Ортогональные многочлены по двум переменным

П. К. СУЕТИН

П. К. СУЕТИН

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ПО ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.161.1
С89
УДК 517.58

Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988.— 384 с.
ISBN 5-02-13757-X

Излагаются основные свойства ортогональных многочленов по двум действительным переменным и свойства рядов Фурье по этим многочленам. Рассматриваются различные двумерные аналоги и обобщения классических ортогональных многочленов одного переменного, являющиеся собственными функциями линейных дифференциальных операторов в частных производных второго порядка. Приводятся известные классические результаты, а также новые свойства ортогональных многочленов двух переменных, полученные в последнее время.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по математическому анализу, вычислительной и прикладной математике.

Ил. 5. Библ. 127 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *Б. И. Голубов*

С $\frac{1702050000-142}{053(02)-88}$ 46-88

ISBN 5-02-13757-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория ортогональных многочленов в своем развитии к настоящему времени достигла значительного совершенства. Многие результаты этой теории имеют законченный характер. Подробно исследованы свойства ортогональных многочленов различных типов при достаточно общих условиях. Полностью изучены наиболее важные и характерные классы ортогональных многочленов. Имеется немало работ по теории ортогональных многочленов, отличающихся оригинальностью и глубиной исследований. Кроме того, постоянно расширяется множество теоретических и прикладных вопросов, при решении которых используются ортогональные многочлены.

Как известно, первые примеры классических ортогональных многочленов рассмотрели А. Лежандр, П. Лаплас, Ж. Лагранж, Н. Абель. Затем великий русский математик П. Л. Чебышев разработал общую теорию ортогональных многочленов и исследовал важные частные случаи классических ортогональных многочленов. Дальнейшие, наиболее важные результаты по теории ортогональных многочленов получили Т. Стилтьес, К. Якоби, Ш. Эрмит, Э. Лагерр, К. А. Поссе, Ю. В. Сохоцкий.

В. А. Стеклов разработал эффективный метод исследования асимптотических свойств классических ортогональных многочленов. С помощью этого метода подробно изучены асимптотические свойства многочленов Якоби, Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

Классические результаты в теории ортогональных многочленов получил Г. Сеге. Он открыл новый метод исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на окружности с произвольным весом. С помощью этого метода Г. Сеге получил асимптотические формулы для ортогональных многочленов вне окружности и на самой окружности. Далее, Г. Сеге нашел формулу представления многочленов, ортогональных на сегменте, через многочлены, ортогональные на окружности. С помощью этой формулы были подробно исследованы асимптотические свойства многочленов, ортогональных на сегменте.

С. Н. Бернштейн разработал еще один метод исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на сегменте. Этот метод основан на результатах теории приближения функций.

Методы В. А. Стеклова, Г. Сеге и С. Н. Бернштейна излагаются в монографии Г. Сеге [II.21], впервые изданной в 1939 г. Русский перевод этой книги Г. Сеге, вышедший в 1962 г., содержит дополнения Я. Л. Геронимуса, в которых дается подробный обзор всех результатов по теории ортогональных многочленов, полученных примерно за 20 лет. Монография Я. Л. Геронимуса [II.8] посвящена развитию методов Г. Сеге и С. Н. Бернштейна.

В комплексной области Г. Сеге ввел многочлены, ортогональные по контуру, и с помощью своего метода рассмотрел их асимптотические свойства при простейших условиях. Далее, Т. Карлеман и С. Бергман почти одновременно ввели комплексные многочлены, ортогональные по области.

Весьма важные результаты по теории ортогональных многочленов получены в работах Е. А. Рахманова [VI.24—26]. В этих работах приводятся сложные контрпримеры в связи с известной проблемой В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов [IV.10] и излагаются различные оценки для ортогональных многочленов при наиболее общих условиях на весовую функцию.

В работах В. М. Бадкова [VI.2—4] глубоко исследованы асимптотические свойства ортогональных многочленов при степенных и логарифмических особенностях весовой функции.

Хорошо известны многочисленные применения классических ортогональных многочленов в вычислительной математике, математической физике, в квантовой механике и во многих других областях науки. В настоящее время эти применения значительно расширяются и усиливаются. В качестве примера можно указать операционное исчисление [II.2, 3] и различные задачи вычислительной математики [II.20]. Но наиболее существенное применение классические ортогональные многочлены находят в спектральных методах расчета и проектирования систем автоматического управления [II.22].

В библиографическом справочнике по теории ортогональных многочленов [III.6], изданном в 1940 г., приводится примерно 2000 работ. Дальнейшие списки работ, а также исторические сведения имеются в монографиях [II.7, 8, 16, 23, 24; III.4, 5].

В последние годы постоянно возрастает число работ по теории ортогональных многочленов и их применениям. Эти работы и результаты в них становятся необозримыми.

Все сказанное выше относится только к случаю ортогональности по одному переменному. А в случае двух и более переменных ортогональные многочлены изучены значительно меньше, хотя основные определения и простейшие свойства их были рассмотрены более 100 лет назад.

При обобщении классических ортогональных многочленов на случаи двух и более переменных возникает необходимость рассматривать так называемые биортогональные системы многочленов.

В 1865 г. Ш. Эрмит рассмотрел две пары биортогональных систем многочленов по двум переменным, когда областями ортогональности являются вся плоскость или единичный круг. Позже эти многочлены Эрмита были обобщены на случай многих переменных.

В 1881 г. П. Аппель ввел многочлены по двум переменным, биортогональные по треугольнику.

Многочлены Эрмита и Аппеля являются аналогами и обобщениями классических ортогональных многочленов на случай двух и более переменных, ибо эти многочлены являются собственными функциями некоторых линейных дифференциальных операторов в частных производных второго порядка.

В 1881 г. Г. Орлов [II.19] рассмотрел некоторые ортогональные многочлены по двум переменным, которые определяются аналогом формулы Родрига.

В 1926 г. вышла большая монография П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1], в которой подробно излагаются свойства многочленов Аппеля двух переменных и многочленов Эрмита по многим переменным. При этом основным аппаратом исследования являются обобщенные гипергеометрические функции двух и более переменных.

В 1938 г. Д. Джексон [VII.9] рассмотрел простейшие свойства многочленов двух переменных, ортогональных по области с произвольным весом. При этом оказалось, что весовая функция и область ортогональности при каждом натуральном n определяют некоторое пространство размерности $n+1$ ортогональных многочленов степени n. Для таких многочленов установлены аналогичные одномерному случаю алгебраические и экстремальные свойства, а также рассмотрены ряды Фурье по ним.

Подробный обзор всех вышеупомянутых результатов по теории ортогональных многочленов двух и более переменных содержится в монографии-справочнике Г. Бейтмена и А. Эрдейи [I.2]. В библиографическом справочнике [III.6] приводятся все работы по теории ортогональных многочленов двух и более переменных, опубликованные до 1940 г.

В 1967 г. вышла очень содержательная работа Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18]. В этой работе были усилены и обобщены результаты Д. Джексона о многочленах двух переменных, ортогональных по области. Кроме того, рассмотрены некоторые линейные дифференциальные операторы в частных производных второго порядка, собственными функциями которых являются ортогональные по области многочлены. В связи с этим можно сказать, что Г. Кролл и И. Шеффер рассмотрели некоторые двумерные аналоги классических ортогональных многочленов, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Аналогичные результаты получил Г. К. Энгелис [VI.35], но он применил другой метод исследования и привел более подробный перечень линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, решениями которых являются ортогональные многочлены двух переменных. Кроме того, Г. К. Энгелис вывел формулу Родрига для некоторых классов ортогональных многочленов двух переменных.

Весьма существенные результаты по теории ортогональных многочленов двух переменных получены в работах Т. Корнвиндера, указанных в списке литературы. В этих работах рассматриваются новые системы ортогональных многочленов, устанавливаются новые свойства известных систем ортогональных многочленов, большое внимание уделяется связям ортогональных многочленов с дифференциальными уравнениями. Некоторые работы Т. Корнвиндера носят обзорный характер, в них анализируются и результаты других авторов, описываются применения ортогональных многочленов двух переменных и приводятся подробные списки литературы.

Как известно [II.15], ортогональные многочлены по одному переменному являются незаменимым аппаратом при конструировании квадратурных формул различных типов. Аналогичная ситуация имеет место и в случае ортогональности по двум и более переменным. А поскольку в настоящее время потребность в кубатурных формулах возрастает, то при конструировании таких формул изучаются и необходимые свойства ортогональных многочленов двух и более переменных. На эту тему много работ опубликовал И. П. Мысовских. Все результаты этого направления изложены в очень содержательной монографии И. П. Мысовских [II.16]. В этой монографии рассматриваются наиболее важные с вычислительной точки зрения кубатурные формулы и при этом излагаются необходимые свойства ортогональных многочленов по двум и более переменным. Анализ содержания монографии И. П. Мысовских показывает, что применение ортогональных многочленов при построении кубатурных формул опережает и стимулирует развитие самой теории ортогональных многочленов двух и более переменных.

Вместе с тем следует заметить, что, в то время как ортогональные многочлены одного переменного уже имеют многочисленные и разнообразные применения во многих областях науки, теория ортогональных многочленов двух и более переменных применяется еще недостаточно широко. Видимо, в этом направлении можно ожидать дальнейших результатов.

Из сказанного выше следует, что по теории ортогональных многочленов двух переменных к настоящему времени получено много важных результатов. Большинство из них опубликовано в отдельных статьях. Систематическое изложение некоторых вопросов имеется только в монографиях П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1] и И. П. Мысовских [II.16]. Поэтому представляется целесообразным изложить наиболее важные свойства ортогональных многочленов двух переменных в отдельной монографии.

Основным содержанием первых двух глав настоящей монографии являются результаты, которые получили Д. Джексон [VII.9], С. А. Агаханов [VI.1], С. Огава, С. Ариока и С. Кида [VII.23].

Глава III написана по монографии П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1].

Большое внимание в настоящей монографии уделяется связи ортогональных многочленов двух переменных с дифференциальными уравнениями. Этому вопросу посвящены гл. IV, V и IX. Как уже отмечалось, в некоторых случаях ортогональные многочлены двух переменных являются собственными функциями линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Такие уравнения называются допустимыми. Условия допустимости и некоторую классификацию допустимых уравнений впервые рассмотрели Г. Кролл и И. Шеффер [VII.17]. Другую классификацию допустимых уравнений дал Г. К. Энгелис [VI.35].

Глава IV написана по результатам Г. К. Энгелиса. При этом многие формулировки изменены и приведена новая классификация допустимых уравнений, содержащая все ранее известные уравнения, а также и некоторые новые.

Глава V написана по работе Г. К. Энгелиса [VI.35].

Некоторые результаты гл. VI и VII являются новыми и публикуются впервые. В конце этих глав излагаются результаты А. А. Цыганкова [VI.30—32] о суперортогональных гармонических многочленах, причем все формулировки изменены.

Вся гл. VIII и три первых параграфа гл. IX написаны по работе Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18], причем многие формулировки изменены и усилены. В § 4 гл. IX излагается один важный результат С. А. Агаханова [VI.1], а в § 5 той же главы — результат Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18].

В гл. X излагаются некоторые результаты из работ Т. Корнвиндера [V.4; VII.12—14].

Поскольку при изложении результатов других авторов многие формулировки и доказательства изменены, то все упомянутые авторы, приоритет которых является бесспорным, не несут ответственности за то изложение их результатов, которое принято в настоящей монографии. С другой стороны, автор надеется, что допустил не слишком много упущений как в смысле подбора, изложения и обзора результатов, так и при составлении списка литературы.

Для чтения настоящей монографии необходимо знание основных свойств ортогональных многочленов одного переменного, например, по одной из монографий [II.21, 24; III.4]. Кроме того, в изложении используются основные понятия и методы из теории функций действительного переменного [I.4, 9], из теории функций комплексного переменного [I.5, 6], а также из теории дифференциальных уравнений [I.3, 7, 12].

Автор выражает глубокую благодарность профессору Б. И. Голубову и аспиранту А. Д. Шишкину за внимательный просмотр рукописи, подробное обсуждение многих результатов и за ряд ценных замечаний по тексту.

Схема зависимости глав

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{T_n(x)\}$ — многочлены Чебышева первого рода.
$\{U_n(x)\}$ — многочлены Чебышева второго рода.
$\{P_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$ — ортогональные многочлены Якоби.
$\{H_n(x)\}$ — ортогональные многочлены Чебышева — Эрмита.
$\{L_n(x;\ \alpha)\}$ — ортогональные многочлены Чебышева — Лагерра.
Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая.
G — внутренность кривой Γ.
D — внешность кривой Γ.
$h(x,\ y)$ — весовая функция в области G (дифференциальный вес).
$dF(x,\ y)$ — интегральная весовая функция в области G.
$\{F_{nk}(x,\ y)\}$ — основные ортонормированные многочлены.
$\{F_{nk}(x,\ y)\}$ — основные ортогональные многочлены с единичным главным коэффициентом.
$\{\Phi_{nk}(x,\ y)\}$ — монические ортогональные многочлены.
$\{\tilde{\Phi}_{nk}(x,\ y)\}$ — монические ортогональные многочлены с единичным главным коэффициентом.
$\{A_{nk}(x,\ y)\}$ — классические многочлены Аппеля.
$\{\tilde{A}_{nk}(x,\ y)\}$ — основные ортогональные многочлены Аппеля.
$(n,\ k)$ — порядок алгебраического многочлена $P_{nk}(x,\ y)$.
$\{h_{nk}\}$ — степенные моменты весовой функции $h(x,\ y)$ по области G.
$\{\Delta_{nk}\}$ — определители Грама системы одночленов $\{x^\mu y^\nu\}$ с весом $h(x,\ y)$ по области G.
$\{C_n^k\}$ — биномиальные коэффициенты.
W_n — пространство многочленов степени n, ортогональных с весом $h(x,\ y)$ по области G.
W_{nk} — множество многочленов порядка $(n,\ k)$.
$\tilde{W}_{nk}$ — множество многочленов порядка $(n,\ k)$ с единичным главным коэффициентом.
$\{a_{nk}(f)\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x,\ y)$ по ортогональным многочленам двух переменных.
$\{S_{nk}(x,\ y)\}$ — частичные суммы ряда Фурье по ортогональным многочленам двух переменных.
$\Gamma(p)$ — гамма-функция Эйлера.
$\mathrm{B}(p,\ q)$ — бета-функция.
$\mathrm{Lip}\,\alpha$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица.
$(a)_n$ — символ Похгаммера, означающий произведение n чисел $a(a+1)(a+2)\ \ldots\ (a+n-1)$.

$C(p, \alpha)$ — некоторый класс кратно гладких кривых (гл. VI, § 4).

$w = \varphi(z)$ — функция, отображающая конформно и однолистно область G на круг $|w| < 1$ при условиях $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$.

$z = \psi(w)$ — обратная функция к функции $w = \varphi(z)$.

$w = \Phi(z)$ — функция, отображающая конформно и однолистно область D на область $|w| > 1$ при условиях $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) = \gamma > 0$.

$L_2(h, G)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом по области G с весом $h(x, y)$.

$\|f\|_G$ — норма функции $f(x, y)$ в пространстве $L_2(h, G)$.

$(P; Q)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(h, G)$.

$L_2(h, \Gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом па контуре Γ с весом $h(x, y)$.

$\|f\|_\Gamma$ — норма функции $f(x, y)$ в пространстве $L_2(h, \Gamma)$.

$H_2(h, G)$ — пространство гармонических функций, суммируемых с квадратом по области G с весом $h(x, y)$.

$E_n(f, G)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x, y)$ в замкнутой области $\bar{G}$ многочленами степени не выше n.

$E_n^{(2)}(f, G)$ — наилучшее приближение функции $f(x, y)$ многочленами степени не выше n в метрике пространства $L_2(h, G)$.

$D_1 = D_x$ — частная производная по x.

$D_2 = D_y$ — частная производная по y.

$D[u]$ — основной линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка (гл. IV, § 1).

$\{\lambda_n\}$ — собственные значения оператора $D[u]$.

$\alpha(x, y)$ — характеристический многочлен оператора $D[u]$.

$F(x; a, b, \alpha)$ — гипергеометрическая функция одного переменного.

$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta)$ — гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных.

$\Phi(x, y; z, w)$ — обобщенная производящая функция монических ортогональных многочленов.

$\{P_{nk}(z, \bar{z})\}$ — ортогональные многочлены по двум сопряженным комплексным переменным.

$\{T_{nk}(z, \bar{z})\}$ — многочлены Чебышева первого рода по двум сопряженным комплексным переменным для области Штейнера.

$\{U_{nk}(z, \bar{z})\}$ — многочлены Чебышева второго рода по двум сопряженным комплексным переменным для области Штейнера.

$\{F_{nk}(u, v; \alpha, \beta, \gamma)\}$ — ортогональные многочлены по области, ограниченной двумя прямыми и параболой.

$K_{nm}(x, y; u, v)$ — частичная сумма билинейного ряда по ортогональным многочленам двух переменных.

Γ_R — прообраз окружности $|w| = R > 1$ при отображении $w = \Phi(z)$.

Глава I

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ОБЛАСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. Ортогональные по области многочлены двух переменных

При рассмотрении алгебраических многочленов по двум переменным x и y прежде всего необходимо упорядочить множество одночленов, составленных из произведений степеней этих независимых переменных, т. е. множество одночленов вида $\{x^n y^k\}$. Обычно принимается так называемое лексикографическое упорядочение, при котором рассматриваемые одночлены располагаются в виде последовательности

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n, \ldots \tag{1}$$

При таком упорядочении одночлены разбиваются на пачки вида

$$x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n. \tag{2}$$

Каждая пачка (2) содержит $n+1$ одночленов одной и той же степени n по совокупности переменных x и y. При этом сначала выписывается полная степень переменного x, а затем степень этого переменного понижается с повышением степени y. Разумеется, можно принять и другое упорядочение, например, поменять местами x и y в системах (1) и (2). Однако упорядочение (1) и (2) предпочтительнее, ибо при введении комплексного переменного получается формула $z = x + iy$.

Последовательность (1) для лучшей обозримости целесообразно представить в виде бесконечной треугольной таблицы:

$$\begin{array}{l}
1, \\
x,\ y, \\
x^2,\ xy,\ y^2, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
x^n,\ x^{n-1}y,\ \ldots,\ xy^{n-1},\ y^n, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .
\end{array} \tag{3}$$

В этой таблице строки составлены из пачек одночленов вида (2). Конечно, при необходимости можно считать, что в таблице (3) одночлены упорядочены так же, как в последовательности (1). Таблицу (3) для краткости можно записать в виде

$$\{x^{n-k}y^k\}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

Далее, пусть дана таблица действительных чисел

$$\begin{array}{l} c_{00}, \\ c_{10},\ c_{11}, \\ c_{20},\ c_{21},\ c_{22}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n0},\ c_{n1},\ \ldots,\ c_{n,\,n-1},\ c_{nn}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{5}$$

В этой таблице у каждого числа первый номер означает номер пачки, а второй номер — место расположения числа в данной пачке, причем и пачки, и числа в них нумеруются, начиная с числа 0. Таблицу (5) можно, конечно, записать в виде (4).

Умножим теперь число c_{ms} на одночлен $x^{m-s}y^s$ и сложим полученные произведения, начиная с номеров 0 и 0 до номеров n и k. В результате получим алгебраический многочлен по двум переменным

$$P_{nk}(x,\ y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}c_{ms}x^{m-s}y^s+\sum_{s=0}^{k}c_{ns}x^{n-s}y^s. \tag{6}$$

В этой формуле номер n означает номер последней пачки в таблице (3), из которой берутся однородные многочлены наивысшей степени, а номер k означает наивысшую степень переменного y из последней пачки. Таким образом, номер n в формуле (6) означает степень многочлена по совокупности переменных x и y. При этом очевидно, что степень y в формуле (6) может оказаться больше, чем k.

В формуле (6) вторая сумма содержит однородные одночлены степени n относительно совокупности переменных. Таким образом, многочлен (6) имеет старшие коэффициенты

$$c_{n0},\ c_{n1},\ \ldots,\ c_{n,\,k-1},\ c_{nk}. \tag{7}$$

Последний из этих коэффициентов, т. е. число c_{nk} будем называть *главным коэффициентом* многочлена (6). Естественно считать, что главный коэффициент многочлена отличен от нуля. В этом случае для краткости будем говорить, что многочлен (6) имеет порядок (n, k). Разумеется, некоторые из коэффициентов (7), кроме главного, могут обращаться в нуль.

Подсчитаем число слагаемых в многочлене (6). Прежде всего заметим, что первая (двойная) сумма соответствует первым n пачкам таблицы (3), считая и пачку с номером 0. Следовательно, в двойной сумме содержится не более $0{,}5n(n+1)$ слагаемых. А из пачки с номером n в многочлен (6) берется $k+1$ одночленов старшей степени. Таким образом, число слагаемых в многочлене (6) не превосходит числа

$$N(n, k) = \frac{n(n+1)}{2} + k + 1. \tag{8}$$

А если многочлен (6) содержит все одночлены из пачки с номером n, т. е. $k = n$, то из формулы (8) находим

$$N(n, n) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Лемма 1. *Пусть в системе многочленов*

$$\begin{array}{l} P_{00}(x, y), \\ P_{10}(x, y), \quad P_{11}(x, y), \\ P_{20}(x, y),\ P_{21}(x, y),\ P_{22}(x, y), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{n0}(x, y),\ P_{n1}(x, y),\ \ldots,\ P_{n,k-1}(x, y),\ P_{nk}(x, y) \end{array} \tag{9}$$

порядка не выше (n, k) каждый многочлен имеет отличный от нуля главный коэффициент. Тогда любой многочлен $Q_{nk}(x, y)$ порядка (n, k) единственным образом представляется в виде

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k} a_{ns} P_{ns}(x, y). \tag{10}$$

Доказательство. Аналогично формуле (6) для данного многочлена $Q_{nk}(x, y)$ вводим разложение

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} b_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{k} b_{ns} x^{n-s} y^s. \tag{11}$$

Далее, все многочлены (9) представляем по формуле (6), и при этом вводим верхние индексы у коэффициентов. Тогда, сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах в формулах (10) и (11), получим равенства

$$
\begin{aligned}
&b_{nk} = a_{nk}c_{nk}^{(n,k)},\\
&b_{n,k-1} = a_{nk}c_{n,k-1}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{n,k-1}^{(n,k-1)},\\
&b_{n,k-2} = a_{nk}c_{n,k-2}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{n,k-2}^{(n,k-1)} + a_{n,k-2}c_{n,k-2}^{(n,k-2)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{00} = a_{nk}c_{00}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{00}^{(n,k-1)} + \ldots + a_{00}c_{00}^{(0,0)}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов $\{a_{ms}\}$ получена треугольная линейная система N уравнений, где N определяется по формуле (8). Определитель системы (12) равен произведению всех главных коэффициентов $\{c_{ms}^{(m,s)}\}$ многочленов (9). Поскольку все эти главные коэффициенты отличны от нуля, то система (12) имеет единственное решение. Лемма доказана.

Иногда возникает необходимость рассматривать многочлены, у которых главный коэффициент равен 1. В этом случае применяется обозначение $\tilde{Q}_{nk}(x, y)$, т. е. имеем

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} c_{ms}x^{m-s}y^{s} + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns}x^{n-s}y^{s} + x^{n-k}y^{k}. \tag{13}$$

Переходим к определению многочленов двух переменных, ортогональных по области.

Пусть на плоскости xOy дана конечная односвязная область G, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ. Неотрицательная функция $h(x, y)$ называется весовой функцией в области G или просто весом, если она суммируема по области G и не эквивалентна нулю, т. е. выполняются условия

$$0 < \iint_G h(x, y)\,dx\,dy < \infty. \tag{14}$$

В этом случае конечны интегралы

$$h_{nk} = \iint_G h(x, y)\,x^{n-k}y^{k}\,dx\,dy, \tag{15}$$

которые называются *степенными моментами* весовой функции $h(x, y)$.

Далее, пусть дана система алгебраических многочленов

$$
\begin{array}{l}
F_{00}(x,\ y),\\
F_{10}(x,\ y),\ F_{11}(x,\ y),\\
F_{20}(x,\ y),\ F_{21}(x,\ y),\ F_{22}(x,\ y),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_{n0}(x,\ y),\ F_{n1}(x,\ y),\ \ldots,\ F_{nn}(x,\ y),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\tag{16}
$$

Эта система многочленов называется *ортонормированной по области G с весом $h(x, y)$*, если выполняются условия:

1. Главный коэффициент c_{nk} каждого многочлена $F_{nk}(x, y)$ положителен.

2. Многочлены (16) удовлетворяют условию ортонормированности с весом $h(x, y)$ по области G, т. е.

$$\iint\limits_G h(x, y)\, F_{nk}(x, y)\, F_{ms}(x, y)\, dx\, dy = \delta_{nm}\delta_{ks}. \tag{17}$$

Так как $h(x, y)$ есть весовая функция, то можно ввести *функциональное пространство* $L_2(h, G)$, в котором скалярное произведение определяется по формуле

$$(f;\ \varphi) = \iint\limits_G h(x, y)\, f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{18}$$

Тогда условие ортонормированности (17) представляется в виде

$$(F_{nk};\ F_{ms}) = \delta_{nm}\delta_{ks}.$$

Далее, наряду с многочленами $\{F_{nk}(x, y)\}$, ортонормированными по области G с весовой функцией $h(x, y)$, часто рассматриваются ортогональные с тем же весом многочлены, у каждого из которых главный коэффициент равен 1. Для таких многочленов аналогично формуле (13) применяется обозначение $\{\tilde{F}_{nk}(x, y)\}$ и имеет место равенство

$$\tilde{F}_{nk}(x, y) = \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y). \tag{19}$$

Рассмотрим несколько замечаний по поводу определения весовой функции. Прежде всего, в определении этой функции можно опустить условия ограниченности области G и спрямляемости контура Γ. В самом деле, предположим, что область G не ограничена, а кривая Γ

не спрямляема. Тогда в определение весовой функции, кроме двух условий (14), необходимо включить условие существования всех интегралов вида (15). Кроме того, естественно предположить, что весовая функция $h(x, y)$ не обращается в нуль тождественно ни в какой подобласти G, ибо в противном случае это может изменить конфигурацию области ортогональности.

Далее, весовая функция $h(x, y)$ в формуле (17) часто называется *дифференциальным весом*. Но наряду с этим иногда рассматривается так называемый *интегральный вес*, который определяется следующим образом. Пусть в области G определена функция $F(x, y)$ двух переменных x и y с ограниченным изменением. Предположим, что для любых четырех точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_1)$, $M_3(x_2, y_2)$, $M_4(x_1, y_2)$ при условиях $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$ выполняется неравенство

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geqslant 0.$$

Тогда, если область G конечна и выполняются условия

$$0 < \iint_G dF(x, y) < \infty, \tag{20}$$

то функция $F(x, y)$ называется *интегральной весовой функцией* или просто *интегральным весом* в области G. А если область G не ограничена, то от функции $F(x, y)$ дополнительно требуется, чтобы были конечны все моменты

$$h_{nk} = \iint_G x^{n-k} y^k dF(x, y). \tag{21}$$

В случае интегрального веса условие ортонормированности имеет вид

$$\iint_G F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y)\, dF(x, y) = \delta_{nm}\delta_{ks}. \tag{22}$$

В настоящей главе ортогональные многочлены по двум переменным рассматриваются только в случае дифференциального веса, но почти все формулировки и доказательства очевидным образом переносятся и на случай интегрального веса. В этом случае интегралы в формулах (20) и (21) можно рассматривать при условии, что неубывающая функция $F(x, y)$ имеет ограниченную вариацию, например, в смысле Витали [1.9].

Ортогональные многочлены, удовлетворяющие условиям (17) или (22), иногда называются *многочленами, ортогональными по площади области* G. Но обычно для краткости их называют *многочленами, ортогональными по области*.

§ 2. Теорема существования и критерии ортогональности

В настоящем параграфе доказывается основная теорема о существовании и единственности системы ортонормированных многочленов $\{F_{nk}(x, y)\}$, приводятся два критерия ортогональности и рассматриваются простейшие свойства этих многочленов.

Лемма 2. *Если $h(x, y)$ — весовая функция в области G, то для всякого неотрицательного в области G алгебраического многочлена $P_{nk}(x, y)$ порядка (n, k), где $n \geqslant 1$, выполняется условие*

$$\iint_G h(x, y)\, P_{nk}(x, y)\, dx\, dy > 0. \tag{1}$$

Доказательство. В самом деле, предположим противное, что этот интеграл равен нулю. Тогда в силу условия (1.14) и свойств интеграла Лебега находим, что $P_{nk}(x, y) = 0$ почти всюду в области G. Но многочлен $P_{nk}(x, y)$ имеет порядок (n, k) и может обращаться в нуль только на множестве плоской меры нуль. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для всякой весовой функции $h(x, y)$, определенной в области G, существует единственная система многочленов $\{F_{nk}(x, y)\}$, ортонормированная по области G с весом $h(x, y)$.*

Доказательство. Для многочлена нулевого порядка имеем

$$F_{00}(x, y) = c_{00} > 0, \qquad \iint_G h(x, y)\, c_{00}^2\, dx\, dy = 1,$$

и в силу условия (1.14) величина c_{00} определена.

Далее, имея в виду применить индукцию, предположим, что определены ортонормированные многочлены

$$F_{00}(x, y),\ F_{10}(x, y),\ F_{11}(x, y),\ \ldots,\ F_{n,\,k-1}(x, y). \tag{2}$$

Рассмотрим процесс определения многочлена $F_{nk}(x, y)$ порядка (n, k). По лемме 1 этот неизвестный многочлен ности к ортогональным многочленам меньшего порядка определяется с точностью до постоянного множителя по формуле (5). Следовательно, многочлен $F_{nk}(x, y)$ только множителем может отличаться от ортогонального многочлена порядка (n, k). А именно это и утверждается в достаточности теоремы 2. Теорема доказана.

Условие (6) часто называют *первым критерием ортогональности*.

Рассмотрим теперь экстремальное свойство ортогональных многочленов. Обозначим через $\mathfrak{W}_{nk}$ множество всех многочленов порядка (n, k) с единичным главным коэффициентом, т. е. множество многочленов вида

$$\widetilde{Q}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x, y), \tag{7}$$

где $R_{n-1}(x, y)$ есть многочлен порядка меньшего, чем (n, k). Предположим, что требуется найти минимум интеграла

$$J\left(\widetilde{Q}_{nk}\right) = \iint\limits_G h(x, y)\left[\widetilde{Q}_{nk}(x, y)\right]^2 dx\, dy \tag{8}$$

в классе всех многочленов $\mathfrak{W}_{nk}$.

Т е о р е м а 3. *Минимум интеграла* (8) *в классе многочленов $\mathfrak{W}_{nk}$ достигается тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{Q}_{nk}(x, y) = \widetilde{F}_{nk}(x, y) = \frac{1}{c_{nk}^{(n,k)}} F_{nk}(x, y), \tag{9}$$

причем этот минимум определяется равенством

$$\min J\left(\widetilde{Q}_{nk}\right) = 1/\left[c_{nk}^{(n,k)}\right]^2. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 для всякого многочлена вида (7) имеем представление

$$\widetilde{Q}_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms}F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}^{(n,k)}} F_{nk}(x, y).$$

Подставляя это разложение в интеграл (8), находим

$$J\left(\widetilde{Q}_{nk}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}^2 + \frac{1}{\left[c_{nk}^{(n,k)}\right]^2}, \tag{11}$$

Минимум этого выражения достигается тогда и только тогда, когда $a_{ms}=0$, т. е. когда имеет место равенство (9), причем из равенства (11) следует формула (10). Теорема доказана.

Установленное экстремальное характеристическое свойство ортогональных многочленов иногда называют *вторым критерием ортогональности*.

Продолжаем рассматривать простейшие свойства ортогональных по области многочленов.

Теорема 4. *Для всякого ортогонального многочлена $F_{nk}(x, y)$ при условии $n \geqslant 1$ множество G_1 тех точек области G, где этот многочлен положителен, и множество G_2 тех точек области G, где этот многочлен отрицателен, оба имеют положительные плоские меры.*

Доказательство. Так как $n \geqslant 1$, то в силу ортогональности многочлена $F_{nk}(x, y)$ многочлену нулевого порядка $F_{00}(x, y)$ имеем равенство

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{12}$$

Поскольку весовая функция $h(x, y)$ неотрицательна в области G, то предположение о том, что неравенство $F_{nk}(x, y) \geqslant 0$ выполняется почти всюду в области G приводит к неравенству вида (1) из леммы 2, а это противоречит условию (12). Аналогично выполнение неравенства $F_{nk}(x, y) \leqslant 0$ почти всюду в области G в силу леммы 2 также ведет к противоречию с условием (12). Теорема доказана.

Теорема 5. *Если ортогональный многочлен представляется в виде произведения двух многочленов по формуле*

$$F_{nk}(x, y) = Q_{ms}(x, y) B_{pq}(x, y), \tag{13}$$

где $m \geqslant 1$ и $p \geqslant 1$, то оба многочлена $Q_{ms}(x, y)$ и $B_{pq}(x, y)$ являются ортогональными каждый со своей весовой функцией в области G.

Доказательство. Пусть дан произвольный многочлен $T_{rl}(x, y)$ порядка (r, l) меньшего, чем (m, s). Тогда порядок многочлена $B_{pq}(x, y) T_{rl}(x, y)$ будет меньше порядка (n, k) ортогонального многочлена $F_{nk}(x, y)$. Поэтому имеем равенство

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) B_{pq}(x, y) T_{rl}(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

которое в силу формулы (13) приводится к виду

$$\iint_G h(x, y) B_{pq}^2(x, y) Q_{ms}(x, y) T_{rl}(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Поскольку $T_{rl}(x, y)$ есть произвольный многочлен порядка (r, l) меньшего, чем (m, s), то, следовательно, $Q_{ms}(x, y)$ есть ортогональный многочлен порядка (m, s), соответствующий весовой функции $h_1(x, y) = h(x, y) \times B_{pq}^2(x, y)$. Аналогично доказывается, что $B_{pq}(x, y)$ есть ортогональный многочлен, соответствующий весовой функции $h_2(x, y) = h(x, y) Q_{ms}^2(x, y)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают два важных следствия. Во-первых, если ортогональный многочлен представляется в виде произведения (13), то для каждого сомножителя справедлив аналог теоремы 4, т. е. множество тех точек из области G, где этот множитель положителен, и множество тех точек, где этот множитель отрицателен, оба имеют положительную плоскую меру. Во-вторых, при разложении ортогонального многочлена на множители каждый множитель может быть только в первой степени, ибо будучи во второй степени он не менял бы знака в области G.

§ 3. Алгебраические свойства

Как и в случае одной переменной ортогональные многочлены по двум переменным представляются через моменты весовой функции.

Всякой весовой функции $h(x, y)$ соответствует система степенных моментов, которые определяются по формуле

$$h_{nk} = \iint_G h(x, y) x^{n-k} y^k\, dx\, dy, \tag{1}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, n$. Множество этих моментов целесообразно представить в виде треугольной таблицы:

$$\begin{array}{l} h_{00}, \\ h_{10},\ h_{11}, \\ h_{20},\ h_{21},\ h_{22}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_{n0},\ h_{n1},\ \ldots,\ h_{n,\,n-1},\ h_{nn}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{2}$$

Из моментов (2) составляем определители

$$\Delta_{00}=h_{00},\quad \Delta_{10}=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10}\\ h_{10} & h_{20}\end{vmatrix},\quad \Delta_{11}=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11}\\ h_{10} & h_{20} & h_{21}\\ h_{11} & h_{21} & h_{22}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{20}=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20}\\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30}\\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31}\\ h_{20} & h_{30} & h_{31} & h_{40}\end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\Delta_{nk}=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{nk}\\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \ldots & h_{n+1,k}\\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{n+1,k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ h_{nk} & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} & \ldots & h_{2n,2k}\end{vmatrix},\ \ldots \tag{3}$$

Определитель Δ_{nk} составляется следующим образом. Рассмотрим систему линейно независимых функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ \ldots,\ x^{n-k}y^k. \tag{4}$$

Моменты, определяемые по формуле (1), можно рассматривать как скалярные произведения различных функций из системы (4). Умножим каждую функцию из системы (4) на 1 и проинтегрируем с весом $h(x, y)$ по области G. Из полученных моментов составляется первая строка определителя Δ_{nk}. Далее, умножаем все функции системы (4) на функцию x и интегрируем с весом $h(x, y)$ по области G. В результате получим вторую строку определителя Δ_{nk} из системы (3). Затем умножаем все функции системы (4) на функцию y и снова интегрируем все произведения с весом $h(x, y)$ по области G. Полученные числа составляют третью строку определителя Δ_{nk}. Аналогичное построение проводится для каждой функции системы (4). В самом конце этих построений все функции системы (4) умножаются на последнюю функцию $x^{n-k}y^k$ и все произведения интегрируются с весом $h(x, y)$ по области G. В результате получится последняя строка определителя Δ_{nk}.

На основе вышесказанного нетрудно сформулировать простое правило составления определителя Δ_{nk} без обращения к системе (4) и к формуле моментов (1). В самом деле, первая строка этого определителя составлена из моментов таблицы (2), выписанных в том порядке, как они расположены в этой таблице, начиная с момента

h_{00} и до момента h_{nk}. Из тех же моментов состоит и первый столбец определителя Δ_{nk}. Далее, к первому индексу моментов первой строки прибавляется 1. В результате получается вторая строка. Затем ко второму индексу моментов, стоящих во второй строке, снова прибавляется 1. Так получается третья строка определителя Δ_{nk}. В результате такого попеременного увеличения первого и второго индексов моментов получается весь определитель Δ_{nk}.

Поскольку все определители (3) являются определителями Грама линейно независимой системы функций, то все они отличны от нуля. Это нетрудно установить и непосредственно. В самом деле, систему линейно независимых функций (4) переобозначим и представим в виде

$$\varphi_1(x,\ y),\ \varphi_2(x,\ y),\ \ldots,\ \varphi_N(x,\ y), \tag{5}$$

где число N определяется по формуле (1.8). Тогда вместо (3) для определителя Δ_{nk} получим формулу

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} (\varphi_1;\ \varphi_1) & (\varphi_1;\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1;\ \varphi_N) \\ (\varphi_2;\ \varphi_1) & (\varphi_2;\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2;\ \varphi_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_N;\ \varphi_1) & (\varphi_N;\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_N;\ \varphi_N) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Допустим, что этот определитель равен нулю. В этом случае линейная однородная система

$$\sum_{m=1}^{N} (\varphi_k;\ \varphi_m)\, b_m = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{7}$$

имеет нетривиальное решение $\{b_m\}$. Представим систему (7) в виде

$$\left(\varphi_k;\ \sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m\right) = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Умножим каждое уравнение на b_k и сложим почленно. В результате получим равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k;\ \sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m\right) = 0.$$

Далее, раскрывая скалярное произведение по формуле (1.18), имеем

$$\iint_G h(x,\ y) \left[\sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m(x,\ y)\right]^2 dx\,dy = 0.$$

Поскольку все функции (5) суть переобозначенные одночлены (4), то по лемме 2 это равенство возможно только при условии $b_m = 0$. Таким образом, определитель (6) отличен от нуля.

В определителе (3) заменим последнюю строку функциями (4) и при $n \geqslant 1$ рассмотрим многочлен

$$P_{nk}(x, y) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & \dots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-k+1}y^{k-1} & x^{n-k}y^k \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Если $k = 0$, то предпоследняя строка этого определителя имеет вид

$$h_{n-1,\,n-1}h_{n,\,n-1}h_{nn}\dots h_{2n-2,\,2n-2}h_{2n-2,\,2n-1}.$$

Главный коэффициент многочлена (8) равен $\Delta_{n,\,k-1}$ при $k \geqslant 1$ и $\Delta_{n-1,\,n-1}$ при $k = 0$.

Умножим многочлен (8) на любую функцию из системы (4), кроме последней, и проинтегрируем с весом $h(x, y)$ по области G. В силу правила построения определителей (3) получим определитель с двумя одинаковыми строками. Следовательно, при условии $(m, s) < (n, k)$ имеем равенство

$$\iint\limits_G h(x, y)\, x^{m-s} y^s P_{nk}(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Это означает, что многочлен $P_{nk}(x, y)$ является ортогональным многочленом порядка (n, k), соответствующим весовой функции $h(x, y)$ и области G. Определим норму этого многочлена. Умножая равенство (8) на последнюю из функций (4) и интегрируя, находим

$$\|P_{nk}\|^2 = \iint\limits_G h(x, y) P_{nk}^2(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \Delta_{n,k-1} \iint\limits_G h(x, y) P_{nk}(x, y)\, x^{n-k} y^k dx\, dy = \Delta_{n,k-1}\Delta_{nk} > 0. \tag{9}$$

Поскольку в этой формуле n и k — произвольные, то в последовательности определителей (3) любые два соседние имеют одинаковые знаки. Но так как первый определитель Δ_{00} положителен, то и все остальные также положительны. Следовательно, из равенства (9) находим формулу для ортонормированных многочленов

$$F_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n,k-1}\Delta_{nk}}} P_{nk}(x, y). \tag{10}$$

А при $k = 0$ под знаком корня имеем $\Delta_{n-1,\,n-1}\Delta_{n0}$.

С помощью формул (3), (8) и (10) можно вычислять многочлены, ортонормированные по области G с весом $h(x, y)$. Применяя эти формулы, находим

$$F_{00}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}}}, \quad F_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}\Delta_{10}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ 1 & x \end{vmatrix},$$

$$F_{11}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{10}\Delta_{11}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ 1 & x & y \end{vmatrix},$$

$$F_{20}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{20}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} \\ 1 & x & y & x^2 \end{vmatrix},$$

$$F_{21}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{20}\Delta_{21}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} & h_{21} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} & h_{31} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} & h_{32} \\ h_{20} & h_{30} & h_{31} & h_{40} & h_{41} \\ 1 & x & y & x^2 & xy \end{vmatrix}. \tag{11}$$

По этим и аналогичным формулам можно вычислить любое конечное число ортонормированных многочленов, если известны степенные моменты весовой функции.

Рассмотрим теперь некоторые рекуррентные соотношения для ортонормированных многочленов. Произведение

$$(ax + by)F_{nk}(x, y) \tag{12}$$

есть многочлен степени не выше $n + 1$ по переменному x и при $k < n$ степени не выше n по переменному y. А при $k = n$ степень многочлена (12) по переменному y не превосходит $n + 1$. Следовательно, степень многочлена (12) по совокупности переменных не превосходит $n + 1$. Поэтому в силу леммы 1 имеем разложение

$$(ax + by) F_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} F_{ms}(x, y), \tag{13}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$c_{ms} = \iint_G h(x, y)(ax + by) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y)\, dx\, dy. \quad (14)$$

В силу ортогональности многочлена $F_{nk}(x, y)$ из формулы (14) следуют равенства

$$c_{ms} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Следовательно, в правой части равенства (13) индекс суммирования m принимает только три значения $n-1$, n, $n+1$, т. е. имеем

$$(ax + by) F_{nk}(x, y) = \sum_{s=0}^{n-1} c_{n-1,s} F_{n-1,s}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n} c_{ns} F_{ns}(x, y) + \sum_{s=0}^{n+1} c_{n+1,s} F_{n+1,s}(x, y). \quad (15)$$

Рассмотрим частные случаи этой формулы. Если положить $a = 1$ и $b = 0$, то получим разложение многочлена $xF_{nk}(x, y)$. Коэффициенты этого разложения определяются по формуле

$$a_{ms} = \iint_G h(x, y)\, xF_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y)\, dx\, dy. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что порядок многочлена $xF_{ms}(x, y)$ есть $(m+1, s)$. Для первой суммы в правой части формулы (15) имеем $m = n-1$. Следовательно, в первой сумме коэффициенты (16) можно записать в виде

$$a_{n-1,s} = \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) [xF_{n-1,s}(x, y)]\, dx\, dy. \quad (17)$$

Если порядок (n, s) меньше порядка (n, k), то в силу ортогональности многочлена $F_{nk}(x, y)$ интеграл (17) равен нулю, т. е. в первой сумме, стоящей в правой части равенства (15), индекс суммирования s пробегает значения $k, k+1, \ldots, n-1$. Далее, коэффициенты третьей суммы в формуле (15) можно записать в виде

$$a_{n+1,s} = \iint_G h(x, y) [xF_{nk}(x, y)] F_{n+1,s}(x, y)\, dx\, dy. \quad (18)$$

Поскольку произведение в квадратных скобках под знаком интеграла (18) есть многочлен порядка $(n+1, k)$, то при $s > k$ этот интеграл равен нулю. Следовательно, в последней сумме равенства (15) индекс суммирования s изменяется от 0 до k. Таким образом, из равенства (15) имеем формулу

$$xF_{nk}(x, y) = \sum_{s=k}^{n-1} a_{n-1,s}F_{n-1,s}(x, y) + \sum_{s=0}^{n} a_{ns}F_{ns}(x, y) + \sum_{s=0}^{k} a_{n+1,s}F_{n+1,s}(x, y). \quad (19)$$

Аналогично доказывается разложение

$$yF_{nk}(x, y) = \sum_{s=k-1}^{n-1} b_{n-1,s}F_{n-1,s}(x, y) + \sum_{s=0}^{n} b_{ns}F_{ns}(x, y) + \sum_{s=0}^{k+1} b_{n+1,s}F_{n+1,s}(x, y). \quad (20)$$

В этом случае в формулах (14) и (15) полагаем $a=0$ и $b=1$ и учитываем тот факт, что произведение $yF_{ms}(x, y)$ есть многочлен порядка $(m+1, s+1)$.

Формулы (19) и (20) называются *рекуррентными формулами* для ортогональных многочленов по двум переменным.

Рассмотрим теперь аналог формулы Кристоффеля — Дарбу для ортонормированных многочленов по двум переменным.

Произвольный многочлен $P_{nn}(x, y)$ порядка (n, n) можно представить в виде

$$P_{nn}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} A_{ms}F_{ms}(x, y), \quad (21)$$

где коэффициенты определяются равенством

$$A_{ms} = \iint_G h(u, v)\, P_{nn}(u, v)\, F_{ms}(u, v)\, du\, dv. \quad (22)$$

Подставляя значение (22) в разложение (21), находим

$$P_{nn}(x, y) = \iint_G h(u, v)\, P_{nn}(u, v) \left[\sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} F_{ms}(x, y)\, F_{ms}(u, v) \right] du\, dv. \quad (23)$$

Как и в случае ортогональных многочленов по одному переменному для суммы в квадратных скобках вводим специальное обозначение

$$K_n(x, y; u, v) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} F_{ms}(x, y) F_{ms}(u, v). \tag{24}$$

Тогда формула (23) приводится к виду

$$P_{nn}(x, y) = \iint_G h(u, v) P_{nn}(u, v) K_n(x, y; u, v)\, du\, dv. \tag{25}$$

Функция (24) называется *ядром порядка n ортонормированной системы многочленов*, а формула (25), справедливая для всякого многочлена степени не выше n, свидетельствует о воспроизводящем свойстве ядра (24).

Рассмотрим произведение

$$uK_n(x, y; u, v). \tag{26}$$

Будем считать здесь x и y параметрами. Тогда произведение (26) есть многочлен по u и v степени $n+1$. Заменяя в формуле (25) n на $n+1$ и применяя эту формулу к многочлену (26), получим

$$\begin{aligned} uK_n(x, y; u, v) &= \\ &= \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau) K_{n+1}(u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau = \\ = \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau) &\left[\sum_{s=0}^{n+1} F_{n+1,s}(u, v) F_{n+1,s}(t, \tau)\right] dt\, d\tau + \\ + \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau) &\left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(u, v) F_{ns}(t, \tau)\right] dt\, d\tau + \\ &+ \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau) K_{n-1}(u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau. \end{aligned} \tag{27}$$

Далее, для краткости введем обозначение

$$\begin{aligned} L_n(x, y; u, v) = K_n(x, y; u, v) - K_{n-1}(x, y; u, v) &= \\ = \sum_{k=0}^{n} F_{nk}(x, y) F_{nk}(u, v). \end{aligned} \tag{28}$$

Теперь, используя ортогональность многочленов $\{F_{n+1,s}(t, \tau)\}$ и обозначение (28), из равенства (27)

находим

$$uK_n(x, y; u, v) = \iint_G h(t, \tau)\, tL_n(x, y; t, \tau)\, L_{n+1}(u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau)\, L_n(u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(x, y; t, \tau)\, K_{n-1}(u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau. \tag{29}$$

В этом равенстве поменяем местами пары значений (x, y) и (u, v). В результате получим аналогичное равенство

$$xK_n(u, v; x, y) = xK_n(x, y; u, v) = \iint_G h(t, \tau)\, tL_n(u, v; t, \tau)\, L_{n+1}(x, y; t, \tau)\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(u, v; t, \tau)\, L_n(x, y; t, \tau)\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, tK_n(u, v; t, \tau)\, K_{n-1}(x, y; t, \tau)\, dt\, d\tau. \tag{30}$$

А теперь вычтем почленно из равенства (29) равенство (30). После использования формулы (28) и очевидных сокращений находим

$$(u - x)\, K_n(x, y; u, v) = \iint_G h(t, \tau)\, t\, [L_n(x, y; t, \tau)\, L_{n+1}(u, v; t, \tau) - L_n(u, v; t, \tau)\, L_{n+1}(x, y; t, \tau)]\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, t\, [K_n(u, v; t, \tau)\, K_{n-1}(x, y; t, \tau) - K_n(x, y; t, \tau)\, K_{n-1}(u, v; t, \tau)]\, dt\, d\tau + \iint_G h(t, \tau)\, t\, [K_n(x, y; t, \tau)\, K_{n-1}(u, v; t, \tau) - K_n(u, v; t, \tau)\, K_{n-1}(x, y; t, \tau)]\, dt\, d\tau. \tag{31}$$

Вычисляем сумму двух разностей, стоящих в квадратных скобках в двух последних интегралах формулы (31). Используя формулу (24), получаем

$$\left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(u, v) F_{ns}(t, \tau)\right] K_{n-1}(x, y; t, \tau) -$$
$$- \left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(x, y) F_{ns}(t, \tau)\right] K_{n-1}(u, v; t, \tau) +$$
$$+ \left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(x, y) F_{ns}(t, \tau)\right] K_{n-1}(u, v; t, \tau) -$$
$$- \left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(u, v) F_{ns}(t, \tau)\right] K_{n-1}(x, y; t, \tau) = 0. \quad (32)$$

Далее, для краткости вводим обозначение

$$M_n(x, y; u, v; t, \tau) = L_n(x, y; t, \tau) L_{n+1}(u, v; t, \tau) -$$
$$- L_n(u, v; t, \tau) L_{n+1}(x, y; t, \tau). \quad (33)$$

Тогда, учитывая равенство (32) и обозначение (33), из формулы (31) находим равенство

$$(u - x) K_n(x, y; u, v) =$$
$$= \iint_G h(t, \tau)\, t M_n(x, y; u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau. \quad (34)$$

Аналогично доказывается второе равенство:

$$(v - y) K_n(x, y; u, v) =$$
$$= \iint_G h(t, \tau)\, \tau M_n(x, y; u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau. \quad (35)$$

Умножаем равенство (34) на A, а равенство (35) на B и складываем их почленно. В результате получим формулу

$$[(Au + Bv) - (Ax + By)]\, K_n(x, y; u, v) =$$
$$= \iint_G h(t, \tau)(At + B\tau)\, M_n(x, y; u, v; t, \tau)\, dt\, d\tau. \quad (36)$$

Эта формула является обобщением формулы Кристоффеля — Дарбу на случай ортогональных многочленов двух переменных.

§ 4. Монические ортогональные многочлены

В результате процесса ортогонализации исходной системы одночленов $\{x^{n-k}y^k\}$ получена система ортонормированных многочленов

$$\{F_{nk}(x, y)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Эти многочлены теперь будем называть *основными ортогональными многочленами.* Система многочленов (1) разбивается на пачки вида

$$F_{n0}(x, y), F_{n1}(x, y), \ldots, F_{nn}(x, y). \tag{2}$$

Все многочлены системы (2) имеют степень n, но устроены они по-разному, ибо содержат разное число одночленов вида

$$x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n. \tag{3}$$

В результате нарушается симметрия в системе многочленов (2), а также во всем множестве многочленов (1). Для построения симметричной системы многочленов можно сделать следующее.

Фиксируем первые n пачек основных одночленов:

$$\begin{array}{l} 1, \\ x, y, \\ x^2, xy, y^2, \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1}, x^{n-2}y, \ldots, xy^{n-2}, y^{n-1}. \end{array} \tag{4}$$

Возьмем любой одночлен $x^{n-k}y^k$ из системы (3) и рассмотрим многочлен вида

$$\tilde{\Phi}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}x^{m-s}y^s. \tag{5}$$

Этот многочлен называется *моническим многочленом*, ибо он содержит только один старший член степени n. В силу формулы (1.8) многочлен (5) содержит $0{,}5n(n+1)$ коэффициентов $\{A_{ms}\}$. Докажем, что коэффициенты этого многочлена можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_G h(x, y)\,\tilde{\Phi}_{nk}(x, y)\,x^{p-q}y^q\,dx\,dy = 0, \tag{6}$$

где $p = 0, 1, \ldots, n-1$ и $q = 0, 1, \ldots, p$. Эти условия означают ортогональность многочлена (5) всем функциям системы (4).

Используя формулу (5) и моменты весовой функции, систему уравнений (6) приводим к виду

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}h_{ms} = -h_{nk},\\
&\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}h_{m+1,s} = -h_{n+1,k},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}h_{m+n-1,n+s-1} = -h_{2n-1,n+k-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Определитель этой системы $\Delta_{n-1,\,n-1}$ есть определитель Грама системы функций (4). Ранее было установлено, что такие определители отличны от нуля и положительны. Следовательно, система уравнений (7) имеет единственное решение. Многочлен (5), удовлетворяющий условиям (6), называется моническим ортогональным многочленом. Вводя положительный коэффициент A_{nk} нормировки многочлена (5), получим монический ортонормированный многочлен

$$\Phi_{nk}(x,\ y) = A_{nk}\widetilde{\Phi}_{nk}(x,\ y) = A_{nk}x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x,\ y), \tag{8}$$

где $R_{n-1}(x,\ y)$ есть некоторый многочлен степени не выше $n-1$.

Многочлен (8) можно представить через моменты весовой функции аналогично формулам (3.8) и (3.11). В самом деле, рассмотрим систему функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^{n-2}y,\ \dots,\ y^{n-1},\ x^{n-k}y^k. \tag{9}$$

Определитель Грама этой системы имеет вид

$$\widetilde{\Delta}_{nk} = \begin{vmatrix}
h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{nk}\\
h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n+1,k}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
h_{n-1,n-1} & h_{n,n-1} & \dots & h_{2n-2,2n-2} & h_{2n-1,k+n-1}\\
h_{nk} & h_{n+1,k} & \dots & h_{2n-1,k+n-1} & h_{2n,2k}
\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Нетрудно доказать, что этот определитель отличен от нуля. Для этого достаточно представить систему линейно независимых функций (9) в виде (3.5) с другим номером N. Тогда определитель (10) представится в виде (3.6), и его отличие от нуля очевидно.

Далее, как и в предыдущем параграфе, заменяя в определителе (10) последнюю строку функциями (9), вводим многочлен

$$P_{nk}(x, y) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1,n-1} & h_{n,n-1} & \dots & h_{2n-2,2n-2} & h_{2n-1,n+k-1} \\ 1 & x & \dots & y^{n-1} & x^{n-k}y^k \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Главный коэффициент этого многочлена есть определитель $\Delta_{n-1,n-1}$, полученный из определителя (11) вычеркиванием последних строки и столбца. Следовательно, аналогично (3.10) имеем формулу

$$\Phi_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1,n-1}\Delta_{nk}}} P_{nk}(x, y). \tag{12}$$

В результате этих построений для всех номеров k получим систему монических ортонормированных многочленов степени n

$$\Phi_{n0}(x, y), \Phi_{n1}(x, y), \dots, \Phi_{n,n-1}(x, y), \Phi_{nn}(x, y). \tag{13}$$

Эти многочлены характеризуются тем, что каждый из них имеет единственный старший член из системы (3) и каждый многочлен (13) ортогонален всем многочленам младших степеней. При этом многочлены (13) не обязательно ортогональны между собой.

Выписывая многочлены (13) для всех номеров n, получим треугольную таблицу

$$\begin{array}{l} \Phi_{00}(x, y), \\ \Phi_{10}(x, y), \Phi_{11}(x, y), \\ \Phi_{20}(x, y), \Phi_{21}(x, y), \Phi_{22}(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{n0}(x, y), \Phi_{n1}(x, y), \dots, \Phi_{n,n-1}(x, y), \Phi_{nn}(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{14}$$

Таким образом, получена система монических ортонормированных многочленов, соответствующих весовой функции $h(x, y)$ и области G. Аналогично системе (1) систему многочленов (14) можно записать в виде

$$\{\Phi_{nk}(x,\ y)\},\qquad n=0,\ 1,\ \ldots,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{15}$$

Заметим, что из формулы (3.11) при $k=0$ и формулы (12) следует равенство $\Phi_{n0}(x,\ y)=F_{n0}(x,\ y)$. Но другие многочлены систем (1) и (15) могут, конечно, отличаться между собой.

Далее, пусть дан произвольный однородный многочлен степени n

$$Q_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}x^{n-k}y^{k}. \tag{16}$$

Этот многочлен составлен только из одночленов (3) степени n. Применим процесс ортогонализации к системе одночленов (4) и к многочлену (16). В результате получим ортогональный многочлен

$$B_n(x,y)=b_nQ_n(x,y)+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}b_{ms}x^{m-s}y^{s}. \tag{17}$$

Этот многочлен называется *обобщенным моническим ортогональным многочленом*. Он ортогонален только к многочленам меньшей степени.

Теорема 6. *При любом однородном многочлене* (16) *обобщенный монический ортогональный многочлен* (17) *является линейной комбинацией монических ортогональных многочленов* (13), *т. е.*

$$B_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_{nk}\Phi_{nk}(x,y). \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку монические ортогональные многочлены (13) охватывают все старшие степени порядка n, то для многочлена (17) имеем разложение

$$B_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_{nk}\Phi_{nk}(x,y)+R_{n-1}(x,y), \tag{19}$$

где многочлен $R_{n-1}(x,\ y)$ имеет степень не выше $n-1$ по совокупности переменных, т. е. он является линейной комбинацией одночленов (4). Используя равенство (19), а также ортогональность многочленов (13) и (17),

находим

$$\iint_G h(x, y) R_{n-1}^2(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G h(x, y) R_{n-1}(x, y) \left[B_n(x, y) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \Phi_{nk}(x, y) \right] dx\, dy = 0.$$

Следовательно, имеем тождество $R_{n-1}(x, y) \equiv 0$. Этим формула (18) доказана.

Далее, пусть дана ортогональная матрица порядка $n+1$ с действительными коэффициентами

$$A_{n+1} = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Ортогональность матрицы означает выполнение условий

$$\sum_{j=0}^{n} a_{mj} a_{kj} = \delta_{mk}, \quad m, k = 0, 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{j=0}^{n} a_{mj} F_{nj}(x, y), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Поскольку матрица (20) имеет $n+1$ строк, то столько же будет и многочленов вида (22).

Теорема 7. *При любой ортогональной матрице* (20) *многочлены* (22) *ортогональны между собой, нормированы и ортогональны всем многочленам младших степеней.*

Доказательство. Поскольку в правой части равенства (22) стоят только ортогональные многочлены степени n, то каждый многочлен (22) ортогонален всем многочленам младших степеней. Далее, в силу условий (21) имеем

$$\iint_G h(x, y) Q_{nm}(x, y) Q_{nk}(x, y)\, dx\, dy = \sum_{j=0}^{n} a_{mj} a_{kj} = \delta_{mk}.$$

Теорема доказана.

Итак, всякая ортогональная матрица вида (20) определяет систему ортогональных многочленов (22) степени n. Заметим, что ортогональные многочлены, соответствующие двум различным ортогональным матрицам вида

(20), вообще говоря, не являются ортогональными между собой. Ортогональные многочлены вида (22), соответствующие весовой функции $h(x, y)$ и ортогональной матрице (20), будем называть *общими ортонормированными многочленами*.

Таким образом, весовая функция $h(x, y)$ в области G при всяком фиксированном n определяет следующие системы ортогональных многочленов степени n:

1. Основные ортогональные многочлены

$$F_{n0}(x, y),\ F_{n1}(x, y),\ \ldots,\ F_{nn}(x, y). \tag{23}$$

2. Монические ортогональные многочлены

$$\Phi_{n0}(x, y),\ \Phi_{n1}(x, y),\ \ldots,\ \Phi_{nn}(x, y). \tag{24}$$

3. Обобщенные монические ортогональные многочлены вида (17).

4. Общие ортогональные многочлены вида (22), определяемые ортогональной матрицей (20).

Из предыдущих результатов следует, что основные ортогональные многочлены (23) и монические ортогональные многочлены (24) определяются однозначно. Но обобщенные монические ортогональные многочлены вида (17) определяются неоднозначно и фактически образуют пространство многочленов размерности $n+1$, ибо в формуле (16) имеется $n+1$ произвольных коэффициентов. То же самое утверждение следует из формулы (18). Далее, общие ортогональные многочлены вида (22) также определяются неоднозначно, ибо можно менять ортогональные матрицы (20). Но при любой матрице (20) для этих многочленов справедлива теорема 6, т. е. аналогично формуле (18) имеем равенство

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n, k)} \Phi_{nk}(x, y).$$

Таким образом, множество общих ортогональных многочленов вида (22) также имеет размерность $n+1$.

Множество всех ортогональных многочленов четырех типов и их линейные комбинации обозначим через W_n. Это есть пространство размерности $n+1$.

Далее, теорема 6 справедлива не только для многочленов (17) и (22), но и для основных ортогональных многочленов (23). Только в этом случае вместо разложения (18) имеем равенства

$$F_{nk}(x, y) = \sum_{s=0}^{k} b_{ns}\Phi_{ns}(x, y), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Если эти равенства подставить в формулы (22), то снова найдем, что общие ортогональные многочлены (22) при любой ортогональной матрице (20) представляются через монические многочлены (24).

Таким образом, все многочлены пространства W_n представляются через монические ортогональные многочлены (24). Следовательно, система монических ортогональных многочленов является базисом в пространстве W_n всех ортогональных многочленов степени n. Далее, треугольную систему уравнений (25) можно разрешить относительно монических ортогональных многочленов. Отсюда следует, что система основных ортогональных многочленов (23) также является базисом в пространстве W_n. Разумеется, в этом пространстве существуют и другие базисные системы многочленов степени n.

Таким образом, всякая весовая функция $h(x, y)$ в области G определяет последовательность пространств ортогональных многочленов

$$W_0, W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}, W_n, W_{n+1}, \ldots \tag{26}$$

В силу вышеприведенных результатов эти пространства ортогональны между собой в смысле скалярного произведения

$$(P_n; Q_m) = \iint_G h(x, y) P_n(x, y) Q_m(x, y)\, dx\, dy, \tag{27}$$

т. е. если $P_n(x, y) \in W_n$ и $Q_m(x, y) \in W_m$, причем $n \neq m$, то интеграл (27) равен нулю.

Ортогональные многочлены из пространств (26) обладают многими свойствами из тех, которые справедливы для основных ортогональных многочленов. Приведем только один результат.

Теорема 8. *Если $P_n(x, y) \in W_n$, то оба произведения $xP_n(x, y)$ и $yP_n(x, y)$ представляются в виде линейных комбинаций многочленов из трех пространств W_{n-1}, W_n, W_{n+1}.*

Доказательство. Многочлен $xP_n(x, y)$ имеет степень $n+1$ по совокупности переменных. Следовательно, в силу леммы 1 имеем разложение по основным ортогональным многочленам

$$xP_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} F_{ms}(x, y). \tag{28}$$

Коэффициенты определяются по формулам

$$a_{ms} = \iint\limits_G h(x, y)\, P_n(x, y)\, [xF_{ms}(x, y)]\, dx\, dy. \tag{29}$$

Поскольку многочлен $P_n(x, y)$ ортогонален всем многочленам степени не более $n-1$, то интеграл (29) равен нулю при $m \leqslant n-2$. Следовательно, в правой части равенства (28) останутся только три суммы, в которых индексы суммирования принимают значения $n-1$, n, $n+1$. Аналогично доказывается утверждение для многочлена $yP_n(x, y)$. Теорема доказана.

Для монических ортогональных многочленов справедливы рекуррентные формулы вида (3.19) и (3.20).

§ 5. Нормальные биортогональные системы

Поскольку монические ортогональные многочлены одной и той же степени, вообще говоря, не ортогональны между собой, то, естественно, возникает задача о построении биортогональной системы многочленов. Так как система всех монических ортогональных многочленов линейно независима и минимальна, то в силу известных результатов [II.12] существует такая система многочленов $\{\Psi_{ms}(x, y)\}$, что выполняются условия

$$\iint\limits_G h(x, y)\, \Phi_{nk}(x, y)\, \Psi_{ms}(x, y)\, dx\, dy = \delta_{nm}\delta_{ks}. \tag{1}$$

Будем называть биортогональную систему многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x, y);\ \Psi_{ms}(x, y)\} \tag{2}$$

нормальной биортогональной системой, если при любом номере n выполняется равенство

$$\Psi_{ns}(x, y) = \sum_{p=0}^{n} c_{np}^{(s)} \Phi_{np}(x, y). \tag{3}$$

Это условие нормальности означает, что многочлены второй системы $\{\Psi_{ns}(x, y)\}$ из любой пачки с номером n представляются в виде линейной комбинации монических ортогональных многочленов из пачки с тем же номером n.

Из формулы (3) следует, что многочлены $\{\Psi_{ns}(x, y)\}$ ортогональны всем моническим ортогональным многочленам степени меньшей, чем n. Докажем, что при любых n и s существует система чисел $\{c_{np}^{(s)}\}$, при которой многочлен (3) удовлетворяет условиям (1) при $k = 0, 1, \ldots, n$. Для интеграла (1), как обычно, вводим обозначение

$$(\Phi_{nk}; \Psi_{ns}) = \iint\limits_G h(x, y)\, \Phi_{nk}(x, y)\, \Psi_{ns}(x, y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Подставляя разложение (3) в интеграл (1) и учитывая обозначение (4), получим систему уравнений

$$\sum_{p=0}^{n} c_{np}^{(s)} (\Phi_{nk}; \Phi_{np}) = \delta_{ks}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} (\Phi_{n0}; \Phi_{n0}) & (\Phi_{n0}; \Phi_{n1}) & \ldots & (\Phi_{n0}; \Phi_{nn}) \\ (\Phi_{n1}; \Phi_{n0}) & (\Phi_{n1}; \Phi_{n1}) & \ldots & (\Phi_{n1}; \Phi_{nn}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\Phi_{nn}; \Phi_{n0}) & (\Phi_{nn}; \Phi_{n1}) & \ldots & (\Phi_{nn}; \Phi_{nn}) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Это есть определитель Грама системы монических многочленов степени n. Нетрудно показать, что он отличен от нуля. В самом деле, допустим противное, что этот определитель равен нулю. Тогда однородная система

$$\sum_{s=0}^{n} \beta_s (\Phi_{nk}; \Phi_{ns}) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

имеет нетривиальное решение $\{\beta_k\}$, при котором эту систему можно записать в виде

$$\left(\Phi_{nk}; \sum_{s=0}^{n} \beta_s \Phi_{ns}\right) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Умножая каждое из уравнений (7) на β_k и складывая их, получим

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k \Phi_{nk}; \sum_{s=0}^{n} \beta_s \Phi_{ns}\right) = 0.$$

В силу обозначения (4) это равенство имеет вид

$$\iint\limits_G h(x, y) \left[\sum_{k=0}^{n} \beta_k \Phi_{nk}(x,y) \right]^2 dx\,dy = 0.$$

Но по лемме 2 это равенство невозможно, если хотя бы одно из чисел $\{\beta_k\}$ отлично от нуля. Из этого противоречия следует, что определитель (6) отличен от нуля. А тогда система уравнений (5) имеет единственное решение. Следовательно, существование нормальной биортогональной системы (2) при условии (3) доказано.

Рассмотрим некоторые преобразования нормальных биортогональных систем вида (2).

Пусть дана ортогональная матрица (4.20). С помощью этой матрицы преобразуем биортогональную систему (2) в новую систему многочленов по формулам

$$\varphi_{nk}(x, y) = \sum_{p=0}^{n} a_{kp} \Phi_{np}(x, y), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\psi_{ns}(x, y) = \sum_{q=0}^{n} a_{sq} \Psi_{nq}(x, y), \qquad s = 0, 1, \ldots, n \tag{9}$$

Поскольку определитель ортогональной матрицы (4.20) отличен от нуля, то систему (8) можно разрешить относительно монических ортогональных многочленов, т. е. имеем равенства

$$\Phi_{np}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_{pk} \varphi_{nk}(x, y), \qquad p = 0, 1, \ldots, n.$$

Подставляем эти равенства в систему (3). В результате получим

$$\Psi_{nq}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} c_{qm} \varphi_{nm}(x, y), \qquad q = 0, 1, \ldots, n.$$

А теперь, подставляя эти многочлены в равенства (9), получим формулы

$$\psi_{ns}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} d_{sm} \varphi_{nm}(x, y), \qquad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Таким образом, многочлены (9) представляются через многочлены (8) по формулам (10).

Докажем, что многочлены (8) и (9) биортогональны. В самом деле, в силу биортогональности системы (2) и ортогональности матрицы (4.20) имеем

$$(\varphi_{nk};\ \psi_{ns}) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{kp}a_{sq}(\Phi_{np};\ \Psi_{nq}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_{kp}a_{sp} = \delta_{ks}.$$

Выбирая при каждом номере n ортогональную матрицу вида (4.20), получим нормальную биортогональную систему

$$\{\varphi_{nk}(x,\ y);\ \psi_{ms}(x,\ y)\}. \tag{11}$$

Условие ортогональности функций $\varphi_{nk}(x,\ y)$ и $\psi_{ms}(x,\ y)$ при $n \neq m$ следует из равенств (3), (8) и (9). Поскольку при каждом n ортогональная матрица произвольна и не зависит от ортогональных матриц других порядков, то нормальная биортогональная система (11), соответствующая весовой функции $h(x,\ y)$ и области G, в значительной мере произвольна, т. е. обладает большой общностью.

Рассмотрим теперь аффинные преобразования независимых переменных в нормальных биортогональных системах.

Предположим, что вместо переменных x и y вводятся новые переменные u и v по формулам

$$u = p_{11}x + p_{12}y + p_{10}, \quad v = p_{21}x + p_{22}y + p_{20}. \tag{12}$$

Считаем, что все коэффициенты $\{p_{ks}\}$ действительные числа и определитель системы (12) отличен от нуля, т. е.

$$p = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что существует обратное преобразование

$$x = q_{11}u + q_{12}v + q_{10}, \quad y = q_{21}u + q_{22}v + q_{20}, \tag{14}$$

причем аналогично (13) имеем

$$q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Обозначим через D область, в которую преобразование (12) переводит область G. Далее, подставляем значения x и y из системы (14) в весовую функцию и в нормальную биортогональную систему (2). В результате получим

$$\tilde{h}(u, v) = h(q_{11}u + q_{12}v + q_{10},\ q_{21}u + q_{22}v + q_{20}), \tag{16}$$

$$\tilde{\Phi}_{nk}(u, v) = \Phi_{nk}(q_{11}u + q_{12}v + q_{10},\ q_{21}u + q_{22}v + q_{20}), \tag{17}$$

$$\tilde{\Psi}_{ms}(u, v) = \Psi_{ms}(q_{11}u + q_{12}v + q_{10},\ q_{21}u + q_{22}v + q_{20}). \tag{18}$$

В силу условия (15) функции (17) и (18) являются многочленами степеней соответственно n и m.

Нетрудно доказать, что многочлены (17) и (18) образуют ортогональную систему с весом (16) по области D. В самом деле, имеем

$$\iint_G \tilde{h}(u, v)\tilde{\Phi}_{nk}(u, v)\tilde{\Psi}_{ms}(u, v)\,du\,dv =$$
$$= \iint_G h(x, y)\,\Phi_{nk}(x, y)\,\Psi_{ms}(x, y)\,|p|\,dx\,dy = |p|\,\delta_{nm}\delta_{ks}.$$

Следовательно, после преобразования (12) на плоскости uOv имеем биортогональную систему

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{|p|}}\tilde{\Phi}_{nk}(u, v);\ \frac{1}{\sqrt{|p|}}\tilde{\Psi}_{ms}(u, v)\right\}.$$

А нормальность этой системы следует из равенств (3), которые после замены (14) приводятся к виду

$$\tilde{\Psi}_{ns}(u, v) = \sum_{p=0}^{n} c_{np}^{(s)}\tilde{\Phi}_{np}(u, v).$$

Таким образом, при невырожденных аффинных преобразованиях нормальные биортогональные системы сохраняют свои свойства. Такие преобразования обычно применяются для упрощения нормальных биортогональных систем многочленов. В частности, аффинные преобразования независимых переменных применяются для упрощения области ортогональности. При этом коэффициенты $\{p_{ks}\}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие $p = 1$.

Разумеется, невырожденные аффинные преобразования можно применять также к ортогональным многочленам по двум переменным.

§ 6. Ряды Фурье по ортогональным многочленам двух переменных

Обозначим через $L_2(h, G)$ множество функций двух переменных, определенных в области G и удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 = \iint_G h(x, y) f^2(x, y)\,dx\,dy < \infty. \tag{1}$$

Для каждой такой функции можно определить коэффициенты Фурье по системе основных ортонормированных многочленов $\{F_{nk}(x, y)\}$ с помощью формулы

$$A_{nk} = (f; F_{nk}) = \iint_G h(x, y) f(x, y) F_{nk}(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

В результате всякой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условию (1), ставится в соответствие ряд Фурье по ортогональным многочленам двух переменных

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} A_{ms} F_{ms}(x, y). \tag{3}$$

Частичная сумма порядка (n, k) этого ряда имеет вид

$$S_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} A_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k} A_{ns} F_{ns}(x, y). \tag{4}$$

Рассмотрим простейшие свойства рядов Фурье (3) и их частичных сумм (4). Прежде всего докажем неравенство Бесселя для этих рядов. Как обычно, используя формулу (4), находим

$$\iint_G h(x, y)[f(x, y) - S_{nk}(x, y)]^2\,dx\,dy =$$

$$= \|f\|^2 - 2(f;\ S_{nk}) + (S_{nk};\ S_{nk}) =$$

$$= \|f\|^2 - \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} A_{ms}^2 + \sum_{s=0}^{k} A_{ns}^2\right] \geqslant 0. \tag{5}$$

Таким образом, если $f(x, y) \in L_2(h, G)$, то справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} A_{ms}^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{6}$$

Из этого неравенства следует условие

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{s=0}^{m} A_{ms}^2\right)=0. \tag{7}$$

Далее, как и у всех ортогональных рядов, частичные суммы (4) наилучшим образом приближают функцию $f(x, y)$ в метрике пространства $L_2(h, G)$. В самом деле, для всякого многочлена

$$P_{nk}(x, y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} c_{ms}F_{ms}(x, y)+\sum_{s=0}^{k} c_{ns}F_{ns}(x, y) \tag{8}$$

аналогично формуле (5), учитывая формулу (2), получаем равенство

$$\begin{aligned}\|f-P_{nk}\|^2&=\|f\|^2-2(f;\ P_{nk})+(P_{nk};\ P_{nk})=\\&=\|f\|^2-2\left[\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}c_{ms}+\sum_{s=0}^{k}A_{ns}c_{ns}\right]+\\&\quad+\left[\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}c_{ms}^2+\sum_{s=0}^{k}c_{ns}^2\right]=\|f\|^2+\\&\quad+\left[\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}(A_{ms}-c_{ms})^2+\sum_{s=0}^{k}(A_{ns}-c_{ns})^2\right]-\\&\quad-\left[\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}^2+\sum_{s=0}^{k}A_{ns}^2\right].\end{aligned}$$

Следовательно, для любого многочлена (8) имеем неравенство

$$\|f-P_{nk}\|\geqslant\|f-S_{nk}\|. \tag{9}$$

Все эти, а также и некоторые другие свойства справедливы и для рядов Фурье по общим ортонормированным многочленам, определенным с помощью ортогональной матрицы (4.20) по формуле (4.22). В этом случае вместо ряда (3) будем иметь ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} b_{ms}Q_{ms}(x, y). \tag{10}$$

Вводим частичные суммы этого ряда:

$$S_{nk}^{*}(x, y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} b_{ms}Q_{ms}(x, y)+\sum_{s=0}^{k} b_{ns}Q_{ns}(x, y).$$

Тогда из неравенства (9) получаем два неравенства

$$\| f - S^*_{nn} \| \geqslant \| f - S_{nn} \|,$$
$$\| f - S_{nn} \| \geqslant \| f - S^*_{nn} \|,$$

из которых следуют два равенства

$$\| f - S_{nn} \| = \| f - S^*_{nn} \|,$$
$$S_{nn}(x, y) \equiv S^*_{nn}(x, y). \tag{11}$$

Этот результат очевиден и потому, что для всякой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(h, G)$ существует единственный многочлен порядка (n, n), приближающий эту функцию наилучшим образом в метрике пространства $L_2(h, G)$. Заметим, что в отличие от равенства (11) частичные суммы $S_{nk}(x, y)$ и $S^*_{nk}(x, y)$ рядов (3) и (10) при $k \neq n$, вообще говоря, не равны между собой, ибо в силу формулы (4.22) многочлен $Q_{ms}(x, y)$ может иметь любые степени переменного y, а не только степени, не превосходящие s, как это имеет место для многочлена $F_{ms}(x, y)$.

