 1/3 площади круга с

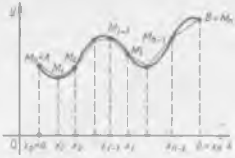


Рис. 194

радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

**3. Длина дуги кривой.** Пусть плоская кривая $AB$ задана уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Разобьем кривую $AB$ на $n$ произвольных частей точками $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n=B$ в направлении от $A$ к $B$. Соединив эти точки хордами, получим некоторую вписанную ломаную линию, периметр которой обозначим через $P$ (рис. 194). Обозначим через $l_i$ длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломаной линии, а через $\mu$ — длину наибольшего из ее звеньев: $\mu = \max \{l_i\}$.

**Определение.** *Число $L$ называется пределом периметров $P$ при $\mu\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всякой ломаной, у которой $\mu<\delta$, выполняется неравенство*

$$|L-P|<\varepsilon.$$

Если существует конечный предел $L$ периметра $P$ вписанной в кривую ломаной линии при $\mu\to 0$, то этот предел называется *длиной дуги* $\overline{AB}$:

$$L=\lim_{\mu\to 0} P.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то длина дуги $\overline{AB}$ выражается формулой

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

□ Доказательство. Обозначим через $x_i$ и $f(x_i)$ координаты точки $M_i$, так что для абсцисс этих точек получим $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. Тогда длина одного звена ломаной равна

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\quad x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i.$$

Следовательно,

$$l_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Таким образом, периметр всей ломаной равен

$$P=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

т. е. получена интегральная сумма $\sigma$ для интеграла (5). Так как функция $\sqrt{1+f'^2(x)}$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ существует и равен определенному интегралу (5). Так как $\lambda\leqslant\mu$[1], то $\lambda\to 0$ при $\mu\to 0$. Следовательно,

$$L=\lim_{\mu\to 0} P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \ ■$$

○ **Пример 9.** Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от $x=0$ до $x=5$ (рис. 195).

Решение. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (5) получим

$$L=\int_0^5\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}. \ ■$$

[1] $l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$, откуда $|\Delta x_i|\leqslant l_i$.

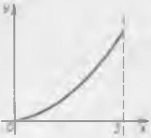



Рис. 195

При вычислении длины дуги в случае, когда кривая $AB$ задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ — значения параметра $t$, соответствующие значениям $x=a$ и $x=b$, т. е. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, в формуле $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Тогда получим

$$L=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

○ **Пример 10.** Вычислить длину дуги одной арки циклоиды:

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (см. рис. 190).

Решение. Из уравнения циклоиды находим $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$, $\psi'(t)=a\sin t$. Когда $x$ пробегает отрезок $[0, 2\pi a]$, параметр $t$ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Следовательно, искомая длина дуги равна

$$L=\int\limits_0^{2\pi a} \sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a. \ \bullet$$

При вычислении длины дуги в случае, когда кривая $AB$ задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точкам $A$ и $B$ соответствуют значения $\alpha$ и $\beta$, переходя от полярных координат (см. гл. 2, § 3, формула (1)) к прямоугольным, получим параметрическое задание кривой $AB$ уравнениями $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ с параметром $\varphi$. Тогда

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho\sin\varphi,$$
$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi$$

и формула (6) принимает вид

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi, \tag{7}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — значения параметра $\varphi$.

○ **Пример 11.** Вычислить длину первого витка архимедовой спирали $\rho=a\varphi$ (см. рис. 193).

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла $\varphi$ от 0 до $2\pi$. Тогда, по формуле (7), искомая длина дуги равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1}; & du=\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi \\ dv=d\varphi, & v=\varphi. \end{matrix}\right|=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right.=$$

$$=a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^{2\pi}=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Данный интеграл вычислен интегрированием по частям (см. § 10).

**Пример 12.** Показать, что длина $L$ окружности радиуса $R$ равна $2\pi R$.

Решение. График функции $y=\sqrt{R^2-x^2}$ при $0\leqslant x\leqslant R/\sqrt{2}$ представляет собой восьмую часть окружности (рис. 191). Следовательно,

$$\frac{L}{8}=\int\limits_0^{R/\sqrt{2}}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Так как $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то $1+[f'(x)]^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$. Поэтому, согласно формуле (5), получаем

$$\frac{L}{8}=R\int\limits_0^{R/\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Как и в примере 7, сделаем замену переменной: $x=R\sin t$, где $0\leqslant t\leqslant\pi/4$. Тогда по формуле (1) из § 9 замены переменной имеем

$$\frac{L}{8}=R\int\limits_0^{\pi/4}dt=\frac{\pi R}{4},$$

откуда приходим к нужному результату. ●

Замечание. Хотя в примере 12 удобнее было считать интеграл в пределах от 0 до $R$, мы поступили иначе. Это связано с тем, что при выводе формулы длины дуги предполагалось, что функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$; в данном случае при $x=R$ производная функции $y=\sqrt{R^2-x^2}$ обращается в бесконечность.

В заключение рассмотрим понятие дифференциала дуги, представляющее самостоятельный интерес.



Если в формуле (5) заменить верхний предел $b$ переменной $x$, то длина дуги станет функцией верхнего предела и формула (5) принимает вид

$$l(x)=\int\limits_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt,$$

где $l(x)$ — переменная длина дуги. Так как здесь подынтегральная функция непрерывна, то, согласно теореме 6.7 о производной интеграла по переменному верхнему пределу, имеем

$$l'(x)=\left(\int\limits_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt\right)'_x=\sqrt{1+f'^2(x)},$$

откуда следует формула для дифференциала дуги

$$dl=l'(x)\,dx=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \quad\text{или}\quad dl=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \tag{8}$$

а так как $y'(x)=\frac{dy}{dx}$, то $dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, и окончательно получаем

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \tag{9}$$

Формула (9) позволяет дать простое геометрическое истолкование дифференциала дуги $dl$. Возводя в квадрат, получаем $(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2$. Учитывая, что дифференциал функции $y=f(x)$ равен приращению ординаты касательной (см. гл. V, § 3, п. 1), получаем, что дифференциал дуги $dl$ (рис. 196) равен длине отрезка касательной к кривой от точки касания $M(x; y)$ до точки $P(x+dx; y+dy)$, т. е. гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $|dx|$ и $|dy|$, а равенство $(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2$ представляет собой теорему Пифагора.

**4. Площадь поверхности вращения.** Пусть кривая $AB$ задана уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$. Тогда поверхность, образованная вращением кривой $AB$ вокруг оси $Ox$, имеет площадь $S$, которая может быть вычислена по формуле

$$S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{10}$$

Рис. 196

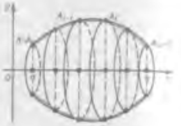


Рис. 197

□ Доказательство. Возьмем на кривой $AB$ точку $M$ с абсциссой $x$. Тогда длина дуги $AM$ определяется формулой

$$l(x)=\int_{a}^{x}\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Так как функция $l(x)$ возрастающая ($\sqrt{1+f'^2(x)}>0$) и непрерывная ($l(x)$ дифференцируема) на $[a,\ b]$, то, согласно теореме 4.15, для нее на этом отрезке существует обратная функция $x=\varphi(l)$. Но тогда $y=f(x)=f[\varphi(l)]=\psi(l)$ — сложная функция по $l$, непрерывная на $[0,\ L]$, где $L$ — длина кривой $AB$. Таким образом, кривая $AB$ может быть задана параметрически уравнениями $x=\varphi(l)$, $y=\psi(l)$, $0\leqslant l\leqslant L$, где $l$ — параметр.

Разобьем кривую $AB$ на $n$ частей точками $A=A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_{i-1}$, $A_i$, ..., $A_n=B$ (рис. 197). Длину частичной дуги $A_{i-1}A_i$ обозначим через $\Delta l=l_i-l_{i-1}$. При вращении кривой $AB$ вокруг оси $Ox$ получим поверхность, составленную из $n$ боковых поверхностей, приближенно равных боковым поверхностям усеченных конусов (цилиндров). Площадь боковой поверхности $i$-го усеченного конуса (цилиндра) равна произведению длины окружности $2\pi R$ ($R$ равно полусумме радиусов верхнего и нижнего оснований конуса) на длину образующей (хорды $A_{i-1}A_i$). Поэтому, если положить $R=y(\xi_i)$, $l_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant l_i$, длину хорды $A_{i-1}A_i$, равной $\Delta l_i$, то получим, что площадь $S_i$ боковой поверхности приближенно равна

$$S_i\approx 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

Площадь всей поверхности вращения приближенно равна сумме площадей частичных поверхностей $S_i$, т. е.

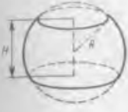



Рис. 198


Рис. 199

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

С другой стороны, эта сумма является интегральной суммой. Так как функция $y(l)$ непрерывна на $[0,\ L]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $y(l)$ по $[0,\ L]$. Следовательно,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i,$$

или

$$S = 2\pi \int_0^L y(l)\,\mathrm{d}l. \qquad (11)$$

Перейдем в интеграле (11) от переменной интегрирования $l$ к переменной $x$. Эти переменные связаны формулой $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Если $l=0$, то $x=a$, если $l=L$, то $x=b$. А так как $y=y(l)=f(x)$ и $\mathrm{d}l = \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (см. формулу (8)), то из формулы (11) окончательно имеем

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \ ■$$

Замечание. Если поверхность получается вращением кривой $AB$, заданной уравнением $x=\varphi(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, вокруг оси $Oy$, то ее поверхность

$$S=2\pi\int_{c}^{d}\varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

○ **Пример 13.** Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $H$ друг от друга, называется *шаровым поясом* высоты $H$. Вычислить площадь поверхности шарового пояса, если радиус шара равен $R$, а высота пояса равна $H$ (рис. 198).

Решение. Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность тела, полученного при вращении дуги окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, где $a\leqslant x\leqslant b$, $b-a=H$, вокруг оси $Ox$ (рис. 199). Так как $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то $1+[f'(x)]^2=\dfrac{R^2}{R^2-x^2}$, поэтому, согласно формуле (10),

$$S=2\pi\int_{a}^{b}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\pi R\int_{a}^{b}\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi R(b-a)=2\pi RH.$$

Итак, площадь поверхности $S$ шарового пояса вычисляется по формуле $S=2\pi RH$. Если $H\to 2R$, то в пределе получим площадь поверхности всей сферы: $S=4\pi R^2$. ●

Замечание. Из решения примера 13 следует, например, что если около шара описан цилиндр, то поверхность шарового пояса, заключенного между двумя плоскостями, которые перпендикулярны оси цилиндра, равна части поверхности цилиндра, заключенной между этими же плоскостями.

Если поверхность получается вращением вокруг оси $Ox$ кривой $AB$, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, причем $\psi(t)\geqslant 0$, $\varphi(t)$ изменяется от $a$ до $b$ при изменении $t$ до $\alpha$ до $\beta$, то, производя в интеграле (10) замену переменной по формулам $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, получим

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (12)$$

Наконец, если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, где $\rho(\varphi)$

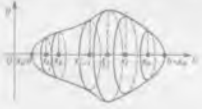


Рис. 200

имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$, то этот случай, как уже отмечалось в п. 3, с помощью формул перехода $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$ приводится к параметрической форме задания кривой, и формула (12) принимает вид

$$S=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

○ **Пример 14.** Вычислить площадь $S$ поверхности, полученной вращением циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, вокруг оси $Ox$ (см. рис. 190).

Решение. По формуле (12) имеем

$$S=2\pi\int\limits_{0}^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+[a(1-\cos t)]^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2. \bullet$$

**5. Объем тела.** Как уже известно, с помощью определенного интеграла можно вычислять площади фигур и длины кривых. Нахождение объемов некоторых тел также можно свести к вычислению определенных интегралов.

Рассмотрим некоторое тело (рис. 200) и вычислим его объем $V$. Допустим, что известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси $Ox$. С изменением $x$ площадь сечения также будет изменяться, т. е. являться некоторой функцией $x$. Обозначим эту функцию через $S(x)$ и будем считать ее непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$. Тогда объем тела

$$V=\int\limits_{a}^{b}S(x)\,dx. \qquad (13)$$

□ Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. Через эти точки проведем плоскости, перпендикулярные оси $Ox$. Эти плоскости разобьют тело на $n$ слоев. Найдем объем $i$-го слоя, образованного сечениями с абсциссами $x_{i-1}$ и $x_i$. Его объем $V_i$ приближенно равен объему прямого цилиндра, основание которого совпадает с сечением тела, соответствующим какой-либо точке $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, и, следовательно, имеет площадь $S(\xi_i)$, а высота равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, т. е.

$$V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма объемов всех $n$ слоев приближенно равна объему $V$ данного тела:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Таким образом, получена интегральная сумма для интеграла (13). Так как функция $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существует и равен определенному интегралу (13). Таким образом,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx. \ ■$$

○ **Пример 15.** Вычислить объем пирамиды, высота которой равна $H$, а площадь основания $Q$.

Решение. Введем систему координат $Oxy$ так, чтобы начало координат находилось в вершине пирамиды, а ось $Ox$ проходила по высоте $H$ от вершины к основанию (рис. 201). Пересечем пирамиду плоскостью, параллельной основанию. Расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости обозначим через $x$, $0 \leqslant x \leqslant H$, а площадь сечения — через $S(x)$. Найдем функцию $S(x)$. Для этого воспользуемся известным из элементарной геометрии свойством сечений пирамиды, параллельных основанию, и составим пропорцию

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2},$$

откуда находим

$$S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

Подставляя последнее равенство в формулу (13), имеем

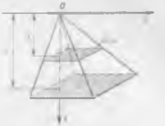


Рис. 201

$$V=\int_0^H S(x)\,dx=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2\,dx=$$

$$=\frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2\,dx=\frac{Q}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{QH^3}{3H^2}=\frac{1}{3}QH.$$

Итак, мы получили формулу объема пирамиды: $V=\frac{1}{3}QH.$ ●

В частном случае, когда тело образовано вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx. \qquad (14)$$

Действительно, сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$ и проходящей через точку $x$, представляет собой круг радиуса $f(x)$ (рис. 202). Поэтому площадь этого сечения (площадь круга) равна $\pi(f(x))^2$. Таким образом, для рассматриваемого тела вращения площадь сечения $S(x)=\pi(f(x))^2$. Из формулы (13) получаем, что

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Замечание. Если криволинейная трапеция $0\leqslant x\leqslant\varphi(y)$, $a\leqslant y\leqslant b$ вращается вокруг оси $Oy$, то объем тела вращения

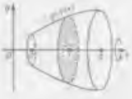


Рис. 202

Рис. 203

$$V=\pi\int_a^b(\varphi(y))^2\,dy=\pi\int_a^b x^2\,dy.$$

○ **Пример 16.** Вычислить объем шара радиуса $R$.

Решение. Шар радиуса $R$ получается вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ вокруг оси $Ox$ (рис. 203), поэтому его объем $V$ можно найти по формуле (14). Используя симметрию данного шара относительно оси $Oy$, находим

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(f(x))^2\,dx=2\pi\int_0^R(\sqrt{R^2-x^2})^2\,dx=$$
$$=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, получена формула объема шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ●

**Упражнения.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

**1.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, где $y\geqslant 0$ вокруг оси $Ox$. (*Отв.* $4/3\,\pi ab^2$.)

**2.** $y^2=2px$, $x=h$ вокруг оси $Ox$. (*Отв.* $\pi ph^2$.)

**3.** $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=2\pi$; 4) $x=-1$; 5) $x=-2$; 6) $y=1$, 7) $y=-2$. (*Отв.* $\frac{\pi^2}{2}$; $2\pi^2$; $6\pi^2$; $2\pi(\pi+2)$; $2\pi(\pi+4)$; $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$; $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$.)

4. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси $Ox$ (*Отв.* $3\pi/10$.)
5. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг: 1) оси $Ox$; 2) оси $Oy$. (*Отв.* $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$; $2\pi$.)
6. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ вокруг: 1) оси $Ox$; 2) оси $Oy$. (Отв. $6\pi/7$; $3\pi/5$.).
7. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$, 3) $y=-1$, 4) $x=1$, 5) $x=-1$, 6) $y=1$. (*Отв.* $\pi(e-2)$; $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$; $\pi e$; $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$; $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$; $\pi(4-e)$.)
8. $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$ вокруг оси $Ox$. (*Отв.* $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.)
9. $y=4/x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг: 1) оси $Ox$; 2) Оси $Oy$ (*Отв.* $12\pi$; $24\pi$.).
10. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ вокруг: 1) оси $Ox$; 2) оси $Oy$. (*Отв.* $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$; $\pi\ln 2$.)

**6. Центр тяжести кривой и криволинейной трапеции.**
Центр тяжести системы материальных точек. Пусть на плоскости $Oxy$ задана система материальных точек: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$, массы которых соответственно равны $m_1, m_2, \dots, m_n$.

*Статическим моментом* $M_x$ этой системы относительно оси $Ox$ называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты:

$$M_x=m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n.$$

Аналогично определяется статический момент $M_y$ системы относительно оси $Oy$:

$$M_y=m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n.$$

Точка с координатами $\left(\frac{M_y}{m};\ \frac{M_x}{m}\right)$, где $m=m_1+\dots+m_n$, называется *центром тяжести*[1] системы.