Далее, вычитая из тождества (11) аналогичное ему тождество для номера $n-1$, получим очень важное тождество

$$\sum_{s=0}^{n} A_{ns} F_{ns}(x, y) = \sum_{s=0}^{n} b_{ns} Q_{ns}(x, y). \tag{12}$$

Еще раз заметим, что в этом тождестве слева стоят основные ортонормированные многочлены, которые по весовой функции $h(x, y)$ определяются однозначно, а многочлены $\{Q_{ns}(x, y)\}$, стоящие справа, определяются по формуле (4.22) с помощью произвольной ортогональной матрицы вида (4.20). Возводя обе части тождества (12) в квадрат и интегрируя по области G с весом $h(x, y)$, получим равенство

$$\sum_{s=0}^{n} A^2_{ns} = \sum_{s=0}^{n} b^2_{ns}.$$

Следовательно, неравенство Бесселя (6) и условие (7) имеют место не только для основных, но и для всяких общих ортонормированных многочленов.

Таким образом, ортогональные ряды (3) и (10) имеют одинаковые внутренние суммы. Для этих сумм введем обозначения

$$B_n(x, y) = \sum_{s=0}^{n} b_{ns} Q_{ns}(x, y). \tag{13}$$

Тогда оба эти ряда можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x, y).$$

Сумму (13) можно упростить, если иметь в виду одну фиксированную функцию $f(x, y)$. В самом деле, для коэффициентов в сумме (13) в силу формулы (4.22) имеем равенство

$$b_{ns} = \iint_G h(x, y) f(x, y) Q_{ns}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_{sp}^{(n)} \iint_G h(x, y) f(x, y) F_{np}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_{sp}^{(n)} A_{np}, \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Поскольку функция $f(x, y)$ фиксирована, то коэффициенты Фурье $\{A_{np}\}$ определены. Эти коэффициенты можно рассматривать как координаты некоторого вектора в пространстве $n+1$ измерений. Далее, так как числа $\{a_{sp}^{(n)}\}$ образуют ортогональную матрицу вида (4.20), то систему уравнений (14) можно рассматривать как ортогональное преобразование вектора $\{A_{np}\}$ в вектор $\{b_{ns}\}$. Из линейной алгебры известно, что при любом фиксированном векторе $\{A_{np}\}$ всегда существует ортогональное преобразование с матрицей $\|a_{sp}^{(n)}\|$, которое переводит указанный вектор в вектор $\{b_{ns}\}$, у которого отлична от нуля только одна компонента. Не нарушая общности, можно считать, что после такого ортогонального преобразования имеем

$$b_{n0} = b_{n1} = \ldots = b_{n,n-1} = 0, \qquad b_{nn} \neq 0.$$

В этом случае формула (13) приводится к виду

$$B_n(x, y) = b_{nn} Q_{nn}(x, y).$$

Если считать, что эти преобразования выполнены для всех номеров n, то вместо ряда (10) получим ряд

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{nn}Q_{nn}(x, y)$. Еще раз заметим, что этот ряд получен при специальном выборе ортогональных многочленов в зависимости от функции $f(x, y)$. Для другой функции ортогональные многочлены в аналогичном ряде будут другими.

Приведем еще один результат о связи основных и общих ортогональных многочленов, соответствующих данной весовой функции $h(x, y)$ в области G. Равенство (12) можно представить в виде

$$\iint\limits_G h(u, v)\, f(u, v) \left[\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(u, v)\, F_{ns}(x, y)\right] du\, dv =$$
$$= \iint\limits_G h(u, v)\, f(u, v) \left[\sum_{s=0}^{n} Q_{ns}(u, v)\, Q_{ns}(x, y)\right] du\, dv.$$

Поскольку в этом равенстве функция $f(u, v)$ произвольна, то имеем тождество

$$\sum_{s=0}^{n} F_{ns}(u, v)\, F_{ns}(x, y) \equiv \sum_{s=0}^{n} Q_{ns}(u, v)\, Q_{ns}(x, y).$$

Из этого тождества следует, что и для общих ортонормированных многочленов справедлива формула Кристоффеля — Дарбу, установленная в конце § 3 для основных ортонормированных многочленов.

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ПРИМЕРЫ И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПО ОБЛАСТИ

§ 1. Различные произведения классических ортогональных многочленов

Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормированы на интервале (a, b) с весовой функцией $h_1(x)$, т. е.

$$\int_a^b h_1(x) P_n(x) P_k(x)\, dx = \delta_{nk}. \tag{1}$$

Далее, пусть аналогично многочлены $\{Q_m(y)\}$ ортонормированы на интервале (c, d) с весовой функцией $h_2(y)$, т. е.

$$\int_c^d h_2(y) Q_m(y) Q_s(y)\, dy = \delta_{ms}. \tag{2}$$

По этим двум интервалам образуем плоскую область

$$G = \{(x, y):\ a < x < b,\ c < y < d\}, \tag{3}$$

и в этой области рассмотрим весовую функцию с разделяющимися переменными

$$h(x, y) = h_1(x) h_2(y). \tag{4}$$

Рассмотрим многочлены по двум переменным

$$F_{nm}(x, y) = P_{n-m}(x) Q_m(y), \tag{5}$$
$$n = 0, 1, \ldots,\quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Эти многочлены можно расположить в виде таблицы:

$$\begin{array}{l}
P_0(x)Q_0(y), \\
P_1(x)Q_0(y),\ P_0(x)Q_1(y), \\
P_2(x)Q_0(y),\ P_1(x)Q_1(y),\ P_0(x)Q_2(y), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n(x)Q_0(y),\ P_{n-1}(x)Q_1(y),\ \ldots,\ P_0(x)Q_n(y), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{6}$$

Из формулы (5) следует, что эти многочлены являются моническими, т. е. справедливо равенство

$$F_{nm}(x, y) = c_{nm}x^{n-m}y^m + R_{n-1}(x, y),$$

где многочлен $R_{n-1}(x, y)$ имеет степень не выше $n-1$.

Докажем, что многочлены (6) являются ортонормированными по площади области (3) с весовой функцией (4). В самом деле, используя условия (1) и (2), находим

$$\iint\limits_G h(x, y)\, F_{nm}(x, y)\, F_{ks}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b h_1(x)\, P_{n-m}(x)\, P_{k-s}(x)\, dx \int\limits_c^d h_2(y)\, Q_m(y)\, Q_s(y)\, dy =$$

$$= \delta_{n-m,k-s}\delta_{ms}. \qquad (7)$$

Если $m = s$ и $n = k$, то правая часть равенства (7) равна 1, а во всех остальных случаях — нулю.

Рассмотрим некоторые наиболее важные примеры.

1. Пусть область G есть вся плоскость, а весовая функция определяется равенством

$$h(x, y) = \exp(-x^2 - y^2). \qquad (8)$$

В этом случае в качестве многочленов $\{P_n(x)\}$ и $\{Q_m(y)\}$ имеем многочлены Чебышева — Эрмита, ортогональные на всей оси. Для краткости будем называть их многочленами Эрмита. Формула (5) в этом случае имеет вид

$$F_{nm}(x, y) = H_{n-m}(x)H_m(y), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Таким образом, многочлены по двум переменным (9) ортогональны на всей плоскости с весовой функцией (8). Условно будем называть их многочленами Эрмита — Эрмита. Формулу (9) можно представить в виде равенства

$$F_{n+m,m}(x, y) = H_n(x)H_m(y), \qquad (10)$$

в котором индексы n и m могут принимать любые целые неотрицательные значения. Множество многочленов Эрмита — Эрмита (10) можно, конечно, представить в виде таблицы (6).

Далее, как известно [II.21, 24] многочлен Эрмита $H_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \qquad (11)$$

Аналогично имеем второе уравнение

$$H''_m(y) - 2yH'_m(y) + 2mH_m(y) = 0. \tag{12}$$

Умножим равенство (11) на $H_m(y)$, а равенство (12) на $H_n(x)$ и сложим почленно. В результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[H_n(x)H_m(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[H_n(x)H_m(y)] - \\ - 2x\frac{\partial}{\partial x}[H_n(x)H_m(y)] - 2y\frac{\partial}{\partial y}[H_n(x)H_m(y)] + \\ + 2(n+m)H_n(x)H_m(y) = 0.$$

Следовательно, многочлен (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 2(n+m)u = 0. \tag{13}$$

Иногда [II.10] многочлены Эрмита рассматриваются при весовой функции $h(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Тогда вместо (8) имеем формулу

$$h(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right). \tag{14}$$

В этом случае вместо уравнений (11) и (13) получим уравнения

$$H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (n+m)u = 0. \tag{16}$$

2. Пусть теперь область G есть первый координатный угол, т. е.

$$G = \{(x, y):\ x > 0,\ y > 0\}, \tag{17}$$

а весовая функция в этой области имеет вид

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta e^{-x}e^{-y}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{18}$$

В этом случае весовая функция также допускает разделение переменных, в результате чего имеем две весовые функции

$$h_1(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad h_2(y) = y^\beta e^{-y},$$

которые определяют две системы многочленов Чебышева — Лагерра

$$\{L_n(x;\ \alpha)\},\ \{L_m(y;\ \beta)\}. \tag{19}$$

Следовательно, многочлены

$$F_{n+m,m}(x,\ y) = L_n(x;\ \alpha)\,L_m(y;\ \beta) \tag{20}$$

ортонормированы с весом (18) по области (17). Эти многочлены будем называть многочленами Лагерра — Лагерра. Поскольку многочлены (19) удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$xL_n''(x;\alpha) + (1+\alpha-x)\,L_n'(x;\alpha) + nL_n(x;\alpha) = 0, \tag{21}$$

$$yL_m''(y;\beta) + (1+\beta-y)\,L_m'(y;\beta) + mL_m(y;\beta) = 0, \tag{22}$$

то многочлен (20) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\alpha-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (1+\beta-y)\frac{\partial u}{\partial y} + {}$$
$$+ (n+m)\,u = 0. \tag{23}$$

3. Аналогично определяются многочлены Лагерра — Эрмита, ортонормированные по правой полуплоскости

$$G = \{(x,\ y):\ x > 0\} \tag{24}$$

с весовой функцией

$$h(x,\ y) = x^{\alpha}e^{-x}\exp\{-y^2/2\},\qquad \alpha > -1. \tag{25}$$

В этом случае имеем

$$F_{n+m,m}(x,\ y) = L_n(x;\ \alpha)\,H_m(y). \tag{26}$$

Многочлен $H_m(y)$ аналогично (15) удовлетворяет уравнению

$$H_m''(y) - yH_m'(y) + mH_m(y) = 0. \tag{27}$$

Из уравнений (21) и (27) находим, что многочлен (26) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\alpha-x)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (n+m)\,u = 0. \tag{28}$$

4. Рассмотрим теперь многочлены Якоби — Эрмита, соответствующие области

$$G = \{(x,\ y):\ -1 < x < 1\} \tag{29}$$

и весовой функции

$$h(x, y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\},$$
$$\alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (30)$$

В этом случае имеем равенство

$$F_{n+m,m}(x, y) = P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y), \quad (31)$$

где многочлен Якоби $P_n(x; \alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)v'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]v' + \\ + n(\alpha+\beta+n+1)v = 0. \quad (32)$$

Как обычно, из уравнений (27) и (32) находим, что многочлен (31) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial u}{\partial x} - \\ - y\frac{\partial u}{\partial y} + [n(\alpha+\beta+n+1)+m]u = 0. \quad (33)$$

5. Следующая комбинация одномерных классических ортогональных многочленов — многочлены Якоби — Лагерра, которые соответствуют области

$$G = \{(x, y):\ -1 < x < 1,\ y > 0\} \quad (34)$$

и весовой функции

$$h(x, y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} y^{\gamma} e^{-y}. \quad (35)$$

Из уравнений (22) и (32) следует, что многочлены Якоби — Лагерра

$$F_{n+m,m}(x, y) = P_n(x; \alpha, \beta) L_m(y; \gamma) \quad (36)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + (1+\gamma-y)\frac{\partial u}{\partial y} + [n(\alpha+\beta+n+1)+m]u = 0. \quad (37)$$

6. Наконец, последняя комбинация — многочлены Якоби — Якоби определяются областью

$$G = \{(x, y):\ -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\} \quad (38)$$

и весовой функцией

$$h(x,\ y)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-y)^{\gamma}(1+y)^{\delta}. \tag{39}$$

В этом случае многочлены

$$F_{n+m,m}(x,\ y)=P_n(x;\ \alpha,\ \beta)P_m(y;\ \gamma,\ \delta) \tag{40}$$

в силу уравнения (32) удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial u}{\partial x}+\\+[\delta-\gamma-(\gamma+\delta+2)y]\frac{\partial u}{\partial y}+[n(\alpha+\beta+n+1)+\\+m(\gamma+\delta+m+1)]u=0. \tag{41}$$

Выбирая в последних формулах соответствующим образом параметры α, β, γ, δ, получим многочлены Чебышева — Чебышева, Чебышева — Лежандра, Лежандра — Лежандра.

Рассмотренные дифференциальные уравнения в частных производных для произведений одномерных классических ортогональных многочленов будут получены другими способами в дальнейшем изложении.

§ 2. Разные случаи связи ортогональности по области с ортогональностью по интервалу

1. Пусть многочлены $\{P_n(t)\}$ ортонормированы с четным весом $h_1(t)$ на интервале $(-1,\ 1)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} h_1(t)\,P_n(t)\,P_m(t)\,dt=\delta_{nm}. \tag{1}$$

Фиксируем x при условии $|x|<1$ и заменим в этом интеграле переменную интегрирования по формуле

$$t=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}},\qquad |x|<1. \tag{2}$$

Тогда из равенства (1) находим

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)P_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)P_m\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)\times\\\times\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}=\delta_{nm}. \tag{3}$$

Далее, вводим разложение

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k. \tag{4}$$

Производя в нем замену по формуле (2), получим

$$P_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)^k =$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} a_k y^k \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-k} = (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} R_n(x, y). \tag{5}$$

Так как весовая функция $h_1(t)$ — четная, то в силу известных результатов [11.21, 24] многочлен (4) содержит только те степени t, показатели которых имеют одинаковую с n четность. Пусть сначала n четное. Тогда в формуле (4) имеем $a_{2s+1} = 0$, и в равенстве (5) все оставшиеся числа $n-k$ четные. А если n нечетное, то $a_{2s} = 0$, и, как и в первом случае, во всех слагаемых числа $n-k$ также четные. Следовательно, в любом случае функция $R_n(x, y)$ есть алгебраический многочлен по x и по y степени n. Кроме того, поскольку в формуле (4) $a_n \neq 0$, то степень многочлена $R_n(x, y)$ по переменному y равна n.

С помощью формулы (5) равенство (3) приводится к виду

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) R_n(x, y) R_m(x, y)\, dy =$$

$$= (1-x^2)^N \delta_{nm}, \qquad N = \frac{1}{2}(n+m+1). \tag{6}$$

А в случае $n = m$ имеем равенство

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) R_m^2(x, y)\, dy = (1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Далее, пусть многочлены $\{Q_n(x; m)\}$ ортонормированы с весовой функцией

$$h_2(x)(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

на интервале $(-1, 1)$, т. е. имеем

$$\int_{-1}^{1} h_2(x)(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}} Q_n(x;\ m) Q_k(x;\ m)\,dx = \delta_{nk}. \tag{9}$$

Рассмотрим многочлен по двум переменным

$$F_{n+m,m}(x,\ y) = Q_n(x;\ m) R_m(x,\ y). \tag{10}$$

В силу равенства (5) этот многочлен имеет степень m по y, а общая его степень равна $n+m$. Докажем, что многочлены вида (10) ортонормированы в единичном круге

$$G = \{(x,\ y):\ x^2+y^2<1\} \tag{11}$$

с весовой функцией

$$h(x, y) = h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) h_2(x). \tag{12}$$

В самом деле, используя формулы (6), (10) и (12), находим последовательно

$$\iint_G h(x, y) F_{n+m,m}(x, y) F_{k+s,s}(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) h_2(x) Q_n(x;\ m) R_m(x, y) \times$$

$$\times Q_k(x;\ s) R_s(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} h_2(x) Q_n(x;\ m) Q_k(x; s) \times$$

$$\times \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) R_m(x, y) R_s(x, y)\,dy\right] dx =$$

$$= \delta_{ms} \int_{-1}^{1} h_2(x) Q_n(x;\ m) Q_k(x;\ s)(1-x^2)^N\,dx, \tag{13}$$

где для краткости положено $N = 0{,}5(m+s+1)$. Если $m \neq s$, то правая часть равенства (13) равна нулю, ибо $\delta_{ms} = 0$, причем в этом случае n и k любые. А если $m = s$, то правая часть равенства (13) в силу формулы (7) приводится к левой части равенства (9). Этим ортонормированность многочленов вида (10) с весом (12) по области (11) доказана.

2. Установленный результат допускает некоторое обобщение. Предположим, что многочлены $\{Q_n(x;\ m)\}$ ортонормированы с весом (8) на интервале $(a,\ b)$, где a и b удовлетворяют условию $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$. Тогда многочлены вида (10) ортонормированы с весом (12) по области

$$G = \{(x,\ y):\ x^2 + y^2 < 1,\ a < x < b\}.$$

В самом деле, при этих условиях формула (13) верна с заменой в ней интервала $(-1,\ 1)$ интервалом $(a,\ b)$. Остальное очевидно.

3. Предположим, что многочлены $\{Q_n(x;\ m)\}$ ортонормированы на интервале $(0,\ a)$, где $0 < a \leqslant \infty$, с весом

$$h_2(x)\, x^{m+\frac{1}{2}},$$

т. е. выполняется условие

$$\int_0^a x^{m+\frac{1}{2}} h_2(x)\, Q_n(x;\ m)\, Q_s(x;\ m)\, dx = \delta_{ns}. \tag{14}$$

Пусть, как и в начале настоящего параграфа, многочлены $\{P_n(t)\}$ ортонормированы на интервале $(-1,\ 1)$ с весом $h_1(t)$. Заменим в интеграле (1) переменное интегрирования по формуле

$$t = y/\sqrt{x}, \tag{15}$$

где x фиксировано при условии $0 < x < a$. В результате равенство (1) примет вид

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) P_n\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) P_m\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \frac{dy}{\sqrt{x}} = \delta_{nm}. \tag{16}$$

Далее, из формулы (4) аналогично формуле (5), используя подстановку (15), находим равенство

$$P_n(y/\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (y/\sqrt{x})^k =$$

$$= x^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} a_k y^k (\sqrt{x})^{n-k} = x^{-n/2} R_n(x,\ y). \tag{17}$$

Таким образом, многочлены (26) ортонормированы с весом (27) по области (28).

5. Пусть дана область

$$G = \{(x, y):\ xy > 0,\ \alpha < x + y < \beta\}. \tag{29}$$

Будем считать, что $\alpha \geqslant 0$. Если $\alpha > 0$, то область (29) есть трапеция, а при $\alpha = 0$ получим треугольник. Случай $\alpha < \beta \leqslant 0$ рассматривается аналогично.

Отображение

$$x = \frac{b - \tau}{b - a} t, \qquad y = \frac{\tau - a}{b - a} t \tag{30}$$

переводит в область (29) прямоугольник

$$D = \{(t, \tau):\ \alpha < t < \beta,\ a < \tau < b\}. \tag{31}$$

Якобиан преобразования имеет вид

$$J(t, \tau) = \frac{D(x, y)}{D(t, \tau)} = \frac{t}{b - a}. \tag{32}$$

Кроме того, из формул (30) имеем равенства

$$x + y = t, \quad \frac{ax + by}{x + y} = \tau. \tag{33}$$

Далее, обозначим через $\{P_m(\tau)\}$ многочлены, ортонормированные на сегменте $[a, b]$ с весовой функцией $h_1(\tau)$, т. е.

$$\int_a^b h_1(\tau) P_m(\tau) P_s(\tau)\, d\tau = \delta_{ms}. \tag{34}$$

Аналогично через $\{Q_n(t;\ m)\}$ обозначим многочлены, ортонормированные на сегменте $[\alpha, \beta]$ с весовой функцией

$$h_3(t) = h_2(t) t^{2m+1}, \tag{35}$$

т. е. имеем

$$\int_\alpha^\beta h_3(t) Q_n(t;\ m) Q_k(t;\ m)\, dt = \delta_{nk}. \tag{36}$$

А теперь в области (29) вводим весовую функцию

$$h(x, y) = h_1\left(\frac{ax + by}{x + y}\right) h_2(x + y). \tag{37}$$

Рассмотрим многочлены

$$F_{n+m,m}(x, y) = Q_n(x + y;\ m) P_m\left(\frac{ax + by}{x + y}\right)(x + y)^m. \tag{38}$$

Докажем, что эти многочлены ортогональны по области (29) с весовой функцией (37). Переходя от области (29) к области (31) и учитывая формулы (30) и (32), находим

$$J_{nk}^{(m,s)} = \iint_G h(x, y) F_{n+m,m}(x, y) F_{k+s,s}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G h_1\left(\frac{ax+by}{x+y}\right) h_2(x+y) \times$$

$$\times Q_n(x+y; m) P_m\left(\frac{ax+by}{x+y}\right)(x+y)^m \times$$

$$\times Q_k(x+y; s) P_s\left(\frac{ax+by}{x+y}\right)(x+y)^s\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{b-a} \iint_D h_1(\tau) h_2(t) Q_n(t; m) P_m(\tau) t^m \times$$

$$\times Q_k(t; s) P_s(\tau) t^{s+1} dt\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_\alpha^\beta h_2(t) Q_n(t; m) Q_k(t; s) t^{m+s+1} dt \times$$

$$\times \int_a^b h_1(\tau) P_m(\tau) P_s(\tau)\, d\tau. \quad (39)$$

Если $m \neq s$, то в силу условия (34) равен нулю второй интеграл в произведении (39). А если $m = s$, но $n \neq k$, то в силу формул (35) и (36) равен нулю первый интеграл в произведении (39). Таким образом, многочлены (38) ортогональны по области (29) с весовой функцией (37).

Различные частные случаи приведенных результатов рассматривали Ф. Дидон, Г. Орлов, А. Коншидер, Х. Лархер и другие. Общие случаи изложены в работах С. А. Агаханова [VI.1] и Г. К. Энгелиса [VI.34].

§ 3. Некоторые теоремы в случае весовой функции с разделяющимися переменными

Пусть на сегменте $[a, b]$ определены две непрерывно дифференцируемые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условию

$$\varphi(x) < \psi(x), \quad x \in (a, b). \quad (1)$$

Эти две функции при условии (1) определяют область

$$G = \{(x, y):\ a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \quad (2)$$

Предположим, что в области (2) дана весовая функция $h(x, y)$. Обозначим, как обычно, через $\{F_{nk}(x, y)\}$ основные ортонормированные многочлены, соответствующие весовой функции $h(x, y)$ и области (2), т. е. имеем

$$\iint\limits_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y)\, dx\, dy = \delta_{nm}\delta_{ks}. \tag{3}$$

В настоящем параграфе рассматривается случай весовой функции с разделяющимися переменными, т. е. имеем формулу

$$h(x, y) = h_1(x) h_2(y). \tag{4}$$

При этом будем считать, что обе функции $h_1(x)$ и $h_2(y)$ положительны и непрерывны в замкнутых областях, определяемых условиями (1) и (2).

Теорема 1. *Если в случае области* (2) *и весовой функции* (4) *многочлены* $\{F_{n0}(x, y)\}$ *не зависят от переменной* y, *то они ортонормированы на сегменте* $[a, b]$ *с весовой функцией*

$$h_3(x) = h_1(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_2(y)\, dy. \tag{5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия (1) функция (5) положительна. Далее, поскольку все многочлены $\{F_{n0}(x, y)\}$ не зависят от переменной y, то можно ввести обозначение $F_n(x) = F_{n0}(x, y)$. Тогда, используя формулы (4) и (5), равенство (3) приводим к виду

$$\iint\limits_G h(x, y) F_n(x) F_m(x)\, dx\, dy =$$
$$= \int\limits_a^b F_n(x) F_m(x) \left[h_1(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_2(y)\, dy \right] dx = \delta_{nm}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если при условиях* (1) *и* (4) *все многочлены* $\{F_{n0}(x, y)\}$ *не зависят от* y, *а три многочлена*

$$F_{11}(x, y),\ F_{22}(x, y),\ F_{33}(x, y) \tag{6}$$

не зависят от x, *то обе функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *постоянны на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. В силу условий теоремы многочлены (6) можно представить в виде

$$F_{11}(y),\ F_{22}(y),\ F_{33}(y). \tag{7}$$

Для этих многочленов из равенства (3) находим

$$\iint\limits_G h_1(x)\,h_2(y)\,F_{n0}(x)\,F_{kk}(y)\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_a^b h_1(x)\,F_{n0}(x)\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_{kk}(y)\,h_2(y)\,dy\right]dx = 0. \qquad (8)$$

Для краткости введем обозначение

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_{kk}(y)\,h_2(y)\,dy, \qquad k = 1, 2, 3. \qquad (9)$$

Тогда условие (8) представляется в виде

$$\int\limits_a^b h_1(x)\,F_{n0}(x)\,\Phi_k(x)\,dx = 0. \qquad (10)$$

Так как это равенство справедливо при любом номере n, причем каждый многочлен $F_{n0}(x)$ имеет степень n, то в силу теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами из равенства (10) находим условие

$$\int\limits_a^b h_1(x)\,F(x)\,\Phi_k(x)\,dx = 0, \qquad (11)$$

которое выполняется для всякой функции $F(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Поскольку функция $F(x)$ произвольна, то из условия (11) следует, что все три функции (9) равны нулю тождественно на отрезке $[a, b]$. Следовательно, дифференцируя функцию (9) по x получим тождество

$$F_{kk}[\psi(x)]h_2[\psi(x)]\psi'(x) = F_{kk}[\varphi(x)]h_2[\varphi(x)]\varphi'(x). \qquad (12)$$

Далее, для трех многочленов (7) вводим разложения

$$\begin{aligned} F_{11}(y) &= A_1(y + a_{10}),\\ F_{22}(y) &= A_2(y^2 + a_{21}y + a_{20}),\\ F_{33}(y) &= A_3(y^3 + a_{32}y^2 + a_{31}y + a_{30}). \end{aligned} \qquad (13)$$

Тогда из условия (12) получим три условия:

$$[\psi(x) + a_{10}]h_2[\psi(x)]\psi'(x) = [\varphi(x) + a_{10}]h_2[\varphi(x)]\varphi'(x), \qquad (14)$$

$$[\psi^2(x)+a_{21}\psi(x)+a_{20}]h_2[\psi(x)]\psi'(x)= \\ =[\varphi^2(x)+a_{21}\varphi(x)+a_{20}]h_2[\varphi(x)]\varphi'(x), \qquad (15)$$

$$[\psi^3(x)+a_{32}\psi^2(x)+a_{31}\psi(x)+a_{30}]h_2[\psi(x)]\psi'(x)= \\ =[\varphi^3(x)+a_{32}\varphi^2(x)+a_{31}\varphi(x)+a_{30}]h_2[\varphi(x)]\varphi'(x). \qquad (16)$$

Если выполняется условие $\varphi'(x)=0$ на всем отрезке $[a, b]$, то из тождества (14) следует аналогичное условие $\psi'(x)=0$, и в этом случае теорема доказана.

Предположим, что нашлась такая точка $x_0\in(a, b)$, в которой $\varphi'(x_0)\neq 0$. Тогда в силу непрерывности производной $\varphi'(x)$ условие $\varphi'(x)\neq 0$ выполняется в некотором интервале $\delta(x_0)$, содержащем точку x_0.

Из тождеств (14) и (15) находим

$$\{[\psi^2(x)+a_{21}\psi(x)+a_{20}][\varphi(x)+a_{10}]- \\ -[\varphi^2(x)+a_{21}\varphi(x)+a_{20}][\psi(x)+a_{10}]\}h_2[\varphi(x)]\varphi'(x)=0. \qquad (17)$$

Аналогично из (14) и (16) следует тождество

$$\{[\psi^3(x)+a_{32}\psi^2(x)+a_{31}\psi(x)+a_{30}][\varphi(x)+a_{10}]- \\ -[\varphi^3(x)+a_{32}\varphi^2(x)+a_{31}\varphi(x)+a_{30}][\psi(x)+a_{10}]\}\times \\ \times h_2[\varphi(x)]\varphi'(x)=0. \qquad (18)$$

Будем рассматривать эти тождества только в интервале $\delta(x_0)$, где $\varphi'(x)\neq 0$. Поскольку $h_2(y)\neq 0$, то оба последних множителя в тождествах (17) и (18) можно опустить. Поэтому в силу условия (1) тождество (17) приводится к виду

$$\varphi(x)\psi(x)+a_{10}[\varphi(x)+\psi(x)]+(a_{10}a_{21}-a_{20})=0. \qquad (19)$$

Аналогично из условия (18) находим тождество

$$\varphi(x)\psi(x)[\varphi(x)+\psi(x)]+a_{32}\varphi(x)\psi(x)+ \\ +a_{10}a_{32}[\varphi(x)+\psi(x)]+a_{10}[\psi^2(x)+\varphi(x)\psi(x)+\varphi^2(x)]+ \\ +(a_{10}a_{31}-a_{30})=0. \qquad (20)$$

Для упрощения этих тождеств введем обозначения

$$u(x)=\varphi(x)\psi(x), \quad v(x)=\varphi(x)+\psi(x), \qquad (21)$$

$$A=a_{10}a_{21}-a_{20}, \quad B=a_{10}a_{31}-a_{30}. \qquad (22)$$

Тогда вместо (19) и (20) получим тождества

$$u(x)+a_{10}v(x)+A=0, \qquad (23)$$

$$u(x)v(x)+a_{32}u(x)+a_{10}a_{32}v(x)+ \\ +a_{10}[v^2(x)-u(x)]+B=0. \qquad (24)$$

Определяя функцию $u(x)$ из тождества (23) и подставляя ее в условие (24), находим

$$\left(a_{10}^2 - A\right) v(x) + (a_{10} - a_{32}) A + B \equiv 0. \tag{25}$$

А теперь докажем, что выполняется условие

$$a_{10}^2 - A \neq 0. \tag{26}$$

В самом деле, ранее было доказано, что все три функции (9) равны нулю тождественно. Подставляя под знак интеграла (9) первые два многочлена (13), получим тождества

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (y + a_{10}) h_2(y)\, dy \equiv 0,$$

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (y^2 + a_{21} y + a_{20}) h_2(y)\, dy \equiv 0,$$

из которых находим

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y h_2(y)\, dy \equiv -a_{10} \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_2(y)\, dy, \tag{27}$$

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y^2 h_2(y)\, dy \equiv (a_{21} a_{10} - a_{20}) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_2(y)\, dy. \tag{28}$$

Далее, в силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y h_2(y) dy\right]^2 < \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_2(y)\, dy \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y^2 h_2(y)\, dy. \tag{29}$$

Здесь очевидно, что знак равенства исключается. Подставляя в неравенство (29) значения интегралов из тождеств (27) и (28), а также учитывая первое из обозначений (22), из неравенства (29) получим $a_{10}^2 < A$. Этим условие (26) доказано.

А теперь из тождества (25) следует, что $v(x)$ есть тождественное постоянное. Далее, из тождества (23) находим, что и $u(x)$ есть тождественное постоянное в интервале $\delta(x_0)$. Но тогда из равенств (21) следует, что обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ также постоянны в интервале $\delta(x_0)$. А это противоречит условию $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in \delta(x_0)$. Теорема доказана.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [VII.23], причем одна формулировка усилена.

§ 4. Условия взаимосвязи весовой функции и области ортогональности

В настоящем параграфе рассматриваются свойства ортогональных по области многочленов в том случае, когда весовая функция зависит от формы области ортогональности.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ определена весовая функция $h_1(t)$ и ей соответствуют ортонормированные многочлены $\{R_m(t)\}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} h_1(t) R_m(t) R_k(t)\, dt = \delta_{mk}. \tag{1}$$

Предположим, что на этом отрезке выполняется условие

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{2}$$

Тогда можно ввести функцию

$$\Phi(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{3}$$

и соответствующую ей область

$$G = \{(x, y):\ -1 < x < 1,\ |y| < \Phi(x)\}. \tag{4}$$

Далее, пусть на том же отрезке определена весовая функция

$$h_3(x;\ m) = h_2(x)[\Phi(x)]^{2m+1}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{5}$$

и ей соответствуют ортонормированные многочлены $\{Q_n(x;\ m)\}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} h_3(x; m)\, Q_n(x; m)\, Q_k(x; m)\, dx = \delta_{nk}. \tag{6}$$

Теорема 3. *Если весовая функция $h_1(t)$ четная, то для многочленов, ортонормированных по области (4) с весовой функцией*

$$h(x,\ y) = h_2(x)\, h_1[y/\Phi(x)], \tag{7}$$

справедлива формула

$$F_{n+m,\, m}(x,\ y) = Q_n(x;\ m)\, \Phi^m(x)\, R_m[y/\Phi(x)]. \tag{8}$$

Доказательство. Вводя разложение для многочлена $R_m(t)$, удовлетворяющего условию (1), получим формулу

$$\Phi^m(x) R_m\left[\frac{y}{\Phi(x)}\right] = \sum_{s=0}^{m} c_s y^s \Phi^{m-s}(x). \tag{9}$$

Поскольку весовая функция $h_1(t)$ четная, то многочлен $R_m(t)$ содержит только те степени t, показатели которых имеют одинаковую с m четность. Следовательно, в формуле (9) могут быть отличными от нуля только те из коэффициентов $\{c_s\}$, для которых числа $m-s$ четные. Поэтому, функция (9) есть многочлен степени m по y и степени не более m по совокупности переменных. Отсюда следует, что формула (8) определяет многочлен общей степени $n+m$ и степени m по y.

Докажем ортогональность многочленов (8) по области (4) с весом (7). Используя формулы (7) и (8), находим

$$\iint_G h(x, y)\, F_{n+m,m}(x, y)\, F_{k+s,s}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} h_2(x)\, Q_n(x; m)\, Q_k(x; s)\, [\Phi(x)]^{m+s+1} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\Phi(x)}^{\Phi(x)} h_1\left[\frac{y}{\Phi(x)}\right] R_m\left[\frac{y}{\Phi(x)}\right] R_s\left[\frac{y}{\Phi(x)}\right] \frac{dy}{\Phi(x)} \right\} dx. \tag{10}$$

Во внутреннем интеграле заменим переменное интегрирование по формуле $y = t\Phi(x)$. В результате, используя равенство (1), правую часть равенства (10) приведем к виду

$$\delta_{ms} \int_{-1}^{1} h_2(x) Q_n(x; m)\, Q_k(x; s)\, [\Phi(x)]^{m+s+1}\, dx. \tag{11}$$

Если $m \neq s$, то величина (11) равна нулю, ибо $\delta_{ms} = 0$. А если $m = s$, то в силу формул (5) и (6) произведение (11) будет равно δ_{nk}. Теорема доказана.

Теорема справедлива и в том случае, если равенство (3) с условием (2) заменяется равенством и условием

$$\Phi(x) = Ax + B \geqslant 0, \quad x \in [-1, 1],$$

причем в этом случае условие четности функции $h_1(t)$ можно опустить.

Приведем еще один результат о зависимости области ортогональности и весовой функции от свойств ортонормированной системы многочленов.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ определены две непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, для которых выполняется условие

$$\varphi(x) < \psi(x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{12}$$

Эти две функции при условии (12) определяют область

$$G = \{(x, y): -1 < x < 1,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \tag{13}$$

Введем переменную t, связанную с x и y формулами

$$t = \frac{2y - \psi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)}, \quad y = \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{2} t + \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2}. \tag{14}$$

Пусть в области (13) определена весовая функция

$$h(x, y) = h_2(x) h_1\left[\frac{2y - \psi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)}\right], \tag{15}$$

и ей соответствуют ортонормированные многочлены $\{F_{nk}(x, y)\}$.

Теорема 4. *Если функция $h_1(t)$ четная на сегменте $[-1, 1]$, а все многочлены $\{F_{n0}(x, y)\}$ не зависят от y, то существуют такие постоянные A и B и такой неотрицательный на сегменте $[-1, 1]$ многочлен $ax^2 + bx + c$, что область* (13) *совпадает с областью*

$$G = \{(x, y): -1 < x < 1,\ |y - Ax - B| < \sqrt{ax^2 + bx + c}\}. \tag{16}$$

Доказательство. В силу ортогональности многочленов $\{F_{n0}(x)\}$ с весовой функцией (15) имеем равенство

$$\iint_G h(x, y) F_{n0}(x) F_{m0}(x)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} h_2(x) F_{n0}(x) F_{m0}(x) \left[\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{2}\right] \times$$

$$\times \left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h_1\left[\frac{2y - \psi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)}\right] \frac{2dy}{\psi(x) - \varphi(x)}\right\} dx = \delta_{nm}. \tag{17}$$

Во внутреннем интеграле заменим переменное интегрирования по формулам (14). В результате этот интеграл приведется к виду $\int\limits_{-1}^{1} h_1(t)\,dt = h_{10}$. Тогда из формулы (17) следует, что многочлены $\{F_{n0}(x)\}$ ортонормированы на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_2(x)\frac{1}{2}[\psi(x)-\varphi(x)]\,h_{10}.$$

Далее, аналогично равенству (17) при $k \neq 0$ имеем

$$\iint\limits_G h(x, y)\,F_{n0}(x)\,F_{kk}(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} h_2(x)\,F_{n0}(x)\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_{kk}(x, y)\,h_1\left[\frac{2y-\psi(x)-\varphi(x)}{\psi(x)-\varphi(x)}\right]dy\,dx = 0. \tag{18}$$

Для внутреннего интеграла вводим обозначение

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_{kk}(x, y)\,h_1\left[\frac{2y-\psi(x)-\varphi(x)}{\psi(x)-\varphi(x)}\right]dy. \tag{19}$$

Тогда равенство (18) приводится к виду

$$\int\limits_{-1}^{1} h_2(x)\,F_{n0}(x)\,\Phi_k(x)\,dx = 0.$$

Так как $k \neq 0$, то это равенство справедливо при всех n. Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами из последнего равенства следует условие

$$\int\limits_{-1}^{1} h_2(x)\,F(x)\,\Phi_k(x)\,dx = 0,$$

где $F(x)$ — произвольная функция, непрерывная на сегменте $[-1, 1]$. Следовательно, все функции вида (19) равны нулю тождественно на отрезке $[-1, 1]$, т. е. имеем

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_{kk}(x, y)\,h_1\left[\frac{2y-\psi(x)-\varphi(x)}{\psi(x)-\varphi(x)}\right]dy \equiv 0. \tag{20}$$

Рассмотрим тождество (20) для двух многочленов

$$F_{11}(x,\ y) = A_{11}(a_{11}x + y + a_{10}), \tag{21}$$

$$F_{22}(x,\ y) = A_{22}(a_{21}x^2 + a_{22}xy + y^2 + a_{23}x + a_{24}y + a_{25}). \tag{22}$$

Обозначения в формулах (21), (22) объясняются тем, что старшие коэффициенты этих многочленов отличны от нуля. Заменим в интеграле (20) переменное интегрирования y по формулам (14), и подставим многочлен (21) под знак интеграла. В результате получим

$$a_{11}x\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + \left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt +$$

$$+\left[\frac{\psi^2(x)-\varphi^2(x)}{4}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + a_{10}\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)dt = 0.$$

Поскольку весовая функция $h_1(t)$ четная, то второй интеграл в этом равенстве равен нулю. Следовательно, используя условие (12), придем к равенству

$$a_{11}x + \frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2} + a_{10} = 0. \tag{23}$$

Аналогично, подставляя разложение (22) в интеграл (20), находим

$$a_{21}x^2\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt +$$

$$+ a_{22}x\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt\right] +$$

$$+\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]^2\int_{-1}^{1} t^2h_1(t)\,dt + \frac{\psi^2(x)-\varphi^2(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt +$$

$$+\left[\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2}\right]^2\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + a_{23}x\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt +$$

$$+ a_{24}\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt\right] +$$

$$+ a_{25}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt = 0. \tag{24}$$

Для интегралов в этом равенстве введем обозначения

$$h_{1k} = \int_{-1}^{1} t^k h_1(t)\,dt, \qquad k = 0, 1, 2.$$

В силу четности весовой функции имеем $h_{11} = 0$. Следовательно, равенство (24) приводится к виду

$$a_{21}x^2h_{10} + a_{22}x\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}h_{10} + \left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]^2 h_{12} +$$
$$+\left[\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2}\right]^2 h_{10} + a_{23}xh_{10} + a_{24}\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}h_{10} + a_{25}h_{10} = 0. \tag{25}$$

Далее, из формулы (23) следует равенство

$$\varphi(x) + \psi(x) = 2(Ax + B). \tag{26}$$

Подставляя это значение суммы двух функций в равенство (25), получим соотношение

$$[(\psi(x) - \varphi(x))/2]^2 = ax^2 + bx + c \geqslant 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

из которого следует формула

$$\psi(x) - \varphi(x) = 2\sqrt{ax^2 + bx + c}. \tag{27}$$

А теперь из (26) и (27) находим равенства

$$\psi(x) = Ax + B + \sqrt{ax^2 + bx + c},$$
$$\varphi(x) = Ax + B - \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

В результате неравенство

$$\varphi(x) < y < \psi(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

приводится к виду

$$-\sqrt{ax^2 + bx + c} < y - Ax - B < \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Таким образом, области (13) и (16) совпадают. Теорема доказана.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [VII.23].

§ 5. Конкретные примеры вычисления моментов весовой функции

В § 3 гл. I приведены формулы, в которых основные ортонормированные по области многочлены представляются в виде определителей, составленных с помощью

Рассмотрим тождество (20) для двух многочленов

$$F_{11}(x,\ y) = A_{11}(a_{11}x + y + a_{10}), \tag{21}$$

$$F_{22}(x,\ y) = A_{22}(a_{21}x^2 + a_{22}xy + y^2 + a_{23}x + a_{24}y + a_{25}). \tag{22}$$

Обозначения в формулах (21), (22) объясняются тем, что старшие коэффициенты этих многочленов отличны от нуля. Заменим в интеграле (20) переменное интегрирования y по формулам (14), и подставим многочлен (21) под знак интеграла. В результате получим

$$a_{11}x\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + \left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + {}$$
$$+ \left[\frac{\psi^2(x)-\varphi^2(x)}{4}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + a_{10}\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]\int_{-1}^{1} h_1(t)dt = 0.$$

Поскольку весовая функция $h_1(t)$ четная, то второй интеграл в этом равенстве равен нулю. Следовательно, используя условие (12), придем к равенству

$$a_{11}x + \frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2} + a_{10} = 0. \tag{23}$$

Аналогично, подставляя разложение (22) в интеграл (20), находим

$$a_{21}x^2\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + {}$$
$$+ a_{22}x\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt\right] + {}$$
$$+ \left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]^2\int_{-1}^{1} t^2h_1(t)\,dt + \frac{\psi^2(x)-\varphi^2(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + {}$$
$$+ \left[\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2}\right]^2\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + a_{23}x\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt + {}$$
$$+ a_{24}\left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\int_{-1}^{1} th_1(t)\,dt + \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt\right] + {}$$
$$+ a_{25}\int_{-1}^{1} h_1(t)\,dt = 0. \tag{24}$$

Для интегралов в этом равенстве введем обозначения

$$h_{1k} = \int_{-1}^{1} t^k h_1(t)\,dt, \qquad k = 0, 1, 2.$$

В силу четности весовой функции имеем $h_{11} = 0$. Следовательно, равенство (24) приводится к виду

$$a_{21}x^2 h_{10} + a_{22}x\,\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\,h_{10} + \left[\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{2}\right]^2 h_{12} +$$
$$+\left[\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{2}\right]^2 h_{10} + a_{23}xh_{10} + a_{24}\,\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\,h_{10} + a_{25}h_{10} = 0. \tag{25}$$

Далее, из формулы (23) следует равенство

$$\varphi(x) + \psi(x) = 2(Ax + B). \tag{26}$$

Подставляя это значение суммы двух функций в равенство (25), получим соотношение

$$[(\psi(x) - \varphi(x))/2]^2 = ax^2 + bx + c \geqslant 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

из которого следует формула

$$\psi(x) - \varphi(x) = 2\sqrt{ax^2 + bx + c}. \tag{27}$$

А теперь из (26) и (27) находим равенства

$$\psi(x) = Ax + B + \sqrt{ax^2 + bx + c},$$
$$\varphi(x) = Ax + B - \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

В результате неравенство

$$\varphi(x) < y < \psi(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

приводится к виду

$$-\sqrt{ax^2 + bx + c} < y - Ax - B < \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Таким образом, области (13) и (16) совпадают. Теорема доказана.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [VII.23].

§ 5. Конкретные примеры вычисления моментов весовой функции

В § 3 гл. I приведены формулы, в которых основные ортонормированные по области многочлены представляются в виде определителей, составленных с помощью моментов весовой функции. Если известны моменты весовой функции, то, используя формулы (1.3.3), (1.3.8) и (1.3.10), можно вычислить любое конечное число ортогональных по области многочленов, соответствующих данной области ортогональности и весовой функции в ней. Эти формулы при больших номерах, конечно, весьма громоздки, но в принципе можно считать ортогональные многочлены известными, если известны моменты весовой функции. В настоящем параграфе приводятся различные случаи, когда все моменты весовой функции вычисляются конкретно или представляются через известные величины.

Пусть в области G определена весовая функция $h(x, y)$. Моменты этой функции определяются по формуле

$$h_{n+k,k} = \iint_G h(x, y)\, x^n y^k\, dx\, dy. \tag{1}$$

Рассмотрим простейшие случаи, когда все эти интегралы вычисляются.

1. Пусть дана область

$$G = \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x^p\},$$

где $p \geqslant 0$, и в ней весовая функция

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta, \qquad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{2}$$

Тогда в силу формулы (1) имеем

$$h_{n+k,k} = \iint_G x^{\alpha+n} y^{\beta+k}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha+n}\left[\int_0^{x^p} y^{\beta+k}\, dy\right] dx = \frac{1}{(\beta+k+1)[\alpha+n+1+p(\beta+k+1)]}.$$

2. Ту же самую весовую функцию (2) рассмотрим в неограниченной области

$$G = \{(x, y):\ x > 0, \quad 0 < y < e^{-x}\}.$$

В этом случае, применяя формулу (1), находим

$$h_{n+k,k} = \int_0^\infty x^{\alpha+n}\left[\int_0^{e^{-x}} y^{\beta+k}\, dy\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\beta+k+1}\int_0^\infty x^{\alpha+n}e^{-x(\beta+k+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{(\beta+k+1)^{\alpha+n+2}}\int_0^\infty t^{\alpha+n}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\beta+k+1)^{\alpha+n+2}}.$$

3. Рассмотрим теперь область

$$G = \{(x, y):\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1\}$$

и в ней весовую функцию

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta (1-x^2-y^2)^p, \tag{3}$$

где $\alpha>-1$, $\beta>-1$ и $p>-1$. В этом случае в силу формулы (1) имеем

$$h_{n+k,k} = \iint_G x^{\alpha+n}y^{\beta+k}(1-x^2-y^2)^p\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-\rho^2)^p\rho^{n+k+\alpha+\beta+1}d\rho \int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{\alpha+n}(\sin\varphi)^{\beta+k}\,d\varphi. \tag{4}$$

Далее воспользуемся известными формулами

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}, \tag{5}$$

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi)^{a-1}(\cos\varphi)^{b-1}\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

С помощью этих формул находим

$$\int_0^1(1-\rho^2)^p\rho^{n+k+\alpha+\beta+1}d\rho = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k+\alpha+\beta+2}{2}\right)\Gamma(p+1)}{2\Gamma\left(\frac{n+k+\alpha+\beta}{2}+p+2\right)},$$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{\alpha+n}(\sin\varphi)^{\beta+k}\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+n+\beta+k}{2}+1\right)}. \tag{6}$$

Подставляя эти значения в формулу (4), получим

$$h_{n+k,k}=\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\alpha+n+\beta+k}{2}+p+2\right)}.$$

4. Пусть теперь дана область

$$G=\{(x,\ y):\ x^2+y^2<1\}.$$

Тогда в формуле весовой функции (3) параметры α и β могут быть только натуральными числами. В этом случае вместо формулы (4) получим равенство

$$h_{n+k,k}=\int_0^1(1-\rho^2)^p\,\rho^{n+k+\alpha+\beta+1}d\rho\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{\alpha+n}(\sin\varphi)^{\beta+k}d\varphi.$$

Здесь второй интеграл равен нулю, если хотя бы одно из чисел $\alpha+n$ и $\beta+k$ нечетное. А если оба эти числа четные, то в силу равенства (6) имеем

$$\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{\alpha+n}(\sin\varphi)^{\beta+k}\,d\varphi=2\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+\beta+k}{2}+1\right)}.$$

Таким образом, и в этом случае все моменты вычисляются.

5. Рассмотрим область в виде треугольника

$$G=\{(x,\ y):\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$$

и в ней весовую функцию

$$h(x,y)=x^\alpha y^\beta(1-x-y)^\gamma \tag{7}$$

при условиях $\alpha>-1$, $\beta>-1$ и $\gamma>-1$. Как обычно, имеем

$$h_{n+k,k}=\iint_G x^{\alpha+n}y^{\beta+k}(1-x-y)^\gamma\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^1 x^{\alpha+n}\left[\int_0^{1-x}y^{\beta+k}(1-x-y)^\gamma\,dy\right]dx. \tag{8}$$

С помощью известной формулы [I.1]

$$\int_0^c x^{a-1}(c-x)^{b-1}\,dx=c^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

находим

$$\int_0^{1-x} y^{\beta+k}(1-x-y)^{\gamma}\,dy = (1-x)^{\beta+k+\gamma+1}\frac{\Gamma(\beta+k+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+k+\gamma+2)}.$$

Подставляя это значение в интеграл (8), получаем

$$h_{n+k,k} = \frac{\Gamma(\beta+k+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+k+\gamma+2)}\int_0^1 x^{\alpha+n}(1-x)^{\beta+k+\gamma+1}dx.$$

Для вычисления интеграла используем формулу (5) при $m=1$. В результате имеем

$$h_{n+k,k} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+k+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n+\beta+k+\gamma+3)}.$$

Многочлены, определяемые весовой функцией (7), называются многочленами Аппеля.

6. Пусть теперь в области

$$G = \{(x,\ y):\ x^2 < y\}$$

дана весовая функция $h(x,\ y)=(y-x^2)^{\alpha}e^{-\beta y}$ при условиях $\alpha>-1$ и $\beta>0$. Тогда в силу формулы (1) находим

$$h_{n+k,k} = \iint_G (y-x^2)^{\alpha}\,e^{-\beta y}x^n y^k dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty} y^k e^{-\beta y}\left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(y-x^2)^{\alpha}\,x^n dx\right]dy. \qquad (9)$$

Если n нечетное, то внутренний интеграл равен нулю. А при $n=2m$ имеем

$$2\int_0^{\sqrt{y}}(y-x^2)^{\alpha}\,x^{2m}dx = 2y^{\alpha}\int_0^{\sqrt{y}}\left(1-\frac{x^2}{y}\right)^{\alpha}x^{2m}dx =$$

$$= 2y^{\alpha+m+\frac{1}{2}}\int_0^1(1-t^2)^{\alpha}t^{2m}dt = y^{\alpha+m+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(m+\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Подставляем правую часть в равенство (9). В результате получим

$$h_{n+k,k}=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(m+\alpha+\frac{3}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\beta y}y^{k+\alpha+m+\frac{1}{2}}dy=$$

$$=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(m+\alpha+\frac{3}{2}\right)\beta^{k+\alpha+m+\frac{3}{2}}}\int_0^\infty e^{-t}t^{k+\alpha+m+\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\alpha+m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\alpha+\frac{3}{2}\right)\beta^{k+\alpha+m+\frac{3}{2}}}.$$

Можно привести и другие примеры, когда степенные моменты весовой функции в данной области вычисляются в конечном виде. Во всех этих случаях с помощью определителей можно вычислить несколько первых ортонормированных многочленов. При этом можно, например, воспользоваться формулами (1.3.11).

Глава III

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ АППЕЛЯ

§ 1. Формула Родрига для многочленов Аппеля

В настоящей главе излагаются основные свойства многочленов Аппеля. Эти многочлены можно рассматривать как некоторое обобщение на случай двух переменных ортогональных многочленов Якоби.

Пусть дана треугольная область

$$G = \{(x, y):\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\} \tag{1}$$

и в ней весовая функция

$$h(x, y) = x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta}. \tag{2}$$

Будем считать, что параметры весовой функции (2) удовлетворяют условиям

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > \alpha + \beta - 1. \tag{3}$$

Для краткости положим

$$p = \gamma - \alpha - \beta > -1. \tag{4}$$

Далее, введем стандартные обозначения

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1). \tag{5}$$

Здесь a означает первый сомножитель, а n — число сомножителей.

Рассмотрим функцию

$$A_{nm}(x, y) = A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) =$$
$$= \frac{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}{(\alpha)_n (\beta)_m (1 - x - y)^p} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{(1 - x - y)^{p+n+m}}{x^{1-n-\alpha} y^{1-m-\beta}} \right]. \tag{6}$$

Докажем, что эта функция при любых целых неотрицательных n и m есть многочлен по x и y. Это можно сделать с помощью формулы Лейбница для производной высшего порядка от произведения двух функций

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{7}$$

Сначала применим эту формулу для частной производной по x в равенстве (6). В результате, используя обозначение (5), получим

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^{\alpha+n-1}(1-x-y)^{p+n+m}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^{\alpha+n-1}\right)^{(n-k)}\left[(1-x-y)^{p+n+m}\right]^{(k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+k)\,x^{\alpha+k-1}\times$$

$$\times(p+n+m)(p+n+m-1)\ldots(p+n+m-k+1)\times$$

$$\times(1-x-y)^{p+n+m-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\alpha+k)_{(n-k)}x^{\alpha+k-1}\times$$

$$\times(-1)^k(p+n+m-k+1)_k(1-x-y)^{p+n+m-k}. \qquad (8)$$

Подставляем сумму (8) в равенство (6) и снова дифференцируем с помощью формулы (7) m раз теперь уже по y. В результате находим последовательно

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left[y^{\beta+m-1}(1-x-y)^{p+n+m-k}\right]=$$

$$=\sum_{s=0}^{m} C_m^s \left(y^{\beta+m-1}\right)^{(m-s)}\left[(1-x-y)^{p+n+m-k}\right]^{(s)}=$$

$$=\sum_{s=0}^{m} C_m^s (\beta+m-1)(\beta+m-2)\ldots(\beta+s)\,y^{\beta+s-1}\times$$

$$\times(p+n+m-k)(p+n+m-k-1)\ldots(p+n+m-k-s+1)\times$$

$$\times(1-x-y)^{p+n+m-k-s}(-1)^s=\sum_{s=0}^{m} C_m^s(\beta+s)_{(m-s)}y^{\beta+s-1}\times$$

$$\times(p+n+m-k-s+1)_s(1-x-y)^{p+n+m-k-s}(-1)^s. \qquad (9)$$

Подставляя правые части равенств (8) и (9) в формулу (6), получаем

$$A_{nm}(x,y)=\frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{(\alpha)_n(\beta)_m(1-x-y)^p}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\alpha+k)_{(n-k)}\,x^{\alpha+k-1}(p+n+m-k+1)_k(-1)^k\times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m} C_m^s (\beta + s)_{(m-s)} y^{\beta+s-1} (-1)^s \times$$
$$\times (p + n + m - k - s + 1)_s (1 - x - y)^{p+n+m-k-s}.$$

После очевидных сокращений, наконец, имеем формулу

$$A_{nm}(x, y) =$$
$$= \frac{1}{(\alpha)_n (\beta)_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} C_n^k (\alpha + k)_{(n-k)} x^k \times$$
$$\times (p + n + m - k + 1)_k (p + n + m - k - s + 1)_s \times$$
$$\times (-1)^{k+s} C_m^s (\beta + s)_{(m-s)} y^s (1 - x - y)^{n+m-k-s}. \qquad (10)$$

Таким образом, функция (6) есть многочлен по x и y. Этот многочлен называется *многочленом Аппеля*, а формула (6) — формулой Родрига для многочленов Аппеля. Из формулы (10) следует, что степени многочлена Аппеля отдельно по x и по y равны $n+m$. Такова же и степень этого многочлена по совокупности переменных.

Преобразуем формулу (10). Прежде всего, имеем равенства

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}(-1)^k(-n)_k,$$
$$C_m^s = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!}(-1)^s(-m)_s,$$
$$(p+n+m-k-s+1)_s (p+n+m-k+1)_k =$$
$$= (p+n+m-k-s+1)(p+n+m-k-s+2)\dots$$
$$\dots(p+n+m-k)(p+n+m-k+1)(p+n+m-k+2)\dots$$
$$\dots(p+n+m) = (p+n+m-k-s+1)_{(k+s)} =$$
$$= (-1)^{k+s}(-n-m-p)_{k+s}.$$

С помощью этих равенств коэффициент в формуле (10) приводится к виду

$$\frac{(-1)^{k+s}(-n)_k(-m)_s(-n-m-p)_{(k+s)}(\alpha+k)_{(n-k)}(\beta+s)_{(m-s)}}{(k!)(s!)(\alpha)_n(\beta)_m}. \qquad (11)$$

Далее, используя обозначение (5), находим

$$\frac{(\alpha+k)_{(n-k)}}{(\alpha)_n} = \frac{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\dots(\alpha+k+n-k+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{(\alpha)_k},$$

нутой области $\bar{G}$. В силу формулы Грина находим

$$\iint_G f(x, y) F'_x(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{x_0}^{x} f(x, y) F'_x(x, y)\, dx\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y) F(x, y) - \int_{x_0}^{x} f'_x(x, y) F(x, y)\, dx\right] dx\, dy =$$

$$= \int_\Gamma f(x, y) F(x, y)\, dy - \iint_G f'_x(x, y) F(x, y)\, dx\, dy. \quad (17)$$

Если на контуре Г выполняется условие

$$F(x, y) = 0, \quad (18)$$

то криволинейный интеграл равен нулю, и равенство (17) приводится к виду

$$\iint_G f(x, y) F'_x(x, y)\, dx\, dy = -\iint_G F(x, y) f'_x(x, y)\, dx\, dy. \quad (19)$$

Далее, аналогично равенству (17) имеем

$$\iint_G f(x, y) F'_y(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{y_0}^{y} f(x, y) F'_y(x, y)\, dy\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{\partial}{\partial y}\left[f(x, y) F(x, y) - \int_{y_0}^{y} f'_y(x, y) F(x, y)\, dy\right] dx\, dy =$$

$$= -\int_\Gamma f(x, y) F(x, y)\, dx - \iint_G f'_y(x, y) F(x, y)\, dx\, dy. \quad (20)$$

Следовательно, при том же условии (18) имеем равенство

$$\iint_G f(x, y) F'_y(x, y)\, dx\, dy = -\iint_G f'_y(x, y) F(x, y)\, dx\, dy. \quad (21)$$

Разумеется, формулы (19) и (21) справедливы, если вместо условия (18) на контуре Г выполняется условие $f(x, y) = 0$.

Далее, с помощью формул (19) и (21) нетрудно получить равенство

$$\iint\limits_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx\, dy =$$
$$= (-1)^{n+m} \iint\limits_G F(x, y) \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx\, dy. \quad (22)$$

Это равенство справедливо, если функция $F(x, y)$ и все ее частные производные, кроме последней смешанной порядка $n+m$, обращаются в нуль на контуре Г, либо тому же самому условию удовлетворяет функция $f(x, y)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x, y) = x^{n+\alpha-1} y^{m+\beta-1} (1-x-y)^{p+n+m}. \quad (23)$$

В силу условий (3) и обозначения (4) все частные производные этой функции, кроме двух последних смешанных порядков $(n-1)+m$ и $n+(m-1)$, равны нулю на контуре Г, который является границей области (1). Тем не менее нетрудно доказать, что и для функции (23) справедлива формула (22), если выполняется условие $n+m \geqslant 1$, т. е. если хотя бы одно из чисел n или m отлично от нуля.

Пусть $n \geqslant 1$. Тогда в силу формулы (17) имеем

$$\iint\limits_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} f(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dy -$$
$$- \iint\limits_G f'_x(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx\, dy. \quad (24)$$

Рассмотрим частную производную

$$\frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m}. \quad (25)$$

Из формулы (23) следует, что эта частная производная равна нулю на вертикальном катете и на гипотенузе контура Г. А на горизонтальном катете имеем условие $y = 0$. Следовательно, криволинейный интеграл в формуле (24) равен нулю.

А если $m \geqslant 1$, то из формулы (20) находим

$$\iint_G f(x, y)\frac{\partial^{n+m}F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}dx\,dy = -\int_\Gamma f(x, y)\frac{\partial^{n+m-1}F(x, y)}{\partial x^n \partial y^{m-1}}dx - \\ - \iint_G f'_y(x, y)\frac{\partial^{n+m-1}F(x, y)}{\partial x^n \partial y^{m-1}}dx\,dy. \quad (26)$$

Аналогично предыдущему случаю, рассматривая вместо (25) частную производную $\dfrac{\partial^{n+m-1}F(x, y)}{\partial x^n \partial y^{m-1}}$, найдем, что криволинейный интеграл в формуле (26) равен нулю. Таким образом, для функции (23) справедливо равенство (22), причем в некоторых случаях интегралы в этом равенстве могут быть несобственными.

Применим теперь формулу (22) к интегралу, стоящему в равенстве (16). В результате получим

$$(P_N; A_{nm}) = \\ = \frac{(-1)^{n+m}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\iint_G F(x, y)\frac{\partial^{n+m}P_N(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}dx\,dy. \quad (27)$$

Далее, поскольку $N < n + m$, то многочлен $P_N(x, y)$ содержит только одночлены вида $x^k y^s$, где $k + s < n + m$. Поэтому имеем тождество

$$\frac{\partial^{n+m}P_N(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = 0. \quad (28)$$

Следовательно, интеграл (27) равен нулю, т. е. имеем

$$(P_N;\ A_{nm}) = 0, \qquad N < n + m. \quad (29)$$

Таким образом, многочлен Аппеля $A_{nm}(x, y)$ ортогонален всем многочленам младших степеней и, в частности, всем многочленам $A_{ks}(x, y)$ при условии $k + s < n + m$. А если $k + s = n + m$, то условие (28) не выполняется. Следовательно, многочлены Аппеля, принадлежащие одной и той же пачке, вообще говоря, не ортогональны между собой.

§ 2. Представление многочленов Аппеля через гипергеометрическую функцию двух переменных

Гипергеометрическая функция одной переменной определяется как сумма степенного ряда по формуле [I.1]

$$F(x; a, b, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(\alpha)_k k!}x^k. \quad (1)$$

Этот ряд сходится при условии $|x| < 1$, а сама функция (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [\alpha - (a+b+1)x]\frac{du}{dx} - abu = 0. \qquad (2)$$

Для этой функции имеют место формулы Эйлера [I.1]

$$F(x; a, b, \alpha) = \frac{1}{(1-x)^a} F\left(\frac{x}{x-1}; a, \alpha-b, \alpha\right), \qquad (3)$$

$$F(x; a, b, \alpha) = \frac{1}{(1-x)^b} F\left(\frac{x}{x-1}; \alpha-a, b, \alpha\right), \qquad (4)$$

$$F(x; a, b, \alpha) = (1-x)^{\alpha-a-b} F(x; \alpha-a, \alpha-b, \alpha). \qquad (5)$$

Как известно [I.1], существует несколько типов гипергеометрических функций двух переменных. Рассмотрим только одну из них, которая называется гипергеометрической функцией Аппеля и определяется равенством

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_s (c)_{(k+s)}}{(\alpha)_k (\beta)_s k!\, s!} x^k y^s. \qquad (6)$$

Эта функция зависит от пяти действительных параметров

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta. \qquad (7)$$

Нетрудно показать, что ряд (6) сходится абсолютно при условии $|x| + |y| < 1$.

Рассмотрим связь гипергеометрической функции Аппеля (6) с гипергеометрической функцией одного переменного (1). Из формулы (6) с помощью равенства

$$(c)_{k+s} = c(c+1)\ldots(c+s-1)(c+s)\ldots(c+s+k-1) = \\ = (c)_s (c+s)_k = (c)_k (c+k)_s$$

находим последовательно

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c+s)_k}{(\alpha)_k k!} x^k\right] y^s = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(x; a, c+s, \alpha)\, y^s. \qquad (8)$$

Аналогично, меняя порядок суммирования, получим еще одну формулу:

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c+k)_s}{(\beta)_s s!} y^s \right] x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(y; b, c+k; \beta)\, x^k. \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) для гипергеометрической функции Аппеля нетрудно установить ряд тождеств, аналогичных формулам (3)—(5). Прежде всего, используя равенство (4), из (8) находим

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(x; a, c+s, \alpha)\, y^s =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^c} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F\left(\frac{x}{x-1}; \alpha - a, c+s, \alpha\right) \left(\frac{y}{1-x}\right)^s =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^c} F_2\left(\frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}; \alpha - a, b, c, \alpha, \beta\right). \quad (10)$$

Аналогично, используя равенство (9), получаем

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(y; b, c+k, \beta)\, x^k =$$

$$= \frac{1}{(1-y)^c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F\left(\frac{y}{y-1}; \beta - b, c+k, \beta\right) \left(\frac{x}{1-y}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{(1-y)^c} F_2\left(\frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}; a, \beta - b, c, \alpha, \beta\right). \quad (11)$$

Далее, к функции $F_2\left(\frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}; \alpha - a, b, c, \alpha, \beta\right)$ применяем формулу (11). В результате имеем

$$F_2\left(\frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}; \alpha - a, b, c, \alpha, \beta\right) =$$

$$= \frac{(1-x)^c}{(1-x-y)^c} F_2\left(\frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}; \alpha - a, \beta - b, c, \alpha, \beta\right).$$

Подставляя это значение в правую часть равенства (10), придем к тождеству

$$F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) = \\ = \frac{1}{(1-x-y)^c} F_2\left(\frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}; \alpha - a, \beta - b, c, \alpha, \beta\right). \tag{12}$$

Эти и другие тождества для гипергеометрической функции Аппеля рассмотрены в монографиях [I.1; III.1].

Произведем в тождестве (12) замену двух параметров по формулам $\alpha - a = a'$ и $\beta - b = b'$. Опуская штрихи у новых параметров, получим

$$F_2(x, y; \alpha - a, \beta - b, c, \alpha, \beta) = \\ = \frac{1}{(1-x-y)^c} F_2\left(\frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}; a, b, c, \alpha, \beta\right). \tag{13}$$

Положим в этом тождестве

$$a = -n, \quad b = -m, \quad c = -n - m - p, \tag{14}$$

где параметр p определяется равенством (1.4). В этом случае имеем равенства

$$(a)_k = (-n)_k = (-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1),$$
$$(b)_s = (-m)_s = (-m)(-m+1)\ldots(-m+s-1),$$

из которых получаем

$$(-n)_k = 0, \quad k > n; \qquad (-m)_s = 0, \quad s > m. \tag{15}$$

Таким образом, при условиях (14) разложение (6) превращается в конечную сумму. Применяя формулу (6) к функции, стоящей в правой части равенства (13) и учитывая условия (15), получим равенство

$$F_2\left(\frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}; -n, -m, -n-m-p, \alpha, \beta\right) = \\ = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} \frac{(-n)_k(-m)_s(-n-m-p)_{(k+s)}}{k!\, s!\, (\alpha)_k (\beta)_s}\left(\frac{x}{x+y-1}\right)^k\left(\frac{y}{x+y-1}\right)^s. \tag{16}$$

А теперь сравниваем равенства (16) и (1.14). Поскольку суммы, стоящие в правых частях этих равенств, одинаковы, то, следовательно, имеем

$$A_{nm}(x, y) = A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) =$$
$$= (1 - x - y)^{n+m} F_2\left(\frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1};\right.$$
$$\left. -n, -m, -n-m-p, \alpha, \beta\right). \quad (17)$$

Далее, гипергеометрическую функцию, стоящую в правой части равенства (17), заменяем по формуле (13). В результате получим

$$A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) =$$
$$= (1 - x - y)^{-p} F_2(x, y; \alpha + n, \beta + m, -n - m - p, \alpha, \beta). \quad (18)$$

Таким образом, многочлены Аппеля представляются через гипергеометрическую функцию двух переменных по формулам (17) и (18) при специальных значениях параметров (7). С помощью (17) и (18) можно изучать свойства многочленов Аппеля. Еще раз заметим, что в этих формулах $p = \gamma - \alpha - \beta > -1$.

Рассмотрим теперь дифференцирование гипергеометрической функции Аппеля. Из разложения (6), учитывая равенства

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{k!} = \frac{1}{(k-n)!},$$
$$\frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)}{s!} = \frac{1}{(s-m)!},$$

находим

$$\frac{\partial^{n+m} F_2}{\partial x^n \partial y^m} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_s (c)_{(k+s)}}{(\alpha)_k (\beta)_s (k-n)! (s-m)!} x^{k-n} y^{s-m}. \quad (19)$$

Далее вводим новые индексы суммирования p и q по формулам $k - n = p$ и $s - m = q$. Используя равенства

$$(\alpha)_k = (\alpha)_{(n+p)} = (\alpha)_n (\alpha + n)_p,$$
$$(\beta)_s = (\beta)_{(m+q)} = (\beta)_m (\beta + m)_q,$$
$$(c)_{(k+s)} = (c)_{(n+m)} (c + n + m)_{(p+q)},$$

из разложения (19) получаем

$$\frac{\partial^{n+m} F_2}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{(a)_n (b)_m (c)_{(n+m)}}{(\alpha)_n (\beta)_m} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a+n)_p (b+m)_q (c+n+m)_{(p+q)}}{(\alpha+n)_p (\beta+m)_q p!\,q!} x^p y^q =$$

$$= \frac{(a)_n (b)_m (c)_{(n+m)}}{(\alpha)_n (\beta)_m} F_2(x, y; a+n, b+m, c+n+m, \alpha+n, \beta+m).$$

Такова формула для вычисления частных производных от гипергеометрической функции Аппеля.

§ 3. Дифференциальное уравнение для многочленов Аппеля

Сначала докажем, что функция Аппеля

$$v = F_2(x, y; a, b, c, \alpha, \beta) \tag{1}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + [\alpha - (c+a+1)x]\frac{\partial v}{\partial x} - \\ - ay\frac{\partial v}{\partial y} - cav = 0, \tag{2}$$

$$y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + [\beta - (c+b+1)y]\frac{\partial v}{\partial y} - \\ - bx\frac{\partial v}{\partial x} - cbv = 0. \tag{3}$$

В самом деле, в силу формулы (2.8) имеем равенства

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F''(x; a, c+s, \alpha) y^s,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F'(x; a, c+s, \alpha) s y^{s-1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F'(x; a, c+s, \alpha) y^s,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(x; a, c+s, \alpha) s y^{s-1},$$

$$v = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(x; a, c+s, \alpha) y^s.$$

Умножая эти равенства на соответствующие множители, определяемые уравнением (2), и складывая их почленно, получим равенство

$$x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+[\alpha-(c+a+1)x]\frac{\partial v}{\partial x}-ay\frac{\partial v}{\partial y}-cav=$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(b)_s(c)_s}{(\beta)_s s!}\{x(1-x)F''(x;a,c+s,\alpha)+$$
$$+[\alpha-(a+c+s+1)x]F'(x;a,c+s,\alpha)-$$
$$-a(c+s)F(x;a,c+s,\alpha)\}y^s.$$

Сумма в фигурных скобках равна нулю тождественно при соответствующих x и s, так как функция $F(x;\ a,\ c+s,\ \alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2) при условии $b=c+s$. Следовательно, функция (1) удовлетворяет уравнению (2).

Аналогичным образом для проверки уравнения (3) находим производные из формулы (2.9) и составляем левую часть уравнения (3). В результате получим

$$y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+[\beta-(c+b+1)y]\frac{\partial v}{\partial y}-bx\frac{\partial v}{\partial x}-cbv=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(c)_k}{(\alpha)_k k!}\{y(1-y)F''(y;b,c+k,\beta)+$$
$$+[\beta-(b+c+k+1)y]F'(y;b,c+k,\beta)-$$
$$-b(k+c)F(y;b,c+k,\beta)\}x^k.$$

Сумма в фигурных скобках равна нулю тождественно. Следовательно, функция (1) удовлетворяет уравнению (3).