[1] Мы не различаем понятия «центр тяжести» и «центр масс».

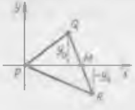


Рис. 204

Можно показать, что центр тяжести обладает следующим свойством: если поместить в него массу, равную сумме масс всех точек системы, то статический момент этой массы относительно любой оси равен статическому моменту всей системы относительно этой оси.

Отсюда следует, что положение центра тяжести системы не зависит от выбора системы координат.

○ **Пример 17.** Показать, что центр тяжести системы, состоящей из трех точек $P$, $Q$, $R$, в которых сосредоточены единичные массы ($m_P = m_Q = m_R = 1$), находится в точке пересечения медиан треугольника (рис. 204).

Решение. Убедимся, например, в том, что центр тяжести находится на медиане $PM$. Введем систему координат в плоскости треугольника $PQR$ так, чтобы ее центр (0; 0) находился в точке $P$, а ось $Ox$ проходила по прямой $PM$. Тогда если ордината точки $Q$ равна $y_0$, то ордината точки $R$ равна $(-y_0)$. Отсюда следует, что ордината $y_C$ центра тяжести $C$ равна

$$y_C = \frac{0 \cdot 1 + y_0 \cdot 1 - y_0 \cdot 1}{3} = 0.$$

Таким образом, точка $C$ лежит на оси $Ox$ (прямой $PM$). Рассуждая аналогично, покажем, что центр тяжести $C$ лежит на медианах $QL$ и $RN$. Следовательно, $C$ — точка пересечения медиан. ●

Пусть теперь массы не сосредоточены в отдельных точках, а расположены «сплошным образом», заполняя линию или плоскую фигуру. Тогда для определения статического момента вместо суммы потребуется интеграл.

Центр тяжести кривой. Рассмотрим некоторую плоскую кривую $AB$. Будем предполагать, что: 1) кривая задана параметрически уравнениями $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, где параметр $l$ — длина дуги, отсчитываемая от точки $A$, $L$ — длина всей кривой $AB$, и функции $\varphi(l)$ и $\psi(l)$ непрерывны на $[0, L]$. 2) кривая однородна, т. е. ее линейная плотность $\rho$ (масса, приходящаяся на единицу длины) постоянна и для простоты равна единице.

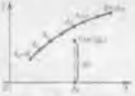


Рис. 205

Определим статические моменты этой кривой относительно осей $Ox$ и $Oy$ и ее центр тяжести (рис. 205). Для этого разобьем кривую $AB$ на $n$ частей точками $A = A_0(x_0;\ y_0)$, $A_1(x_1,\ y_1)$, ..., $A_i(x_i;\ y_i)$, $A_{i+1}(x_{i+1};\ y_{i+1})$, ..., $A_n(x_n;\ y_n) = B$ и пусть этим точкам соответствуют значения $l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_i < l_{i+1} < \ldots$ $\ldots < l_n = L$ параметра $l$. Обозначим длину дуги $A_iA_{i+1}$ через $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$, а массу этой дуги — через $m_i$. Тогда масса $m_i = \rho\Delta l_i = \Delta l_i (\rho = 1)$. Сосредоточим массу каждой из частей $A_iA_{i+1}$ в одной какой-нибудь ее точке, например в точке $A_i(x_i;\ y_i)$. При этом условии всю кривую $AB$ приближенно можно заменить системой материальных точек $A_0$, $A_1$, ..., $A_i$, ..., $A_n$. Тогда статический момент $M_x$ кривой $AB$ приближенно равен сумме статических моментов системы материальных точек относительно оси $Ox$:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i.$$

С другой стороны, эта сумма является интегральной суммой для функции $y = \psi(l)$, а так как функция непрерывна на $[0,\ L]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $y = \psi(l)$ по $[0,\ L]$. Следовательно,

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i = \int_0^L y\,dl.$$

Аналогично найдем

$$M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i = \int_0^L x\,dl.$$

Поскольку масса всей кривой $m=\rho L=L\,(\rho=1)$, по определению центра тяжести получаем

$$x_c=\frac{\int\limits_A^B x\,dl}{L}, \quad y_c=\frac{\int\limits_A^B y\,dl}{L}.$$

В частном случае, когда кривая $AB$ задана уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ и дифференциал дуги $dl=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ (см. формулу (8)), координаты центра тяжести кривой $AB$ вычисляют по формулам

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{L}, \quad y_c=\frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{L}. \qquad (15)$$

Из формулы для $y_c$ следует, что $L\cdot y_c=\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$, откуда, умножив обе части равенства на $2\pi$, получаем

$$2\pi y_c\ L=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой площадь поверхности, полученной вращением кривой $AB$ вокруг оси $Ox$ (см. формулу (10)), а выражение $2\pi y_c$ в левой части — длину окружности радиуса $y_c$.

Таким образом, получена следующая теорема.

**Первая теорема Гульдена**[1]. *Площадь поверхности тела, полученного вращением дуги плоской кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, которая расположена в ее плоскости, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести кривой.*

○ **Пример 18.** Найти площадь боковой поверхности конуса.

Решение. Конус можно представить как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг катета. Пусть данный конус получен вращением прямоугольного треугольника с гипотенузой $L$ и катетом $R$ вокруг другого катета. Введем систему

[1] Гульден Пауль (1577—1643) — швейцарский математик. Обе приводимые теоремы были известны еще в III в. н. э. выдающемуся греческому математику Паппу.

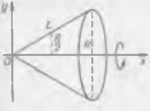


Рис. 206

Рис. 207

координат так, чтобы ось вращения была осью абсцисс (рис. 206). Очевидно, центр тяжести отрезка находится в его середине. Поэтому центр тяжести образующей конуса — гипотенузы прямоугольного треугольника — описывает окружность радиуса $R/2$. Применяя первую теорему Гульдена, получаем площадь $S$ боковой поверхности конуса: $S = L \cdot 2\pi R/2 = \pi RL$.

**Пример 19.** Найти координаты центра тяжести полуокружности радиуса $R$ с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости при условии, что $\rho = 1$ (рис. 207).

Решение. Поскольку полуокружность расположена симметрично относительно прямой $x = 0$, центр тяжести дуги лежит на этой прямой и $x_c = 0$. Площадь $S$ боковой поверхности тела, полученного вращением полуокружности длины $L = \pi R$ вокруг оси $Ox$, равна $4\pi R^2$. Применяя первую теорему Гульдена, получаем $2\pi y_c \cdot \pi R = 4\pi R^2$, откуда находим $y_c = 2R/\pi$. ●

Центр тяжести криволинейной трапеции. Аналогично понятию центра тяжести кривой вводится понятие центра тяжести криволинейной трапеции $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Будем предполагать, что: 1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) по этой трапеции равномерно распределены массы так, что их поверхностная плотность $\rho$ (масса, приходящаяся на единицу площади) постоянна, и для простоты положим ее равной единице. Тогда масса любой части трапеции будет измеряться ее площадью.

Определим статические моменты этой трапеции относительно осей $Ox$ и $Oy$ и ее центр тяжести (рис. 208). Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots \ldots < x_n = b$, а криволинейную трапецию прямыми $x = x_i$

Рис. 208

на $n$ соответствующих частей. Заменим каждую элементарную трапецию прямоугольником с основанием, равным $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотой, равной $f(\xi_i)$, где $\xi_i$ — средняя точка $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда масса $m_i = \rho f(\xi_i) \times \times \Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i\ (\rho = 1)$ равна площади $i$-го прямоугольника. Из механики известно, что центр тяжести прямоугольника лежит в точке пересечения его диагоналей и, следовательно, координаты центра тяжести $i$-го прямоугольника равны соответственно $\xi_i$ и $\frac{1}{2}f(\xi_i)$ (см. рис. 208). Сосредоточим массу каждого $i$-го прямоугольника в его центре. Тогда вся трапеция приближенно заменится системой материальных точек: $C_1$, $C_2$, ..., $C_i$, ..., $C_n$ ($i$-х центров тяжести прямоугольников). Статические моменты $i$-го прямоугольника относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно равны

$$f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \frac{1}{2}f(\xi_i) = \frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{и} \quad f(\xi_i)\Delta x_i \xi_i,$$

а статические моменты $M_x$ и $M_y$ данной трапеции приближенно равны суммам статических моментов всех прямоугольников относительно осей $Ox$ и $Oy$:

$$M_x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{и} \quad M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i.$$

С другой стороны, эти суммы являются интегральными суммами, а так как функции $f^2(x)$ и $xf(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то пределы этих сумм при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существуют и равны определенным интегралам. Следовательно,

$$M_x = \frac{1}{2}\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{и}$$

$$M_y = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Так как масса всей трапеции равна

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=S,$$

где $S$ — площадь всей трапеции, то для нахождения координат центра тяжести трапеции, согласно определению центра тяжести, следует значения статических моментов $M_x$ и $M_y$ разделить на площадь всей трапеции:

$$x_c=\frac{M_y}{S}=\frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{S} \quad \text{и} \quad y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{S}.$$

Как и в случае центра тяжести кривой, можно получить для ординаты $y_c$ центра тяжести криволинейной трапеции следующее геометрическое следствие:

$$2\pi y_c S=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Учитывая, что $2\pi y_c$ — длина окружности радиуса $y_c$, а $\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ — объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции вокруг оси $Ox$, получаем следующую теорему.

**Вторая теорема Гульдена.** *Объем тела вращения криволинейной трапеции вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в той же плоскости, равен произведению площади этой трапеции на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести трапеции.*

○ **Пример 20.** Найти центр тяжести одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, при условии, что $\rho=1$ (см. рис. 190).

Решение. Объем тела, полученного в результате вращения одной арки циклоиды вокруг оси $Ox$, равен

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\mathrm{d}x=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t=5\pi^2a^3.$$

Площадь одной арки циклоиды $S=3\pi a^2$ (см. пример 6). Пусть $y_c$ — ордината центра тяжести. Согласно второй теореме Гульдена, $2\pi y_c\ S=V$, откуда $y_c=$

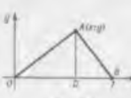


Рис. 209

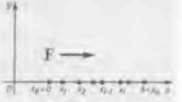



Рис. 210

$=5a/6$. Из симметрии одной арки циклоиды относительно прямой $x=\pi a$ следует, что абсцисса центра тяжести $x_c=\pi a$.

**Пример 21.** Найти центр тяжести однородной треугольной пластины.

Решение. Введем систему координат $Oxy$ так, как показано на рис. 209, чтобы ее начало находилось в одной из вершин пластины, а другая вершина имела координаты $(1;\ 0)$; пусть третья вершина имеет координаты $(x;\ y)$.

Найдем ординату центра тяжести пластины, используя вторую теорему Гульдена. Очевидно, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y=y/2$; объем тела, полученного в результате вращения треугольника $OAB$ вокруг оси $Ox$, равен сумме объемов конусов, полученных в результате вращения сторон $OA$ и $AB$ соответственно, и равен

$$\frac{1}{3}\pi|AD|^2\cdot(|OD|+|DB|)=\frac{1}{3}\pi y^2\cdot 1=\frac{1}{3}\pi y^2.$$

По второй теореме Гульдена, $2\pi y_c\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{3}\pi y^2$, откуда $y_c=\frac{y}{3}$.

Итак, центр тяжести пластины находится на расстоянии $y/3$ от стороны $OB$. Аналогично можно показать, что он находится на расстоянии $\frac{1}{3}$ соответствующих высот от других сторон треугольника. Таким образом, центр тяжести треугольной однородной пластины находится в точке пересечения медиан треугольника. ●

**Упражнение.** Найти координаты центра тяжести полукруга с центром в начале координат, лежащего в верхней полуплоскости, при условии, что $\rho = 1$.
$\left( \textit{Отв.} \quad x_c = 0, \quad y_c = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \right)$

**7. Работа переменной силы.** Пусть материальная точка перемещается под действием силы $F$, направленной вдоль оси $Ox$ и имеющей переменную величину, зависящую от $x$. Требуется определить работу $A$, совершаемую силой $F$, по перемещению материальной точки вдоль оси $Ox$ из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$. Функция $F(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$ (рис. 210).

Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ точку $\xi_i$. Сила, действующая на материальную точку на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, изменяется от точки к точке. Но если длина отрезка мала, то значение силы в точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ мало отличается от ее значения в любой точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, так как $F(x)$ непрерывна. Поэтому работу $A_i$, совершаемую силой $F$ на $[x_{i-1}, x_i]$, можно считать приближенно равной работе, совершаемой на том же отрезке постоянной силой $F(\xi_i)$, т. е.

$$A_i \approx F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Рассуждая аналогично для каждого отрезка разбиения, получаем приближенное значение работы $A$ силы $F$ на всем отрезке:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

С другой стороны, сумма в правой части равенства является интегральной суммой для функции $F(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $F(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{16}$$


Рис. 211

**Пример 22.** Определить работу $A$, необходимую для запуска тела массой $m$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту $h$ (рис. 211).

Решение. Обозначим через $F$ силу притяжения тела Землей. Пусть $m_з$ — масса Земли. Согласно закону Ньютона,

$$F=G\frac{mm_з}{x^2},$$

где $x$ — расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_з=k$, получаем $F(x)=k/x^2$, $R\leqslant x\leqslant h+R$, где $R$ — радиус Земли. При $x=R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P=mg$, т. е. $\frac{k}{R^2}=P$, откуда $k=PR^2$, и $F(x)=\frac{PR^2}{x^2}$. Таким образом, по формуле (16) получаем

$$A=\int\limits_R^{R+h}F(x)\,dx=PR^2\int\limits_R^{R+h}\frac{dx}{x^2}=-PR^2\frac{1}{x}\Bigg|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

**Упражнение.** Электрический заряд $e_1$, помещенный в начале координат, отталкивает заряд того же знака $e_2$ из точки $x=a$ в точку $x=b$ $(a<b)$. Определить работу $A$ силы $F$ при перемещении заряда $e_2$. (*Отв.* $A=ke_1e_2(1/a-1/b)$.) (Указание: электрические заряды отталкивают друг друга с силой $F(x)=k\frac{e_1e_2}{x^2}$, где $k$ — постоянная, $e_1$ и $e_2$ — величины зарядов, $x$ — расстояние между ними.)

Из рассмотренных задач следует, что для их решения был применен один и тот же метод: приближенное значение искомой величины представляли в виде интегральной суммы, а затем предельным переходом получали точное значение в виде интеграла. С помощью этого же метода можно решить ряд других задач механики, физики и техники.

?

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется криволинейной трапецией?

2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

3. По каким формулам вычисляются площади фигур: а) в прямоугольных координатах; б) в полярных координатах; в) в случае параметрического задания границы?

4. Что такое свойство аддитивности площади?

5. Дайте определение предела периметров ломаной при $\mu \to 0$.

6. Что называется длиной дуги кривой?

7. По каким формулам вычисляется длина дуги кривой: а) в прямоугольных координатах; б) заданной параметрически; в) в полярных координатах?

8. Что такое дифференциал дуги? В чем состоит геометрический смысл дифференциала дуги?

9. По каким формулам вычисляется площадь поверхности вращения: а) в прямоугольных координатах; б) в случае параметрического задания кривой; в) в полярных координатах?

10. С помощью какой формулы вычисляется: а) объем тела с известными поперечными сечениями; б) объем тела вращения?

11. Что такое статические моменты системы материальных точек относительно координатных осей?

12. Что называется центром тяжести системы материальных точек?

13. По каким формулам вычисляется центр тяжести кривой: а) заданной параметрически; б) в прямоугольных координатах?

14. Сформулируйте первую теорему Гульдена.

15. По каким формулам вычисляется центр тяжести криволинейной трапеции?

16. Сформулируйте вторую теорему Гульдена.

17. Сформулируйте общий метод решения задач с помощью определенного интеграла

## § 12. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах 6.1 6.3 надо вычислить указанные интегралы.

**6.1.** $\int\limits_{-2}^{[illegible]} \sqrt{4-x^2}\,dx$ **6.2.** $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ **6.3.** $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$

**6.4.** Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\cos x}\,dx$, не находя первообразной подынтегральной функции.

В задачах 6.5 6.7 требуется найти площади фигуры, ограниченной указанными линиями.

Рис. 212

Рис. 213

Рис. 214

Рис. 215

**6.5.** Парабола $y=-x^2+4x-3$ и касательные к ней, проведенные через точки $(0;\ -3)$ и $(3;\ 0)$.

**6.6.** Синусоида $y=\sin x$ и парабола $y=x^2-\pi x$.

**6.7.** Линия $y=|x|+1$, прямые $y=0$, $x=-2$ и $x=1$.

**6.8.** *Шаровым слоем* называется тело, получаемое при вращении криволинейной трапеции, ограниченной дугой окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, прямыми $x=a$ и $x=b$ $(-R<a<b<R)$ и осью $Ox$, вокруг оси $Ox$ (рис. 212)[1]. Найдите объем шарового слоя, вырезаемого из шара $x^2+y^2+z^2=16$ плоскостями $x=2$ и $x=3$.