Таким образом, функция (1) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2) и (3). Складывая эти два уравнения, получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+$$

$$+ [\alpha - (a + b + c + 1)x]\frac{\partial v}{\partial x} + [\beta - (a + b + c + 1)y]\frac{\partial v}{\partial y} - \\ - c(a + b)v = 0. \quad (4)$$

Далее, в силу (2.18) имеем равенство

$$v = F_2(x, y; \alpha + n, \beta + m, c, \alpha, \beta) = \\ = (1 - x - y)^p A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \quad (5)$$

где введены обозначения

$$c = -n - m - p, \quad p = \gamma - \alpha - \beta. \quad (6)$$

Для функции (5) при условиях (6) уравнение (4) приводится к виду

$$x(1 - x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + y(1 - y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\ + [\alpha - (\alpha + \beta - p + 1)x]\frac{\partial v}{\partial x} + [\beta - (\alpha + \beta - p + 1)y]\frac{\partial v}{\partial y} - \\ - c(\alpha + \beta + n + m)v = 0. \quad (7)$$

А теперь для краткости введем обозначение

$$u = A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma). \quad (8)$$

Тогда равенство (5) представляется в виде

$$v = (1 - x - y)^p u. \quad (9)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (7). Для того, чтобы получить уравнение для многочлена Аппеля (8), подставим функцию (9) в (7). Дифференцируя функцию (9), находим равенства

$$v'_x = -p(1 - x - y)^{p-1}u + (1 - x - y)^p u'_x,$$

$$v''_{xx} = p(p - 1)(1 - x - y)^{p-2}u - 2p(1 - x - y)^{p-1}u'_x + \\ + (1 - x - y)^p u''_{xx},$$

$$v''_{xy} = p(p - 1)(1 - x - y)^{p-2}u - p(1 - x - y)^{p-1}u'_y - \\ - p(1 - x - y)^{p-1}u'_x + (1 - x - y)^p u''_{xy},$$

$$v'_y = -p(1 - x - y)^{p-1}u + (1 - x - y)^p u'_y,$$

$$v''_{yy} = p(p - 1)(1 - x - y)^{p-2}u - 2p(1 - x - y)^{p-1}u'_y + \\ + (1 - x - y)^p u''_{yy}.$$

Все эти производные, а также функцию (9) подставляем в уравнение (7). Но сначала заметим, что все эти величины имеют общий множитель $(1-x-y)^{p-2}$. Поэтому, опуская этот множитель, из уравнения (7) получим уравнение

$$x(1-x)\left[p(p-1)u-2p(1-x-y)u'_x+\right.$$
$$\left.+(1-x-y)^2u''_{xx}\right]-2xy\left[p(p-1)u-p(1-x-y)(u'_x+u'_y)+\right.$$
$$\left.+(1-x-y)^2u''_{xy}\right]+y(1-y)\left[p(p-1)u-2p(1-x-y)u'_y+\right.$$
$$\left.+(1-x-y)^2u''_{yy}\right]+[\alpha-(\alpha+\beta-p+1)x](1-x-y)\times$$
$$\times\left[-pu+(1-x-y)u'_x\right]+$$
$$+[\beta-(\alpha+\beta-p+1)y](1-x-y)\left[-pu+(1-x-y)u'_y\right]-$$
$$-c(\alpha+\beta+n+m)(1-x-y)^2u=0. \quad (10)$$

Вычисляя сомножитель при функции u в последнем уравнении, находим

$$p(p-1)[x(1-x)-2xy+y(1-y)]-$$
$$-p(1-x-y)[\alpha-(\alpha+\beta-p+1)x+\beta-$$
$$-(\alpha+\beta-p+1)y]-c(\alpha+\beta+n+m)(1-x-y)^2=$$
$$=(1-x-y)[p(p-1)(x+y)-p(\alpha+\beta)+$$
$$+p(\alpha+\beta-p+1)x+p(\alpha+\beta-p+1)y-$$
$$-c(\alpha+\beta+n+m)(1-x-y)]=$$
$$=(1-x-y)^2[-p(\alpha+\beta)-c(\alpha+\beta+n+m)]=$$
$$=(1-x-y)^2[-p(\alpha+\beta)+(n+m+p)(\alpha+\beta+n+m)]=$$
$$=(1-x-y)^2(n+m)(n+m+\gamma).$$

Аналогично, вычисляя сомножители при производных u'_x и u'_y в (10), получим соответственно величины

$$(1-x-y)^2[\alpha-(\gamma+1)x], \quad (1-x-y)^2[\beta-(\gamma+1)y].$$

Следовательно, уравнение (10) приводится к виду

$$x(1-x)u''_{xx}-2xyu''_{xy}+y(1-y)u''_{yy}+$$
$$+[\alpha-(\gamma+1)x]u'_x+[\beta-(\gamma+1)y]u'_y+$$
$$+(n+m)(n+m+\gamma)u=0. \quad (11)$$

Таким образом, многочлен Аппеля (8) удовлетворяет уравнению (11). Оно зависит от параметров α, β, γ и от чисел n и m, причем эти числа входят в (11) в виде суммы $n+m$. Представим это уравнение в несколько ином виде. Введем обозначение

$$\lambda_{nm}=(n+m)(n+m+\gamma). \tag{12}$$

Тогда из (11) получим уравнение

$$x(x-1)u''_{xx}+2xyu''_{xy}+y(y-1)u''_{yy}+$$
$$+[(\gamma+1)x-\alpha]u'_x+[(\gamma+1)y-\beta]u'_y=\lambda_{nm}u. \tag{13}$$

Поскольку числа n и m входят в формулу (12) в виде суммы, то при фиксированном $N=n+m$ величина (12) не изменяется, если числа n и m меняются так, что их сумма постоянна. Следовательно, уравнение (13) при собственном значении (12) имеет $n+m+1$ линейно независимых решений в виде многочленов Аппеля одной и той же пачки.

§ 4. Ортогональность собственных функций уравнения Аппеля

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — собственные функции уравнения Аппеля, соответствующие различным собственным значениям λ_{nm} и λ_{pq}, т. е. имеем

$$x(x-1)u''_{xx}+2xyu''_{xy}+y(y-1)u''_{yy}+$$
$$+[(\gamma+1)x-\alpha]u'_x+[(\gamma+1)y-\beta]u'_y=\lambda_{nm}u, \tag{1}$$
$$x(x-1)v''_{xx}+2xyv''_{xy}+y(y-1)v''_{yy}+$$
$$+[(\gamma+1)x-\alpha]v'_x+[(\gamma+1)y-\beta]v'_y=\lambda_{pq}v. \tag{2}$$

Докажем, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ортогональны по области

$$G=\{(x, y):\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\} \tag{3}$$

с весовой функцией

$$h(x, y)=x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}, \tag{4}$$

где параметры, как обычно, удовлетворяют условиям

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\ \gamma-\alpha-\beta>-1. \tag{5}$$

Умножаем уравнение (1) на v, а уравнение (2) — на u и вычитаем почленно из первого равенства второе. В результате получим

$$x(x-1)\left[vu''_{xx}-uv''_{xx}\right]+2xy\left[vu''_{xy}-uv''_{xy}\right]+$$
$$+y(y-1)\left[vu''_{yy}-uv''_{yy}\right]+[(\gamma+1)x-\alpha]\left[vu'_x-uv'_x\right]+$$
$$+[(\gamma+1)y-\beta]\left[vu'_y-uv'_y\right]=(\lambda_{nm}-\lambda_{pq})uv. \quad (6)$$

Интегрируя равенство (6) почленно с весовой функцией (4) по области (3), находим

$$\iint_G h(x, y)\,x(x-1)\left[vu''_{xx}-uv''_{xx}\right]dx\,dy+$$
$$+2\iint_G h(x, y)\,xy\left[vu''_{xy}-uv''_{xy}\right]dx\,dy+$$
$$+\iint_G h(x, y)\,y(y-1)\left[vu''_{yy}-uv''_{yy}\right]dx\,dy+$$
$$+\iint_G h(x, y)\,[(\gamma+1)x-\alpha]\left[vu'_x-uv'_x\right]dx\,dy+$$
$$+\iint_G h(x, y)\,[(\gamma+1)y-\beta]\left[vu'_y-uv'_y\right]dx\,dy=$$
$$=(\lambda_{nm}-\lambda_{pq})\iint_G h(x, y)\,u(x, y)\,v(x, y)\,dx\,dy. \quad (7)$$

Докажем, что сумма всех интегралов, стоящих в левой части равенства (7), равна нулю. Будем применять к этим интегралам формулы интегрирования по частям, приведенные в § 1. В силу формулы (1.17) имеем равенство

$$\iint_G h(x, y)\,x(x-1)\left[vu''_{xx}-uv''_{xx}\right]dx\,dy=$$
$$=\int_\Gamma hx(x-1)\,vu'_x dy-\iint_G u'_x\frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)v]\,dx\,dy-$$
$$-\int_\Gamma hx(x-1)\,uv'_x dy+\iint_G v'_x\frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)u]\,dx\,dy. \quad (8)$$

Аналогично с помощью формулы (1.20) получаем

$$\iint_G h(x, y)\,xy\left[vu''_{xy}-uv''_{xy}\right]dx\,dy=$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} hxyvu'_x dx - \iint\limits_{G} u'_x \frac{\partial}{\partial y}[hxyv]\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} hxyuv'_x dx + \iint\limits_{G} v'_x \frac{\partial}{\partial y}[hxyu]\,dx\,dy. \quad (9)$$

Поскольку контур Γ состоит из двух катетов, расположенных по осям координат, и гипотенузы, то в силу условий (5) криволинейные интегралы в равенствах (8) и (9) по катетам равны нулю. Обозначим гипотенузу через L. Так как на L выполняется условие $x + y = 1$, то имеем равенства

$$\int\limits_{L} hx(x-1)\,vu'_x dy = \int\limits_{L} hxyvu'_x dx,$$

$$\int\limits_{L} hx(x-1)\,uv'_x dy = \int\limits_{L} hxyuv'_x dx.$$

Следовательно, при почленном сложении равенств (8) и (9) криволинейные интегралы взаимно уничтожаются, и в правой части останутся только двойные интегралы.

Аналогичные рассуждения можно применить и к равенствам

$$\iint\limits_{G} h(x, y)\,xy\,[vu''_{xy} - uv''_{xy}]\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} hxyvu'_y dy - \iint\limits_{G} u'_y \frac{\partial}{\partial x}[hxyv]\,dx\,dy -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} hxyuv'_y dy + \iint\limits_{G} v'_y \frac{\partial}{\partial x}[hxyu]\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{G} h(x, y)\,y(y-1)\,[vu''_{yy} - uv''_{yy}]\,dx\,dy =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} hy(y-1)\,vu'_y dx - \iint\limits_{G} u'_y \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)\,v]\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} hy(y-1)\,uv'_y dx + \iint\limits_{G} v'_y \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)\,u]\,dx\,dy.$$

Следовательно, равенство (7) приводится к виду

$$\iint\limits_{G} \Big\{ -u'_x \frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)\,v] + v'_x \frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)\,u] -$$

$$- u_x' \frac{\partial}{\partial y}[hxyv] + v_x' \frac{\partial}{\partial y}[hxyu] - u_y' \frac{\partial}{\partial x}[hxyv] +$$

$$+ v_y' \frac{\partial}{\partial x}[hxyu] - u_y' \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)v] +$$

$$+ v_y' \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)u]\Big\}\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_G h(x, y)[(\gamma+1)x - \alpha]\left[vu_x' - uv_x'\right]dx\,dy +$$

$$+ \iint_G h(x, y)[(\gamma+1)y - \beta]\left[vu_y' - uv_y'\right]dx\,dy =$$

$$= (\lambda_{nm} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y)\,u(x, y)\,v(x, y)\,dx\,dy. \quad (10)$$

Если при вычислении частных производных от произведений, стоящих в квадратных скобках, выделить частные производные от функций u и v, то взаимно уничтожатся восемь слагаемых, и сумма в фигурных скобках формулы (10) несколько упростится. В результате из (10) получим равенство

$$\iint_G \Big\{- u_x'v \frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)] + v_x'u \frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)] -$$

$$- u_x'v \frac{\partial}{\partial y}[hxy] + v_x'u \frac{\partial}{\partial y}[hxy] - u_y'v \frac{\partial}{\partial x}[hxy] +$$

$$+ v_y'u \frac{\partial}{\partial x}[hxy] - u_y'v \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)] + v_y'u \frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)] +$$

$$+ h[(\gamma+1)x - \alpha]\left[vu_x' - uv_x'\right] +$$

$$+ h[(\gamma+1)y - \beta]\left[vu_y' - uv_y'\right]\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= (\lambda_{nm} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y)\,u(x, y)\,v(x, y)\,dx\,dy. \quad (11)$$

Докажем, что сумма в фигурных скобках равна нулю тождественно в области G. Для этого достаточно сгруппировать слагаемые по четырем множителям

$$u_x'v,\ v_x'u,\ u_y'v,\ v_y'u \quad (12)$$

и доказать, что коэффициенты при этих множителях равны нулю. Из формулы (11) находим, что при множителях (12) стоят соответственно величины

$$-\frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)]-\frac{\partial}{\partial y}[hxy]+h[(\gamma+1)x-\alpha],$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[hx(x-1)]+\frac{\partial}{\partial y}[hxy]-h[(\gamma+1)x-\alpha],$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}[hxy]-\frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)]+h[(\gamma+1)y-\beta],$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[hxy]+\frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)]-h[(\gamma+1)y-\beta].$$

С помощью формулы (4) для весовой функции $h(x, y)$ нетрудно доказать, что все эти четыре величины равны нулю тождественно в области G. Проведем вычисления, например, для последней из этих величин. В силу формулы (4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}[hxy]+\frac{\partial}{\partial y}[hy(y-1)]-h[(\gamma+1)y-\beta]=$$
$$=h'_x xy+hy+h'_y y(y-1)+h(y-1)+hy-$$
$$-h[(\gamma+1)y-\beta]=xy[(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}-$$
$$-(\gamma-\alpha-\beta)x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta-1}]+$$
$$+3hy-h+y(y-1)[(\beta-1)x^{\alpha-1}y^{\beta-2}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}-$$
$$-(\gamma-\alpha-\beta)x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta-1}]-$$
$$-h[(\gamma+1)y-\beta]=h\Big[(\alpha-1)y-\frac{(\gamma-\alpha-\beta)}{1-x-y}xy+$$
$$+3y-1+(\beta-1)(y-1)-y(y-1)\frac{\gamma-\alpha-\beta}{1-x-y}-$$
$$-(\gamma+1)y+\beta\Big]=0.$$

Следовательно, из равенства (11) при условии $\lambda_{nm}\neq\lambda_{pq}$ имеем

$$\iint\limits_G h(x, y)\,u(x, y)\,v(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Таким образом, собственные функции уравнения Аппеля, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

§ 5. Нормальная биортогональная система Аппеля

Как было отмечено в § 1, многочлены Аппеля, входящие в одну пачку с номером $N = n + m$, не ортогональны между собой. Поэтому в соответствии с § 5 гл. I целесообразно ввести такую систему многочленов $\{\Psi_{ks}(x, y)\}$, которая была бы биортогональной с системой многочленов Аппеля $\{A_{nm}(x, y)\}$, т. е. для этих систем выполнялись бы условия

$$\iint_G k(x, y) A_{nm}(x, y) \Psi_{ks}(x, y)\, dx\, dy = \delta_{nk}\delta_{ms}. \tag{1}$$

Пусть фиксированы целые неотрицательные числа k и s. Рассмотрим гипергеометрическую функцию Аппеля (2.6) при условиях

$$a = -k, \quad b = -s, \quad c = k + s + \gamma. \tag{2}$$

В этом случае формула (2.6) приводится к виду

$$F_2(x, y; -k, -s, k+s+\gamma, \alpha, \beta) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-k)_p (-s)_q (k+s+\gamma)_{(p+q)}}{(\alpha)_p (\beta)_q\, p!\, q!} x^p y^q. \tag{3}$$

Учитывая равенства

$$(-k)_p = 0, \quad p > k; \qquad (-s)_q = 0, \quad q > s, \tag{4}$$

находим, что функция (3) есть многочлен степени $k + s$ по совокупности переменных. Поэтому можно ввести обозначение

$$B_{ks}(x, y) = B_{ks}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{s} \frac{(-k)_p (-s)_q (k+s+\gamma)_{(p+q)}}{(\alpha)_p (\beta)_q\, p!\, q!} x^p y^q. \tag{5}$$

Эти многочлены будем называть многочленами Аппеля второго рода. Каждый из них является моническим, т. е. содержит только один член степени $k + s$. Кроме того, из формулы (5) следует, что первый индекс k означает наивысшую степень по x, а второй индекс s — наивысшую степень по y. Следовательно, многочлен $B_{k0}(x, y)$ не зависит от y, а многочлен $B_{0s}(x, y)$ не зависит от x.

Гипергеометрическая функция Аппеля (2.6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4). Это уравнение при условиях (2) имеет вид

$$x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+$$
$$+[\alpha-(\gamma+1)x]\frac{\partial v}{\partial x}+[\beta-(\gamma+1)y]\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+(k+s)(k+s+\gamma)v=0. \quad (6)$$

Таким образом, многочлен (5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). А тогда, в силу результатов предыдущего параграфа, если собственные числа

$$\lambda_{nm}=(n+m)(n+m+\gamma),\quad \lambda_{ks}=(k+s)(k+s+\gamma) \quad (7)$$

различны, то для многочленов (5) выполняется условие ортогональности

$$\iint\limits_G h(x,y)B_{nm}(x,y)B_{ks}(x,y)\,dx\,dy=0. \quad (8)$$

Далее, многочлен Аппеля $A_{nm}(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.11). И поскольку уравнения (3.11) и (6) одинаковы, то две системы многочленов

$$\{A_{nm}(x,y)\},\quad \{B_{ks}(x,y)\} \quad (9)$$

являются собственными функциями одного и того же дифференциального уравнения (6). Поэтому если собственные числа (7) различны, то в силу результатов предыдущего параграфа многочлены $A_{nm}(x, y)$ и $B_{ks}(x, y)$ ортогональны между собой, т. е. выполняется условие

$$\iint\limits_G h(x,y)A_{nm}(x,y)B_{ks}(x,y)\,dx\,dy=0. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь случай

$$n+m=k+s,\quad n\neq k,\quad m\neq s. \quad (11)$$

Применяя формулы (1.2), (1.6) и формулу интегрирования по частям (1.27), находим

$$(A_{nm};B_{ks})=\iint\limits_G h(x,y)A_{nm}(x,y)B_{ks}(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{(\alpha)_n(\beta)_m}\iint\limits_G B_{ks}(x,y)\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{(1-x-y)^{p+n+m}}{x^{1-n-\alpha}y^{1-m-\beta}}\right]dx\,dy=$$
$$=\frac{(-1)^{n+m}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\iint\limits_G\frac{(1-x-y)^{p+n+m}}{x^{1-n-\alpha}y^{1-m-\beta}}\,\frac{\partial^{n+m}B_{ks}(x,y)}{\partial x^n\partial y^m}\,dx\,dy. \quad (12)$$

Далее, старший член многочлена (5) имеет вид

$$\frac{(-k)_k (-s)_s (k+s+\gamma)_{(k+s)}}{(\alpha)_k (\beta)_s\, k!\, s!} x^k y^s = \\ = \frac{(-1)^{k+s} (k+s+\gamma)_{(k+s)}}{(\alpha)_k (\beta)_s} x^k y^s. \quad (13)$$

Поскольку при условиях (11) либо $k < n$, либо $s < m$, то имеет место тождество $\dfrac{\partial^{n+m} B_{ks}(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \equiv 0$. Поэтому интеграл, стоящий в правой части равенства (12), равен нулю. Следовательно, равенство (10) доказано и при условиях (11).

Таким образом, многочлены (9) образуют биортогональную систему многочленов с весом Аппеля (1.2) в общем случае.

Рассмотрим теперь равенство (12) при условиях $k = n$ и $s = m$. В этом случае, используя коэффициент старшего члена (13), находим

$$c_{nm} = (A_{nm}; B_{nm}) = \frac{(n+m+\gamma)_{(n+m)}\, n!\, m!}{[(\alpha)_n (\beta)_m]^2} H_{nm}, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$H_{nm} = \iint\limits_G (1-x-y)^{p+n+m} x^{\alpha+n-1} y^{\beta+m-1}\, dx\, dy. \quad (15)$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$H_{nm} = \int\limits_0^1 x^{\alpha+n-1} \left[\int\limits_0^{1-x} y^{\beta+m-1} (1-x-y)^{p+n+m} dy \right] dx. \quad (16)$$

Для внутреннего интеграла имеем равенство

$$\int\limits_0^{1-x} y^{\beta+m-1} (1-x-y)^{p+n+m} dy = \\ = (1-x)^{\beta+p+n+2m} \mathrm{B}(\beta+m, p+n+m+1).$$

Подставляя это значение в формулу (16), получаем

$$H_{nm} = \mathrm{B}(\beta+m, p+n+m+1) \int\limits_0^1 x^{\alpha+n-1} (1-x)^{\beta+p+n+2m} dx = \\ = \mathrm{B}(\beta+m, p+n+m+1)\, \mathrm{B}(\alpha+n, \beta+p+n+2m+1).$$

Этим величина (15) вычислена. Подставляя ее значение в формулу (14), получим нормировочный коэффициент c_{nm}. Разумеется, выражение для этого коэффициента можно упрощать и далее.

А теперь вводим многочлены

$$\Psi_{ks}(x, y) = \frac{1}{c_{ks}} B_{ks}(x, y). \tag{17}$$

Тогда в силу равенства (14) для многочленов (17) выполняется условие (1). Таким образом, две системы многочленов Аппеля

$$\{A_{nm}(x, y)\}, \quad \{\Psi_{ks}(x, y)\} \tag{18}$$

образуют биортонормированную систему многочленов.

Докажем, что система (18) является нормальной биортогональной системой. В самом деле, поскольку каждый многочлен $\Psi_{ks}(x, y)$ монический, то имеем разложение

$$A_{nm}(x, y) = \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{q=0}^{p} a_{p-q,q}^{(n,m)} \Psi_{p-q,q}(x, y), \tag{19}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$a_{p-q,q}^{(n,m)} = \iint\limits_G h(x, y) A_{nm}(x, y) A_{p-q,q}(x, y)\, dx\, dy. \tag{20}$$

В силу ортогональности многочленов Аппеля интегралы вида (20) все равны нулю при условии $p < n + m$. А тогда формула (19) примет вид

$$A_{nm}(x, y) = \sum_{q=0}^{n+m} a_{n+m-q}^{(n,m)} \Psi_{n+m-q,q}(x, y). \tag{21}$$

Эта формула представляет все многочлены Аппеля первого рода из пачки с номером $N = n + m$ через многочлены Аппеля второго рода из пачки с тем же номером N.

Нетрудно видеть, что систему равенств (21) при фиксированном $N = n + m$ можно обратить и представить каждый многочлен Аппеля второго рода $\Psi_{N-m,m}(x, y)$ через многочлены Аппеля первого рода, входящие в пачку с тем же номером N. В самом деле, систему равенств (21) при фиксированном N можно представить в виде

$$\sum_{q=0}^{N} a_{N-q}^{(N-m,m)} \Psi_{N-q,q}(x, y) = A_{N-m,m}(x, y), \tag{22}$$
$$m = 0, 1, \ldots, N.$$

В силу формулы (20) определитель этой системы есть определитель Грама для многочленов Аппеля первого рода из пачки с номером N. Так как система многочленов (18) биортогональна, то многочлены Аппеля, принадлежащие одной пачке, линейно независимы между собой. Поэтому определитель системы (22) отличен от нуля. Следовательно, система равенств (22) разрешима относительно многочленов Аппеля второго рода, т. е. имеем

$$\Psi_{N-q,q}(x, y) = \sum_{p=0}^{N} b_{N-p,p}^{(N,q)} A_{N-p,p}(x, y), \qquad (23)$$

$$q = 0, 1, \ldots, N.$$

В силу биортогональности коэффициенты определяются по формуле

$$b_{N-p,p}^{(N,q)} = \iint_G h(x, y) \Psi_{N-q,q}(x, y) \Psi_{N-p,p}(x, y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, биортогональная система многочленов (18) является нормальной системой.

В заключение параграфа приведем несколько многочленов Аппеля второго рода. Из формулы (5) имеем

$$B_{00}(x, y) = 1,\ B_{10}(x, y) = 1 - \frac{1+\gamma}{\alpha} x,\ B_{01}(x, y) = 1 - \frac{1+\gamma}{\beta} y,$$

$$B_{20}(x, y) = 1 - \frac{2(2+\gamma)}{\alpha} x + \frac{(2+\gamma)(3+\gamma)}{\alpha(\alpha+1)} x^2,$$

$$B_{11}(x, y) = 1 - \frac{\gamma+2}{\alpha} x - \frac{\gamma+2}{\beta} y + \frac{(\gamma+2)(\gamma+3)}{\alpha\beta} xy,$$

$$B_{02}(x, y) = 1 - \frac{2(2+\gamma)}{\beta} y + \frac{(2+\gamma)(3+\gamma)}{\beta(\beta+1)} y^2.$$

При условии $\gamma = \alpha + \beta$ биортогональная система (18) рассмотрена в монографии [III.1]. Общий случай рассмотрен в работе Г. К. Энгелиса [VI.34].

§ 6. Ряды по многочленам Аппеля

Пусть в треугольной области

$$G = \{(x, y):\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\} \qquad (1)$$

определена функция двух переменных $f(x, y)$. Предположим, что эта функция суммируема по области (1) с весовой функцией

$$h(x, y) = x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^p, \qquad p = \gamma - \alpha - \beta, \qquad (2)$$

т. е. выполняется условие

$$\iint\limits_G h(x, y)\,|f(x, y)|\,dx\,dy < \infty. \tag{3}$$

Тогда можно ввести коэффициенты по формуле

$$a_{nm} = \iint\limits_G h(x, y)\,f(x, y)\,\Psi_{nm}(x, y)\,dx\,dy \tag{4}$$

и рассматривать ряд по многочленам Аппеля первого рода

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}A_{n-k,k}(x, y). \tag{5}$$

А если ввести коэффициенты по формуле

$$b_{nm} = \iint\limits_G h(x, y)\,f(x, y)\,A_{nm}(x, y)\,dx\,dy, \tag{6}$$

то получим ряд по многочленам Аппеля второго рода

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k,k}\Psi_{n-k,k}(x, y). \tag{7}$$

Ряды (5) и (7) обладают обычными свойствами биортогональных и двойных рядов.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x, y) = (1 - x - y)^{\sigma}, \quad \sigma > -1 - p. \tag{8}$$

Вычисляя коэффициенты по формуле (6), находим

$$b_{nm} = \iint\limits_G h(x, y)(1 - x - y)^{\sigma} A_{nm}(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_G \frac{(1 - x - y)^{\sigma}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left[\frac{(1 - x - y)^{p+n+m}}{x^{1-\alpha-n}y^{1-\beta-m}}\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\iint\limits_G \frac{(1 - x - y)^{p+n+m}}{x^{1-\alpha-n}y^{1-\beta-m}}\cdot\frac{\partial^{n+m}(1 - x - y)^{\sigma}}{\partial x^n \partial y^m}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}(-\sigma)_{(n+m)}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\iint\limits_G \frac{(1 - x - y)^{p+\sigma}}{x^{1-\alpha-n}y^{1-\beta-m}}\,dx\,dy. \tag{9}$$

Двойной интеграл вычисляется аналогично интегралу

(5.16). В результате получаем

$$\int_0^1 x^{\alpha+n-1}\left[\int_0^{1-x} y^{\beta+m-1}(1-x-y)^{p+\sigma}\,dy\right]dx =$$

$$= \mathrm{B}(p+\sigma+1, \beta+m)\int_0^1 x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta+m+p+\sigma}\,dx =$$

$$= \mathrm{B}(p+\sigma+1, \beta+m)\,\mathrm{B}(\alpha+n, \beta+m+p+\sigma+1).$$

Подставляя это значение в равенство (9), получаем

$$b_{nm} = \frac{(-\sigma)_{(n+m)}}{(\alpha)_n(\beta)_m}\mathrm{B}(p+\sigma+1, \beta+m)\,\mathrm{B}(\alpha+n, \beta+p+$$

$$+m+\sigma+1) = \frac{(-\sigma)_{(n+m)}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+m)\Gamma(p+\sigma+1)}{(\alpha)_n(\beta)_m\Gamma(\alpha+\beta+n+m+p+\sigma+1)}. \tag{10}$$

Из этой формулы следует, что если σ — натуральное число, то $b_{n+m}=0$ при $n+m>\sigma$. А если σ — дробное число, то можно применить формулу $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. В результате равенство (10) приводится к виду

$$b_{nm} = \frac{\Gamma(-\sigma+n+m)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(p+\sigma+1)}{\Gamma(-\sigma)\Gamma(\alpha+\beta+n+m+p+\sigma+1)}. \tag{11}$$

Далее, поскольку при фиксированном a имеет место асимптотическая формула

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} = n^a\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то для величины (11) справедливо равенство

$$b_{nm} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(p+\sigma+1)}{\Gamma(-\sigma)(n+m)^{\alpha+\beta+2\sigma+p+1}}\left[1+O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right]. \tag{12}$$

Таким образом, скорость убывания коэффициентов Аппеля (6) функции (8) зависит от граничных свойств этой функции, а также от параметров весовой функции (2).

Формула (12) справедлива, если согласно условию (3) выполняется неравенство $p+\sigma>-1$, которое не исключает случая, когда σ — отрицательное число с большим абсолютным значением. В этом последнем случае функция (8) не ограничена в окрестности гипотенузы треугольника (1), но тем не менее ее коэффициенты Аппеля (6) могут стремиться к нулю достаточно быстро.

В качестве второго примера рассмотрим функцию

$$F(x, y) = x^a + y^b. \tag{13}$$

Условие (3) в данном случае означает выполнение неравенств

$$a + \alpha > 0, \quad b + \beta > 0. \tag{14}$$

Применяя формулу (6) к функции (13), находим

$$b_{nm} = \iint\limits_G h(x, y)(x^a + y^b) A_{nm}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{(\alpha)_n (\beta)_m} \iint\limits_G \frac{(1-x-y)^{p+n+m}}{x^{1-\alpha-n} y^{1-\beta-m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^a + y^b)}{\partial x^n \partial y^m}\, dx\, dy. \tag{15}$$

Из этой формулы следует, что в случае функции (13) могут быть отличны от нуля только коэффициенты $\{b_{n0}\}$ и $\{b_{0m}\}$. А если a и b натуральные числа, то $b_{n0} = 0$ при $n > a$ и $b_{0m} = 0$ при $m > b$.

Пусть теперь a — дробное число. Тогда из формулы (15) получаем

$$b_{n0} = \frac{(-1)^n}{(\alpha)_n} \iint\limits_G \frac{(1-x-y)^{p+n}}{x^{1-\alpha-n} y^{1-\beta}} \cdot \frac{\partial^n x^a}{\partial x^n}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{(-a)_n}{(\alpha)_n} \iint\limits_G x^{a+\alpha-1} y^{\beta-1} (1-x-y)^{p+n}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{(-a)_n}{(\alpha)_n} \int\limits_0^1 x^{a+\alpha-1} \left[\int\limits_0^{1-x} y^{\beta-1} (1-x-y)^{p+n}\, dy \right] dx =$$

$$= \frac{(-a)_n}{(\alpha)_n} \mathrm{B}(\beta, n+p+1) \int\limits_0^1 x^{a+\alpha-1} (1-x)^{p+n+\beta}\, dx =$$

$$= \frac{(-a)_n}{(\alpha)_n} \mathrm{B}(\beta, n+p+1)\, \mathrm{B}(a+\alpha, p+n+\beta+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(-a+n)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(-a)\,\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(a+\alpha+p+n+\beta+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+a)}{\Gamma(-a)\, n^{2a+2\alpha+\beta}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Аналогичная формула справедлива и для коэффициента b_{0m}. Из этих формул следует, что коэффициенты Аппеля зависят от граничных свойств функции (13) и от параметров весовой функции (2). Заметим, что условия (14) не исключают случаев, когда числа a и b отрицательны.

Глава IV

ДОПУСТИМОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ОБЛАСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. Основной дифференциальный оператор и теорема об ортогональности

В настоящей главе рассматриваются ортогональные по области многочлены, удовлетворяющие некоторому линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка. Эти многочлены можно считать одним из обобщений на случай двух переменных классических ортогональных многочленов одного переменного, которые, как известно, удовлетворяют некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Пусть даны пять многочленов по двум переменным с действительными коэффициентами

$$\begin{gathered} a = a(x, y), \quad b = b(x, y), \quad c = c(x, y), \\ d = d(x, y), \quad g = g(x, y). \end{gathered} \tag{1}$$

По этим многочленам введем линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка

$$Du = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

и соответствующее ему уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u, \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda(x, y)$ — некоторый фиксированный многочлен. Далее, с целью сокращения записи введем специальные обозначения для частных производных

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4}$$

Тогда для оператора (2) имеем представление

$$Du = aD_1^2 u + 2bD_1D_2u + cD_2^2u + dD_1u + gD_2u. \tag{5}$$

Используя обозначение (5), уравнение (3) представляем в виде

$$Du = \lambda u. \tag{6}$$

Оператор (5) будем называть *основным дифференциальным оператором*, а уравнение (6) — *основным дифференциальным уравнением*, соответствующим оператору (5).

Далее, имея в виду обозначения (4), рассмотрим еще четыре дифференциальных оператора

$$\Gamma_1 = aD_1 + bD_2, \quad \Gamma_2 = bD_1 + cD_2, \tag{7}$$

$$A_1 = \Gamma_1 + dE, \quad A_2 = \Gamma_2 + gE, \tag{8}$$

где E — тождественный оператор.

Нетрудно доказать, что для оператора (5) имеет место равенство

$$Du = A_1D_1u + A_2D_2u. \tag{9}$$

В самом деле, используя формулы (4), (7) и (8), находим

$$A_1D_1u + A_2D_2u =$$
$$= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + d\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(b\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} + g\right)\frac{\partial u}{\partial y} =$$
$$= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} = Du.$$

Следовательно, уравнение (6) приводится к виду

$$A_1D_1u + A_2D_2u = \lambda u. \tag{10}$$

Пусть теперь, как и в гл. I, определены некоторая односвязная область G и в ней весовая функция $h(x, y)$. Рассмотрим функционал

$$J(P) = \iint\limits_G h(x, y)\,P(x, y)\,dx\,dy \tag{11}$$

на множестве всех алгебраических многочленов по двум переменным. С помощью этого функционала в пространстве всех многочленов можно определить скалярное произведение по формуле

$$(P;\, Q) = J(PQ). \tag{12}$$

Будем говорить, что *функционал* (11) *согласован с дифференциальным оператором* (5), если для всякого многочлена $P(x, y)$ выполняются условия

$$J(A_1P) = J(A_2P) = 0. \tag{13}$$

Эти условия означают, что многочлены (1), определяющие оператор (5), и весовая функция $h(x, y)$, определяющая функционал (11), связаны между собой.

Лемма 1. *Если функционал* (11) *согласован с оператором* (5), *то для любых многочленов* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *справедливы равенства*

$$J(PA_1Q) = -J(Q\Gamma_1P), \tag{14}$$

$$J(PA_2Q) = -J(Q\Gamma_2P). \tag{15}$$

Доказательство. В силу формул (7) и (8), используя линейность функционала (11), находим

$$\begin{aligned} J[A_1(PQ)] &= J[aD_1(PQ) + bD_2(PQ) + dPQ] = \\ &= J[aPD_1Q + aQD_1P + bPD_2Q + bQD_2P + dPQ] = \\ &= J[P(aD_1Q + bD_2Q) + Q(aD_1P + bD_2P) + dPQ] = \\ &= J[PA_1Q + Q\Gamma_1P] = J[PA_1Q] + J[Q\Gamma_1P]. \end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку левая часть равенства (16) в силу условий (13) равна нулю, то из правой части (16) следует условие (14). Аналогично имеем

$$\begin{aligned} J[A_2(PQ)] &= J[bD_1(PQ) + cD_2(PQ) + gPQ] = \\ &= J[PA_2Q + Q\Gamma_2P] = J[PA_2Q] + J[Q\Gamma_2P] = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Формулы (14) и (15) можно рассматривать как аналоги формулы интегрирования по частям для функционала (11).

Теорема 1. *Если оператор* (5) *и функционал* (11) *согласованы, а для многочленов* u, v, λ, μ *выполняются условия*

$$Du = \lambda u, \quad Dv = \mu v, \tag{17}$$

то для скалярного произведения (12) *имеет место равенство*

$$[(\lambda - \mu)u;\ v] = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Используя тождества (17) и формулу (9), находим

$$\begin{aligned} [(\lambda - \mu)u;\ v] &= (\lambda u;\ v) - (\mu u;\ v) = (Du;\ v) - (Dv;\ u) = \\ &= J[v(A_1D_1u + A_2D_2u)] - J[u(A_1D_1v + A_2D_2v)] = \\ &= J[vA_1D_1u] + J[vA_2D_2u] - J[uA_1D_1v] - J[uA_2D_2v]. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее применяем формулы интегрирования по частям (14) и (15). В результате из равенства (19) получим

$$\begin{gathered}[(\lambda-\mu)u;\, v] = -J[(D_1u)\Gamma_1v] - J[(D_2u)\Gamma_2v] + \\ + J[(D_1v)\Gamma_1u] + J[(D_2v)\Gamma_2u] = \\ = J[(D_1v)(aD_1u + bD_2u) + (D_2v_1)(bD_1u + cD_2u) - \\ - (D_1u)(aD_1v + bD_2v) - (D_2u)(bD_1v + cD_2v)] = 0.\end{gathered}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим важный частный случай этой теоремы. Предположим, что λ и μ в тождествах (17) различные постоянные. Если уравнения (17) имеют нетривиальные решения, то числа λ и μ называются *собственными числами* оператора (5). А если решения этих уравнений являются многочленами, то при постоянных и различных λ и μ условие (18) в силу формул (11) и (12) приводится к виду

$$(u;\, v) = \iint_G h(x, y)\, u(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{20}$$

Следовательно, многочлены u и v, являющиеся решениями основного дифференциального уравнения (3) и соответствующие различным собственным значениям оператора (2), ортогональны с весовой функцией $h(x, y)$ по области G, если оператор (2) и функционал (11) согласованы между собой. Поэтому теорема 1 называется теоремой об ортогональности.

В связи с этой теоремой возникает вопрос о существовании многочленов, которые являются решениями уравнения (6).

Определение. Основной дифференциальный оператор (5) и основное уравнение (6) будем называть *допустимыми*, если для каждого целого неотрицательного числа n существует такое число λ_n, что уравнение

$$Du = \lambda_n u \tag{21}$$

имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени n

$$Q_{n0}(x, y),\ Q_{n1}(x, y),\ \ldots,\ Q_{nn}(x, y) \tag{22}$$

и не имеет нетривиальных решений во множестве многочленов степени меньшей, чем n.

Заметим, что в системе многочленов (22) второй индекс означает не степень переменной y, как это было в главе 1, а просто номер многочлена в данной системе. Кроме того, если $n=0$, то из формулы (6) следует, что нетривиальное решение может быть только в случае $\lambda_0=0$.

Таким образом, если уравнение (6) допустимо, то существует последовательность собственных значений

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots \tag{23}$$

уравнения (6), причем каждому значению λ_n соответствует система $n+1$ линейно независимых многочленов (22).

Из определения допустимости уравнения (6) следует, что все числа (23) различны между собой. В самом деле, допустим противное, т. е. $\lambda_n=\lambda_m$ при $m>n$. Тогда имеем $DQ_{nk}(x,\ y)=\lambda_m Q_{nk}(x,\ y)$. Но поскольку $m>n$, то в силу определения числа λ_m имеем $Q_{nk}(x,\ y)=0$, что противоречит определению числа λ_n.

Предположим теперь, что основное уравнение допустимо, а оператор (5) согласован с функционалом (11). Тогда в силу теоремы 1 многочлены $\{Q_{nk}(x,\ y)\}$, соответствующие собственному значению λ_n, ортогональны всем многочленам $\{Q_{mk}(x,\ y)\}$, соответствующим другому собственному значению λ_m. Иными словами, при этих условиях в силу равенства (20) имеем

$$\iint\limits_G h(x,\ y)\,Q_{nk}(x,\ y)\,Q_{ms}(x,\ y)\,dx\,dy=0. \tag{24}$$

С другой стороны, как показано в гл. I, всякая весовая функция $h(x,\ y)$ определяет последовательность пространств ортогональных многочленов

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ \ldots \tag{25}$$

В силу равенства (24) многочлены (22) входят в пространство W_n. Это справедливо при любом n. Далее, поскольку пространство W_n имеет размерность $n+1$, а система $n+1$ многочленов (22) линейно независима, то эта система образует базис в пространстве W_n. Следовательно, если уравнение (6) допустимо, то все многочлены пространства W_n удовлетворяют уравнению (21).

Рассмотрим монические многочлены степени n

$$P_{nk}(x,\ y)=x^{n-k}y^k+R_{n-1}(x,\ y;\ k),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{26}$$

Теорема 2. *Основное дифференциальное уравнение (6) является допустимым тогда и только тогда, когда при каждом целом неотрицательном n существует такое λ_n,* *что уравнение* (21) *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений в виде монических многочленов* (26) *и не имеет нетривиальных решений во множестве многочленов степени меньше* n.

Доказательство. Предположим, что уравнение (6) допустимо и многочлены (22) линейно независимы между собой. Тогда имеем тождество

$$DQ_{nk}(x, y) = \lambda_n Q_{nk}(x, y). \tag{27}$$

Для каждого из этих многочленов введем представление

$$Q_{nk}(x, y) = B_{nk}(x, y) + H_{n-1}(x, y; k), \tag{28}$$

где многочлен $B_{nk}(x, y)$ есть сумма всех старших членов, а $H_{n-1}(x, y; k)$ — многочлен степени не выше $n-1$. Докажем, что система многочленов

$$B_{n0}(x, y),\ B_{n1}(x, y),\ \ldots,\ B_{nn}(x, y) \tag{29}$$

линейно независима. Предположим противное, что существует такая нетривиальная система чисел $\{a_k\}$, что имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_{nk}(x, y) \equiv 0. \tag{30}$$

Тогда из формулы (28) находим равенство

$$\sum_{k=0}^{n} a_k Q_{nk}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_{n-1}(x, y; k) = H_{n-1}(x, y). \tag{31}$$

Это выражение есть многочлен степени не выше $n-1$. Применим к равенству (31) основной дифференциальный оператор (2). В силу равенства (27) получаем

$$D\left[\sum_{k=0}^{n} a_k Q_{nk}(x, y)\right] = \lambda_n \sum_{k=0}^{n} a_k Q_{nk}(x, y) = \\ = \lambda_n H_{n-1}(x, y) = DH_{n-1}(x, y).$$

Отсюда в силу допустимости уравнения следует тождество $H_{n-1}(x, y) \equiv 0$. А это противоречит линейной независимости системы многочленов (22). Таким образом, тождество (30) возможно только при тривиальной системе чисел $\{a_k\}$, и система многочленов (29) линейно независима.

Далее, рассмотрим множество V_n всех многочленов над базисом из $(n+1)$ одночленов $\{x^{n-k}, y^k\}$. Это множество является пространством размерности $n+1$. В этом пространстве многочлены (29) образуют базис. Поэтому для всякого k, удовлетворяющего условию $0 \leqslant k \leqslant n$, существует такая система чисел $\{b_m^{(k)}\}$, что выполняется условие

$$x^{n-k}y^k = \sum_{m=0}^{n} b_m^{(k)} B_{nm}(x, y).$$

А теперь можно ввести многочлены

$$P_{n,k}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} b_m^{(k)} Q_{nm}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x, y).$$

В силу тождества (27) для этих многочленов выполняется условие

$$DP_{nk}(x, y) = \lambda_n P_{nk}(x, y). \tag{32}$$

Таким образом, если уравнение (6) допустимо, то при каждом λ_n существует система монических многочленов вида (26), для которых выполняется условие (32). А если существует моническая система многочленов вида (26), для которой выполняется условие (32), то эту систему можно принять в качестве многочленов (22), и уравнение (6) в этом случае является допустимым. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы следует, что в случае допустимости уравнения (6) многочлены (22) можно выбрать таким образом, что каждый многочлен $Q_{nk}(x, y)$ имеет порядок (n, k).

Еще раз заметим, что теорема 2 справедлива без условия согласованности оператора и функционала и относится только к дифференциальному уравнению (6).

§ 2. Условия допустимости основного дифференциального уравнения

Основное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u \tag{1}$$

определяется многочленами a, b, c, d, g. Эти многочлены надо выбрать так, чтобы уравнение (1) было допустимым. В силу теоремы 2 допустимость уравнения (1) означает, что при каждом целом неотрицательном n существует такое λ_n, что уравнение

$$Du = \lambda_n u \tag{2}$$

имеет в качестве решений $n+1$ монических многочленов

$$P_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x, y; k), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Теорема 3. *Основное уравнение* (1) *допустимо тогда и только тогда, когда оно имеет вид*

$$\begin{gathered}(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\,D_1^2u + \\ + 2\,(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\,D_1D_2u + \\ + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\,D_2^2u + \\ + (Bx + d_{00})\,D_1u + (By + g_{00})\,D_2u = n\,(nA - A + B)\,u,\end{gathered} \tag{4}$$

где коэффициенты

$$a_{km},\ b_{km},\ c_{km},\ d_{00},\ g_{00} \tag{5}$$

произвольные фиксированные действительные числа, а числа A и B таковы, что при любом целом неотрицательном p выполняется условие

$$Ap + B \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) допустимо. Тогда существует система монических многочленов (3), которые являются решениями уравнения (2).

Степени многочленов a, b, c, d, g пока неизвестны. Обозначим через a_0, b_0, c_0 суммы тех членов у многочленов a, b, c соответственно, степени которых больше 2, а через d_0 и g_0 обозначим суммы тех членов у многочленов d и g, степени которых больше 1. Далее, подставляем многочлен (3) в уравнение (2) и учитываем только те одночлены, степени которых больше n. В результате получим тождество

$$\begin{gathered}a_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^{n-k}y^k) + 2b_0\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(x^{n-k}y^k) + c_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^{n-k}y^k) + \\ + d_0\frac{\partial}{\partial x}(x^{n-k}y^k) + g_0\frac{\partial}{\partial y}(x^{n-k}y^k) \equiv 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь многочлены

$$a_0,\ b_0,\ c_0,\ d_0,\ g_0 \tag{8}$$

фиксированы и от номера n не зависят. С другой стороны, тождество (7) выполняется при любом n и при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Пусть сначала $n = 1$. Тогда тождество (7) справедливо для двух одночленов x и y. Для одночлена x это тождество имеет вид $d_0 = 0$. Аналогично для y из (7) имеем тождество $g_0 = 0$.

Предположим теперь, что $n = 2$. Тогда тождество (7) выполняется для трех одночленов x^2, xy, y^2. Для первого из них тождество (7) имеет вид $2a_0 = 0$. Аналогично для одночлена xy из (7) находим $2b_0 = 0$. Наконец, для одночлена y^2 тождество (7) приводится к виду $2c_0 = 0$. Таким образом, все многочлены (8) равны нулю тождественно.

Следовательно, если уравнение (1) допустимо, то многочлены a, b, c имеют степени не больше 2, а многочлены d и g — не больше 1, т. е. для этих многочленов имеем формулы

$$\begin{aligned} a &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},\\ b &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00},\\ c &= c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00},\\ d &= d_{10}x + d_{01}y + d_{00},\\ g &= g_{10}x + g_{01}y + g_{00}. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, из предположения допустимости требуется вывести уравнение (4). Но в этом уравнении у многочленов (9) коэффициенты (5) младших членов не связаны между собой и являются произвольными. А связь имеется только между старшими коэффициентами многочленов (9). Поэтому, опуская младшие члены у многочленов (9) и подставляя оставшиеся старшие члены в уравнение (2), получим

$$\begin{aligned} (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &+ \\ + 2(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &+ \\ + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &+ \\ + (d_{10}x + d_{01}y)\frac{\partial u}{\partial x} + (g_{10}x + g_{01}y)\frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda_n u. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку многочлены (3) являются решениями уравнения (2), то при переходе к (10) учитываются только одночлены $\{x^{n-k}y^k\}$. Пусть сначала $u = x^n$. Тогда из уравнения (10) получаем последовательно

$$(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\,n(n-1)\,x^{n-2} + \\ + (d_{10}x + d_{01}y)\,nx^{n-1} = \lambda_n x^n,$$

$$(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\,n(n-1) + (d_{10}x + d_{01}y)\,nx = \lambda_n x^2.$$

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} &a_{20}n(n-1) + d_{10}n = \lambda_n, \quad a_{11}(n-1) + d_{01} = 0, \\ &a_{02} = 0, \quad a_{11} = d_{01} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, подставляем в уравнение (10) функцию $u = y^n$. В результате находим

$$(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2)\,n(n-1) + (g_{10}x + g_{01}y)\,ny = \lambda_n y^2,$$

$$\begin{aligned} &c_{20} = 0,\ c_{11}(n-1) + g_{10} = 0, \quad c_{11} = g_{10} = 0, \\ &c_{02}n(n-1) + g_{01}n = \lambda_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, из равенств (11) и (12) имеем условия

$$a_{02} = a_{11} = d_{01} = c_{20} = c_{11} = g_{10} = 0, \tag{13}$$

$$\lambda_n = n\,[d_{10} + a_{20}(n-1)] = n\,[g_{01} + c_{02}(n-1)]. \tag{14}$$

Поскольку равенство (14) должно выполняться при всех n, то имеем еще два условия $d_{10} = g_{01}$ и $a_{20} = c_{02}$. В связи с этими условиями вводим обозначения

$$A = a_{20} = c_{02}, \quad B = d_{10} = g_{01}. \tag{15}$$

Тогда равенство (14) приводится к виду

$$\lambda_n = n\,[A(n-1) + B]. \tag{16}$$

Подставляем теперь значения (13), (15) и (16) в уравнение (10). В результате получим

$$Ax^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + Ay^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Bx\frac{\partial u}{\partial x} + By\frac{\partial u}{\partial y} = n\,[A(n-1) + B]\,u. \tag{17}$$

Пусть теперь $u = xy$. Тогда уравнение (17) примет вид

$$2(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + 2Bxy = 2(A + B)\,xy.$$

Поскольку это должно быть тождеством, то, следовательно, должны выполняться условия

$$b_{20} = b_{02} = 0, \quad b_{11} = A.$$

Итак, все старшие коэффициенты многочленов (9) определены, и формула (4) для допустимого уравнения доказана. Остается доказать условие (6).

Предположим, что при некотором целом неотрицательном p выполняется условие $Ap + B = 0$. Тогда при $n = p + 1$ из формулы (16) находим $\lambda_n = 0$. Но это противоречит тому факту, что все собственные числа $\{\lambda_n\}$ различны между собой, причем $\lambda_0 = 0$. Таким образом, необходимость теоремы доказана.

Переходим к доказательству достаточности условий теоремы 3. Рассмотрим монический многочлен вида

$$P_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms}x^{m-s}y^s. \tag{18}$$

Докажем, что при условии (6) и при фиксированных n и k можно так выбрать коэффициенты $\{c_{ms}\}$, что многочлен (18) будет решением уравнения (4).

Подставляя многочлен (18) в уравнение (4), получим

$$\begin{gathered}(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 P_{nk}}{\partial x^2} + \\ + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 P_{nk}}{\partial x\, \partial y} + \\ + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 P_{nk}}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial P_{nk}}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial P_{nk}}{\partial y} = \\ = n[A(n-1) + B]P_{nk}. \quad (19)\end{gathered}$$

Поскольку это должно быть тождеством, то, как обычно, вычисляем коэффициенты при одночлене $x^{m-s}y^s$ слева и справа и приравниваем их. В результате имеем

$$\begin{gathered}A(m-s)(m-s-1)c_{ms} + a_{10}(m+1-s)(m-s)c_{m+1,s} + \\ + a_{01}(m+2-s)(m+1-s)c_{m+1,s-1} + \\ + a_{00}(m+2-s)(m+1-s)c_{m+2,s} + 2A(m-s)sc_{ms} + \\ + 2b_{10}(m-s)(s+1)c_{m+1,s+1} + 2b_{01}(m+1-s)sc_{m+1,s} + \\ + 2b_{00}(m+1-s)(s+1)c_{m+2,s+1} + As(s-1)c_{ms} +\end{gathered}$$

$$+ c_{10}(s+2)(s+1)c_{m+1,\,s+2} + c_{01}(s+1)sc_{m+1,\,s+1} +$$
$$+ c_{00}(s+2)(s+1)c_{m+2,\,s+2} + B(m-s)c_{ms} +$$
$$+ d_{00}(m+1-s)c_{m+1,\,s} + Bsc_{ms} + g_{00}(s+1)c_{m+1,\,s+1} =$$
$$= n[A(n-1)+B]c_{ms}. \quad (20)$$

Группируя слагаемые по неизвестным коэффициентам, приводим равенство (20) к виду

$$c_{ms}\{A(m-s)(m-s-1)+2A(m-s)+$$
$$+ As(s-1)+B(m-s)+Bs-n[A(n-1)+B]\} +$$
$$+ c_{m+1,\,s}\{a_{10}(m+1-s)(m-s)+2b_{01}(m+1-s)s +$$
$$+ d_{00}(m+1-s)\} + c_{m+1,\,s-1}a_{01}(m+2-s)(m+1-s)+$$
$$+ c_{m+2,\,s}a_{00}(m+2-s)(m+1-s)+$$
$$+ c_{m+1,\,s+1}\{2b_{10}(m-s)(s+1)+c_{01}(s+1)s+g_{00}(s+1)\} +$$
$$+ 2c_{m+2,\,s+1}b_{00}(m+1-s)(s+1)+c_{m+1,\,s+2}c_{10}(s+2)(s+1)+$$
$$+ c_{m+2,\,s+2}c_{00}(s+2)(s+1)=0. \quad (21)$$

Это равенство является рекуррентной формулой для вычисления коэффициентов многочлена (18), который должен быть решением уравнения (19). Докажем, что по формуле (21) можно вычислить все коэффициенты многочлена (18). Равенство (21) содержит 8 неизвестных коэффициентов

$$c_{ms},\ c_{m+1,\,s},\ c_{m+1,\,s-1},\ c_{m+2,\,s},$$
$$c_{m+1,\,s+1},\ c_{m+2,\,s+1},\ c_{m+1,\,s+2},\ c_{m+2,\,s+2}. \quad (22)$$

Для известных сомножителей этих коэффициентов введем обозначения

$$A^{(1)}_{ms},\ A^{(2)}_{m+1,s},\ A^{(3)}_{m+1,s-1},\ A^{(4)}_{m+2,s},\ A^{(5)}_{m+1,s+1},\ A^{(6)}_{m+2,s+1},$$
$$A^{(7)}_{m+1,s+2},\ A^{(8)}_{m+2,s+2}. \quad (23)$$

В этих обозначениях нижние индексы совпадают с таковыми у чисел (22), а верхние указывают номер слагаемого в равенстве (21). Вычислим первое число из системы (23). Из равенства (21) находим

$$A^{(1)}_{ms} = A[m^2-2sm+s^2-m+s+2ms-2s^2+s^2-s]+$$
$$+ Bm-n(nA-A+B) = m(Am-A+B)-$$
$$-n(nA-A+B). \quad (24)$$

Эта величина не зависит от s. Аналогично две последние величины из системы (23) не зависят от m. Следовательно, равенство (21) можно представить в виде

$$A_m^{(1)}c_{ms} + A_{m+1,s}^{(2)}c_{m+1,s} + A_{m+1,s-1}^{(3)}c_{m+1,s-1} + \\ + A_{m+2,s}^{(4)}c_{m+2,s} + A_{m+1,s+1}^{(5)}c_{m+1,s+1} + A_{m+2,s+1}^{(6)}c_{m+2,s+1} + \\ + A_{s+2}^{(7)}c_{m+1,s+2} + A_{s+2}^{(8)}c_{m+2,s+2} = 0. \quad (25)$$

Поскольку многочлен (18) фиксирован, то величины m и s в формуле (25) могут принимать значения

$$m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n; \quad s = 0,\ 1,\ \ldots,\ m. \quad (26)$$

Из формулы (18) имеем равенства

$$c_{nk} = 1; \quad (27)$$
$$c_{np} = 0, \quad p = 0,\ 1,\ \ldots,\ (k-1),\ (k+1),\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, все старшие коэффициенты многочлена (18) известны, причем эти коэффициенты охватываются значениями индексов (26). Следовательно, с помощью рекуррентной формулы (25) можно определять коэффициенты $\{c_{ms}\}$, начиная с номера $m = n - 1$. В формуле (25) положим $m = n - 1$. Из этой формулы, замечая, что $c_{n+1,\,s} = 0$, находим

$$A_{n-1}^{(1)}c_{n-1,s} + A_{n,s}^{(2)}c_{n,s} + A_{n,s-1}^{(3)}c_{n,s-1} + \\ + A_{n,s+1}^{(5)}c_{n,s+1} + A_{s+2}^{(7)}c_{n,s+2} = 0.$$

Это равенство определяет все коэффициенты $\{c_{n-1,\,s}\}$, ибо в силу формулы (24) выполняется условие $A_{n-1}^{(1)} \neq 0$.

Далее, в формуле (25) полагаем $m = n - 2$ и определяем коэффициенты $\{c_{n-2,\,s}\}$. Аналогично из формулы (25) определяются все коэффициенты $\{c_{ms}\}$ при условии $A_m^{(1)} \neq 0$. А в силу формулы (24) это условие имеет вид

$$A_m^{(1)} = m(Am - A + B) - n(nA - A + B) = \\ = (m - n)[A(n + m - 1) + B] \neq 0. \quad (28)$$

Поскольку старшие коэффициенты многочлена (18) определяются равенствами (27), то число m в равенстве (28) принимает значения $0,\ 1,\ \ldots,\ n - 1$. Следовательно, условие (28) эквивалентно условию (6), которое считается выполненным.

Таким образом, многочлен (18) определяется однозначно при условии (6) и при фиксированных коэффициентах (5). А поскольку в формуле (18) индекс k может принимать значения 0, 1, 2, ..., n, то таких монических многочленов получается $n+1$.

Остается доказать, что при условии (6) уравнение (4) не имеет нетривиальных решений в классе многочленов степени меньше n.

Допустим, что некоторый многочлен степени $m<n$ удовлетворяет уравнению (4). Представим этот многочлен в виде

$$Q_{mk}(x, y) = x^{m-k}y^k + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{p} c_{ps}x^{p-s}y^s + \\ + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ms}x^{m-s}y^s. \quad (29)$$

Подставляем этот многочлен в уравнение (4) и сравниваем коэффициенты при одночленах $x^{m-k}y^k$. Поскольку при подстановке в (4) последней суммы из равенства (29) не получится одночленов вида $x^{m-k}y^k$, то придем к равенству (25) при условии $s=k$ и $c_{mk}=1$. С другой стороны, из (29) находим $c_{m+1,\,p}=c_{m+2,\,q}=0$. Следовательно, равенство (25) в этом случае приводится к виду $A_m^{(1)}=0$. А это противоречит условию (28). Таким образом, теорема 3, наконец, доказана полностью.

§ 3. Некоторые примеры и свойства допустимых дифференциальных уравнений

В предыдущих главах были получены некоторые дифференциальные уравнения, решениями которых являются ортогональные по области многочлены. В начале настоящего параграфа для этих уравнений проверяются условия допустимости.

В § 1 гл. II для многочленов Эрмита—Эрмита (2.1.10)

$$F_{n+m,\,m}(x, y) = H_n(x)H_m(y) \quad (1)$$

получено уравнение

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 2(n+m)u. \quad (2)$$

Здесь $A=0$, $B=2$, $u_{00}=c_{00}=-1$, а остальные коэффициенты (2.5) все равны нулю. Уравнение (2) можно записать в виде

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=2nu. \tag{3}$$

Тогда вместо (1) получим формулу

$$F_{nk}(x, y)=H_{n-k}(x)H_k(y), \quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Теперь ясно, что $\lambda_n=2n$ и уравнение (3) имеет $n+1$ линейно независимых решений (4). Следовательно, уравнение (3) является допустимым. То же самое можно сказать и об уравнении (2.1.16).

Далее, в уравнение (2.1.23) для многочленов Лагерра—Лагерра номера n и m также входят в виде суммы $n+m$. Следовательно, это уравнение можно представить в виде

$$-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(x-\alpha-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-\beta-1)\frac{\partial u}{\partial y}=nu. \tag{5}$$

А тогда в силу формулы (2.1.20) решениями этого уравнения являются многочлены Лагерра—Лагерра

$$F_{nk}(x, y)=L_{n-k}(x;\alpha)L_k(y;\beta), \quad k=0, 1, \ldots, n.$$

Таким образом, уравнение (5) допустимо.

Аналогично доказывается, что уравнение (2.1.28) для многочленов Лагерра — Эрмита (2.1.26) также является допустимым.

С другой стороны, уравнение (2.1.33) для многочленов Якоби — Эрмита, уравнение (2.1.37) для многочленов Якоби — Лагерра и уравнение (2.1.41) для многочленов Якоби — Якоби не являются допустимыми прежде всего потому, что числа n и m входят в эти уравнения не в виде суммы, а более сложным образом. Эти три уравнения можно записать в виде

$$Du=\lambda_{nm}u. \tag{6}$$

Решение этого уравнения при фиксированных n и m можно представить в виде произведения соответствующих ортогональных многочленов, но если менять числа n и m, оставляя неизменной их сумму, то параметр λ_{nm} будет изменяться. Следовательно, уравнение (6) в указанных случаях не будет допустимым.

Далее, в § 3 гл. III для многочленов Аппеля было получено уравнение (3.3.13), которое можно представить в виде

$$x(x-1)u''_{xx}+2xyu''_{xy}+y(y-1)u''_{yy}+$$
$$+[(\gamma+1)x-\alpha]u'_x+[(\gamma+1)y-\beta]u'_y=n(n+\gamma)u. \qquad (7)$$

В этом случае имеем

$$A=1,\quad B=\gamma+1,\quad a_{10}=b_{01}=-1,$$
$$d_{00}=-\alpha,\quad g_{00}=-\beta,$$

а остальные коэффициенты все равны нулю. Поскольку многочлен Аппеля, определяемый формулой (3.1.6), имеет степень $n+m$ по совокупности переменных, то решениями уравнения (7) являются многочлены Аппеля из одной пачки таблицы (3.1.15)

$$A_{n0}(x,y),\quad A_{n-1,1}(x,y),\ \ldots,\ A_{0n}(x,y).$$

Таким образом, уравнение Аппеля (7) является допустимым.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства допустимых уравнений. Как было установлено в предыдущем параграфе, коэффициенты-многочлены допустимого уравнения определяются по формулам

$$\begin{aligned}
a&=Ax^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00},\\
b&=Axy+b_{10}x+b_{01}y+b_{00},\\
c&=Ay^2+c_{10}x+c_{01}y+c_{00},\\
d&=Bx+d_{00},\quad g=By+g_{00}.
\end{aligned} \qquad (8)$$

В дальнейшем изложении будут применяться вспомогательные многочлены

$$\varphi=d-D_1a-D_2b,\quad \psi=g-D_1b-D_2c, \qquad (9)$$
$$\omega=\Gamma_1b-\Gamma_2a,\quad \sigma=\Gamma_1c-\Gamma_2b, \qquad (10)$$
$$\beta=c\varphi-b\psi,\quad \gamma=a\psi-b\varphi, \qquad (11)$$
$$\alpha=ac-b^2. \qquad (12)$$

Здесь использованы обозначения операторов (1.4) и (1.7)

$$D_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad D_2=\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\Gamma_1=aD_1+bD_2,\quad \Gamma_2=bD_1+cD_2. \qquad (13)$$

Т е о р е м а 4. *Если уравнение* (2.1) *допустимо, то степени многочленов* (9) *и* (10) *не более* 1, *степени мно-*

гочленов (11) *не более* 2, *а степень многочлена* (12) *не более* 3.

Доказательство. Используя формулы (8), (9) и (13), находим

$$\varphi = d - D_1 a - D_2 b = Bx + d_{00} - \frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}) - \frac{\partial}{\partial y}(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}) = Bx + d_{00} - 3Ax - a_{10} - b_{01}, \quad (14)$$

$$\psi = g - D_1 b - D_2 c = By + g_{00} - \frac{\partial}{\partial x}(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}) - \frac{\partial}{\partial y}(Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00}) = By + g_{00} - 3Ay - b_{10} - c_{01}. \quad (15)$$

Далее, с помощью формул (8) и (13) получаем

$$\begin{aligned}\omega = \Gamma_1 b - \Gamma_2 a = aD_1 b + bD_2 b - bD_1 a - cD_2 a &= \\ =(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})(Ay + b_{10}) &+ \\ +(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(Ax + b_{01}) &- \\ -(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(2Ax + a_{10}) &- \\ -(Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})a_{01} &= \\ =(b_{10}b_{01} - Ab_{00} - a_{01}c_{10})x &+ \\ +(Aa_{00} + a_{01}b_{10} + b_{01}^2 - a_{10}b_{01} - c_{01}a_{01})y &+ \\ +(a_{00}b_{10} + b_{00}b_{01} - c_{00}a_{01} - a_{10}b_{00}). \quad (16)\end{aligned}$$

Аналогично, в силу формул (8) и (13), имеем

$$\begin{aligned}\sigma = \Gamma_1 c - \Gamma_2 b = aD_1 c + bD_2 c - bD_1 b - cD_2 b &= \\ =(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})c_{10} &+ \\ +(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(2Ay + c_{01}) &- \\ -(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(Ay + b_{10}) &- \\ -(Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})(Ax + b_{01}) &= \\ =(b_{10}c_{01} - b_{10}^2 - Ac_{00} - c_{10}b_{01} + a_{10}c_{10})x &+ \\ +(a_{01}c_{10} + Ab_{00} - b_{01}b_{10})y &+ \\ +(a_{00}c_{10} + b_{00}c_{01} - b_{00}b_{10} - c_{00}b_{01}). \quad (17)\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь многочлены (11). С помощью формул (8), (14) и (15) находим

$$\beta = c\varphi - b\psi =$$
$$=(Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})(Bx + d_{00} - 3Ax - a_{10} - b_{01}) -$$

$$-(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(By + g_{00} - 3Ay - b_{10} - c_{01}),$$

$$\gamma = a\psi - b\varphi = \tag{18}$$

$$= (Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})(By + g_{00} - 3Ay - b_{10} - c_{01}) -$$
$$-(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})(Bx + d_{00} - 3Ax - a_{10} - b_{01}). \tag{19}$$

Из формул (18) и (19) следует, что многочлены (11) имеют степень не больше 2.

Вычислим теперь многочлен (12). С помощью формул (8) получаем

$$\alpha = ac - b^2 =$$
$$= (Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})(Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00}) -$$
$$-(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})^2 =$$
$$= Ac_{10}x^3 + A(c_{01} - 2b_{10})x^2y + A(a_{10} - 2b_{01})xy^2 +$$
$$+ Aa_{01}y^3 + \left(Ac_{00} + a_{10}c_{10} - b_{10}^2\right)x^2 +$$
$$+ (a_{10}c_{01} + a_{01}c_{10} - 2Ab_{00} - 2b_{01}b_{10})xy +$$
$$+ \left(a_{01}c_{01} + Aa_{00} - b_{01}^2\right)y^2 + (a_{10}c_{00} - 2b_{10}b_{00} + a_{00}c_{10})x +$$
$$+ (a_{01}c_{00} - 2b_{00}b_{01} + a_{00}c_{01})y + \left(a_{00}c_{00} - b_{00}^2\right). \tag{20}$$

Теорема доказана.

Многочлен (20) играет важную роль в дальнейшем изложении свойств допустимых уравнений. Для коэффициентов этого многочлена введем обозначения $\{\alpha_{pq}\}$, где первый индекс означает степень переменной x, а второй — переменной y. В результате многочлен (20) представляется в виде

$$\alpha = \alpha(x, y) = \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 +$$
$$+ \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00}. \tag{21}$$

Как известно, при изучении уравнений математической физики многочлен (21) определяет тип уравнения в частных производных.

§ 4. Аффинные преобразования аргументов основного дифференциального уравнения

Сначала рассмотрим основное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u \tag{1}$$

без условия допустимости. В этом случае все коэффициенты его

$$a(x, y),\ b(x, y),\ c(x, y),\ d(x, y),\ g(x, y) \tag{2}$$

являются произвольными многочленами по двум переменным.

Вместо переменных x и y введем новые переменные ξ и η по формулам

$$x = q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10}, \quad y = q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}. \tag{3}$$

Будем считать, что все коэффициенты действительны и определитель q системы (3) отличен от нуля. Тогда существует обратное преобразование

$$\xi = p_{11}x + p_{12}y + p_{10}, \quad \eta = p_{21}x + p_{22}y + p_{20}, \tag{4}$$

причем определитель p системы (4) отличен от нуля.

В уравнении (1) перейдем к новым переменным. Прежде всего, заметим, что многочлены (2) преобразуются в новые многочлены

$$\tilde{a}(\xi, \eta),\ \tilde{b}(\xi, \eta),\ \tilde{c}(\xi, \eta),\ \tilde{d}(\xi, \eta),\ \tilde{g}(\xi, \eta). \tag{5}$$

Далее, вводим обозначения

$$u(x, y) = u(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10},\ q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}) = \tilde{u}(\xi, \eta), \tag{6}$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{7}$$

В результате, учитывая формулы (4), (6) и (7), находим

$$D_1u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = (p_{11}\tilde{D}_1 + p_{21}\tilde{D}_2)\tilde{u},$$

$$D_2u = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = (p_{12}\tilde{D}_1 + p_{22}\tilde{D}_2)\tilde{u},$$

$$D_1^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (p_{11}\tilde{D}_1 + p_{21}\tilde{D}_2)^2\tilde{u},$$

$$D_2^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (p_{12}\tilde{D}_1 + p_{22}\tilde{D}_2)^2\tilde{u},$$

$$D_1D_2u = \left[p_{11}p_{12}\tilde{D}_1^2 + (p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12})\tilde{D}_1\tilde{D}_2 + p_{21}p_{22}\tilde{D}_2^2\right]\tilde{u}.$$

Подставляем все эти производные в уравнение (1). Тогда, учитывая обозначения (5), получим

$$\tilde{a}\left(p_{11}^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2p_{11}p_{21}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+p_{21}^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right)+$$
$$+2\tilde{b}\left[p_{11}p_{12}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+(p_{11}p_{22}+p_{21}p_{12})\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+p_{21}p_{22}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right]+$$
$$+\tilde{c}\left(p_{12}^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2p_{12}p_{22}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+p_{22}^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right)+$$
$$+\tilde{d}\left(p_{11}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+p_{21}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)+\tilde{g}\left(p_{12}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+p_{22}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)=\lambda\tilde{u}. \tag{8}$$

Введем для краткости обозначения

$$a_0=\tilde{a}p_{11}^2+2\tilde{b}p_{11}p_{12}+\tilde{c}p_{12}^2, \tag{9}$$
$$b_0=\tilde{a}p_{11}p_{21}+\tilde{b}(p_{11}p_{22}+p_{21}p_{12})+\tilde{c}p_{12}p_{22}, \tag{10}$$
$$c_0=\tilde{a}p_{21}^2+2\tilde{b}p_{21}p_{22}+\tilde{c}p_{22}^2, \tag{11}$$
$$d_0=\tilde{d}p_{11}+\tilde{g}p_{12},\quad g_0=\tilde{d}p_{21}+\tilde{g}p_{22}. \tag{12}$$

В силу этих обозначений уравнение (8) представляется в виде

$$a_0\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2b_0\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+c_0\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+d_0\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+g_0\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=\lambda\tilde{u}. \tag{13}$$

Напомним, что это уравнение получается из уравнения (1) при замене переменных по формулам (3). При помощи этих же формул дифференциальный оператор

$$D=aD_1^2+2bD_1D_2+cD_2^2+dD_1+gD_2 \tag{14}$$

преобразуется в оператор

$$\tilde{D}=a_0\tilde{D}_1^2+2b_0\tilde{D}_1\tilde{D}_2+c_0\tilde{D}_2^2+d_0\tilde{D}_1+g_0\tilde{D}_2. \tag{15}$$

Пусть теперь в области G дана весовая функция $h(x, y)$. Тогда на множестве всех многочленов определяется функционал

$$J(P)=\iint\limits_G h(x, y)\,P(x, y)\,dx\,dy. \tag{16}$$

Далее, аффинное преобразование (4) переводит область G и весовую функцию $h(x, y)$ соответственно в область $\tilde{G}$ и весовую функцию $\tilde{h}(\xi, \eta)$, которые определяют функционал

$$\tilde{J}(P)=\iint\limits_{\tilde{G}}\tilde{h}(\xi,\eta)P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{17}$$

Теорема 5. *Если функционал* (16) *согласован с оператором* (14), *то после невырожденного аффинного преобразования* (4) *функционал* (17) *будет согласован с оператором* (15).

Доказательство. Согласованность оператора (14) и функционала (16) означает, что для всякого многочлена $P(x, y)$ выполняются условия

$$J(A_1P)=J(A_2P)=0, \tag{18}$$

где в силу формул (1.7) и (1.8) имеем

$$A_1=aD_1+bD_2+dE,\quad A_2=bD_1+cD_2+gE. \tag{19}$$

Рассмотрим аналогичные формулы для оператора (15). В силу обозначений (7), (9), (10) и (12) находим

$$\begin{gathered}\tilde{A}_1=a_0\tilde{D}_1+b_0\tilde{D}_2+d_0E=\\ =(\tilde{a}p_{11}^2+2\tilde{b}p_{11}p_{12}+\tilde{c}p_{12}^2)\frac{\partial}{\partial\xi}+\\ +[\tilde{a}p_{11}p_{21}+\tilde{b}(p_{11}p_{22}+p_{21}p_{12})+\tilde{c}p_{12}p_{22}]\frac{\partial}{\partial\eta}+\\ +(\tilde{d}p_{11}+\tilde{g}p_{12})E=p_{11}\tilde{a}\left(p_{11}\frac{\partial}{\partial\xi}+p_{21}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\\ +p_{11}\tilde{b}\left(p_{12}\frac{\partial}{\partial\xi}+p_{22}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+p_{12}\tilde{b}\left(p_{11}\frac{\partial}{\partial\xi}+p_{21}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\\ +p_{12}\tilde{c}\left(p_{12}\frac{\partial}{\partial\xi}+p_{22}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+(p_{11}\tilde{d}+p_{12}\tilde{g})E=\\ =p_{11}(\tilde{a}D_1+\tilde{b}D_2+\tilde{d}E)+p_{12}(\tilde{b}D_1+\tilde{c}D_2+\tilde{g}E)=\\ =p_{11}A_1+p_{12}A_2.\end{gathered} \tag{20}$$

Аналогично с помощью обозначений (11) и (12) доказывается формула

$$\tilde{A}_2=p_{21}A_1+p_{22}A_2. \tag{21}$$

Таким образом, вспомогательные операторы (19) при аффинном отображении (3) преобразуются по формулам (20) и (21). Используя эти формулы и условия (18), находим равенства

$$\mathcal{J}(\bar{\Lambda}_1\bar{P}) = |q|\,[p_{11}J(A_1P) + p_{12}J(A_2P)] = 0,$$
$$\mathcal{J}(\bar{\Lambda}_2\bar{P}) = |q|\,[p_{21}J(A_1P) + p_{22}J(A_2P)] = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Если уравнение (1) допустимо, то после невырожденного аффинного преобразования (3) уравнение (13) также допустимо, причем главные коэффициенты A и B допустимого уравнения инвариантны при этом преобразовании.*

Доказательство. Допустимость уравнения (1) означает, что его коэффициенты-многочлены (2) определяются формулами

$$\begin{aligned}
&a = Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},\\
&b = Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00},\\
&c = Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00},\\
&d = Bx + d_{00}, \quad g = By + g_{00}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим аналогичные многочлены для уравнения (13). Используя формулы (9) и (3), находим

$$\begin{aligned}
a_0 = \tilde{a}p_{11}^2 + 2\tilde{b}p_{11}p_{12} + \tilde{c}p_{12}^2 = Ap_{11}^2(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})^2 +\\
+ 2Ap_{11}p_{12}(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})(q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}) +\\
+ Ap_{12}^2(q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20})^2 + Q_1(\xi, \eta) =\\
= A\left[p_{11}^2\left(q_{11}^2\xi^2 + q_{12}^2\eta^2 + 2q_{11}q_{12}\xi\eta\right) +\right.\\
+ 2p_{11}p_{12}(q_{11}q_{21}\xi^2 + q_{11}q_{22}\xi\eta + q_{12}q_{21}\xi\eta + q_{12}q_{22}\eta^2) +\\
\left.+ p_{12}^2\left(q_{21}^2\xi^2 + q_{22}^2\eta^2 + 2q_{21}q_{22}\xi\eta\right)\right] + Q_2(\xi, \eta) =\\
= A\left\{\left(p_{11}^2q_{11}^2 + 2p_{11}p_{12}q_{11}q_{21} + p_{12}^2q_{21}^2\right)\xi^2 +\right.\\
+ 2\left[p_{11}^2q_{11}q_{12} + p_{11}p_{12}(q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21}) + p_{12}^2q_{21}q_{22}\right]\xi\eta +\\
\left.+ \left(p_{11}^2q_{12}^2 + 2p_{11}p_{12}q_{12}q_{22} + p_{12}^2q_{22}^2\right)\eta^2\right\} + Q_2(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{23}$$

В этой формуле через $Q_1(\xi, \eta)$ и $Q_2(\xi, \eta)$ обозначены некоторые многочлены первой степени. Далее, поскольку преобразования (3) и (4) взаимно обратны, то справедливы равенства

$$q_{11} = p_{22}/p, \quad q_{12} = -p_{12}/p, \quad q_{21} = -p_{21}/p, \quad q_{22} = p_{11}/p. \tag{24}$$

С помощью этих равенств вычисляем коэффициенты в формуле (23). Имеем последовательно

$$p_{11}^2q_{11}^2 + 2p_{11}p_{12}q_{11}q_{21} + p_{12}^2q_{21}^2 =$$
$$= \frac{1}{p^2}\left(p_{11}^2p_{22}^2 - 2p_{11}p_{12}p_{22}p_{21} + p_{12}^2p_{21}^2\right) = 1,$$

$$p_{11}^2q_{11}q_{12} + p_{11}p_{12}(q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21}) + p_{12}^2q_{21}q_{22} =$$
$$= \frac{1}{p^2}[-p_{11}^2p_{22}p_{12} + p_{11}p_{12}(p_{22}p_{11} + p_{12}p_{21}) - p_{12}^2p_{21}p_{11}] = 0,$$

$$p_{11}^2q_{12}^2 + 2p_{11}p_{12}q_{12}q_{22} + p_{12}^2q_{22}^2 =$$
$$= \frac{1}{p^2}\left(p_{11}^2p_{12}^2 - 2p_{11}p_{12}p_{12}p_{11} + p_{12}^2p_{11}^2\right) = 0.$$

Аналогично по формулам (10)—(12) с помощью равенств (24) вычисляются и остальные коэффициенты уравнения (13). В результате вместо (22) получим формулы

$$\begin{aligned} a_0 &= A\xi^2 + \bar{a}_{10}\xi + \bar{a}_{01}\eta + \bar{a}_{00}, \\ b_0 &= A\xi\eta + \bar{b}_{10}\xi + \bar{b}_{01}\eta + \bar{b}_{00}, \\ c_0 &= A\eta^2 + \bar{c}_{10}\xi + \bar{c}_{01}\eta + \bar{c}_{00}, \\ d_0 &= B\xi + \bar{d}_{00}, \quad g_0 = B\eta + \bar{g}_{00}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теорема доказана.