**6.9.** *Шаровым сегментом* называется тело, полученное при вращении дуги окружности вокруг диаметра окружности, перпендикулярного хорде, стягивающей концы дуги. Найдите объем шарового сегмента, зная радиус окружности $R$ и высоту $H$ сегмента — длину участка оси вращения, находящуюся внутри сегмента (рис. 213).

**6.10.** *Шаровым сектором* называется тело, полученное при вращении кругового сектора вокруг одного из его граничных радиусов. Найдите объем шарового сектора, зная радиус шара $R$ и высоту сектора $H$ (рис. 214).

**6.11.** Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто,— отвечала соседка.— Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа, и зажми ее пальцем. До этого уровня и надо

---

[1] Поверхность этого тела мы называли шаровым поясом и искали в примере 13 § 11.

налить воду!» (рис. 215) — «Так ведь пшена можно насыпать больше или меньше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — ответила тетя Люда.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту для любой цилиндрической кастрюли получается одинаковым.

б) Чему равно это отношение?

**6.12.** Ювелиру заказано золотое колечко шириной $H$ имеющее форму тела, ограниченного сферой с центром $O$ и поверхностью цилиндра радиуса $R$, ось которого проходит через точку $O$ (рис. 216). Мастер сделал такое колечко, но выбрал $R$ слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если $R$ нужно увеличить в $m$ раз, а ширину $H$ оставить прежней (удельный вес золота считается известным)?

> В задачах **6.13**, **6.14** надо найти: а) площадь фигуры, ограниченной заданными линиями; б) объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси $Ox$.

**6.13.** Параболы $x=1-3y^2$ и $x=-2y^2$.

**6.14.** Кривая $y=\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)$ и прямые $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/2$.

**6.15.** Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ где $x\in[0,\ 4]$.

**6.16.** Заданы: парабола $x=y^2$ и прямые $y=0$, $x=a$ где $a>0$. Найдите: а) площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми; б) объем; в) площадь поверхности тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси $Ox$. При вычислении площади поверхности считать сначала $0<b\leqslant x\leqslant a$, а затем устремить $b$ к 0.

> В задачах **6.17**. **6.18** требуется найти с помощью теорем Гульдена и соображений симметрии центры тяжести указанных материальных тел.

**6.17.** Дуга окружности радиуса $R$, стягивающая центральный угол величины $2\alpha$.

**6.18.** Круговой сектор с углом $2\alpha$ между ограничивающими его радиусами величины $R$.

**6.19.** *Тором* называется тело, полученное вращением круга вокруг непересекающей его оси («бублик»). Найдите: а) объем тора; б) площадь поверхности тора, полученного вращением круга $(x-2)^2+y^2\leqslant 1$ вокруг оси $Oy$.

**6.20.** Вычислить работу $A$, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если известно, что сила, растягивающая пружину на $x$ м, равна $F(x)=kx$, где $k$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на 0,01 м необходима сила 10 Н.

Рис. 216

# ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

(*Возможны иные, нежели приведенные здесь, решения задач*)

**1.1.** Решение. Так как для любого $x \in (0, 1)$ выполняются неравенства $0 < x < 1$, то данное множество ограничено. Поэтому число 1, а следовательно, и всякое большее число является верхней гранью, а число 0 и всякое меньшее число — его нижней гранью.

Более того, число 1 является точной верхней гранью данного множества, т. е. $\sup(0, 1) = 1$, так как для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется $x \in (0, 1)$ такое, что будет выполняться неравенство $x > 1 - \varepsilon$. Действительно, пусть $\varepsilon = 2$, тогда существует $x \in (0, 1)$ такое, что выполняется неравенство $x > -1$; пусть $\varepsilon = 1$, тогда существует $x \in (0, 1)$ такое, что выполняется неравенство $x > 0$; пусть $\varepsilon = 1/2$, тогда существует $x \in (0, 1)$ такое, что выполняется неравенство $x > 1/2$ и т. д. А это, согласно свойству точной верхней грани, означает, что $\sup(0, 1) = 1$.

Аналогично можно показать, что $\inf(0, 1) = 0$. (Сделайте это самостоятельно.)

**1.2.** Решение. Допустим обратное, например, что данное множество $X$ ограничено сверху. Тогда, в силу теоремы 1.1, оно имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее через $c$, т. е. $\sup X = c$. Согласно свойству точной верхней грани для $\varepsilon = 1$ найдется такое *целое* число $x \in X$, что будет выполняться неравенство $x > c - 1$. Но тогда $x + 1 > c$ и, так как $x + 1 \in X$, то это означает, что $c$ не является точной верхней гранью множества $X$. Таким образом, получено противоречие, которое доказывает, что данное множество не ограничено сверху.

Аналогично доказывается, что множество $X$ не ограничено снизу. (Сделайте это самостоятельно.)

**1.3.** Указание. То, что множество $X$ не ограничено сверху, следует из доказанного в задаче 1.2 утверждения.

**1.4.** Решение. В самом деле, в силу утверждения задачи 1.2, для числа $b/a$ найдется такое целое число $n$, что $b/a < n$. Это число $n$ искомое, так как, умножая неравенство $b/a < n$ на положительное число $a$, получаем $an > b$, что и требовалось доказать.

**1.5.** Решение. Пусть $\sup X = A$, $\sup Y = B$. Требуется доказать, что $B \leqslant A$. Предположим обратное, т. е. что $B > A$. Тогда, согласно свойству точной верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $y \in Y$ такое, что $y > B - \varepsilon$. Так как $B - A > 0$, то возьмем $\varepsilon = B - A$. Получим $y > B - \varepsilon = B - B + A$, т. е. $y > A$. Но $y \in Y$, а $Y \subset X$, значит, $y \in X$. По определению $\sup X$, любой $y \leqslant A$. Но допустив, что $B > A$, можно найти число $y \in X$ такое, что $y > A$. Полученное противоречие и доказывает, что $B \leqslant A$ или $\sup X \geqslant \sup Y$.

Возможно и другое доказательство. Так как $Y \subset X$, то для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ выполняются неравенства $x \leqslant \sup X$, $y \leqslant \sup X$ и $y \leqslant \sup Y$. Но $\sup Y$ наименьшее из чисел, ограничивающих множество $Y$ сверху, а $\sup X$ — одно из чисел, ограничивающих множество $Y$ сверху, следовательно, $\sup Y \leqslant \sup X$. Аналогично доказывается, что $\inf Y \geqslant \inf X$. (Сделайте это самостоятельно.)

1.6. Решение. Пусть $\sup\{z \mid z=x+y;\ x\in X,\ y\in Y\}=C$, $\sup X=A$, $\sup Y=B$. По определению верхней грани, для любого $x\in X$ и для любого $y\in Y$ выполняется неравенство $C\geqslant z$ или $C\geqslant x+y$. С другой стороны, согласно свойству точной верхней грани, для любого $\varepsilon>0$ найдутся $x\in X$ и $y\in Y$ такие, что выполняются неравенства $x>A-\varepsilon/2$ и $y>B-\varepsilon/2$. Отсюда получаем $x+y>A+B-\varepsilon$. А так как $C\geqslant x+y>A+B-\varepsilon$, $C>A+B-\varepsilon$, то $C\geqslant A+B$.

Покажем теперь, что $C=A+B$. Действительно, имеем $z=x+y$, $x=z-y$, но, по определению верхней грани, $A\geqslant x=z-y$ или $A\geqslant z-y$, откуда $y\geqslant z-A$. С другой стороны, $B\geqslant y\geqslant z-A$, $B\geqslant z-A$ или $B+A\geqslant z$. Согласно свойству точной верхней грани, для любого $\varepsilon>0$ найдется $z$ такое, что $z>C-\varepsilon$. Поэтому $B+A>C-\varepsilon$, откуда получаем $B+A\geqslant C$. Таким образом, $B+A\leqslant C\leqslant B+A$; остается принять $C=B+A$.

Аналогично можно доказать, что $\inf\{z \mid z=x+y;\ x\in X,\ y\in Y\}=\inf X+\inf Y$. (Сделайте это самостоятельно.)

1.7. $x<-1$ или $x\geqslant 1$.

Указание. Данное равенство справедливо для тех значений $x$, для которых $\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant 0$.

1.8. $x\geqslant 5$.

Решение. Равенство $|x+y|=|x|+|y|$ справедливо только тогда, когда $x$ и $y$ имеют одинаковый знак. Так как $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$ при любых значениях $x$, то данное равенство справедливо для тех значений $x$, при которых $x-5\geqslant 0$, отсюда $x\geqslant 5$.

1.9. $x=-\pi/2+2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Решение. Данное равенство справедливо для тех значений $x$, для которых $\sin x<0$. Поэтому имеем: $-\sin x-\sin x=2$, или $\sin x=-1$, отсюда $x=-\pi/2+2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

1.10. $|x|\geqslant\sqrt{3}$.

Решение. Равенство $|x-y|=|x|-|y|$ справедливо только тогда, когда $x$ и $y$ имеют одинаковый знак и $|x|\geqslant|y|$. В данном случае равенство справедливо для тех значений $x$, при которых $x^4-4\geqslant x^2+2$, или $x^2-2\geqslant 1$, отсюда $|x|\geqslant\sqrt{3}$.

1.11. 1) $x=0$; 2) $x=2/5$ и $x=2$; 3) $x=1/2$.

1) Решение. Имеем $|x+4|=\begin{cases}(x+4), & \text{если } x\geqslant -4,\\ -(x+4), & \text{если } x<-4,\end{cases}$

$$|x-4|=\begin{cases}(x-4), & \text{если } x\geqslant 4,\\ -(x-4), & \text{если } x<4.\end{cases}$$

Следовательно, при $x<-4$ получаем $-(4+x)=-(x-4)$, откуда $8=0$ — неверное равенство — решений нет; при $-4\leqslant x<4$ получаем $(x+4)=-(x-4)$, откуда $x=0$; при $x\geqslant 4$ имеем $x+4=x-4$, откуда $8=0$ — неверное равенство — решений нет. Таким образом, $x=0$ — решение данного уравнения [1].

2) Решение. Имеем

[1] Здесь использован специальный прием — «метод интервалов».

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ если } x\geqslant 1, \\ -(x-1), \text{ если } x<1, \end{cases} \quad |1-2x|=\begin{cases} 1-2x, \text{ если } x\leqslant 1/2, \\ -(1-2x), \text{ если } x>1/2, \end{cases}$$

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x<0$ получаем $-(x-1)+1-2x=-2x$, откуда $x=2$ — решений нет, так как $2\notin(-\infty, 0)$; при $0\leqslant x\leqslant 1/2$ получаем $-(x-1)+1-2x=2x$, откуда $x=2/5$ — решение уравнения, так как $\frac{2}{5}\in[0, 1/2]$; при $1/2<x<1$ получаем $-(x-1)-(1-2x)=2x$, откуда $x=0$ — решений нет; при $1\leqslant x<+\infty$ имеем $x-1-(1-2x)=2x$, откуда $x=2$ — решение уравнения. Таким образом, $x=2/5$ и $x=2$ — решения данного уравнения.

3) **Решение.** Имеем: а) $|3-2x|-1=2|x|$; б) $|3-2x|-1=-2|x|$.

а)

$$|3-2x|=\begin{cases} 3-2x, \text{ если } x\leqslant 3/2, \\ -(3-2x), \text{ если } x>3/2, \end{cases} \quad |x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x<0$ получаем $3-2x-1=-2x$, откуда $2=0$ — неверное равенство — решений нет; при $0\leqslant x\leqslant 3/2$ получаем $3-2x-1=2x$, откуда $x=1/2$ — решение уравнения; при $3/2<x<+\infty$ имеем $-3+2x-1=2x$, откуда $4=0$ — неверное равенство — решений нет.

Нетрудно проверить, что в случае б) уравнение не имеет решения. Таким образом, $x=1/2$ — решение данного уравнения.

1.12. $x<0$ или $0<x<3$.

**Решение.** Неравенство $|a-b|>|a|-|b|$ справедливо тогда, когда: 1) числа $a$ и $b$ разных знаков; 2) когда $|a|<|b|$. В случае 1), так как $x^2>0$, то неравенство имеет место для значений $x$, при которых $3x<0$, т. е. для $x<0$. В случае 2) неравенство выполняется для тех значений $x$, для которых $x^2<3x$ или $x^2-3x<0$, $x(x-3)<0$.

Возможны два случая: либо $\begin{cases} x<0, \\ x-3>0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x>0, \\ x-3<0. \end{cases}$ Первая система не имеет решений, а вторая имеет решение $0<x<3$. Таким образом, получаем ответ $x<0$ или $0<x<3$.

1.13. $x<-4$ или $x>4$.

1.14. **Решение.** Имеем: 1) при $n=1$ утверждение верно, так как $4^1=4>1=1^2$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого $n$, докажем, что $4^{n+1}>(n+1)^2$. Действительно, так как $4^{n+1}=4\cdot 4^n>4n^2$, а $n^2\geqslant n$ и $n^2\geqslant 1$, то $4n^2\geqslant n^2+2n+1=(n+1)^2$. Окончательно получаем $4^{n+1}>(n+1)^2$, что и требовалось доказать.

1.15. **Решение.** Имеем: 1) при $n=4$ утверждение верно, поскольку $4!=24>16=2^4$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого $n>4$, докажем, что $(n+1)!>2^{n+1}$. Действительно, $(n+1)!=n!(n+1)>2^n(n+1)>2^n\cdot 2=2^{n+1}$, так как $n+1>2$ при $n\geqslant 4$.

Окончательно получаем $(n+1)!>2^{n+1}$, что и требовалось доказать.

1.16. **Решение.** Имеем: 1) при $n=2$ утверждение верно. В самом деле, $\sqrt{2}<1+1/\sqrt{2}<2\sqrt{2}$ или $2<\sqrt{2}+1<4$. Это верно, поскольку $1<\sqrt{2}<2$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого $n>2$, докажем, что

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Для того, чтобы доказать справедливость неравенства

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

достаточно показать, что

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Это действительно верно, так как

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow^{1)} n+1 < \sqrt{n(n+1)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 < \left(\sqrt{n(n+1)}\right)^2 = n^2 + n \Leftrightarrow 0 < n,$$

что очевидно при $n \geqslant 2$. Аналогично, чтобы доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1},$$

достаточно показать, что

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Это неравенство верно, поскольку

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1.$$

Таким образом, данное утверждение доказано.

**1.17.** $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Решение. Обозначим искомую сумму через $S_n$. Тогда

$$S_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \ldots + \frac{n^2+n}{2} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

---

[1)] Знак $\Leftrightarrow$ означает равносильность. Например, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из $A$ следует $B$ и, наоборот, из $B$ следует $A$.

**Замечание.** Формула $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ доказаны в § 6 (см. пример 1) и формулу $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ вы должны были доказать самостоятельно.

**1.18.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$.

**Указание.** Обозначим искомую сумму через $S_n$ и представим $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ в виде $\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$. Тогда

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\ldots-\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Чтобы убедиться в том, что сумма определена правильно, воспользуемся методом математической индукции. Имеем:

1) при $n=1$ утверждение верно, так как

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6};$$

2) допустим, что для некоторого $n$ верно равенство

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)},$$

тогда

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2n+3-2}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+3)}.$$

Таким образом, методом математической индукции мы подтвердили справедливость искомой формулы $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$.

**2.8.** в) $|b|$; $|a|$. **Указание.** Используйте формулу Ф — 3[1].

**2.9.** 1) Длина стороны квадрата $a=\sqrt{17}$ (ед.); 2) $S_{ABCD}=17$ (ед$^2$); 3) середины сторон квадрата — точки: $M$ (3,5; 3) (середина стороны $AB$); $N$ (1; 4, 5) (середина стороны $BC$); $K$ (−0,5; 2) (середина стороны $CD$); $L$ (2; 0,5) (середина стороны $AD$).

**Решение.** 1) Длина стороны квадрата

$$a=|AD|=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}\ \text{(ед)}.$$

---

[1] Здесь и далее в этой главе запись «Ф — 3» означает формулу [illegible] § 3.

2) Площадь квадрата $S_{ABCD} = a^2 = 17$ (ед.$^2$).

3) Координаты середин сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ находим по формуле для координат середины отрезка (см. следствие на с. 41). Пусть $M(x_M, y_M) \in [AB]$, $|AM| = |MB|$. Тогда точка $M$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|} = 1$, поэтому, согласно Ф — 5,

$$x_M = \frac{3+4}{2} = 3\frac{1}{2};\quad y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Аналогично получаем остальные ответы.

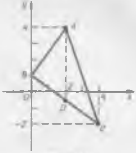


Рис. 217

**2.10.** $x_c = 2$; $y_c = 1$.

Решение. Центр тяжести пластинки, имеющей форму треугольника, находится в точке пересечения медиан треугольника (рис. 217). Пусть $D$ — середина стороны $BC$ треугольника $ABC$. Тогда точка $D$ делит отрезок $BC$ в отношении $\lambda = 1$, поэтому, согласно Ф — 5, координаты точки $D$ таковы:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \text{ и } y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении $\lambda = 1/2$. Обозначая через $x_C$ и $y_C$ координаты центра тяжести искомой пластинки и применяя формулу Ф — 5, получим

$$x_c = \frac{x_D + \frac{1}{2}x_A}{1+1/2} = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{3/2} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$y_c = \frac{y_D + \frac{1}{2}y_A}{1+1/2} = \frac{-1/2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{3/2} = \frac{3}{3} = 1.$$

Таким образом, $x_c = 2$; $y_c = 1$.