§ 5. Преобразование коэффициентов характеристического многочлена

В конце § 3 был рассмотрен многочлен третьего порядка

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 =$$
$$= \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy +$$
$$+ \alpha_{02}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00}. \tag{1}$$

Этот многочлен составлен по старшим коэффициентам-многочленам допустимого уравнения и поэтому называется характеристическим многочленом допустимого уравнения. Приравнивая его нулю, получим характеристическое уравнение

$$\alpha(x, y) = 0. \tag{2}$$

Если в допустимом уравнении произвести невырожденное аффинное преобразование независимых переменных, то оно приведется к виду (4.13). Вычислим характеристический многочлен для преобразованного допустимого уравнения (4.13). В силу формул (3.12), (4.9)—(4.11) имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\xi, \eta) &= a_0c_0 - b_0^2 = \\
&= (\tilde{a}p_{11}^2 + 2\tilde{b}p_{11}p_{12} + \tilde{c}p_{12}^2)(\tilde{a}p_{21}^2 + 2\tilde{b}p_{21}p_{22} + \tilde{c}p_{22}^2) - \\
&\quad - [\tilde{a}p_{11}p_{21} + \tilde{b}(p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12}) + \tilde{c}p_{12}p_{22}]^2 = \\
&\quad = \tilde{a}\tilde{c}\,(p_{11}^2p_{22}^2 + p_{12}^2p_{21}^2 - 2p_{11}p_{21}p_{12}p_{22}) + \\
&\quad + \tilde{b}^2\,[4p_{11}p_{12}p_{21}p_{22} - (p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12})^2] = \\
&= (\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2)(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})^2 = (\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2)\,p^2 = p^2\tilde{\alpha}(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь, как обычно, введено обозначение

$$\tilde{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10},\ q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}). \tag{4}$$

Поскольку при невырожденном аффинном преобразовании $p \neq 0$, то из формул (3) и (4) следует, что характеристическое уравнение

$$\alpha_0(\xi, \eta) = p^2\tilde{\alpha}(\xi, \eta) = 0 \tag{5}$$

преобразованного допустимого уравнения (4.13) получается из уравнения (2) простой подстановкой

$$x = q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10}, \quad y = q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}. \tag{6}$$

Таким образом, уравнения (2) и (5) аффинно эквивалентны. Поэтому можно рассматривать задачу упрощения уравнения (5) по сравнению с уравнением (2) путем соответствующего выбора аффинного преобразования (6). Иными словами, необходимо так выбрать аффинное преобразование (6), чтобы многочлен (3) максимально упростился по сравнению с многочленом (1). В связи с этим рассмотрим многочлен (4). Используя формулы (1) и (6), находим

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha_{30}&(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})^3 + \\
&+ \alpha_{21}(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})^2(q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}) + \\
&+ \alpha_{12}(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})(q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20})^2 + \\
&+ \alpha_{03}(q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20})^3 + \alpha_{20}(q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10})^2 +
\end{aligned}$$

$$+\alpha_{11}(q_{11}\xi+q_{12}\eta+q_{10})(q_{21}\xi+q_{22}\eta+q_{20})+$$
$$+\alpha_{02}(q_{21}\xi+q_{22}\eta+q_{20})^2+\alpha_{10}(q_{11}\xi+q_{12}\eta+q_{10})+$$
$$+\alpha_{01}(q_{21}\xi+q_{22}\eta+q_{20})+\alpha_{00}. \quad (7)$$

После элементарных преобразований многочлен (7) можно представить в виде

$$\tilde{\alpha}(\xi,\ \eta)=\tilde{\alpha}_{30}\xi^3+\tilde{\alpha}_{21}\xi^2\eta+\tilde{\alpha}_{12}\xi\eta^2+\tilde{\alpha}_{03}\eta^3+\tilde{\alpha}_{20}\xi^2+$$
$$+\tilde{\alpha}_{11}\xi\eta+\tilde{\alpha}_{02}\eta^2+\tilde{\alpha}_{10}\xi+\tilde{\alpha}_{01}\eta+\tilde{\alpha}_{00}. \quad (8)$$

При этом из равенства (7) для коэффициентов многочлена (8) получаются формулы

$$\tilde{\alpha}_{30}=\alpha_{30}q_{11}^3+\alpha_{21}q_{11}^2q_{21}+\alpha_{12}q_{11}q_{21}^2+\alpha_{03}q_{21}^3, \quad (9)$$

$$\tilde{\alpha}_{21}=\alpha_{30}3q_{11}^2q_{12}+\alpha_{21}\left(q_{11}^2q_{22}+2q_{11}q_{12}q_{21}\right)+$$
$$+\alpha_{12}\left(q_{21}^2q_{12}+2q_{11}q_{21}q_{22}\right)+\alpha_{03}3q_{21}^2q_{22}, \quad (10)$$

$$\tilde{\alpha}_{12}=\alpha_{30}3q_{11}q_{12}^2+\alpha_{21}\left(q_{21}q_{12}^2+2q_{11}q_{12}q_{22}\right)+$$
$$+\alpha_{12}\left(q_{11}q_{22}^2+2q_{12}q_{21}q_{22}\right)+\alpha_{03}3q_{21}q_{22}^2, \quad (11)$$

$$\tilde{\alpha}_{03}=\alpha_{30}q_{12}^3+\alpha_{21}q_{12}^2q_{22}+\alpha_{12}q_{12}q_{22}^2+\alpha_{03}q_{22}^3, \quad (12)$$

$$\tilde{\alpha}_{20}=\alpha_{30}3q_{11}^2q_{10}+\alpha_{21}\left(q_{11}^2q_{20}+2q_{11}q_{10}q_{21}\right)+$$
$$+\alpha_{12}\left(q_{21}^2q_{10}+2q_{11}q_{21}q_{20}\right)+\alpha_{03}3q_{21}^2q_{20}+$$
$$+\alpha_{20}q_{11}^2+\alpha_{11}q_{11}q_{21}+\alpha_{02}q_{21}^2, \quad (13)$$

$$\tilde{\alpha}_{11}=\alpha_{30}6q_{11}q_{12}q_{10}+$$
$$+\alpha_{21}2(q_{10}q_{12}q_{21}+q_{10}q_{11}q_{22}+q_{11}q_{12}q_{20})+$$
$$+\alpha_{12}2(q_{11}q_{22}q_{20}+q_{12}q_{21}q_{20}+q_{21}q_{22}q_{10})+$$
$$+\alpha_{03}6q_{21}q_{22}q_{20}+\alpha_{20}2q_{11}q_{12}+$$
$$+\alpha_{11}(q_{11}q_{22}+q_{12}q_{21})+\alpha_{02}2q_{21}q_{22}, \quad (14)$$

$$\tilde{\alpha}_{02}=\alpha_{30}3q_{12}^2q_{10}+\alpha_{21}\left(q_{12}^2q_{20}+2q_{12}q_{22}q_{10}\right)+$$
$$+\alpha_{12}\left(q_{22}^2q_{10}+2q_{12}q_{22}q_{20}\right)+\alpha_{03}3q_{22}^2q_{20}+$$
$$+\alpha_{20}q_{12}^2+\alpha_{11}q_{12}q_{22}+\alpha_{02}q_{22}^2, \quad (15)$$

$$\tilde{\alpha}_{10}=\alpha_{30}3q_{11}q_{10}^2+\alpha_{21}\left(q_{21}q_{10}^2+2q_{10}q_{11}q_{20}\right)+$$
$$+\alpha_{12}\left(q_{11}q_{20}^2+2q_{20}q_{21}q_{10}\right)+\alpha_{03}3q_{21}q_{20}^2+$$
$$+\alpha_{20}2q_{10}q_{11}+\alpha_{11}(q_{10}q_{21}+q_{11}q_{20})+$$
$$+\alpha_{02}2q_{20}q_{21}+\alpha_{10}q_{11}+\alpha_{01}q_{21}, \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_{01} = \alpha_{30}3q_{12}q_{10}^2 + \alpha_{21}(q_{22}q_{10}^2 + 2q_{10}q_{12}q_{20}) + \\ + \alpha_{12}(q_{12}q_{20}^2 + 2q_{10}q_{20}q_{22}) + \alpha_{03}3q_{22}q_{20}^2 + \\ + \alpha_{20}2q_{10}q_{12} + \alpha_{11}(q_{10}q_{22} + q_{12}q_{20}) + \\ + \alpha_{02}q_{20}q_{22} + \alpha_{10}q_{12} + \alpha_{01}q_{22}, \quad (17)$$

$$\tilde{\alpha}_{00} = \alpha_{30}q_{10}^3 + \alpha_{21}q_{10}^2q_{20} + \alpha_{12}q_{10}q_{20}^2 + \\ + \alpha_{03}q_{20}^3 + \alpha_{20}q_{20}^2 + \alpha_{11}q_{10}q_{20} + \alpha_{02}q_{20}^2 + \\ + \alpha_{10}q_{10} + \alpha_{01}q_{20} + \alpha_{00}. \quad (18)$$

Во всех этих формулах коэффициенты $\{\alpha_{ks}\}$ многочлена (1) фиксированы, а параметры $\{q_{ks}\}$ преобразования (6) требуется выбрать таким образом, чтобы наибольшее число коэффициентов $\{\tilde{\alpha}_{ks}\}$, определяемых формулами (9)—(18), обращалось бы в нуль.

По старшим коэффициентам характеристического многочлена (1) определим вспомогательный многочлен третьего порядка

$$R(t) = \alpha_{30}t^3 + \alpha_{21}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{03} \quad (19)$$

и соответствующее уравнение

$$R(t) = 0. \quad (20)$$

Кроме того, рассмотрим еще один многочлен

$$R_1(\tau) = \alpha_{30} + \alpha_{21}\tau + \alpha_{12}\tau^2 + \alpha_{03}\tau^3 \quad (21)$$

и соответствующее ему уравнение

$$R_1(\tau) = 0. \quad (22)$$

Из формул (19) и (21) следует равенство

$$R(t) = t^3R_1(1/t) = (1/\tau^3)R_1(\tau), \qquad \tau = 1/t. \quad (23)$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$R'(t) = 3t^2R_1(1/t) - tR_1'(1/t). \quad (24)$$

Предположим, что t_1 есть отличный от нуля корень уравнения (20). Тогда из равенства (23) следует, что число $\tau_1 = 1/t_1$ является корнем уравнения (22).

Будем рассматривать отдельно различные случаи в зависимости от свойств корней уравнения (20).

1. Пусть уравнение (20) имеет три различных действительных корня

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad (25)$$

причем будем считать, что $t_1 \neq 0$ и $t_2 \neq 0$. В этом случае коэффициенты аффинного преобразования (6) можно выбрать при условиях

$$q_{11} = t_1 q_{21}, \quad q_{12} = t_2 q_{22}. \tag{26}$$

Предположим, что числа q_{21} и q_{22} отличны от нуля. Тогда для определителя системы (6) имеем

$$q = \begin{vmatrix} t_1 q_{21} & t_2 q_{22} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = q_{21} q_{22} (t_1 - t_2) \neq 0. \tag{27}$$

А теперь подставляем первое из равенств (26) в формулу (9). В результате получаем

$$\tilde{\alpha}_{30} = \alpha_{30} t_1^3 q_{21}^3 + \alpha_{21} t_1^2 q_{21}^3 + \alpha_{12} t_1 q_{21}^3 + \alpha_{03} q_{21}^3 = \\ = q_{21}^3 R(t_1) = 0. \tag{28}$$

Аналогично, учитывая второе из равенств (26), из формулы (12) находим

$$\tilde{\alpha}_{03} = q_{22}^3 R(t_2) = 0. \tag{29}$$

Таким образом, если уравнение (20) имеет три различных корня (25), то можно так выбрать аффинное преобразование (6), что выполняются условия

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 0. \tag{30}$$

При этом коэффициенты q_{21} и q_{22} лишь отличны от нуля, а в остальном произвольны. Докажем, что эти коэффициенты можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись еще два условия:

$$\tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = -1. \tag{31}$$

В самом деле, из формулы (10), учитывая равенства (26), находим

$$\tilde{\alpha}_{21} = \alpha_{30} 3 t_1^2 q_{21}^2 t_2 q_{22} + \alpha_{21} (t_1^2 q_{21}^2 q_{22} + 2 t_1 q_{21}^2 t_2 q_{22}) + \\ + \alpha_{12} (q_{21}^2 t_2 q_{22} + 2 t_1 q_{21}^2 q_{22}) + \alpha_{03} 3 q_{21}^2 q_{22} = \\ = q_{21}^2 q_{22} [3\alpha_{30} t_1^2 t_2 + \alpha_{21} (2 t_1 t_2 + t_1^2) + \\ + \alpha_{12} (2 t_1 + t_2) + 3\alpha_{03}] = q_{21}^2 q_{22} \Bigg[t_2 R'(t_1) + \\ + t_1^2 \left(\alpha_{21} + 2\alpha_{12} \frac{1}{t_1} + 3\alpha_{03} \frac{1}{t_1^2} \right) \Bigg] = \\ = q_{21}^2 q_{22} \left[t_2 R'(t_1) + t_1^2 R_1' \left(\frac{1}{t_1} \right) \right]. \tag{32}$$

С другой стороны, учитывая тот факт, что t_1 — нуль многочлена $R(t)$, а $\tau_1 = 1/t_1$ — нуль многочлена $R_1(\tau)$, из формулы (24) имеем равенство

$$t_1 R_1'(1/t_1) = 3t_1^2 R_1(1/t_1) - R'(t_1) = -R'(t_1).$$

Подставляя это значение в равенство (32), получаем

$$\tilde{\alpha}_{21} = q_{21}^2 q_{22}(t_2 - t_1) R'(t_1). \qquad (33)$$

Аналогично из формулы (11), учитывая равенства (24) и (26), находим

$$\tilde{\alpha}_{12} = q_{21}q_{22}^2\left[3\alpha_{30}t_1t_2^2 + \alpha_{21}(t_2^2 + 2t_1t_2) + \alpha_{12}(t_1 + 2t_2) + 3\alpha_{03}\right] = q_{21}q_{22}^2\left[t_1R'(t_2) + t_2^2R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right)\right] = q_{21}q_{22}^2(t_1 - t_2)R'(t_2). \qquad (34)$$

Таким образом, в силу формул (33) и (34) условия (31) приводятся к виду

$$\tilde{\alpha}_{21} = q_{21}^2 q_{22}(t_2 - t_1) R'(t_1) = -1,$$
$$\tilde{\alpha}_{12} = q_{21}q_{22}^2(t_1 - t_2) R'(t_2) = -1.$$

Из этих условий коэффициенты q_{21} и q_{22} определяются однозначно. Разумеется, вместо условий (31) можно ввести условия $\tilde{\alpha}_{21} = a$ и $\tilde{\alpha}_{12} = b$, где a и b — любые отличные от нуля числа.

Далее, в аффинном преобразовании (6) остаются произвольными два числа q_{10} и q_{20}. Докажем, что эти числа можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \qquad (35)$$

В самом деле, приравнивая нулю правые части равенств (13) и (15), получим систему уравнений

$$(3\alpha_{30}q_{11}^2 + 2\alpha_{21}q_{11}q_{21} + \alpha_{12}q_{21}^2)q_{10} + (\alpha_{21}q_{11}^2 + 2\alpha_{12}q_{11}q_{21} + 3\alpha_{03}q_{21}^2)q_{20} = -\alpha_{20}q_{11}^2 - \alpha_{11}q_{11}q_{21} - \alpha_{02}q_{21}^2, \qquad (36)$$

$$(3\alpha_{30}q_{12}^2 + 2\alpha_{21}q_{12}q_{22} + \alpha_{12}q_{22}^2)q_{10} + (\alpha_{21}q_{12}^2 + 2\alpha_{12}q_{12}q_{22} + 3\alpha_{03}q_{22}^2)q_{20} = -\alpha_{20}q_{12}^2 - \alpha_{11}q_{12}q_{22} - \alpha_{02}q_{22}^2. \qquad (37)$$

В силу равенств (24) и (26) определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \left(3\alpha_{30}t_1^2 + 2\alpha_{21}t_1 + \alpha_{12}\right) q_{21}^2 \times$$
$$\times \left(\alpha_{21}t_2^2 + 2\alpha_{12}t_2 + 3\alpha_{03}\right) q_{22}^2 -$$
$$- \left(3\alpha_{30}t_2^2 + 2\alpha_{21}t_2 + \alpha_{12}\right) q_{22}^2 \left(\alpha_{21}t_1^2 + 2\alpha_{12}t_1 + 3\alpha_{03}\right) q_{21}^2 =$$
$$= q_{21}^2 q_{22}^2 \left[R'(t_1)\, t_2^2 R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right) - R'(t_2)\, t_1^2 R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right)\right] =$$
$$= q_{21}^2 q_{22}^2 (t_1 - t_2) R'(t_1) R'(t_2) \neq 0. \quad (38)$$

Поскольку определитель системы уравнений (36) и (37) отличен от нуля, то коэффициенты q_{10} и q_{20} можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия (35).

Таким образом, если уравнение (20) имеет три различных действительных корня (25), то аффинное преобразование (6) можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия (30), (31) и (35), т. е.

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = -1, \quad \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \quad (39)$$

2. Предположим теперь, что уравнение (20) имеет один простой корень t_1 и один двойной корень $t_2 = t_3$. Тогда поскольку корней два, то условия (30) выполняются, а из формул (33) и (34) следуют равенства

$$\tilde{\alpha}_{21} = -1, \quad \tilde{\alpha}_{12} = 0, \quad (40)$$

причем один из коэффициентов q_{21} или q_{22} остается произвольным. Далее, поскольку теперь один из корней двойной, то условие (38) не выполняется. Поэтому вместо условий (35) рассмотрим условия

$$\tilde{\alpha}_{20} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{11} = 0. \quad (41)$$

В силу формулы (14) второе из равенств (41) приводит к уравнению

$$[6\alpha_{30}q_{11}q_{12} + 2\alpha_{21}(q_{12}q_{21} + q_{11}q_{22}) + 2\alpha_{12}q_{21}q_{22}]q_{10} +$$
$$+ [2\alpha_{21}q_{11}q_{12} + 2\alpha_{12}(q_{11}q_{22} + q_{21}q_{12}) + 6\alpha_{03}q_{21}q_{22}]q_{20} =$$
$$= -2\alpha_{20}q_{11}q_{12} - \alpha_{11}(q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21}) - 2\alpha_{02}q_{21}q_{22}. \quad (42)$$

Вычисляем определитель системы уравнений (36) и (42). Аналогично формуле (38) получаем

$$\Delta_1 = \left(3\alpha_{30}t_1^2 + 2\alpha_{21}t_1 + \alpha_{12}\right) q_{21}^2 \times$$
$$\times 2q_{21}q_{22}[\alpha_{21}t_1t_2 + \alpha_{12}(t_1 + t_2) + 3\alpha_{03}] -$$

$$- 2q_{21}q_{22}[3\alpha_{30}t_1t_2 + \alpha_{21}(t_1+t_2) + \alpha_{12}] \times$$
$$\times \left(\alpha_{21}t_1^2 + 2\alpha_{12}t_1 + 3\alpha_{03}\right) q_{21}^2 =$$
$$= 2q_{21}^3q_{22}\left\{R'(t_1)[\alpha_{21}t_1t_2 + \alpha_{12}(t_1+t_2) + 3\alpha_{03}] - \right.$$
$$\left. - t_1^2R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right)[3\alpha_{30}t_1t_2 + \alpha_{21}(t_1+t_2) + \alpha_{12}]\right\} =$$
$$= 2q_{21}^3q_{22}R'(t_1)[\alpha_{21}t_1t_2 + \alpha_{12}(t_1+t_2) + 3\alpha_{03} +$$
$$+ 3\alpha_{30}t_1^2t_2 + \alpha_{21}t_1^2 + \alpha_{21}t_1t_2 + \alpha_{12}t_1] =$$
$$= 2q_{21}^3q_{22}R'(t_1)\left[t_2\left(3\alpha_{30}t_1^2 + 2\alpha_{21}t_1 + \alpha_{12}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(3\alpha_{03} + 2\alpha_{12}t_1 + \alpha_{21}t_1^2\right)\right] =$$
$$= 2q_{21}^3q_{22}R'(t_1)\left[t_2R'(t_1) + t_1^2R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right)\right] =$$
$$= 2q_{21}^3q_{22}[R'(t_1)]^2(t_2 - t_1) \neq 0. \quad (43)$$

Поскольку определитель системы уравнений (36) и (42) отличен от нуля, то эта система имеет решение, при котором условия (41) выполняются.

Таким образом, если уравнение (20) имеет один простой и один двойной корни, то аффинное преобразование (6) можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{21} = -1, \quad \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{11} = 0. \quad (44)$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (20) имеет один тройной корень t_1, т. е. выполняются условия

$$R(t_1) = \alpha_{30}t_1^3 + \alpha_{21}t_1^2 + \alpha_{12}t_1 + \alpha_{03} = 0, \quad (45)$$
$$R'(t_1) = 3\alpha_{30}t_1^2 + 2\alpha_{21}t_1 + \alpha_{12} = 0, \quad (46)$$
$$R''(t_1) = 2(3\alpha_{30}t_1 + \alpha_{21}) = 0. \quad (47)$$

В этом случае из формулы (24) имеем

$$R''(t) = 6tR_1\left(\frac{1}{t}\right) - 4R_1'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}R_1''\left(\frac{1}{t}\right). \quad (48)$$

Положим теперь $t = t_1$ в формулах (23), (24) и (48). В результате, используя условия (45)—(47), получим

$$R_1\left(\frac{1}{t_1}\right) = R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right) = R_1''\left(\frac{1}{t_1}\right) = 0. \quad (49)$$

А теперь снова используем равенства (26), где $t_2 \neq t_1$, но уже $R(t_2) \neq 0$. Тогда из формулы (9), как обычно, находим

$$\tilde{\alpha}_{30} = q_{21}^3 R(t_1) = 0. \tag{50}$$

Далее, из формул (32) и (34) имеем равенства

$$\tilde{\alpha}_{21} = q_{21}^2 q_{22}\left[t_2 R'(t_1) + t_1^2 R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right)\right], \tag{51}$$

$$\tilde{\alpha}_{12} = q_{21} q_{22}^2\left[t_1 R'(t_2) + t_2^2 R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right)\right]. \tag{52}$$

В силу условий (49) из (51) находим $\tilde{\alpha}_{21} = 0$. Аналогично с помощью условий (46), (47) и (49) получаем

$$\tilde{\alpha}_{12} = q_{21}q_{22}^2\left[t_2^2(3\alpha_{30}t_1 + \alpha_{21}) + 2t_2(\alpha_{21}t_1 + \alpha_{12}) + \right.$$
$$\left. + (\alpha_{12}t_1 + 3\alpha_{03})\right] = q_{21}q_{22}^2\left[t_2^2 R''(t_1)\frac{1}{2} - \right.$$
$$\left. - t_1 t_2 R''(t_1) + t_1 R_1''\left(\frac{1}{t_1}\right)\frac{1}{2}\right] = 0. \tag{53}$$

С другой стороны, из (12) имеем

$$\tilde{\alpha}_{03} = q_{22}^3 R(t_2). \tag{54}$$

Далее, используя условия (26), из формулы (15) находим

$$\tilde{\alpha}_{02} = q_{22}^2\left[q_{10}R'(t_2) + q_{20}t_2^2 R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\alpha_{20}t_2^2 + \alpha_{11}t_2 + \alpha_{02}\right)\right]. \tag{55}$$

В формулах (54) и (55) произвольны величины t_2, q_{10}, q_{20}, q_{22}. Сначала фиксируем t_2 так, чтобы обе производные в квадратных скобках были отличны от нуля. Затем выбираем q_{10} и q_{20} так, чтобы вся сумма в квадратных скобках была равна нулю. После этого выбираем q_{22} так, чтобы все произведение (54) было равно единице. В результате получим $\tilde{\alpha}_{03} = 1$, $\tilde{\alpha}_{02} = 0$.

Таким образом, если уравнение (20) имеет один тройной корень, то аффинное преобразование можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{\alpha}_{30} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{03} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \tag{56}$$

4. Допустим теперь, что уравнение (20) имеет два простых корня t_1 и t_2. Это возможно только при условии

$\alpha_{30} = 0$. В этом случае можно снова использовать формулы (26). Если оба корня t_1 и t_2 отличны от нуля, то все формулы и рассуждения из первого случая переносятся без изменений и на этот случай. В результате и в этом случае имеем условия (39). А если, например, $t_2 = 0$, то имеем условия $\alpha_{30} = \alpha_{03} = 0$. При этих условиях можно считать, что характеристический многочлен достаточно упрощен. Но, конечно, можно пойти и дальше. При условии $t_2 = 0$ произведем замену по формулам (6). Применяя равенства (26), получим

$$x = q_{11}\xi + q_{10}, \quad y = q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}.$$

Остальные все формулы и выводы сохраняются. Таким образом, и в этом случае имеем условия (39).

5. Предположим теперь, что уравнение (20) имеет один двойной нуль t_1. Тогда равенства (45) и (46) выполняются, и вместо условий (49) получим условия

$$R_1(1/t_1) = R_1'(1/t_1) = 0. \tag{57}$$

В результате из формул (50) и (51) получим $\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{21} = 0$. Далее, из формулы (48), учитывая условия (57), находим

$$R''(t_1) = (1/t_1) R_1''(1/t_1).$$

Следовательно, из средней части равенства (53) имеем

$$\tilde{\alpha}_{12} = q_{21}q_{22}^2 \frac{1}{2}\left[t_2^2 R''(t_1) - 2t_1t_2R''(t_1) + \right.$$
$$\left. + t_1^2R''(t_1)\right] = q_{21}q_{22}^2\frac{1}{2}R''(t_1)(t_2 - t_1)^2.$$

Поскольку $R''(t_1) \neq 0$, то выбором параметров можно обеспечить условие $\tilde{\alpha}_{03} = \tilde{\alpha}_{12} = 1$.

Докажем теперь, что параметры q_{10} и q_{20} в преобразовании (6) можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{\alpha}_{02} = \tilde{\alpha}_{11} = 0. \tag{58}$$

В самом деле, из формулы (37) при условиях (26) имеем

$$R'(t_2)q_{10} + t_2^2R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right)q_{20} = c_1. \tag{59}$$

Аналогично из формулы (42) получается равенство

$$2[3\alpha_{30}t_1t_2+\alpha_{21}(t_1+t_2)+\alpha_{12}]q_{10}+\\+2[\alpha_{21}t_1t_2+\alpha_{12}(t_1+t_2)+3\alpha_{03}]q_{20}=c_2. \quad (60)$$

В этих двух равенствах правые части не зависят от q_{10} и q_{20}.

Далее, поскольку в данном случае уравнение (20) имеет только один двойной корень t_1 и больше у него корней нет, то имеем $\alpha_{30}=0$. Поэтому, не нарушая общности, можем считать, что это уравнение имеет вид

$$R(t)=\alpha_{21}t^2+\alpha_{12}t+\alpha_{03}=(at+b)^2.$$

Отсюда следуют равенства

$$\alpha_{21}=a^2,\quad \alpha_{12}=2ab,\quad \alpha_{03}=b^2,$$
$$R'(t)=2a(at+b),\quad R_1(\tau)=a^2\tau+2ab\tau^2+b^2\tau^3,$$
$$R_1'(\tau)=a^2+4ab\tau+3b^2\tau^2.$$

С помощью этих равенств находим формулы

$$t_2^2R_1'\left(\frac{1}{t_2}\right)=a^2t_2^2+4abt_2+3b^2=\\=at_2(at_2+b)+3b(at_2+b)=R'(t_2)\frac{at_2+3b}{2a},$$
$$2(\alpha_{21}t_1+\alpha_{21}t_2+\alpha_{12})=2(a^2t_1+a^2t_2+2ab)=R'(t_2),$$
$$2(a^2t_1t_2+2abt_1+2abt_2+3b^2)=\\=2a(at_2+b)\left(t_1+\frac{2b}{a}\right)=R'(t_2)\frac{at_1+2b}{a}.$$

Подставляем найденные значения коэффициентов уравнений (59) и (60). В результате получим систему уравнений

$$R'(t_2)q_{10}+R'(t_2)\frac{at_2+3b}{2a}q_{20}=c_1,$$
$$R'(t_2)q_{10}+R'(t_2)\frac{at_1+2b}{a}q_{20}=c_2.$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta_2=-\frac{1}{4a^2}[R'(t_2)]^2\neq 0.$$

Следовательно, условия (58) выполняются при соответствующем выборе коэффициентов q_{10} и q_{20}.

Таким образом, если уравнение (20) имеет один двойной корень и не имеет других корней, то аффинное преобразование (6) можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{\alpha}_{30}=0,\quad \tilde{\alpha}_{03}=\tilde{\alpha}_{12}=1,\quad \tilde{\alpha}_{21}=\tilde{\alpha}_{02}=\tilde{\alpha}_{11}=0. \tag{61}$$

6. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (20) имеет только один простой действительный нуль t_1. В этом случае имеем

$$R(t_1)=R_1(1/t_1)=0,$$
$$R'(t_1)=-t_1R_1'(1/t_1)\neq 0.$$

Условие (43) в данном случае выполняется. Поэтому из равенств (41) находим $\tilde{\alpha}_{20}=\tilde{\alpha}_{11}=0$. Далее, формула (33) также справедлива, и из нее находим $\tilde{\alpha}_{21}=1$. Таким образом, в этом случае имеем

$$\tilde{\alpha}_{30}=0,\quad \tilde{\alpha}_{03}=\tilde{\alpha}_{21}=1,\quad \tilde{\alpha}_{20}=\tilde{\alpha}_{11}=0. \tag{62}$$

7. Наконец, рассмотрим последний случай. Предположим, что уравнение (20) не имеет действительных корней. Тогда $\alpha_{30}=0$, и это уравнение будет квадратным. Обозначим через t_1 нуль производной характеристического многочлена, т. е. $R'(t_1)=0$.

Если $t_1=0$, то необходимо $\alpha_{12}=0$. В этом случае в аффинном преобразовании (6) полагаем

$$q_{21}=q_{12}=0,\quad q_{11}\neq 0,\quad q_{22}\neq 0. \tag{63}$$

Тогда из формул преобразования (9)—(14) находим

$$\tilde{\alpha}_{30}=\tilde{\alpha}_{12}=0,\quad \tilde{\alpha}_{21}=\alpha_{21}q_{11}^2q_{22},\quad \tilde{\alpha}_{03}=\alpha_{03}q_{22}^3,$$
$$\tilde{\alpha}_{20}=\alpha_{21}q_{11}q_{20}+\alpha_{20}q_{11}^2,$$
$$\tilde{\alpha}_{11}=2\alpha_{21}q_{11}q_{22}q_{10}+\alpha_{11}q_{11}q_{22},$$
$$\tilde{\alpha}_{02}=3\alpha_{03}q_{22}^2q_{20}+\alpha_{02}q_{22}^2.$$

Поскольку числа q_{10} и q_{20} произвольны, то их можно выбрать так, чтобы некоторые из двух последних коэффициентов были равны нулю. Например, если $\alpha_{21}\neq 0$, то получим $\tilde{\alpha}_{20}=\tilde{\alpha}_{11}=0$. Таким образом, при условиях (63) имеем

$$\tilde{\alpha}_{30}=\tilde{\alpha}_{12}=\tilde{\alpha}_{20}=\tilde{\alpha}_{11}=0,\quad \tilde{\alpha}_{21}=\tilde{\alpha}_{03}=1. \tag{64}$$

Пусть теперь $t_1 \neq 0$. Тогда из формулы (24) следует условие

$$R_1'\left(\frac{1}{t_1}\right) = 3t_1 R_1\left(\frac{1}{t_1}\right) \neq 0.$$

Поэтому из формулы (38) находим

$$\Delta = -q_{21}^2 q_{22}^2 R'(t_2)\, t_1^2 R_1'(1/t_1) \neq 0.$$

Следовательно, в силу (35) имеем $\tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0$. Таким образом, в этом случае после аффинного преобразования получим

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \tag{65}$$

В настоящем параграфе рассмотрены различные возможности упрощения характеристического уравнения с помощью аффинных преобразований. Можно привести, конечно, и другие случаи, которые отличаются от рассмотренных тем, что в исходном уравнении переменные x и y меняются местами.

§ 6. Нормальные формы допустимого дифференциального уравнения

Пусть дано допустимое дифференциальное уравнение в общем виде

$$(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n[A(n-1) + B]u. \tag{1}$$

Главные коэффициенты A и B должны быть такими, чтобы при любом целом неотрицательном m выполнялось условие

$$Am + B \neq 0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $B \neq 0$. Поэтому можно ввести замену переменных по формулам

$$x = \xi - \frac{d_{00}}{B}, \quad y = \eta - \frac{g_{00}}{B}. \tag{3}$$

В результате уравнение (1), если вернуться к старым обозначениям переменных и коэффициентов, приведется к виду

$$(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + B\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = n\,[A(n-1) + B]\,u. \tag{4}$$

Это уравнение будем называть *каноническим дифференциальным допустимым уравнением*. Оно также рассматривается только при условии (2).

Для уравнений (1) и (4) характеристический многочлен имеет вид

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = \\ = \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \\ + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00}. \tag{5}$$

В силу формул (3.20) и (3.21) коэффициенты этого многочлена определяются через коэффициенты уравнения (1) с помощью равенств

$$\alpha_{30} = Ac_{10}, \quad \alpha_{03} = Aa_{01}, \quad \alpha_{21} = A(c_{01} - 2b_{10}),$$
$$\alpha_{12} = A(a_{10} - 2b_{01}), \quad \alpha_{20} = Ac_{00} + a_{10}c_{10} - b_{10}^2,$$
$$\alpha_{11} = a_{10}c_{01} + a_{01}c_{10} - 2Ab_{00} - 2b_{01}b_{10},$$
$$\alpha_{02} = a_{01}c_{01} + Aa_{00} - b_{01}^2,$$
$$\alpha_{10} = a_{10}c_{00} - 2b_{10}b_{00} + a_{00}c_{10},$$
$$\alpha_{01} = a_{01}c_{00} - 2b_{01}b_{00} + a_{00}c_{01},$$
$$\alpha_{00} = a_{00}c_{00} - b_{00}^2. \tag{6}$$

Если в уравнении (1) заменить переменные по формулам

$$x = q_{11}\xi + q_{12}\eta + q_{10}, \quad y = q_{21}\xi + q_{22}\eta + q_{20}, \tag{7}$$

то можно упростить это уравнение и соответствующий ему характеристический многочлен (5). Будем классифицировать уравнения (1) по простейшим формам их характеристических многочленов (5). В случае канонического уравнения (4) вместо преобразования (7) естественно рассматривать преобразование

$$x = q_{11}\xi + q_{12}\eta, \quad y = q_{21}\xi + q_{22}\eta. \tag{8}$$

Как и в предыдущем параграфе по старшим коэффициентам многочлена (5) вводим многочлен и уравнение третьего порядка

$$R(t) = \alpha_{30}t^3 + \alpha_{21}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{03} = 0. \tag{9}$$

Будем рассматривать различные случаи наличия и расположения корней уравнения (9).

1. Предположим, что уравнение (9) имеет три различных действительных корня. Тогда можно так выбрать аффинное преобразование (7), что для коэффициентов нового характеристического многочлена выполняются условия (5.39)

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = -1, \quad \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \tag{10}$$

Возвращаясь к старым обозначениям коэффициентов и переменных, можем считать, что условия (10) выполняются для коэффициентов характеристического многочлена (5). Следовательно, в силу равенств (6) из условий (10) находим

$$\begin{gathered}
\alpha_{30} = Ac_{10} = 0, \quad \alpha_{03} = Aa_{01} = 0,\\
\alpha_{21} = A(c_{01} - 2b_{10}) = -1, \quad \alpha_{12} = A(a_{10} - 2b_{01}) = -1,\\
\alpha_{20} = Ac_{00} + a_{10}c_{10} - b_{10}^2 = 0,\\
\alpha_{02} = Aa_{00} + a_{01}c_{01} - b_{01}^2 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Поскольку из третьего и четвертого равенств следует условие $A \neq 0$, то, не нарушая общности, можем положить $A = 1$. А тогда из равенств (11) получим

$$\begin{gathered}
c_{10} = 0, \quad a_{01} = 0, \quad c_{01} = 2b_{10} - 1,\\
a_{10} = 2b_{01} - 1, \quad c_{00} = b_{10}^2, \quad a_{00} = b_{01}^2.
\end{gathered} \tag{12}$$

Подставляем все эти значения в уравнение (1). В результате это уравнение примет вид

$$\left[x^2 + (2b_{01} - 1)\,x + b_{01}^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + $$
$$+ 2\,(xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + $$
$$+ \left[y^2 + (2b_{10} - 1)\,y + b_{10}^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + $$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n\,(n - 1 + B)\,u. \quad (13)$$

Будем считать это уравнение *первой нормальной формой* допустимого уравнения (1). Эта форма определяется тремя коэффициентами b_{01}, b_{10}, b_{00}, а коэффициенты d_{00} и g_{00} на форму уравнения (13) не влияют. Естественно рассмотреть простейший случай, когда выполняются условия

$$b_{01} = b_{10} = b_{00} = 0. \quad (14)$$

В этом случае имеем уравнение

$$(x^2 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + $$
$$+ (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n\,(n - 1 + B)\,u. \quad (15)$$

Если в этом уравнении положить

$$B = \gamma + 1, \quad d_{00} = -\alpha, \quad g_{00} = -\beta, \quad (16)$$

то получим уравнение Аппеля (3.13), которое было рассмотрено в предыдущей главе.

Характеристический многочлен для уравнения (15) имеет вид

$$\alpha(x,\ y) = ac - b^2 = xy\,(1 - x - y). \quad (17)$$

Вместо условий (14) можно, конечно, наложить другое условие на эти коэффициенты. А если в формулах (13) и (15) положить $d_{00} = g_{00} = 0$, то получим нормальную форму первого типа для канонического допустимого уравнения (4).

2. Пусть уравнение (9) имеет один простой и один двойной корни. Тогда в силу условий (5.44) имеем равенства

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{21} = -1, \quad \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{11} = 0. \quad (18)$$

Сопоставляя равенства (6) и (18), находим

$$\alpha_{30} = Ac_{10} = 0, \quad \alpha_{03} = Aa_{01} = 0,$$
$$\alpha_{21} = A(c_{01} - 2b_{10}) = -1, \quad \alpha_{12} = A(a_{10} - 2b_{01}) = 0,$$
$$\alpha_{20} = Ac_{00} + a_{10}c_{10} - b_{10}^2 = 0,$$
$$\alpha_{11} = a_{10}c_{01} + a_{01}c_{10} - 2Ab_{00} - 2b_{01}b_{10} = 0.$$

Из этих равенств при $A = 1$ вместо (12) получаем

$$c_{10} = 0, \quad a_{01} = 0, \quad c_{01} = 2b_{10} - 1, \quad a_{10} = 2b_{01},$$
$$c_{00} = b_{10}^2, \quad b_{00} = b_{01}(b_{10} - 1).$$

Подставляем эти значения в (1). Получим вторую нормальную форму допустимого уравнения

$$(x^2 + 2b_{01}x + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + 2[xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{01}(b_{10} - 1)]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + [y^2 + (2b_{10} - 1)y + b_{10}^2]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (19)$$

Приравнивая нулю все свободные коэффициенты в многочленах при старших производных, получим простейшую *нормальную форму второго типа*:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (20)$$

Характеристический многочлен для уравнения (20) имеет вид

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = -x^2y. \quad (21)$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (9) имеет один тройной корень. В этом случае справедливы равенства

$$\tilde{\alpha}_{30} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{03} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \quad (22)$$

Сопоставляя формулы (6) и (22), получаем

$$\alpha_{30} = Ac_{10} = 0, \quad \alpha_{03} = Aa_{01} = 1,$$
$$\alpha_{21} = A(c_{01} - 2b_{10}) = 0, \quad \alpha_{12} = A(a_{10} - 2b_{01}) = 0,$$
$$\alpha_{02} = a_{01}c_{01} + Aa_{00} - b_{01}^2 = 0.$$

Отсюда при $A = 1$ находим

$$c_{10} = 0, \quad a_{01} = 1, \quad c_{01} = 2b_{10}, \quad a_{10} = 2b_{01},$$
$$a_{00} = b_{01}^2 - 2b_{10}.$$

Подставляем эти значения в уравнение (1). В результате получим *третью нормальную форму* допустимого уравнения

$$\left[x^2 + 2b_{01}x + y + \left(b_{01}^2 - 2b_{10}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$
$$+ 2(xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + (y^2 + 2b_{10}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (23)$$

Простейшая форма последнего уравнения имеет вид

$$(x^2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (24)$$

Уравнению (24) соответствует характеристический многочлен

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = (x^2 + y)y^2 - x^2y^2 = y^3. \quad (25)$$

4. Если уравнение (9) имеет два простых корня, то, как показано в предыдущем параграфе, после некоторого аффинного преобразования получим условия (10). Следовательно, в этом случае допустимое уравнение приводится к нормальной форме первого типа (13) и (15).

Предположим теперь, что уравнение (9) имеет только один двойной корень. Тогда выполняются условия (5.61):

$$\tilde{\alpha}_{30} = 0, \quad \tilde{\alpha}_{03} = \tilde{\alpha}_{12} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{02} = \tilde{\alpha}_{11} = 0. \quad (26)$$

С помощью этих условий из формул (6) при $A = 1$

получаются формулы

$$c_{10}=0,\quad a_{01}=1,\quad c_{01}=2b_{10},$$

$$a_{10}=1+2b_{01},\quad a_{00}=b_{01}^2-2b_{10},\quad b_{00}=b_{10}(1+b_{01}).$$

В результате находим *четвертую нормальную форму* допустимого уравнения

$$\left[x^2+(1+2b_{01})x+y+\left(b_{01}^2-2b_{10}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+2\left[xy+b_{10}x+b_{01}y+b_{10}(1+b_{01})\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+(y^2+2b_{10}y+c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (27)$$

Простейшая форма этого уравнения имеет вид

$$(x^2+x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (28)$$

Уравнению соответствует характеристический многочлен

$$\alpha(x,\ y)=ac-b^2=(x+y)y^2. \quad (29)$$

5. Если уравнение (9) имеет один простой корень, то справедливы условия (5.62). Среди них нет коэффициента $\tilde{\alpha}_{12}$. Случай, когда $\tilde{\alpha}_{12}=0$, будет рассмотрен ниже. А сейчас будем считать, что $\tilde{\alpha}_{12}=1$. Тогда получим условия

$$\tilde{\alpha}_{30}=0,\quad \tilde{\alpha}_{03}=\tilde{\alpha}_{21}=\tilde{\alpha}_{12}=1,\quad \tilde{\alpha}_{20}=\tilde{\alpha}_{11}=0. \quad (30)$$

Далее, как обычно, сопоставляя равенства (6) и (30), имеем

$$c_{10}=0,\quad a_{01}=1,\quad c_{01}=1+2b_{10},\quad a_{10}=1+2b_{01},$$

$$c_{00}=b_{10}^2,\quad b_{00}=\frac{1}{2}+b_{01}+b_{10}+b_{01}b_{10}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим *пятую* *нормальную форму* допустимого уравнения:

$$[x^2 + (1 + 2b_{01})x + y + a_{00}]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + $$
$$+ 2\left[xy + b_{10}x + b_{01}y + \left(\frac{1}{2} + b_{01} + b_{10} + b_{01}b_{10}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ \left[y^2 + (1 + 2b_{10})y + b_{10}^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (31)$$

Простейшая форма этого уравнения имеет вид

$$(x^2 + x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(xy + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (32)$$

Уравнению (32) соответствует характеристический многочлен

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = (x^2 + x + y)(y^2 + y) - \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= xy^2 + y^3 + x^2y + y^2 - \frac{1}{4}. \quad (33)$$

6. Если уравнение (9) не имеет корней, то в первом подслучае рассмотренного в предыдущем параграфе случая 7 выполняются условия

$$\widetilde{\alpha}_{30} = \widetilde{\alpha}_{12} = \widetilde{\alpha}_{20} = \widetilde{\alpha}_{11} = 0, \quad \widetilde{\alpha}_{21} = \widetilde{\alpha}_{03} = 1. \quad (34)$$

Из этих условий, как обычно, находим

$$c_{10} = 0, \quad a_{01} = 1, \quad c_{01} = 1 + 2b_{10}, \quad a_{10} = 2b_{01},$$
$$c_{00} = b_{10}^2, \quad b_{00} = b_{01}(1 + b_{10}).$$

Следовательно, *шестая нормальная форма* допустимого уравнения имеет вид

$$(x^2 + 2b_{01}x + y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$
$$+ 2[xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{01}(1 + b_{10})]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ \left[y^2 + (1 + 2b_{10})y + b_{10}^2)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (35)$$

Приравнивая нулю все произвольные коэффициенты в многочленах при старших производных, получим простейшую нормальную форму шестого типа

$$(x^2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (36)$$

Этому уравнению соответствует характеристический многочлен

$$\alpha(x, y) = (x^2 + y)(y^2 + y) - x^2y^2 = y(y^2 + x^2 + y). \quad (37)$$

7. Рассмотрим теперь условия (5.65). В них отсутствуют коэффициенты $\tilde{\alpha}_{12}$ и $\tilde{\alpha}_{21}$. Предположим, что эти коэффициенты равны 1. Тогда получим

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{20} = \tilde{\alpha}_{02} = 0. \quad (38)$$

Из условий (38) следуют равенства

$$c_{10} = 1, \quad a_{01} = 1, \quad c_{01} = 1 + 2b_{10}, \quad a_{10} = 1 + 2b_{01},$$
$$c_{00} = b_{10}^2 - 1 - 2b_{01}, \quad a_{00} = b_{01}^2 - 1 - 2b_{10}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим *седьмую нормальную форму* допустимого уравнения

$$\left[x^2 + (1 + 2b_{01})x + y + \left(b_{01}^2 - 1 - 2b_{10}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$
$$+ 2(xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ \left[y^2 + x + (1 + 2b_{10})y + \left(b_{10}^2 - 1 - 2b_{01}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (39)$$

Простейшая форма этого уравнения имеет вид

$$(x^2 + x + y - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 + x + y - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (40)$$

Уравнению (40) соответствует характеристический многочлен

$$\alpha(x, y) = (x^2 + x + y - 1)(y^2 + x + y - 1) - x^2y^2 =$$
$$= x^3 + x^2y + xy^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 + y^3. \quad (41)$$

Анализ всех рассмотренных случаев значений коэффициентов характеристического многочлена показывает, что необходимо рассмотреть еще два случая возможных значений. В самом деле, среди условий (10), (18), (22), (26), (30), (34), (38) не встречаются еще две комбинации:

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = 1, \quad \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{12} = 0, \tag{42}$$

$$\tilde{\alpha}_{30} = \tilde{\alpha}_{03} = \tilde{\alpha}_{21} = 1, \quad \alpha_{12} = 0. \tag{43}$$

В этих двух случаях уравнение (9) имеет соответственно вид

$$t^3 + 1 = 0, \quad t^3 + t^2 + 1 = 0.$$

Поскольку оба уравнения имеют по одному действительному корню, то после соответствующих аффинных преобразований условия (42) и (43) заменятся условиями (30). Следовательно, условия (42) и (43) не приводят к новым нормальным формам. Ясно, что и наложение дополнительных условий на другие коэффициенты не выводит эти два случая из числа рассмотренных.

Таким образом, в настоящем параграфе показано, что если хотя бы один из четырех старших коэффициентов характеристического многочлена отличен от нуля, то допустимое дифференциальное уравнение с помощью некоторого аффинного преобразования приводится к одной из семи нормальных форм.

§ 7. Нормальные формы при понижении порядка характеристического многочлена

В настоящем параграфе допустимое дифференциальное уравнение (6.1) рассматривается при условиях

$$\alpha_{30} = \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{03} = 0. \tag{1}$$

В этом случае характеристическое уравнение (6.5) имеет вид

$$\alpha(x, y) = \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \\ + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00} = 0. \tag{2}$$

Это уравнение определяет либо кривую второго порядка, либо две прямые, либо одну прямую. Каждому из этих случаев соответствует некоторое допустимое дифференциальное уравнение. Рассмотрим наиболее характерные примеры таких дифференциальных уравнений.

1. Пусть сначала $A = 1$. Тогда из условий (1) и формул (6.6) находим равенства

$$a_{01} = 0, \quad c_{10} = 0, \quad a_{10} = 2b_{01}, \quad c_{01} = 2b_{10}.$$

Следовательно, уравнение (6.1) в этом случае приводится к виду

$$(x^2 + 2b_{01}x + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + 2(xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (y^2 + 2b_{10}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (3)$$

Как обычно находим простейшую форму этого уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (4)$$

Поскольку в данном случае имеем характеристическое уравнение

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$$

то уравнение (4) не представляет интереса.

Рассмотрим второй частный случай уравнения (3). Положим в этом уравнении

$$b_{10} = b_{01} = b_{00} = 0, \quad a_{00} = c_{00} = 1. \quad (5)$$

Тогда получим

$$(x^2 - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (6)$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\alpha(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) - x^2y^2 = 1 - x^2 - y^2 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) и соответствующие ему ортогональные многочлены впервые рассмотрел Ш. Эрмит [VII.7]. Свойства ортогональных многочленов Эрмита и уравнения (6) подробно излагаются в монографии П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1].

Уравнение (6) будем называть *восьмой нормальной формой* допустимого дифференциального уравнения.

2. Пусть теперь $A=0$. Тогда из первых четырех формул (6.6) следуют условия (1). А из остальных находим

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{20}=a_{10}c_{10}-b_{10}^2, \quad \alpha_{02}=a_{01}c_{01}-b_{01}^2,\\
&\alpha_{11}=a_{10}c_{01}+a_{01}c_{10}-2b_{01}b_{10},\\
&\alpha_{10}=a_{10}c_{00}-2b_{10}b_{00}+a_{00}c_{10},\\
&\alpha_{01}=a_{01}c_{00}-2b_{01}b_{00}+a_{00}c_{01},\\
&\alpha_{00}=a_{00}c_{00}-b_{00}^2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

А дифференциальное уравнение (6.1) при условии $A=0$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(a_{10}x+a_{01}y+a_{00})\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\\
&+2(b_{10}x+b_{01}y+b_{00})\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+(c_{10}x+c_{01}y+c_{00})\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\\
&\qquad+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$
\begin{aligned}
\alpha(x,y)=ac-b^2&=\\
&=(a_{10}x+a_{01}y+a_{00})(c_{10}x+c_{01}y+c_{00})-\\
&\qquad-(b_{10}x+b_{01}y+b_{00})^2=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

При рассмотрении наиболее важных и характерных случаев можно исходить из допустимого уравнения (9) и подбирать его коэффициенты таким образом, чтобы получать различные линии, соответствующие уравнению (2). С другой стороны, можно зафиксировать некоторую конкретную линию с уравнением вида (2), а затем подбирать коэффициенты уравнения (9), но при этом необходимо обеспечить выполнение громоздких условий (8).

Пусть дано допустимое дифференциальное уравнение

$$
\begin{aligned}
&x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\\
&\qquad+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = xy - 1 = 0 \tag{12}$$

определяет гиперболу. Будем называть уравнение (11) *девятой нормальной формой* допустимого уравнения.

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{13}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = xy = 0 \tag{14}$$

определяет пересекающиеся прямые. То же самое характеристическое уравнение (14) соответствует еще двум допустимым дифференциальным уравнениям

$$-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \tag{15}$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{16}$$

Каждое из этих уравнений можно считать *десятой нормальной формой* допустимого уравнения. Если в уравнении (15) положить

$$B = 1, \quad d_{00} = -\alpha - 1, \quad g_{00} = -\beta - 1,$$

то получим уравнение Лагерра — Лагерра (3.5).

4. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (2) определяет две совпадающие прямые. Это будет например, когда $a(x, y) \equiv 0$ или $c(x, y) \equiv 0$. В этих случаях имеем уравнения

$$2(b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \tag{17}$$

$$(a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{18}$$

Этим уравнениям соответствует одно и то же характеристическое уравнение

$$\alpha(x,\ y) = ac - b^2 = -(b_{10}x + b_{01}y + b_{00})^2 = 0, \tag{19}$$

которое определяет две совпадающие прямые, если хотя бы один из коэффициентов b_{10} или b_{01} отличен от нуля. В частности, такому типу принадлежат уравнения

$$2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \tag{20}$$

$$(x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{21}$$

Будем считать уравнение (20) *одиннадцатой нормальной формой* допустимого дифференциального уравнения.

5. До сих пор считалось, что уравнение (2) является уравнением второго порядка. Рассмотрим теперь случай, когда это уравнение вырождается и имеет вид

$$\alpha(x,\ y) = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00} = 0. \tag{22}$$

Это будет иметь место, например, для двух уравнений

$$(a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \quad c_{00} \neq 0, \tag{23}$$

$$a_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \quad a_{00} \neq 0. \tag{24}$$

В частности, имеем уравнение

$$-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \tag{25}$$

которое можно считать *двенадцатой нормальной формой* допустимого уравнения. Если в уравнении (25) положить

$$B = 1, \quad d_{00} = -\alpha - 1, \quad g_{00} = 0,$$

то получим уравнение Лагерра — Эрмита (2.1.28). Аффинно эквивалентная уравнению (25) форма имеет вид

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (26)$$

6. В предыдущем случае считалось, что из двух коэффициентов α_{10} и α_{01} хотя бы один отличен от нуля. Предположим теперь, что выполняются условия

$$\alpha_{10}=\alpha_{01}=0, \quad \alpha_{00}=1. \quad (27)$$

Тогда из формул (8) находим равенства

$$\begin{aligned}
&\alpha_{20}=a_{10}c_{10}-b_{10}^2=0, \quad \alpha_{02}=a_{01}c_{01}-b_{01}^2=0,\\
&\alpha_{11}=a_{10}c_{01}+a_{01}c_{10}-2b_{10}b_{01}=0,\\
&\alpha_{10}=a_{10}c_{00}+a_{00}c_{10}-2b_{10}b_{00}=0,\\
&\alpha_{01}=a_{01}c_{00}+a_{00}c_{01}-2b_{01}b_{00}=0,\\
&\alpha_{00}=a_{00}c_{00}-b_{00}^2=1.
\end{aligned} \quad (28)$$

Все эти условия выполняются, если положить

$$a_{00}=c_{00}=-1,$$

а остальные коэффициенты все приравнять нулю. В результате допустимое уравнение (9) приведется к виду

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (29)$$

Будем считать это уравнение *тринадцатой нормальной формой*. Если в уравнении (29) положить $B=2$, $d_{00}=g_{00}=0$, то получим уравнение Эрмита — Эрмита (3.3).

Условия (28) выполняются также для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (30)$$

Можно, конечно, выделить в отдельный тип все те из уравнений (9), для которых выполняются условия (28). Но здесь рассмотрены только два примера таких уравнений.

7. Уравнения (17) и (18) рассмотрены при условии, что из коэффициентов b_{10} и b_{01} хотя бы один отличен от нуля. Предположим теперь, что $b_{10}=b_{01}=0$, но $b_{00}\neq 0$.

Тогда, например, уравнение (18) примет вид

$$(a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu, \qquad b_{00} \neq 0. \qquad (31)$$

В качестве простейшей формы примем уравнение

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \qquad (32)$$

Будем называть это уравнение *четырнадцатой нормальной формой* допустимого дифференциального уравнения (6.1).

8. В качестве *пятнадцатой нормальной формы* примем уравнение

$$(1 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1 + x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \qquad (33)$$

В этом случае характеристическое уравнение

$$\alpha(x,\ y) = ac - b^2 = 1 - x^2 - y^2 = 0 \qquad (34)$$

определяет окружность. То же самое уравнение (34) соответствует допустимому уравнению

$$(1 + x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \qquad (35)$$

Аналогичные между собой уравнения (33) и (35) существенно отличаются от уравнения восьмого нормального типа (6), которому соответствует то же самое характеристическое уравнение (34).

Приведем некоторые другие примеры допустимых уравнений, которые, как это будет установлено в следующей главе, существенно отличаются от рассмотренных выше 15 нормальных типов.

1. Несмотря на то, что уравнение

$$(1 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1 + x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu \qquad (36)$$

аналогично уравнениям (33) и (35), по своим свойствам оно существенно отличается от них.

2. Допустимое уравнение

$$(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\\ +(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu \qquad (37)$$

имеет характеристическое уравнение

$$\alpha(x,\ y)=ac-b^2=1-x^2=0,$$

которое определяет две параллельные прямые.

3. Для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\\ +(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu \qquad (38)$$

имеем

$$\alpha=ac-b^2=y-x^2=0.$$

4. Допустимому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\\ +(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu \qquad (39)$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\alpha=ac-b^2=-1-x^2=0.$$

5. Для допустимого уравнения

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\\ +(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu \qquad (40)$$

находим

$$\alpha=ac-b^2=-x^2-y^2=0.$$

6. Если в уравнении (31) положить $b_{00}=0$, то получим уравнение

$$(a_{10}x+a_{01}y+a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\\ +(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \qquad (41)$$

Все эти примеры соответствуют различным частным случаям характеристического уравнения (2).

Глава V

ПОТЕНЦИАЛЬНО САМОСОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ И ФОРМУЛА РОДРИГА

§ 1. Потенциально самосопряженные операторы

В настоящем параграфе основной дифференциальный оператор

$$Du = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

рассматривается при условии, что его коэффициенты непрерывно дифференцируемы в некоторой области G. В теории дифференциальных уравнений в частных производных известны так называемые *самосопряженные операторы*. В случае двух переменных такой оператор имеет вид [1.7, с. 179]

$$Du = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$Du = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2)$$

Следовательно, для того, чтобы оператор (1) был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$d = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}, \quad g = \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}. \qquad (3)$$

Определение. Оператор (1) называется *потенциально самосопряженным* в области G, если в этой области существует такая положительная и дважды непрерывно дифференцируемая функция $h(x, y)$, что оператор

$$hDu = (ha)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(hb)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (hc)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (hd)\frac{\partial u}{\partial x} + (hg)\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

является самосопряженным в области G.

В силу формул (3) условия самосопряженности оператора (4) имеют вид

$$hd = \frac{\partial}{\partial x}(ha) + \frac{\partial}{\partial y}(hb), \quad hg = \frac{\partial}{\partial x}(hb) + \frac{\partial}{\partial y}(hc). \tag{5}$$

Эти равенства являются условиями потенциальной самосопряженности оператора (1). Выполняя дифференцирование, из равенств (5) находим

$$a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial y} = h\left(d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right), \tag{6}$$

$$b\frac{\partial h}{\partial x} + c\frac{\partial h}{\partial y} = h\left(g - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Для краткости введем обозначения

$$\varphi = d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \psi = g - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}. \tag{8}$$

Поскольку оператор (1) определен, то обе функции (8) известны. Используя обозначения (8), из равенств (6) и (7) находим

$$a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial y} = \varphi h, \tag{9}$$

$$b\frac{\partial h}{\partial x} + c\frac{\partial h}{\partial y} = \psi h. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) можно рассматривать как систему уравнений в частных производных для определения неизвестной функции $h(x, y)$. Представим эту систему в виде

$$a\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + b\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \varphi, \tag{11}$$

$$b\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + c\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \psi. \tag{12}$$

Далее, будем считать, что функции (8) в области G не обращаются в нуль одновременно, т. е.

$$\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) > 0. \tag{13}$$

Тогда для существования решения системы уравнений (11) и (12), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 \neq 0. \tag{14}$$

По коэффициентам системы уравнений (11) и (12) введем еще две функции:

$$\beta = \varphi c - \psi b, \quad \gamma = a\psi - b\varphi. \tag{15}$$

Тогда при условиях (13) и (14) получим решение системы уравнений (11) и (12) в виде

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор* (1) *был потенциально самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Предположим сначала, что оператор (1) потенциально самосопряжен, т. е. функция $h(x, y)$ как решение системы уравнений (11) и (12) существует и отлична от нуля в области G. Тогда, дифференцируя равенства (16), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = -\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}.$$

Этим необходимость условий (17) доказана.

Пусть теперь условия (17) выполняются в области G. Из уравнений (16) находим равенства

$$\ln h(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\beta}{\alpha}\,dx + c_1(y), \tag{18}$$

$$\ln h(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\gamma}{\alpha}\,dy + c_2(x). \tag{19}$$

Здесь $c_1(y)$ и $c_2(x)$ — неизвестные функции. Для определения функции $c_1(y)$ дифференцируем равенство (18) по y и используем условие (17). В результате получим

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\gamma}{\alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)dx + c_1'(y) = \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_{x=x_0} + c_1'(y).$$

Следовательно, имеем равенство

$$c_1(y) = \int_{y_0}^{y} \left[\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)_{x=x_0} \right] dy + c_3. \tag{20}$$

Аналогично из уравнения (19) находим последовательно

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{y=y_0} + c_2'(x),$$

$$c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)_{y=y_0} \right] dx + c_4. \tag{21}$$

Найденные функции (20) и (21) подставляем в формулы (18) и (19). В результате получим искомую функцию $h(x, y)$. Например, из равенств (19) и (21) имеем

$$h(x, y) = \exp\left\{ \int_{y_0}^{y} \frac{\gamma}{\alpha}\, dy + \int_{x_0}^{x} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)_{y=y_0} \right] dx + c_4 \right\}. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Поскольку система уравнений (16) рассматривается при условии (14), то необходимое и достаточное условие потенциальной самосопряженности (17) можно представить в виде

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}. \tag{23}$$

Далее, определение потенциальной самосопряженности оператора (1) имеет смысл, если хотя бы одно из равенств (3) не выполняется, т. е. если хотя бы одна из функций (8) не равна нулю тождественно. А если равенства (3) имеют место, т. е. оператор (1) определен по формуле (2), то обе функции (8) равны нулю тождественно. Тогда равны нулю и обе функции (15). В этом случае из формулы (22) следует, что функция $h(x, y)$ есть тождественное постоянное. Не нарушая общности, можем считать, что $h(x, y) \equiv 1$.

Таким образом, если оператор (1) самосопряжен в области G, то в этой области имеем $h(x, y) \equiv 1$.

А в общем случае из формулы (22) следует, что функция $h(x, y)$ положительна в области G. Эта функция называется весовой функцией потенциально самосопряженного оператора в области G. Из формулы (22) следует, что весовая функция потенциально самосопряженного оператора определяется с точностью до постоянного сомножителя.

Весовая функция на множестве всех многочленов определяет функционал

$$J(P) = \iint_G P(x, y)\, h(x, y)\, dx\, dy, \tag{24}$$

если, конечно, все такие интегралы существуют. В § 1 гл. IV было рассмотрено условие согласованности функционала (24) с дифференциальным оператором (1). Эти условия имеют вид (4.1.13)

$$J(A_1 P) = J(A_2 P) = 0, \tag{25}$$

где $P(x, y)$ — произвольный алгебраический многочлен по двум переменным, а операторы A_1 и A_2 определяются равенствами

$$A_1 = aD_1 + bD_2 + dE, \quad A_2 = bD_1 + cD_2 + gE. \tag{26}$$

Рассмотрим условия согласованности (25) в случае потенциально самосопряженного оператора (1).

Теорема 2. *Если оператор* (1) *потенциально самосопряжен в односвязной области* G, *ограниченной кусочно гладкой кривой* Γ, *и* $h(x, y)$ — *его весовая функция, то для согласованности функционала* (24) *с оператором* (1), *необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена* $P(x, y)$ *выполнялись условия*

$$\int_\Gamma h(x, y)\, P(x, y)\,(a\, dy - b\, dx) = \int_\Gamma h(x, y)\, P(x, y)\,(b\, dy - c\, dx) = 0. \tag{27}$$

Доказательство. В силу формулы Грина для любых двух непрерывно дифференцируемых функций справедливы равенства

$$\iint_G u \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy = \int_\Gamma uv\, dy - \iint_G v \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy, \tag{28}$$

$$\iint_G u \frac{\partial v}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_\Gamma uv\, dx - \iint_G v \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{29}$$

Используя эти равенства и первую из формул (26),

находим

$$J(A_1P) = \iint_G h(x, y)\left(a\frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial P}{\partial y} + dP\right) dx\,dy =$$
$$= \int_\Gamma h(x, y) P(x, y)(a\,dy - b\,dx) -$$
$$- \iint_G P\left[\frac{\partial (ha)}{\partial x} + \frac{\partial (hb)}{\partial y} - hd\right] dx\,dy. \quad (30)$$

Аналогично, применяя формулы (28) и (29), в случае второго из операторов (26) имеем

$$J(A_2P) = \iint_G h(x, y)\left(b\frac{\partial P}{\partial x} + c\frac{\partial P}{\partial y} + gP\right) dx\,dy =$$
$$= \int_\Gamma h(x, y) P(x, y)(b\,dy - c\,dx) -$$
$$- \iint_G P(x, y)\left[\frac{\partial (hb)}{\partial x} + \frac{\partial (hc)}{\partial y} - hg\right] dx\,dy. \quad (31)$$

В силу условий (5) двойные интегралы в правых частях равенств (30) и (31) равны нулю. Поэтому условия (25) эквивалентны условиям (27). Теорема доказана.

§ 2. Допустимые и потенциально самосопряженные уравнения

В настоящем параграфе рассматриваются случаи, когда основное дифференциальное уравнение является и допустимым, и потенциально самосопряженным. При этом, поскольку в предыдущей главе были получены нормальные формы допустимых уравнений, то на потенциальную самосопряженность проверяются только указанные нормальные формы.

1. Рассмотрим уравнение Аппеля в общем виде (4.6.15)

$$(x^2 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$
$$+ (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)u. \quad (1)$$

В этом случае имеем

$$a = x^2 - x, \quad b = xy, \quad c = y^2 - y, \tag{2}$$

$$d = Bx + d_{00}, \quad g = By + g_{00}. \tag{3}$$

Из равенств (2) находим

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 2y - 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 3x - 1, \quad \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} = 3y - 1. \tag{5}$$

Прежде всего, рассмотрим условия самосопряженности уравнения (1). В силу формул (3) и (5) из равенств (1.3) получаем

$$Bx + d_{00} = 3x - 1, \quad By + g_{00} = 3y - 1. \tag{6}$$

Следовательно, уравнение (1) самосопряжено при условиях $B = 3$, $d_{00} = g_{00} = -1$, и тогда $h(x, y) = 1$.

Предположим теперь, что условия (6) не выполняются. Тогда в силу равенств (5) для функций (1.8) имеем

$$\varphi = d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} = (B - 3)\,x + (d_{00} + 1), \tag{7}$$

$$\psi = g - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} = (B - 3)\,y + (g_{00} + 1). \tag{8}$$

Далее составляем вспомогательные многочлены по формулам (1.14) и (1.15). Используя равенства (2), (7) и (8), находим

$$\alpha = ac - b^2 = xy(1 - x - y), \tag{9}$$

$$\beta = \varphi c - \psi b = \\ = (d_{00} + 1)\,y^2 + (2 - B - g_{00})\,xy - (d_{00} + 1)\,y, \tag{10}$$

$$\gamma = a\psi - b\varphi = \\ = (g_{00} + 1)\,x^2 + (2 - B - d_{00})\,xy - (g_{00} + 1)\,x. \tag{11}$$

Для этих трех многочленов необходимо проверить условие потенциальной самосопряженности (1.23)

$$\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \tag{12}$$

Используя формулы (9)—(11), получаем

$$\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} =$$

$$= xy\,(1 - x - y)\,[2\,(g_{00} + 1)\,x + (2 - B - d_{00})y - (g_{00} + 1)] -$$

$$-[(g_{00}+1)x^2+(2-B-d_{00})xy-(g_{00}+1)x](y-2xy-y^2)=$$
$$=x^2y^2(1-B-d_{00}-g_{00}), \quad (13)$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=$$
$$=xy(1-x-y)[2(d_{00}+1)y+(2-B-g_{00})x-(d_{00}+1)]-$$
$$-[(d_{00}+1)y^2+(2-B-g_{00})xy-(d_{00}+1)y](x-x^2-2xy)=$$
$$=x^2y^2(1-B-g_{00}-d_{00}). \quad (14)$$

Правые части равенств (13) и (14) совпадают. Следовательно, условие (12)выполняется при любых значениях параметров B, d_{00} и g_{00}.

Таким образом, уравнение (1) является потенциально самосопряженным при любых значениях параметров.

2. Переходим к рассмотрению второй нормальной формы допустимого уравнения (4.6.20)

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+(y^2-y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (15)$$

В этом случае имеем многочлены

$$a=x^2,\quad b=xy,\quad c=y^2-y,$$
$$\varphi=d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}=(B-3)x+d_{00}, \quad (16)$$
$$\psi=g-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}=(B-3)y+(g_{00}+1). \quad (17)$$

Функции (16) и (17) равны нулю при условиях $B=3$, $d_{00}=0$ и $g_{00}=-1$. Следовательно, при этих условиях уравнение (15) является самосопряженным.

Предположим теперь, что функции (16) и (17) не обращаются в нуль тождественно. Тогда с помощью этих многочленов находим формулы

$$\alpha=ac-b^2=-x^2y,$$
$$\beta=\varphi c-\psi b=xy(2-B-g_{00})+d_{00}y^2-d_{00}y,$$
$$\gamma=a\psi-b\varphi=(g_{00}+1)x^2-d_{00}xy,$$
$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=-x^2y^2d_{00},$$
$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-x^2y^2d_{00}.$$

Таким образом, условия (12) для уравнения (15) выполняются, и, следовательно, это уравнение является потенциально самосопряженным при любых значениях параметров.

3. Третья нормальная форма допустимого уравнения имеет вид (4.6.24)

$$(x^2+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (18)$$

Аналогично предыдущим случаям здесь имеем

$$\varphi=(B-3)x+d_{00},\quad \psi=(B-3)y+g_{00}.$$

Следовательно, при условиях $B=3$ и $d_{00}=g_{00}=0$ уравнение (18) является самосопряженным. А в общем случае, как обычно, рассматриваем многочлены

$$\alpha=ac-b^2=y^3,$$
$$\beta=\varphi c-\psi b=y(d_{00}y-g_{00}x),$$
$$\gamma=a\psi-b\varphi=(B-3)y^2+g_{00}x^2+g_{00}y-d_{00}xy.$$

С помощью этих равенств находим

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=2g_{00}xy^3-d_{00}y^4,$$
$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=y^3(2g_{00}x-d_{00}y).$$

Таким образом, условие (12) выполняется и уравнение (18) является потенциально самосопряженным при любых значениях параметров.

4. Рассмотрим теперь четвертую нормальную форму допустимого уравнения (4.6.28)

$$(x^2+x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (19)$$

Поскольку в данном случае имеем

$$\varphi=(B-3)x+(d_{00}-1),\quad \psi=(B-3)y+g_{00},$$

то, следовательно, уравнение (19) будет самосопряженным при условиях $B=3$, $d_{00}=1$ и $g_{00}=0$. А в общем случае рассматриваем многочлены

$$\alpha = ac - b^2 = (x + y)\,y^2,$$
$$\beta = \varphi c - \psi b = (d_{00} - 1)\,y^2 - g_{00}xy,$$
$$\gamma = a\psi - b\varphi = (B - 2 - d_{00})\,xy + (B - 3)\,y^2 + g_{00}(x^2 + x + y).$$

Для этих многочленов находим

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} = y^2\,[(1 - d_{00})\,y^2 + g_{00}(x^2 + 2xy)],$$
$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} = y^2\,[(1 - d_{00})\,y^2 + g_{00}(x^2 + 2xy)].$$

Следовательно, уравнение (19) потенциально самосопряженное при любых значениях параметров.

5. Пятая нормальная форма допустимого уравнения имеет вид (4.6.32):

$$(x^2 + x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(xy + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = n\,(n - 1 + B)\,u. \quad (20)$$

Поскольку в данном случае имеем

$$\varphi = (B - 3)\,x + d_{00} - 1, \quad \psi = (B - 3)\,y + g_{00} - 1,$$

то, следовательно, уравнение (20) самосопряжено при условиях $B = 3$ и $d_{00} = g_{00} = 1$. А в общем случае рассматриваем еще три многочлена

$$\alpha = x^2y + xy^2 + y^3 + y^2 - \frac{1}{4},$$
$$\beta = (B - 2 - g_{00})\,xy + (d_{00} - 1)\,y^2 + \left(d_{00} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}B\right)y - \frac{1}{2}(g_{00} - 1),$$
$$\gamma = (B - 2 - d_{00})\,xy + (B - 3)\,y^2 + (g_{00} - 1)\,x^2 + \left(g_{00} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}B\right)x + (g_{00} - 1)\,y - \frac{1}{2}(d_{00} - 1).$$

С помощью этих многочленов получаются равенства

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} = (d_{00} + g_{00} + 1 - B)\,x^2y^2 + 2\,(g_{00} + 2 - B)\,xy^3 + (1 - d_{00})\,y^4 +$$

$$+ (B - 1 - 2g_{00})\, x^2 y + \left(\frac{B}{2} - \frac{1}{2} d_{00}\right) y^3 +$$
$$+ (d_{00} - 1)\, xy + \frac{1}{2}(3g_{00} - B)\, y^2 + \frac{1}{2}(1 - g_{00})\, x +$$
$$+ \frac{1}{4}(d_{00} + 2 - B)\, y + \frac{1}{8}(B - 1 - 2g_{00}), \quad (21)$$

$$\alpha \frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial\alpha}{\partial y} = (d_{00} + g_{00} + 1 - B)\, x^2 y^2 +$$
$$+ 2(g_{00} + 2 - B)\, xy^3 + (1 - d_{00})\, y^4 +$$
$$+ (g_{00} + 1 - 2d_{00})\, xy^2 + (B - 1 - 2d_{00})\, y^3 +$$
$$+ (g_{00} - 1)\, xy + \left(\frac{3}{2} g_{00} + \frac{B}{2} - 2 - d_{00}\right) y^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}(g_{00} + 2 - B)\, x + \left(g_{00} - \frac{1}{2} - \frac{d_{00}}{2}\right) y -$$
$$- \frac{1}{4}\left(d_{00} + \frac{1}{2} - \frac{B}{2}\right). \quad (22)$$

Сравнение многочленов (21) и (22) показывает, что они могут совпадать только при условиях $B = 3$ и $d_{00} = g_{00} = 1$. Но, как было отмечено выше, при этих условиях уравнение (20) самосопряжено. Следовательно, других случаев потенциальной самосопряженности уравнение (20) не имеет. Таким образом, этому уравнению соответствует только единичная весовая функция $h(x, y) = 1$.