**2.11.** Вершины имеют координаты $M(0;\ -3)$; $N(-4;\ 5)$ и $K(8;\ 1)$.

Решение. Пусть $A$ — середина стороны $MN$, $B$ — середина стороны $NK$; $C$ — середина стороны $KM$ в треугольнике $MNK$. Тогда, согласно Ф — 5 (при $\lambda = 1$),

$$x_A = \frac{x_M + x_N}{2},\quad x_B = \frac{x_N + x_K}{2},\quad x_C = \frac{x_K + x_M}{2},$$

$$y_A = \frac{y_M + y_N}{2},\quad y_B = \frac{y_N + y_K}{2},\quad y_C = \frac{y_K + y_M}{2}.$$

Подставив в эти уравнения координаты точек $A$, $B$ и $C$, приходим к двум системам уравнений:

$$\begin{cases} x_M + x_N = -4, & (1) \\ x_N + x_K = 4, & (2) \\ x_K + x_M = 8, & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_M + y_N = 2, \\ y_N + y_K = 6, \\ y_K + y_M = -2. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения (1), (2) и (3), получим $4 = x_M + x_N + x_K$. Вычитая последовательно из последнего уравнения уравнения (1), (2) и (3), находим: $x_K = 8$, $x_M = 0$, $x_N = -4$. Выполнив аналогичные действия с уравнениями второй системы, найдем: $y_K = 1$, $y_M = -3$, $y_N = 5$.

**2.12.** Точка $C$ должна иметь координаты $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.

Решение. Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, тогда она является серединой диагоналей. Так как $O$ — середина отрезка $BD$, то, согласно Ф — 5 ($\lambda = 1$) (рис. 218),

$$x_0 = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1) \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

Так как $O$ — середина отрезка $AC$, то аналогично находим

$$x_0 = \frac{x_A + x_C}{2} \text{ и } y_0 = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Отсюда получаем $x_C = 2x_0 - x_A$ и $y_C = 2y_0 - y_A$. Подставляя в эти равенства найденные в (1) и (2) значения $x_0$ и $y_0$, находим ответ.

Замечание. Задачу проще решить с помощью сложения векторов с заданными координатами.

**2.13.** $C(32;\ 0)$ или $C(-8;\ 0)$.

Решение. Пусть $C(x_C;\ y_C)$ — искомая вершина. По условию, $y_C = 0$. Согласно формуле площади треугольника Ф — 4, имеем

$$10 = \frac{1}{2}\left|(-2-5)(0-1) - (x_C - 5)(2-1)\right|,$$

откуда $|12 - x_C| = 20$. Значит, $12 - x_C = 20$, или $12 - x_C = -20$, поэтому $x_C = -8$ или $x_C = 32$.

**2.14.** Площадь четырехугольника равна 13 (ед.$^2$).

Решение. Так как (рис. 219) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ и, согласно формуле Ф — 4, $S_{ABC} = 13/2$, $S_{ACD} = 13/2$, то $S_{ABCD} = 13$ (ед.$^2$).

**2.15.** Прямоугольные координаты точки равны $(2 + 5\sqrt{3};\ 8)$.

Решение. Так как в прямоугольном треугольнике $O'AB$ (рис. 220) $\widehat{AO'B} = 30^\circ$, то $|AB| = \frac{1}{2}|O'A| = 5$, поэтому

$$|O'B| = \sqrt{|O'A|^2 - |AB|^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}. \text{ Далее, } x_A = 2 + |O'B| = 2 + 5\sqrt{3},\ y_A = 3 + |AB| = 3 + 5 = 8.$$

**2.16.** Расстояние равно $\sqrt{34}$ (ед. дл.).

Решение. Пусть $O$ — полюс, $A$ и $B$ — данные точки (рис. 221). Треугольник $AOB$ прямоугольный, поэтому

$$|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

**2.17.** См. рис. 222—230.

Указания и решения. 2) В случае $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ уравнение $\frac{x}{|x|} =$

Рис. 218

Рис. 219

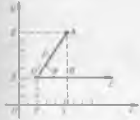


Рис. 220

Рис. 221

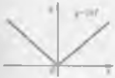


Рис. 222

Рис. 223

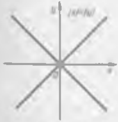


Рис. 224

Рис. 225

$=\frac{y}{|y|}$ принимает вид $1=1$, а в случае $\begin{cases} x<0, \\ y<0 \end{cases}$ — следующий вид: $-1=-1$, следовательно, все точки, лежащие в I и III четвертях (без границ, так как $x\neq 0$, $y\neq 0$), принадлежат искомому множеству. Если $x$ и $y$ имеют разные знаки (т. е. для точек II и IV четверти), то получаем неверное равенство $1=-1$, значит, во II и IV четвертях нет точек искомого множества (рис. 225).

4) $(x-y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0, \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ y=x/2, \end{cases}$ откуда получаем, что искомым множеством является объединение прямых $y=x$ и $y=x/2$ (рис. 226).

5) Сумма квадратов может быть равна нулю только в случае равенства нулю каждого слагаемого, следовательно,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0, \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$$

т. е. искомое множество — точка $M(1;\ -1)$ (рис. 227).

6) $x+y>0 \Leftrightarrow y>-x$, откуда следует, что искомому множеству принадлежат все точки, лежащие «выше» прямой $y=-x$ (рис. 228).

9) $\begin{cases} x-y>0, \\ x-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x, \\ y<x/2, \end{cases}$ поэтому искомому множеству принадлежат точки, являющиеся пересечением полуплоскостей $y<x$ и $y<x/2$ (рис. 229).

10) $(x-y)(x-2y)>0$.

Случай $\begin{cases} x-y>0, \\ x-2y>0 \end{cases}$ разобран в задаче 9); аналогично рассматривается случай $\begin{cases} x-y<0, \\ x-2y<0 \end{cases}$, т. е. искомое множество представляет собой пару вертикальных углов (рис. 230) без границ.

**2.18.** а) $y=0$; б) $y=x+10$; в) $|x|=2$.

Указания и решения. а) Точка $A(1;\ 0)$ сама лежит на оси абсцисс $y=0$.

б) Уравнение прямой, параллельной прямой $y=x$, имеет вид $y=x+b$, где $b$ — постоянное число. Точка $B(-3;\ 7)$ лежит на этой прямой, поэтому $7=-3+b$, откуда $b=10$. Итак, искомая прямая имеет уравнение $y=x+10$.

в) Множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси $Oy$, представляет пару прямых, параллельных оси $Oy$ и проходящих через точки $(-2;\ 0)$ и $(2;\ 0)$. Уравнения этих прямых $x=-2$ или $x=2$.

**2.19.** а) $(y-3x)(y-x+3)=0$; б) $(y-x)[(x+1)^2+(y-2)^2]=0$; в) $y\geqslant x$; г) $0<y<1$; д) $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$

**2.20.** Решение. Используя Ф 9, запишем уравнение прямой $(AB)$[1] $\frac{x+6}{400+6}=\frac{y-3}{-200-3}$, откуда $y=-2x$. Координаты точки $C$

[1] Обозначение $(AB)$ означает прямую, проходящую через точки $A$ и $B$.

Рис. 226

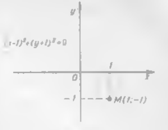



Рис. 227

Рис. 228

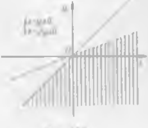


Рис. 229

Рис. 230

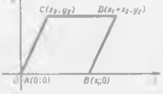



Рис. 231

удовлетворяют уравнению прямой $(AB)$. Действительно, $-2000 = -2 \cdot 1000$. Таким образом, $C \in (AB)$, т. е. точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

**2.22.** Решение. Введем прямоугольную систему координат с началом в вершине $A$ параллелограмма и осью абсцисс, направленной по прямой $(AB)$ от точки $A$ к точке $B$ (рис. 231). Запишем координаты вершин параллелограмма: $A(0;\ 0)$, $B(x_1;\ 0)$, $C(x_2;\ y_2)$, $D(x_1+x_2;\ y_2)$ (см. задачу 12). Используя формулу Ф — 3, найдем длины сторон и диагоналей параллелограмма:

$$|AC| = \sqrt{(x_2-0)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2};$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{x_1^2};$$

$$|BD|=|AC|=\sqrt{x_2^2+y_2^2};\ |CD|=|AB|=\sqrt{x_1^2};$$

$$|AD|=\sqrt{(x_1+x_2-0)^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2+y_2^2};$$

$$|CB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+y_2^2}.$$

Теперь можно проверить, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. В самом деле,

$$|AC|^2+|AB|^2+|BD|^2+|CD|^2=(x_2^2+y_2^2)+x_1^2+(x_2^2+y_2^2)+x_1^2=$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+2y_2^2;$$

$$|AD|^2+|CB|^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_2^2)+(x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2)=$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+2y_2^2.$$

**2.23.** а) Точка $N$ не лежит на данной окружности.

Решение. Запишем уравнение данной окружности (см. Ф — 13): $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Подставим в него координаты точки. Имеем $(-1+4{,}1)^2+(+2+1{,}9)^2=25$. Раскрывая скобки, получаем неверное равенство $24{,}82=25$.

**2.24.** $a=1$ или $a=-5$.

Решение. Используя формулу Ф — 13, запишем уравнение данной окружности: $(x+2)^2+(y-3)^2=25$. Поскольку точка $A(a;\ -1)$ лежит на данной окружности, ее координаты удовлетворяют уравнению окружности, т. е.

$$(a+2)^2+(-1-3)^2=25.$$

Решая последнее уравнение, получаем два значения $a$: $a_1=1$, $a_2=-5$.

**2.25.** $(AB)$: $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; $(BC)$: $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; $(CD)$: $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$; $(AD)$: $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

Решение. Найдем координаты точек $B$ и $D$:

$$|OB|=|AO|\operatorname{tg}60°,\ |AO|=1,\ |OB|=1\ \operatorname{tg}60°=\sqrt{3};$$

$$|OD|=|OB|=\sqrt{3};\ B(0;\ \sqrt{3}),\ D(0;\ -\sqrt{3}).$$

По формуле Ф — 9 запишем уравнения прямых $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$ и $(AD)$.

$$(AB)\colon\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\ -\sqrt{3}x+y=\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x+\sqrt{3};$$

$$(AD)\colon\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\ y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(CD)\ \frac{x}{1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ -\sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(BC)\ \frac{x}{1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}+y=\sqrt{3};\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$$

**2.26.** $y=x-5$.

Решение. Биссектриса I и III координатных углов имеет уравнение $y=x$. Искомая прямая, по условию, параллельна этой биссектрисе, поэтому уравнение прямой имеет вид $y=x+b$.

Учитывая, что точка $A(0;\ -5)$ лежит на прямой $y=x+b$, найдем значение $b$: $-5=0+b$; $b=-5$. Таким образом, уравнение искомой прямой имеет вид $y=x-5$.

**2.27.** а) $y=2x+2$.

Решение. Поскольку искомая прямая параллельна прямой $y=2x+1$, ее уравнение имеет вид $y=2x+b$. Учитывая принадлежность точки $M(0;\ 2)$ искомой прямой, находим значение $b$: $2=2\cdot 0+b$; $b=2$. Итак, искомая прямая имеет уравнение $y=2x+2$.

Рис. 232

**2.28.** 1) Уравнение высоты $AD$ $y=2x+6$; 2) длина высоты $AD$ равна $12/\sqrt{5}$ (ед.); 3) $S_{AOB}=12$ (ед.$^2$).

Решение. Найдем абсциссы точек $A$ и $B$. Подставляя в уравнение $2x+y-6=0$ ординаты $y_A$ и $y_B$, получаем $2x+6-6=0$, $2x-2-6=0$, откуда $x_A=0$ и $x_B=4$ (рис. 232). Используя формулу Ф — 9, запишем уравнение прямой $(OB)$: $\frac{y}{-2}=\frac{x}{4}$ или $y=-\frac{1}{2}x$.

Далее, на основании формулы Ф — 7, запишем уравнение прямой $(AD)$: $y-6=k(x-0)$, $y=kx+6$. Так как, по условию, прямая $(AD)$ перпендикулярна прямой $(BD)$, то, согласно Ф — 10 б), $k$ в уравнении прямой $(AD)$ равно 2. Следовательно, уравнение искомой высоты $AD$ имеет вид $y=2x+6$. Решая систему $\begin{cases} y=-1/2x, \\ y=2x+6 \end{cases}$ находим координаты точки $D$: $x_D=-12/5$, $y_D=6/5$. По формуле Ф — 3, $|AD|=12/\sqrt{5}$, а по формуле Ф — 4, $S_{AOB}=12$ (ед.$^2$).

**2.29.** $2x+7y-5=0$.

Решение. Заметим, что точка $A(-1;\ 1)$ принадлежит прямой $x+2y-1=0$ (рис. 233).

1) Пусть искомая прямая пересекает прямую $x+2y-3=0$ в точке $B(x_0;\ y_0)$. Тогда $x_0+2y_0-3=0$.

2) Координаты $(x_C;\ y_C)$ середины $C$ отрезка $AB$ можно найти по формуле Ф — 5 (при $\lambda=1$)

$$x_C=\frac{-1+x_0}{2},\quad y_C=\frac{1+y_0}{2}.$$

Точка $C$ принадлежит прямой $x-y-1=0$ и, следовательно, $x_C-y_C-1=0$ или $\frac{-1+x_0}{2}-\frac{1+y_0}{2}-1=0$, т. е. $x_0-y_0=4$.

3) Координаты $(x_0;\ y_0)$ точки $B$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} x_0+2y_0=3, \\ x_0-y_0=4, \end{cases}$$

откуда $x_0=11/3$, $y_0=-1/3$.

4) Уравнение искомой прямой $(AB)$, где $A(-1;\ 1)$, а $B(11/3;\ -1/3)$, находим по формуле Ф — 7:

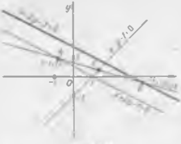


Рис. 233

$$\frac{x+1}{11/3+1}=\frac{y-1}{-1/3-1}\ \text{или}$$

$$2x+7y-5=0.$$

**2.30.** $x-7y+6=0$ и $7x+y+4=0$.

Решение. По условию необходимо найти множество всех точек $M(x;\ y)$, равноудаленных от прямых $L_1$ (уравнение $3x+4y-1=0$) и $L_2$ (уравнение $4x-3y+5=0$), т. е. таких, что расстояние $d_1$ от точки $M(x;\ y)$ до прямой $L_1$ равно расстоянию $d_2$ от точки $M(x;\ y)$ до прямой $L_2$ ($d_1=d_2$). Согласно Ф—11,

$$d_1=\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}},\quad d_2=\frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{16+9}}$$

Таким образом, искомое множество точек $M(x;\ y)$ задается уравнением

$$\frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{25}}=\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{25}},\ \text{т. е.}\ |4x-3y+5|=|3x+4y-1|.$$

Последнее уравнение равносильно следующим двум уравнениям: $4x-3y+5=3x+4y-1$ или $4x-3y+5=-3x-4y+1$, т. е. $x-7y+6=0$ или $7x+y+4=0$.

**2.31.** При любых $a$. Множество точек $M$ есть прямая, перпендикулярная отрезку $AB$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат с центром в середине отрезка $AB$ и осью абсцисс, направленной от точки $A$ к точке $B$ (рис. 234). Пусть $|AB|=d$, тогда имеем $A=(-d/2;\ 0)$, $B(d/2;\ 0)$. Пусть $M(x;\ y)$ — точка искомого множества. Согласно формуле Ф—3,

$$|AM|^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2,\quad |BM|^2=\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2,$$

откуда $|AM|^2-|BM|^2=2xd$. С другой стороны, по условию, $|AM|^2-|BM|^2=a$ и тем самым искомое множество точек задается уравнением $2xd=a$. Очевидно, это прямая, перпендикулярная оси абсцисс и пересекающая ее в точке с координатами $(a/2d;\ 0)$.

**2.32.** $(0;\ 1)$ или $(3/5;\ -4/5)$.

Решение. Искомая точка $A(x_0;\ y_0)$ лежит на данной окружности, поэтому ее координаты связаны соотношением $x_0^2+y_0^2=1$. Кроме того, по условию, точка $A(x_0;\ y_0)$ равноудалена от точек $(1;\ 3)$ и $(-2;\ 2)$; поэтому, согласно Ф—3,

$$(x_0-1)^2+(y_0-3)^2=(x_0+2)^2+(y_0-2)^2.$$

Таким образом, координаты точки $A(x_0;\ y_0)$ можно получить, решив систему уравнений

[illegible]

**2.33.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

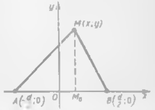



Рис. 234

**Решение.** Заметим, что так как $1^2+2^2=5$ — верное равенство, то точка $A(1;2)$ лежит на данной окружности. Согласно Ф — 9, прямая $(OA)$ имеет уравнение $y=2x$.

Искомая касательная перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания $A$, т. е. прямой $(OA)$. Поэтому, согласно Ф — 10 б), угловой коэффициент искомой касательной равен $(-1/2)$ и, следовательно, ее уравнение имеет вид $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Для нахождения $b$ воспользуемся тем, что точка $A(1;2)$ принадлежит касательной, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению касательной: $2=-\frac{1}{2}\cdot 1+b$. Отсюда $b=\frac{5}{2}$.

Итак, уравнение касательной к данной окружности в точке $A(1;2)$ имеет вид $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

**2.34.** $y=\frac{a}{b}x$.

**Решение.** Две точки пересечения двух данных окружностей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2ax, \\ x^2+y^2=2bx \end{cases}$$

и, следовательно, условию $2ax=2by$, т. е. лежат на прямой $ax=by$. Заметим, что при $a\neq 0$ и $b\neq 0$ система имеет два решения $(0;0)$ и $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2};\ \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$, поэтому окружности имеют общую хорду.

**2.35.** $x+y-3-3\sqrt{2}=0$ и $x+y-3+3\sqrt{2}=0$.

**Решение.** Приведем данные уравнения к каноническому виду

$$(x^2+y^2=6x)\Leftrightarrow((x-3)^2+y^2=3^2) \text{ и}$$
$$(x^2+y^2=6y)\Leftrightarrow(x^2+(y-3)^2=3^2).$$

Окружности имеют одинаковые радиусы, значит, если провести прямую через их центры, то общие касательные будут параллельны этой прямой и удалены от нее на расстояние, равное радиусу

Рис. 235

(рис. 235). Уравнение прямой, проходящей через центры $O_1(3;0)$ и $O_2(0;3)$, следующее:

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-0}{3-0}\Leftrightarrow x+y-3=0.$$

Следовательно, искомые касательные — множество точек $(x;y)$, удаленных от прямой $x+y-3=0$ на расстояние, равное 3. Согласно Ф — 11,

$$\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}=3,$$

откуда и получаем ответ.

2.36. $y=\frac{1}{4}x^2$.

**Решение.** Парабола проходит через начало координат и симметрична относительно оси $Oy$, поэтому, согласно Ф — 16, ее уравнение имеет вид $x^2=2py$. Учитывая, что точка $(6;9)$ принадлежит параболе, найдем значение $p$: $6^2=2p9$, $p=2$. Итак, искомая парабола имеет уравнение $x^2=4y$, или $y=\frac{1}{4}x^2$.

2.37. $\frac{x^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1$.

**Решение.** Ординаты $y_1$ точек полученной кривой вдвое меньше ординат $y$ точек окружности $x^2+y^2=36$ с теми же абсциссами, т. е. $y_1=\frac{1}{2}y$, откуда $y=2y_1$. Поэтому уравнение новой кривой имеет вид

$$x^2+(2y_1)^2=36\Leftrightarrow\frac{x^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1.$$

Полученная кривая — эллипс.

2.38. $a=\sqrt{10}$; $b=\sqrt{6}$.

**Решение.** Преобразуем данное уравнение к каноническому виду

$$3x^2+5y^2-30=0\Leftrightarrow\frac{3x^2}{30}+\frac{5y^2}{30}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{(\sqrt{10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1.$$

Таким образом, большая полуось эллипса $a=\sqrt{10}$, малая полуось $b=\sqrt{6}$.

2.39. $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

**Решение.** Уравнение эллипса, симметричного относительно осей $Ox$ и $Oy$, таково:

Рис. 236

Рис. 237

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Учитывая, что точки (1; 4) и (7; 2) лежат на эллипсе, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1,\\ \dfrac{49}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1.\end{cases}$$

Решив ее, найдем $a=\sqrt{65}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{65}$. Подставляя найденные значения $a$ и $b$ в общее уравнение эллипса, получим $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

**2.40.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Решение. Данный эллипс имеет полуоси $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$ и фокусы в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. Искомая гипербола имеет фокусы в точках $F_1'(c_1;0)$ и $F_2'(-c;0)$, где $c_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$. По условию, $c_1=a$ и $a_1=c$. Поэтому имеем $a=\sqrt{c^2-b_1^2}$, откуда

$$a^2=c^2-b_1^2 \Leftrightarrow a^2=(a^2-b^2)-b_1^2 \Leftrightarrow b^2=b_1^2 \Leftrightarrow b_1=b.$$

Итак, уравнение искомой гиперболы

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1.$$

**2.41.** $2x-5y+19=0$.

Решение. Приведем уравнение окружности к каноническому виду:

$$x^2+y^2+4x-6y-17=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{30})^2.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке $(-2;3)$, и, следовательно, искомая прямая (диаметр окружности) проходит через эту точку.

$$\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2 \geqslant 144 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y<-\dfrac{x^2}{8}, & (1) \\ y<-2-\dfrac{2x}{3}, & (2) \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16} \geqslant 1. & (3) \end{array}\right.$$

Неравенство (1) задает множество точек плоскости, лежащих «ниже» параболы $y=-x^2/8$. Неравенство (2) задает множество точек, лежащих «ниже» прямой $y=-2-2x/3$. Наконец, неравенство (3) задает множество точек плоскости, лежащих «правее» правой ветви и «левее» левой ветви гиперболы, включая точки, лежащие на самой гиперболе.

**2.49.** Если $C<0$ — пустое множество, если $C=0$ — пара данных прямых, если $C>0$ — две сопряженные гиперболы.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось $Ox$ являлась биссектрисой одной из пар вертикальных углов, образуемых данными прямыми, а начало координат совпало с точкой их пересечения. Тогда уравнения прямых $L_1$ и $L_2$ имеют соответственно вид $y=kx$ и $y=-kx$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества, тогда, согласно Ф—11, имеем

$$d_1=\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}, \quad d_2=\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}},$$

где $d_1$ и $d_2$ — расстояния от точки $M(x; y)$ до прямых $L_1$ и $L_2$ соответственно, а условие задачи можно переписать в виде

$$\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}=C\,(\text{const})$$

или

$$|(kx-y)(kx+y)|=C_1, \text{ где } C_1=(k^2+1)\cdot C.$$

Если $C_1<0$, то искомое множество точек пусто.

Если $C_1=0$, то множество точек — две данные прямые $y=\pm kx$.

Если $C_1>0$, то множество точек — две гиперболы $k^2x^2-y^2=C_1$ и $y^2-k^2x^2=C_1$.

**2.50.** Парабола.

Решение. Так как для любой точки искомого множества расстояния от нее до точки $A$ и до прямой $L$ равны (радиусу окружности), то, по определению, множество всех таких точек является параболой с фокусом в точке $A$ и директрисой $L$ (рис. 240).

**3.1.** $x_{90}=-1$; $x_{885}=1$.

Решение. Данная последовательность периодическая с периодом, равным шести: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=-1$, $x_6=-1$, $x_7=0$, ... . Поэтому $x_{90}=x_{15\cdot 6}=x_6=-1$, $x_{885}=x_{147\cdot 6+3}=x_3=1$.

**3.2.** Решение. Данная последовательность имеет вид 3; $3^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{3}}$; ...; $3^{\sqrt{n}}$; ... . Для доказательства воспользуемся определением бесконечно большой последовательности. Возьмем любое число $A>0$. Из неравенства $|x_n|=|3^{\sqrt{n}}|>A$ получаем неравенство

$|3^{\sqrt{n}}|=3^{\sqrt{n}}>A$. Прологарифмировав, найдем $\sqrt{n}\lg 3>\lg A$, $\sqrt{n}>\frac{\lg A}{\lg 3}$, откуда $n>\left(\frac{\lg A}{\lg 3}\right)^2$. Если взять $N=\left[\left(\frac{\lg A}{\lg 3}\right)^2\right]$, то для всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n|>A$, т. е., согласно определению бесконечно большой последовательности, последовательность $\{3^{\sqrt{n}}\}$ бесконечно большая.

Рис. 180

3.3. Решение. Данная последовательность имеет вид

$$\frac{1}{3},\quad \frac{2}{5\sqrt{2}+1},\quad -\frac{2}{5\sqrt{3}+1},\quad \frac{2}{5\sqrt{4}+1},\ \ldots,\ \frac{2}{5\sqrt{n}+1},\ \ldots .$$

Для доказательства воспользуемся определением бесконечно малой последовательности. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Из неравенства

$$|\alpha_n|=\left|\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right|=\frac{2}{5\sqrt{n}+1}<\frac{2}{5\sqrt{n}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

получаем неравенство $\sqrt{n}>1/\varepsilon$, откуда $n>1/\varepsilon^2$. Если взять $N=[1/\varepsilon^2]$, то для всех $n>N$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$, т. е., согласно определению бесконечно малой последовательности, последовательность $\left\{\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ бесконечно малая.

3.4. Решение.

□ Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Возьмем любое число $A>0$ и положим $\varepsilon=1/A$. По определению бесконечно малой последовательности, для этого $\varepsilon$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$. Тогда

$$|x_n|=\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|=\frac{1}{|\alpha_n|}>\frac{1}{\varepsilon}=A,\ \text{т. е.}\ |x_n|>A\ \text{для всех}\ n>N.$$

А это, по определению бесконечно большой последовательности, означает, что последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая. ■

3.5. Решение. Данная последовательность имеет вид $1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ n^{(-1)^n};\ \ldots$ . Возьмем число $A>1$. Тогда неравенство $|x_n|>A$ не имеет места для всех элементов $x_n$ с нечетными номерами: $x_1$, $x_3$, $x_5$, … . Это и означает, что последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не является бесконечно большой.

3.6. Решение. Данная последовательность имеет вид

$$1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \dots,\ 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

Для доказательства воспользуемся определением предела последовательности, но предварительно с помощью формулы суммы геометрической прогрессии представим выражение общего элемента последовательности в виде

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n} \text{ или } x_n-2=-\frac{1}{2^n}.$$

Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Тогда из неравенства $|x_n-2|=\left|-\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ получаем неравенство $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$, или, логарифмируя $n\log_2 2>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$, откуда $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$. Если взять $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то для всех $n>N$ будет выполняться неравенство $|x_n-2|<\varepsilon$. Таким образом, согласно определению предела последовательности, последовательность $\left\{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right\}$ сходится и ее предел равен 2, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

3.7. Решение. Данная последовательность имеет вид

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^3},\ \dots,\ \frac{n}{2^n},\ \dots\ .$$

Для доказательства воспользуемся определением предела последовательности, но предварительно с помощью формулы бинома Ньютона оценим выражение общего элемента данной последовательности. Имеем

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\dots+1>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

Следовательно,

$$|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{n^2/2}=\frac{2}{n}.$$

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда из неравенства $|x_n-0|=\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ получаем неравенство $n>2/\varepsilon$. Если взять $N=[2/\varepsilon]$, то для всех $n>N$ будет выполняться неравенство $|x_n-0|<\varepsilon$, т. е., согласно определению предела последовательности, последовательность $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ сходится и ее предел равен 0, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Заметим, что данная последовательность является бесконечно малой.

3.8. Решение. Покажем, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство

$|x_n|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}|<\varepsilon$, т. е. справедливо определение бесконечно малой последовательности. Так как

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}},$$

то

$$|x_n|=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon>0$ при $n>N=[1+1/\varepsilon^2]$ выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon$. Этим доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$. Для доказательства можно было бы воспользоваться и определением предела последовательности. (Сделайте это самостоятельно.)

3.9. Решение. Действительно, согласно определению предела последовательности, для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N$ такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Но, согласно свойству абсолютной величины числа (см. пример 2 § 5 гл. I), $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$ и, следовательно, при $n>N$ выполняется неравенство $||x_n|-|a||<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

3.10. Последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно большая.

Решение. По теореме 3.1 последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, по теореме 3.6 последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограниченная, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{a}$ (докажите самостоятельно), а по теореме 3.4 произведение $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{y_n}\right\}=\left\{\frac{1}{x_n y_n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность, по теореме 3.1 последовательность $\{x_n y_n\}$ является бесконечно большой. Заметим, что данная задача является продолжением примера 5 из § 2.

3.11. 1) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=\{n^2\}$; 2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$; 3) $\{x_n\}=\{1/n\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$; 4) $\{x_n\}=\{(-1)^n/n\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$. (Ответы обоснуйте.)

3.12. Последовательность $\{x_n y_n\}$ расходится.

Решение. Проведем рассуждения от противного. Обозначим $z_n=x_n\cdot y_n$ и предположим, что последовательность $\{z_n\}$ сходится. Так как, по условию, $\lim y_n=a\neq0$, то, согласно теореме 3.9, последовательность $\{x_n\}=\{z_n/y_n\}$ сходится. Но это противоречит условию. Следовательно, последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ расходится.

**3.13.** Последовательности $\{x_n+y_n\}$ и $\{x_n \cdot y_n\}$ могут сходиться ($\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ и $\{y_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$) или расходиться ($\{x_n\}=\{n\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$).

**3.14.** 1) $-5/4$; 2) $\infty$; 3) 0; 4) $-1/2$; 5) $-5/4$.

**3.15.** Решение. Можно воспользоваться тем, что начиная с некоторого $n$ выполняются неравенства $1/n<a<n$. Тогда $\sqrt[n]{1/n}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$. Но так как $\sqrt[n]{n}\to 1$ и $\sqrt[n]{1/n}=1/\sqrt[n]{n}\to 1$ при $n\to\infty$ (см. пример 3 из § 2), то, согласно теореме 3.11, получаем, что и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**3.16.** 5.

Решение. Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (см. задачу 3.15). Имеем

$$\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}}=5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{10}}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^{10}=5\cdot 1\cdot 1^{10}=5.$$

**3.17.** 1.

Решение. Преобразуем выражение общего элемента последовательности:

$$x_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}=$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Действительно, для всех $n>1$ выполняются неравенства

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}\quad\text{и}\quad 1-\frac{1}{n}<\sqrt{1-\frac{1}{n}}<1.$$

Но так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ (докажите это самостоятельно), то по теореме 3.11 получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

**3.18.** 0.

**Решение.** Данная последовательность имеет вид

$$\frac{2}{1!};\ \frac{2^2}{2!};\ \frac{2^3}{3!};\ \ldots;\ \frac{2^n}{n!};\ \ldots$$

Она монотонно убывает, так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!(n+1)2^n}=\frac{2}{n+1}<1 \quad \text{при} \quad n>1,$$

т. е. $x_{n+1}<x_n$, и ограничена сверху, например, элементом $x_1$. Кроме того, так как $x_n>0$, последовательность ограничена снизу. Следовательно, данная последовательность монотонна и ограничена. По теореме 3.12 она сходится. Обозначим ее предел через $a$ и найдем его. Для этого воспользуемся тем, что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1} \quad \text{или} \quad x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,$$

получаем $a=0\cdot a$, откуда $a=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

**3.19.** 2.

**Решение.** Данная последовательность имеет вид

$$x_1=\sqrt{2};\ x_2=\sqrt{2\sqrt{2}},\ x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots;$$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n\ \text{корней}};\ \ldots\ .$$

Проверим сначала факт существования предела. Очевидно, что $x_1<x_2<x_3<\ \ldots\ <x_n<x_{n+1}<\ \ldots$, т. е. данная последовательность монотонная возрастающая и ограничена снизу элементом $x_1$. Методом индукции докажем, что $x_n<2$ при любом $n$, т. е. последовательность ограничена сверху. В самом деле, так как $x_1=\sqrt{2}<2$, то $x_2=\sqrt{2x_1}<\sqrt{2\cdot 2}=2$; $x_3=\sqrt{2\cdot x_2}<\sqrt{2\cdot 2}=2$; … . Предположим, показано, что $x_n<2$. Тогда $x_{n+1}=\sqrt{2\cdot x_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2$. А так как $x_1<2$, то для всех $n$ $x_n<2$, что и требовалось доказать. Таким образом, установлено, что данная последовательность монотонна и ограничена. По теореме 3.12 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ существует.

Исходя из факта существования предела, найдем теперь его значение. Для этого возведем равенство $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ в квадрат: $x_{n+1}^2=2x_n$. Тогда, если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $a$, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty} 2x_n=\lim_{n\to\infty} 2\lim_{n\to\infty} x_n,$$

получаем равенство $a^2=2a$, откуда $a=0$ или $a=2$. Но так как, по доказанному, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и в то же время для любого $n$ $x_n<2$, то $a=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

5.1. $x=\pm\sqrt{2/3}$.

Решение. Так как касательная параллельна прямой $y=x$, ее угловой коэффициент равен 1 — угловому коэффициенту этой прямой. С другой стороны, угловой коэффициент касательной в точке $x_0$ равен $f'(x_0)$.

Итак, надо найти, при каких значениях $x$ верно равенство $f'(x)=1$. Поскольку $f(x)=x^3-x$, $f'(x)=3x^2-1$, получаем уравнение $3x^2-1=1$. Отсюда $x=\pm\sqrt{2/3}$.

5.2. $-45°$.