6. Переходим к рассмотрению шестой нормальной формы допустимого уравнения (4.6.36)

$$(x^2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + (y^2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ (Bx + d_{00}) \frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00}) \frac{\partial u}{\partial y} = n(n - 1 + B)\, u. \quad (23)$$

Этому уравнению соответствуют многочлены

$$\varphi = (B - 3)\, x + d_{00}, \quad \psi = (B - 3)\, y + g_{00} - 1.$$

Следовательно, уравнение (23) самосопряжено при условиях $B = 3$, $d_{00} = 0$ и $g_{00} = 1$. А в общем случае имеем

$$\alpha = ac - b^2 = y(y^2 + x^2 + y),$$
$$\beta = \varphi c - \psi b = (B - 2 - g_{00})\, xy + d_{00} y^2 + d_{00} y,$$
$$\gamma = a\psi - b\varphi =$$
$$= (g_{00} - 1)\, x^2 - d_{00} xy + (B - 3)\, y^2 + (g_{00} - 1)\, y.$$

С помощью этих формул получаются равенства

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=y^2\,[d_{00}x^2+2(g_{00}-B+2)\,xy-d_{00}y^2-d_{00}y], \tag{24}$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=y^2\,[d_{00}x^2+2(g_{00}-B+2)\,xy-$$
$$-d_{00}y^2-(B-2-g_{00})\,x-2d_{00}y-d_{00}]. \tag{25}$$

Из равенств (24) и (25) следует, что уравнение (23) потенциально самосопряжено тогда и только тогда, когда выполняются условия $d_{00}=0$ и $B=g_{00}+2$.

7. Следующая нормальная форма допустимого уравнения имеет вид (4.6.40)

$$(x^2+x+y-1)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+(y^2+x+y-1)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)\,u. \tag{26}$$

В этом случае имеем формулы

$$\varphi=(B-3)\,x+d_{00}-1,\quad \psi=(B-3)\,y+g_{00}-1.$$

Следовательно, при условиях $B=3$, $d_{00}=g_{00}=1$ уравнение (26) является самосопряженным. А в общем случае, как обычно, вводим многочлены

$$\alpha=ac-b^2=x^3+x^2y+xy^2+y^3-2x-2y+1,$$
$$\beta=\varphi c-\psi b=(B-3)\,x^2+(B-2-g_{00})\,xy+$$
$$+(d_{00}-1)\,y^2+(d_{00}-B+2)\,x+(d_{00}-1)\,y+(1-d_{00}),$$
$$\gamma=a\psi-b\varphi=(g_{00}-1)\,x^2+(B-2-d_{00})\,xy+$$
$$+(B-3)\,y^2+(g_{00}-1)\,x+(g_{00}-B+2)\,y+(1-g_{00}).$$

Далее, вычисляя обе части равенства (12), находим

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=(1-g_{00})\,x^4+2(d_{00}+2-B)\,x^3y+$$
$$+(d_{00}+g_{00}+10-4B)\,x^2y^2+2(d_{00}+g_{00}-B+1)\,xy^3+$$
$$+(1-d_{00})\,y^4+(3-B)\,x^3+(d_{00}+2B-2g_{00}-5)\,x^2y+$$
$$+(3B-2d_{00}-7)\,xy^2+2(1-d_{00})\,y^3+$$
$$+2(B-d_{00}-g_{00}-1)\,x^2+2(1-d_{00})\,xy+2(d_{00}-1)\,y+$$
$$+(d_{00}-1)\,y^2+(6-B-g_{00}-2d_{00})\,x+3(d_{00}-1),$$

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=(1-g_{00})\,x^4+2(d_{00}+2-B)\,x^3y+$$
$$+(d_{00}+g_{00}+10-4B)\,x^2y^2+2(g_{00}+2-B)\,xy^3+$$

$$+(1-d_{00})y^4+5(g_{00}-1)x^2y+(3-B)y^3+$$
$$+2(1-g_{00})x^2+2(1-g_{00})xy+2(g_{00}-1)x+$$
$$+(2B+2d_{00}-g_{00}-7)y^2+(3B-d_{00}-2g_{00}-6)y+$$
$$+3(g_{00}-1).$$

Полученные два многочлена совпадают только при условиях $B=3$, $d_{00}=g_{00}=1$, которые выше были отмечены как условия самосопряженности уравнения (26).

8. В силу формулы (4.7.6) восьмая нормальная форма допустимого уравнения имеет вид

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(y^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=n(n-1+B)u. \quad (27)$$

Этому уравнению соответствуют многочлены

$$\varphi=(B-3)x+d_{00}, \quad \psi=(B-3)y+g_{00}.$$

Следовательно, уравнение (27) является самосопряженным, если выполняются условия $B=3$, $d_{00}=g_{00}=0$. А в общем случае рассматриваем многочлены

$$\alpha=1-x^2-y^2,$$
$$\beta=d_{00}y^2-g_{00}xy-(B-3)x-d_{00},$$
$$\gamma=g_{00}x^2-d_{00}xy-(B-3)y-g_{00}.$$

С помощью этих формул находим

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=$$
$$=d_{00}y^3-d_{00}x^2y-2g_{00}xy^2-2(B-3)xy-d_{00}y, \quad (28)$$
$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=$$
$$=g_{00}x^3-2d_{00}x^2y-g_{00}xy^2-2(B-3)xy-g_{00}x. \quad (29)$$

Сравнение многочленов (28) и (29) показывает, что они могут совпадать только при условиях $d_{00}=g_{00}=0$. Следовательно, при этих условиях уравнение (27) потенциально самосопряжено.

9. Рассмотрим теперь девятую нормальную форму допустимого уравнения (4.7.11)

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (30)$$

Для этого уравнения имеем

$$\varphi=Bx+d_{00}-1,\quad \psi=By+g_{00}-1.$$

Поскольку $B\neq 0$, то уравнение (30) не является самосопряженным ни при каких значениях параметров. Далее, для проверки условия (12) вводим многочлены

$$\alpha=ac-b^2=xy-1,$$
$$\beta=\varphi c-\psi b=Bxy+(d_{00}-1-B)y+(1-g_{00}),$$
$$\gamma=a\psi-b\varphi=Bxy+(g_{00}-1-B)x+(1-d_{00}).$$

С помощью этих формул находим

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}=(d_{00}-1-B)y+(B+1-g_{00}), \quad (31)$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=(g_{00}-1-B)x+(B+1-d_{00}). \quad (32)$$

Многочлены (31) и (32) совпадают при условиях $d_{00}=g_{00}=B+1$. Следовательно, при этих условиях получаем потенциально самосопряженное уравнение

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+(Bx+B+1)\frac{\partial u}{\partial x}+(By+B+1)\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (33)$$

10. Переходим к рассмотрению следующей нормальной формы допустимого уравнения. В силу формулы (4.7.15) имеем

$$-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \quad (34)$$

Как обычно, сначала находим многочлены

$$\varphi=Bx+d_{00}+1,\quad \psi=By+g_{00}+1.$$

Поскольку $B\neq 0$, то уравнение (34) не является самосопряженным. Далее, с помощью формул

$$\alpha = xy, \quad \beta = -Bxy - d_{00}y - y,$$

$$\gamma = -Bxy - g_{00}x - x$$

находим тождества

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} \equiv \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} \equiv 0.$$

Следовательно, уравнение (34) является потенциально самосопряженным при любых значениях параметров.

11. Следующая нормальная форма допустимых уравнений представляется в виде уравнений (4.7.17) и (4.7.18). В этих уравнениях при старших производных имеется шесть произвольных коэффициентов. Рассмотрим уравнение (4.7.17) при условиях

$$b_{10} = c_{01} = 1, \quad b_{01} = b_{00} = c_{10} = c_{00} = 0. \tag{35}$$

Тогда уравнение приведется к виду

$$2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{36}$$

В этом случае имеем многочлены

$$\varphi = Bx + d_{00}, \quad \psi = By + g_{00} - 2.$$

Так как $B \neq 0$, то уравнение (36) не является самосопряженным. Далее, из формул

$$\alpha = -x^2, \quad \beta = (2 - g_{00})x + d_{00}y, \quad \gamma = -Bx^2 - d_{00}x$$

находим

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} = -d_{00}x^2, \quad \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} = -d_{00}x^2.$$

Следовательно, уравнение (36) является потенциально самосопряженным при любых значениях параметров.

Вместо условий (35) можно ввести другие условия на коэффициенты уравнения (4.7.17). В результате получаются, например, уравнения, у которых группы членов, содержащие старшие производные, имеют вид

$$2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 2(x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Все такие уравнения на потенциальную самосопряженность рассматриваются аналогично уравнению (36).

12. Рассмотрим допустимое уравнение в нормальной форме (4.7.25)

$$-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \qquad (37)$$

Этому уравнению соответствуют многочлены

$$\varphi=Bx+d_{00}+1,\quad \psi=By+g_{00},\quad \alpha=x,$$
$$\beta=-Bx-d_{00}-1,\quad \gamma=-Bxy-g_{00}x.$$

Нетрудно проверить, что в данном случае справедливы тождества

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\equiv\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\equiv 0. \qquad (38)$$

Следовательно, уравнение (37) не самосопряжено, но потенциально самосопряжено при любых значениях параметров.

13. В силу уравнения (4.7.29) тринадцатая нормальная форма допустимого уравнения имеет вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu. \qquad (39)$$

В этом случае имеем многочлены

$$\varphi=Bx+d_{00},\quad \psi=By+g_{00},\quad \alpha=1,$$
$$\beta=-Bx-d_{00},\quad \gamma=-By+g_{00}.$$

С помощью этих формул нетрудно доказать, что для уравнения (39) выполняются тождества (38). Следовательно, уравнение (39), которое не является самосопряженным, потенциально самосопряжено при любых значениях параметров.

14. В случае четырнадцатой нормальной формы (4.7.31)

$$(a_{10}x+a_{01}y+a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b_{00}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+(Bx+d_{00})\frac{\partial u}{\partial x}+(By+g_{00})\frac{\partial u}{\partial y}=nBu \qquad (40)$$

имеем многочлены

$$\alpha=-b_{00}^2,\quad \varphi=Bx+d_{00}-a_{10},$$
$$\psi=By+g_{00},\quad \beta=-(By+g_{00})b_{00},$$
$$\gamma=(a_{10}x+a_{01}y+a_{00})(By+g_{00})-b_{00}(Bx+d_{00}-a_{10}).$$

Так как $B \neq 0$, то уравнение (40) не является самосопряженным ни при каких значениях параметров. А потенциальная самосопряженность имеет место при условии $a_{10} = 0$. В частности, потенциально самосопряженным является уравнение (4.7.32)

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \tag{41}$$

15. Для уравнения пятнадцатой нормальной формы

$$(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx + d_{00})\frac{\partial u}{\partial x} + (By + g_{00})\frac{\partial u}{\partial y} = nBu \tag{42}$$

имеем многочлены

$$\begin{gathered} \alpha = 1 - x^2 - y^2, \quad \varphi = Bx + d_{00} + 2, \quad \psi = By + g_{00}, \\ \beta = B(x^2 + y^2) + (B + d_{00} + 2)x + g_{00}y + d_{00} + 2, \\ \gamma = (B + d_{00} + 2)y - g_{00}x + g_{00}. \end{gathered} \tag{43}$$

Из этих формул следует, что уравнение (42) не является самосопряженным. А условия потенциальной самосопряженности имеют вид $d_{00} = -B - 2$, $g_{00} = 0$.

Нетрудно доказать, что все 6 допустимых уравнений, приведенных в самом конце § 7 гл. IV, не являются ни самосопряженными, ни потенциально самосопряженными. Рассмотрим только уравнение (4.7.36). В этом случае имеем многочлены

$$\begin{gathered} \alpha = 1 - x^2 - y^2, \quad \varphi = Bx + d_{00}, \quad \psi = By + g_{00}, \\ \beta = B(x^2 - y^2) + (B + d_{00})x - g_{00}y + d_{00}, \\ \gamma = -2Bxy - g_{00}x + (B - d_{00})y + g_{00}. \end{gathered}$$

Используя эти формулы, находим

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \\ = (1-x^2-y^2)(-2By-g_{00}) + 2x[(B-d_{00})y + g_{00} - 2Bxy - g_{00}x],$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \\ = (1 - x^2 - y^2)(-2By - g_{00}) + 2y\,[B(x^2 - y^2) + \\ + (B + d_{00})x - g_{00}y + d_{00}].$$

Поскольку $B \neq 0$, то эти два многочлена не могут совпадать тождественно ни при каких значениях параметров. Таким образом, уравнение (4.7.36) не является потенциально самосопряженным.

Аналогично доказывается, что для уравнений (4.7.37) — (4.7.41) также не существует условий потенциальной самосопряженности.

§ 3. Формула Родрига для ортогональных по области многочленов

Для классических ортогональных многочленов одного переменного имеет место формула Родрига, с помощью которой исследуются свойства этих многочленов. В настоящем параграфе рассматривается некоторый аналог формулы Родрига для ортогональных многочленов по двум переменным, которые являются решениями допустимых и потенциально самосопряженных уравнений.

Будем считать, что основной дифференциальный оператор является допустимым и потенциально самосопряженным в некоторой односвязной области G. Тогда существует весовая функция $h(x, y)$ этого оператора в области G.

Основные многочлены a, b, c, которые являются коэффициентами при старших производных оператора, могут разлагаться на множители. Предположим, что эти разложения имеют вид

$$a = a_1 a_2, \quad b = a_1 b_1 c_1, \quad c = c_1 c_2. \tag{1}$$

Это предположение не нарушает общности, ибо в крайнем случае можно положить

$$a_1 = c_1 = 1. \tag{2}$$

Далее, введем еще вспомогательные многочлены

$$\alpha_0 = a_2 c_2 - a_1 b_1^2 c_1 = \alpha/(a_1 c_1), \tag{3}$$

$$\beta_0 = \varphi c_2 - \psi a_1 b_1 = \beta/c_1, \tag{4}$$

$$\gamma_0 = a_2 \psi - b_1 c_1 \varphi = \gamma/a_1, \tag{5}$$

$$p = \alpha_0 a_1, \quad q = \alpha_0 c_1. \tag{6}$$

Если выполняются условия (2), то эти равенства не приводят к новым многочленам. Из формул (3) — (5) находим

$$\alpha = \alpha_0 a_1 c_1, \quad \beta = \beta_0 c_1, \quad \gamma = \gamma_0 a_1. \tag{7}$$

С помощью введенных обозначений преобразуем систему уравнений (1.16). Используя равенства (6) и (7), получаем

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_0 c_1}{\alpha_0 a_1 c_1}=\frac{\beta_0}{p}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma_0 a_1}{\alpha_0 a_1 c_1}=\frac{\gamma_0}{q}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь вспомогательные операторы

$$\Psi_1=pD_1+(D_1p+\beta_0)E, \tag{10}$$

$$\Psi_2=qD_2+(D_2q+\gamma_0)E, \tag{11}$$

$$\Phi_1=D_1+\frac{\beta_0}{p}E, \tag{12}$$

$$\Phi_2=D_2+\frac{\gamma_0}{q}E. \tag{13}$$

Операторы (10) и (11) всегда преобразуют многочлены в многочлены. Аналогичным свойством обладают и операторы (12) и (13), если многочлен β_0 делится на многочлен p и многочлен γ_0 делится на многочлен q.

Далее, из формул (10) и (11) следуют равенства

$$\Psi_1R=D_1(pR)+\beta_0R, \tag{14}$$

$$\Psi_2R=D_2(qR)+\gamma_0R, \tag{15}$$

справедливые для всякого многочлена R. Аналогично с помощью равенств (8) и (9) из формул (12) и (13) находим

$$\frac{1}{h}D_1(hR)=D_1R+\frac{R}{h}D_1h=D_1R+R\frac{\beta_0}{p}=\Phi_1R, \tag{16}$$

$$\frac{1}{h}D_2(hR)=D_2R+\frac{R}{h}D_2h=D_2R+R\frac{\gamma_0}{q}=\Phi_2R. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь линейный функционал на множестве всех многочленов

$$J(R)=\iint_G h(x,y)\,R(x,y)\,dx\,dy. \tag{18}$$

Будем считать, что этот функционал согласован с основным оператором, т. е. выполняются условия

$$J(A_1R)=J(A_2R)=0, \tag{19}$$

где операторы A_1 и A_2 определяются равенствами

$$A_1 = aD_1 + bD_2 + dE, \quad A_2 = bD_1 + cD_2 + gE. \tag{20}$$

Лемма 1. *Если функционал* (18) *согласован с основным оператором, то для любого многочлена R выполняются условия*

$$J(\Psi_1 R) = J(\Psi_2 R) = 0. \tag{21}$$

Доказательство. В силу равенств (19) для произвольного многочлена R имеем

$$J[A_1(c_2 R)] = J[A_2(a_1 b_1 R)] = 0. \tag{22}$$

С другой стороны, используя первое из равенств (20), получаем

$$\begin{aligned} A_1(c_2 R) &= aD_1(c_2 R) + bD_2(c_2 R) + dc_2 R = \\ &= D_1(ac_2 R) + D_2(bc_2 R) + c_2 R(d - D_1 a - D_2 b) = \\ &= D_1(ac_2 R) + D_2(bc_2 R) + c_2 R\varphi. \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично с помощью второго из равенств (20) находим

$$\begin{aligned} A_2(a_1 b_1 R) &= bD_1(a_1 b_1 R) + cD_2(a_1 b_1 R) + ga_1 b_1 R = \\ &= D_1(ba_1 b_1 R) + D_2(ca_1 b_1 R) + a_1 b_1 R\psi. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее, используя условия (22), формулы (23) и (24), получаем

$$\begin{aligned} J[A_1(c_2 R) - A_2(a_1 b_1 R)] = J\{D_1[(ac_2 - ba_1 b_1)R] + \\ + D_2[(bc_2 - ca_1 b_1)R] + (c_2\varphi - a_1 b_1 \psi)R\} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Разности в круглых скобках вычисляем с помощью формул (1), (3), (4), (6). В результате имеем

$$\begin{aligned} &ac_2 - ba_1 b_1 = a_1(a_2 c_2 - a_1 b_1^2 c_1) = a_1 \alpha_0 = p, \\ &bc_2 - ca_1 b_1 = a_1 b_1 c_1 c_2 - c_1 c_2 a_1 b_1 = 0, \\ &c_2\varphi - a_1 b_1 \psi = \beta_0. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (25) с учетом формулы (14) представляется в виде

$$J[D_1(pR) - \beta_0 R] = J(\Psi_1 R) = 0.$$

Этим первое из условий (21) доказано. Далее, используя формулы (1), (5), (6), (15) и (22), находим

$$\begin{aligned} J[A_2(a_2 R) - A_1(c_1 b_1 R)] = J\{D_1[(ba_2 - ac_1 b_1)R] + \\ + D_2[(ca_2 - bc_1 b_1)R] + (a_2\psi - c_1 b_1 \varphi)R\} = \\ = J[D_2(qR) + \gamma_0 R] = J(\Psi_2 R) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всякого многочлена R справедливы равенства*

$$\Phi_1(pR) = \Psi_1 R, \tag{26}$$

$$\Phi_2(qR) = \Psi_2 R. \tag{27}$$

В самом деле, используя формулы (10) и (12), находим

$$\Phi_1(pR) = D_1(pR) + \beta_0 R = pD_1R + (D_1p + \beta_0)R = \Psi_1 R.$$

Аналогично равенство (27) следует из формул (11) и (13).

Лемма 3. *Если для многочлена R при натуральном k определены операторы $\Phi_1^k R$ и $\Phi_2^k R$, то имеют место формулы*

$$x\Phi_1^k R = \Phi_1^{k-1}[x\Phi_1 R - (k-1)R], \tag{28}$$

$$y\Phi_2^k R = \Phi_2^{k-1}[y\Phi_2 R - (k-1)R]. \tag{29}$$

Доказательство. В силу формулы (12) имеем

$$x\Phi_1 R = x\left(D_1 R + \frac{\beta_0}{p}R\right),$$

$$\Phi_1(xR) = R + xD_1R + \frac{x\beta_0}{p}R = R + x\Phi_1 R,$$

$$x\Phi_1 R = \Phi_1(xR) - R.$$

Подставляя в последнее равенство вместо R многочлен $\Phi_1 R$, получим

$$x\Phi_1^2 R = \Phi_1(x\Phi_1 R) - \Phi_1 R = \Phi_1[x\Phi_1 R - R].$$

Этим формула (28) доказана при $k = 2$. Далее, подставляя снова вместо R многочлен $\Phi_1 R$, находим

$$x\Phi_1^3 R = x\Phi_1^2(\Phi_1 R) = \Phi_1\left(x\Phi_1^2 R - \Phi_1 R\right) =$$
$$= \Phi_1[\Phi_1(x\Phi_1 R - R) - \Phi_1 R] = \Phi_1^2(x\Phi_1 R - 2R).$$

Дальнейшее применение этих преобразований приводит к равенству (28). Аналогично доказывается формула (29). Лемма доказана.

Лемма 4. *Если для некоторого многочлена $S(x, y)$* выполняется условие

$$D_1^2 S = 0, \tag{30}$$

то для любого многочлена $Q(x, y)$ и любого номера k найдется такой многочлен $Q_1(x, y)$, что имеет место равенство

$$S\Phi_1\Psi_1(p^kQ) = \Psi_1(p^{k-1}Q_1). \tag{31}$$

Доказательство. Используя формулы (10) и (12), получаем

$$\begin{aligned} S\Phi_1\Psi_1R &= S\Phi_1[pD_1R + (D_1p + \beta_0)R] = \\ &= S\Big\{D_1(pD_1R) + D_1[(D_1p)R] + D_1(\beta_0R) + \\ &+ \frac{\beta_0}{p}(pD_1R + RD_1p + \beta_0R)\Big\} = S\Big\{(D_1p)D_1R + \\ &+ pD_1^2R + (D_1^2p)R + (D_1p)D_1R + (D_1\beta_0)R + \\ &+ \beta_0D_1R + \beta_0D_1R + \frac{1}{p}\beta_0RD_1p + \frac{1}{p}\beta_0^2R\Big\} = \\ &= S\Big[pD_1^2R + 2(D_1p + \beta_0)D_1R + \\ &+ \Big(D_1^2p + D_1\beta_0 + \frac{1}{p}\beta_0D_1p + \frac{1}{p}\beta_0^2\Big)R\Big]. \end{aligned} \tag{32}$$

С другой стороны, в силу формулы (10) имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1\Big[\frac{1}{p}RS(\beta_0 + D_1p) + SD_1R - RD_1S\Big] &= \\ = pD_1\Big[\frac{1}{p}RS(\beta_0 + D_1p) + SD_1R - RD_1S\Big] &+ \\ + (D_1p + \beta_0)\Big[\frac{1}{p}RS(\beta_0 + D_1p) + SD_1R - RD_1S\Big] &= \\ = -\frac{1}{p}RS(\beta_0 + D_1p)D_1p + (D_1R)S(\beta_0 + D_1p) &+ \\ + R(D_1S)(\beta_0 + D_1p) + RS(D_1\beta_0 + D_1^2p) &+ \\ + p(D_1R)D_1S + pSD_1^2R - p(D_1R)D_1S - pRD_1^2S &+ \\ + (D_1p + \beta_0)\Big[\frac{1}{p}RS(\beta_0 + D_1p) + SD_1R - RD_1S\Big] &= \\ = S\Big[pD_1^2R + 2(D_1p + \beta_0)D_1R - pRD_1^2S &+ \\ + R\Big(D_1^2p + D_1\beta_0 + \frac{1}{p}\beta_0D_1p + \frac{1}{p}\beta_0^2\Big)\Big]&. \end{aligned} \tag{33}$$

Так как выполняется условие (30), то правые части равенств (32) и (33) одинаковы. Следовательно, равны и левые части этих равенств. Полагаем в левых частях этих равенств $R = p^kQ$ и приравниваем их. В результате получим равенство

$$S\Phi_1\Psi_1(p^kQ) = \\ = \Psi_1[p^{k-1}QS(\beta_0 + D_1p) + SD_1(p^kQ) - p^kQD_1S].$$

Из этого равенства, вводя обозначение

$$Q_1 = QS(\beta_0 + D_1p) + kSQD_1p + pSD_1Q - pQD_1S,$$

находим формулу (31). Лемма доказана.

Аналогично при условии $D_2^2S = 0$ доказывается формула

$$S\Phi_2\Psi_2(q^kQ) = \Psi_2(q^{k-1}Q_2). \tag{34}$$

Лемма 5. *Если основной оператор потенциально самосопряжен, то операторы Φ_1 и Φ_2 коммутативны.*

Доказательство. Из формул (12) и (13) находим

$$\Phi_1\Phi_2R - \Phi_2\Phi_1R = \\ = \Phi_1\left(D_2R + \frac{\gamma_0}{q}R\right) - \Phi_2\left(D_1R + \frac{\beta_0}{p}R\right) = \\ = D_1\left(D_2R + \frac{\gamma_0}{q}R\right) + \frac{\beta_0}{p}\left(D_2R + \frac{\gamma_0}{q}R\right) - \\ - D_2\left(D_1R + \frac{\beta_0}{p}R\right) - \frac{\gamma_0}{q}\left(D_1R + \frac{\beta_0}{p}R\right) = \\ = R\left[D_1\left(\frac{\gamma_0}{q}\right) - D_2\left(\frac{\beta_0}{p}\right)\right].$$

Разность в квадратных скобках равна нулю в силу формул (8) и (9) и условия потенциальной самосопряженности (1.17) основного оператора. Лемма доказана.

А теперь рассмотрим основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3. *Если основной оператор потенциально самосопряжен и выполняются условия*

$$D_1c_1 = D_2a_1 = 0, \tag{35}$$

то формула

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h}D_1^nD_2^m(hp^nq^m) \tag{36}$$

определяет алгебраический многочлен по переменным x и y.

Доказательство. Из формулы (16), полагая в ней $R = p^n q^m$, находим равенство

$$D_1(hp^n q^m) = h\Phi_1(p^n q^m).$$

Дифференцируя это равенство по x и используя формулы (8) и (12), получаем

$$D_1^2(hp^n q^m) = hD_1\Phi_1(p^n q^m) + (D_1 h)\Phi_1(p^n q^m) = \\ = h\left[D_1\Phi_1(p^n q^m) + \frac{\beta_0}{p}\Phi_1(p^n q^m)\right] = h\Phi_1^2(p^n q^m).$$

Далее, снова применяем оператор D_1 и формулы (8) и (12). В результате имеем

$$D_1^3(hp^n q^m) = h\left[D_1\Phi_1^2(p^n q^m) + \frac{\beta_0}{p}\Phi_1^2(p^n q^m)\right] = \\ = h\Phi_1^3(p^n q^m).$$

Продолжая эту операцию, придем к формуле

$$D_1^n(hp^n q^m) = h\Phi_1^n(p^n q^m).$$

А теперь к этому равенству применяем оператор D_2. В результате находим

$$D_2 D_1^n(hp^n q^m) = \\ = h\left[D_2\Phi_1^n(p^n q^m) + \frac{\gamma_0}{q}\Phi_1^n(p^n q^m)\right] = h\Phi_2\Phi_1^n(p^n q^m).$$

Применяя эту же операцию еще $m - 1$ раз, получим равенство

$$D_2^m D_1^n(hp^n q^m) = h\Phi_2^m\Phi_1^n(p^n q^m).$$

Сопоставляя это равенство с формулой (36), находим

$$Q_{nm}(x, y) = \Phi_2^m\Phi_1^n(p^n q^m). \tag{37}$$

Таким образом, остается доказать, что функция (37) есть алгебраический многочлен.

Из формулы (12) при любом многочлене R имеем

$$\Phi_1(p^k q^s R) = D_1(p^k q^s R) + \frac{\beta_0}{p}p^k q^s R = \\ = p^{k-1}q^s\left(kRD_1 p + R\frac{sp}{q}D_1 q + pD_1 R + \beta_0 R\right). \tag{38}$$

С другой стороны, в силу равенства (6) и первого из условий (35) получаем

$$\frac{p}{q}\frac{\partial q}{\partial x} = \alpha_0 a_1 \frac{1}{\alpha_0 c_1}(\alpha_0 D_1 c_1 + c_1 D_1 \alpha_0) = a_1 D_1 \alpha_0.$$

Следовательно, сумма в круглых скобках (38) есть некоторый многочлен R_1. Поэтому равенство (38) можно представить в виде

$$\Phi_1(p^k q^s R) = p^{k-1} q^s R_1. \tag{39}$$

Аналогично доказывается еще одно равенство:

$$\Phi_2(p^k q^s R) = p^k q^{s-1} R_2. \tag{40}$$

Из этих двух равенств следует формула

$$\Phi_1\Phi_2(p^k q^s R) = \Phi_1(p^k q^{s-1} R_2) = p^{k-1} q^{s-1} R_3. \tag{41}$$

Далее, к обеим частям равенства (41) применяем формулу (39), а затем (40). В результате таких преобразований, пользуясь коммутативностью операторов Φ_1 и Φ_2 и полагая $k = n$, $s = m$, $R = 1$, получим формулу

$$\Phi_1^n \Phi_2^m \left(p^n q^m\right) = R_{nm}(x, y).$$

Таким образом, равенство (37) действительно определяет некоторый алгебраический многочлен. Теорема доказана.

Формула (36) называется *формулой Родрига* для основного потенциально самосопряженного оператора.

Теорема 4. *Если при условиях теоремы 3 функционал (18) согласован с основным оператором, то многочлен $Q_{nm}(x, y)$, определенный формулой Родрига (36), ортогонален всем многочленам меньшей степени, т. е. при условии*

$$k + s < n + m \tag{42}$$

справедливо равенство

$$J\left(x^k y^s Q_{nm}\right) = \iint\limits_G h(x, y)\, x^k y^s Q_{nm}(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Будем считать, что при условии (42) $k < n$, и рассмотрим многочлен

$$T = x^k y^s Q_{nm}(x, y). \tag{44}$$

Применяя (37) и (40), многочлен (44) представляем в виде

$$T = x^k y^s \Phi_1^n \Phi_2^m (p^n q^m) = \\ = x^k \Phi_1^n [y^s \Phi_2^m (p^n q^m)] = x^k \Phi_1^n (p^n R). \qquad (45)$$

Далее применяем формулу (26). В результате из равенства (45) имеем

$$T = x^k \Phi_1^n (p^n R) = x^k \Phi_1^{n-1} \Psi_1 (p^{n-1} R). \qquad (46)$$

Затем, используя формулу (28), находим

$$T = x^{k-1} \Phi_1^{n-2} [x \Phi_1 \Psi_1 (p^{n-1} R) - (n-2) \Psi_1 (p^{n-1} R)]. \qquad (47)$$

С другой стороны, применяя формулу (31) при $S = x$, получаем

$$x \Phi_1 \Psi_1 (p^{n-1} R) = \Psi_1 (p^{n-2} R_1).$$

Подставляем это значение в равенство (47). В результате получим формулу

$$T = x^{k-1} \Phi_1^{n-2} \Psi_1 (p^{n-2} R_2). \qquad (48)$$

По сравнению с формулой (46) в формуле (48) уменьшились показатель степени x, степень оператора Φ_1 и степень p, но зато вместо многочлена R стоит другой многочлен R_2. Применяем это преобразование еще $k-1$ раз. В результате придем к равенству

$$T = \Phi_1^{n-k-1} \Psi_1 (p^{n-k-1} R_{k+1}).$$

Далее применяем $n-k-1$ раз формулу (31) при $S = 1$. В результате получим равенство $T = \Psi_1(R_N)$, где R_N есть некоторый многочлен. Подставляя это представление многочлена (44) в интеграл (43) и учитывая условие (21), находим $J(T) = J(\Psi_1 R_N) = 0$. Этим равенство (43) при условии $k < n$ доказано. Случай, когда $s < m$, рассматривается аналогично с помощью формул (27), (29) и (34). Теорема доказана.

§ 4. Весовые функции и формула Родрига в наиболее характерных случаях

В настоящем параграфе для некоторых допустимых и потенциально самосопряженных уравнений, рассмотренных в § 2, находятся области ортогональности и весовые функции, проверяются условия согласованности основного оператора и линейного функционала и приводится формула Родрига.

Прежде всего заметим, что в силу формул (1.27) условия согласованности основного оператора и линейного функционала имеют вид

$$\int_\Gamma P(x, y)\, h\,(a\,dy - b\,dx) = 0, \tag{1}$$

$$\int_\Gamma P(x, y)\, h\,(b\,dy - c\,dx) = 0. \tag{2}$$

Эти условия имеют место, если на контуре Г выполняются тождества

$$h(a\,dy - b\,dx) \equiv 0, \tag{3}$$

$$h(b\,dy - c\,dx) \equiv 0. \tag{4}$$

А для тождеств (3) и (4) достаточно выполнения условий

$$ha\,dy \equiv hb\,dx \equiv hb\,dy \equiv hc\,dx \equiv 0. \tag{5}$$

1. Рассмотрим уравнение Аппеля (2.1). В этом случае имеем многочлены

$$\alpha = xy(1 - x - y), \tag{6}$$

$$\beta = (d_{00} + 1)(y^2 - y) + (2 - B - g_{00})xy, \tag{7}$$

$$\gamma = (g_{00} + 1)(x^2 - x) + (2 - B - d_{00})xy. \tag{8}$$

При рассмотрении потенциальной самосопряженности было введено условие (1.14)

$$\alpha = ac - b^2 \neq 0. \tag{9}$$

В силу формулы (6) это условие определяет треугольную область

$$G = \{(x, y):\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\} \tag{10}$$

Далее, для вычисления весовой функции применяется формула (1.22):

$$h(x, y) = \exp\left\{\int_{y_0}^{y} \frac{\gamma}{\alpha}\,dy + \int_{x_0}^{x}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{y=y_0}\right]dx + c_1\right\}. \tag{11}$$

Используя формулы (6) и (8), находим

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1-B-d_{00}-g_{00}}{1-x-y}+\frac{g_{00}+1}{y},$$

$$\int_1^y \frac{\gamma}{\alpha}\,dy=(B+d_{00}+g_{00}-1)\left[\ln(1-x-y)-\ln|x|\right]-$$

$$-(g_{00}+1)\ln y. \quad (12)$$

Аналогично из формул (6) и (7) имеем

$$\int_1^x\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{y=1}\right]dx=\int_1^x\frac{B+g_{00}-2}{x}\,dx=(B+g_{00}-2)\ln x.$$

$$(13)$$

Подставляя интегралы (12) и (13) в формулу (11), получаем

$$h(x,y)=\exp\{(B+d_{00}+g_{00}-1)\left[\ln(1-x-y)-\ln x\right]-$$
$$-(g_{00}+1)\ln y+(B+g_{00}-2)\ln x+c_1\}=$$
$$=x^{-d_{00}-1}y^{-g_{00}-1}(1-x-y)^{B+d_{00}+g_{00}-1}c_2.$$

Полагая здесь $c_2=1$ и вводя обозначения $-d_{00}=\alpha$, $-g_{00}=\beta$, $B-1=\gamma$, получим весовую функцию Аппеля

$$h(x,y)=x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}. \quad (14)$$

Поскольку эта весовая функция должна быть суммируема по области (10), то должны выполняться условия

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma>\alpha+\beta-1. \quad (15)$$

Проверим условия согласованности (1) и (2) для основного оператора Аппеля и интегрального функционала с весовой функцией (14). Из уравнения (2.1) находим формулы

$$a=x(x-1),\quad b=xy,\quad c=y(y-1). \quad (16)$$

Следовательно, в силу неравенств (15) условия (5) выполняются на обоих катетах, входящих в состав границы области (10). А на гипотенузе, используя формулы (16), получаем

$$h(a\,dy-b\,dx)=-h(a+b)\,dx=xh(1-x-y)\,dx=0,$$

$$h(b\,dy-c\,dx)=-h(b+c)\,dx=yh(1-x-y)\,dx=0.$$

Следовательно, на гипотенузе выполняются условия (3) и (4). Таким образом, условия согласованности для уравнения (2.1) выполняются.

Выведем теперь формулу Родрига для многочленов Аппеля. В общем случае эта формула выводится при условиях

$$a = a_1 a_2, \quad b = a_1 b_1 c_1, \quad c = c_1 c_2, \tag{17}$$

$$D_1 c_1 = 0, \quad D_2 a_1 = 0. \tag{18}$$

В силу формул (16) полагаем $a_1 = x$, $b_1 = 1$, $c_1 = y$. Тогда из общих формул (3.3) и (3.6) находим

$$p = \alpha_0 a_1 = \frac{\alpha a_1}{a_1 c_1} = x(1 - x - y),$$

$$q = \alpha_0 c_1 = \frac{\alpha c_1}{a_1 c_1} = y(1 - x - y).$$

Следовательно, общая формула Родрига (3.36) в случае уравнения Аппеля (2.1) имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h x^n y^m (1 - x - y)^{n+m} \right]. \tag{19}$$

В гл. III при изучении многочленов Аппеля в качестве определения этих многочленов принята формула Родрига (19) с некоторым коэффициентом в правой части. А затем с помощью этой формулы установлена ортогональность многочленов Аппеля по области (10) с весовой функцией (14) и получено дифференциальное уравнение (2.1). А в настоящем параграфе формула Родрига (19) выведена из дифференциального уравнения (2.1).

2. Дифференциальное уравнение второго нормального типа (2.15) потенциально самосопряженно при любых значениях параметров. В этом случае имеем формулы

$$\alpha = -x^2 y,$$

$$\beta = (2 - B - g_{00}) xy + d_{00} y (y - 1),$$

$$\gamma = (g_{00} + 1) x^2 - d_{00} xy.$$

Здесь условие $\alpha = -x^2 y > 0$ определяет нижнюю полуплоскость. Используя эти три формулы, из общей формулы (11) получаем

$$h(x, y) = x^{B + g_{00} - 2} (-y)^{-g_{00} - 1} \exp\left[\frac{d_{00}(y - 1)}{x} + 2d_{00}\right]. \tag{20}$$

В нижней полуплоскости эта функция не является весовой функцией. Но условия согласованности (1) и (2) здесь выполняются. В самом деле, из формул

$$a = x^2, \quad b = xy, \quad c = y(y-1) \tag{21}$$

следует, что при условии $g_{00} < 0$ все тождества (5) на горизонтальной оси выполняются. Далее, по формулам (21) вводим многочлены

$$a_1 = x, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = y, \quad \alpha_0 = -x,$$
$$p = \alpha_0 c_1 = -x^2, \quad q = \alpha_0 c_1 = -xy.$$

Следовательно, формула Родрига в данном случае имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h(-x^2)^n (-xy)^m\right].$$

Эта формула определяет $n+m+1$ линейно независимых многочленов степени $n+m$, являющихся решениями уравнения (2.15), если в нем вместо n поставить $n+m$.

3. Дифференциальному уравнению (2.18) соответствуют многочлены

$$\alpha = y^3, \quad \beta = y(d_{00}y - g_{00}x),$$
$$\gamma = (B-3)y^2 + g_{00}(x^2 + y) - d_{00}xy.$$

Условие $\alpha = y^3 > 0$ определяет верхнюю полуплоскость. В этой области с помощью формулы (11) находим

$$h(x, y) = y^{B-3} \exp\left(-\frac{g_{00}x^2}{2y^2} - \frac{d_{00}x - g_{00}}{y} + g_{00}\right).$$

Эта функция не является весовой, но условия согласованности выполняются. Поэтому, учитывая формулы $a = x^2 + y$, $b = xy$, $c = y^2$, вводим многочлены

$$a_1 = 1, \quad b_1 = x, \ c_1 = y, \ \alpha_0 = y^2,$$
$$p = \alpha_0 a_1 = y^2, \ q = \alpha_0 c_1 = y^3.$$

Следовательно, формула Родрига в этом случае имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left(hy^{2n+3m}\right).$$

4. В случае дифференциального уравнения (2.19) имеем $\alpha = (x+y)y^2 > 0$. Следовательно, область ортогональности в этом случае есть полуплоскость $y > -x$.

В этой области с помощью общей формулы (11), используя многочлены α, β, γ, находим функцию

$$h(x, y) = y^{\sigma}(x+y)^{\delta}(1+x)^{-\delta}\exp\left(g_{00}x - \frac{g_{00}x}{y}\right), \qquad (22)$$

где для краткости введены обозначения $\sigma = B - 2 - d_{00} + g_{00}$, $\delta = d_{00} - g_{00} - 1$. Как и в двух предыдущих случаях функция (22) не является весовой функцией в указанной полуплоскости. Докажем, что условия согласованности все же выполняются. В самом деле, в силу формул

$$a = x^2 + x + y, \quad b = xy, \quad c = y^2, \qquad (23)$$

вычисляя левые части равенств (3) и (4) на линии $x + y = 0$, получаем

$$h(-x^2dx + x^2dx) = h(x^2dx - x^2dx) = 0.$$

В связи с формулами (23) вводим многочлены

$$a_1 = 1, \quad b_1 = x, \; c_1 = y, \; \alpha_0 = (x+y)y,$$
$$p = \alpha_0 a_1 = (x+y)y, \quad q = \alpha_0 c_1 = (x+y)y^2.$$

Следовательно, формула Родрига для уравнения (2.19) имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[hy^{n+2m}(x+y)^{n+m}\right].$$

5. Поскольку уравнение (2.20) самосопряжено при условиях $B = 3$, $d_{00} = g_{00} = 1$ и не имеет случаев потенциальной самосопряженности, то этому уравнению соответствует только единичная весовая функция $h(x, y) \equiv 1$.

6. Уравнение (2.23) самосопряжено при условиях $B = 3$, $d_{00} = 0$, $g_{00} = 1$, и, следовательно, $h(x, y) \equiv 1$. А других случаев весовой функции это уравнение не имеет.

7. Уравнение (2.26) также имеет только случай самосопряжения, при котором $h(x, y) \equiv 1$.

8. Допустимое уравнение восьмого нормального типа (2.27) потенциально самосопряжено только при условиях $d_{00} = g_{00} = 0$, т. е. такое уравнение имеет вид

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (y^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + {}$$
$$+ B\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = n(n-1+B)u. \qquad (24)$$

В этом случае имеем многочлены

$$\alpha = 1 - x^2 - y^2, \quad \beta = (3 - B)x, \quad \gamma = (3 - B)y.$$

С помощью этих многочленов находим область ортогональности

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \tag{25}$$

и соответствующую весовую функцию

$$h(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{(B-3)/2}, \qquad B > 1. \tag{26}$$

Далее, с помощью формул

$$a = x^2 - 1, \quad b = xy, \quad c = y^2 - 1$$

проверяем условия согласованности (3) и (4). Для верхней полуокружности имеем

$$a\,dy - b\,dx = (1 - x^2)\frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} - x\sqrt{1 - x^2}\,dx = 0,$$

$$b\,dy - c\,dx = -x^2dx + x^2dy = 0.$$

Аналогичные равенства имеют место и для нижней полуокружности. А теперь, как обычно, вводим многочлены $a_1 = 1$, $b_1 = xy$, $c_1 = 1$, $\alpha_0 = \alpha$, $p = q = (1 - x^2 - y^2)$. Следовательно, формула Родрига для уравнения (24) и весовой функции (26) имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h(1 - x^2 - y^2)^{n+m}\right]. \tag{27}$$

9. Уравнению (2.33) соответствуют многочлены

$$\alpha = xy - 1, \quad \beta = B(xy - 1), \quad \gamma = B(xy - 1).$$

Следовательно, область ортогональности определяется условием $xy > 1$, а весовая функция имеет вид

$$h(x, y) = e^{B(x+y)}, \qquad B < 0.$$

Далее, в случае уравнения (2.33) справедливы равенства

$$a = x, \quad b = 1, \quad c = y, \quad a_1 = b_1 = c_1 = 1,$$

$$\alpha_0 = \alpha, \quad p = q = xy - 1.$$

С помощью этих равенств, как обычно, из формулы (11) находим формулу Родрига

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h(xy - 1)^{n+m}\right]. \tag{28}$$

Условия согласованности (1) и (2) в этом случае не выполняются, но многочлены (28) являются решениями уравнения (2.33), если в этом уравнении вместо n поставить $n+m$.

10. В случае уравнения (2.34) по многочленам

$$\alpha = xy, \quad \beta = -Bxy - d_{00}y - y, \quad \gamma = -Bxy - g_{00}x - x$$

определяются область ортогональности

$$G = \{(x, y): x > 0,\ y > 0\} \tag{29}$$

и весовая функция

$$h(x, y) = x^{-d_{00}-1} y^{-g_{00}-1} e^{-B(x+y)}, \tag{30}$$

где параметры удовлетворяют условиям $d_{00} < 0$, $g_{00} < 0$, $B > 0$. Поскольку в случае уравнения (2.34) имеем равенства $a = -x$, $b = 0$, $c = -y$, то условия согласованности (5) выполняются. Из тех же трех равенств получаем

$$a_1 = c_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad p = \alpha_0 a_1 = \alpha, \quad q = \alpha_0 c_1 = \alpha.$$

Подставляя последние два многочлена в формулу (3.36), находим формулу Родрига

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h\,(xy)^{n+m}\right]. \tag{31}$$

Многочлены (31), ортогональные по области (29) с весовой функцией (30), являются обобщением многочленов Лагерра — Лагерра, рассмотренных в § 1 гл. II.

11. Уравнению (2.36) соответствуют многочлены

$$\alpha = -x^2, \quad \beta = (2 - g_{00})x + d_{00}y, \quad \gamma = -Bx^2 - d_{00}x.$$

С помощью этих многочленов из формулы (11), полагая в ней $x_0 = y_0 = 1$, получаем функцию

$$h(x, y) = x^{g_{00}-2} \exp\left(By + \frac{d_{00}y}{x}\right).$$

Далее, поскольку в этом случае $a = 0$, $b = x$, $c = y$, $\alpha_0 = \alpha$, $p = q = \alpha$, то формула Родрига имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left[h\,(-x^2)^{n+m}\right].$$

12. В случае уравнения (2.37) имеем многочлены

$$\alpha = x, \quad \beta = -Bx - d_{00} - 1, \quad \gamma = -Bxy - g_{00}x.$$

С помощью этих многочленов находится весовая функция

$$h(x, y) = x^{-d_{00}-1} \exp\left(-\frac{By^2}{2} - g_{00}y - Bx\right), \tag{32}$$

которая определена в правой полуплоскости $x > 0$. Далее, в данном случае имеем равенства $a = -x$, $b = 0$, $c = -1$, $\alpha_0 = \alpha$, $p = q = x$. Следовательно, условия согласованности (5) здесь выполняются, а формула Родрига имеет вид

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m \left(hx^{n+m}\right). \tag{33}$$

Если в формуле (32) положить $-d_{00} - 1 = \alpha$, $B = 1$, $g_{00} = 0$, то получим формулу (2.1.25). Следовательно, многочлены (33), ортогональные с весом (32) по правой полуплоскости, являются обобщением многочленов Лагерра — Эрмита (2.1.26).

13. Уравнению (2.39) соответствуют многочлены

$$\alpha = 1, \quad \beta = -Bx + d_{00}, \qquad \gamma = -By + g_{00}.$$

Поскольку условие $\alpha = 1 > 0$ выполняется при любых x и y, то область ортогональности — вся плоскость. Этим трем многочленам в силу формулы (11) соответствует весовая функция

$$h(x, y) = \exp\left[-\frac{B}{2}(x^2 + y^2) + d_{00}x + g_{00}y\right]. \tag{34}$$

Далее, учитывая равенства $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$, $\alpha_0 = \alpha$, $p = q = \alpha$, получаем формулу Родрига

$$Q_{nm}(x, y) = \frac{1}{h} D_1^n D_2^m h. \tag{35}$$

Если в формуле (34) положить $B = 1$, $d_{00} = g_{00} = 0$, то получим формулу (2.1.14). Следовательно, многочлены (35) являются обобщением многочленов Эрмита — Эрмита, рассмотренных в § 1 гл. II.

14. Уравнению (2.41) при условиях $B = 1$, $d_{00} = g_{00} = 0$ соответствуют многочлены

$$\alpha = -1, \quad \beta = -y, \quad \gamma = y^2 - x.$$

Применяя формулу (11), в этом случае находим

$$h(x, y) = \exp\left[y\left(x - \frac{y^2}{3}\right)\right].$$

Эта функция является весовой функцией в двух областях, определяемых неравенством $y(3x - y^2) < 0$. Но условия согласованности дифференциального оператора и линейного функционала на границах этих областей не выполняются.

15. Поскольку уравнение пятнадцатой нормальной формы (2.42) потенциально самосопряжено при условиях $d_{00} = -B - 2$ и $g_{00} = 0$, то, подставляя эти условия в уравнение (2.42), находим

$$(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + (Bx - B - 2)\frac{\partial u}{\partial x} + By\frac{\partial u}{\partial y} = nBu. \quad (36)$$

А многочлены (2.43) в этом случае имеют вид

$$\alpha = 1 - x^2 - y^2,\ \beta = B(x^2 + y^2 - 1),\quad \gamma = 0.$$

Подставляя эти многочлены в формулу (11), получим

$$h(x, y) = \exp(-Bx). \quad (37)$$

Эта функция является весовой в единичном круге, но условия согласованности дифференциального оператора и линейного функционала, определяемого функцией (37), не выполняются.

Глава VI

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО ОБЛАСТИ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Однородные гармонические многочлены

На плоскости xOy введем комплексное переменное и полярные координаты по формуле

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Как известно, однородные гармонические многочлены по двум переменным определяются равенствами

$$u_n(x, y) = \operatorname{Re} z^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k}, \tag{2}$$

$$v_n(x, y) = \operatorname{Im} z^n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}. \tag{3}$$

В силу формулы (1) для этих многочленов имеем представление в полярных координатах

$$u_n(x, y) = u_n(r, \varphi) = u_n(z) = r^n \cos n\varphi, \tag{4}$$

$$v_n(x, y) = v_n(r, \varphi) = v_n(z) = r^n \sin n\varphi. \tag{5}$$

Однородные гармонические многочлены (2) и (3) упорядочим по лексикографическому принципу, т. е. представим их в виде последовательности

$$1,\ x,\ y,\ x^2 - y^2,\ 2xy,\ \ldots,\ u_n(x, y),\ v_n(x, y),\ \ldots \tag{6}$$

Поскольку $u_0 = 1$ и $v_0 = 0$, то систему (6) будем записывать в виде

$$\{1,\ u_n(x, y),\ v_n(x, y)\}. \tag{7}$$

Докажем, что многочлены (7) ортогональны по площади единичного круга

$$G = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < 1\} \tag{8}$$

В самом деле, из формул (4) и (5) имеем

$$\iint_G u_n(x, y)\, v_k(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 r^{n+k+1} dr \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = 0. \quad (9)$$

Аналогично доказывается ортогональность между собой всех многочленов (2) и (3). При этом, как и в равенстве (9), вопрос сводится к ортогональности тригонометрической системы функций. Вычислим нормы этих многочленов. В силу равенства (4) при $n > 0$ имеем

$$\iint_G u_n^2(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 r^{2n+1} dr \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Аналогично вычисляются нормы многочленов (5). Следовательно, ортонормированные однородные гармонические многочлены имеют вид

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \tilde{u}_n(x, y) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}}\, u_n(x, y), \quad (10)$$

$$\tilde{v}_n(x, y) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}}\, v_n(x, y). \quad (11)$$

Из формул (4) и (5) следует, что ортонормированные многочлены (10) и (11) внутри круга (8) убывают со скоростью геометрической прогрессии, а на единичной окружности могут возрастать, но не быстрее, чем $\sqrt{n}$.

Далее, из формул (2) и (3) следует, что главные коэффициенты многочленов (10) и (11) отличны от нуля. Тот факт, что некоторые главные коэффициенты отрицательны, не имеет принципиального значения. Поскольку у каждого многочлена из системы (7) главный коэффициент отличен от нуля, то всякий гармонический многочлен $P_n(x, y)$ порядка не выше n можно разложить по многочленам (7), т. е. представить в виде

$$P_n(x, y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k u_k(x, y) + \beta_k v_k(x, y)]. \quad (12)$$

В силу равенств (10) и (11) коэффициенты разложения

(12) определяются по формулам

$$\alpha_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G P_n(x, y)\, u_k(x, y)\, dx\, dy, \tag{13}$$

$$\beta_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G P_n(x, y)\, v_k(x, y)\, dx\, dy. \tag{14}$$

Пусть теперь в единичном круге (8) определена гармоническая функция

$$F(x, y) = F(r, \varphi) = F(z). \tag{15}$$

В силу известных результатов эту функцию в единичном круге можно разложить в ряд вида

$$F(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \tag{16}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \cos k\varphi\, d\varphi, \tag{17}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \sin k\varphi\, d\varphi. \tag{18}$$

Разложение (16) нетрудно получить из формулы Пуассона для гармонической функции (15) в круге радиуса $\rho < 1$ либо из формулы Коши для аналитической функции, если сначала ввести сопряженную к функции (15) гармоническую функцию.

В разложении (16) перейдем к декартовым координатам. В результате, учитывая формулы (4) и (5), получим

$$F(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)]. \tag{19}$$

Ряды (16) и (19) сходятся равномерно внутри единичного круга (8), причем никаких граничных свойств от функции (15) не требуется.

Рассмотрим ряды вида (19) с точки зрения ортогональности по области. Предположим, что функция (15) суммируема по области (8) с квадратом, т. е. выполняется условие

$$\|F\|_G^2=\iint_G |F(x, y)|^2\,dx\,dy<\infty. \tag{20}$$

Множество таких функций будем обозначать через $H_2(G)$. Аналогично равенствам (13) и (14) определяем коэффициенты Фурье по системе (7) функции (15) по формулам

$$a_k=\frac{2(k+1)}{\pi}\iint_G F(x, y)\,u_k(x, y)\,dx\,dy, \tag{21}$$

$$b_k=\frac{2(k+1)}{\pi}\iint_G F(x, y)\,v_k(x, y)\,dx\,dy. \tag{22}$$

Докажем, что формулы (17), (18), (21), (22) определяют одни и те же коэффициенты Фурье функции (15). В самом деле, возьмем число ρ близкое к 1. Тогда, исходя из формул (17) и (18), находим

$$a_k-ib_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi)(\cos k\varphi-i\sin k\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{k+1}{\pi i\rho^{k+2}}\int_{|z|=\rho} F(z)\,\frac{\bar{z}^{k+1}}{k+1}\,dz. \tag{23}$$

Далее применяем формулу интегрирования по частям для аналитических и гармонических функций [11.5]

$$\iint_G F(z)\,\overline{\varphi'(z)}\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_\Gamma F(z)\,\overline{\varphi(z)}\,dz. \tag{24}$$

В результате из равенства (23), обозначая через G_ρ круг радиуса ρ, получаем

$$a_k-ib_k=\frac{2(k+1)}{\pi\rho^{k+2}}\iint_{G_\rho} F(z)\,\bar{z}^k\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2(k+1)}{\pi\rho^{k+2}}\iint_{G_\rho} F(x, y)\,[u_k(x, y)-iv_k(x, y)]\,dx\,dy. \tag{25}$$

В силу условия (20) в этом равенстве можно перейти к пределу при $\rho\to 1$. Тогда в правой части равенства (25) получим интегралы (21) и (22).

Таким образом, если для функции (15) выполняется условие (20), то ее ряд (19), коэффициенты которого определяются по формулам (21) и (22), сходится равномерно внутри единичного круга (8).

Вместо ряда (19) можно рассматривать ряд Фурье по ортонормированным однородным гармоническим многочленам

$$F(x, y) = \frac{\widehat{a}_0}{2}\widehat{u}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{a}_k\widehat{u}_k(x, y) + \widehat{b}_k\widehat{v}_k(x, y)\right]. \tag{26}$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$\widehat{a}_k = \iint_G F(x, y)\,\widehat{u}_k(x, y)\,dx\,dy, \tag{27}$$

$$\widehat{b}_k = \iint_G F(x, y)\,\widehat{v}_k(x, y)\,dx\,dy. \tag{28}$$

Рассмотрим несколько известных либо очевидных свойств рядов Фурье (19) и (26) для функций класса $H_2(G)$.

1. В силу условия (20) для коэффициентов Фурье (27) и (28) выполняется неравенство Бесселя

$$\frac{\widehat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2\right) \leqslant \|F\|_G^2. \tag{29}$$

Отсюда следуют предельные соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\widehat{a}_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\widehat{b}_k = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\sqrt{k}} = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{\sqrt{k}} = 0. \tag{31}$$

2. Введем частичные суммы ряда (26)

$$S_n(x, y) = \frac{\widehat{a}_0}{2}\widehat{u}_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\widehat{a}_k\widehat{u}_k(x, y) + \widehat{b}_k\widehat{v}_k(x, y)\right]. \tag{32}$$

Как и у всех ортогональных рядов, частичные суммы (32) наилучшим образом приближают функцию $F(x, y)$ в метрике пространства $H_2(G)$, т. е. при всяком гармоническом многочлене вида (12) выполняется неравенство

$$\|F - S_n\|_G \leqslant \|F - P_n\|_G. \tag{33}$$

3. В силу известных результатов о полноте ряд (26) сходится к функции $F(x, y)$ в среднем по области (8), т. е. имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| F - S_n \|_G = 0. \tag{34}$$

4. Если функция $F(x, y)$ гармоническая в замкнутом круге

$$\omega = \{(x, y):\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \rho^2\},$$

то справедливо неравенство

$$\pi\rho^2 | F(x_0, y_0)|^2 \leqslant \iint_\omega | F(x, y)|^2\, dx\, dy. \tag{35}$$

Из условия (34) и неравенства (35) следует, что ряд (26) сходится равномерно внутри единичного круга (8), т. е. равномерно на всяком компакте, расположенном внутри этого круга. Таким образом, разложение (26) получается независимо от разложения (16).

5. Если функция $F(x, y)$ имеет на единичной окружности почти всюду угловые граничные значения $F(1, \varphi)$, причем функция $F(1, \varphi)$ суммируема на сегменте $[0, 2\pi]$, то разложение (26) после перехода к полярным координатам превращается в тригонометрический ряд Фурье. Из этого факта можно получить ряд следствий. Например, если функция $F(1, \varphi)$ непрерывно дифференцируема p раз, причем $F^{(p)}(1, \varphi) \in \operatorname{Lip}\alpha$, то для остатка ряда (26) имеет место неравенство [11.4, 11]

$$|R_n(x, y)| = |F(x, y) - S_n(x, y)| \leqslant (c_1 \ln n)/n^{p+\alpha}.$$

6. В силу экстремального свойства (33) частичных сумм (32) для наилучшего приближения функции $F(x, y)$ в метрике пространства $H_2(G)$ справедлива формула

$$E_n^{(2)}(F, G) = \| F - S_n \|_G = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\bar{a}_k^2 + \hat{b}_k^2\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1}}.$$

7. Оценим скорость сходимости ряда (26) внутри единичного круга (8). Рассмотрим область

$$G_\rho = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < \rho < 1\}. \tag{36}$$

Оценим остаточный член ряда (26) в замкнутой области (36). Используя разложение (16) и формулы для коэффициентов (27), (28), находим последовательно

$$|R_n(\rho, \varphi)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \rho^k \right] (|\widehat{a}_k| + |\widehat{b}_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2(k+1)}{\pi} \rho^{2k}} \left[\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{a}_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{b}_k^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2E_n^{(2)}(F, G) \sqrt{\frac{2}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \rho^{2k}}.$$

Ряд под знаком корня имеет порядок интеграла

$$\int_{n+1}^{\infty} (t+1) \rho^{2t} dt = \rho^{2(n+1)} \left(\frac{n+2}{-2 \ln \rho} + \frac{1}{4 \ln^2 \rho} \right).$$

Таким образом, ряд (26) сходится внутри единичного круга со скоростью геометрической прогрессии.

8. Если функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z| < R$, где $R > 1$, то остаток ее ряда Тейлора в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/R$, причем постоянная в оценке остаточного члена зависит от $R > 1$ и возрастает неограниченно при $R \to 1$. Эта зависимость определяется граничными свойствами функции $f(z)$ в окрестности окружности $|z| = R$. Почти все результаты такого типа о рядах Тейлора переносятся на ряды Фурье (26). Приведем только одну формулировку. Если функция $F(x, y)$ гармоническая в круге $|z| < R$, непрерывно дифференцируема p раз в замкнутом круге $|z| \leqslant R$, причем $F^{(p)}(R, \varphi) \in \operatorname{Lip} \alpha$, то для остатка ряда (26) справедливо неравенство [II.25]

$$|R_n(x, y)| \leqslant \frac{c_2}{R^n n^{p+\alpha}} \ln \frac{R+1}{R-1}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

где постоянная c_2 не зависит от n и R. При этих условиях для коэффициентов Фурье вместо предельных соотношений (30) и (31) получаются различные оценки скорости сходимости их к нулю.

Таковы простейшие аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортонормированным однородным гармоническим многочленам.

Во всех вышеизложенных результатах важную роль играло свойство ортогональности многочленов системы (7) по единичному кругу с единичным весом $h(x, y) = 1$. Но на самом деле многочлены (7) ортогональны по любому кругу с центром в начале координат и с любым радиально симметричным весом. Как и в монографии [II.23], назовем весовую функцию *радиально симметричной*, если она постоянна на каждой окружности с центром в начале координат, т. е.

$$h(x, y) = h(z) = h(r), \qquad r = |z|.$$

Предположим, что эта функция определена в круге $|z| < R$. Тогда с помощью формул (4) и (5) находим

$$\iint\limits_{|z|<R} h(x, y)\, u_n(x, y)\, v_k(x, y)\, dx\, dy = \\ = \int\limits_0^R h(r)\, r^{n+k+1} dr \int\limits_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = 0.$$

Аналогично доказывается ортогональность и других функций из системы (7). А норма, например, функции u_n вычисляется по формуле

$$\| u_n \|_G^2 = \pi \int\limits_0^R h(r)\, r^{2n+1} dr.$$

Можно рассматривать и случай, когда $R = \infty$. Например, функция $h(r) = \exp(-r)$ является радиально симметричным весом на всей плоскости, а нормы многочленов (7) в этом случае представляются через гамма-функцию Эйлера.

§ 2. Аналог формулы Кристоффеля — Дарбу

Как и для любых ортогональных рядов в случае ортогональности по площади возникает задача о вычислении частичной суммы билинейного ряда. В настоящем параграфе эта задача рассматривается для ряда Фурье по однородным гармоническим многочленам.

При условии $|q| < 1$ рассмотрим равенство

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{1}$$

Положим в этом равенстве

$$q = z\bar{\zeta} = (x + iy)(\xi - i\eta). \tag{2}$$

Тогда, используя формулы (1.2) и (1.3), находим

$$\begin{aligned} q^k = z^k(\bar{\zeta})^k = [u_k(x, y) + iv_k(x, y)][u_k(\xi, \eta) - iv_k(\xi, \eta)] = \\ = u_k(x, y)u_k(\xi, \eta) + v_k(x, y)v_k(\xi, \eta) + \\ + i[v_k(x, y)u_k(\xi, \eta) - u_k(x, y)v_k(\xi, \eta)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, в силу равенства (2) имеем

$$1 - q = (1 - x\xi - y\eta) + i(x\eta - y\xi). \tag{4}$$

Умножим эту величину на комплексно сопряженную. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} (1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2 = \\ = 1 - 2(x\xi + y\eta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим эту величину через $g(x, y, \xi, \eta)$. Кроме того, для краткости введем обозначения

$$u_k = u_k(x, y), \quad \tilde{u}_k = u_k(\xi, \eta), \tag{6}$$

$$v_k = v_k(x, y), \quad \tilde{v}_k = v_k(\xi, \eta). \tag{7}$$

Тогда из формулы (1), учитывая равенство (3), находим

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(u_k\tilde{u}_k + v_k\tilde{v}_k\right) + i\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\tilde{u}_k - u_k\tilde{v}_k\right) = \\ = \frac{(1 - q^{n+1})[(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)]}{g(x, y, \xi, \eta)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Числитель дроби вычисляем с помощью формулы (3) при $k = n + 1$. Затем разделяем действительную и мнимую части в равенстве (8). В результате получим формулы

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(u_k\tilde{u}_k + v_k\tilde{v}_k\right) = \\ = \frac{1}{g(x, y, \xi, \eta)}\Big[\left(1 - u_{n+1}\tilde{u}_{n+1} - v_{n+1}\tilde{v}_{n+1}\right)(1 - x\xi - y\eta) - \\ - \left(v_{n+1}\tilde{u}_{n+1} - u_{n+1}\tilde{v}_{n+1}\right)(x\eta - y\xi)\Big], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\tilde{u}_k-u_k\tilde{v}_k\right)=$$
$$=\frac{-1}{g(x,y,\xi,\eta)}\left[\left(1-u_{n+1}\tilde{u}_{n+1}-v_{n+1}\tilde{v}_{n+1}\right)(x\eta-y\xi)+\right.$$
$$\left.+\left(v_{n+1}\tilde{u}_{n+1}-u_{n+1}\tilde{v}_{n+1}\right)(1-x\xi-y\eta)\right]. \quad (10)$$

Далее, из равенства (1), дифференцируя его по q, находим

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}=-\frac{(n+1)q^n}{1-q}+\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}=$$
$$=-\frac{(n+1)q^n}{1-q}+\frac{1}{1-q}\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right). \quad (11)$$

Вычислим отдельно слагаемые в правой части равенства (11). В силу формул (3) и (4) имеем

$$-\frac{(n+1)q^n}{1-q}=\frac{-(n+1)}{g(x,y,\xi,\eta)}\left[\left(u_n\tilde{u}_n+v_n\tilde{v}_n\right)+\right.$$
$$\left.+i\left(v_n\tilde{u}_n-u_n\tilde{v}_n\right)\right]\left[(1-x\xi-y\eta)-i(x\eta-y\xi)\right]=$$
$$=\frac{-(n+1)}{g(x,y,\xi,\eta)}\left[\left(u_n\tilde{u}_n+v_n\tilde{v}_n\right)(1-x\xi-y\eta)+\right.$$
$$+\left(v_n\tilde{u}_n-u_n\tilde{v}_n\right)(x\eta-y\xi)+i\left(v_n\tilde{u}_n-u_n\tilde{v}_n\right)(1-x\xi-y\eta)-$$
$$\left.-i\left(u_n\tilde{u}_n+v_n\tilde{v}_n\right)(x\eta-y\xi)\right]. \quad (12)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (11) вычисляем с помощью формул (3)—(5). В результате получаем

$$\frac{1}{1-q}\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right)=$$
$$=\frac{(1-x\xi-y\eta)-i(x\eta-y\xi)}{g(x,y,\xi,\eta)}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\tilde{u}_k+v_k\tilde{v}_k\right)+\right.$$
$$\left.+i\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\tilde{u}_k-u_k\tilde{v}_k\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{g}\left\{(1-x\xi-y\eta)\left[1+\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\tilde{u}_k+v_k\tilde{v}_k\right)\right]+\right.$$
$$+(x\eta-y\xi)\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\tilde{u}_k-u_k\tilde{v}_k\right)+$$

$$+ i(1 - x\xi - y\eta)\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\widetilde{u}_k - u_k\widetilde{v}_k\right) -$$

$$- i(x\eta - y\xi)\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left(u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k\right)\right]\Bigg\}. \quad (13)$$

Таким образом, оба слагаемых в правой части равенства (11) преобразованы с помощью формул (3) и (4). Подставляем значения (12) и (13) в равенство (11). Кроме того, левую часть этого равенства преобразуем с помощью формулы (3). Далее, вычисляя в полученном равенстве только действительную часть, находим

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k\right) =$$

$$= \frac{-(n+1)}{g}\left[\left(u_n\widetilde{u}_n + v_n\widetilde{v}_n\right)(1 - x\xi - y\eta) + \right.$$

$$\left. + \left(v_n\widetilde{u}_n - u_n\widetilde{v}_n\right)(x\eta - y\xi)\right] +$$

$$+ \frac{1}{g}\left\{(1 - x\xi - y\eta)\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left(u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k\right)\right] + \right.$$

$$\left. + (x\eta - y\xi)\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\widetilde{u}_k - u_k\widetilde{v}_k\right)\right\}. \quad (14)$$

После простейших преобразований равенство (14) приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k\right) =$$

$$= \frac{1}{g}\left[(1 - x\xi - y\eta)\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k\right) + \right.$$

$$+ (x\eta - y\xi)\sum_{k=1}^{n-1}\left(v_k\widetilde{u}_k - u_k\widetilde{v}_k\right) -$$

$$- n(1 - x\xi - y\eta)\left(u_n\widetilde{u}_n + v_n\widetilde{v}_n\right) -$$

$$\left. - n(x\eta - y\xi)\left(v_n\widetilde{u}_n - u_n\widetilde{v}_n\right)\right]. \quad (15)$$

Суммы в правой части этого равенства можно заменить по формулам (9) и (10). В результате получим формулу

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(u_k\widetilde{u}_k+v_k\widetilde{v}_k\right)=$$
$$=\frac{1}{g}\Big\{(1-x\xi-y\eta)\frac{1}{g}\left[\left(1-u_n\widetilde{u}_n-v_n\widetilde{v}_n\right)(1-x\xi-y\eta)-\right.$$
$$\left.-\left(v_n\widetilde{u}_n-u_n\widetilde{v}_n\right)(x\eta-y\xi)\right]-$$
$$-(x\eta-y\xi)\frac{1}{g}\left[\left(1-u_n\widetilde{u}_n-v_n\widetilde{v}_n\right)(x\eta-y\xi)+\right.$$
$$\left.+\left(v_n\widetilde{u}_n-u_n\widetilde{v}_n\right)(1-x\xi-y\eta)\right]-$$
$$-n(1-x\xi-y\eta)\left(u_n\widetilde{u}_n+v_n\widetilde{v}_n\right)-$$
$$-n(x\eta-y\xi)\left(v_n\widetilde{u}_n-u_n\widetilde{v}_n\right)\Big\}. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) являются аналогами и обобщениями классической формулы Кристоффеля — Дарбу для ортогональных многочленов одного переменного. В этих формулах частичная сумма билинейного ряда по ортонормированным однородным гармоническим многочленам представляется через более простые выражения. При рассмотрении формул (15) и (16) следует учесть обозначения (6) и (7). Кроме того, в этих формулах через g обозначена сумма (5), т. е. имеем

$$g(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=1-2(x\xi+y\eta)+(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2). \qquad (17)$$

Если точки $M(x,\ y)$ и $P(\xi,\ \eta)$ различны, то функция (17) в силу формулы (5) положительна. Далее, из формул (4) и (5) следует, что функция (17) положительна, если точки M и P совпадают, но находятся внутри единичного круга.

Предположим, что точка $M(x,\ y)$ находится на единичной окружности, т. е. выполняется условие $x^2+y^2=1$. Тогда из формулы (17) находим

$$g(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

С другой стороны, при том же условии $x^2+y^2=1$ имеем равенства

$$1-x\xi-y\eta=x(x-\xi)+y(y-\eta),$$

$$x\eta-y\xi=(x-\xi)\eta-(y-\eta)\xi.$$

Учитывая эти равенства, получаем

$$\frac{|1 - x\xi - y\eta|\,(|x-\xi| + |y-\eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leqslant \frac{(|x-\xi| + |y-\eta|)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \leqslant 2, \tag{18}$$

$$\frac{|x\eta - y\xi|\,(|x-\xi| + |y-\eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leqslant \frac{(|x-\xi| + |y-\eta|)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \leqslant 2. \tag{19}$$

Эти неравенства справедливы, если точка $M(x, y)$ находится на единичной окружности, а точка $P(\xi, \eta)$ изменяется в замкнутом единичном круге.

§ 3. Ортогональные в единичном круге гармонические многочлены

Пусть в единичном круге

$$G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \tag{1}$$

определена весовая функция $h(x, y)$, которая, как обычно, неотрицательна, не эквивалентна нулю и суммируема по области (1), т. е. выполняются условия

$$0 < \iint\limits_G h(x, y)\,dx\,dy < \infty.$$

Применим процесс ортогонализации с весовой функцией $h(x, y)$ к системе однородных гармонических многочленов

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\}. \tag{2}$$

В результате получим систему гармонических многочленов

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\}, \tag{3}$$

которые ортонормированы по области (1) с весовой функцией $h(x, y)$. Ортонормированность системы (3) означает выполнение трех условий:

$$\iint\limits_G h(x, y)\,A_n(x, y)\,A_k(x, y)\,dx\,dy = \delta_{nk},$$

$$\iint\limits_G h(x, y)\,A_n(x, y)\,B_k(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\iint\limits_G h(x, y)\,B_n(x, y)\,B_k(x, y)\,dx\,dy = \delta_{nk}$$

Рассмотрим многочлены (3) в том случае, когда весовая функция отграничена от нуля и удовлетворяет условию Липшица, т. е. выполняются два условия:

$$h(x,\ y) \geqslant c_1 > 0, \tag{4}$$

$$|h(x,\ y) - h(\xi,\ \eta)| \leqslant M_1(|x-\xi| + |y-\eta|). \tag{5}$$

Оценим многочлены (3) при условиях (4) и (5). Разложим многочлен $B_n(x,\ y)$ по системе однородных гармонических многочленов (2). Аналогично формуле (1.12) получим

$$B_n(x, y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k u_k(x, y) + \beta_k v_k(x, y)]. \tag{6}$$

Коэффициенты этого разложения определяются по формулам

$$\alpha_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta)\, u_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\beta_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta)\, v_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Используя эти формулы, из равенства (6) находим

$$B_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta)\, K_n(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{7}$$

где, как обычно, введена частичная сумма билинейного ряда

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (k+1)(u_k\tilde{u}_k + v_k\tilde{v}_k), \tag{8}$$

причем для краткости использованы обозначения (2.6) и (2.7). Далее, из равенства (7) получаем формулу

$$B_n(x, y) = \frac{2(n+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta)(u_n\tilde{u}_n + v_n\tilde{v}_n)\, d\xi\, d\eta + \\ + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta)\, K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{9}$$

Сначала оценим первое слагаемое в правой части этого равенства. В силу условия (4) имеем

$$\iint\limits_G |B_n(\xi, \eta)|\,|\tilde{u}_k|\,d\xi\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \iint\limits_G \sqrt{h(\xi, \eta)}\,|B_n(\xi, \eta)|\,|\tilde{u}_k|\,d\xi\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{\iint\limits_G |u_k(\xi, \eta)|^2\,d\xi\,d\eta} = \sqrt{\frac{\pi}{2(k+1)c_1}}. \quad (10)$$

Следовательно, все первое слагаемое в правой части равенства (9) по абсолютному значению не превосходит величины

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi c_1}}\,(|u_n(x, y)| + |v_n(x, y)|). \quad (11)$$

Переходим к оценке второго слагаемого в правой части равенства (9). Прежде всего, заметим, что в силу ортогональности многочлена $B_n(x, y)$ с весовой функцией $h(x, y)$ имеет место равенство

$$\iint\limits_G h(\xi, \eta)\,B_n(\xi, \eta)\,K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

С помощью этого равенства находим

$$J_n^{(2)} = \frac{2}{\pi} \iint\limits_G B_n(\xi, \eta)\,K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{2}{\pi h(x, y)} \iint\limits_G [h(x, y) - h(\xi, \eta)]\,B_n(\xi, \eta)\,K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \quad (12)$$

Этот интеграл можно оценить с помощью формулы Кристоффеля — Дарбу (2.15). Но сумма $K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)$ меньше суммы (2.15) на 1/2. Если в интеграле (12) вместо K_{n-1} поставить 1/2, то полученный интеграл не превосходит $1/\sqrt{\pi c_1}$. После этого остается рассмотреть интеграл с подынтегральным выражением вида

$$\sigma_n = [h(x, y) - h(\xi, \eta)]\,B_n(\xi, \eta)\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(u_k\tilde{u}_k + v_k\tilde{v}_k)\right] = [h(x, y) - h(\xi, \eta)]\,B_n(\xi, \eta)\,\frac{1}{g} \times$$

$$\times\Bigg[(1-x\xi-y\eta)\sum_{k=0}^{n-1}(u_k\tilde{u}_k+v_k\tilde{v}_k)+$$

$$+(x\eta-y\xi)\sum_{k=1}^{n-1}(v_k\tilde{u}_k-u_k\tilde{v}_k)-$$

$$-n(1-x\xi-y\eta)(u_n\tilde{u}_n+v_n\tilde{v}_n)-$$

$$-n(x\eta-y\xi)(v_n\tilde{u}_n-u_n\tilde{v}_n)\Bigg]. \quad (13)$$

Предположим теперь, что точка $M(x, y)$ находится на единичной окружности. Тогда справедливы неравенства (2.18) и (2.19). Используя эти неравенства и условие (5), для величины (13) получаем оценку

$$|\sigma_n|\leqslant 2M_1|B_n(\xi,\eta)|\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}(|u_k\tilde{u}_k|+|v_k\tilde{v}_k|)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(|v_k\tilde{u}_k|+|u_k\tilde{v}_k|)+$$

$$+n(|u_n\tilde{u}_n|+|v_n\tilde{v}_n|+|v_n\tilde{u}_n|+|u_n\tilde{v}_n|)\Bigg]. \quad (14)$$

Интегрируем это неравенство почленно и применяем для полученных интегралов оценку (10). В результате имеем

$$\iint_G|\sigma_n|\,d\xi\,d\eta\leqslant M_1\sqrt{\frac{2\pi}{c_1}}\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}(|u_k|+|v_k|)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}(|v_k|+|u_k|)+\frac{2n}{\sqrt{n+1}}(|u_n|+|v_n|)\leqslant$$

$$\leqslant c_2\sqrt{n+1}. \quad (15)$$

Сопоставляя все полученные оценки, можем сформулировать основной результат настоящего параграфа.

Теорема 1. *Если весовая функция удовлетворяет условиям* (4) *и* (5), *то для ортонормированных многочленов* (3) *в замкнутом единичном круге выполняются неравенства*

$$|A_n(x, y)|\leqslant c_3\sqrt{n+1},\qquad x^2+y^2\leqslant 1, \quad (16)$$

$$|B_n(x, y)|\leqslant c_3\sqrt{n+1},\qquad x^2+y^2\leqslant 1. \quad (17)$$

В самом деле, первое слагаемое в формуле (9) не превосходит величины (11), а второе оценивается с помощью неравенств (14) и (15). Этим неравенство (17) доказано. Аналогично доказывается неравенство (16). Заметим, что обе оценки (16) и (17) неулучшаемы в смысле порядка, ибо они не могут быть усилены даже в случае ортонормированных однородных гармонических многочленов.

А внутри единичного круга многочлены (3) ограничены равномерно. В самом деле, из формулы (6), учитывая оценки интегралов (10) и формулы (1.4) и (1.5) при $x^2 + y^2 \leqslant \rho^2$, находим

$$|B_n(x, y)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi c_1}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}\, \rho^k \right).$$

Несколько более точная оценка внутри круга получается, если в формулах (13) и (14) вместо формулы (2.15) использовать вторую формулу Кристоффеля — Дарбу (2.16), но в этом случае доказательство значительно усложнится.

§ 4. Ортогональные по области гармонические многочлены в общем случае

Систему однородных гармонических многочленов расположим в виде последовательности

$$1,\ u_1(x, y),\ v_1(x, y),\ \ldots,\ u_n(x, y),\ v_n(x, y),\ \ldots \tag{1}$$

Для упрощения дальнейших формулировок переобозначим эти многочлены и представим в виде

$$\varphi_0,\ \varphi_1(x, y),\ \varphi_2(x, y),\ \ldots,\ \varphi_n(x, y),\ \ldots \tag{2}$$

Пусть конечная односвязная область G ограничена спрямляемой жордановой кривой Γ. Предположим, что в области G определена весовая функция $h(x, y)$, которая, как обычно, неотрицательна, не эквивалентна нулю и суммируема по этой области. Применим процесс ортогонализации с весовой функцией $h(x, y)$ к последовательности (2). В результате получим последовательность гармонических многочленов

$$\Phi_0,\ \Phi_1(x, y),\ \Phi_2(x, y),\ \ldots,\ \Phi_n(x, y),\ \ldots, \tag{3}$$

которые ортогональны с весом $h(x, y)$ по области G, т. е. удовлетворяют условию

$$\iint_G h(x, y)\Phi_n(x, y)\Phi_m(x, y)\,dx\,dy = \delta_{nm}. \tag{4}$$

Систему (3), как и систему (1), можно представить в виде

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\}. \tag{5}$$

Но тогда условия ортогональности для системы (5) запишутся в виде трех равенств.

Предположим сначала, что весовая функция отграничена от нуля, т. е. выполняется условие

$$h(x, y) \geqslant h_0 > 0, \qquad M(x, y) \in G. \tag{6}$$

Обозначим через ρ расстояние точки $M \in G$ до контура Γ, и пусть ω_ρ — круг радиуса ρ с центром в точке M. Тогда в силу неравенства (1.35) при условии (6) находим

$$\pi\rho^2 |\Phi_n(x, y)|^2 \leqslant \iint_{\omega_\rho} |\Phi_n(\xi, \eta)|^2\,d\xi\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h_0}\iint_G h(\xi, \eta)|\Phi_n(\xi, \eta)|^2\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{h_0}. \tag{7}$$

А если $\rho(F, \Gamma)$ есть расстояние от замкнутого множества $F \subset G$ до контура Γ, то из неравенства (7) получается равномерная оценка

$$|\Phi_n(x, y)| \leqslant 1/(\sqrt{\pi h_0}\,\rho(F, \Gamma)), \qquad M(x, y) \in F.$$

Таким образом, если выполняется условие (6), то многочлены (3) ограничены равномерно внутри области G.

Далее, пусть в области G определена гармоническая функция $f(x, y)$, суммируемая с квадратом по области G с весовой функцией $h(x, y)$, т. е.

$$\|f\|_G^2 = \iint_G h(x, y) f^2(x, y)\,dx\,dy < \infty. \tag{8}$$

Для такой функции можно определить коэффициенты

Фурье по системе многочленов (5) с помощью формул

$$a_k = \iint_G h(x, y) f(x, y) A_k(x, y)\, dx\, dy,$$

$$b_k = \iint_G h(x, y) f(x, y) B_k(x, y)\, dx\, dy.$$

В результате функции $f(x, y)$ ставится в соответствие ряд Фурье по ортогональным гармоническим многочленам

$$a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k A_k(x, y) + b_k B_k(x, y)]. \tag{9}$$

С другой стороны, обозначим через $\{K_n(z)\}$ многочлены по комплексному переменному, ортогональные по области G с той же самой весовой функцией $h(z) = h(x, y)$. Условие ортогональности в комплексной области имеет вид

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)}\, dx\, dy = \delta_{nm}. \tag{10}$$

Основные свойства этих многочленов изложены в монографии [II.23].

Рассмотрим некоторые определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Будем говорить, что спрямляемая жорданова кривая Г принадлежит классу $C(p, \alpha)$, где p — натуральное число и $0<\alpha<1$, если в ее уравнении $z = \lambda(s)$, где s — длина дуги, периодическая функция $\lambda(s)$ непрерывно дифференцируема p раз, причем $\lambda^{(p)}(s) \in \operatorname{Lip} \alpha$. Далее, обозначим через $w = \varphi(z)$ функцию, которая отображает конформно и однолистно область G на круг $|w| < 1$ при условиях $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$, где z_0 — некоторая фиксированная точка области G, и пусть $z = \psi(w)$ — обратная функция.

Поскольку в условиях ортогональности (4) и (10) весовая функция и область ортогональности одни и те же, то и асимптотические свойства ортогональных гармонических многочленов (3) и многочленов $\{K_n(z)\}$ оказываются аналогичными. Далее, так как свойства многочленов $\{K_n(z)\}$ и рядов Фурье по ним подробно изложены в монографии [II.23], то здесь естественно ограничиться только некоторыми формулировками свойств многочленов (3), аналогичными соответствующим известным результатам из указанной монографии.

1. Если $\Gamma \in C(p, \alpha)$, а весовая функция удовлетворяет условию (6), то существует такая постоянная c_1, что для многочленов системы (3) выполняется неравенство

$$|\Phi_n(x, y)| \leqslant c_1(n+1), \qquad M(x, y) \in \overline{G}.$$

2. Предположим, что весовая функция вместо условия (6) удовлетворяет условию

$$h(z) \geqslant c_2[1 - |\varphi(z)|]^p, \qquad z \in G, \quad p > -1. \tag{11}$$

Тогда, если $\Gamma \in C(1, \alpha)$, то имеет место оценка

$$|\Phi_n(x, y)| \leqslant c_3(n+1)^{1+\frac{p}{2}}, \quad M(x, y) \in \overline{G}.$$

3. Если $\Gamma \in C(1, \alpha)$ и выполняется условие (11), то справедливо неравенство

$$\int_\Gamma \Phi_n^2(x, y)\, ds \leqslant c_4(n+1)^{1+p}.$$

4. Если весовая функция удовлетворяет условию (6), то ряд Фурье (9) сходится к функции $f(x, y)$ равномерно внутри области G.

5. Если при условии (11) ряд Фурье (9) сходится к функции $f(x, y)$ в метрике пространства $H_2(h, G)$, то он сходится к этой функции и равномерно внутри области G.

6. При условии (11) для всякой точки $M(x, y) \in G$ выполняется неравенство

$$A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^2(x, y) + B_k^2(x, y)\right] \leqslant \frac{c_5}{[\rho(M, \Gamma)]^{2+p}},$$

где $\rho(M, \Gamma)$ есть расстояние от точки $M(x, y)$ до контура Γ.

7. Если $\Gamma \in C(1, \alpha)$ и выполняется условие (11), то имеет место равномерная в замкнутой области $\overline{G}$ оценка

$$A_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \left[A_k^2(x, y) + B_k^2(x, y)\right] \leqslant c_6(n+1)^{2+p}.$$

8. Для функции Лебега ряда (9)

$$L_n(x, y) = \iint_G h(\xi, \eta) \Big| A_0^2 + \sum_{k=1}^{n} [A_k(x, y) A_k(\xi, \eta) + B_k(x, y) B_k(\xi, \eta)] \Big|\, d\xi\, d\eta$$

Лемма 2. *Для любых двух гармонических многочленов $\alpha_n(x, y)$ и $\beta_m(x, y)$ существуют такие сопряженные им гармонические многочлены $\widetilde{\alpha}_n(x, y)$ и $\widetilde{\beta}_m(x, y)$, что имеет место равенство*

$$\iint_G \alpha_n(z)\widetilde{\beta}_m(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_G \widetilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy. \quad (10)$$

Доказательство. Аналогично формулам (6) и (7) вводим разложения

$$\beta_m[\psi(w)] = \beta(r, \theta) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widetilde{a}_k \cos k\theta + \widetilde{b}_k \sin k\theta\right) r^k, \quad (11)$$

$$\widetilde{\beta}_m[\psi(w)] = \widetilde{\beta}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(-\widetilde{b}_k \cos k\theta + \widetilde{a}_k \sin k\theta)\, r^k. \quad (12)$$

Используя разложения (6) и (12), получаем

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta)\widetilde{\beta}(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2(k+1)}(-a_k\widetilde{b}_k + b_k\widetilde{a}_k). \quad (13)$$

Аналогично с помощью (7) и (11) находим

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \widetilde{\alpha}(r, \theta)\beta(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2(k+1)}(-\widetilde{a}_k b_k + a_k\widetilde{b}_k). \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), приходим к равенству (10). Лемма доказана.

Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что сопряженный гармонический многочлен $\widetilde{Q}_n(x, y)$ к многочлену $Q_n(x, y)$ выбирается таким образом, что выполняются условия лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Если гармонические многочлены* (2) *ортонормированы по области G с весовой функцией* (4), *то имеют место равенства*

$$A_n(z) = -\widetilde{B}_n(z), \quad B_n(z) = \widetilde{A}_n(z). \quad (15)$$

Доказательство. В дальнейших рассуждениях, как обычно, для краткости будем применять обозначение

$$(A_n, B_m) = \iint_G h(x, y) A_n(x, y) B_m(x, y)\, dx\, dy. \tag{16}$$

Если $n < m$, то в силу ортогональности многочленов системы (2) имеем равенства

$$(A_m, \tilde{B}_n) = (B_m, \tilde{A}_n) = 0. \tag{17}$$

Пусть теперь $m < n$. Тогда, используя равенство (10) и учитывая выбор сопряженного многочлена, получим

$$(A_m, \tilde{B}_n) = -(\tilde{A}_m, B_n) = 0, \quad (B_m, \tilde{A}_n) = -(\tilde{B}_m, A_n) = 0. \tag{18}$$

Заметим, что в условиях (17) и (18) исключен случай $n = m$.

С другой стороны, при любых n и m из равенств

$$(A_m, \tilde{A}_n) = -(A_n, \tilde{A}_m), \quad (B_m, \tilde{B}_n) = -(\tilde{B}_n, \tilde{B}_m),$$

учитывая ортогональность многочленов (2), находим

$$(A_m, \tilde{A}_n) = (B_m, \tilde{B}_n) = 0, \tag{19}$$

причем здесь случай $n = m$ не исключается.

А теперь разложим сопряженные многочлены по системе (2). В результате получим

$$\tilde{A}_n(z) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k A_k(z) + b_k B_k(z)], \tag{20}$$

$$\tilde{B}_n(z) = \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k A_k(z) + \beta_k B_k(z)]. \tag{21}$$

Учитывая условия ортогональности (18) и (19), найдем, что в формулах (20) и (21) отличны от нуля только по одному коэффициенту, ибо в условия (18) не входит случай $n = m$. Следовательно, разложения (20) и (21) приводятся к виду

$$\tilde{A}_n(z) = b_n B_n(z), \quad \tilde{B}_n(z) = \alpha_n A_n(z). \tag{22}$$

Коэффициенты b_n и α_n в этих равенствах можно определить с помощью формулы для сопряженного гармонического многочлена. Для произвольного многочлена с комплексными коэффициентами имеем последовательно

$$R_n(z) = c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + id_k) z^k =$$

$$= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + id_k)[u_k(x, y) + iv_k(x, y)] =$$

$$= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^{n} \{[c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] +$$

$$+ i[d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)]\}. \quad (23)$$

Поскольку гармонические многочлены $A_n(z)$ и $\widetilde{A}_n(z)$ сопряжены, то в силу формулы (23) имеем равенства

$$A_n(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)], \quad (24)$$

$$\widetilde{A}_n(z) = d_0 + \sum_{k=1}^{n} [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)]. \quad (25)$$

Аналогично имеем еще две формулы:

$$B_n(z) = \widetilde{c}_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\widetilde{c}_k u_k(x, y) - \widetilde{d}_k v_k(x, y)\right], \quad (26)$$

$$\widetilde{B}_n(z) = \widetilde{d}_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\widetilde{d}_k u_k(x, y) + \widetilde{c}_k v_k(x, y)\right]. \quad (27)$$

Сравнивая старшие коэффициенты в этих четырех разложениях, из равенств (22) находим два условия

$$c_n = -b_n \widetilde{d}_n, \quad \widetilde{d}_n = \alpha_n c_n, \quad (28)$$

из которых получаем $b_n \alpha_n = -1$. Поэтому равенства (22) можно представить в виде

$$\widetilde{A}_n(z) = b_n B_n(z), \quad \widetilde{B}_n(z) = -\frac{1}{b_n} A_n(z). \quad (29)$$

Далее, в силу неравенства (5) и ортонормированности многочленов (2) имеем

$$\iint_G |\widetilde{A}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy \leqslant 1,$$

$$\iint_G |\widetilde{B}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy \leqslant 1.$$

Подставляя в эти неравенства правые части равенств (29), находим $b_n^2 \leq 1$ и $1 \leq b_n^2$, откуда следует $b_n^2 = 1$. Наконец, для определения знака числа b_n обратимся к равенствам (25) и (26). Так как в формуле (24) $d_n = 0$ и старший коэффициент c_n положителен, а в формуле (26) коэффициент при $v_n(x, y)$ должен быть положительным, то $\tilde{d}_n < 0$. Поэтому из равенств (28) находим $b_n > 0$, и, таким образом, $b_n = 1$. Подставляя это значение в формулы (29), получим равенства (15). Лемма доказана.

Теорема 2. *Если весовая функция определяется по формуле* (4), *то равенства* (3) *выполняются и имеют вид*

$$A_n(x, y) = \sqrt{2}P_n(x, y), \quad B_n(x, y) = \sqrt{2}Q_n(x, y). \tag{30}$$

Доказательство. В силу формулы (1) равенства (30) эквивалентны формуле

$$K_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_n(z) + iB_n(z)] \tag{31}$$

Интеграл (4.10) для этих многочленов имеет вид

$$\iint_G h(z)\, K_n(z)\, \overline{K_m(z)}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_G h(z)\,[A_n(z) + iB_n(z)]\,[A_m(z) - iB_m(z)]\, dx\, dy. \tag{32}$$

В силу определения многочленов (2) правая часть равенства (32) равна 0, если $n \neq m$, и 1, если $n = m$. Таким образом, остается доказать, что правая часть равенства (31) есть многочлен по переменному $z = x + iy$ порядка n с положительным старшим коэффициентом. Тот факт, что функция (31) есть алгебраический многочлен по z, следует из равенства $B_n(z) = \tilde{A}_n(z)$, доказанного в лемме 3. Далее, в силу этого равенства, учитывая формулу (24), аналогично равенству (23) находим

$$A_n(z) + iB_n(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] +$$

$$+ id_0 + i\sum_{k=1}^{n} [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (c_k + id_k) z^k. \tag{33}$$

Поскольку в формуле (24) для многочлена $A_n(z)$ выполняется условие $d_n=0$, то старший коэффициент многочлена (33) равен $c_n>0$. Теорема доказана.

Формула (31) позволяет переносить некоторые свойства многочленов $\{K_n(z)\}$ на многочлены $\{A_n(z)\}$ и $\{B_n(z)\}$. Приведем только самые характерные формулировки.

1. Если $\Gamma\in C(p+1,\ \alpha)$, то для суперортогональных гармонических многочленов, соответствующих весовой функции (4), равномерно внутри области G выполняются неравенства

$$|A_n(z)|\leqslant\frac{c_1(F)}{n^{p+\alpha}},\quad |B_n(z)|\leqslant\frac{c_1(F)}{n^{p+\alpha}},\qquad z\in F\subset G,\qquad (34)$$

где постоянная $c_1(F)$ содержит в знаменателе расстояние $\rho(F,\ \Gamma)$ от замкнутого множества $F\subset G$ до контура Γ.

2. Если контур Γ есть правильная аналитическая кривая, то существует такая постоянная $q<1$, что выполняются неравенства

$$|A_n(z)|\leqslant c_2(F)q^n,\quad |B_n(z)|\leqslant c_2(F)q^n,\quad z\in F\subset G,\quad (35)$$

где постоянная $c_2(F)$ содержит в знаменателе расстояние $\rho(F,\ \Gamma)$, причем $q\to1$ при $\rho(F,\ \Gamma)\to0$.

3. Если $\Gamma\in C(2,\ \alpha)$, то в замкнутой области $\bar G$ справедливы равномерные оценки

$$|A_n(z)|\leqslant c_3\sqrt{n+1},\quad |B_n(z)|\leqslant c_3\sqrt{n+1},\qquad z\in\bar G.$$

4. Если $\Gamma\in C(p+1,\ \alpha)$, то равномерно внутри области G выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[A_k^2(z)+B_k^2(z)\right]\leqslant\frac{c_4(F)}{n^{2p+2\alpha}},\qquad z\in F\subset G,\qquad (36)$$

где постоянная $c_4(F)$ имеет такое же строение, как постоянная $c_1(F)$ в оценках (34). А в случае правильной аналитической кривой Γ левая часть неравенства (36) не превосходит величины $c_5(F)q^n$, где постоянная $c_5(F)$ аналогична постоянной $c_2(F)$ в неравенствах (35).

5. Обозначим через $R_n(z,\ f)$ остаток ряда Фурье по суперортогональным гармоническим многочленам гармонической в области G функции, удовлетворяющей условию (4.8), и пусть $E_n^{(2)}(f,\ G)$ есть наилучшее приближение этой функции гармоническими многочленами по-

рядка не выше n в метрике пространства $H_2(G)$. Если $\Gamma \in C(p+1,\ \alpha)$, то внутри области G выполняется неравенство

$$|R_n(z, f)| \leqslant \frac{c_n(F)}{n^{p+\alpha}} E_n^{(2)}(f, G), \qquad z \in F \subset G.$$

6. С рядов Фурье по ортогональным многочленам $\{K_n(z)\}$ на ряды Фурье по суперортогональным гармоническим многочленам легко переносятся различные оценки функции Лебега и соответствующие оценки скорости сходимости этих рядов в замкнутой области $\overline{G}$.

7. В монографии [II.23] для многочленов $\{K_n(z)\}$ получены различные асимптотические формулы в дополнении D замкнутой области $\overline{G}$. Из этих формул нетрудно получить в той же области D асимптотические представления для суперортогональных гармонических многочленов (2).

8. Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, которая отображает конформно и однолистно область D на область $|w| > 1$ при условиях $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) > 0$, и пусть G_R есть внутренность контура Γ_R, который при отображении $w = \Phi(z)$ переходит в окружность $|w| = R > 1$. Если функция $f(x, y)$ гармоническая в канонической области G_R, то для остатка $R_n(z, f)$ нетрудно получить различные оценки скорости сходимости к нулю в замкнутой области $\overline{G}$, аналогичные соответствующим известным результатам о рядах Тейлора и рядах Фабера [II.25]. Эти оценки зависят от граничных свойств гармонической функции $f(x, y)$ во внутренней окрестности контура Γ_R.

Глава VII

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО КОНТУРУ МНОГОЧЛЕНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные определения и простейшие свойства

Пусть спрямляемая жорданова кривая Г определяется параметрически уравнением

$$z = x + iy = \lambda(s) = x(s) + iy(s), \tag{1}$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки. Если кривая (1) не замкнута, то такой точкой является начало кривой. А если кривая Г замкнута, то функция $\lambda(s)$ имеет период l, равный длине всей кривой.

Функция двух переменных

$$h(x, y) = h(z) = h[x(s), y(s)] = h(s) \tag{2}$$

называется весовой функцией на кривой Г, если она неотрицательна, не эквивалентна нулю и суммируема на Г, т. е.

$$0 < \int_\Gamma h(x, y)\, ds = \int_0^l h[x(s), y(s)]\, ds < \infty.$$

Будем считать, что одночлены по двум переменным упорядочены лексикографически, т. е. так же, как это изложено в § 1 гл. 1.

При рассмотрении плоской кривой (1) следует различать два случая. Если кривая Г алгебраическая, то система всех одночленов (1.1.1) линейно зависима на этой кривой, т. е. некоторые из этих одночленов представляются линейно через другие. Этот случай рассматривается в следующем параграфе. А если кривая (1) трансцендентная, то система одночленов (1.1.1) линейно независима. В настоящем параграфе будем считать, что кривая Г трансцендентная.

Два многочлена $P_{nk}(x, y)$ и $P_{ms}(x, y)$ называются *ортогональными на кривой* Г с весовой функцией $h(x, y)$, если выполняется условие

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\, P_{nk}(x, y)\, P_{ms}(x, y)\, ds = 0.$$

Пусть дана система алгебраических многочленов

$$\begin{array}{l} P_{00}(x, y), \\ P_{10}(x, y),\ P_{11}(x, y), \\ P_{20}(x, y),\ P_{21}(x, y),\ P_{22}(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n0}(x, y),\ P_{n1}(x, y),\ \dots,\ P_{nn}(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{3}$$

Эта система называется *ортонормированной на кривой* Γ *с весовой функцией* $h(x, y)$, если выполняются условия:

1. Главный коэффициент c_{nk} каждого многочлена $P_{nk}(x, y)$ положителен.

2. Многочлены (3) удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\, P_{nk}(x, y)\, P_{mp}(x, y)\, ds = \delta_{nm}\delta_{kp}. \tag{4}$$

Многие свойства многочленов, ортогональных по области переносятся иногда с небольшими изменениями на многочлены (3), ортогональные по контуру, или, как иногда говорят, ортогональные по длине дуги. Поскольку и формулировки, и доказательства свойств этих двух систем многочленов аналогичны, а часто просто одинаковы, то здесь мы ограничимся только формулировками свойств многочленов (3).

1. Если функция $h(x, y)$ является весовой функцией на трансцендентной кривой Γ, то для всякого алгебраического многочлена $Q_{nk}(x, y)$, неотрицательного на Γ, выполняется условие

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\, Q_{nk}(x, y)\, ds > 0, \qquad n \geqslant 1.$$

2. Для всякой весовой функции $h(x, y)$, определенной на контуре Γ, существует единственная система многочленов (3), удовлетворяющая условию ортонормированности (4).

3. Первый критерий ортогональности в этом случае формулируется следующим образом. Пусть дан некоторый многочлен $P_{nk}(x, y)$ с главным коэффициентом $c_{nk} > 0$.

Для того чтобы этот многочлен был ортогональным многочленом порядка (n, k) с весовой функцией $h(x, y)$ по контуру Г, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $Q_{mp}(x, y)$, меньшего порядка (m, p), выполнялось условие

$$\int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) Q_{mp}(x, y)\, ds = 0.$$

4. Если ввести многочлены с единичными главными коэффициентами, то для всякого многочлена $\bar{Q}_{nk}(x, y)$ и ортогонального многочлена $\bar{P}_{nk}(x, y)$ того же порядка (n, k) выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma} h(x, y) [\bar{Q}_{nk}(x, y)]^2\, ds \geqslant \int_{\Gamma} h(x, y) [\bar{P}_{nk}(x, y)]^2\, ds = \frac{1}{c_{nk}^2}.$$

Как и во всех других случаях ортогональности это экстремальное свойство ортогонального многочлена часто называется вторым критерием ортогональности.

5. В случае ортогональности по контуру можно ввести монические ортогональные многочлены аналогично тому, как это сделано в § 4 гл. I для многочленов, ортогональных по области.

6. Степенные моменты весовой функции $h(x, y)$ на контуре Г определяются по формуле

$$h_{nk} = \int_{\Gamma} h(x, y) x^{n-k} y^k\, ds.$$

С помощью этих моментов многочлены (3) представляются через некоторые определители аналогично формулам из § 3 гл. I.

7. Для многочленов, ортогональных по контуру, имеют место рекуррентные формулы и аналоги формул Кристоффеля — Дарбу, но эти формулы, как и в случае ортогональности по области громоздки и малоэффективны.

8. Как и в случае ортогональности по области весовая функция $h(x, y)$ и контур Г определяют последовательность пространств ортогональных многочленов

$$W_0, W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$$

Эти пространства ортогональны между собой, т. е.

$$(P_n;\ P_m) = \int_{\Gamma} h(x, y) P_n(x, y) P_m(x, y)\, ds = 0,$$

если $P_n \in W_n$ и $P_m \in W_m$, но $n \neq m$.

9. Для монических ортогональных по контуру многочленов существуют нормальные биортогональные системы.

10. Рассмотрим еще одно экстремальное свойство ортогональных по контуру многочленов. Обозначим через $W_{nk}(\Gamma)$ множество всех многочленов порядка не выше (n, k), для которых выполняется условие

$$\int_{\Gamma} h(x, y)\, Q_{nk}^2(x, y)\, ds \leqslant 1. \tag{5}$$

Пусть фиксирована точка $M_0(x_0, y_0)$. Будем искать точную верхнюю границу

$$A = \sup Q_{nk}^2(x_0, y_0) \tag{6}$$

на множестве $W_{nk}(\Gamma)$ многочленов, удовлетворяющих условию (5). Как и в случае ортогональности по одному переменному нетрудно доказать, что величина (6) определяется по формуле

$$A = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} P_{ms}^2(x_0, y_0) + \sum_{s=0}^{k} P_{ns}^2(x_0, y_0),$$

причем эта верхняя грань достигается только для многочлена

$$Q_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} P_{ms}(x_0, y_0)\, P_{ms}(x, y) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{k} P_{ns}(x_0, y_0)\, P_{ns}(x, y) \right].$$

Аналогичным экстремальным свойством обладают и многочлены, ортогональные по области.

11. Пусть на контуре Γ определена функция $f(x, y)$, для которой выполняется условие

$$\|f\|_h^2 = \int_{\Gamma} h(x, y)\, f^2(x, y)\, ds < \infty.$$

Множество таких функций будем обозначать через $L_2(h, \Gamma)$. Коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по системе многочленов (3) определяются по формуле

$$a_{nk} = \int_{\Gamma} h(x, y)\, f(x, y)\, P_{nk}(x, y)\, ds.$$

В результате функции $f(x, y)$ ставится в соответствие ряд Фурье по ортогональным многочленам

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} a_{ns} P_{ns}(x, y). \qquad (7)$$

Частичные суммы этого ряда имеют вид

$$S_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k} a_{ns} P_{ns}(x, y). \qquad (8)$$

Отметим простейшие свойства рядов (7) и их частичных сумм (8). Прежде всего, частичные суммы (8) наилучшим образом приближают функцию $f(x, y)$ в метрике пространства $L_2(h, \Gamma)$, т. е. при любом многочлене $Q_{nk}(x, y)$ порядка (n, k) выполняется неравенство

$$\|f - S_{nk}\|_\Gamma \leqslant \|f - Q_{nk}\|_\Gamma.$$

Далее, для рядов (7) имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} a_{ns}^2 \leqslant \|f\|_\Gamma^2,$$

из которого следует условие

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} a_{ns}^2 \right) = 0.$$

Аналогичными свойствами обладают и ряды Фурье по общим ортогональным многочленам, которые получаются из многочленов (3) с помощью ортогональных матриц. При этом, как и в случае ортогональности по площади, частичные суммы (8) порядка (n, n) не зависят от выбора системы общих ортогональных многочленов, соответствующих данной весовой функции $h(x, y)$ и контуру Γ.

§ 2. Ортогональные на алгебраической кривой многочлены по двум переменным

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда контур Γ является алгебраической кривой. Предположим, что уравнение этой кривой имеет вид

$$x^{N-p} y^p = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{p-1} c_{Ns} x^{N-s} y^s. \qquad (1)$$

Будем считать, что уравнение (1) нельзя сократить ни на x, ни на y. Это имеет место, если $c_{00} \neq 0$ либо $c_{00} = 0$, но оба коэффициента c_{10} и c_{01} отличны от нуля. В этом случае будем считать, что кривая (1) имеет порядок (N, p). Разумеется, в качестве контура ортогональности Γ может быть взята не вся кривая, определяемая уравнением (1), а только ее часть.

Вводя обозначение для правой части уравнения (1), представим это уравнение в виде

$$x^{N-p}y^p = Q(x, y). \tag{2}$$

Поскольку на кривой Γ выполняется равенство (2), то на этой кривой система одночленов $\{x^{n-k}y^k\}$ не является линейно независимой. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Как и в первой главе, представим систему основных одночленов в виде таблицы

$$\begin{array}{l} 1, \\ x,\ y, \\ x^2,\ xy,\ y^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^N,\ x^{N-1}y,\ \ldots,\ x^{N-p}y^p,\ \ldots,\ xy^{N-1},\ y^N, \\ x^{N+1},\ x^Ny,\ \ldots,\ x^{N+1-p}y^p,\ x^{N-p}y^{p+1},\ \ldots,\ xy^N,\ y^{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3}$$

Поскольку кривая Γ определяется уравнением (2), то на этой кривой одночлены всех первых N пачек таблицы (3), включая пачку с номером $N-1$, линейно независимы между собой. А в силу равенства (2) одночлен $x^{N-p}y^p$ на кривой Γ представляется линейно через предшествующие ему в таблице (3) одночлены.

Обозначим через $\Gamma(m)$ число линейно независимых на кривой Γ одночленов порядка m во множестве W_m всех одночленов порядка не выше m. Из равенства (2) следует, что из $N+1$ одночленов порядка N линейно независимы N одночленов, т. е. имеем $\Gamma(N) = N$. Вычислим теперь число $\Gamma(N+1)$. Умножая равенство (2) сначала на x, а затем на y, получим два равенства:

$$x^{N+1-p}y^p = xQ(x, y), \quad x^{N-p}y^{p+1} = yQ(x, y). \tag{4}$$

Из этих равенств следует, что в пачке с номером $N+1$ уже два одночлена представляются на кривой Γ линейно через предшествующие им одночлены. Таким образом, имеем $\Gamma(N+1) = N$. Далее, из равенств (4) получаются три равенства:

$$x^{N+2-p}y^p = x^2Q(x, y), \quad x^{N+1-p}y^{p+1} = xyQ(x, y),$$
$$x^{N-p}y^{p+2} = y^2Q(x, y),$$

которые выполняются на кривой Г. Следовательно, в пачке с номером $N+2$ уже три одночлена зависят линейно от предыдущих. Поэтому находим $\Gamma(N+2) = N$. Продолжая этот процесс умножения полученных равенств на x и на y, придем к равенству

$$\Gamma(m) = N, \quad m \geqslant N. \tag{5}$$

Таким образом, если кривая Г определяется алгебраическим уравнением (1) степени N, то в каждой пачке одночленов (3), начиная с пачки с номером N, будет только N линейно независимых на кривой Г одночленов. При этом, поскольку из пачки с номером m опускаются линейно зависимые одночлены

$$x^{m-p}y^p, x^{m-p-1}y^{p+1}, \ldots, x^{N-p}y^{m-N+p}, \tag{6}$$

то в этой пачке остаются одночлены

$$\begin{gathered} x^m, x^{m-1}y, \ldots, x^{m-p+1}y^{p-1}, \\ x^{N-p-1}y^{m-N+p+1}, \ldots, xy^{m-1}, y^m. \end{gathered} \tag{7}$$

В результате (3) приводится к виду

$$\begin{array}{l} 1, \\ x, y, \\ x^2, xy, y^2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^{N-1}, x^{N-2}y, \ldots, xy^{N-2}, y^{N-1}, \\ x^N, \ldots, x^{N-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+1}, \ldots, y^N, \\ x^{N+1}, \ldots, x^{N+2-p}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+2}, \ldots, y^{N+1}, \\ \cdot \\ x^m, \ldots, x^{m-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{m-N+p+1}, \ldots, y^m, \\ \cdot \end{array} \tag{8}$$

Полученная система одночленов линейно независима на кривой Г. В соответствии с формулой (5) все пачки в этой системе, начиная с пачки с номером N, содержат только N одночленов.

Далее, пусть дан алгебраический многочлен

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{k} c_{ns} x^{n-s} y^s. \tag{9}$$

Если этот многочлен рассматривать только на кривой Г, определенной уравнением (1), то, не нарушая множества значений этого многочлена и некоторых его свойств, можно в суммах (9) опустить одночлены вида (6), т. е. можно положить

$$c_{mp} = c_{m(p+1)} = \ldots = c_{m(m-N+p)} = 0. \tag{10}$$

Предположим теперь, что на кривой Г определена весовая функция $h(x, y)$. Применим процесс ортогонализации к системе одночленов (8). В результате получим систему ортогональных многочленов $\{P_{nk}(x, y)\}$, которые можно расположить аналогично таблице (8). В этой системе многочленов индекс k принимает значения с пропусками. При этом для каждого многочлена выполняются условия (10).

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть сначала кривая Г определяется формулой

$$y = Ax + B, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{11}$$

В этом случае $N = 1$, и пачка с номером 1 в таблице (3) содержит только один линейно независимый одночлен x. Следовательно, таблица (8) в этом случае будет состоять только из одного первого столбца, т. е. на линии (11) линейно независимой будет система степеней $\{x^n\}$. При этом весовая функция в силу формулы (11) превращается в функцию одной переменной, т. е. имеем

$$h(x, y) = h(x, Ax + B) = h_0(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

А ортогональные многочлены также будут зависеть только от переменного x, причем линией ортогональности будет сегмент $[a, b]$.

Пусть теперь кривая Г есть единичная окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{12}$$

Тогда в таблице (3) пачка с номером 2 будет содержать только два линейно независимых одночлена x^2 и xy. Поскольку в этом случае $N = 2$, то все пачки таблицы (8) будут содержать по два одночлена вида x^n и $x^{n-1}y$. Следовательно, всю таблицу (8) можно представить в виде последовательности

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ x^{n-1}y,\ \ldots \tag{13}$$

Ортогонализируя эту последовательность с единичным весом $h(x, y) = 1$ по окружности (12), получим ортонормированную систему многочленов

$$\{A_0,\ A_n(x, y),\ B_n(x, y)\}. \tag{14}$$

Здесь через $\{A_n(x, y)\}$ обозначены ортонормированные многочлены с нечетными номерами, т. е. главный член многочлена $A_n(x, y)$ есть $\alpha_n x^n$, а главный член многочлена $B_n(x, y)$ имеет вид $\beta_n x^{n-1}y$. Докажем, что при условиях

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi \tag{15}$$

для многочленов (14) справедливы формулы

$$A_n(\cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}}, \quad B_n(\cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}}. \tag{16}$$

В самом деле, поскольку на окружности (12) $ds = d\varphi$, то из условия ортогональности

$$\int_0^{2\pi} A_1(x, y)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (\alpha_0 + \alpha_1 x)\, d\varphi = 2\pi\alpha_0 = 0$$

находим $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Аналогично имеем

$$\int_0^{2\pi} B_1(x, y)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 x + \beta_1 y)\, d\varphi = 2\pi a_0 = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} B_1(x, y)\, A_1(x, y)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_1 x + \beta_1 y) \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\pi}}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi) \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\pi}}\, d\varphi = a_1 \sqrt{\pi} = 0.$$

Таким образом, формулы (16) при $n = 1$ доказаны непосредственным вычислением. Далее применяем индукцию. Предположим, что формулы (16) справедливы для всех номеров от 1 до n. Тогда при условиях (15) получаем

$$A_{n+1}(x, y) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k A_k(x, y) + b_k B_k(x, y)] + \\ + a_{n+1} x^{n+1} = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + \\ + a_{n+1} \cos^{n+1}\varphi. \quad (17)$$

Условие ортогональности этого многочлена имеет вид

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1}(x, y) \cos k\varphi \, d\varphi = \\ = a_k \sqrt{\pi} + a_{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1}\varphi \cos k\varphi \, d\varphi = 0. \quad (18)$$

В силу известного равенства

$$\cos^m \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \cos m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(m)} \cos k\varphi \quad (19)$$

из условия (18) находим

$$a_k = -\sqrt{\pi} a_{n+1} c_k^{(n+1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Кроме того, имеем еще одно условие ортогональности

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1}(x, y) \sin k\varphi \, d\varphi = \\ = b_k \sqrt{\pi} + a_{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1}\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = 0.$$

Следовательно, формула (17) приводится к виду

$$A_{n+1}(x, y) = -a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n+1)} \cos k\varphi + a_{n+1} \cos^{n+1}\varphi = \\ = \frac{a_{n+1}}{2^n} \cos(n+1)\varphi.$$

Используя условие нормировки, получим первую из формул (16) при $n+1$.

Далее, в силу индуктивного предположения имеем

$$B_{n+1}(x, y) = \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + \\ + \alpha_{n+1} \frac{\cos(n+1)\varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_{n+1} \cos^n \varphi \sin \varphi. \quad (20)$$

С другой стороны, из формулы (19) дифференцированием получается равенство

$$\cos^{m-1}\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \sin m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k^{(m)} \sin k\varphi.$$

Следовательно, используя условия ортогональности, из формулы (20) получаем

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k = -\sqrt{\pi}\beta_{n+1}\lambda_k^{(n+1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому равенство (20) приводится к виду

$$B_{n+1}(x, y) = \frac{\beta_{n+1}}{2^n} \sin(n+1)\varphi.$$

Используя условие нормированности, получим вторую из формул (16) при $n+1$. Этим равенства (16) доказаны.

Таким образом, система (15) на окружности (12) имеет вид ортонормированной тригонометрической системы

$$\{1/\sqrt{2\pi},\ (\cos n\varphi)/\sqrt{\pi},\ (\sin n\varphi)/\sqrt{\pi}\}.$$

§ 3. Ортогональные по контуру гармонические многочлены

Рассмотрим снова однородные гармонические многочлены (6.1.7)

$$\{1,\ u_n(x, y),\ v_n(x, y)\}. \qquad (1)$$

Поскольку на единичной окружности

$$\gamma = \{(x, y):\ x^2 + y^2 = 1\} \qquad (2)$$

эти многочлены имеют вид

$$\{1,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi\}, \qquad (3)$$

то, нормируя их на окружности (2) с единичным весом $h(\varphi) = 1$, получим систему ортонормированных однородных гармонических многочленов

$$\{1/\sqrt{2\pi},\ u_n(x,\ y)/\sqrt{\pi},\ v_n(x,\ y)/\sqrt{\pi}\}. \tag{4}$$

Всякий гармонический многочлен $P_n(x,\ y)$ порядка не выше n единственным образом представляется в виде

$$P_n(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)], \tag{5}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta)\, u_k(\xi, \eta)\, ds, \tag{6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta)\, v_k(\xi, \eta)\, ds. \tag{7}$$

Пусть теперь на окружности (2) определена весовая функция

$$h(x,\ y) = h(\varphi). \tag{8}$$

Применим процесс ортогонализации к системе (1) на окружности (2) с весовой функцией (8). В результате получим некоторую систему ортонормированных гармонических многочленов

$$\{A_0,\ A_n(x,\ y),\ B_n(x,\ y)\}. \tag{9}$$

С другой стороны, если применить процесс ортогонализации к системе (3) с весовой функцией (8), на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, то получим систему ортонормированных тригонометрических полиномов

$$\{A_0,\ A_n(\varphi),\ B_n(\varphi)\}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что системы (9) и (10) при условиях $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$ совпадают. Это следует из того, что процесс ортогонализации многочленов (1) на окружности (2) не зависит от величины r в формулах (6.1.4) и (6.1.5) для многочленов (1). Асимптотические свойства тригонометрических полиномов (10) изучены достаточно подробно [VI.22, 23]. Эти свойства можно переносить на многочлены (9), если рассматривать их только на окружности. Но здесь мы приведем простейшие оценки для многочленов (9) независимо от свойств полиномов (10).

Как и в § 2 гл. VI, для краткости будем использовать обозначения (6.2.6) и (6.2.7). Кроме того, введем частичную сумму билинейного ряда

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (u_k\widetilde{u}_k + v_k\widetilde{v}_k). \tag{11}$$

В силу равенства (6.2.9) при условии, что обе точки находятся на окружности (2), для функции (11) справедлива формула

$$K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{2} = \\ = \frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} [(1 - u_n\widetilde{u}_n - v_n\widetilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) - \\ - (v_n\widetilde{u}_n - u_n\widetilde{v}_n)(x\eta - y\xi)]. \tag{12}$$

Далее, для многочлена $B_n(x, y)$ аналогично формуле (5), используя формулы для коэффициентов (6) и (7), находим представление

$$B_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_\gamma B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta)\, ds. \tag{13}$$

С другой стороны, в силу ортогональности многочлена $B_n(x, y)$ с весовой функцией (8) выполняется условие

$$\int_\gamma B_n(\xi, \eta) h(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)\, ds = 0. \tag{14}$$

Как обычно, будем применять для краткости комплексные переменные $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда из формулы (13), учитывая условие (14), получаем

$$h(z) B_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_\gamma B_n(\zeta) [h(z) - h(\zeta)] K_{n-1}(z, \zeta)\, ds + \\ + h(z) \frac{1}{\pi} \int_\gamma B_n(\zeta) [u_n(z) u_n(\zeta) + v_n(z) v_n(\zeta)]\, ds. \tag{15}$$

Далее, предположим теперь, что весовая функция (8) удовлетворяет двум условиям:

$$h(x, y) \geqslant h_0 > 0, \tag{16}$$

$$|h(x, y) - h(\xi, \eta)| \leqslant M(|x - \xi| + |y - \eta|). \tag{17}$$

Первый интеграл в правой части равенства (15) оценивается с помощью формулы (12), неравенств (16), (17), (6.2.18), (6.2.19) и неравенства Буняковского — Шварца. Аналогично второе слагаемое в равенстве (15) оценивается с помощью неравенства (16). В результате получим

$$h(z)\,|B_n(z)| \leqslant \frac{Mc_1}{\pi\sqrt{h_0}}\sqrt{\int\limits_{\gamma} h(\zeta)\,B_n^2(\zeta)\,ds} = \frac{Mc_1}{\pi\sqrt{h_0}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для многочлена $A_n(z)$. Таким образом, если весовая функция удовлетворяет условиям (16) и (17), то ортонормированные гармонические многочлены (9) равномерно ограничены в замкнутом единичном круге, т. е. имеют место неравенства

$$|A_n(x,\ y)| \leqslant c_2,\quad |B_n(x,\ y)| \leqslant c_2,\qquad x^2+y^2 \leqslant 1. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть на плоскости дана замкнутая спрямляемая жорданова кривая Г и на ней определена весовая функция

$$h(x,\ y) = h(z). \tag{19}$$

Применим процесс ортогонализации к системе однородных гармонических многочленов (1) с весовой функцией (19) по замкнутому контуру Г. В результате получим систему ортогональных гармонических многочленов

$$\{A_0,\ A_n(x,\ y),\ B_n(x,\ y)\}. \tag{20}$$

Условия ортонормированности имеют вид

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\,A_n(x, y)\,B_m(x, y)\,ds = 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\,A_n(x, y)\,A_m(x, y)\,ds = \delta_{nm},$$

$$\int\limits_{\Gamma} h(x, y)\,B_n(x, y)\,B_m(x, y)\,ds = \delta_{nm}.$$

Как обычно, обозначим через G внутренность контура Г, и пусть функция $w=\varphi(z)$ отображает область G на круг $|w|<1$ при условиях $\varphi(z_0)=0$ и $\varphi'(z_0)>0$, где z_0 — некоторая фиксированная точка области G, а обратную функцию обозначим через $z=\psi(w)$. Будем считать, что кривая Г — гладкая и принадлежит классу $C(1,\ \alpha)$. Тогда в силу известных результатов [II.5] производная

$\varphi'(z)$ непрерывна и отлична от нуля в замкнутой области $\bar{G}$, а производная $\psi'(w)$ непрерывна и отлична от нуля в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$. Следовательно, выполняются условия

$$0 < c_3 \leqslant |\varphi'(z)| \leqslant c_4, \qquad z \in \Gamma, \tag{21}$$

$$0 < c_5 \leqslant |\psi'(w)| \leqslant c_6, \qquad |w| \leqslant 1. \tag{22}$$

Предположим, что весовая функция (19) отграничена от нуля, т. е. имеем

$$h(z) \geqslant h_0 > 0, \quad z \in \Gamma. \tag{23}$$

Приведем простейшие оценки многочленов (20) при этих условиях. Используя условие нормировки, а также неравенства (21) и (23), получаем

$$\int\limits_{|w|=1} B_n^2[\psi(w)]\,|dw| = \int\limits_{\Gamma} B_n^2(z)\,|\varphi'(z)|\,|dz| \leqslant \\ \leqslant \frac{c_4}{h_0}\int\limits_{\Gamma} h(z)\,B_n^2(z)\,ds = \frac{c_4}{h_0}. \tag{24}$$

Далее, как обычно, обозначим через $\tilde{B}_n(z)$ гармонический многочлен, сопряженный многочлену $B_n(z)$. Тогда в силу теоремы Рисса [II.4] из неравенства (24) следует оценка

$$\int\limits_{|w|=1} \tilde{B}_n^2[\psi(w)]\,|dw| \leqslant c_7.$$

Следовательно, для комплексного многочлена

$$Q_n(z) = B_n(z) + i\tilde{B}_n(z) \tag{25}$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} |Q_n(z)|^2\,|dz| \leqslant c_6 \int\limits_{|w|=1} |Q_n[\psi(w)]|^2\,|dw| \leqslant c_8. \tag{26}$$

Так как $\Gamma \in C(1, \alpha)$, то в силу известных результатов [VI.28] о сравнении различных норм многочленов в комплексной области из неравенства (26) находим

$$|Q_n(z)| \leqslant c_9\sqrt{n+1}, \qquad z \in \bar{G}. \tag{27}$$

Заметим, что постоянные c_8 и c_9 в неравенствах (26) и (27) не зависят от n. В силу формулы (25) из неравенства (27) получаем оценку

$$|B_n(z)| \leqslant c_9\sqrt{n+1}, \qquad z \in \bar{G}. \tag{28}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$|A_n(z)| \leqslant c_{10}\sqrt{n+1}, \quad z \in \overline{G}. \tag{29}$$

Еще раз заметим, что при доказательстве неравенств (28) и (29) использовано только условие (23).

Далее, оценим многочлен (25) внутри области G. При условии $|w|<1$, используя формулу Коши и неравенство (26), находим последовательно

$$|Q_n[\psi(w)]| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{|Q_n[\psi(t)]|}{|t-w|} |dt| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int\limits_{|t|=1} |Q_n[\psi(t)]|^2 |dt|} \sqrt{\int\limits_{|t|=1} \frac{|dt|}{|t-w|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{11}}{\sqrt{1-|w|}}, \quad |w|<1.$$

Следовательно, имеем оценку

$$|Q_n(z)| \leqslant c_{11}/\sqrt{1-|\varphi(z)|}, \quad z \in G,$$

из которой получается неравенство

$$|B_n(z)| \leqslant c_{11}/\sqrt{1-|\varphi(z)|}, \quad z \in G. \tag{30}$$

Аналогично доказывается и второе неравенство

$$|A_n(z)| \leqslant c_{12}/\sqrt{1-|\varphi(z)|}, \quad z \in G. \tag{31}$$

Таким образом, ортогональные гармонические многочлены (20) при условии (23) ограничены равномерно внутри области G.

§ 4. Ряды Фурье по ортогональным по контуру гармоническим многочленам

Пусть на замкнутом спрямляемом контуре Г дана действительная функция $f(x, y)$. Предположим, что эта функция удовлетворяет условию

$$\|f\|_\Gamma^2 = \int\limits_\Gamma h(x, y) f^2(x, y)\, ds < \infty. \tag{1}$$

Множество таких функций обозначим через $L_2(h, \Gamma)$. Как обычно, для функции $f(x, y)$ определяем ее коэффициенты Фурье по ортогональным гармоническим многочленам по формулам

$$a_n = \int\limits_\Gamma h(z) f(z) A_n(z)\, ds, \quad b_n = \int\limits_\Gamma h(z) f(z) B_n(z)\, ds. \tag{2}$$

В результате функции $f(x, y)$ ставится в соответствие ряд Фурье по гармоническим многочленам

$$a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k A_k(x, y) + b_k B_k(x, y)]. \tag{3}$$

Ряды вида (3) являются некоторым обобщением на случай произвольного контура Г рядов Фурье по тригонометрической системе. Эти ряды обладают многими обычными свойствами ортогональных рядов. Например, частичные суммы ряда (3) наилучшим образом приближают функцию $f(x, y)$ в метрике пространства $L_2(h, \Gamma)$, для ряда (3) имеет место неравенство Бесселя, коэффициенты (2) стремятся к нулю при $n \to \infty$, ряд (3) сходится к функции $f(x, y)$ в метрике пространства $L_2(h, \Gamma)$.

Сначала будем считать, что весовая функция $h(x, y)$ почти всюду на контуре Г положительна, а замкнутый контур Г является спрямляемой жордановой кривой. Таким образом, в этом случае отграниченность весовой функции от нуля и гладкость контура Г не предполагаются. Но поскольку кривая Г спрямляема, то производная $\varphi'(z)$ существует почти всюду и суммируема на контуре Г. Аналогично и производная $\psi'(w)$ существует почти всюду и суммируема на окружности $|w| = 1$ [II.9].

Лемма 1. *Если для весовой функции $h(z)$ и контура Г выполняется условие*

$$\int\limits_\Gamma \frac{|\varphi'(z)|^2}{h(z)}\, ds < \infty, \tag{4}$$

то для всякой функции $f(x, y) \in L_2(h, \Gamma)$ существует гармоническая в области G функция $f(x, y)$, которая почти всюду на Г имеет угловые граничные значения, совпадающие с функцией $f(x, y)$, первоначально заданной только на контуре Г.

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y)$ определена на контуре Г, то функция $f[\psi(w)]$ определена на окружности $|w| = 1$. Для этой функции, используя условия (1) и (4), находим

$$\int\limits_{|t|=1} |f[\psi(t)]|\,|dt| = \int\limits_{|t|=1} |f[\psi(t)]|\,\frac{\sqrt{h[\psi(t)]\,|\psi'(t)|}}{\sqrt{h[\psi(t)]\,|\psi'(t)|}}\,|dt| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{|t|=1} |f[\psi(t)]|^2 h[\psi(t)]\,|\psi'(t)|\,|dt|}\sqrt{\int\limits_{|t|=1} \frac{|dt|}{h[\psi(t)]\,|\psi'(t)|}} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{\Gamma} h(z)\,f^2(z)\,ds}\sqrt{\int\limits_{\Gamma} \frac{|\varphi'(z)|^2}{h(z)}\,ds} < \infty.$$

Далее, поскольку функция $f[\psi(t)]$ суммируема на окружности $|t| = 1$, то формула Пуассона [11.9]

$$f[\psi(re^{i\varphi})] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f[\psi(e^{i\theta})]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\theta \tag{5}$$

определяет гармоническую в круге $|w| < 1$ функцию $f[\psi(w)]$, которая имеет на окружности $|t| = 1$ почти всюду угловые граничные значения $f[\psi(t)]$. Производя в функции $f[\psi(w)]$ замену по формуле $\psi(w) = z$, получим функцию $f(z)$ гармоническую в области G и имеющую почти всюду на контуре Γ угловые граничные значения $f(x, y)$. Лемма доказана.

Таким образом, в результате решения задачи Дирихле в области G по граничным значениям на контуре Γ ряд (3) фактически становится рядом Фурье по ортогональным гармоническим многочленам для гармонической в области G функции $f(x, y)$, имеющей почти всюду на контуре Γ угловые граничные значения, по которым определяются коэффициенты Фурье (2). В связи с этим возникает вопрос об условиях сходимости ряда (3) к функции $f(z)$ внутри области G.

Как обычно, для частичных сумм ряда (3) вводим обозначение

$$S_n(z) = a_0A_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_kA_k(z) + b_kB_k(z)]. \tag{6}$$

Будем говорить, то ряд Фурье (3) сходится к функции $f(z)$ в среднем, если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma} h(z)\,[f(z) - S_n(z)]^2\,ds = 0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если выполняются условия* (4) *и* (7), *то ряд Фурье* (3) *сходится к функции* $f(z)$ *равномерно внутри области* G.

Доказательство. Используя обозначение (6), в силу формулы (5) при условиях $w=\varphi(z)$ и $|w|=r<1$ имеем

$$f(z)-S_n(z)=f[\psi(w)]-S_n[\psi(w)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f[\psi(e^{i\theta})]-S_n[\psi(e^{i\theta})]\}\frac{(1-r^2)\,d\theta}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}. \qquad (8)$$

Поскольку $|w|=|\varphi(z)|=r<1$, то для ядра Пуассона имеем оценку

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\leqslant\frac{1+r}{1-r}\leqslant\frac{2}{1-r}. \qquad (9)$$

Следовательно, переходя к неравенству, из формулы (8) получаем

$$[f(z)-S_n(z)]^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^2(1-r)^2}\int_\Gamma h(\zeta)[f(\zeta)-S_n(\zeta)]^2\,ds\int_\Gamma\frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{h(\zeta)}\,ds. \qquad (10)$$

Таким образом, имеем неравенство

$$|f(z)-S_n(z)|\leqslant\frac{c_1}{1-|\varphi(z)|}\|f-S_n\|_\Gamma.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если весовая функция* $h(z)$ *и контур* Γ *удовлетворяют условию* (4), *то билинейный ряд*

$$K(z,\zeta)=A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k(z)A_k(\zeta)+B_k(z)B_k(\zeta)] \qquad (11)$$

сходится равномерно внутри области G *по обоим переменным* z *и* ζ.

Доказательство. Для частичной суммы билинейного ряда

$$K_n(z,\zeta)=A_0^2+\sum_{k=1}^{n}[A_k(z)A_k(\zeta)+B_k(z)B_k(\zeta)] \qquad (12)$$

при условиях $z=\psi(w)$, $\zeta=\psi(t)$, $t=re^{i\varphi}$ аналогично формуле (8) имеем представление

$$K_n(z, \zeta) = K_n[\psi(w), \psi(t)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n[\psi(w), \psi(e^{i\theta})] \frac{(1-r^2)\, d\theta}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

Применяя оценку (9), аналогично неравенству (10) находим

$$K_n^2(z, \zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2(1-r)^2} \int_\Gamma h(v) K_n^2(z, v)\, ds \int_\Gamma \frac{|\varphi'(v)|^2}{h(v)}\, ds. \qquad (13)$$

С другой стороны, в силу обозначения (12) имеем равенство

$$\int_\Gamma h(\zeta) K_n^2(z, \zeta)\, ds = A_0^2 + \sum_{k=1}^n \left[A_k^2(z) + B_k^2(z)\right] = K_n(z, z). \qquad (14)$$

Следовательно, неравенство (13) приводится к виду

$$K_n^2(z, \zeta) \leqslant \frac{c_2}{1 - |\varphi(\zeta)|} K_n(z, z).$$

Полагая в этом неравенстве $\zeta = z$, получаем

$$K_n(z, z) \leqslant \frac{c_2}{1 - |\varphi(z)|}, \quad z \in G. \qquad (15)$$

А теперь переходим к пределу при $n \to \infty$. В результате имеем

$$A_0^2 + \sum_{k=1}^\infty \left[A_k^2(z) + B_k^2(z)\right] \leqslant \frac{c_2}{1 - |\varphi(z)|}, \quad z \in G. \qquad (16)$$

Таким образом, ряд (11) сходится равномерно внутри области G, если $z = \zeta$. А при различных z и ζ то же утверждение получается после применения неравенства Коши — Буняковского. Теорема доказана.

Функцию (11) можно представить через действительные переменные в виде

$$K(z, \zeta) = K(x, y, \xi, \eta). \qquad (17)$$

Как обычно, эта функция называется керн-функцией контура Γ и веса $h(z)$. В силу теоремы 2 керн-функция (17) является гармонической в области G по переменным x, y и по переменным ξ, η.

Докажем, что $K(z, \zeta) \in L_2(h, \Gamma)$ по переменному $\zeta \in \Gamma$ при фиксированном $z \in G$. В самом деле, аналогично равенству (14) имеем формулу

$$\int_\Gamma h(\zeta)\,[K_{n+p}(z, \zeta) - K_n(z, \zeta)]^2\,ds = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left[A_k^2(z) + B_k^2(z)\right], \qquad z \in G.$$

Следовательно, при фиксированном $z \in G$ последовательность функций $\{K_n(z, \zeta)\}$ сходится в среднем на контуре Γ с весовой функцией $h(\zeta)$. Поэтому в формуле (14) можно сделать предельный переход при $n \to \infty$. В результате получим равенство

$$\int_\Gamma h(\zeta)\,K^2(z, \zeta)\,ds = K(z, z), \qquad z \in G.$$

Таким образом, при фиксированном $z \in G$ имеем $K(z, \zeta) \in L_2(h, \Gamma)$. Это следует также из неравенства (16), ибо ортогональные многочлены $\{A_k(z)\}$ и $\{B_k(z)\}$ являются коэффициентами Фурье функции (17), и поскольку ряд в левой части неравенства (16) сходится, то в силу теоремы Рисса — Фишера существует единственная функция в классе $L_2(h, \Gamma)$, которая является граничными значениями на контуре Γ некоторой гармонической в области G функции.

А теперь докажем формулу

$$f(z) = \int_\Gamma h(\zeta)\,f(\zeta)\,K(z, \zeta)\,ds, \qquad z \in G. \tag{18}$$

Обозначим интеграл (18) через $J(z)$ и вычтем из него почленно очевидное равенство

$$S_n(z) = \int_\Gamma h(\zeta)\,f(\zeta)\,K_n(z, \zeta)\,ds.$$

В результате получим

$$J(z) - S_n(z) = \int_\Gamma h(\zeta)\,f(\zeta)\,[K(z, \zeta) - K_n(z, \zeta)]\,ds.$$

Переходя к неравенству, находим

$$|J(z)-S_n(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Gamma h(\zeta) f^2(\zeta)\, ds \int_\Gamma h(\zeta)\,[K(z,\zeta)-K_n(z,\zeta)]^2\, ds.$$

Поскольку последний интеграл стремится к нулю, то формула (18) доказана.

Рассмотрим теперь условия сходимости ряда Фурье по ортогональным гармоническим многочленам в замкнутой области $\overline{G}$.

Предположим, что функция $f(z)$ гармоническая в области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$. Обозначим через $E_n(f, \overline{G})$ наилучшее равномерное приближение этой функции в замкнутой области $\overline{G}$ гармоническими многочленами порядка не выше n, и пусть $Q_n(z)$ — гармонический многочлен наилучшего приближения. Тогда, как обычно, имеем равенство

$$f(z)-S_n(z) = [f(z)-Q_n(z)] +$$
$$+ \int_\Gamma h(\zeta)\,[f(\zeta)-Q_n(\zeta)]\, K_n(z,\zeta)\, ds.$$

Переходя к неравенству и вводя функцию Лебега

$$L_n(z) = \int_\Gamma h(\zeta)\,|K_n(z,\zeta)|\, ds, \tag{19}$$

получим неравенство Лебега

$$|f(z)-S_n(z)| \leqslant E_n(f, \overline{G})[1+L_n(z)], \quad z\in\overline{G}. \tag{20}$$

Для функции Лебега (19) имеем оценку

$$L_n^2(z) \leqslant \int_\Gamma h(\zeta)\, ds \int_\Gamma h(\zeta)\, K_n^2(z,\zeta)\, ds = c_3 K_n(z,z). \tag{21}$$

Если точка z находится внутри области G, то в силу неравенства (15) функция Лебега (19) ограничена.

Предположим теперь, что $\Gamma \in C(1,\alpha)$, а весовая функция $h(z)$ отграничена от нуля, т. е. выполняется условие (3.23). Тогда в силу неравенств (3.28) и (3.29) при $z\in\overline{G}$ имеем оценку

$$K_n(z,z) = A_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[A_k^2(z)+B_k^2(z)\right] \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \sum_{k=0}^{n}(k+1) \leqslant c_5(n+1)^2, \qquad z\in\overline{G}.$$

Поэтому, учитывая оценку (21), из неравенства Лебега (20) находим

$$|f(z)-S_n(z)|\leqslant c_6(n+1)E_n(f,\ \bar{G}),\quad z\in\bar{G}. \tag{22}$$

Еще раз заметим, что неравенство Лебега (22) справедливо при условии, что весовая функция $h(z)$ лишь отграничена от нуля.

§ 5. Суперортогональные по контуру гармонические многочлены

Пусть, как и в предыдущих параграфах, на замкнутой спрямляемой жордановой кривой Г определена весовая функция

$$h(x,\ y)=h(z),\qquad z\in\Gamma. \tag{1}$$

Как известно [IV.9], эта функция однозначно определяет систему многочленов по комплексной переменной

$$F_0,\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots,\ F_n(z),\ \ldots \tag{2}$$

каждый из которых имеет положительный старший коэффициент и которые удовлетворяют условию комплексной ортонормированности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}h(z)\,F_n(z)\,\overline{F}_m(z)\,ds=\delta_{nm}. \tag{3}$$

У каждого многочлена системы (2) введем действительную и мнимую части по формуле

$$F_n(z)=P_n(x,\ y)+iQ_n(x,\ y)=P_n(z)+iQ_n(z), \tag{4}$$

где многочлены $P_n(x,\ y)$ и $Q_n(x,\ y)$ являются сопряженными гармоническими многочленами.

С другой стороны, весовая функция (1), как и в предыдущих параграфах, определяет систему ортонормированных по контуру Г гармонических многочленов

$$\{A_0,\ A_n(x,\ y),\ B_n(x,\ y)\}. \tag{5}$$

В работе [VI.31] впервые была рассмотрена задача об условиях, при которых для многочленов (4) и (5) имеют место равенства

$$A_n(x,\ y)=\alpha_nP_n(x,\ y),\quad B_n(x,\ y)=\beta_nQ_n(x,\ y), \tag{6}$$

где α_n и β_n — некоторые постоянные.

Определение. Если условия (6) выполняются, то система гармонических многочленов (5) называется *суперортогональной* на контуре Г с весовой функцией (1).

В настоящем параграфе доказывается, что равенства (6) имеют место, если весовая функция определяется по формуле

$$h(x, y) = h(z) = |\varphi'(z)|, \qquad z \in \Gamma, \tag{7}$$

где, как и в предыдущем параграфе, функция $w = \varphi(z)$ отображает конформно и однолистно внутренность G контура Г на область $|w| < 1$ при условиях $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$. Но сначала рассматриваются вспомогательные предложения.

Лемма 2. *Для любого гармонического многочлена $\alpha_n(z)$ существует такой сопряженный ему гармонический многочлен $\tilde{\alpha}_n(z)$, что имеет место неравенство*

$$\int_\Gamma |\tilde{\alpha}_n(z)|^2\, |\varphi'(z)|\, ds \leqslant \int_\Gamma |\alpha_n(z)|^2\, |\varphi'(z)|\, ds. \tag{8}$$

Доказательство. Как известно, сопряженный гармонический многочлен $\tilde{\alpha}_n(z)$ определяется по исходному многочлену $\alpha_n(z)$ с точностью до свободного члена. Но в любом случае функция

$$\lambda(w) = \alpha_n[\psi(w)] + i\tilde{\alpha}_n[\psi(w)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$$

является аналитической в области $|w| < 1$ и непрерывной в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$, причем производная $\lambda'(w)$ суммируема на окружности $|w| = 1$. Следовательно, имеем равномерно сходящиеся разложения [II.4]

$$\alpha(\theta) = \alpha_n[\psi(e^{i\theta})] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{9}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \tilde{\alpha}_n[\psi(e^{i\theta})] = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta). \tag{10}$$

Поскольку нулевой коэффициент многочлена $\tilde{\alpha}_n(z)$ произвольный, то его можно выбрать таким образом, чтобы в разложении (10) выполнялось условие $\tilde{a}_0 = 0$. Тогда из разложений (9) и (10) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\alpha(\theta)]^2\,d\theta=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),\tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\tilde{\alpha}(\theta)]^2\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).\tag{12}$$

Сопоставляя равенства (11) и (12), приходим к неравенству (8). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых двух гармонических многочленов $\alpha_n(z)$ и $\beta_m(z)$ существуют такие сопряженные им гармонические многочлены $\tilde{\alpha}_n(z)$ и $\tilde{\beta}_m(z)$, что имеет место равенство*

$$\int_\Gamma \alpha_n(z)\tilde{\beta}_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds=-\int_\Gamma\tilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds.\tag{13}$$

Доказательство. Аналогично формулам (9) и (10) вводим разложения

$$\beta(\theta)=\beta_n[\psi(e^{i\theta})]=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k\cos k\theta+\tilde{b}_k\sin k\theta),\tag{14}$$

$$\tilde{\beta}(\theta)=\tilde{\beta}_n[\psi(e^{i\theta})]=\sum_{k=1}^{\infty}(-\tilde{b}_k\cos k\theta+\tilde{a}_k\sin k\theta).\tag{15}$$

Используя разложения (9) и (15), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(\theta)\tilde{\beta}(\theta)\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k\tilde{b}_k+b_k\tilde{a}_k).\tag{16}$$

Аналогично с помощью формул (10) и (14) находим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\alpha}(\theta)\beta(\theta)\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}(-\tilde{a}_kb_k+a_k\tilde{b}_k).\tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) следует формула (13). Лемма доказана.

В этих двух леммах сопряженный многочлен $\tilde{\alpha}_n(z)$ выбирался таким образом, чтобы нулевой коэффициент в разложении функции $\tilde{\alpha}_n[\psi(e^{i\theta})]$ был равен нулю. Будем придерживаться этого правила и в дальнейшем изложении.

Лемма 4. *Для гармонических многочленов* (5), *ортонормированных с весовой функцией* (7), *справедливы равенства*

$$\tilde{A}_n(z) = B_n(z), \quad \tilde{B}_n(z) = -A_n(z). \tag{18}$$

Доказательство. В дальнейших рассуждениях, как обычно, для краткости будем применять обозначение

$$(A_n, B_m) = \int_{\Gamma} A_n(z)\, B_m(z)\, |\varphi'(z)|\, ds. \tag{19}$$

Тогда равенство (13), справедливое при любых n и m, представляется в виде

$$(\alpha_n, \tilde{\beta}_m) = -(\tilde{\alpha}_n, \beta_m). \tag{20}$$

Пусть сначала $n < m$. В этом случае в силу ортогональности системы многочленов (5) имеем равенства

$$(A_m, \tilde{B}_n) = (B_m, \tilde{A}_n) = 0. \tag{21}$$

А если $m < n$, то, используя равенство (20), находим

$$(A_m, \tilde{B}_n) = -(\tilde{A}_m, B_n) = 0, \qquad (B_m, \tilde{A}_n) = -(\tilde{B}_m, A_n) = 0. \tag{22}$$

Заметим, что в равенствах (21) и (22) исключен случай $n = m$.

Далее, при любых n и m из равенств вида (20)

$$(A_m, \tilde{A}_n) = -(A_n, \tilde{A}_m), \quad (B_m, \tilde{B}_n) = -(B_n, \tilde{B}_m), \tag{23}$$

учитывая ортогональность системы (5), получаем

$$(A_m, \tilde{A}_n) = 0, \quad (B_m, \tilde{B}_n) = 0, \tag{24}$$

причем здесь случай $n = m$ не исключается в силу равенств (23).

А теперь разложим сопряженные гармонические многочлены по основной системе (5). В результате имеем

$$\tilde{A}_n(z) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k A_k(z) + b_k B_k(z)], \tag{25}$$

$$\tilde{B}_n(z) = \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k A_k(z) + \beta_k B_k(z)]. \tag{26}$$

В силу обозначения (19) равенства (22) и (24) являются условиями ортогональности. С помощью этих условий находим, что в суммах (25) и (26) имеется только по одному слагаемому, которые определяются тем, что в условиях (22) исключен случай $n=m$. Следовательно, эти два равенства приводятся к виду

$$\tilde{A}_n(z)=b_nB_n(z), \quad B_n(z)=\alpha_nA_n(z). \tag{27}$$

Коэффициенты b_n и α_n в этих равенствах можно определить с помощью понятия сопряженного гармонического многочлена.

Для произвольного многочлена с комплексными коэффициентами имеем

$$R_n(z)=(c_0+id_0)+\sum_{k=1}^{n}(c_k+id_k)z^k=$$
$$=(c_0+id_0)+\sum_{k=1}^{n}(c_k+id_k)[u_k(x,y)+iv_k(x,y)]=$$
$$=c_0+\sum_{k=1}^{n}[c_ku_k(x,y)-d_kv_k(x,y)]+$$
$$+id_0+i\sum_{k=1}^{n}[d_ku_k(x,y)+c_kv_k(x,y)]. \tag{28}$$

Поскольку многочлены $A_n(z)$ и $\tilde{A}_n(z)$ сопряжены, то в силу формулы (28) имеем равенства

$$A_n(z)=c_0+\sum_{k=1}^{n}[c_ku_k(x,y)-d_kv_k(x,y)], \tag{29}$$

$$\tilde{A}_n(z)=d_0+\sum_{k=1}^{n}[d_ku_k(x,y)+c_kv_k(x,y)]. \tag{30}$$

Аналогично получаются еще две формулы

$$B_n(z)=\tilde{c}_0+\sum_{k=1}^{n}[\tilde{c}_ku_k(x,y)-\tilde{d}_kv_k(x,y)], \tag{31}$$

$$\tilde{B}_n(z)=\tilde{d}_0+\sum_{k=1}^{n}[\tilde{d}_ku_k(x,y)+\tilde{c}_kv_k(x,y)]. \tag{32}$$

Обращая внимание на старшие коэффициенты в этих разложениях, из равенств (27) находим два условия

$$c_n=b_n(-\tilde{d}_n), \quad \tilde{d}_n=\alpha_nc_n. \tag{33}$$

Отсюда следует равенство $b_n\alpha_n=-1$. Следовательно, формулы (27) приводятся к виду

$$\widetilde{A}_n(z) = b_n B_n(z), \quad \widetilde{B}_n(z) = -\frac{1}{b_n} A_n(z). \tag{34}$$

Далее, в силу неравенства (8) и ортонормированности многочленов (5) имеем два неравенства:

$$\int_\Gamma |\widetilde{A}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|\, ds \leqslant 1,$$

$$\int_\Gamma |\widetilde{B}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|\, ds \leqslant 1.$$

Подставляя в эти неравенства правые части формул (34), получим два условия $b_n^2 \leqslant 1$ и $1 \leqslant b_n^2$, из которых следует $b_n^2 = 1$.

Наконец, для определения знака числа b_n обратимся к равенствам (30) и (31). Так как в равенстве (29) $d_n = 0$ и старший коэффициент c_n положителен, а в равенстве (31) старший коэффициент $-\widetilde{d}_n$ тоже должен быть положительным, то $\widetilde{d}_n < 0$, и поэтому первое из равенств (33) приводит к условию $b_n > 0$. Следовательно, имеем $b_n = 1$. А тогда из равенств (34) получаются равенства (18). Лемма доказана.

Теорема 3. *Если весовая функция определяется по формуле* (7), *то условия* (6) *выполняются и имеют вид*

$$A_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P_n(x, y), \quad B_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Q_n(x, y), \tag{35}$$

т. е. для ортогональных многочленов (2) *справедлива формула*

$$F_n(z) = \sqrt{\pi} A_n(x, y) + i\sqrt{\pi} B_n(x, y). \tag{36}$$

Доказательство. Первая из формул (18) означает, что многочлен $B_n(z)$ сопряжен многочлену $A_n(z)$. Следовательно, функция (36) есть комплексный многочлен по переменной z. Докажем, что старший коэффициент этого многочлена положителен. В силу первой из формул (18), записывая равенство (28) в обратном порядке, находим

$$A_n(z) + iB_n(z) = A_n(z) + i\widetilde{A}_n(z) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] +$$

$$+ id_0 + i \sum_{k=1}^{n} [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] =$$

$$= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + id_k) z^k. \qquad (37)$$

Из процесса ортогонализации системы однородных гармонических многочленов следует, что в формуле (29) имеем $d_n = 0$ и $c_n > 0$. Следовательно, старший коэффициент многочлена (37) положителен.

Наконец, для многочленов вида (36) проверяем условие ортонормированности в комплексной области (3). Используя ортонормированность многочленов (5) и формулу (36), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} h(z) F_n(z) \overline{F_m(z)}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [A_n(z) + iB_n(z)] [A_m(z) - iB_m(z)] \, |\varphi'(z)| \, ds = \delta_{nm}.$$

Следовательно, многочлены, определяемые равенством (36), в силу теоремы единственности тождественны многочленам (2), ортонормированным на контуре Г с весовой функцией (7). Теорема доказана.

Для контура Г существует еще одна весовая функция, при которой гармонические многочлены (5) суперортогональны. Обозначим через D внешность контура Г, и пусть функция $w = \Phi(z)$ отображает конформно и однолистно область D на область $|w| > 1$ при условиях $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) > 0$. Тогда для обратной функции справедливо разложение [I.6]

$$z = \psi_0(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \ldots + \frac{\beta_k}{w^k} + \ldots,$$

$$|w| \geqslant 1. \qquad (38)$$

Вторая весовая функция, при которой гармонические многочлены (5) суперортогональны, имеет вид

$$h_0(z) = |\Phi'(z)|, \quad z \in \Gamma. \qquad (39)$$

В этом случае все вышеприведенные формулировки и доказательства сохраняются. Единственное пояснение требуется лишь в самом начале доказательства леммы 2. Фигурирующая там функция $\lambda(w)$ здесь в силу разложения (38) определяется формулой

$$\lambda(w) = \alpha_n[\psi_0(w)] + i\tilde{\alpha}_n[\psi_0(w)] = \\ = \sum_{k=0}^{n} c_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{w^k}, \quad |w| \geqslant 1. \quad (40)$$

Поскольку нулевой коэффициент многочлена $\tilde{\alpha}_n(z)$ произвольный, то мнимая часть нулевого коэффициента в правой части равенства (40) также произвольная. Следовательно, если аналогично формулам (9) и (11) ввести разложения

$$\alpha(\theta) = \alpha_n[\psi_0(e^{i\theta})] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \tilde{\alpha}_n[\psi_0(e^{i\theta})] = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta),$$

то можно положить $\tilde{a}_0 = 0$. А остальная часть рассуждений в доказательствах лемм и теоремы остается без изменений. Таким образом, если весовая функция определяется формулой (39), то справедливы равенства (35) и (36).

Таким образом, если весовые функции определяются по формулам (7) и (39), то гармонические многочлены (5) являются суперортогональными по контуру Г.