Решение. Искомый угловой коэффициент равен значению производной функции в точке $x=0$ (точке пересечения графика с осью $Oy$). Так как $f(x)=2x^3-x$, то $f'(x)=6x^2-1$ и $f'(0)=-1$.

5.3. $45°$; $0°$; $-45°$.

Решение. Искомые угловые коэффициенты равны значениям производной в точках 0; 2; 4. Так как $f(x)=\dfrac{4x-x^2}{4}$, то $f'(x)=\dfrac{4-2x}{4}$.

Соответственно имеем: $f'(0)=1$; $f'(2)=0$; $f'(4)=-1$.

5.4. $y=x+1$.

Решение. Точки пересечения с осью абсцисс находятся из условия $y_0=0$, т. е. $(x_0+1)/3=0$. Отсюда $x_0=-1$. Уравнение касательной, проходящей через точку графика $(x_0; y_0)$, имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Так как $f(x)=\dfrac{x^3+1}{3}$, то $f'(x)=x^2$ и $f'(x_0)=1$.

Получаем уравнение касательной: $y=x+1$.

5.5. $-45°$.

Решение. Искомый угловой коэффициент равен значению производной при $x=1$. Так как $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $f'(x)=-1/x^2$ и $f'(1)=-1$.

5.6. $a=4$.

Решение. Точки пересечения кривой с осью абсцисс находим из уравнения $\dfrac{ax_0-x_0^3}{4}=0$; отсюда $x_0=0$ или (при $a\geqslant 0$) $x_0=\pm\sqrt{a}$.

Угловые коэффициенты в этих точках равны $f'(x_0)$. Так как $f(x)=(ax-x^3)/4$, то $f'(x)=(a-3x^2)/4$. Отсюда $f'(0)=a/4$ или (при $a\geqslant 0$) $f'(\pm\sqrt{a})=-a/2$.

По условию, $f'(x_0)=1$. Значит, $a=4$ или (при $a\geqslant 0$) $a=-2$. Значение $a=-2$ не подходит.

**5.7.** Прямая $y=3x-4$ является касательной к кривой $y=x^3-2$.

Решение. Если прямая $y=3x-4$ — касательная к кривой $y=x^3-2$ в точке $(a; a^3-2)$, то $f'(a)=3$. Отсюда $3a^2=3$, следовательно, $a=\pm 1$. Касательная, проходящая через точку кривой с абсциссой $a$, имеет уравнение $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. При $a=1$ получаем $y+1=3(x-1)$, откуда $y=3x-4$

**5.8.** $y=-x+2$; $y=-9x-6$.

Решение. Уравнение касательной, проходящей через точку гиперболы $(a; 1/a)$, $y-1/a=f'(a)(x-a)$. Так как $f(x)=1/x$, то $f'(x)=-1/x^2$ и $f'(a)=-1/a^2$. Итак, уравнение касательной имеет вид $y-1/a=-(1/a^2)(x-a)$, откуда

$$y=\frac{-1}{a^2}x+\frac{2}{a}. \qquad (*)$$

По условию, эта прямая проходит через точку $(-1; 3)$, т. е. $3=1/a^2+2/a$. Отсюда $3a^2-2a-1=0$, значит, $a_1=1$, $a_2=-1/3$. Подставляя эти значения в $(*)$, получаем ответ.

**5.9.** $y=x+10$.

Решение. Пусть искомая прямая проходит через точку $(a; 8-3a-2a^2)$ на первой параболе. Общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$. Так как $f(x)=8-3x-2x^2$, то $f'(x)=-3-4x$ и $f'(a)=-3-4a$. Таким образом, данная прямая имеет уравнение $y=8-3a-2a^2-(3+4a)(x-a)$, т. е. $y=-(4a+3)x+2a^2+8$. Предположим теперь, что прямая проходит через точку $(b; 2+9b-2b^2)$ на второй параболе. Рассуждая аналогично, получаем, что уравнение прямой $y=-(4b-9)x+2b^2+2$. Полученные два уравнения должны задавать одну и ту же прямую. Следовательно,

$$\begin{cases} 4a+3=4b-9, \\ 2a^2+8=2b^2+2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $a=-1$. Таким образом, уравнение искомой прямой $y=x+10$.

**5.10.** $a=0$; $b=1/4$.

Решение. Уравнение касательной к параболе в точке $(c; c^2+ac+b)$ такое: $y=c^2+ac+b+f'(c)(x-c)$, причем $f'(x)=2x+a$, т. е. $f'(c)=2c+a$. Поэтому уравнение касательной $y=(a+2c)x+b-c^2$.

Если касательной является прямая $y=-x$, то получаем

$$\begin{cases} a+2c=-1, \\ b-c^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{-(a+1)}{2}, \\ c^2=b \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a+1}{2}\right)^2=b \Leftrightarrow a^2+2a+1=4b. \qquad (*)$$

Во втором случае касательная — прямая $y=5x-6$. Тогда

$$\begin{cases} a+2c=5, \\ b-c^2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{5-a}{2}, \\ c^2=b+6 \end{cases} \Rightarrow a^2-10a+1=4b. \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ получаем систему

$$\begin{cases} a^2+2a+1=4b, \\ a^2-10a+1=4b. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $a=0$ и $b=1/3$.

**5.11.** $x=0$ и $x=4$.

Решение. Приведем уравнение окружности к каноническому виду: $x^2-4x+4+y^2=4$, откуда $(x-2)^2+y^2=4$. Таким образом, центр окружности — точка $(2; 0)$ — лежит на оси абсцисс. Поэтому касательные к окружности в точках пересечения с осью абсцисс вертикальные. Так как радиус равен 2, то эти касательные проходят через точки $(0; 0)$ и $(4; 0)$.

**5.12.** Решение. Функция $y=|x|$ не имеет производной только в точке $x=0$, а функции $y=|x-1|$, $y=|x-2|$ соответственно в точках $x=1$ и $x=2$. Поэтому условию задачи удовлетворяет, например, функция $y=|x|+|x-1|+|x-2|$.

**5.13.** Решение. Так как функция $f(x)$ задается различными формулами на промежутках $(-\infty; 0)$ и $[0, +\infty)$ с общим концом $x=0$, то необходимо вычислить правую и левую производные в точке $x=0$. Имеем

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin(0+\Delta x)-\sin 0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Так как правая и левая производные различны, то данная функция не имеет производной в точке $x=0$, что и требовалось доказать.

**5.14.** Решение. Пусть $\Delta x$ стремится к нулю, принимая рациональные значения. Тогда $\Delta y=\sin(0+\Delta x)-\sin 0=\sin\Delta x$ и, следовательно,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Если же $\Delta x\to 0$ принимая иррациональные значения, то $\Delta y=(0+\Delta x)-0=\Delta x$ и, следовательно,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Оба предела совпадают, поэтому данная функция имеет производную в точке $x=0$, что и требовалось доказать.

**5.15.** Решение. В случае, когда функция $f(x)$ задана не одной формулой, а несколькими, производную приходится иногда вычислить непосредственно, исходя из определения производной.

В данном случае при $x\neq 0$ производная функции $f(x)$ существует и вычисляется по формулам и правилам дифференцирования

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

В точке же $x=0$ производная находится непосредственно по определению:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin(1/\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin(1/\Delta x)=0$$

(произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая). Таким образом,

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0 & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой.

Покажем теперь, что производная $f'(x)$ разрывна в точке $x=0$. В самом деле, так как $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin(1/x)=0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ не существует. Отсюда следует, что производная функции $f(x)$ в точке $x=0$ разрывна.

**5.16.** Решение. Так как

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n};\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\ f(0)=\ln 1=0,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+0(x^n).$$

**5.17.** Решение. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x; \qquad f(0)=0,\ f'(0)=1;$$

$$f''(x)=2\cos^{-3}x\sin x; \qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\sin^2 x+2\cos^{-2}x; \quad f'''(0)=2,$$

то по формуле Маклорена имеем

$$\operatorname{tg}x=x+x^3/3+o(x^3).$$

Заметим что на самом деле остаточный член имеет вид $o(x^4)$, так как $f^{(4)}(0)=0$ (проверьте это самостоятельно).

**5.18.** а) $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$; б) $e^{2x-x^2}=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}\times x^4-\dfrac{1}{15}x^5+o(x^5)$; в) $\ln(\cos x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$; г) $\sin\sin x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

**5.19.** а) 0; б) 1; в) 0; г) $-1/12$; д) $1/3$; е) $-1/4$.

**Указание.** При вычислении подобных пределов надо разлагать функции по формуле Маклорена в числителе и знаменателе до члена одного порядка. Так, например, в примерах а), г) и д) до члена с $x^4$.

**6.1.** $4\pi/3+\sqrt{3}$.

Решение. Применим подстановку $x=\varphi(t)=2\sin t$, считая, что $-\pi/3\leqslant t\leqslant \pi/3$. Функция $\varphi(t)=2\sin t$ на отрезке $[-\pi/3, \pi/3]$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, так как она непрерывно дифференцируема, монотонна и $\varphi(-\pi/3)=-\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3)=\sqrt{3}$. Заметим, что $\sqrt{4-x^2}=2|\cos t|=2\cos t$ ($|\cos t|=\cos t$, так как при $-\pi/3\leqslant t\leqslant\pi/3$ в I и IV четверти, $\cos t>0$), $\varphi'(t)=2\cos t$. Поэтому

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

**6.2.** 32/3.

Решение. Сделаем подстановку $t=\sqrt{1+x}$. Выразив отсюда $x$, получим, что $x=\varphi(t)=t^2-1$; так как $t=2$ при $x=3$, а при $x=8$ имеем $t=3$, будем считать, что функция $x=\varphi(t)$ определена на отрезке $[2, 3]$. Поскольку функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, получаем

$$\int_3^8\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}=2\int_2^3(t^2-1)\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=\frac{32}{3}.$$

**6.3.** $\sqrt{3}/32$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x=g(t)=\frac{2}{\cos t}=2\sec t$, $t\in[0,\pi/3]$. Тогда $g'(t)=2\frac{\sin t}{\cos^2 t}$. Поскольку функция $x=g(t)$ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi/3]$ всем условиям теоремы о замене переменной,

$$\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, заметим, что если в формуле замены переменной $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ в интеграле слева положить $f(x)=x^2$, а $x=\varphi(t)=\sin t$, то

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)=\sin^2 t\cos t,$$

т. е. подынтегральная функция в интеграле в правой части равенства (*) равна $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Поэтому, используя формулу замены переменной справа налево, получим

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\,\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{32}.$$

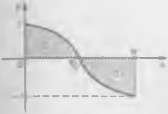


Рис. 241

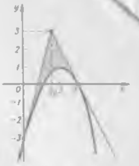


Рис. 242

**6.4.** 0.

**Решение.** В силу формул приведения, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Поэтому $\sqrt[3]{\cos(\pi - x)} = -\sqrt[3]{\cos x}$, и фигуры, имеющие площади $S_1$ и $S_2$ (рис. 241), симметричны относительно точки $\pi/2$ на оси абсцисс, значит, $S_1 = S_2$. С другой стороны, используя формулу (3) из § 6, имеем:

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx.$$

Поскольку $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\,dx = S_1$, а $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx = -S_2$, получаем

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx = S_1 - S_2 = 0.$$

**6.5.** $S = 9/4$.

**Решение.** Убедимся в том, что данные точки лежат на параболе: $-3 = -0^2 + 4\cdot 0 - 3$; $0 = -3^2 + 4\cdot 3 - 3$. Найдем уравнения касательных. Подставляя в уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

сначала $x_0 = 0$, $f(x_0) = -3$ и $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = 4$, а затем $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) = -2$, получаем $y = 4x - 3$ и $y = -2x + 6$. Находим точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Найдем площадь полученной фигуры (рис. 242):

$$S = \int_0^{3/2} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)]\,dx + \int_{3/2}^{3} [(-2x + 6) -$$

$$- (-x^2 + 4x - 3)]\,dx =$$

Решение. Применим подстановку $x=\varphi(t)=2\sin t$, считая, что $-\pi/3\leqslant t\leqslant\pi/3$. Функция $\varphi(t)=2\sin t$ на отрезке $[-\pi/3, \pi/3]$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, так как она непрерывно дифференцируема, монотонна и $\varphi(-\pi/3)=-\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3)=\sqrt{3}$. Заметим, что $\sqrt{4-x^2}=2|\cos t|=2\cos t$ ($|\cos t|=\cos t$, так как при $-\pi/3\leqslant t\leqslant\pi/3$ в I и IV четверти, $\cos t>0$), $\varphi'(t)=2\cos t$. Поэтому

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,dt=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

**6.2.** 32/3.

Решение. Сделаем подстановку $t=\sqrt{1+x}$. Выразив отсюда $x$, получим, что $x=\varphi(t)=t^2-1$; так как $t=2$ при $x=3$, а при $x=8$ имеем $t=3$, будем считать, что функция $x=\varphi(t)$ определена на отрезке $[2, 3]$. Поскольку функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, получаем

$$\int_3^8\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}=2\int_2^3(t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=\frac{32}{3}.$$

**6.3.** $\sqrt{3}/32$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x=\varphi(t)=\frac{2}{\cos t}$, где $0\leqslant t\leqslant\pi/3$. Тогда $\varphi'(t)=2\frac{\sin t}{\cos^2 t}$. Поскольку функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi/3]$ всем условиям теоремы о замене переменной,

$$\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t\,dt. \qquad (*)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, заметим, что если в формуле замены переменной $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ в интеграле слева положить $f(x)=x^2$, а $x=\varphi(t)=\sin t$, то

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)=\sin^2 t\cos t,$$

т. е. подынтегральная функция в интеграле в правой части равенства (*) равна $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Поэтому, используя формулу замены переменной справа налево, получим

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2}u^2\,du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{32}$$

Рис. 241

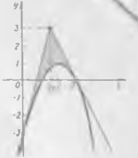


Рис. 242

**6.4.** 0.

**Решение.** В силу формул приведения, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Поэтому $\sqrt[3]{\cos(\pi - x)} = -\sqrt[3]{\cos x}$, и фигуры, имеющие площади $S_1$ и $S_2$ (рис. 241), симметричны относительно точки $\pi/2$ на оси абсцисс, значит, $S_1 = S_2$. С другой стороны, используя формулу (5) из § 6, имеем

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx.$$

Поскольку $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = S_1$, а $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = -S_2$, получаем

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = S_1 - S_2 = 0.$$

**6.5.** $S = 9/4$.

**Решение.** Убедимся в том, что данные точки лежат на параболе: $-3 = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3$; $0 = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3$. Найдем уравнения касательных. Подставляя в уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

сначала $x_0 = 0$, $f(x_0) = -3$ и $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = 4$, а затем $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) = -2$, получаем $y = 4x - 3$ и $y = -2x + 6$. Находим точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Найдем площадь полученной фигуры (рис. 242):

$$S = \int_0^{3/2} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)]\, dx + \int_{3/2}^{3} [(-2x + 6) -$$

$$- (-x^2 + 4x - 3)]\, dx =$$

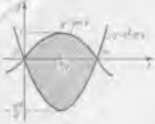


Рис. 243

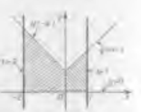


Рис. 244

$$=\int\limits_0^{3/2} x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{3/2}^{3}(x-3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{3/2}+\frac{(x-3)^3}{3}\bigg|_{3/2}^{3}=\frac{9}{4}.$$

**6.6.** $S=2+\pi^3/6.$

**Решение.** Заметив, что $x=0$ и $x=\pi$ — корни функции $y=x^2-\pi x$, и построив графики данных линий — синусоиду и параболу (рис. 243), находим площадь $S$ заданной фигуры:

$$S=\int\limits_0^{\pi}\left[\sin x-\left(x^2-\pi x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x-x^2+\pi x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[-\cos x-x^3/3+\pi x^2/2\right]_0^{\pi}=\left[\left(1-\pi^3/3+\pi^3/2\right)-(-1)\right]=2+\pi^3/6.$$

**6.7.** $S=11/2.$

**Решение.** Так как $y=|x|+1=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\in[0,\,+\infty),\\ -x+1 & \text{при } x\in(-\infty,\,0),\end{cases}$ то, разбивая данную фигуру на две части (рис. 244), найдем площадь:

$$S=\int\limits_{-2}^{0}(-x+1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1(x+1)\,\mathrm{d}x=\left(-x^2/2+x\right)\bigg|_{-2}^{0}+\left(x^2/2+x\right)\bigg|_0^1=$$

$$=\left[0-\left(-(-2)^2/2+(-2)\right)\right]+\left[(1/2+1)-0\right]=11/2.$$

**6.8.** $V=\dfrac{29}{3}\pi.$

**Решение.** Данный шаровой слой можно представить как тело, полученное вращением криволинейной трапеции, которое ограничено линиями $y=\sqrt{16-x^2}$, $x=2$, $x=3$ и осью $Ox$, вокруг оси $Ox$ (рис. 245). Поэтому, согласно формуле $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x$, для объема $V$ этого шарового слоя имеем

$$V=\pi\int\limits_2^3\left(16-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_2^3=\frac{29}{3}\pi.$$

**6.9.** $V=\dfrac{\pi H^2}{3}(3R-H).$

Рис. 245

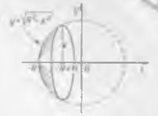



Рис. 246

Решение. Шаровой сегмент (см. рис. 213) можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения криволинейной трапеции, образованной дугой окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, прямыми $x=-R$ и $x=-R+H$ и осью $Ox$, вокруг оси $Ox$ (рис. 246). Поэтому, согласно формуле $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx$, где $V$ — объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вокруг оси $Ox$, объем шарового сегмента можно найти так:

$$V=\pi\int\limits_{-R}^{-R+H}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{-R+H}=\frac{\pi H^2}{3}(3R-H).$$

Замечание. Формулу объема шарового сегмента можно получить из формулы объема шарового слоя

$$V=\pi\int\limits_a^b(R^2-x^2)\,dx,$$

если устремить $a$ к $-R$.