Многочлены (2), ортогональные по контуру в комплексной области, исследованы очень подробно [IV.9]. Для этих многочленов установлены оценки скорости сходимости к нулю внутри области G, асимптотические свойства вне контура Г и на самом контуре, получены неравенство Лебега и многие другие результаты. Благодаря формуле (36) почти все эти результаты переносятся на суперортогональные гармонические многочлены (5). Приведем наиболее важные формулировки. Но сначала заметим, что если $\Gamma \in C(p, \alpha)$, то отображающая функция $w = \varphi(z)$ непрерывно дифференцируема p раз в замкнутой области $\bar{G}$, причем $\varphi^{(p)}(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Аналогично в замкнутой области $\bar{D}$ имеем $\Phi^{(p)}(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ [II.5].

1. Если $\Gamma \in C(1, \alpha)$, то существует такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, что выполняются неравенства

$$|A_n(z)| \leqslant \varepsilon_n \sqrt{n+1}, \quad |B_n(z)| \leqslant \varepsilon_n \sqrt{n+1}, \qquad z \in \bar{G}.$$

2. Если $\Gamma \in C(p+1, \alpha)$, то внутри области G справедливы оценки

$$|A_n(z)| \leqslant \frac{c_1(F)}{n^{p+\alpha}}, \quad |B_n(z)| \leqslant \frac{c_1(F)}{n^{p+\alpha}}, \qquad z \in F \subset G, \tag{41}$$

где постоянная $c_1(F)$ содержит в знаменателе расстояние $\rho(F, \Gamma)$ от замкнутого множества F до контура Γ в степени $p+2$.

3. Если $\Gamma \in C(p+1, \alpha)$, где $p+\alpha > 1/2$, то имеет место асимптотическая формула

$$\left[A_n^2(z) + B_n^2(z)\right]^{1/2} = |\Phi(z)|^n \left[1 + O\left(\frac{\ln n}{n^{p+\alpha}}\right)\right], \qquad z \in \overline{D}. \tag{42}$$

4. Если $\Gamma \in C(p+1, \alpha)$, то для остатка $R_n(z, f)$ ряда Фурье по суперортогональным гармоническим многочленам (5) функции $f(x, y) \in H_2(h, \Gamma)$ равномерно внутри области G выполняется неравенство

$$|R_n(z, f)| \leqslant \frac{c_2(F)}{n^{p+\alpha}} E_n^{(2)}(f, \Gamma), \qquad z \in F \subset G, \tag{43}$$

где $E_n^{(2)}(f, \Gamma)$ есть наилучшее приближение гармонической функции $f(x, y)$ в метрике пространства $H_2(h, \Gamma)$ гармоническими многочленами порядка не выше h.

5. Если $\Gamma \in C(1, \alpha)$, где $\alpha > 1/2$, то для функции Лебега ряда Фурье по суперортогональным гармоническим многочленам (5) справедливо неравенство

$$L_n(z) \leqslant c_3 \ln(n+1), \qquad z \in \overline{G}.$$

Отсюда следует неравенство Лебега для остатка ряда Фурье по суперортогональным гармоническим многочленам в замкнутой области

$$|R_n(z, f)| \leqslant c_4 E_n(f, \overline{G}) \ln(n+1), \quad z \in \overline{G}.$$

6. Если контур Γ есть правильная аналитическая кривая, то в неравенствах (41) и (43) алгебраический порядок убывания заменяется скоростью геометрической прогрессии.

7. Если функция $f(x, y)$ является гармонической в области G_R, где $R > 1$, то для остатка ее ряда Фурье по суперортогональным многочленам в замкнутой области $\overline{G}$ справедливо неравенство

$$|R_n(z, f)| \leqslant c_5(R)/R^n, \quad z \in \overline{G},$$

где постоянная $c_5(R)$ зависит от граничных свойств гармонической функции $f(x, y)$ в окрестности контура Γ_R и имеет такое же строение, как постоянная в соответствующих аналогичных результатах для рядов Тейлора, Фабера и рядов Фурье по ортогональным многочленам (2) [11.25]. Доказательства проводятся с помощью асимптотической формулы (42).

§ 6. Условия одновременной ортогональности гармонических многочленов по области и по ее границе

Пусть, как и в предыдущих параграфах, конечная односвязная область G ограничена замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ. Рассмотрим две весовые функции

$$h_1(x, y) = h_1(z) = |\varphi'(z)|^2, \quad z \in G, \tag{1}$$

$$h_2(x, y) = h_2(z) = |\varphi'(z)|, \quad z \in \Gamma. \tag{2}$$

В силу результатов § 5 гл. VI весовая функция (1) определяет комплексные многочлены (6.5.31)

$$K_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_n(z) + ib_n(z)], \tag{3}$$

ортонормированные по области G, причем гармонические многочлены $\{a_n(z)\}$ и $\{b_n(z)\}$ суперортогональны по области G с весовой функцией (1).

Аналогично в силу формулы (5.36) весовая функция (2) определяет комплексные многочлены

$$F_n(z) = \sqrt{\pi}\,[A_n(z) + iB_n(z)], \tag{4}$$

ортонормированные по контуру Γ, причем гармонические многочлены $\{A_n(z)\}$ и $\{B_n(z)\}$ суперортогональны по контуру Γ с той же весовой функцией (2).

При переходе от формулы (6.5.31) к формуле (3) изменены обозначения суперортогональных многочленов. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть различное происхождение суперортогональных многочленов в формулах (3) и (4). В настоящем параграфе доказывается, что многочлены (3) и (4) отличаются только постоянным множителем. Но сначала установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Пусть в области G определены две аналитические функции*

$$f(z)=u(z)+iv(z),\quad F(z)=A(z)+iB(z), \tag{5}$$

причем обе они непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда для их действительных и мнимых частей имеют место равенства

$$\iint\limits_G [u(z)A(z)-v(z)B(z)]\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma [u(z)A(z)-v(z)B(z)]\,|\varphi'(z)|\,ds, \tag{6}$$

$$\iint\limits_G [v(z)A(z)+u(z)B(z)]\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma [v(z)A(z)+u(z)B(z)]\,|\varphi'(z)|\,ds. \tag{7}$$

Доказательство. Для аналитических функций имеет место формула интегрирования по частям (6.1.24)

$$\iint\limits_G f(z)\,\overline{g'(z)}\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma f(z)\,\overline{g(z)}\,dz.$$

Применяя эту формулу к произведению функций (5), получим

$$\iint\limits_G f(z)F(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma f(z)F(z)\,\varphi'(z)\,\overline{\varphi(z)}\,dz. \tag{8}$$

С другой стороны, при $z\in\Gamma$ имеем равенство

$$\frac{1}{i}\varphi'(z)\,\overline{\varphi(z)}\,dz = \frac{\varphi'(z)\,dz}{i\varphi(z)} = \frac{dw}{iw} = |dw| = |\varphi'(z)|\,ds.$$

Следовательно, равенство (8) можно представить в виде

$$\iint\limits_G f(z)F(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma f(z)F(z)\,|\varphi'(z)|\,ds. \tag{9}$$

А теперь, разделяя с помощью равенств (5) действительные и мнимые части в формуле (9), получим равенства (6) и (7). Лемма доказана.

Далее, пусть даны два гармонических многочлена $\alpha_n(z)$ и $\beta_m(z)$. Как обычно, вводим их сопряженные гармонические многочлены $\tilde{\alpha}_n(z)$ и $\tilde{\beta}_m(z)$. Применим лемму 5 к двум комплексным многочленам

$$\alpha_n(z)+i\tilde{\alpha}_n(z), \quad \beta_m(z)+i\tilde{\beta}_m(z). \tag{10}$$

В результате получим равенства

$$\iint_G [\alpha_n(z)\beta_m(z)-\tilde{\alpha}_n(z)\tilde{\beta}_m(z)]\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma [\alpha_n(z)\beta_m(z)-\tilde{\alpha}_n(z)\tilde{\beta}_m(z)]\,|\varphi'(z)|\,ds, \tag{11}$$

$$\iint_G [\alpha_n(z)\tilde{\beta}_m(z)+\tilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)]\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\iint_\Gamma [\alpha_n(z)\tilde{\beta}_m(z)+\tilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)]\,|\varphi'(z)|\,ds. \tag{12}$$

Предположим теперь, что как и в лемме 2 из § 5 гл. VI сопряженные гармонические многочлены $\tilde{\alpha}_n(z)$ и $\tilde{\beta}_m(z)$ в комплексных многочленах (10) выбраны так, что выполняется условие (6.5.10)

$$\iint_G \alpha_n(z)\tilde{\beta}_m(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy =$$
$$= -\iint_G \tilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{13}$$

Тогда из формулы (12) находим

$$\int_\Gamma \alpha_n(z)\tilde{\beta}_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds = -\int_\Gamma \tilde{\alpha}_n(z)\beta_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds. \tag{14}$$

Таким образом, сопряженные гармонические многочлены $\tilde{\alpha}_n(z)$ и $\tilde{\beta}_m(z)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия леммы 2 из § 5 гл. VI и леммы 3 из § 5 настоящей главы одновременно.

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_{nm} = \iint_G F_n(z)K_m(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{15}$$

Если $n<m$, то этот интеграл равен нулю в силу ортогональности гармонических многочленов из формулы (3).

А если $n > m$, то с помощью формулы (9) этот интеграл приводим к виду

$$J_{nm} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} F_n(z) K_m(z) \, |\varphi'(z)| \, ds, \tag{16}$$

и опять находим, что этот интеграл равен нулю теперь уже в силу ортогональности гармонических многочленов из формулы (4). Таким образом, при условии $n \neq m$ интеграл (15) равен нулю. Следовательно, при $n \neq m$ справедливы равенства

$$\iint\limits_{G} A_n(z) \, a_m(z) \, |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy = \iint\limits_{G} B_n(z) \, b_m(z) \, |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy. \tag{17}$$

$$\iint\limits_{G} A_n(z) \, b_m(z) \, |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy = -\iint\limits_{G} B_n(z) \, a_m(z) \, |\varphi'(z)|^2 \, dx \, dy. \tag{18}$$

Аналогично, приравнивая нулю интеграл (16), получим

$$\int\limits_{\Gamma} A_n(z) \, a_m(z) \, |\varphi'(z)| \, ds = \int\limits_{\Gamma} B_n(z) \, b_m(z) \, |\varphi'(z)| \, ds, \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Gamma} A_n(z) \, b_m(z) \, |\varphi'(z)| \, ds = -\int\limits_{\Gamma} B_n(z) \, a_m(z) \, |\varphi'(z)| \, ds. \tag{20}$$

Заметим, что интегралы (17) и (18) равны нулю при $n < m$, а интегралы (19) и (20) — при $m < n$.

Далее, рассмотрим снова последовательность однородных гармонических многочленов

$$1, \ x, \ y, \ x^2 - y^2, \ 2xy, \ \ldots, \ u_n(x, y), \ v_n(x, y), \ \ldots \tag{21}$$

Ортогонализируя эту последовательность с весовой функцией (1) по области G, в соответствии с формулой (3) получим систему суперортогональных гармонических многочленов

$$\{a_0, \ a_n(z), \ b_n(z)\}. \tag{22}$$

Аналогично, в результате ортогонализации системы (21) с весовой функцией (2) по контуру Γ получим суперортогональную систему гармонических многочленов

$$\{A_0, \ A_n(z), \ B_n(z)\}. \tag{23}$$

Разобьем теперь последовательность (21) на две подпоследовательности

$$1,\ x,\ x^2-y^2,\ \ldots,\ u_n(x,\ y),\ \ldots, \tag{24}$$

$$y,\ 2xy,\ \ldots,\ v_n(x,\ y),\ \ldots \tag{25}$$

Ортогонализируем последовательность (24) относительно веса (1) по области G. В результате получим систему

$$\alpha_0,\ \alpha_1(x,\ y),\ \alpha_2(x,\ y),\ \ldots,\ \alpha_n(x,\ y),\ \ldots \tag{26}$$

Аналогично, ортогонализируя последовательность (25) с той же весовой функцией (1), находим

$$\beta_1(x,\ y),\ \beta_2(x,\ y),\ \ldots,\ \beta_n(x,\ y),\ \ldots \tag{27}$$

Далее, применим процесс ортогонализации к системе (24) с весовой функцией (2) по контуру Г. Для полученных многочленов введем обозначение

$$\gamma_0,\ \gamma_1(x,\ y),\ \gamma_2(x,\ y),\ \ldots,\ \gamma_n(x,\ y),\ \ldots \tag{28}$$

Аналогично ортогонализацией системы (25) с весовой функцией (2) получается система

$$\lambda_1(x,\ y),\ \lambda_2(x,\ y),\ \ldots,\ \lambda_n(x,\ y),\ \ldots \tag{29}$$

Лемма 6. *Если для каждого гармонического многочлена $\alpha_n(x,\ y)$ системы* (26) *ввести сопряженный ему многочлен $\tilde{\alpha}_n(x,\ y)$, удовлетворяющий условию* (13), *то полученная система многочленов*

$$\tilde{\alpha}_1(x,\ y),\ \tilde{\alpha}_2(x,\ y),\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n(x,\ y),\ \ldots \tag{30}$$

является ортогональной по области G с весом (1).

Доказательство. Из формулы (13) имеем равенство

$$\iint\limits_G \alpha_n(z)\,\tilde{\alpha}_m(z)\,|\,\varphi'(z)\,|^2 dx\,dy = \\ = -\iint\limits_G \tilde{\alpha}_n(z)\,\alpha_m(z)\,|\,\varphi'(z)\,|^2\,dx\,dy. \tag{31}$$

В этой формуле переход от гармонического многочлена $\alpha_n(z)$ к сопряженному многочлену $\tilde{\alpha}_n(z)$ производится таким образом, что многочлен $\alpha_n(z)+i\tilde{\alpha}_n(z)$ является аналитической функцией. Следовательно, если в формуле (31) вместо $\alpha_m(z)$ поставить $\tilde{\alpha}_m(z)$, то тогда вместо $\tilde{\alpha}_m(z)$ надо поставить $-\alpha_m(z)$. В результате формула (31) приведется к виду

$$\iint_G \alpha_n(z)\,\alpha_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy =$$

$$= \iint_G \tilde{\alpha}_n(z)\,\tilde{\alpha}_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy.$$

Из этой формулы следует, что многочлены (30) ортонормированы с весом (1) по области G. Лемма доказана.

Поскольку все многочлены (30) составлены из последовательности (25), то в силу теоремы единственности ортогональной системы многочлены (27) и (30) совпадают, т. е. $\tilde{\alpha}_n(z) = \beta_n(z)$. Следовательно, равенство (31) можно представить в виде

$$(\alpha_n,\ \beta_m) = -(\beta_n,\ \alpha_m). \tag{32}$$

Полагая в этом равенстве $n = m$, получим $(\alpha_n,\ \beta_n) = 0$. А если $n \neq m$, то в силу условий

$$(\alpha_n,\ \beta_n) = (\alpha_m,\ \beta_m) = (\alpha_n,\ \alpha_m) = (\beta_n,\ \beta_m) = 0$$

из формулы (32) находим $(\alpha_n,\ \beta_m) = 0$. Таким образом, система гармонических многочленов

$$\{\alpha_0,\ \alpha_n(x,\ y),\ \beta_n(x,\ y)\} \tag{33}$$

ортонормирована с весовой функцией (1) по области G. Но таким же свойством обладает и система (22). Следовательно, в силу теоремы единственности системы (22) и (33) совпадают.

Лемма 7. *Если для каждого гармонического многочлена $\gamma_n(z)$ из системы* (28) *ввести сопряженный ему многочлен $\tilde{\gamma}_n(z)$, удовлетворяющий условию* (14), *то полученная система многочленов*

$$\tilde{\gamma}_1(z),\ \tilde{\gamma}_2(z),\ \ldots,\ \tilde{\gamma}_n(z),\ \ldots \tag{34}$$

будет ортонормированной с весовой функцией (2) *по контуру* Γ.

Доказательство. В самом деле, в этом случае из формулы (14) имеем равенство

$$\int_\Gamma \gamma_n(z)\,\tilde{\gamma}_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds = -\int_\Gamma \tilde{\gamma}_n(z)\,\gamma_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds,$$

из которого находим

$$\int_\Gamma \gamma_n(z)\,\gamma_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds = \int_\Gamma \tilde{\gamma}_n(z)\,\tilde{\gamma}_m(z)\,|\varphi'(z)|\,ds.$$

Лемма доказана.

Далее, аналогично предыдущему имеем $\tilde{\gamma}_n(z) = \lambda_n(z)$. Следовательно, система многочленов

$$\{\gamma_0,\ \gamma_n(z),\ \lambda_n(z)\} \tag{35}$$

ортонормирована с весом (2) по контуру Г. И по теореме единственности системы (23) и (35) совпадают.

Теорема 4. *Ортогональные многочлены* (3) *и* (4) *отличаются только положительным множителем, т. е. имеем*

$$F_n(z) = \bar{c}_n K_n(z). \tag{36}$$

Доказательство. В силу вышеизложенных результатов имеем разложения

$$A_n(z) = c_0 a_0 + \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(z), \tag{37}$$

$$B_n(z) = \sum_{m=1}^{n} d_m b_m(z), \tag{38}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$c_m = \iint_G A_n(z)\,a_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy, \tag{39}$$

$$d_m = \iint_G B_n(z)\,b_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy. \tag{40}$$

Из равенства (17) следует, что при $m \neq n$ величины (39) и (40) равны между собой. Поэтому из разложений (37) и (38) имеем

$$F_n(z) =$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} c_m\,[a_m(z) + ib_m(z)] + \sqrt{\pi}\,[c_n a_n(z) + id_n b_n(z)] =$$

$$= Q_{n-1}(z) + \sqrt{\pi}\,[c_n a_n(z) + id_n b_n(z)], \tag{41}$$

где $Q_{n-1}(z)$ есть алгебраический многочлен по z. Поскольку сумма в квадратных скобках в правой части равенства (41) есть многочлен, то его действительная и мнимая части связаны условиями Коши — Римана. А тогда, учитывая формулу (3), находим $c_n = d_n$. Следовательно, равенство (41) в силу той же формулы (3) можно представить в виде

$$F_n(z) = \sqrt{2\pi}\sum_{m=0}^{n} c_m K_m(z). \tag{42}$$

Для определения коэффициентов разложения (42) применим условие комплексной ортогональности многочленов (3). В результате получим

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}c_m &= \iint_G F_n(z)\overline{K_m(z)}\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\iint_G [A_n(z) + iB_n(z)]\,[a_m(z) - ib_m(z)]\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\iint_G [A_n(z)\,a_m(z) + B_n(z)\,b_m(z)]\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy - \\ &- i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\iint_G [A_n(z)\,b_m(z) - B_n(z)\,a_m(z)]\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy.\end{aligned} \tag{43}$$

Поскольку коэффициенты разложения (42) действительны, то из формулы (43) имеем

$$\iint_G A_n(z)\,b_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy = \iint_G B_n(z)\,a_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy. \tag{44}$$

Далее, сопоставляя равенства (18) и (44), находим, что оба интеграла (44) при $m < n$ равны нулю, т. е. имеем

$$\iint_G A_n(z)\,b_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy = 0, \tag{45}$$

$$\iint_G B_n(z)\,a_m(z)\,|\varphi'(z)|^2 dx\,dy = 0. \tag{46}$$

Учитывая структуру многочленов $a_m(z)$ и $b_m(z)$, найдем, что эти два равенства справедливы и при $m = n$.

А теперь воспользуемся теоремой единственности ортогональной системы. Будем считать, что все старшие коэффициенты гармонических многочленов положительны.

Тогда из условий (45) и (46) получим

$$A_n(z) = g_n a_n(z), \quad B_n(z) = l_n b_n(z). \tag{47}$$

Из этих равенств следует, что в формулах (41) и (42) $c_m = 0$ при $m < n$. А тогда из равенств (37) и (38) следует формула (36). Теорема доказана.

Обозначим через μ_n старший коэффициент многочлена $F_n(z)$, а через λ_n — многочлена $K_n(z)$. Тогда из равенства (36) находим

$$\mu_n = \tilde{c}_n \lambda_n. \tag{48}$$

С другой стороны, в силу известных результатов [II.23; IV.9] при некоторых условиях имеют место асимптотические формулы

$$\frac{\alpha_0^2 \gamma^{2n}}{\mu_n^2} = 1 + o(1), \quad \frac{\alpha_0^2 \gamma^{2n}}{\lambda_n^2} = \frac{\pi}{n+1}\,[1 + o(1)], \quad \gamma = \Phi'(\infty).$$

Учитывая эти формулы, из равенства (48) находим

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} = 1. \tag{49}$$

С помощью формул (36) и (49) на многочлены $\{K_n(z)\}$ переносятся многие асимптотические свойства многочленов $\{F_n(z)\}$.

Глава VIII

ОБОБЩЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные определения и простейшие свойства

Пусть на множестве E определена функция двух переменных $F(x, y)$, имеющая ограниченную вариацию [I.9]. Эта функция называется обобщенным интегральным весом на множестве E, если при любых n и k существуют интегралы

$$h_{nk} = \iint\limits_E x^{n-k}y^k dF(x, y), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \; n=0, 1, \ldots \tag{1}$$

Эти интегралы называются обобщенными моментами веса $dF(x, y)$ на множестве E. Множество E может быть ограниченным или неограниченным, одномерным или двумерным. Таким образом, приведенное определение обобщенного интегрального веса $dF(x, y)$ на множестве E охватывает случаи ортогональности по области и по контуру, по одному и по двум переменным.

Если выполняется условие

$$dF(x, y) = h(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

то функция $h(x, y)$ называется обобщенным дифференциальным весом на множестве E. Эта функция может принимать и отрицательные значения, но все интегралы вида (1) при условии (2) должны существовать.

Далее, дифференциальное выражение $dF(x, y)$ в формуле (1) можно рассматривать как меру, определенную на множестве E. В этом случае можно изучать ортогональные многочлены двух переменных, используя различные определения мер и их свойства. Разумеется, при таких общих условиях ортогональные многочлены теряют многие свойства, причем остающиеся свойства формулируются и доказываются по-иному. Прежде всего заметим, что иной вид имеет сама теорема существования системы ортогональных многочленов.

Поскольку все моменты (1) существуют, то, как и в гл. I, их можно расположить в виде треугольной таблицы:

$$\begin{array}{l}
h_{00}, \\
h_{10},\ h_{11}, \\
h_{20},\ h_{21},\ h_{22}, \\
\dots\dots\dots\dots \\
h_{n0},\ h_{n1},\ \dots,\ h_{nn}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{3}$$

По этим моментам, как и в гл. I, составляем определители

$$\Delta_{00} = h_{00}, \quad \Delta_{10} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ h_{10} & h_{20} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \cdots h_{(n+1)k} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \cdots h_{(n+1)(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{nk} & h_{(n+1)k} & h_{(n+1)(k+1)} & \cdots h_{2n2k} \end{vmatrix}, \dots \tag{4}$$

Если весовая функция $h(x, y)$ из формулы (2) неотрицательна и не эквивалентна нулю, то все определители вида (4) отличны от нуля и даже положительны. Это доказано в гл. I. А в общем случае, который рассматривается в настоящей главе, определители (4) могут быть отрицательными или обращаться в нуль.

Как и в гл. I, обозначим через W_{nk} множество многочленов порядка не выше (n, k). Некоторый многочлен $F_{nk}(x, y)$ порядка (n, k) называется *обобщенным ортогональным многочленом* порядка (n, k), если условие

$$\iint\limits_E F_{nk}(x, y)\, Q_{ms}(x, y)\, dF(x, y) = 0 \tag{5}$$

выполняется для любого многочлена $Q_{ms}(x, y)$ порядка (m, s) меньшего, чем (n, k).

Теорема 1. *Если* $\Delta_{n(k-1)} \neq 0$, *то существует единственный ортогональный многочлен* $F_{nk}(x, y)$ *порядка* (n, k), *удовлетворяющий условию* (5).

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что главный коэффициент искомого многочлена равен 1. Тогда имеем разложение

$$F_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} x^{n-s} y^s + x^{n-k} y^k. \tag{6}$$

В этой формуле коэффициенты $\{c_{ms}\}$ неизвестны. Их надо определить так, чтобы многочлен (6) был ортогонален всем одночленам

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, x^{n-k+1} y^{k-1}.$$

В силу формулы (5) это означает, что должны выполняться условия

$$\iint_E F_{nk}(x, y)\, x^{p-q} y^q dF(x, y) = 0, \qquad (p, q) < (n, k). \tag{7}$$

Подставляя сюда многочлен (6) и учитывая моменты (1), систему (7) приводим к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} h_{ms} + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} h_{ns} = -h_{nk}, \\ &\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} h_{(m+1)s} + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} h_{(n+1)s} = -h_{(n+1)k}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} h_{(n+m)(s+k-1)} + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} h_{2n(s+k-1)} = -h_{2n(2k-1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Определитель $\Delta_{n(k-1)}$ системы (8) по условию теоремы отличен от нуля. Следовательно, система (8) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Из определения ортогонального многочлена условием (5) и теоремы 1 следует важный вывод. Если среди всех определителей (4) только один определитель $\Delta_{n(k-1)}$ отличен от нуля, то однозначно определяется только один ортогональный многочлен $F_{nk}(x, y)$, который, таким образом, не зависит от всех остальных определителей вида (4). Заметим, что ортогональный многочлен $F_{n0}(x, y)$ определяется при условии $\Delta_{(n-1)(n-1)} \neq 0$. А если отличны от нуля все определители вида (4), то однозначно определяется вся система ортогональных многочленов $\{F_{nk}(x, y)\}$.

Рассмотрим более общий случай. Предположим, что первоначально дана не функция $F(x, y)$ на множестве E, а система моментов (3). Эти моменты определяют некоторый линейный функционал по формуле

$$h_{nk} = F(x^{n-k}y^k). \tag{9}$$

Иными словами, линейный функционал F определяется своими степенными моментами (3) и может не иметь интегрального представления через функцию $F(x, y)$ на множестве E. Но формула (9) определяет этот функционал на множестве всех алгебраических многочленов. Условие ортогональности в этом случае вместо формулы (5) имеет вид

$$F(F_{nk}Q_{ms}) = 0. \tag{10}$$

Поскольку определители (4) вводятся по системе моментов (3), то теорема 1 и все выводы из нее справедливы и в случае функционала F, определенного формулой (9).

Далее, теорема 1 указывает условия существования всех подряд ортогональных многочленов $\{F_{nk}(x, y)\}$, которые называются основными ортогональными многочленами. Но, как и в § 4 гл. I, здесь можно ввести монические ортогональные многочлены. Рассмотрим монический многочлен степени n порядка (n, k)

$$\Phi_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms}x^{m-s}y^s. \tag{11}$$

Ортогональность этого многочлена ко всем многочленам меньшей степени, аналогично условию (10), означает выполнение условия

$$F(\Phi_{nk}Q_{n-1}) = 0, \tag{12}$$

где многочлен $Q_{n-1}(x, y)$ имеет степень не более $n-1$.

Для формулировки теоремы существования монических ортогональных многочленов среди определителей (4) выделим отдельно определители

$$\Delta_n = \Delta_{(n-1)(n-1)} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{(n-1)(n-1)} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(n-1)(n-1)} & h_{n(n-1)} & \dots & h_{2(n-1)2(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если определитель* (13) *отличен от нуля, то однозначно определяются все* $n+1$ *монических ортогональных многочленов* (11) *при* $k = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Поскольку монический многочлен (11) должен быть ортогональным всем многочленам степени не более $n-1$, то он должен быть ортогональным всем одночленам

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ \ldots,\ xy^{n-2},\ y^{n-1}.$$

Следовательно, в этом случае, используя условие ортогональности (12), вместо системы (8) получим систему

$$\begin{gathered}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms}h_{ms} = -h_{nk},\\ \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms}h_{(m+1)s} = -h_{(n+1)k},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms}h_{(m+n-1)(s+n-1)} = -h_{(2n-1)(k+n-1)}.\end{gathered} \tag{14}$$

Определитель Δ_n этой системы отличен от нуля. При этом левая часть системы (14) одна и та же для всех монических многочленов степени n, а при переходе к другому моническому многочлену меняется только правая часть. Теорема доказана.

Далее, как и в гл. I, можно рассматривать обобщенные монические многочлены. Пусть фиксирован однородный многочлен степени n

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk}x^{n-k}y^k.$$

Тогда при условии $\Delta_n \neq 0$ можно так подобрать многочлен $R_{n-1}(x, y)$ степени не выше $n-1$, что многочлен

$$B_n(x, y) = Q_n(x, y) + R_{n-1}(x, y) \tag{15}$$

будет ортогональным относительно функционала F, т. е. будут выполняться условия

$$F(B_n x^{m-1-k}y^k) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m < n. \tag{16}$$

В самом деле, условия (16) и в этом случае сводятся к системе уравнений (14), но правые части будут иметь вид

$$-F(Q_n x^{p-1-k}y^k), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p, \quad p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

До сих пор в определениях основных ортогональных многочленов (6), монических ортогональных многочленов

(11) и обобщенных ортогональных многочленов (15) говорилось только об ортогональности. В связи с этим возникает вопрос об условиях, когда все эти многочлены можно нормировать. Иногда это невозможно, ибо для некоторого многочлена $Q_n(x, y)$ и некоторого функционала F_0 может выполняться условие $F_0\left(Q_n^2\right) = 0$. В этом случае говорят, что функционал F_0 вырожден. С другой стороны, функционал F называется *невырожденным*, если для любого отличного от тождественного нуля многочлена $Q_n(x, y)$ выполняется условие $F\left(Q_n^2\right) \neq 0$. А если, кроме того, имеет место неравенство

$$F\left(Q_n^2\right) > 0, \tag{17}$$

то функционал F называется *положительным*. В этом случае все рассмотренные выше ортогональные многочлены можно нормировать по обычным формулам

$$\widehat{F}_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\mu_{nk}}} F_{nk}(x, y), \qquad \mu_{nk} = F\left(F_{nk}^2\right). \tag{18}$$

Далее, пусть, как и в § 4 гл. I, дана ортогональная матрица

$$A_{n+1} = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Ортогональность матрицы означает выполнение условий

$$\sum_{j=0}^{n} a_{mj} a_{kj} = \delta_{mk}, \qquad m, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда вводим систему многочленов

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{j=0}^{n} a_{kj} \widehat{F}_{nj}(x, y), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Нетрудно показать, что эти многочлены ортонормированы относительно функционала F.

Таким образом, если все определители вида (4) отличны от нуля, то функционал F, удовлетворяющий условию (17), определяет основные ортогональные многочлены (18), монические ортогональные многочлены (11), обобщенные монические ортогональные многочлены (15) и общие ортогональные многочлены (19). Множество всех этих многочленов, их всевозможные линейные комбинации, а также тождественный нуль, как и в первой главе, обозначим через W_n. Если $P_n(x, y) \in W_n$, то для любого многочлена $R_{n-1}(x, y)$ степени не выше $n-1$ выполняется условие

$$F(P_n R_{n-1}) = 0. \tag{20}$$

Пространство W_n можно определить безо всяких условий на функционал F как множество таких многочленов $P_n(x, y)$ степени не выше n, для которых выполняется условие (20). Если $\Delta_n \neq 0$, то пространство W_n имеет размерность не меньше $n+1$.

Для общности можно рассматривать невырожденность функционала только на множестве многочленов степени не выше m, что означает выполнение условия $F\left(Q_m^2\right) \neq 0$ для всякого отличного от тождественного нуля многочлена $Q_m(x, y)$ степени не выше m. Если для всякого такого многочлена выполняется условие $F\left(Q_m^2\right) > 0$, то функционал называется положительным на множестве многочленов степени не выше m. Если функционал положителен, то из равенства $F\left(R_m^2\right) = 0$ следует тождество $R_m(x, y) \equiv 0$.

Теорема 3. *Если $\Delta_n \neq 0$ и функционал F не вырожден на множестве многочленов степени не выше $n-1$, то монические ортогональные многочлены степени n образуют базис в пространстве W_n.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 6 из главы I. Только вместо интегралов по области здесь фигурирует функционал F. А в конце доказательства поскольку функционал F не вырожден из условия $F\left(R_{n-1}^2\right) = 0$ следует $R_{n-1}(x, y) \equiv 0$. Заметим, что в теореме 3 пространство W_n рассматривается изолированно от других аналогичных пространств.

§ 2. Теорема существования в наиболее общем виде

Пусть дана система степенных моментов $\{h_{nk}\}$ и соответствующий ей линейный функционал F. Если отличны от нуля все определители $\{\Delta_{nk}\}$ вида (1.4), то можно ввести последовательность пространств

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ \ldots, \tag{1}$$

которые ортогональны между собой по функционалу F.

Вместо всей системы определителей (1.4) рассмотрим только последовательность определителей (1.13)

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n,\ \ldots \tag{2}$$

В силу теоремы 2, если $\Delta_n \neq 0$, то однозначно определяются все $n+1$ монических ортогональных многочленов

$$\Phi_{n0}(x,\ y),\ \Phi_{n1}(x,\ y),\ \ldots,\ \Phi_{nn}(x,\ y). \tag{3}$$

Далее, если $\Delta_n \neq 0$ и функционал F не вырожден на множестве многочленов степени не выше $n-1$, то по теореме 3 многочлены (3) образуют базис в пространстве W_n, т. е. для всякого многочлена из этого пространства справедливо представление

$$P_n(x,\ y) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_{nk}(x,\ y). \tag{4}$$

В настоящем параграфе будем считать, что при условии $\Delta_n \neq 0$ пространство W_n имеет размерность $n+1$. Это эквивалентно тому, что пространство W_n есть множество всех многочленов вида (4). Формула (4) означает также, что монические ортогональные многочлены (3) образуют базис в пространстве W_n. Таким образом, если все определители (2) отличны от нуля, то однозначно определяется последовательность ортогональных между собой пространств (1). Основная задача настоящего параграфа заключается в том, чтобы доказать существование в каждом из пространств (1) ортогонального базиса.

В пространстве W_n помимо монических ортогональных многочленов (3) существуют и другие базисы, которые можно получать как линейные комбинации многочленов (3). Пусть дан такой базис:

$$B_{n0}(x,\ y),\ B_{n1}(x,\ y),\ \ldots,\ B_{nn}(x,\ y). \tag{5}$$

Здесь первый индекс n означает степень многочлена, а второй индекс — номер многочлена в данном базисе. Рассмотрим некоторые свойства базисов вида (5) в пространстве W_n.

Прежде всего заметим, что многочлены (5) линейно независимы. Поэтому их можно переставлять между собой, прибавлять к каждому из них линейные комбинации других, умножать каждый многочлен на любое отличное от нуля число.

Лемма 1. *Если $\Delta_n \neq 0$ и многочлены* (5) *образуют базис в пространстве W_n, то в системе* (5) *не существует* *многочлена $B_{nk}(x, y)$, для которого выполнялись бы условия*

$$F(B_{nk}B_{ns}) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим противное, что такой многочлен $B_{nk}(x, y)$ существует. Условие (6) означает, что этот многочлен ортогонален всем многочленам (5) и в том числе самому себе. Разумеется, это может быть только в том случае, когда функционал F вырожден в классе многочленов степени n. При этом он может быть не вырожден в классе многочленов степени не более $n-1$. Тогда в пространстве W_{n+1} возьмем любой монический многочлен $\Phi_{(n+1)m}(x, y)$ и рассмотрим два многочлена

$$\Phi_{(n+1)m}(x, y), \; \Phi_{(n+1)m}(x, y) + B_{nk}(x, y). \tag{7}$$

С другой стороны, любой многочлен $R_n(x, y)$ степени не выше n можно представить в виде

$$R_n(x, y) = \sum_{s=0}^{n} c_s B_{ns}(x, y) + P_{n-1}(x, y), \tag{8}$$

где $P_{n-1}(x, y)$ есть многочлен степени не выше $n-1$. В силу условий (6) из формулы (8) находим $F(B_{nk}R_n) = 0$. Следовательно, оба многочлена (7) являются моническими, что противоречит единственности монического многочлена порядка $(n+1, m)$. Лемма доказана.

Следствие. Если многочлены (5) образуют базис в W_n и для некоторого многочлена $B_{nk}(x, y)$ выполняются условия (6) при всех s, кроме $s = k$, то необходимо

$$F\left(B_{nk}^2\right) \neq 0. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если $\Delta_n \neq 0$ и $\Delta_{n+1} \neq 0$, то в пространстве W_n существует такой базис* (5), *что по крайней мере для одного многочлена этого базиса выполняется условие* (9).

Доказательство. Рассмотрим монический базис (3) в пространстве W_n. Если хотя бы для одного многочлена этого базиса выполняется условие (9), то доказательство закончено. Пусть теперь для всех многочленов (3) выполняется условие $F\left(\Phi_{nk}^2\right) = 0$. Возьмем, например, равенство $F\left(\Phi_{n0}^2\right) = 0$. Тогда по лемме 1 существует хотя бы один многочлен $\Phi_{nk}(x, y)$, для которого имеем условие $F(\Phi_{n0}\Phi_{nk})\neq 0$. Рассмотрим новый базис:

$$\begin{aligned} &B_{nm}(x, y)=\Phi_{nm}(x, y), \qquad m\neq k,\\ &B_{nk}(x, y)=\Phi_{n0}(x, y)+\Phi_{nk}(x, y). \end{aligned} \tag{10}$$

От монического базиса этот базис отличается только одним многочленом с номером k. Для этого многочлена имеем

$$F\left(B_{nk}^2\right)=2F\left(\Phi_{n0}\Phi_{nk}\right)\neq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\Delta_n\neq 0$ и $\Delta_{n+1}\neq 0$, то в пространстве W_n существует такой базис $\{B_{nk}(x, y)\}$, что хотя бы для одного многочлена $B_{ns}(x, y)$ выполняются условия*

$$F\left(B_{ns}^2\right)\neq 0, \quad F\left(B_{ns}B_{nm}\right)=0, \qquad m\neq s. \tag{11}$$

Доказательство. В силу леммы 2 существует хотя бы один многочлен, для которого выполняется условие (9). Не нарушая общности, можем считать, что это многочлен $B_{n0}(x, y)$, т. е. имеем условие $F\left(B_{n0}^2\right)\neq 0$. Вводим новый базис по формулам

$$\begin{aligned} &Q_{n0}(x, y)=B_{n0}(x, y),\\ &Q_{nm}(x, y)=c_mB_{n0}(x, y)+B_{nm}(x, y). \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда имеем равенство

$$F\left(Q_{n0}Q_{nm}\right)=c_mF\left(Q_{n0}B_{n0}\right)+F\left(Q_{n0}B_{nm}\right). \tag{13}$$

Поскольку $F\left(B_{n0}^2\right)\neq 0$, то c_m в формуле (12) можно выбрать так, чтобы правая часть равенства (13) была равна нулю. Лемма доказана.

А теперь рассмотрим основной результат настоящего параграфа — теорему существования ортогонального базиса в пространстве W_n.

Теорема 4. *Если $\Delta_n\neq 0$ и $\Delta_{n+1}\neq 0$, то в пространстве W_n существует ортогональный базис $\{B_{nm}(x,y)\}$, для которого выполняются условия*

$$F\left(B_{nk}B_{nm}\right)=0, \qquad k\neq m, \tag{14}$$

$$F\left(B_{nk}^2\right)\neq 0. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим, что условия леммы 3 выполняются для многочлена $B_{n0}(x, y)$, т. е. вместо

(11) имеем

$$F(B_{n0}^2) \neq 0, \quad F(B_{n0}B_{nm}) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Среди многочленов

$$B_{n1}(x, y), B_{n2}(x, y), \ldots, B_{nn}(x, y) \tag{17}$$

выберем тот, для которого выполняется условие $F(B_{ns}^2) \neq 0$. Не нарушая общности, можем считать, что это многочлен $B_{n1}(x, y)$, т. е. имеем $F(B_{n1}^2) \neq 0$. Далее вводим новый базис по формулам

$$\begin{gathered} Q_{n0}(x, y) = B_{n0}(x, y), \quad Q_{n1}(x, y) = B_{n1}(x, y), \\ Q_{nm}(x, y) = c_m B_{n1}(x, y) + B_{nm}(x, y), \qquad m = 2, 3, \ldots, n. \end{gathered} \tag{18}$$

Из равенства (18) находим условие ортогональности

$$F(B_{n1}Q_{nm}) = c_m F(B_{n1}^2) + F(B_{n1}B_{nm}) = 0,$$

которое определяет постоянную c_m. Следовательно, новый базис $\{Q_{nm}(x, y)\}$ можно выбрать так, чтобы и многочлен $Q_{n1}(x, y)$ был ортогонален всем другим многочленам этого базиса. Таким образом, в силу условий (16) в базисе $\{Q_{nm}(x, y)\}$ уже два первых многочлена удовлетворяют условиям (14) и (15).

Такой процесс ортогонализации можно продолжить. При этом возможны следующие два случая.

1. На каждом шаге среди оставшихся многочленов имеется хотя бы один многочлен $Q_{nm}(x, y)$, для которого выполняется условие $F(Q_{nm}^2) \neq 0$. Тогда процесс ортогонализации можно продолжить, и в конце получим базис, удовлетворяющий условиям (14) и (15).

2. На некотором шаге окажется, что многочлены

$$Q_{n0}(x, y), Q_{n1}(x, y), \ldots, Q_{ns}(x, y) \tag{19}$$

удовлетворяют условиям (14) и (15), а для всех оставшихся многочленов

$$Q_{n(s+1)}(x, y), Q_{n(s+2)}(x, y), \ldots, Q_{nn}(x, y) \tag{20}$$

выполняется условие

$$F(Q_{nm}^2) = 0, \qquad m > s. \tag{21}$$

Например, это условие может выполняться уже для всех многочленов (17). Рассмотрим этот случай подробнее.

Возьмем произвольный многочлен из системы (20), например, многочлен $Q_{n(s+1)}(x, y)$. Предположим, что для него выполняются условия

$$F(Q_{n(s+1)}Q_{nm}) = 0, \quad m = s+2,\ s+3,\ \ldots,\ n. \tag{22}$$

Поскольку многочлены (19) ортогональны всем многочленам (20), то условия (21) и (22) означают, что многочлен $Q_{n(s+1)}(x, y)$ ортогонален всем многочленам базиса $\{Q_{nk}(x, y)\}$ в том числе и самому себе. Но по лемме 1 этот случай невозможен.

Следовательно, среди многочленов (20) существует хотя бы один, например, многочлен $Q_{n(s+2)}(x, y)$, для которого условие (22) не выполняется, т. е. имеем

$$F(Q_{n(s+1)}Q_{n(s+2)}) \neq 0. \tag{23}$$

А тогда в базисе $\{Q_{nk}(x, y)\}$ вместо многочлена $Q_{n(s+1)}(x, y)$ аналогично формуле (10) вводим новый многочлен

$$\tilde{Q}_{n(s+1)}(x, y) = Q_{n(s+1)}(x, y) + Q_{n(s+2)}(x, y). \tag{24}$$

В силу условий (21) и (23) для этого многочлена имеем

$$F\left(\tilde{Q}^2_{n(s+1)}\right) = 2F(Q_{n(s+1)}Q_{n(s+2)}) \neq 0.$$

Таким образом, изменяя базисный многочлен по формуле (24) при условии (23), приходим к первому случаю, когда процесс ортогонализации может быть продолжен.

Следует заметить, что равенство (24) справедливо при условии $s + 1 < n$. Поэтому случай $s + 1 = n$ надо рассмотреть отдельно. Поскольку в этом случае $s = n - 1$, то условия (21) сводятся к одному равенству $F(Q^2_{nn}) = 0$. А это вместе с ортогональностью базиса $\{Q_{nk}(x, y)\}$ противоречит лемме 1. Теорема доказана.

Теорема 4 является теоремой существования системы ортогональных многочленов в самом общем случае. Эта теорема относится к пространству W_n и справедлива при условиях $\Delta_n\Delta_{n+1} \neq 0$. А если все определители (2) отличны от нуля, то во всех пространствах (1) существуют ортогональные базисы, удовлетворяющие условиям (14) и (15).

Если функционал F положителен, то ортогональный базис можно нормировать. В самом деле, в силу неравенства (1.17) условие положительности функционала F означает, что для всякого отличного от тождественного нуля многочлена $Q_n(x, y)$ выполняется неравенство

$F(Q_n^2)>0$. В этом случае, аналогично формулам (1.18) полагаем

$$\mu_{nk}^2 = F\left(B_{nk}^2\right), \qquad \widehat{B}_{nk}(x, y) = \frac{1}{\mu_{nk}} B_{nk}(x, y). \tag{25}$$

Далее, нетрудно видеть, что в каждом пространстве W_n при наличии одного ортонормированного базиса можно построить бесконечное множество других. В самом деле, пусть дана ортогональная матрица

$$A_{n+1} = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

Ортогональность матрицы (26) означает выполнение условий

$$\sum_{j=0}^{n} a_{mj} a_{kj} = \delta_{mk}. \tag{27}$$

Теорема 5. *Пусть в пространстве W_n даны два базиса $\{B_{nk}(x, y)\}$ и $\{Q_{nk}(x, y)\}$. Если базис $\{B_{nk}(x, y)\}$ ортонормирован, то для ортонормированности базиса $\{Q_{nk}(x, y)\}$ необходимо и достаточно существование такой ортогональной матрицы* (26), *что имеют место равенства*

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{s=0}^{n} a_{ms} B_{ns}(x, y), \qquad m = 0, 1, \dots, n. \tag{28}$$

Доказательство. Так как многочлены $\{B_{nk}(x, y)\}$ образуют базис, то коэффициенты в равенствах (28) определяются однозначно, т. е. матрица (26) определена. Учитывая ортонормированность базиса $\{B_{nk}(x, y)\}$, из равенств (28) находим

$$F(Q_{nm} Q_{nk}) = \sum_{j=0}^{n} a_{mj} a_{kj}. \tag{29}$$

А теперь, если матрица ортогональна, то в силу условий (27) правая часть равенства (29) равна δ_{mk}, и, следовательно, базис $\{Q_{nm}(x, y)\}$ ортонормирован. А если базис $\{Q_{nm}(x, y)\}$ ортонормирован, то левая часть равенства (29) равна δ_{mk}, и матрица (26) ортогональна. Теорема доказана.

Далее, поскольку матрица A_{n+1} ортогональная, то для транспонированной матрицы A'_{n+1} имеем равенство

$A'_{n+1}A_{n+1}=E$. Следовательно, аналогично формулам (28) справедливы формулы

$$B_{ns}(x, y)=\sum_{m=0}^{n} a_{ms}Q_{nm}(x, y). \tag{30}$$

Иными словами, обратный переход от базиса $\{Q_{nm}(x, y)\}$ к базису $\{B_{ns}(x, y)\}$ осуществляется с помощью транспонированной матрицы A'_{n+1} к матрице A_{n+1}.

§ 3. Ряды Фурье по обобщенным ортогональным многочленам двух переменных

Пусть на множестве E определена функция $F(x, y)$ ограниченной вариации, и этой функции соответствует ортонормированный базис

$$\{B_{nk}(x, y)\}, \quad k=0, 1, \ldots, n, \quad n=0, 1, \ldots \tag{1}$$

Предположим, что на множестве E дана действительная функция $f(x, y)$ такая, что существуют все интегралы вида

$$h_{nk}(f)=\iint\limits_{E} f(x, y)\, x^{n-k}y^{k}\, dF(x, y). \tag{2}$$

Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по базисной системе (1), как обычно, можно определить по формуле

$$a_{nk}=\iint\limits_{E} f(x, y)\, B_{nk}(x, y)\, dF(x, y). \tag{3}$$

Поскольку интегралы вида (2) существуют, то все коэффициенты (3) конечны. Следовательно, функции $f(x, y)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье по ортогональным многочленам двух переменных

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}B_{nk}(x, y). \tag{4}$$

В § 6 гл. I ряды (4) рассмотрены в случае неотрицательного дифференциального веса, т. е. при условии $dF(x, y)=h(x, y)\,dx\,dy$, где $h(x, y)\geqslant 0$. Но все результаты, изложенные в упомянутом параграфе, переносятся почти без изменений на случай неотрицательного интегрального веса $dF(x, y)$, удовлетворяющего условиям (1.1.20) и (1.1.21). Не будем повторять формулировки, а перейдем к рассмотрению более общих случаев. Сразу же заметим, что ряды Фурье (4) нельзя рассматривать в том случае, когда базисная система (1) определена линейным функционалом F без интегрального представления. В самом деле, в общем случае функционал F можно определить с помощью степенных моментов, и при некоторых условиях базисная система (1) существует. А формулы (2) и (3) имеют смысл, если функционал F допускает интегральное представление, в котором $dF(x, y)$ означает меру, определенную на множестве E.

Для внутренней суммы ряда (4) введем обозначение

$$H_n(x, y, f) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} B_{nk}(x, y). \tag{5}$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что сумма (5) не зависит от аналогичных сумм с другими номерами. Более того, многочлены (1) можно рассматривать только при данном фиксированном n. Тогда при некоторых условиях система многочленов

$$B_{n0}(x, y),\ B_{n1}(x, y),\ \ldots,\ B_{nn}(x, y) \tag{6}$$

является базисом в пространстве W_n. В этом случае сумму (5) можно рассматривать как проекцию функции $f(x, y)$ на пространство W_n.

Предположим, что в пространстве W_n определен другой базис

$$Q_{n0}(x, y),\ Q_{n1}(x, y),\ \ldots,\ Q_{nn}(x, y). \tag{7}$$

Вводим коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по этому базису

$$b_{nm} = \iint_E f(x, y)\, Q_{nm}(x, y)\, dF(x, y) \tag{8}$$

и аналогичную (5) сумму

$$\Psi_n(x, y, f) = \sum_{m=0}^{n} b_{nm} Q_{nm}(x, y). \tag{9}$$

Теорема 6. *Внутренняя сумма* (5) *ряда Фурье* (4) *для данной функции* $f(x, y)$ *не зависит от выбора базиса в пространстве* W_n, *т. е. при любых базисах* (6) *и* (7) *имеет место равенство*

$$H_n(x, y, f) = \Psi_n(x, y, f). \tag{10}$$

Доказательство. Из равенства (9) в силу формулы (2.28) находим

$$\Psi_n(x, y, f) = \sum_{m=0}^{n} b_{nm}\left[\sum_{k=0}^{n} c_{mk}B_{nk}(x, y)\right] = \\ = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{n} b_{nm}c_{mk}\right)B_{nk}(x, y). \quad (11)$$

Далее, так как матрица перехода от базиса (6) к базису (7) ортогональна, то в силу формулы (2.30) имеем равенство

$$B_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} c_{mk}Q_{nm}(x, y). \quad (12)$$

Следовательно, используя формулы (8) и (12), получаем

$$\sum_{m=0}^{n} b_{nm}c_{mk} = \iint_E f(x, y)\left[\sum_{m=0}^{n} c_{mk}Q_{nm}(x, y)\right]dF(x, y) = \\ = \iint_E f(x, y)B_{nk}(x, y)\,dF(x, y) = a_{nk}. \quad (13)$$

Сопоставляя равенства (11) и (13), находим формулу (10). Теорема доказана.

Таким образом, используя обозначение (5), ряд (4) представляем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, f), \quad (14)$$

где общий член определяется однозначно независимо от выбора базиса в пространстве W_n.

Пусть, как обычно, функция $f(x, y)$ определена на множестве E и существуют все интегралы вида (2). Тогда в силу теоремы 6 однозначно определяется проекция $H_n(x, y, f)$ функции $f(x, y)$ на пространство W_n. Обозначим через $W_n(f)$ ту часть пространства W_n, которая ортогональна функции $f(x, y)$, или, точнее — проекции $H_n(x, y, f)$ на пространство W_n, т. е. полагаем

$$Q_n(x, y) \in W_n(f) \subset W_n \Leftrightarrow F(H_nQ_n) = 0. \quad (15)$$

Теорема 7. *Если функционал F положителен, то пространство $W_n(f)$ имеет размерность n или $n+1$.*

Доказательство. Пусть в пространстве W_n фиксирован некоторый базис (6). Тогда любой многочлен из пространства W_n можно представить в виде

$$Q_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} b_{nm} B_{nm}(x, y). \tag{16}$$

С другой стороны, проекция функции $f(x, y)$ на пространство W_n определяется по формуле (5). Следовательно, условие ортогональности (15) имеет вид

$$F(fQ) = F(H_n Q_n) = \sum_{m=0}^{n} a_{nm} b_{nm} = 0. \tag{17}$$

Если в формуле (5) все коэффициенты $\{a_{nk}\}$ равны нулю, то условие (17) выполняется для всех многочленов из пространства W_n. Следовательно, в этом случае $W_n(f) = W_n$, и размерность пространства $W_n(f)$ равна $n+1$.

Предположим теперь, что среди коэффициентов разложения (5) хотя бы один отличен от нуля. Для общности предположим, что отличны от нуля еще несколько коэффициентов, т. е.

$$a_{n0} \neq 0,\ a_{n1} \neq 0,\ \ldots,\ a_{nk} \neq 0, \qquad k \leqslant n. \tag{18}$$

Рассмотрим условие ортогональности (17). Поскольку $a_{n0} \neq 0$, то в формуле (17) можно менять произвольным образом все коэффициенты $\{b_{nm}\}$, начиная с номера $m = 1$. Пусть эти коэффициенты фиксированы произвольно. Тогда коэффициент b_{n0} можно выбрать так, чтобы выполнялось условие ортогональности (17). Следовательно, множество многочленов вида (16), удовлетворяющих условию (17), имеет размерность n. Это утверждение справедливо и в том случае, если в силу условий (18) отличны от нуля еще несколько коэффициентов разложения (5). Теорема доказана.

Продолжаем рассматривать ряды Фурье по ортогональным многочленам двух переменных при наиболее общих условиях.

Теорема 8. *Если $\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0$, то для всякой функции $f(x, y)$ с конечными интегралами (2) в пространстве W_n существует такой базис $\{Q_{nk}(x, y)\}$, что сумма вида (5) содержит не более одного слагаемого, т. е.*

$$H_n(x, y, f) = a_n(f) v_n(x, y), \tag{19}$$

а весь ряд (14) приводится к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) v_n(x, y). \tag{20}$$

Доказательство. Предположим, что при данном n имеем равенство $W_n(f) = W_n$. Тогда в силу теоремы 6 $H_n(x, y, f) = 0$. Это означает, что все коэффициенты Фурье порядка n функции $f(x, y)$ равны нулю. В этом случае условие (19) выполнено.

Пусть теперь $W_n(f) \neq W_n$. Тогда в силу теоремы 7 пространство $W_n(f)$ имеет размерность n. Следовательно, в пространстве W_n существует вектор-многочлен $v_n(x, y)$, ортогональный всему подпространству $W_n(f)$. Можно считать, что норма вектора $v_n(x, y)$ равна 1. В этом случае в пространстве W_n вводим базис

$$Q_{n0}(x, y) = v_n(x, y),\ Q_{n1}(x, y),\ \ldots,\ Q_{nn}(x, y) \tag{21}$$

и определяем коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по этому базису

$$a_{nk} = \iint_E f(x, y)\, Q_{nk}(x, y)\, dF(x, y). \tag{22}$$

Так как многочлены (21) ортогональны между собой, то выполняются условия

$$a_{n0} \neq 0, \quad a_{n1} = a_{n2} = \ldots = a_{nn} = 0.$$

Для нулевого коэффициента вместо общей формулы (22) вводим специальное обозначение

$$a_n(f) = a_{n0} = \iint_E f(x, y)\, v_n(x, y)\, dF(x, y).$$

Следовательно, в этом случае вся сумма (5) приводится к виду (19).

Предположим, что такая операция проделана для всех номеров n. Тогда ряд (14) приводится к ряду (20). Теорема доказана.

Ряд вида (20) будем называть *приведенным рядом Фурье* функции $f(x, y)$.

Теорема 9. *Если* $\Delta_n\Delta_{n+1} \neq 0$, *то при любых базисах* (6), (7) *и* (21) *справедливо равенство*

$$a_n^2(f) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^2 = \sum_{m=0}^{n} b_{nm}^2. \tag{23}$$

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы 6 имеем формулу

$$a_n(f)\, v_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} B_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} b_{nm} Q_{nm}(x, y),$$

из которой и следует равенство (23).

Рассмотрим простейшие арифметические операции над приведенными рядами вида (20). Прежде всего, заметим, что при любой постоянной c функции $cf(x, y)$ соответствует приведенный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n(f)\, v_n(x, y).$$

Далее, пусть дана другая функция $\varphi(x, y)$ на множестве E и ее приведенный ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\varphi)\, u_n(x, y). \tag{24}$$

Теорема 10. *Если функции $f(x, y)$ соответствует приведенный ряд* (20), *а функции $\varphi(x, y)$ — приведенный ряд* (24), *то сумме $f(x, y) + \varphi(x, y)$ соответствует приведенный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x, y),$$

для общего члена которого справедливо равенство

$$c_n w_n(x, y) = a_n(f)\, v_n(x, y) + b_n(\varphi)\, u_n(x, y). \tag{25}$$

Доказательство. В силу теоремы 6 для функции $f(x, y) + \varphi(x, y)$ в пространстве W_n существует базис

$$w_n(x, y) = w_{n0}(x, y),\ w_{n1}(x, y),\ \ldots,\ w_{nn}(x, y), \tag{26}$$

при котором проекция функции $f(x, y) + \varphi(x, y)$ на пространство W_n состоит из одного слагаемого, т. е. имеем

$$H_n(x, y, f + \varphi) = c_n w_n(x, y).$$

С другой стороны, проекции функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ на пространство W_n можно разложить по базису (26), и в силу теоремы 6 имеем равенства

$$H_n(x, y, f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w_{nk}(x, y) = a_n(f)\, v_n(x, y),$$

$$H_n(x, y, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k w_{nk}(x, y) = b_n(\varphi)\, u_n(x, y).$$

Далее, в силу линейности операции проектирования имеем формулу

$$H_n(x, y, f + \varphi) = H_n(x, y, f) + H_n(x, y, \varphi),$$

из которой и следует равенство (25). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда мера $dF(x, y)$ неотрицательна на множестве E, т. е. выполняются условия

$$0 < \iint\limits_E dF(x, y) < \infty, \tag{27}$$

$$0 < \iint\limits_E Q_n(x, y)\, dF(x, y) < \infty, \tag{28}$$

где отличный от тождественного нуля многочлен $Q_n(x, y)$ неотрицателен на множестве E. В этом случае можно ввести множество функций $L_2(E, dF)$, для каждой из которых $f(x, y)$ выполняется условие

$$\|f\|^2 = \iint\limits_E f^2(x, y)\, dF(x, y) < \infty. \tag{29}$$

Как обычно, для всякой функции $f(x, y) \in L_2(E, dF)$ можно рассматривать задачу на минимум интеграла

$$J_n = \|f - Q_n\|^2 = \iint\limits_E [f(x, y) - Q_n(x, y)]^2 dF(x, y) \tag{30}$$

на множестве всех многочленов степени не выше n.

Теорема 11. *Если мера $dF(x, y)$ неотрицательна на множестве E, а функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию* (29), *то интеграл* (30) *имеет минимум только в случае частичной суммы*

$$S_n(x, y, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k(x, y) \tag{31}$$

приведенного ряда Фурье (20) *функции $f(x, y)$, причем этот минимум равен*

$$\min J_n = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{32}$$

Доказательство. Произвольный многочлен $Q_n(x, y)$ степени не выше n можно представить в виде

$$Q_n(x, y) = S_n(x, y, f) + R_n(x, y). \tag{33}$$

К многочлену $R_n(x, y)$ применим теорему 8. В результате получим приведенное разложение Фурье

$$R_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} c_m w_m(x, y). \tag{34}$$

Следовательно, из равенства (33), учитывая разложения (31) и (34), находим

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k(x, y) + \sum_{m=0}^{n} c_m w_m(x, y). \tag{35}$$

Далее, для краткости введем обозначение

$$(v_k;\, w_m) = \iint_E v_k(x, y)\, w_m(x, y)\, dF(x, y). \tag{36}$$

Используя это обозначение и равенство (35), для интеграла (30) получаем последовательно

$$J_n = \|f - Q_n\|^2 =$$

$$= \iint_E \left[f(x, y) - \sum_{k=0}^{n} a_k v_k(x, y) - \sum_{m=0}^{n} c_m w_m(x, y) \right]^2 dF(x, y) =$$

$$= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k (f;\, v_k) - 2 \sum_{m=0}^{n} c_m (f;\, w_m) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} [a_k a_m (v_k;\, v_m) + 2 a_k c_m (v_k;\, w_m) + c_k c_m (w_k;\, w_m)]. \tag{37}$$

Поскольку обе системы многочленов $\{v_k(x, y)\}$ и $\{w_m(x, y)\}$ являются ортонормированными, то в силу обозначения (36) имеем равенства

$$(v_k;\, v_m) = (v_k;\, w_m) = (w_k;\, w_m) = 0, \quad k \neq m,$$

$$(v_k;\, v_k) = (w_m;\, w_m) = 1.$$

Следовательно, равенство (37) приводится к виду

$$J_n = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 - 2 \sum_{m=0}^{n} c_m (f;\, w_m) +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{n} a_k c_k (v_k;\, w_k) + \sum_{m=0}^{n} c_m^2. \tag{38}$$

Далее, поскольку многочлен $v_k(x, y)$ является базисным многочленом порядка k, то имеем представление

$$w_k(x, y) = r_k v_k(x, y) + g_k(x, y),$$

где многочлен $g_k(x, y)$ ортогонален многочлену $v_k(x, y)$, т. е. имеем равенство $(v_k;\, g_k) = 0$, с помощью которого

находим

$$(f;\ g_k)=0,\quad (v_k;\ w_k)=r_k,$$
$$(f;\ w_m)=r_m(f;\ v_m)=r_m a_m.$$

Учитывая эти условия, из формулы (38) получаем

$$J_n=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^2-2\sum_{m=0}^{n}c_m r_m a_m+$$
$$+2\sum_{k=0}^{n}a_k c_k r_k+\sum_{m=0}^{n}c_m^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\sum_{m=0}^{n}c_m^2. \quad (39)$$

Сопоставляя равенства (35) и (39), находим, что минимум интеграла (30) достигается только в случае суммы (31), причем этот минимум определяется по формуле (32). Теорема доказана.

Поскольку при условиях (27) и (28) величина (32) неотрицательна, то справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2\leqslant\|f\|^2, \quad (40)$$

из которого следует условие

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0. \quad (41)$$

Еще раз заметим, что неравенство (40) и предельное соотношение (41) справедливы для коэффициентов приведенного ряда Фурье по ортогональным многочленам двух переменных функции $f(x,\ y)$, удовлетворяющей условию (29).

§ 4. Монические ортогональные многочлены при минимальных условиях

Пусть дана бесконечная треугольная таблица чисел

$$\begin{array}{l} h_{00}, \\ h_{10},\ h_{11}, \\ h_{20},\ h_{21},\ h_{22}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_{n0},\ h_{n1},\ \ldots,\ h_{nn}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \quad (1)$$

С помощью этих чисел можно определить линейный функционал F по формуле

$$h_{nk} = F(x^{n-k}y^k). \tag{2}$$

Иными словами, числа (1) принимаются в качестве степенных моментов функционала F. Благодаря формуле (2) линейный функционал F определен на множестве всех алгебраических многочленов по переменным x и y.

По числам (1) можно составить определители вида (1.4). Но в настоящем параграфе будем рассматривать только определители (1.13)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{(n-1)(n-1)} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(n-1)(n-1)} & h_{n(n-1)} & \dots & h_{2(n-1)2(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

По теореме 2 если определитель (3) отличен от нуля, то при данном n однозначно определяется система $n+1$ монических ортогональных многочленов

$$\Phi_{n0}(x, y),\ \Phi_{n1}(x, y),\ \dots,\ \Phi_{nn}(x, y). \tag{4}$$

Рассмотрим определитель

$$\varphi_{nk}(x, y) = \begin{vmatrix} & & & & & \cdot & h_{nk} \\ & & \Delta_n & & & \cdot & h_{(n+1)k} \\ & & & & & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{(2n-1)(n+k-1)} \\ 1 & x & y & \dots & y^{n-1} & & x^{n-k}y^k \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Этот определитель получен из определителя Δ_n добавлением последней строки и последнего столбца следующим образом. Последняя строка определителя (5) составлена из одночленов

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ \dots,\ xy^{n-2},\ y^{n-1},\ x^{n-k}y^k. \tag{6}$$

А последний столбец определителя (5) составлен из значений функционала (2) от произведений последнего одночлена $x^{n-k}y^k$ из системы (6) на все предыдущие одночлены этой системы.

Докажем, что для монических многочленов (4) справедлива формула

$$\Phi_{nk}(x, y) = \frac{1}{\Delta_n}\varphi_{nk}(x, y). \tag{7}$$

В самом деле, главный коэффициент многочлена (5) равен Δ_n, и поэтому многочлен, стоящий в правой части равенства (7), имеет единичный главный коэффициент. Далее, если умножить равенство (5) почленно на одночлен $x^{m-p}y^p$ и вычислить функционал F, определенный формулой (2), то получим равенство

$$F\left(x^{m-p}y^p\varphi_{nk}\right) = \\ = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{(n-1)(n-1)} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n(n-1)} & h_{(n+1)k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(n-1)(n-1)} & h_{n(n-1)} & \dots & h_{2(n-1)2(n-1)} & h_{(2n-1)(n+k-1)} \\ h_{mp} & h_{(m+1)p} & \dots & h_{(n+m-1)(n+p-1)} & h_{(n+m)(k+p)} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

При условиях $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $p = 0, 1, \ldots, m$ определитель (8) имеет две одинаковые строки и, следовательно, равен нулю. Поэтому в силу теоремы единственности монической системы (4) формула (7) доказана.

Теорема 12. *Если $\Delta_m \neq 0$ при каждом $m \leqslant n+1$, то для монических многочленов справедливы рекуррентные формулы*

$$x\Phi_{nk}(x, y) = \Phi_{(n+1)k}(x, y) + \sum_{m=0}^{n} a_{nm}^{(k)}\Phi_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n-1} a_{(n-1)s}^{(k)}\Phi_{(n-1)s}(x, y), \tag{9}$$

$$y\Phi_{nk}(x, y) = \Phi_{(n+1)(k+1)}(x, y) + \sum_{m=0}^{n} b_{nm}^{(k)}\Phi_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n-1} b_{(n-1)s}^{(k)}\Phi_{(n-1)s}(x, y). \tag{10}$$

Доказательство. В силу результатов § 2 при каждом m в пространстве W_m существует базисная система многочленов $\{B_{mp}(x, y)\}$, для которых выполняются условия

$$F(B_{mp}B_{ms}) = \delta_{ps}, \quad F(B_{mp}B_{qs}) = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим разложение

$$x\Phi_{nk}(x, y) = \Phi_{(n+1)k}(x, y) + \sum_{m=0}^{n} a_{nm}^{(k)}\Phi_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n-1} a_{(n-1)s}^{(k)}\Phi_{(n-1)s}(x, y) + \sum_{m=0}^{n-2}\sum_{p=0}^{m} \lambda_{mp}^{(n,k)}B_{mp}(x, y). \tag{12}$$

Умножим равенство (12) на многочлен $B_{mp}(x, y)$ при $m \leqslant n-2$ и вычислим функционал F от обеих частей. В результате, используя условия (11), получим

$$F\left(x\Phi_{nk}B_{mp}\right) = \lambda_{mp}^{(n,k)} F\left(B_{mp}^2\right). \tag{13}$$

Так как $m \leqslant n-2$, то левая часть равенства (13) равна нулю. Следовательно, имеем $\lambda_{mp}^{(n,k)} = 0$. Этим формула (9) доказана. Аналогично доказывается формула (10). Теорема доказана.

Далее, для характеристики функционала F и соответствующих ему монических многочленов введем величины

$$A_{nk}^{(m,s)} = F\left(\Phi_{nk}\Phi_{ms}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Для этих величин имеем очевидные равенства

$$A_{nk}^{(m,s)} = A_{ms}^{(n,k)},\ A_{nk}^{(m,s)} = 0,\ n \neq m.$$

Рассмотрим определитель

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} A_{n0}^{(n,0)} & A_{n1}^{(n,0)} & \ldots & A_{nn}^{(n,0)} \\ A_{n0}^{(n,1)} & A_{n1}^{(n,1)} & \ldots & A_{nn}^{(n,1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n0}^{(n,n)} & A_{n1}^{(n,n)} & \ldots & A_{nn}^{(n,n)} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Теорема 13. *Если для функционала F монические ортогональные многочлены порядков n и $n+1$ определяются единственным образом, то определитель* (15) *отличен от нуля.*

Доказательство. Допустим противное, что определитель (15) равен нулю. Тогда система линейных уравнений

$$\sum_{s=0}^{n} A_{ns}^{(n,k)} a_s = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{16}$$

имеет нетривиальное решение $\{a_s\}$. По этому решению образуем многочлен

$$Q_n(x, y) = \sum_{s=0}^{n} a_s \Phi_{ns}(x, y). \tag{17}$$

Умножаем это равенство на $\Phi_{nk}(x, y)$ и вычисляем функционал от обеих частей. Используя обозначения (14) и условия (16), находим

$$F(Q_n\Phi_{nk}) = \sum_{s=0}^{n} a_s F(\Phi_{ns}\Phi_{nk}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} a_s A_{ns}^{(n,k)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Следовательно, многочлен (17) ортогонален всем многочленам степени n. Рассмотрим два многочлена

$$\Phi_{(n+1)k}(x, y), \quad \Phi_{(n+1)k}(x, y) + Q_n(x, y). \tag{18}$$

Эти многочлены имеют одинаковый старший член вида $x^{n+1-k}y^k$ и оба они ортогональны всем многочленам степени не выше n. Поэтому оба многочлена (18) монические. Но это противоречит единственности монических многочленов порядка $n+1$. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы следует, что если определитель (15) равен нулю, то в системе монических многочленов $\{\Phi_{(n+1)k}(x, y)\}$ каждый многочлен определяется неоднозначно.

Далее, если $\Delta_n \neq 0$, то формула (7) определяет некоторые многочлены, которые можно назвать обобщенными моническими многочленами порядка n. Эти многочлены можно рассматривать без функционала и без условия ортогональности. А если все определители (3) отличны от нуля, то система моментов определяет монические многочлены всех степеней и порядков.

Теорема 14. *Если некоторая система монических многочленов $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям* (9) *и* (10), *то эта система является ортогональной монической системой относительно функционала F, определенного условиями*

$$F(\Phi_{00}) = F(1) = 1, \tag{19}$$

$$F(\Phi_{nk}) = 0, \quad n > 0. \tag{20}$$

Доказательство. Прежде всего установим, что условия (19) и (20) вместе с рекуррентными соотношениями (9) и (10) определяют функционал F на множестве всех многочленов.

Рекуррентные соотношения (9) и (10) при $n = 0$ имеют вид

$$x\Phi_{00}(x, y) = x = \Phi_{10}(x, y) + a_{00}^{(0)}\Phi_{00}(x, y),$$

$$y\Phi_{00}(x, y) = y = \Phi_{11}(x, y) + b_{00}^{(0)}\Phi_{00}(x, y).$$

Из этих равенств в силу условий (19) и (20) находим

$$F(x) = a_{mm}^{(0)}, \quad F(y) = b_{nn}^{(0)}.$$

Таким образом, функционал F определен на всех многочленах первой степени. Далее применяем метод индукции. Предположим, что этот функционал определен на всех многочленах степени не выше $n-1$. Пусть дан произвольный многочлен $R_n(x, y)$ степени n. Для него имеем разложение

$$R_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\Phi_{nk}(x, y) + Q_{n-1}(x, y).$$

В силу условия (20) находим $F(R_n) = F(Q_{n-1})$. Следовательно, функционал F определен на всех многочленах.

Докажем, что многочлены $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ являются ортогональными моническими многочленами относительно функционала F. В самом деле, пусть сначала $n > 1$. Тогда в силу условий (20) из равенств (9) и (10) получаем

$$F(x\Phi_{nk}) = F(y\Phi_{nk}) = 0. \tag{21}$$

Далее, пусть $n > 2$. Умножим равенство (9) сначала на x, а затем отдельно на y. Аналогично равенство (10) умножаем на y. К этим трем равенствам применяем функционал F. Учитывая условия (21), находим

$$F(x^2\Phi_{nk}) = F(xy\Phi_{nk}) = F(y^2\Phi_{nk}) = 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим равенства

$$F(x^{m-s}y^s\Phi_{nk}) = 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant m < n.$$

Следовательно, монические многочлены $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ ортогональны многочленам меньшей степени. Теорема доказана.

Теорема 15. *Если при условиях теоремы 14 все определители вида (15) отличны от нуля, то и определители $\{\Delta_n\}$ также отличны от нуля.*

Доказательство. Поскольку при условиях теоремы 14 функционал F определен, то можно ввести числа

$$h_{nk} = F(x^{n-k}y^k), \tag{22}$$

$$A_{nk}^{(m,s)} = F(\Phi_{nk}\Phi_{ms}). \tag{23}$$

Предположим, что один из определителей $\{\Delta_n\}$ равен нулю, например, $\Delta_{n+1} = 0$. Тогда рассмотрим многочлен степени n

$$Q_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} x^{m-s} y^s. \tag{24}$$

Умножим это равенство почленно на $x^{p-k}y^k$ и вычислим функционал от обеих частей. В результате, используя обозначение (22), получим

$$F\left(x^{p-k} y^k Q_n\right) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} h_{(p+m)(k+s)}. \tag{25}$$

Приравниваем сумму (25) нулю и рассматриваем это уравнение при значениях $p = 0, 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, p$. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} h_{(p+m)(k+s)} = 0. \tag{26}$$

Определитель этой системы $\Delta_{n+1} = 0$. Следовательно, система (26) имеет нетривиальное решение $\{a_{ms}\}$. Таким образом, если $\Delta_{n+1} = 0$, то существует такой многочлен (24), для которого выполняются условия

$$F(x^{p-k} y^k Q_n) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n. \tag{27}$$

Допустим, что степень этого многочлена равна $m \leqslant n$. Тогда его можно представить в виде

$$Q_n(x, y) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms} \Phi_{ms}(x, y) + R_{m-1}(x, y). \tag{28}$$

Здесь не все коэффициенты $\{\alpha_{ms}\}$ равны нулю. Умножим равенство (28) на многочлен $\Phi_{mk}(x, y)$ и применим функционал F к обеим частям. В результате, учитывая условия (27), получим систему уравнений

$$\sum_{s=0}^{m} \alpha_{ms} F(\Phi_{ms} \Phi_{mk}) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{29}$$

В силу обозначений (23) определитель системы (29) имеет вид

$$A_{m+1} = \begin{vmatrix} A_{m0}^{(m,0)} & A_{m1}^{(m,0)} & \ldots & A_{mm}^{(m,0)} \\ A_{m0}^{(m,1)} & A_{m1}^{(m,1)} & \ldots & A_{mm}^{(m,1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m0}^{(m,m)} & A_{m1}^{(m,m)} & \ldots & A_{mm}^{(m,m)} \end{vmatrix}. \tag{30}$$

По условиям теоремы определитель (30) отличен от нуля. Следовательно, система (29) имеет только тривиальное решение. Но это противоречит тому, что в формуле (28) не все коэффициенты $\{\alpha_{ms}\}$ равны нулю. Теорема доказана.

Теорема 16. *Пусть для функционала F определены монические ортогональные многочлены степени не выше $n+1$. Если отличны от нуля все определители вида* (30) *порядка от* 1 *до* n, *то для монических ортогональных многочленов справедливы рекуррентные соотношения вида* (9) *и* (10).