6.10. $V=2\pi R^2H/3$.

Решение. Объем шарового сектора можно получить, сложив объемы шарового сегмента (см. задачу 6.9) и объема конуса $(1/3)\pi|AB|^2|OB|$ (рис. 247), получаем, что $|AB|=\sqrt{R^2-(-R+H)^2}=\sqrt{2RH-H^2}$; $|OB|=R-H$. Таким образом, для объема шарового сектора

$$V=\frac{\pi H^2(3R-H)}{3}+\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)=\frac{2\pi R^2H}{3}.$$

6.11. Решение. Будем считать, что пшено заполняет какую-то часть кастрюли без пустот, наподобие жидкости. Пусть радиус основания (дна) цилиндрической кастрюли равен $R$, а пшена насыпано столько, что оно поднялось до высоты $H$ (рис. 248). Найдем объем пространства, занятого пшеном. Для этого воспользуемся формулой $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, где $V$ — объем тела, поперечные сечения которого имеют площадь $S(x)$. Пусть $O$ — центр основания цилиндра, ось $Ox$ направлена по диаметру основания $AK$. Найдем

Рис. 247

Рис. 248

площадь $S(x)$ сечения искомого тела плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$ и проходящей через точку этой оси с координатой $x$. Если плоскость пересекает тело по треугольнику $O_1Z_1K_1$, то $\Delta O_1Z_1K_1 \sim \Delta OZK$ (рис. 248), откуда $l:R=h:H$ (здесь $|OK|=R$, $|ZK|=H$, $|O_1K_1|=l$, $|K_1Z_1|=h$). Так как $l^2=R^2-x^2$, то $S(x)=\frac{1}{2}lh=\frac{1}{2}\frac{H}{R}l^2=\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)$. Таким образом, объем $V_1$ пшена равен

$$V_1=2\int\limits_0^R\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{R}\int\limits_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}HR^2.$$

Общий объем $V$ воды и пшена равен объему цилиндра, радиус которого $R$ и высота $H$, поэтому $V=\pi R^2H$; отношение объемов $V_2$ воды и $V_1$ пшена равно

$$V_2:V_1=(V-V_1):V_1=\left(\pi-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}-1\approx 3{,}7$$

и не зависит от количества пшена и размеров кастрюли. Итак, предполагая, что пшено полностью, без просветов, заполняет объем, мы решили оба пункта задачи.

**6.12.** Золота добавлять не придется.

Решение. Найдем объем колечка. По формуле $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx$, где $V$ — объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вокруг оси $Ox$, найдем искомый объем $V$ как разность объемов тела, образованного вращением криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant\sqrt{(R^2+H^2/4)-x^2}$, $-H/2\leqslant x\leqslant H/2$, и цилиндра, образованного вращением прямой $y=R$ вокруг оси $Ox$ (рис. 249). Итак,

$$V=\pi\int\limits_{-H/2}^{H/2}\left[\left(R^2+\frac{H^2}{4}\right)-x^2\right]dx-\pi\int\limits_{-H/2}^{H/2}R^2\,dx=2\pi\int\limits_0^{H/2}\left(\frac{H^2}{4}-x^2\right)dx=$$

$$=2\pi\left(\frac{H^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{H/2}=\frac{\pi H^3}{6}.$$

Таким образом, объем колечка не зависит от радиуса $R$, а зависит только от высоты $H$, поэтому ювелиру не придется добавлять золота.

**6.13.** а) $S=4/3$; б) $V=\pi/2$.

**Решение.** а) Ось абсцисс является осью данных парабол. Очевидно, из уравнений парабол получаем, что для первой из них $3y^2=1-x\geqslant 0$, поэтому $x\leqslant 1$; аналогично, для второй параболы имеем $x\leqslant 0$. Найдем дополнительно несколько точек графиков и построим его (рис. 250, *а*). Отразим симметрично полученные графики относительно прямой $y=x$. Мы получили графики функций $y=1-3x^2$ и $y=-2x^2$ (рис. 250, *б*). Из уравнения

$$1-3x^2=-2x^2$$

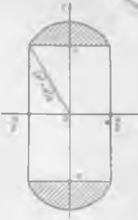


Рис. 250

найдем абсциссы точек пересечения полученных графиков: $x=\pm 1$. Воспользовавшись симметрией парабол относительно оси $Oy$, найдем площадь $S$ искомой фигуры (она равна площади фигуры, изображенной на рис. 250, *б*, симметричной ей относительно прямой $y=x$):

$$S=\int_{-1}^{1}[(1-3x^2)-(-2x^2)]\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$

б) Найдем абсциссу точек пересечения данных графиков (см. рис. 250, *а*) из системы уравнений $\begin{cases} x=1-3y^2, \\ x=-2y^2, \end{cases}$ имеем $x=-2$. Объем искомого тела можно найти как разность объемов тел, полученных в результате вращения вокруг оси $Ox$ двух криволинейных трапеций. Первая из трапеций образована частью параболы $x=1-3y^2$, расположенной над осью $Ox$, уравнением этого куска $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{3}}$, а также прямыми $x=-2$, $x=1$ и осью $Ox$. Вторая трапеция образована параболой $y=\sqrt{-\dfrac{x}{2}}$, прямыми $x=-2$, $x=0$ и осью $Ox$. Находим объем:

$$V=\pi\left[\int_{-2}^{1}\left(\frac{1-x}{3}\right)dx-\int_{-2}^{0}\left(-\frac{x}{2}\right)dx\right]=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{1}+\frac{x^2}{4}\Bigg|_{-2}^{0}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

**6.14.** а) $S=1$; б) $V=$ [illegible]

Рис 250

**Решение.** а) Поскольку $\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)=\cos x$, данная фигура — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$ (рис. 251). Найдем ее площадь:

$$S=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

б) Вычислим объем тела вращения:

$$V=\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\pi\left[\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx\right]$$

Для нахождения последнего интеграла можно сделать замену переменной по формуле $x=t/2$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\pi}=0.$$

**6.15.** $L=8/27\,(10\sqrt{10}-1)$.

**Решение.** Воспользуемся формулой $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, где $L$ — длина дуги кривой $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Так как $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, то $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$. Длина дуги

$$L=\int\limits_0^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx$$

После замены $1+\frac{9x}{4}=t$, т. е.

$x=\frac{4t-1}{9}$, получим

$$L=\int_1^{10}\sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt=\frac{4}{9}\int_1^{10}t^{1/2}\,dt=$$

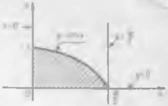


Рис. 251

$$=\frac{4}{9}\left.\frac{t^{3/2}}{3/2}\right|_1^{10}=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

**6.16.** а) $S=2a\sqrt{a}/3$; б) $V=\pi a^2/2$; в) $S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right]$.

Решение. а) Данная фигура заштрихована на рис. 252, *а*. Она ограничена сверху параболой $y=\sqrt{x}$. Найдем площадь фигуры:

$$S=\int_0^a\sqrt{x}\,dx=\left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^a=\frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

б) Находим объем тела вращения $V$:

$$V=\pi\int_0^a(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^a x\,dx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a=\frac{\pi a^2}{2}.$$

в) Пусть $b>0$. Найдем сначала площадь $S_b$ поверхности, полученной в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\sqrt{x}$, прямыми $x=b$, $x=a$, $y=0$ (рис. 252, *б*). Так как $y'=1/(2\sqrt{x})$, то $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+1/(4x)}$. Согласно формуле $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, где $S$ — площадь поверхности тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вокруг оси $Ox$, площадь рассматриваемой поверхности $S_b$ можно найти так:

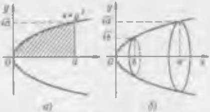



Рис. 252

Рис. 253

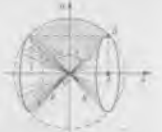


Рис. 254

$$S_b = 2\pi\int_b^a \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi\int_b^a \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = 2\pi\,\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_b^a =$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\left(b+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]$$

Устремив теперь $b$ к 0, получим

$$S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right].$$

**6.17.** $y_C=\dfrac{R\sin\alpha}{\alpha}$

**Решение.** Дуга симметрична относительно радиуса, проходящего через ее середину, поэтому центр тяжести лежит на этом радиусе. Введем систему координат, как показано на рис. 253; пусть дуга вращается вокруг оси $Ox$. При этом дуга опишет поверхность шарового пояса (см. пример 13, § 11), ее площадь равна $2\pi RH$, где $H$ — высота пояса, равная в данном случае длине хорды, стягивающей данную дугу; очевидно, $H=2R\sin\alpha$. Так как длина данной дуги равна $2R\alpha$, то, обозначив ординату центра тяжести через $y_C$, в силу первой теоремы Гульдена, получим

$$4\pi R^2\sin\alpha=2\pi y_C\cdot 2R\alpha,\ \text{откуда}\ y_C=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

**Замечание.** Из полученного ответа следует, что центр тяжести полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ находится в точке $(0;\,2R/\pi)$.

**6.18.** $y_C=\dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$

**Решение.** Введем систему координат, как показано на рис. 254.

В силу симметрии сектора относительно оси $Oy$, центр тяжести лежит на этой оси. Воспользуемся для решения задачи второй теоремой Гульдена. Найдем сначала объем тела, полученного в результате вращения данного сектора вокруг оси $Ox$. Уравнение

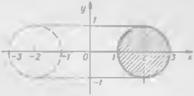



Рис. 255

дуги сектора $y=\sqrt{R^2-x^2}$, абсциссы ее концов, очевидно, равны $\pm R\sin\alpha$, а ординаты концов равны $R\cos\alpha$. Объем искомого тела будем искать как разность объемов шарового слоя, образованного в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной дугой $y=\sqrt{R^2-x^2}$, прямыми $x=\pm R\sin\alpha$ и осью $Ox$, и объемов двух одинаковых конусов, полученных при вращении концевых радиусов сектора (рис. 254):

$$V=\pi\int\limits_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha}(R^2-x^2)\,dx-2\cdot\frac{1}{3}\pi|AB|^2|OA|=2\pi\int\limits_{0}^{R\sin\alpha}(R^2-x^2)\,dx-$$

$$-\frac{2}{3}\pi R^2\cos^2\alpha\, R\sin\alpha=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{R\sin\alpha}-\frac{2\pi R^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\sin\alpha.$$

Так как площадь данного сектора равна $R^2\alpha$, то, обозначив ординату центра тяжести через $y_C$, в силу второй теоремы Гульдена, получим

$$\frac{4}{3}\pi R^3\sin\alpha=R^2\alpha\cdot 2\pi y_C,\quad \text{откуда}\quad y_C=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

Замечание. Из полученного ответа следует, что центр тяжести полукруга $0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$ находится в точке $(0;\ 4R/(3\pi))$.

**6.19.** а) $V=4\pi^2$; б) $S=8\pi^2$.

Решение. а) Воспользуемся второй теоремой Гульдена. Площадь данного круга равна $\pi$, центр его тяжести — точка $(2;\ 0)$ — описывает при вращении окружность длины $4\pi$, поэтому объем тора $V=\pi\cdot 4\pi=4\pi^2$.

б) Воспользуемся первой теоремой Гульдена. Найдем сначала площадь $S_1$ поверхности, образованной вращением «правой» полуокружности $x=2+\sqrt{1-y^2}$ вокруг оси $Oy$ (рис. 255). Так как длина этой полуокружности равна $\pi$, а ее центр тяжести — точка $(2+2/\pi;\ 0)$[1] — описывает окружность длины $2\pi(2+2/\pi)$ (рис. 255), то площадь

$$S_1=\pi\cdot 2\pi\left(2+\frac{2}{\pi}\right)=4\pi(\pi+1).$$

[1] См. замечание к задаче 6.17.

Аналогично находим площадь $S_2$ поверхности, образованной вращением «левой» полуокружности (ее центр тяжести точка $(2-2/\pi;\ 0)$): $S_2=4\pi(\pi-1)$. Таким образом, площадь поверхности заданного тора

$$S=S_1+S_2=8\pi^2.$$

**6.20.** $A=0{,}125$ кгм.

Решение. Найдем сначала значение коэффициента пропорциональности $K$. Так как, в силу условия задачи, при $x=0{,}01$ м $F(0{,}01)=1$ кг, т. е. $1=K\cdot 0{,}01$, то коэффициент пропорциональности $K=\frac{1}{0{,}01}=100$. Следовательно, сила, растягивающая пружину от $x=0$ до $x=0{,}05$ м, выражается формулой $F(x)=100\ x$. Согласно формуле $A=\int_a^b F(x)\,dx$, где $A$ — работа, совершаемая силой $F(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, искомую работу можно найти так:

$$A=\int_0^{0{,}05} F(x)\,dx=\int_0^{0{,}05} 100x\,dx=100\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}05}=100\frac{(0{,}05)^2}{2}=0{,}125 \text{ кгм}.$$

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абсолютная величина числа 19
Абсцисса 38
Аксиомы вещественных чисел 10—14
Аналитический способ задания функции 157
Аргумент 153
Арифметическая прогрессия 111
Асимптота 321
Асимптоты гиперболы 84, 85

Бесконечная производная 242, 243
Бесконечно большая последовательность 115
— — функция 200, 201
— малая последовательность 116
— — функция 198
Бесконечный предел 127, 200
— промежуток 15
*Бернулли Я.* 144
Биномиальные коэффициенты [illegible]
*Больцано Б.* 225
Большая ось эллипса 80

*Вейерштрасс К.* 228
Величина направленного отрезка 30
Вертикальная асимптота 321
Верхний предел интегрирования [illegible]

Верхняя грань множества 15
— — функции 155
Вершина параболы 93
Вершины гиперболы 86
— эллипса 80
Вещественные числа 8
Взаимно обратные функции 240
— однозначное соответствие 32
Возрастающая последовательность 141
— функция 239
Второй замечательный предел 196
Выпуклость вверх 317
— вниз 317

*Гейне Г.* 185
Геометрическая прогрессия 113
Гипербола 81, 82, 91
Горизонтальная асимптота 322
График 156
Графический способ задания функции 159
*Гульдин П.* 422

Действительная ось гиперболы 86
*Декарт Р.* 29
Деление отрезка в данном отношении 40—42, 98
δ-окрестность точки 33
Директриса параболы 91
Директрисы гиперболы 88
— эллипса 88
*Дирихле П.* 157
Дифференциал 253
— высшего порядка 283, 284
—, геометрический смысл 253, 254
— дуги 411
—, применение в приближенных вычислениях 254
— сложной функции 269, 270
Дифференцирование 250
— обратной функции 262
—, основные правила 255
— простейших элементарных функций 257—261, 263—265, 2[illegible]
— сложной функции 266
—, таблица производных 274, 275
— функции, заданной параметрически 287, 288
Дифференцируемая функция 249
Длина дуги кривой 406—409
— частичного отрезка 374
Дробно-рациональная функция 161, 214

Зависимая переменная 153
Знаменатель геометрической прогрессии 113
Значение функции 153

Инвариантность площадей относительно перемещений 399
— формы первого дифференциала 270
Интеграл с переменным верхним пределом 387
Интегральная сумма 374
Интегрирование 340
— непосредственное 345—347
— подстановкой 349—355, 357, 358
— по частям 358—365
— рациональных функций 366—372
Интегрируемая функция 375, 376
Интервал 15
Иррациональная функция 161
Иррациональные числа 9, 10

Каноническое уравнение гиперболы 83, 100
— — параболы 92—94, 100
— — эллипса 78, 79, 100
*Кантор Г.* 234
Касательная 244
Квадрант 38
Композиция функций 159
Конечная производная 243
Конечный предел 127
— промежуток 15
Координата точки 32
Координатная плоскость 37
— прямая 31
Координатный угол 38
*Коши О.* 185
Кратность корня 367
Криволинейная трапеция 396, 397
Криволинейный сектор 404
Критическая точка 319

*Лагранж Ж.* 292
Левая производная 248
Левый предел 185, 186
*Лейбниц Г.* 280
Линейная функция 161
Линия второго порядка 76
— первого порядка 56
Логарифмическая производная 271
— функция 160, 260, 261
Локальный максимум 211
— минимум 211
— экстремум 211
*Лопиталь Г.* 296

Малая ось эллипса 80
*Маклорен К.* 306
Максимальное значение функции 231
Мгновенная скорость 245, 246
Метод интегрирования по час-

тям 358—365, 395, 396
— координат 62—76
— неопределенных коэффициентов 367—369
— математической индукции 22, 23
— подстановки (замены переменной) 349—355, 357, 358, 392—394
Минимальное значение функции 231
Мнимая ось гиперболы 86
Многочлен 161, 213
— Тейлора 304
Множество 7
— значений функции 153
Модуль перехода 148
— числа 19
Монотонная последовательность 141
— функция 238

Наклонная асимптота 322, 323
Направленный отрезок 30
Натуральный логарифм 148
Начало координат 31, 37
Невозрастающая последовательность 141
— функция 238
Независимая переменная 153
Неограниченная последовательность 114
Неопределенный интеграл 340
— —, основные методы интегрирования 345—347, 349—354, 357—365
— —, свойства 342, 343
— —, таблица основных интегралов 344
Непрерывность вещественных чисел 11, 12, 33
— функции в интервале 216
— — — точке 209—211
— — — — слева, справа 210, 211
Неравенство 11
— Бернулли 144
Неубывающая последовательность 141
— функция 238
Нижний предел интегрирования [illegible]
Нижняя грань множества 15
— — функции 155
Номер общего элемента последовательности 106

Ньютон И. 26

Область определения функции 153
Обратная функция 159, 160
Обратные тригонометрические функции 160, 161, 264, 265
Общий элемент последовательности 106
Объем тела 415
— — вращения 417, 418
Ограниченная последовательность 114
— сверху, снизу последовательность 114
— —, — функция 154
— функция 154
Ограниченное множество 15
— сверху, снизу множество 15
Односторонние пределы 185, [illegible]
[illegible]
Определенный интеграл 375, 376
— —, геометрические приложения 396—418
— —, методы вычисления 392—396
— —, основные свойства 378, 379
— —, оценки 380, 381
— —, условия интегрируемости 383, 384
— —, физические приложения 419—428
Ордината 38
Основное тождество 31
Основной прямоугольник гиперболы 86
Оси гиперболы 86
— эллипса 80
Остаточный член в форме Лагранжа 305, 306
— — — — Пеано 306
Ось 29
— абсцисс 37
— ординат 37
— параболы 93
Отношение 40
Отображение 154
Отрезок 15, 31
Отрицательные числа 11

Парабола 91
Параметр 285
— параболы 91

Параметрическое задание функции 285
*Пеано Д.* 306
Первообразная 338
Первый замечательный предел 194
Переменная интегрирования 375
Площадь криволинейного сектора 404
— криволинейной трапеции 397, 402
— плоской фигуры 400
— поверхности вращения 411, 414, 415
— треугольника 39, 98
Подмножество 8
Подынтегральная функция 375
Показательная функция 160, 263, 264
Положительные числа 11
Полуинтервал 15
Полуоси эллипса 80
Полюс 42
Полярная ось 42
Полярные координаты точки 42
Полярный радиус 42
— угол 42
Последовательность 106
— вложенных отрезков 149
Постоянная 154, 213, 257
Правая производная 248
Правила построения графиков функций по уже известным графикам 162, 163, 165, 167, 168, 172—175
Правило Лопиталя 295—299
Правый предел 185, 186
Предел периметров длин ломаных 406
— последовательности 121, 122, 126
— функции при $x \to x_0$ 180, 182
$x \to \infty$, $x \to +\infty$,
$x \to -\infty$ 188, 189
Приращение аргумента 211
— функции 211
Произведение вещественных чисел 10
— последовательностей 110
— последовательности на число 110
Производная 242
— высшего порядка 276, 277
—, геометрический смысл 244, 245
—, физический смысл 246, 247
*См. также* Дифференцирование
Промежуток 15
Промежуточная переменная 159
Простейшие элементарные функции 160, 161
Прямоугольная система координат на плоскости 37
Прямоугольные координаты точки 37, 38
Пустое множество 8

Работа переменной силы 427
Равномерно непрерывная функция 232
Равносторонняя гипербола 86
Радикальная ось 69
Разложение рациональной функции на элементарные дроби 367, 368
элементарных функций по формуле Маклорена 306, 307
Разность арифметической прогрессии 111
— вещественных чисел 12
последовательностей 110
Раскрытие неопределенностей 206—209, 216—220, 296—303
Расстояние между двумя точками 36, 38, 98
— от точки до прямой 60, 99
Расходящаяся последовательность 121
Рациональная функция 161, 214
Рациональные числа 9, 10
Рекуррентная формула 365
Рекуррентный способ задания последовательности 108
*Ролль М.* 290

Сегмент 15
Сложная функция 159
Совпадающие множества 8
Сопряженные гиперболы 86
Спираль Архимеда 45, 46
Сравнение бесконечно малых 204
вещественных чисел 11
Среднее значение 383
Средняя скорость 246
Статические моменты 419, 421, 424
Стационарная точка 312
Степенная функция 160, 213, 257
Строго монотонная последовательность 141
функция 239

Строгое неравенство 11
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 131
— вещественных чисел 10
— последовательностей 110
— членов арифметической прогрессии 112
— — геометрической прогрессии 113
Суперпозиция функций 159
Схема исследования графика функции 325, 326
Сходящаяся последовательность 121

Таблица основных интегралов 344
— производных простейших элементарных функций 274, 275
Табличный интеграл 344
— способ задания функции 158, 159
*Тейлор Б.* 303
Теорема Больцано — Коши вторая 226
— — первая 225
— Вейерштрасса вторая 229, 230
— — первая 228, 229
— Гульдена вторая 425
— — первая 422
— Кантора 234—236
— Коши 294
— Лагранжа 292, 293
— Лопиталя 296, 297
— о вложенных отрезках 149, 150
— — квадратах расстояний 73
— — монотонности функции 310, 311
— — непрерывности обратной функции 239, 240
— — — сложной функции 223
— — производной интеграла с переменным верхним пределом 387, 388
— — — обратной функции 262, 263
— — — сложной функции 266, 267
— — связи между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями 117
— — среднем 382, 383
— — существовании точных граней у ограниченного множества 18
— — сходимости монотонной ограниченной последовательности 143
— об общем уравнении прямой 81, 86
— — устойчивости знака непрерывной функции 224, 225
— основная интегрального исчисления 389
— Ролля 290, 291
— Тейлора 303—305
— Ферма 289
Теоремы о бесконечно малых последовательностях 117—119
— — — — функциях 198, 199
— — дифференцируемых функциях 249—251, 255—257
— — методах вычисления определенных интегралов 392, 393, 395
— — направлении выпуклости и точках перегиба графика функции 317—319
— — непрерывных функциях 212, 223—226, 228—230, 234—236, 239, 240
— — первообразных 339, 340, 358
— — пределах последовательностей 128—132, 138, 139, 143, 149, 150
— — — функций 182—184, 186, 187, 191, 192
— — [illegible] 89—91
— об абсолютных величинах 20
— — интегрируемости функций 383—385
— — экстремумах 312—314
Тождество 44
Тор 431
Точка возможного экстремума 317
— локального максимума 311
— — минимума 311
— — экстремума 311
— множества 7
— перегиба 318
— разбиения 374
— разрыва 222
— — второго рода 222
— — первого рода 222
— числовой прямой 32
Точная верхняя грань множества 16, 18

— — — функции 227
— нижняя грань множества 16, 18
— — — функции 227
Трансцендентная функция 162
Тригонометрические функции 160, 214, 215, 258, 259

Убывающая последовательность 141
— функция 239
Угловой коэффициент 52
Угол между прямыми 58
наклона прямой к оси $Ox$ 52
Упорядоченное множество 8
Уравнение графика функции 156
— линии 44
— множества точек 44
— окружности 45, 47, 100
— прямой «в отрезках» 57, 99
— — неполное 56, 57
— — общее 56, 99
— —, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом 54, 99
— —, — — две данные точки 55, 99
— — с угловым коэффициентом 53
— — с двумя переменными 44
Условие параллельности прямых 58, 59, 99
— перпендикулярности прямых 90, 91

Факториал 24
*Ферма П.* 289
Фокальные радиусы точки 77, 82
Фокус параболы 91
Фокусы гиперболы 82
— эллипса 76
Формула бинома Ньютона 26
— замены переменной в неопределенном интеграле 349, 350
— — — — определенном интеграле 392, 393
— интегрирования по частям в неопределенном интеграле 358
— — — — — определенном интеграле 395
— Коши (обобщенная формула конечных приращений) 294
— Лагранжа (формула конечных приращений) 293
— Лейбница 279, 280, 282
— Маклорена 306
— Ньютона — Лейбница 389
— общего элемента последовательности 106
— среднего значения 382
— Тейлора 303, 305, 306
Функция 153
— Дирихле 157, 158
— $y = \operatorname{sgn} x$ 157
*См. также* соотв. названия

Целая рациональная функция 161
— часть числа 116
Центр гиперболы 86
— тяжести криволинейной трапеции 425
— — кривой 422
— — системы материальных точек 419, 420
— эллипса 80
Циклоида 402

Частное вещественных чисел 12
— последовательностей 110
Четверть 38
Числа Фибоначчи 109
Число $e$ 147, 310
Числовая последовательность 106
— прямая 32

Шаровой пояс 41[illegible]
— сегмент 430
— сектор 430
— слой 430

Эквивалентные бесконечно малые 204
Эксцентриситет гиперболы 86, 87
— эллипса 80, 81
Элемент множества 7
— последовательности 106
Элементарные множители 366
— функции 161
Эллипс 76, 91

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 3

*Глава 1.* **Вещественные числа** ... 7

§ 1. Множества и основные обозначения ... 7
§ 2. Вещественные числа и их основные свойства ... 9
§ 3. Наиболее употребительные числовые множества ... 14
§ 4. Грани числовых множеств ... 15
§ 5. Абсолютная величина числа ... 19
§ 6. Метод математической индукции ... 22
§ 7. Факториал и формула бинома Ньютона ... 24
1. Факториал (24). 2. Формула бинома Ньютона (25).
§ 8. Контрольные задачи ... 28

*Глава 2.* **Аналитическая геометрия на плоскости** ... 29

§ 1. Метод координат ... 29
1. Направленные отрезки и их величины. Основное тождество (29). 2. Координаты на прямой. Числовая прямая (31). 3. Прямоугольная (или декартова) система координат на плоскости (37). 4. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости (38). 5. Полярные координаты (42).
§ 2. Множества точек на плоскости и их уравнения ... 44
1. Определение уравнения линии (44). 2. Примеры на нахождение множеств точек (47).
§ 3. Прямые и линейные уравнения ... 52
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (52). 2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом (54). 3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (54). 4. Общее уравнение прямой (55). 5. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках» (56). 6. Угол между двумя прямыми (58). 7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (58). 8. Расстояние от точки до прямой (59). 9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (61). 10. Примеры решения геометрических задач методом координат (62).
§ 4. Линии второго порядка ... 76
1. Эллипс (76). 2. Гипербола (81). 3. Директрисы эллипса и гиперболы (88). 4. Парабола (91).
§ 5. Основные формулы и факты аналитической геометрии на плоскости ... 98
§ 6. Контрольные задачи ... 100

*Глава 3.* **Теория пределов** ... 105

§ 1. Числовые последовательности ... 105
1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Прогрессии (105). 2. Ограниченные и

неограниченные последовательности (114). 3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (115).
§ 2. Сходящиеся последовательности ........ 120
1. Понятие сходящейся последовательности (121). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (127). 3. Предельный переход в неравенствах (138).
§ 3. Монотонные последовательности ........ 141
1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей (141). 2. Число $e$ (146).
§ 4. Теорема о вложенных отрезках ........ 149
§ 5. Контрольные задачи ........ 151

*Глава 4.* **Функция** ........ 153

§ 1. Понятие функции ........ 153
1. Определение функции и основные понятия (153). 2. Способы задания функций (156). 3. Понятия сложной и обратной функций (159). 4. Классификация функций (160). 5. Построение графиков функций (162).
§ 2. Предел функции ........ 179
1. Предел функции при $x \to x_0$ (179). 2. Предел функции при $x \to x_{0-}$ и при $x \to x_{0+}$ (185). 3. Предел функции при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (188).
§ 3. Теоремы о пределах функций ........ 191
§ 4. Два замечательных предела ........ 194
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел) (194).
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (второй замечательный предел (196).
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции ........ 198
1. Бесконечно малые функции (198). 2. Бесконечно большие функции (200).
§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций ........ 203
§ 7. Вычисление пределов функции ........ 206
§ 8. Понятие непрерывности функции ........ 209
1. Определение непрерывности функции (209). 2. Арифметические действия над непрерывными функциями (212).
§ 9. Непрерывность некоторых элементарных функций ........ 213
1. Непрерывность рациональных функций (213). 2. Непрерывность тригонометрических функций (214). 3. Непрерывность функции $f(x)=|x|$ (215). 4. Продолжение вычисления пределов функций (216).
§ 10. Определение и классификация точек разрыва функции . 222
§ 11. Теорема о непрерывности сложной функции ........ 223
§ 12. Основные свойства непрерывных функций ........ 224
1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (224). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (225). 3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (227). 4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней (229). 5. Понятие равномерной непрерывности функции (231). 6. Теорема о равномерной непрерывности функции (234).
§ 13. Теорема о непрерывности обратной функции ........ 238

*Глава 5.* **Дифференциальное исчисление** ........ 242

§ 1. Понятие производной ........ 242
1. Определение производной (242). 2. Геометрический смысл производной (244). 3. Физический смысл производной (246). 4. Правая и левая производные (248).

§ 2. Понятие дифференцируемости функции ........ 249
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (249). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности (251).

§ 3. Понятие дифференциала ........ 252
1. Определение и геометрический смысл дифференциала (252). 2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (254).

§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного ........ 255

§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции ........ 257
1. Производная постоянной функции (257). 2. Производная степенной функции (257). 3. Производные тригонометрических функций (258). 4. Производная логарифмической функции (260).

§ 6. Теорема о производной обратной функции ........ 262

§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций ........ 263
1. Производная показательной функции (263). 2. Производные обратных тригонометрических функций (264).

§ 8. Правило дифференцирования сложной функции. Дифференциал сложной функции ........ 266
1. Правило дифференцирования сложной функции (266). 2. Дифференциал сложной функции (269).

§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций ........ 270
1. Понятие логарифмической производной функции (270). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (272). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (274).

§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков ........ 276
1. Понятие производной $n$-го порядка (276). 2. $n$-е производные некоторых функций (277). 3. Формула Лейбница для $n$-й производной произведения двух функций (279). 4. Дифференциалы высших порядков (283).

§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование ........ 285
1. Параметрическое задание функции (285). 2. Дифференцирование функции, заданной параметрически (287).

§ 12. Основные теоремы дифференциального исчисления ........ 289

§ 13. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя ........ 295
1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (296). 2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (299). 3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие (300).

§ 14. Формула Тейлора ... 303
1. Формула Тейлора (303). 2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена (305). 3. Формула Маклорена (306). 4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (306). 5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов (308). 6. Вычисление числа e (309).
§ 15. Исследование поведения функций и построение графика ... 310
1. Признак монотонности функции (310). 2. Отыскание точек локального экстремума функции (311). 3. Задачи на максимум и минимум (314). 4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции (317). 5. Асимптоты графика функции (321). 6. Схема исследования графика функции (325).
§ 16. Контрольные задачи ... 336

*Глава 6.* **Интегральное исчисление** ... 338

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл ... 338
1. Понятие первообразной функции (338). 2. Неопределенный интеграл (340).
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла ... 342
§ 3. Таблица основных интегралов ... 343
§ 4. Основные методы интегрирования ... 345
1. Непосредственное интегрирование (345). 2. Метод подстановки (349). 3. Метод интегрирования по частям (358).
§ 5. Интегрирование рациональных функций ... 366
§ 6. Определенный интеграл ... 374
1. Определение определенного интеграла (374). 2. Основные свойства определенного интеграла (378). 3. Оценки интегралов. Формула среднего значения (380). 4. Условия существования определенного интеграла (383).
§ 7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом ... 386
§ 8. Формула Ньютона — Лейбница ... 388
§ 9. Замена переменной в определенном интеграле ... 392
§ 10. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле ... 395
§ 11. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла ... 396
1. Площадь криволинейной трапеции (396). 2. Площадь криволинейного сектора (404). 3. Длина дуги кривой (406). 4. Площадь поверхности вращения (411). 5. Объем тела (415). 6. Центр тяжести кривой и криволинейной трапеции (419). 7. Работа переменной силы (427).
§ 12. Контрольные задачи ... 429

Ответы, решения, указания к контрольным задачам ... 432
Предметный указатель ... 470

*Учебное издание*

**Шипачев Виктор Семенович**

ОСНОВЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор Ж. И. Яковлева. Мл. редакторы: Н. П. Майкова, Г. В. Витоха. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 7225

Изд. № ФМ—922. Сдано в набор 06.10.88. Подп. в печать 05.06.89. Формат 84×108/32. Бум. кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 25,2 усл. печ. л. 25,2 усл. кр.-отт. 23,97 уч.-изд. л. Тираж 100 000 экз. Зак. № 558. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28.