Доказательство. Поскольку все монические многочлены имеют только один старший член и коэффициент его равен 1, то аналогично равенству (12) имеем формулы

$$x\Phi_{nk}(x, y) = \Phi_{(n+1)k}(x, y) + \sum_{m=0}^{n} a_{nm}^{(k)}\Phi_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n-1} a_{(n-1)s}^{(k)}\Phi_{(n-1)s}(x, y) + \sum_{m=0}^{n-2}\sum_{p=0}^{m} a_{mp}^{(n,k)}\Phi_{mp}(x, y), \tag{31}$$

$$y\Phi_{nk}(x, y) = \Phi_{(n+1)(k+1)}(x, y) + \sum_{m=0}^{n} b_{nm}^{(k)}\Phi_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{s=0}^{n-1} b_{(n-1)s}^{(k)}\Phi_{(n-1)s}(x, y) + \sum_{m=0}^{n-2}\sum_{p=0}^{m} b_{mp}^{(n,k)}\Phi_{mp}(x, y). \tag{32}$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что в равенствах (31) и (32) отсутствуют двойные суммы, т. е. выполняются условия

$$a_{mp}^{(n,k)} = b_{mp}^{(n,k)} = 0. \tag{33}$$

Если $n=0$ или $n=1$, то условия (33) очевидны. А если $n=2$, то каждая двойная сумма превращается в одно постоянное слагаемое. Вычисляя функционал F от обеих частей равенств (31) и (32), при $n=2$ получим

$$a_{00}^{(0,0)}F(\Phi_{00}) = b_{00}^{(0,0)}F(\Phi_{00}) = 0. \tag{34}$$

Поскольку в силу условий теоремы имеем

$$F(\Phi_{00}) = F\left(\Phi_{00}^2\right) = A_1 \neq 0,$$

то из равенств (34) находим $a_{00}^{(0,0)} = b_{00}^{(0,0)} = 0$.

Далее, пусть $q \leqslant n-2$. Умножим равенство (31) на многочлен $\Phi_{qr}(x, y)$ и вычислим функционал от обеих частей. В результате получим систему

$$\sum_{p=0}^{q} a_{qp}^{(n,k)} F(\Phi_{qp}\Phi_{qr}) = 0, \qquad r = 0, 1, \ldots, q. \tag{35}$$

Определитель этой системы $A_{q+1} \neq 0$ по условию теоремы. Следовательно, имеем $a_{qp}^{(n,k)} = 0$. Но поскольку систему (35) можно рассматривать при условиях $q = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-2$, то первое из равенств (33) доказано. Аналогично доказывается второе из равенств (33). Теорема доказана.

§ 5. Обобщенные производящие функции для монических ортогональных многочленов

Пусть на ограниченном множестве E дана функция $F(x, y)$ с ограниченной вариацией. Тогда линейный функционал можно определить по формуле

$$F(P_n) = \iint_E P_n(x, y)\, dF(x, y). \tag{1}$$

Предположим, что функционалу (1) соответствует система монических ортогональных многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x, y)\}, \qquad n = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Каждый монический многочлен определяется с точностью до постоянного сомножителя. В простейшем случае имеем равенство

$$\Phi_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y), \tag{3}$$

где $R_{n-1}^{(n,k)}(x, y)$ — многочлен степени не выше $n-1$. Но вместо равенства (3) можно принять равенство

$$\Phi_{nk}(x, y) = H_{nk}\left[x^{n-k}y^k + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y)\right], \tag{4}$$

где положительные постоянные $\{H_{nk}\}$, например, таковы, что все многочлены (2) ограничены равномерно на множестве E.

Рассмотрим функцию четырех переменных

$$\Phi(x, y; z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Phi_{nk}(x, y)\, z^{n-k} w^k. \tag{5}$$

Будем считать, что этот ряд сходится, когда точка

$M(x, y)$ изменяется на множестве E, а точки z и w расположены в некоторой окрестности начала координат. Более того, предположим, что ряд (5) сходится равномерно, когда точка $M(x, y)$ изменяется на множестве E, а комплексные числа z и w по модулю меньше 1. Или во всяком случае сходимость ряда (5) такова, что его можно интегрировать и дифференцировать почленно. При необходимости этого можно достичь выбором постоянных в формуле (4). При этих условиях функцию (5) будем называть обобщенной производящей функцией системы монических многочленов (2).

Рассмотрим некоторые преобразования ряда (5). Прежде всего, заметим, что после перегруппировки слагаемых этот ряд можно представить в виде

$$\Phi(x, y; z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w)\, x^{m-s} y^{s}, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{ms}(z, w) = H_{ms} z^{m-s} w^{s} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{r} b_{rj} z^{r-j} w^{j}. \tag{7}$$

В самом деле, в силу равенства (4) имеем

$$\Phi(x, y; z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{nk} x^{n-k} y^{k} z^{n-k} w^{k} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} H_{nk} R_{n-1}^{(n,k)}(x, y)\, z^{n-k} w^{k}. \tag{8}$$

Поскольку многочлен $R_{n-1}^{(n,k)}(x, y)$ имеет степень не выше $n-1$, то при перегруппировке слагаемых во второй сумме равенства (8) множитель при одночлене $x^{m-s}y^{s}$ будет содержать одночлены $z^{r-j}w^{j}$ степени большей, чем m. Этим формула (6) при условии (7) доказана.

Далее, рассмотрим разложение

$$\frac{1}{1 - x\rho - y\tau} = \sum_{m=}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} C_{m}^{s} (x\rho)^{m-s} (y\tau)^{s}. \tag{9}$$

Будем считать, что точка $M(x, y)$ изменяется на множестве E, а ρ и τ достаточно малы. Умножим почленно разложение (5) на функцию (9) и проинтегрируем по множеству E. В результате получим равенство

$$R(z, w; \rho, \tau) = \iint\limits_E \frac{\Phi(x, y; z, w)}{1 - x\rho - y\tau} dF(x, y) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Psi_{nk}(\rho, \tau) z^{n-k} w^k, \qquad (10)$$

где в силу разложения (9) имеем

$$\Psi_{nk}(\rho, \tau) = \iint\limits_E \frac{\Phi_{nk}(x, y)}{1 - x\rho - y\tau} dF(x, y) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} C_m^s \rho^{m-s} \tau^s \iint\limits_E \Phi_{nk}(x, y) x^{m-s} y^s dF(x, y). \qquad (11)$$

Для интегралов в этом разложении введем обозначение

$$R_{nk}^{(m,s)} = \iint\limits_E \Phi_{nk}(x, y) x^{m-s} y^s dF(x, y). \qquad (12)$$

В силу определения многочленов (2) имеем равенства

$$R_{nk}^{(m,s)} = 0, \quad m < n. \qquad (13)$$

Используя обозначение (12), подставляем разложение (11) в равенство (10). В результате, учитывая условие (13), получим

$$R(z, w; \rho, \tau) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} C_m^s R_{nk}^{(m,s)} \rho^{m-s} \tau^s \right] z^{n-k} w^k. \qquad (14)$$

Меняя порядок суммирования, находим

$$R(z, w; \rho, \tau) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} C_m^s \rho^{m-s} \tau^s \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} R_{nk}^{(m,s)} z^{n-k} w^k \right]. \qquad (15)$$

Разумеется, ряды (14) и (15) сходятся при достаточно малых по модулю значениях z, w, ρ, τ.

Функцию (15) представим теперь в несколько ином виде. Воспользуемся разложением (6). Подставляя это разложение в интеграл (10), находим

$$R(z, w; \rho, \tau) = \iint\limits_E \frac{\Phi(x, y; z, w)}{1 - x\rho - y\tau} dF(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \rho^{n-k} \tau^k \times \right.$$

$$\left. \times \iint_E x^{n+m-k-s} y^{k+s} dF(x, y) \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \rho^{n-k} \tau^k h_{(n+m)(k+s)} \right]. \quad (16)$$

Далее, введем обозначение

$$\omega_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w) h_{(n+m)(k+s)}. \quad (17)$$

Тогда равенство (16) приводится к виду

$$R(z, w; \rho, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega_{nk}(z, w) \rho^{n-k} \tau^k. \quad (18)$$

Теорема 17. *При любом $k = 0, 1, \ldots, n$ функция (17) есть алгебраический многочлен степени n по совокупности переменных z и w.*

Доказательство. Для получения правой части равенства (17) умножим разложение (6) на одночлен $x^{n-k} y^k$ и проинтегрируем по множеству E. В результате находим

$$\iint_E x^{n-k} y^k \Phi(x, y; z, w)\, dF(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w) \iint_E x^{n+m-k-s} y^{k+s} dF(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w) h_{(n+m)(k+s)} = \omega_{nk}(z, w). \quad (19)$$

С другой стороны, интеграл, стоящий в левой части равенства (19), можно вычислить с помощью разложения (5). В результате имеем

$$\iint_E x^{n-k} y^k \Phi(x, y; z, w)\, dF(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} z^{m-s} w^s \iint_E \Phi_{ms}(x, y) x^{n-k} y^k dF(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} z^{m-s} w^s F_{nk}^{(m, s)} = \omega_{nk}(z, w), \quad (20)$$

где для краткости введено обозначение

$$F_{nk}^{(m,s)} = \iint\limits_{E} \Phi_{ms}(x, y)\, x^{n-k} y^k dF(x, y). \tag{21}$$

Поскольку $\Phi_{ms}(x, y)$ — монический ортогональный многочлен, то величина (21) равна нулю при $m > n$. Далее, если $m = n$, то величины (21) при $s = 0, 1, \ldots, n$ не могут все быть равны нулю одновременно, ибо в противном случае монические многочлены степени $n + 1$ определяются неоднозначно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь многочлен

$$P_n(z, w) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_{nk}(z, w). \tag{22}$$

Из теоремы 17 следует, что при любой нетривиальной системе чисел $\{a_k\}$ многочлен (22) имеет степень не более n.

Теорема 18. *При любой нетривиальной системе чисел* $\{a_k\}$ *многочлен* (22) *имеет степень n по совокупности переменных z и w.*

Доказательство. Допустим противное, что при некоторой нетривиальной системе чисел $\{a_k\}$ многочлен (22) имеет степень меньше n. Из формул (20) и (22) имеем равенство

$$P_n(z, w) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} F_{nk}^{(m,s)} z^{m-s} w^s \right]. \tag{23}$$

Умножим это равенство на многочлен $\Phi_{np}(z, w)$ и проинтегрируем по мере $dF(z, w)$. Поскольку многочлен (23) имеет степень меньше n, то, учитывая обозначения (21), получим

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} F_{nk}^{(m,s)} F_{ms}^{(n,p)} \right] = 0. \tag{24}$$

Далее, в силу ортогональности монического многочлена $\Phi_{np}(z, w)$ во внутренней сумме равенства (24) останутся только слагаемые, в которых $m = n$. Следовательно, равенство (24) приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{n} F_{nk}^{(n,s)} F_{ns}^{(n,p)} \right] = 0. \tag{25}$$

С другой стороны, для величины (21) при $m = n$, используя обозначение (4.14), находим

$$F_{nk}^{(n,s)} = F\left(\Phi_{ns}x^{n-k}y^k\right) = F\left(\Phi_{ns}\Phi_{nk}\right) = A_{nk}^{(n,s)}.$$

Поэтому из равенства (25) имеем

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{n} A_{nk}^{(n,s)} A_{ns}^{(n,p)}\right] = 0. \tag{26}$$

Поскольку числа $\{a_k\}$ и $\{A_{nk}^{(n,s)}\}$ даны, то можно ввести обозначения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A_{nk}^{(n,s)} = b_s, \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Подставляем эти числа в равенство (26) и замечаем, что это равенство справедливо при $p = 0, 1, \ldots, n$. В результате получаем систему уравнений

$$\sum_{s=0}^{n} b_s A_{ns}^{(n,p)} = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, n. \tag{28}$$

В силу формулы (4.30) определитель системы (28) есть определитель A_{n+1}. Он отличен от нуля, ибо монические многочлены определяются однозначно. Следовательно, система (28) имеет только тривиальное решение. А тогда система (27) также имеет только тривиальное решение, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Все вышеизложенные результаты получены при условии, что основной функционал имеет интегральное представление (1). Но почти все формулы и утверждения сохраняются и в более общем случае, когда функционал определяется своими моментами.

Пусть дана система чисел

$$\{h_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Считая эти числа моментами, определяем функционал по формуле

$$F(x^{n-k}y^k) = h_{nk}. \tag{30}$$

Далее вводим определители $\{\Delta_n\}$ и $\{A_n\}$. Если $\Delta_n \neq 0$, то можно ввести монические ортогональные многочлены. Эти многочлены можно определить по формуле (4.7) без функционала F. Затем вводим функции (7), (17) и (18). Теоремы 17 и 18 сохраняются и в общем случае. Только при доказательстве теоремы 17 надо приравнять правые части равенств (5) и (6). Заметим, что из формулы (20) следует равенство

$$\omega_{00}(z, w) = F_{00}^{(0,0)} = F(\Phi_{00}) = h_{00} = \Delta_1.$$

Естественно считать, что эта величина отлична от нуля.

Теорема 19. *Пусть дана некоторая моническая система многочленов* $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ *и по ней составлены функции* (5), (7) *и* (17). *Для ортогональности этой системы относительно функционала* F, *определенного условиями* (30), *необходимо и достаточно, чтобы функция* (17) *при любом* n *была алгебраическим многочленом степени* n *относительно* z *и* w.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 17. Докажем достаточность. Поскольку моническая система дана, то ряд и функция (5) определены. А формула (20) в данном случае имеет вид

$$\omega_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} F_{nk}^{(m,s)} z^{m-s} w^s. \tag{31}$$

По условию теоремы функция (31) есть многочлен степени n. Следовательно, имеем равенства $F_{nk}^{(m,s)} = 0$, $m > n$. Но, с другой стороны, аналогично формуле (21) здесь имеем

$$F_{nk}^{(m,s)} = F(\Phi_{ms} x^{n-k} y^k).$$

Сопоставляя два последних равенства, находим, что моническая система $\{\Phi_{ms}(x, y)\}$ является ортогональной относительно функционала F. Теорема доказана.

Теорема 20. *Пусть выполнены условия теоремы* 19. *Тогда для ортогональности монической системы* $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ *относительно функционала* F, *необходимо и достаточно, чтобы при любой нетривиальной системе чисел* $\{a_k\}$ *многочлен* (22) *имел степень* n *по совокупности переменных* z *и* w.

Доказательство. Необходимость была доказана в теореме 18. Предположим, что при любой нетривиальной системе $\{a_k\}$ функция (22) есть многочлен степени n. Пусть $a_k = 0$ при $k \neq m$ и $a_m = 1$. Тогда формула (22) приводится к виду $P_n(z, w) = \omega_{nm}(z, w)$. Следовательно, каждая функция (17) есть многочлен степени n. А теперь по теореме 19 моническая система $\{\Phi_{nk}(x, y)\}$ ортогональна относительно функционала F. Теорема доказана.

Глава IX

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О СВЯЗИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 1. Каноническое допустимое дифференциальное уравнение и монические ортогональные многочлены

Рассмотрим каноническое допустимое дифференциальное уравнение (4.6.4)

$$(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + B\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = n[B + (n-1)A]u. \quad (1)$$

По левой части уравнения (1) вводим канонический допустимый дифференциальный оператор

$$D[u] = (Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (2)$$

С помощью этого оператора и обозначения

$$\lambda_n = n[B + (n-1)A] \quad (3)$$

уравнение (1) приводится к виду

$$D[u] = \lambda_n u. \quad (4)$$

С другой стороны, пусть дана моническая система многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x, y)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (5)$$

Как и в предыдущей главе по этой системе образуем обобщенную производящую функцию

$$\Phi(x, y; z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Phi_{nk}(x, y)\, z^{n-k} w^{k}. \tag{6}$$

Наконец, предположим, что дана система моментов

$$\{h_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

и эта система определяет линейный функционал F по формуле

$$h_{nk} = F(x^{n-k} y^{k}). \tag{8}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (4), монические многочлены (5) и линейный функционал (8) первоначально вводятся независимо между собой. В § 5 гл. VIII получены необходимые и достаточные условия, при которых монические многочлены (5) ортогональны относительно функционала (8). В настоящей главе рассматриваются условия, при которых монические многочлены (5) ортогональны по функционалу (8) и являются решениями уравнения вида (4).

Будем говорить, что канонический допустимый оператор (2) и линейный функционал (8) согласованы между собой, если при каждом n существует моническая система многочленов (5), которые являются решениями уравнения (4) и каждый многочлен ортогонален любому многочлену меньшей степени относительно функционала (8).

Поскольку функционал F определяется своими моментами (7), то естественно ожидать, что в условиях согласованности будут фигурировать все коэффициенты оператора (2) и моменты (7).

Пусть некоторая функция Φ зависит от z и w. Рассмотрим вспомогательный оператор

$$E[\Phi] = A\left(z^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2zw \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial w} + w^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2}\right) + \\ + B\left(z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right). \tag{9}$$

В силу формулы (3) для этого оператора имеем равенство

$$E[z^{m-s} w^{s}] = \lambda_m z^{m-s} w^{s}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Если монические многочлены (5) удовлетворяют уравнению (4), то для производящей функции (6) выполняется условие*

$$D[\Phi(x,\ y;\ z,\ w)] = E[\Phi(x,\ y;\ z,\ w)]. \tag{11}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в равенстве (11) оператор D в левой части вычисляется по переменным x и y, а оператор E в правой части — по z и w. Далее, поскольку монические многочлены (5) удовлетворяют уравнению (4), то имеем

$$D[\Phi_{nk}] = \lambda_n \Phi_{nk}(x,\ y). \tag{12}$$

Умножая это равенство на $z^{n-k}w^k$, получаем

$$D[\Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k] = \lambda_n \Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k. \tag{13}$$

Аналогично из равенства (10) находим

$$E[\Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k] = \lambda_n \Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k. \tag{14}$$

Поскольку правые части равенств (13) и (14) одинаковы, то справедлива формула

$$D[\Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k] = E[\Phi_{nk}(x,\ y)z^{n-k}w^k].$$

Суммируя это равенство по всем n и k, в силу формулы (6) получим равенство (11). Лемма доказана.

Заметим, что аналогичным суммированием из равенства (13) получается формула

$$D[\Phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=0}^{n} \Phi_{nk}(x, y)\, z^{n-k} w^k \tag{15}$$

Рассмотрим теперь второе представление производящей функции (8.5.6)

$$\Phi(x, y;\ z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \varphi_{ms}(z, w)\, x^{m-s} y^s. \tag{16}$$

Лемма 2. *Если при каждом n монические многочлены (5) являются решениями уравнения (4), то имеет место равенство*

$$\begin{aligned} E[\varphi_{ms}(z,\ w)] = {} \\ = \lambda_m \varphi_{ms}(z,\ w) + a_{10}(m-s+1)(m-s)\varphi_{(m+1)s}(z,\ w) + {} \\ + a_{01}(m+2-s)(m+1-s)\varphi_{(m+1)(s-1)}(z,\ w) + {} \\ + a_{00}(m+2-s)(m+1-s)\varphi_{(m+2)s}(z,\ w) + {} \\ + 2[b_{10}(m-s)(s+1)\varphi_{(m+1)(s+1)}(z, w) + \end{aligned}$$

$$+ b_{01}(m+1-s)s\varphi_{(m+1)s}(z,\ w) +$$
$$+ b_{00}(m-s+1)(s+1)\varphi_{(m+2)(s+1)}(z,\ w)] +$$
$$+ c_{10}(s+2)(s+1)\varphi_{(m+1)(s+2)}(z,\ w) +$$
$$+ c_{01}(s+1)s\varphi_{(m+1)(s+1)}(z,\ w) +$$
$$+ c_{00}(s+2)(s+1)\varphi_{(m+2)(s+2)}(z,\ w). \quad (17)$$

Доказательство. Вычисляя оператор (2) от функции (16), находим

$$D[\Phi] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}\varphi_{ms}(z, w)\,D[x^{m-s}y^s] =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}\varphi_{ms}(z, w)\{(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00})(m-s)\times$$
$$\times(m-s-1)\,x^{m-s-2}y^s + 2(Axy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\times$$
$$\times(m-s)\,sx^{m-s-1}y^{s-1} + (Ay^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\,s\times$$
$$\times(s-1)\,x^{m-s}y^{s-2} + B[x(m-s)\,x^{m-s-1}y^s + ysx^{m-s}y^{s-1}]\}. \quad (18)$$

Вычисляя коэффициент при одночлене $x^{m-s}y^s$ в правой части равенства (18), получаем

$$A(m-s)(m-s-1)\varphi_{ms}(z,\ w) +$$
$$+ a_{10}(m+1-s)(m-s)\varphi_{(m+1)s}(z,\ w) +$$
$$+ a_{01}(m+2-s)(m+1-s)\varphi_{(m+1)(s-1)}(z,\ w) +$$
$$+ a_{00}(m+2-s)(m-s+1)\varphi_{(m+2)s}(z,\ w) +$$
$$+ 2[A(m-s)s\varphi_{ms}(z,\ w) +$$
$$+ b_{10}(m-s)(s+1)\varphi_{(m+1)(s+1)}(z,\ w) +$$
$$+ b_{01}(m+1-s)s\varphi_{(m+1)s}(z,\ w) +$$
$$+ b_{00}(m-s+1)(s+1)\varphi_{(m+2)(s+1)}(z,\ w)] +$$
$$+ As(s-1)\varphi_{ms}(z,\ w) +$$
$$+ c_{10}(s+2)(s+1)\varphi_{(m+1)(s+2)}(z, w) +$$
$$+ c_{01}(s+1)s\varphi_{(m+1)(s+1)}(z,\ w) +$$
$$+ c_{00}(s+2)(s+1)\varphi_{(m+2)(s+2)}(z,\ w) +$$
$$+ B[(m-s)\varphi_{ms}(z,\ w) + s\varphi_{ms}(z,\ w)]. \quad (19)$$

Далее, вычисляя оператор (9) от функции (16), находим

$$E[\Phi] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} x^{m-s}y^sE\left[\varphi_{ms}(z, w)\right]. \quad (20)$$

Поскольку в силу формулы (11) левые части равенств (18) и (20) тождественны, то вся сумма (19) равна $E[\varphi_{ms}(z, w)]$. Поэтому, учитывая формулу (3), из (19) находим равенство (17). Лемма доказана.

Предположим теперь, что монические многочлены (5) ортогональны относительно функционала (8). Рассмотрим многочлены (8.5.17)

$$\omega_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)} \varphi_{ms}(z, w). \tag{21}$$

По этим многочленам вводим новые многочлены

$$\psi_{nk}(z, w) = E[\omega_{nk}(z, w)]. \tag{22}$$

Из формул (21) и (22) получаем равенство

$$\psi_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)} E\left[\varphi_{ms}(z, w)\right]. \tag{23}$$

Лемма 3. *Если монические многочлены* (5) *удовлетворяют уравнению* (1) *и ортогональны относительно функционала* (8), *то имеет место формула*

$$\psi_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(n,k)} \varphi_{ms}(z, w), \tag{24}$$

где коэффициенты определяются равенством

$$\begin{aligned}\lambda_{ms}^{(n,k)} &= \\ = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_m &+ (m-s)(m-s-1)[a_{10}h_{(n+m-1)(k+s)} + \\ &+ a_{01}h_{(n+m-1)(k+s+1)} + a_{00}h_{(n+m-2)(k+s)}] + \\ &+ 2(m-s)s[b_{10}h_{(n+m-1)(k+s-1)} + b_{01}h_{(n+m-1)(k+s)} + \\ &+ b_{00}h_{(n+m-2)(k+s-1)}] + s(s-1)[c_{10}h_{(n+m-1)(k+s-2)} + \\ &+ c_{01}h_{(n+m-1)(k+s-1)} + c_{00}h_{(n+m-2)(k+s-2)}].\end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. Из формул (17) и (23) находим

$$\begin{aligned}\psi_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)} \{&\lambda_m \varphi_{ms}(z, w) + \\ &+ a_{10}(m-1-s)(m-s)\varphi_{(m+1)s}(z, w) + \\ &+ a_{01}(m+2-s)(m+1-s)\varphi_{(m+1)(s-1)}(z, w) + \\ &+ a_{00}(m+2-s)(m+1-s)\varphi_{(m+2)s}(z, w) +\end{aligned}$$

$$+ 2\left[b_{10}(m-s)(s+1)\varphi_{(m+1)(s+1)}(z,w) + b_{01}(m+1-s)s\varphi_{(m+1)s}(z,w) + b_{00}(m-s+1)\times\right.$$
$$\left.\times(s+1)\varphi_{(m+2)(s+1)}(z,w)\right] + c_{10}(s+2)(s+1)\times$$
$$\times\varphi_{(m+1)(s+2)}(z,w) + c_{01}(s+1)s\varphi_{(m+1)(s+1)}(z,w) +$$
$$+ c_{00}(s+2)(s+1)\varphi_{m(s+2)}(z,w)\}. \quad (26)$$

В фигурных скобках равенства (26) стоят функции $\varphi_{ms}(z, w)$ с различными коэффициентами. Для этих функций справедлива формула (8.5.7). Поэтому, приводя подобные члены в правой части равенства (26), получим формулу (24) при условии (25). Лемма доказана.

Для упрощения дальнейших вычислений и формул введем специальные обозначения

$$H_m^{(s)}(a) = h_{ms}a_{10} + h_{m(s+1)}a_{01} + h_{(m-1)s}a_{00}, \quad (27)$$

$$H_m^{(s)}(b) = h_{ms}b_{10} + h_{m(s+1)}b_{01} + h_{(m-1)s}b_{00}, \quad (28)$$

$$H_m^{(s)}(c) = h_{ms}c_{10} + h_{m(s+1)}c_{01} + h_{(m-1)s}c_{00}. \quad (29)$$

С помощью этих обозначений равенство (25) приводится к виду

$$\lambda_{ms}^{(n,h)} = h_{(n+m)(h+s)}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)H_{(n+m-1)}^{(h+s)}(a) +$$
$$+ 2(m-s)sH_{(n+m-1)}^{(h+s-1)}(b) + s(s-1)H_{(n+m-1)}^{(h+s-2)}(c). \quad (30)$$

Во всех этих равенствах фигурируют коэффициенты допустимого уравнения (1) и моменты (7), определяющие функционал (8).

§ 2. Необходимые условия согласованности канонического оператора и функционала

Для сокращения дальнейших формулировок и доказательств с помощью обозначений (1.27)—(1.29) вводим величины

$$A_{ms} = h_{ms}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)H_{(m-1)}^{(s)}(a) +$$
$$+ 2(m-s)sH_{(m-1)}^{(s-1)}(b) + s(s-1)H_{(m-1)}^{(s-2)}(c), \quad (1)$$

$$B_{ms} = \lambda_{ms}^{(1,0)} - Bh_{(m+1)s} - A_{(m+1)s}, \quad (2)$$

$$C_{ms} = \lambda_{ms}^{(1,1)} - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)}. \quad (3)$$

Еще раз заметим, что все эти величины зависят только от коэффициентов допустимого уравнения (1.1) и от моментов (1.7). Кроме того, величина (1) есть коэффициент $\lambda_{ms}^{(0,0)}$, определяемый формулой (1.30).

Теорема 1. *Если канонический оператор* (1.2) *и линейный функционал* (1.8) *согласованы, то для величины* (1) *выполняются условия*

$$A_{ms} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме 17 из § 5 гл. VIII функция (1.21) есть многочлен степени n. Поэтому из формулы (1.22) находим $\psi_{00}(z, w) = 0$. Далее, из формулы (1.24) получаем

$$\psi_{00}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(0,0)} \varphi_{ms}(z, w) \equiv 0. \tag{5}$$

С другой стороны, из формулы (8.5.7) следует, что разложение функции $\varphi_{ms}(z, w)$ начинается с одночлена $z^{m-s}w^s$, а далее идут одночлены более высокой степени. Поэтому из тождества (5) находим

$$\lambda_{ms}^{(0,0)} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Далее, из формул (1) и (1.30) имеем равенство $A_{ms} = \lambda_{ms}^{(0,0)}$. Поэтому из условий (6) следуют условия (4). Теорема доказана.

В силу формул (1), (1.3), (1.27) — (1.29) условия (4) приводятся к виду

$$\begin{aligned} A_{ms} = h_{ms}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)[h_{(m-1)s}a_{10} + \\ + h_{(m-1)(s+1)}a_{01} + h_{(m-2)s}a_{00}] + \\ + 2(m-s)s[h_{(m-1)(s-1)}b_{10} + h_{(m-1)s}b_{01} + h_{(m-2)(s-1)}b_{00}] + \\ + s(s-1)[h_{(m-1)(s-2)}c_{10} + h_{(m-1)(s-1)}c_{01} + h_{(m-2)(s-2)}c_{00}] = \\ = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Это рекуррентная формула, по которой моменты можно вычислять последовательно. Первые 6 формул при малых индексах имеют вид

$$A_{00} = h_{00}\lambda_0 = 0, \tag{8}$$

$$A_{10} = h_{10}\lambda_1 = 0, \quad A_{11} = h_{11}\lambda_1 = 0, \tag{9}$$

$$A_{20} = h_{20}\lambda_2 + 2(h_{10}a_{10} + h_{11}a_{01} + h_{00}a_{00}) = 0, \tag{10}$$

$$A_{21} = h_{21}\lambda_2 + 2(h_{10}b_{10} + h_{11}b_{01} + h_{00}b_{00}) = 0, \tag{11}$$

$$A_{22} = h_{22}\lambda_2 + 2(h_{10}c_{10} + h_{11}c_{01} + h_{00}c_{00}) = 0. \tag{12}$$

Поскольку $\lambda_0 = 0$, то условие (8) выполняется при любом h_{00}. Далее, так как $\lambda_1 \neq 0$, то из равенств (9) находим условия

$$h_{10} = h_{11} = 0. \tag{13}$$

А тогда равенства (10) — (12) приводятся к виду

$$\begin{aligned} &h_{20}\lambda_2 + 2h_{00}a_{00} = 0, \\ &h_{21}\lambda_2 + 2h_{00}b_{00} = 0, \\ &h_{22}\lambda_2 + 2h_{00}c_{00} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Так как $\lambda_2 \neq 0$, то эти три равенства определяют моменты h_{20}, h_{21}, h_{22} через момент h_{00}, который по условию отличен от нуля. Не нарушая общности, можно считать, что $h_{00} = 1$. Тогда по формулам (7), (13) и (14) определятся все моменты функционала.

Таким образом, если канонический оператор (1.2) и линейный функционал (1.8) согласованы, то моменты определяются по рекуррентной формуле (7).

Теорема 2. *Если канонический оператор* (1.2) *и линейный функционал* (1.8) *согласованы, то для величин* (2) *и* (3) *выполняются условия*

$$B_{ms} = C_{ms} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, \qquad s = 0, 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим формулу (1.22) при условии $n = 1$. Поскольку многочлены $\omega_{10}(z, w)$ и $\omega_{11}(z, w)$, определяемые формулой (1.21), имеют степень 1, то в силу формулы (1.9) для оператора E из равенства (1.22) при $n = 1$ имеем две формулы

$$\psi_{10}(z, w) = E[\omega_{10}(z, w)] = \\ = B\left[z\frac{\partial}{\partial z}\omega_{10}(z, w) + w\frac{\partial}{\partial w}\omega_{10}(z, w)\right], \tag{16}$$

$$\psi_{11}(z, w) = E[\omega_{11}(z, w)] = \\ = B\left[z\frac{\partial}{\partial z}\omega_{11}(z, w) + w\frac{\partial}{\partial w}\omega_{11}(z, w)\right]. \tag{17}$$

Далее, из формулы (1.21), учитывая условия (13), находим

$$\omega_{10}(0, 0) = h_{10}\varphi_{00}(0, 0) = \omega_{11}(0, 0) = h_{11}\varphi_{00}(0, 0) = 0.$$

Поэтому из формул (16) и (17) следуют равенства

$$\psi_{10}(z, w) = B\omega_{10}(z, w), \quad \psi_{11}(z, w) = B\omega_{11}(z, w). \tag{18}$$

А теперь сопоставляем формулы (1.21) и (1.24) при $n=1$ и равенства (18). В результате получаем

$$\lambda_{ms}^{(1,0)} = Bh_{(m+1)s}, \quad \lambda_{ms}^{(1,1)} = Bh_{(m+1)(s+1)}. \tag{19}$$

А теперь, учитывая условия (4) и равенства (19), из формул (2) и (3) находим условия (15). Теорема доказана.

Величины (1), (2) и (3) можно рассматривать в общем случае без условия согласованности.

Лемма 4. *Для величин* (1), (2) *и* (3) *справедливо тождество*

$$2A_{(m+1)(s+1)} + (m-s)B_{m(s+1)} + (s+1)C_{ms} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Используя равенство (1.3), из формулы (1) находим

$$A_{(m+1)(s+1)} = h_{(m+1)(s+1)}(m+1)(B+mA) + \\ + (m-s)(m-s-1)H_m^{(s+1)}(a) + \\ + 2(m-s)(s+1)H_m^{(s)}(b) + (s+1)sH_m^{(s-1)}(c). \tag{21}$$

Далее, из формулы (2), учитывая равенства (1.3) и (1.30), имеем

$$B_{m(s+1)} = \lambda_{m(s+1)}^{(1,0)} - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)} = \\ = h_{(m+1)(s+1)}m[B+(m-1)A] + (m-s-1)(m-s-2)\times \\ \times H_m^{(s+1)}(a) + 2(m-s-1)(s+1)H_m^{(s)}(b) + \\ + (s+1)sH_m^{(s-1)}(c) - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)}. \tag{22}$$

Аналогично из формулы (3) находим

$$C_{ms} = \lambda_{ms}^{(1,1)} - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)} = \\ = h_{(m+1)(s+1)}m[B+(m-1)A] + \\ + (m-s)(m-s-1)H_m^{(s+1)}(a) + 2(m-s)sH_m^{(s)}(b) + \\ + s(s-1)H_m^{(s-1)}(c) - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)}. \tag{23}$$

А теперь вычисляем левую часть тождества (20) с помощью формул (21)—(23). В результате получаем

$$2A_{(m+1)(s+1)} + (m-s)B_{m(s+1)} + (s+1)C_{ms} = \\ = (1-m)[h_{(m+1)(s+1)}(m+1)(B+mA) + \\ + (m-s)(m-s-1)H_m^{(s+1)}(a) + 2(m-s)(s+1)H_m^{(s)}(b) +$$

$$+ (s+1) sH_m^{(s-1)}(c)\big] + (m-s)\{h_{(m+1)(s+1)}m\,[B+(m-1)A] +$$
$$+ (m-s-1)(m-s-2)\,H_m^{(s+1)}(a) +$$
$$+ 2(m-s-1)(s+1)\,H_m^{(s)}(b) + (s+1)\,sH_m^{(s-1)}(c) -$$
$$- Bh_{(m+1)(s+1)}\} + (s+1)\{h_{(m+1)(s+1)}m\,[B+(m-1)A] +$$
$$+ (m-s)(m-s-1)\,H_m^{(s+1)}(a) + 2(m-s)\,sH_m^{(s)}(b) +$$
$$+ s(s-1)\,H_m^{(s-1)}(c) - Bh_{(m+1)(s+1)}\}.$$

Если в полученной сумме привести подобные члены по величинам

$$h_{(m+1)(s+1)},\quad H_m^{(s+1)}(a),\quad H_m^{(s)}(b),\quad H_m^{(s-1)}(c),$$

то сомножителем каждой из этих величин будет 0. Лемма доказана.

Таким образом, величины (1), (2) и (3) линейно зависимы между собой. Поэтому из трех условий (4) и (15) одно можно опустить. Будем рассматривать два условия $A_{ms} = B_{ms} = 0$. При этом в силу формулы (2) второе условие можно представить в виде

$$Bh_{(m+1)s} = \lambda_{ms}^{(1,0)} = h_{(m+1)s}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)\times$$
$$\times H_m^{(s)}(a) + 2(m-s)\,sH_m^{(s-1)}(b) + s(s-1)\,H_m^{(s-2)}(c). \quad (24)$$

Это равенство можно преобразовать с помощью формулы (1.3).

Рассмотрим подробнее основные рекуррентные соотношения (4) и (24). Их можно представить в виде

$$A_{ms} = \lambda_{ms}^{(0,0)} = h_{ms}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)\,H_{m-1}^{(s)}(a) +$$
$$+ 2(m-s)\,sH_{(m-1)}^{(s-1)}(b) + s(s-1)\,H_{(m-1)}^{(s-2)}(c) = 0, \quad (25)$$

$$h_{(m+1)s}(\lambda_m - B) + (m-s)(m-s-1)\,H_m^{(s)}(a) +$$
$$+ 2(m-s)\,sH_m^{(s-1)}(b) + s(s-1)\,H_m^{(s-2)}(c) = 0. \quad (26)$$

В равенстве (26) заменим m на $m-1$. В результате получим

$$h_{ms}(\lambda_{m-1} - B) + (m-1-s)(m-s-2)\,H_{m-1}^{(s)}(a) +$$
$$+ 2(m-1-s)\,sH_{(m-1)}^{(s-1)}(b) + s(s-1)\,H_{(m-1)}^{(s-2)}(c) = 0. \quad (27)$$

А теперь вычитаем почленно из равенства (25) равенство (27). После элементарных преобразований имеем формулу

$$h_{ms}(\lambda_{m-1} - B - \lambda_m) = 2(m-s-1)H_{m-1}^{(s)}(a) + \\ + 2sH_{m-1}^{(s-1)}(b). \quad (28)$$

Далее, используя формулы (1.3), (1.27) и (1.28), из равенства (28) находим рекуррентную формулу

$$-[B+(m-1)A]h_{ms} = \\ = (m-s-1)(h_{(m-1)s}a_{10} + h_{(m-1)(s+1)}a_{01} + h_{(m-2)s}a_{00}) + \\ + s(h_{(m-1)(s-1)}b_{10} + h_{(m-1)s}b_{01} + h_{(m-2)(s-1)}b_{00}). \quad (29)$$

В силу допустимости уравнения (1.1) множитель при h_{ms} отличен от нуля. Далее, в силу равенств (2.13) имеем $h_{10} = h_{11} = 0$. Следовательно, рекуррентную формулу (29) можно использовать при условии $m \geqslant 2$.

§ 3. Достаточные условия согласованности канонического оператора и функционала

Пусть дана система монических многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x, y)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad (1)$$

которые удовлетворяют каноническому допустимому уравнению

$$D[u] = \lambda_n u. \quad (2)$$

С другой стороны, пусть система моментов

$$\{h_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad (3)$$

определяет линейный функционал по формуле

$$h_{nk} = F(x^{n-k}y^k). \quad (4)$$

Тогда можно ввести производящую функцию (1.6) и оператор (1.9). Рассмотрим функцию (1.21)

$$\omega_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)}\varphi_{ms}(z, w). \quad (5)$$

Применяя к этой функции оператор (1.9), получим новую функцию

$$\psi_{nk}(z, w) = E[\omega_{nk}(z, w)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)} E\left[\varphi_{ms}(z, w)\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(n,k)} \varphi_{ms}(z, w). \quad (6)$$

Далее, по коэффициентам этого разложения вводим величины

$$A_{ms} = \lambda_{ms}^{(0,0)}, \quad (7)$$

$$B_{ms} = \lambda_{ms}^{(1,0)} - Bh_{(m+1)s} - A_{(m+1)s}, \quad (8)$$

$$C_{ms} = \lambda_{ms}^{(1,1)} - Bh_{(m+1)(s+1)} - A_{(m+1)(s+1)}. \quad (9)$$

Теорема 3. *Если монические многочлены* (1) *удовлетворяют уравнению* (2) *и выполняются условия*

$$A_{ms} = B_{ms} = C_{ms} = 0, \quad (10)$$

то многочлены (1) *являются моническими ортогональными многочленами относительно функционала* (4).

Доказательство. В силу теоремы 19 из § 5 гл. VIII достаточно доказать, что при каждом n функция (5) есть многочлен степени n по совокупности переменных z и w. Рассмотрим функцию

$$\omega_{00}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{ms} \varphi_{ms}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} z^{n-k} w^{k}. \quad (11)$$

Для соответствующей функции (6) в силу условий (10) имеем

$$\psi_{00}(z, w) = E[\omega_{00}(z, w)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_n a_{nk} z^{n-k} w^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(0,0)} \varphi_{ms}(z, w) \equiv 0.$$

Отсюда следуют равенства $\lambda_n a_{nk} = 0$. Но поскольку $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n \neq 0$ при $n \geqslant 1$, то имеем $a_{nk} = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, функция (11) есть тождественное постоянное, причем

$$\omega_{00}(0, 0) = h_{00} \varphi_{00}(0, 0) = a_{00} \neq 0.$$

Далее, вводим две функции вида (5):

$$\omega_{10}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(m+1)s}\varphi_{ms}(z, w), \tag{12}$$

$$\omega_{11}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(m+1)(s+1)}\varphi_{ms}(z, w). \tag{13}$$

В силу формулы (6) им соответствуют функции

$$\psi_{10}(z, w) = E[\omega_{10}(z, w)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(1,0)}\varphi_{ms}(z, w), \tag{14}$$

$$\psi_{11}(z, w) = E[\omega_{11}(z, w)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(1,1)}\varphi_{ms}(z, w). \tag{15}$$

В силу формул (8), (9) и условий (10) имеем равенства

$$\lambda_{ms}^{(1,0)} = Bh_{(m+1)s}, \quad \lambda_{ms}^{(1,1)} = Bh_{(m+1)(s+1)},$$

с помощью которых, используя формулы (12)—(15), находим

$$\psi_{10}(z, w) = B\omega_{10}(z, w), \quad \psi_{11}(z, w) = B\omega_{11}(z, w). \tag{16}$$

А теперь к разложению

$$\omega_{10}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{nk}z^{n-k}w^{k} \tag{17}$$

применяем оператор E. В результате получим

$$\psi_{10}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_n b_{nk}z^{n-k}w^{k}. \tag{18}$$

Если умножить разложение (17) на B, то в силу первого из равенств (16) получим разложение (18). Поэтому имеем равенства $Bb_{nk} = \lambda_n b_{nk}$. Но поскольку $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = B$, то из этих равенств находим $b_{nk} = 0$ при $n \geqslant 2$ и $b_{00} = 0$. Следовательно, функция (12) есть многочлен степени 1 по совокупности переменных z и w. Аналогично доказывается, что и функция (13) также есть многочлен степени 1. Кроме того, поскольку свободные члены этих многочленов равны нулю, то из формул (12) и (13) находим условия $h_{10} = h_{11} = 0$.

Таким образом, функция (5) есть многочлен степени n при $n = 0$ и $n = 1$. Далее, будем доказывать теорему по индукции. Предположим, что являются многочленами все функции

$$\{\omega_{ms}(z, w)\}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Докажем, что тогда и функция (5) является многочленом степени n.

Рассмотрим функцию (6)

$$\psi_{nk}(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \lambda_{ms}^{(n,k)} \varphi_{ms}(z, w). \tag{20}$$

Преобразуем коэффициент $\lambda_{ms}^{(n,k)}$ в этой формуле. Поскольку выполняется условие (10), то равные нулю величины (7)—(9) можно прибавлять к этому коэффициенту в любой комбинации. Поэтому справедливо равенство

$$\lambda_{ms}^{(n,k)} = \lambda_{ms}^{(n,k)} - A_{(n+m)(k+s)} - pB_{(n+m-1)(k+s)} - \\ - qC_{(n+m-1)(k+s-1)}. \tag{21}$$

Будем считать, что здесь $p = n - k$ и $q = k$. В силу формул (1.30), (2.1)—(2.3) для четырех величин, стоящих в правой части равенства (21), при указанных сложных индексах имеем равенства

$$\lambda_{ms}^{(n,k)} = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_m + (m-s)(m-s-1)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s)}(a) + \\ + 2(m-s)\,sH_{(n+m-1)}^{(k+s-1)}(b) + s(s-1)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s-2)}(c), \tag{22}$$

$$A_{(n+m)(k+s)} = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_{n+m} + \\ + (n+m-k-s)(n+m-k-s-1)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s)}(a) + \\ + 2(n+m-k-s)(k+s)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s-1)}(b) + \\ + (k+s)(k+s-1)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s-2)}(c), \tag{23}$$

$$B_{(n+m-1)(k+s)} = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_{n+m-1} + \\ + (n+m-k-s-1)(n+m-k-s-2)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s)}(a) + \\ + 2(n+m-k-s-1)(k+s)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s-1)}(b) + \\ + (k+s)(k+s-1)\,H_{(n+m-1)}^{(k+s-2)}(c) - \\ - Bh_{(n+m)(k+s)} - A_{(n+m)(k+s)}, \tag{24}$$

$$C_{(n+m-1)(k+s-1)} = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_{n+m-1} + \\ + (n+m-k-s)(n+m-k-s-1)\,H_{n+m-1}^{(k+s)}(a) + \\ + 2(n+m-k-s)(k+s-1)\,H_{n+m-1}^{(k+s-1)}(b) +$$

$$+ (k+s-1)(k+s-2)\, H_{n+m-1}^{(k+s-2)}(c) - \\ - Bh_{(n+m)(k+s)} - A_{(n+m)(k+s)}. \quad (25)$$

В формулах (24) и (25) величину $A_{(n+m)(k+s)}$ надо заменить по формуле (23). Тогда во всех формулах (22)—(25) будут четыре величины

$$h_{(n+m)(k+s)}, \quad H_{n+m-1}^{(k+s)}(a), \quad H_{n+m-1}^{(k+s-1)}(b), \quad H_{n+m-1}^{(k+s-2)}(c) \quad (26)$$

с различными коэффициентами. Если подставить все величины (22)—(25) в равенство (21), то получим линейную комбинацию величин (26) в виде

$$\lambda_{ms}^{(n,k)} = c_1 h_{(n+m)(k+s)} + c_2 H_{n+m-1}^{(k+s)}(a) + \\ + c_3 H_{n+m-1}^{(k+s-1)}(b) + c_4 H_{n+m-1}^{(k+s-2)}(c). \quad (27)$$

Коэффициенты в этой формуле могут зависеть от n, k, m, s. Вычислим эти коэффициенты. Для первого из них из формулы (21), учитывая формулы (22)—(25), находим

$$c_1 = \lambda_m - \lambda_{n+m} - p(\lambda_{n+m-1} - B - \lambda_{n+m}) - \\ - q(\lambda_{n+m-1} - B - \lambda_{n+m}) = \lambda_m + (n-1)\lambda_{n+m} + nB - \\ - n\lambda_{n+m-1} = m[B + (m-1)A] + (n-1)(n+m)\times \\ \times [B + (n+m-1)A] + nB - n(n+m-1)\times \\ \times [B + (n+m-2)A] = n[B + (n-1)A] = \lambda_n. \quad (28)$$

Аналогично вычисляется второй коэффициент:

$$c_2 = (m-s)(m-s-1) - (n+m-k-s)(n+m- \\ -k-s-1) - (n-k)[(n+m-k-s-1)(n+m- \\ -k-s-2) - (n+m-k-s)(n+m-k-s-1)] - \\ -k[(n+m-k-s)(n+m-k-s-1) - (n+m- \\ -k-s)(n+m-k-s-1)] = (n-k)^2 + k - n. \quad (29)$$

Далее, для третьего коэффициента из тех же формул имеем

$$c_3 = 2(m-s)s - 2(m+n-k-s)(k+s) - \\ -(n-k)[2(n+m-k-s-1)(k+s) - 2(n+m- \\ -k-s)(k+s)] - k[2(n+m-k-s)(k+s-1) - \\ - 2(n+m-k-s)(k+s)] = 2(n-k)k. \quad (30)$$

Наконец, для четвертого коэффициента получаем

$$c_4 = (s-1)s - (k+s)(k+s-1) - \\ - (n-k)[(k+s)(k+s-1) - (k+s)(k+s-1)] - \\ - k[(k+s-1)(k+s-2) - (k+s)(k+s-1)] = \\ = k^2 - k. \quad (31)$$

Таким образом, все коэффициенты в формуле (27) вычислены. Из формул (28)—(31) следует, что все эти коэффициенты не зависят от индексов m и s, а зависят только от n и k, которые в данных рассуждениях фиксированы.

Преобразуем формулу (27). В силу формул (1.27)—(1.29) имеем

$$H^{(k+s)}_{n+m-1}(a) = h_{(n+m-1)(k+s)}a_{10} + \\ + h_{(n+m-1)(k+s+1)}a_{01} + h_{(n+m-2)(k+s)}a_{00}, \quad (32)$$

$$H^{(k+s-1)}_{(n+m-1)}(b) = h_{(n+m-1)(k+s-1)}b_{10} + \\ + h_{(n+m-1)(k+s)}b_{01} + h_{(n+m-2)(k+s-1)}b_{00}, \quad (33)$$

$$H^{(k+s-2)}_{(n+m-1)}(c) = h_{(n+m-1)(k+s-2)}c_{10} + \\ + h_{(n+m-1)(k+s-1)}c_{01} + h_{(n+m-2)(k+s-2)}c_{00}. \quad (34)$$

В формулах (32)—(34) имеется 7 различных моментов. Следовательно, с помощью этих формул равенство (27) приводится к виду

$$\lambda^{(n,k)}_{ms} = h_{(n+m)(k+s)}\lambda_n + a_1 h_{(n+m-1)(k+s)} + \\ + a_2 h_{(n+m-1)(k+s+1)} + a_3 h_{(n+m-1)(k+s-1)} + \\ + a_4 h_{(n+m-1)(k+s-2)} + a_5 h_{(n+m-2)(k+s)} + \\ + a_6 h_{(n+m-2)(k+s-1)} + a_7 h_{(n+m-2)(k+s-2)}. \quad (35)$$

Здесь все коэффициенты также не зависят от m и s, причем для них справедливы равенства

$$a_1 = c_2 a_{10} + c_3 b_{01}, \quad a_2 = c_2 a_{01}, \quad a_3 = c_3 b_{10} + c_4 c_{01}, \\ a_4 = c_4 c_{10}, \quad a_5 = c_2 a_{00}, \quad a_6 = c_3 b_{00}, \quad a_7 = c_4 c_{00}. \quad (36)$$

Умножим равенство (35) почленно на $\varphi_{ms}(z, w)$ и просуммируем по всем m и s. В результате получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} \lambda^{(n,k)}_{ms}\varphi_{ms}(z, w) = \\ = \lambda_n \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} h_{(n+m)(k+s)}\varphi_{ms}(z, w) +$$

$$+ a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-1)(k+s)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-1)(k+s+1)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_3 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-1)(k+s-1)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-1)(k+s-2)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_5 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-2)(k+s)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_6 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-2)(k+s-1)} \varphi_{ms}(z, w) +$$
$$+ a_7 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} h_{(n+m-2)(k+s-2)} \varphi_{ms}(z, w). \quad (37)$$

Из этого равенства, учитывая формулы (5) и (6), находим

$$\psi_{nk}(z, w) = \lambda_n \omega_{nk}(z, w) + a_1 \omega_{(n-1)k}(z, w) +$$
$$+ a_2 \omega_{(n-1)(k+1)}(z, w) + a_3 \omega_{(n-1)(k-1)}(z, w) +$$
$$- a_4 \omega_{(n-1)(k-2)}(z, w) + a_5 \omega_{(n-2)k}(z, w) +$$
$$+ a_6 \omega_{(n-2)(k-1)}(z, w) + a_7 \omega_{(n-2)(k-2)}(z, w). \quad (38)$$

Если $k = 0$, то из формул (30) и (31) находим $c_3 = c_4 = 0$. А тогда из равенств (36) следуют условия $a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 0$. Аналогично при $k = 1$ из формулы (31) получаем $c_4 = 0$, откуда в силу (36) имеем $a_4 = a_7 = 0$. Далее, если $k = n$, то из формул (29) и (30) находим $c_2 = c_3 = 0$, и в этом случае имеем $a_1 = a_2 = a_5 = 0$. Наконец, если $k = n - 1$, то из (29) и (36) следует $c_2 = 0$ и $a_2 = 0$. Следовательно, формулы (37) и (38) можно рассматривать при условиях $n \geqslant 2$ и $k = 0, 1, \ldots, n$.

В силу индуктивного предположения все функции (19) суть многочлены. Поэтому из формулы (38) находим равенство

$$\psi_{nk}(z, w) = \lambda_n \omega_{nk}(z, w) + Q_{n-1}(z, w), \quad (39)$$

где $Q_{n-1}(z, w)$ есть многочлен степени не выше $n - 1$.

Далее, в силу формулы (6) равенство (39) приводится к виду

$$E[\omega_{nk}(z,\ w)] = \lambda_n \omega_{nk}(z,\ w) + Q_{n-1}(z,\ w). \tag{40}$$

А теперь вводим разложение

$$\omega_{nk}(z, w) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} b_{pq} z^{p-q} w^q. \tag{41}$$

Подставляя это разложение в равенство (40), получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \lambda_p b_{pq} z^{p-q} w^q = \\ = \lambda_n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} b_{pq} z^{p-q} w^q + Q_{n-1}(z, w). \tag{42}$$

Поскольку это тождество, то выполняются условия $\lambda_p b_{pq} = \lambda_n b_{pq}$ при $p \geqslant n$. Но так как $\lambda_p \neq \lambda_n$ при $p \neq n$, то имеем $b_{pq} = 0$ при $p > n$. Следовательно, функция (41) есть многочлен степени n. При этом все старшие коэффициенты многочлена (41) произвольны. Теорема доказана.

§ 4. Вывод дифференциального уравнения из системы уравнений Пирсона

Пусть в односвязной области G, ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, определена весовая функция $h(x,\ y)$ непрерывная в замкнутой области $\bar{G}$ и равная нулю на контуре Γ. Как обычно, вводим монические ортогональные многочлены

$$\{\Phi_{nk}(x,\ y)\}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Предположим, что в замкнутой области $\bar{G}$ определены две системы непрерывно дифференцируемых функций

$$a(x,\ y),\quad b(x,\ y),\quad c(x,\ y),\quad g(x,\ y), \tag{2}$$

$$A(x,\ y),\quad B(x,\ y),\quad F(x,\ y),\quad H(x,\ y). \tag{3}$$

Будем считать, что в области G для весовой функции и функций системы (3) выполняются условия

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{F}{A}, \qquad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{H}{B}. \tag{4}$$

Систему уравнений (4) будем называть *системой Пирсо-*

на. Функции (2) пока будем считать произвольными и не зависящими от уравнений Пирсона (4) и от системы функций (3).

Для произвольного многочлена $Q(x, y)$ степени не выше $n-1$ рассмотрим интеграл

$$J = \iint\limits_G Q\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[hA\left(a\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial y}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[hB\left(c\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial y}\right]\right\} dx\,dy. \quad (5)$$

Обозначим через L всю сумму в фигурных скобках. Кроме того, в обозначении монического многочлена $\Phi_{nk}(x, y)$ для краткости будем опускать не только переменные x и y, но и индексы n и k. Выполняя операции дифференцирования, получим

$$L = A\frac{\partial h}{\partial x}\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + h\frac{\partial A}{\partial x}\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) +$$
$$+ hA\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) +$$
$$+ B\frac{\partial h}{\partial y}\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + h\frac{\partial B}{\partial y}\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) +$$
$$+ hB\left(\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right). \quad (6)$$

Далее, частные производные от весовой функции h в равенстве (6) заменяем с помощью уравнений (4). В результате каждое слагаемое в сумме (6) будет иметь множитель h. Поэтому сумму (6) можно представить в виде

$$L = hM, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$M = F\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial A}{\partial x}\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) +$$
$$+ A\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) +$$
$$+ H\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial B}{\partial y}\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) +$$
$$+ B\left(\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right). \quad (8)$$

Учитывая равенство (7), для интеграла (5) находим представление

$$J = \iint_G h(x, y)\, Q(x, y)\, M(x, y)\, dx\, dy. \tag{9}$$

А теперь начнем преобразования интеграла (5) в другом направлении. Для краткости введем обозначения

$$R_1 = A\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right), \quad R_2 = B\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Тогда интеграл (5) можно представить в виде суммы двух интегралов. Для первого из них имеем равенство

$$J_1 = \iint_G Q\frac{\partial}{\partial x}(hR_1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{\partial}{\partial x}(QhR_1)\, dx\, dy - \iint_G hR_1\frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy. \tag{11}$$

К первому интегралу, стоящему в правой части равенства (11), применяем формулу Грина. В результате, учитывая обращение в нуль весовой функции на контуре Г, получим

$$\iint_G \frac{\partial}{\partial x}(QhR_1)\, dx\, dy = \int_\Gamma hQR_1 dy = 0.$$

Следовательно, равенство (11) приводится к виду

$$J_1 = \iint_G Q\frac{\partial}{\partial x}(hR_1)\, dx\, dy = -\iint_G hR_1\frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy. \tag{12}$$

Аналогично доказывается равенство

$$J_2 = \iint_G Q\frac{\partial}{\partial y}(hR_2)\, dx\, dy = -\iint_G hR_2\frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{13}$$

Далее, в интегралах (12) и (13) используем обозначения (10). В результате имеем

$$J = J_1 + J_2 = -\iint_G h\left(R_1\frac{\partial Q}{\partial x} + R_2\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= -\iint_G h\left[A\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} +\right.$$

$$+ B\left(c\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\frac{\partial Q}{\partial y}\Bigg]\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_G h\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(aA\frac{\partial Q}{\partial x} + cB\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\left(bA\frac{\partial Q}{\partial x} + gB\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]dx\,dy. \quad (14)$$

Для краткости введем обозначения

$$R_3 = aA\frac{\partial Q}{\partial x} + cB\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad R_4 = bA\frac{\partial Q}{\partial x} + gB\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (15)$$

Тогда интеграл (14) представится в виде суммы двух интегралов

$$J_3 = \iint\limits_G hR_3\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dx\,dy, \quad (16)$$

$$J_4 = \iint\limits_G hR_4\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dx\,dy. \quad (17)$$

Для интеграла (16) аналогично формуле (11) имеем

$$J_3 = \iint\limits_G \frac{\partial}{\partial x}(hR_3\Phi)\,dx\,dy - \iint\limits_G \Phi\frac{\partial}{\partial x}(hR_3)\,dx\,dy.$$

Первый интеграл равен нулю. Поэтому получаем

$$J_3 = -\iint\limits_G \Phi\frac{\partial}{\partial x}(hR_3)\,dx\,dy. \quad (18)$$

Аналогично доказывается равенство

$$J_4 = -\iint\limits_G \Phi\frac{\partial}{\partial y}(hR_4)\,dx\,dy. \quad (19)$$

А теперь подставляем интегралы (18) и (19) в равенство (14). В результате находим

$$J = \iint\limits_G \Phi\left[\frac{\partial}{\partial x}(hR_3) + \frac{\partial}{\partial y}(hR_4)\right]dx\,dy. \quad (20)$$

Вычислим сумму T в квадратных скобках под знаком интеграла (20). В силу обозначений (15) имеем

$$T = \frac{\partial}{\partial x}(hR_3) + \frac{\partial}{\partial y}(hR_4) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}R_3 + h\frac{\partial R_3}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}R_4 + h\frac{\partial R_4}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}\left(aA\frac{\partial Q}{\partial x} + cB\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + h\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(aA) + \right.$$

$$\left. + aA\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(cB) + cB\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\right] +$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial y}\left(bA\frac{\partial Q}{\partial x} + gB\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + h\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(bA) + \right.$$

$$\left. + bA\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(gB) + gB\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]. \quad (21)$$

Далее, с помощью формул (4) из правой части равенства (21) можно исключить частные производные весовой функции. В результате равенство (21) приводится к виду

$$T = hP, \quad (22)$$

где введено обозначение

$$P = aF\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{cBF}{A}\frac{\partial Q}{\partial y} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(aA) + \right.$$

$$\left. + aA\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(cB) + cB\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\right] +$$

$$+ \frac{bAH}{B}\frac{\partial Q}{\partial x} + gH\frac{\partial Q}{\partial y} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(bA) + \right.$$

$$\left. + bA\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(gB) + gB\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]. \quad (23)$$

Подставляем значение (22) в интеграл (20) и учитываем равенство (9). В результате получим равенство

$$\iint\limits_G hQM\,dx\,dy = \iint\limits_G h\Phi P\,dx\,dy. \quad (24)$$

В этом равенстве сложные величины M и P определяются формулами (8) и (23). Преобразуем эти величины. В силу формулы (8) имеем

$$M = aA\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (bA + cB)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + gB\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} +$$

$$+ \left(aF + a\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial a}{\partial x} + cH + c\frac{\partial B}{\partial y} + B\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x} +$$

$$+ \left(bF + b\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial b}{\partial x} + gH + g\frac{\partial B}{\partial y} + B\frac{\partial g}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial y} =$$

$$= aA\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (bA + cB)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + gB\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} +$$

$$+ \left[aF + \frac{\partial}{\partial x}(aA) + cH + \frac{\partial}{\partial y}(cB)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x} +$$

$$+ \left[bF + \frac{\partial}{\partial x}(bA) + gH + \frac{\partial}{\partial y}(gB)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \quad (25)$$

Аналогично из равенства (23) находим

$$P = aA\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + (bA + cB)\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + gB\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} +$$

$$+ \left[aF + \frac{\partial}{\partial x}(aA) + \frac{bAH}{B} + \frac{\partial}{\partial y}(bA)\right]\frac{\partial Q}{\partial x} +$$

$$+ \left[gH + \frac{\partial}{\partial x}(cB) + \frac{cBF}{A} + \frac{\partial}{\partial y}(gB)\right]\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (26)$$

Далее, для краткости введем обозначения

$$a_{20} = aA, \quad 2a_{21} = bA + cB, \quad a_{22} = gB, \quad (27)$$

$$a_{10} = aF + \frac{\partial}{\partial x}(aA) + cH + \frac{\partial}{\partial y}(cB), \quad (28)$$

$$a_{11} = bF + \frac{\partial}{\partial x}(bA) + gH + \frac{\partial}{\partial y}(gB), \quad (29)$$

$$b_{10} = aF + \frac{\partial}{\partial x}(aA) + \frac{bAH}{B} + \frac{\partial}{\partial y}(bA), \quad (30)$$

$$b_{11} = gH + \frac{\partial}{\partial x}(cB) + \frac{cBF}{A} + \frac{\partial}{\partial y}(gB). \quad (31)$$

Тогда равенства (25) и (26) приводятся к виду

$$M = a_{20}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2a_{21}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + a_{10}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (32)$$

$$P = a_{20}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2a_{21}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + b_{10}\frac{\partial Q}{\partial x} + b_{11}\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (33)$$

Далее, предположим, что сумма (33) есть алгебраический многочлен степени не больше, чем $n-1$. Нетрудно указать достаточные условия для этого предположения. В самом деле, с самого начала настоящего параграфа считалось, что Q есть алгебраический многочлен степени не более $n-1$. Пусть, например, a_{20} есть многочлен по

x степени не более 2, а a_{22} есть многочлен по y степени не более 2. Аналогично a_{21} может содержать одночлены xy, x, y с различными коэффициентами. Далее, b_{10} есть многочлен по x первой степени, а b_{11} — по y тоже первой степени. При этих условиях многочлен (33) имеет степень не более $n-1$.

С другой стороны, с самого начала предполагалось, что Φ есть монический ортогональный многочлен $\Phi_{nk}(x, y)$, соответствующий весовой функции $h(x, y)$ и области G. Поэтому имеем равенство

$$\iint\limits_G h(x, y)\,\Phi_{nk}(x, y)\,P_{n-1}(x, y)\,dx\,dy = 0. \tag{34}$$

Обратимся теперь к формуле (32). Будем считать, что коэффициенты в этой формуле удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты в формуле (33). Можно, например, считать, что (32) и (33) являются допустимыми дифференциальными операторами второго порядка. Это означает, что из многочленов (27)—(31) не все имеют пониженную степень. Поскольку монический многочлен имеет вид

$$\Phi_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x, y), \tag{35}$$

то формула (32) определяет монический многочлен того же типа

$$M_{nk}(x, y) = c_{nk}x^{n-k}y^k + S_{n-1}(x, y). \tag{36}$$

Для этого многочлена в силу формул (24) и (34) получаем условие

$$\iint\limits_G h(x, y)\,Q_{n-1}(x, y)\,M_{nk}(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Поскольку это равенство выполняется для всякого многочлена $Q_{n-1}(x, y)$ степени не более $n-1$, то в силу теоремы единственности многочлен (36) может только множителем отличаться от монического многочлена (35). Следовательно, имеем равенство $M_{nk} = \lambda_{nk}\Phi_{nk}$, из которого в силу формулы (32) находим

$$a_{20}\frac{\partial^2\Phi_{nk}}{\partial x^2} + 2a_{21}\frac{\partial^2\Phi_{nk}}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\Phi_{nk}}{\partial y^2} + \\ + a_{10}\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial x} + a_{11}\frac{\partial\Phi_{nk}}{\partial y} = \lambda_{nk}\Phi_{nk}. \tag{37}$$

Таким образом, если весовая функция $h(x, y)$ в области G удовлетворяет уравнениям Пирсона (4) и обращается в нуль на границе Γ области G, а функции (27) — (31) являются многочленами указанных степеней, то монические ортогональные многочлены (1) удовлетворяют дифференциальному уравнению (37).

В случае неограниченной области G и неспрямляемого контура Γ все рассуждения и выводы сохраняются, если при данной весовой функции можно применять формулу Грина о преобразовании двойного интеграла в криволинейный.

Теоретически ясно, что уравнение (37) при упомянутых условиях охватывает в качестве частных случаев все допустимые и потенциально самосопряженные уравнения, весовая функция которых обращается в нуль на границе области ортогональности.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть в области

$$G = \{(x, y): -1 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

дана весовая функция

$$h(x, y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-y)^{\gamma}(1+y)^{\delta},$$

где все показатели положительны. В этом случае имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h(x, y)\,\frac{\beta(1-x) - \alpha(1+x)}{1-x^2},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = h(x, y)\,\frac{\delta(1-y) - \gamma(1+y)}{1-y^2}.$$

Следовательно, в данном случае имеем равенства

$$A = 1 - x^2, \quad B = 1 - y^2, \quad F = \beta(1-x) - \alpha(1+x),$$

$$H = \delta(1-y) - \gamma(1+y), \quad a = g = 1, \quad b = c = 0.$$

Далее, из формул (27) — (29) находим

$$a_{20} = 1 - x^2, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1 - y^2,$$

$$a_{10} = \beta(1-x) - \alpha(1+x) - 2x,$$

$$a_{11} = \delta(1-y) - \gamma(1+y) - 2y.$$

Подставляя эти значения в уравнение (37), получаем

$$(1-x^2)\,u''_{xx} + (1-y^2)\,u''_{yy} + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\,x]\,u'_x + \\ + [\delta - \gamma - (\gamma+\delta+2)\,y]\,u'_y = \lambda_{nk} u. \quad (38)$$

Будем считать, что монический ортогональный многочлен имеет единичный старший коэффициент. Тогда, сравнивая старшие коэффициенты слева и справа в уравнении (38), придем к равенству

$$\lambda_{nk} = -(n-k)(n-k+\alpha+\beta+1) - k(k+\gamma+\delta+1).$$

Уравнение (38) уже встречалось в § 1 гл. II.

2. Рассмотрим теперь область

$$\overline{G} = \{(x,\ y):\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}$$

и в ней весовую функцию

$$h(x,\ y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} y^{\gamma} e^{-y}.$$

Поскольку в данном случае выполняются равенства

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h\,\frac{\beta(1-x)-\alpha(1+x)}{1-x^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = h\,\frac{\gamma-y}{y},$$

то, следовательно, имеем функции (2) и (3)

$$A = 1-x^2, \quad B = y, \quad F = \beta(1-x)-\alpha(1+x),$$

$$H = \gamma - y, \quad b = c = 0, \quad a = g = 1,$$

Подставляя эти значения в формулы (27)—(29), находим

$$a_{20} = 1-x^2, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = y,$$

$$a_{10} = \beta(1-x)-\alpha(1+x)-2x, \quad a_{11} = \gamma - y + 1.$$

В результате получаем уравнение

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial u}{\partial x} + $$

$$+ (1+\gamma-y)\frac{\partial u}{\partial y} = [(n-2)k - n(n+\alpha+\beta+1)]\,u.$$

3. Пусть теперь в области

$$\overline{G} = \{(x,\ y):\ x^2 \leqslant y\}$$

определена весовая функция

$$h(x,\ y) = (y-x^2)^{\alpha} e^{-\beta y}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Как и в предыдущих случаях находим последовательно

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h\,\frac{-2\alpha x}{y-x^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = h\,\frac{\alpha-\beta y+\beta x^2}{y-x^2},$$

$$A = y - x^2, \quad F = -2\alpha x, \quad H = \alpha - \beta y + \beta x^2,$$
$$a = 1, \quad b = c = g = 0, \quad a_{10} = -2x(1+\alpha),$$
$$a_{22} = y - x^2, \quad a_{21} = a_{22} = a_{11} = 0.$$

Здесь введено дополнительное условие $g = 0$, ибо в противном случае многочлен a_{11} будет иметь степень 2. Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение (37), получим уравнение

$$(y - x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x(1+\alpha)\frac{\partial u}{\partial x} = \\ = -(n-k)(n-k+\alpha+1)u.$$

В настоящем параграфе изложены результаты С. А. Агаханова [VI.1].

§ 5. Допустимое дифференциальное уравнение в частных производных произвольного порядка

Пусть дана система многочленов

$$\begin{array}{l} Q_{10}(x, y), \quad Q_{11}(x, y), \\ Q_{20}(x, y), \quad Q_{21}(x, y), \quad Q_{22}(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_{N0}(x, y), Q_{N1}(x, y), \dots, Q_{NN}(x, y). \end{array} \qquad (1)$$

Будем пока считать, что у каждого многочлена индексы означают номер пачки и номер многочлена в пачке, а не степень и не порядок главного члена, т. е. фактически степени всех многочленов системы (1) произвольны. По системе многочленов (1) образуем дифференциальный оператор в частных производных

$$D_N[u] = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_x^{m-k} D_y^k, \qquad (2)$$

где, как обычно, введены обозначения $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_N[u] = \lambda u. \qquad (3)$$

Оператор (2) и уравнение (3) будем называть допустимыми, если существует такая последовательность чисел

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots, \qquad (4)$$

для которой выполняются условия:

1. При каждом номере n уравнение

$$D_N[u] = \lambda_n u \tag{5}$$

имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени n по совокупности переменных x и y.

2. Уравнение (5) не имеет нетривиальных решений в виде многочленов степени меньшей, чем n.

Из этих условий следует, что $\lambda_0 = 0$ и все числа (4) различны между собой, т. е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m, \quad n \neq m. \tag{6}$$

Поскольку при данном n существует $n+1$ линейно независимых многочленов степени n, являющихся решениями уравнения (5), то можно ввести пространство W_n многочленов, которые являются решениями уравнения (5). Кроме того, тождественный нуль также является решением уравнения (5). Поэтому, включая тождественный нуль во множество W_n, можем рассматривать множество W_n как векторное пространство размерности $n+1$.

Теорема 4. *Если уравнение* (3) *допустимо, то каждый многочлен* $Q_{mk}(x, y)$ *из системы* (1) *имеет степень не выше* m.

Доказательство. Пусть в пространстве W_n дан базис

$$B_{n0}(x, y), \quad B_{n1}(x, y), \ \ldots, \ B_{nn}(x, y). \tag{7}$$

Все многочлены этого базиса являются решениями уравнения (5). Для каждого многочлена из системы (7) вводим разложение

$$B_{ns}(x, y) = \sum_{p=0}^{n} a_{sp} x^{n-p} y^p + R_{n-1}^{(n, s)}(x, y). \tag{8}$$

Поскольку система (7) линейно независима, то отличен от нуля определитель

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

В самом деле, предположим противное, что $A_n = 0$. Тогда из формулы (8) следует, что существует некоторая линейная комбинация многочленов (7), которая является многочленом степени не выше $n-1$ и удовлетворяет уравнению (5). Но в силу допустимости уравнения эта линейная комбинация есть тождественный нуль, что означает линейную зависимость многочленов (7).

Докажем, что при условии (9) в пространстве W_n существует монический базис

$$\omega_{n0}(x,\ y),\ \omega_{n1}(x,\ y),\ \ldots,\ \omega_{nn}(x,\ y), \tag{10}$$

где

$$\omega_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y), \tag{11}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{s=0}^{n} c_{sk}a_{sm} = \delta_{km}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Определитель этой системы $A_n \neq 0$. Следовательно, при любом k эта система имеет единственное решение $\{c_{sk}\}$. Тогда многочлены (11) можно ввести по формуле

$$\omega_{nk}(x, y) = \sum_{s=0}^{n} c_{sk}B_{ns}(x, y).$$

В этом случае, используя формулу (8), находим

$$\omega_{nk}(x, y) = \sum_{s=0}^{n} c_{sk}\left[\sum_{p=0}^{n} a_{sp}x^{n-p}y^p\right] + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y) =$$
$$= \sum_{p=0}^{n}\left[\sum_{s=0}^{n} c_{sk}a_{sp}\right]x^{n-p}y^p + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y).$$

Из всей суммы в этом равенстве в силу условий (12) останется только одночлен $x^{n-k}y^k$. Таким образом, формула (11) доказана.

Итак, если уравнение (3) допустимо, то при каждом n линейно независимыми решениями уравнения (5) будут монические многочлены (10) вида (11).

Будем доказывать теорему по индукции относительно номеров m многочленов $\{Q_{mn}(x,\ y)\}$ из системы (1).

Пусть $m=1$. Тогда система (10) состоит из двух многочленов

$$\omega_{10}(x, y) = x + c_0^{(1,0)}, \quad \omega_{11}(x, y) = y + c_0^{(1,1)}.$$

Подставляя их в уравнение (5) при $n=1$, получим равенства

$$Q_{10}(x,\ y) = \lambda_1\omega_{10}(x,\ y), \quad Q_{11}(x,\ y) = \lambda_1\omega_{11}(x,\ y). \tag{13}$$

Следовательно, утверждение теоремы доказано для $m=1$.

Рассмотрим теперь случай $m=2$. В этом случае имеем три многочлена

$$\omega_{20}(x, y) = x^2 + R_1^{(2,0)}(x, y), \quad \omega_{21}(x, y) = xy + R_1^{(2,1)}(x, y),$$

$$\omega_{22}(x, y) = y^2 + R_1^{(2,2)}(x, y).$$

Подставляя эти многочлены в уравнение (5) при $n=2$ получим

$$2Q_{20} + (Q_{10}D_x\omega_{20} + Q_{11}D_y\omega_{20}) = \lambda_2\omega_{20},$$
$$Q_{21} + (Q_{10}D_x\omega_{21} + Q_{11}D_y\omega_{21}) = \lambda_2\omega_{21},$$
$$2Q_{22} + (Q_{10}D_x\omega_{22} + Q_{11}D_y\omega_{22}) = \lambda_2\omega_{22}.$$

Из этих трех равенств в силу формул (13) следует, что теорема справедлива при $m=2$. Аналогично рассматривается случай $m=3$.

Предположим теперь, что теорема верна для всех номеров $m \leqslant n-1$, где $n \leqslant N$. Тогда рассмотрим систему многочленов (10) и уравнение (5). Подставляя эти многочлены в уравнение (5), аналогично предыдущим случаям получаем равенства

$$n!\,Q_{n0} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_x^{m-k}D_y^k\omega_{n0} = \lambda_n\omega_{n0},$$

$$(n-1)!\,Q_{n1} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_x^{m-k}D_y^k\omega_{n1} = \lambda_n\omega_{n1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-s)!\,s!\,Q_{ns} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_x^{m-k}D_y^k\omega_{ns} = \lambda_n\omega_{ns},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n!\,Q_{nn} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_x^{m-k}D_y^k\omega_{nn} = \lambda_n\omega_{nn}.$$

Из этих равенств следует, что все многочлены $\{Q_{ns}(x, y)\}$ при $s=0, 1, \ldots, n$ имеют степень не более n. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если уравнение* (3) *допустимо, то имеют место формулы*

$$\lambda_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}, \quad n \geqslant 1, \tag{14}$$

$$Q_{mk}(x, y) = C_m^k a_m x^{m-k} y^k + Q_{m-1}^{(m,k)}(x, y), \tag{15}$$

где числа

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N \tag{16}$$

произвольны, но хотя бы одно из них отлично от нуля, причем в формуле (14) $a_n = 0$ *при* $n > N$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n = 1$. В этом случае из формул (13) находим равенства

$$Q_{10}(x, y) = \lambda_1 x + a_{10}, \quad Q_{11}(x, y) = \lambda_1 y + a_{11}.$$

Следовательно, формулы (14) и (15) доказаны при $n = 1$.

Предположим, что формулы (14) и (15) справедливы для номеров 1, 2, ..., $n - 1$. Сделаем переход к номеру n.

Пусть имеем разложение

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} a_{pq} x^{p-q} y^q. \tag{17}$$

Подставляем многочлен (17) в уравнение (5). В результате получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n} Q_{nk} D_x^{n-k} D_y^k \omega_{ns} + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \left(C_m^k a_m x^{m-k} y^k + R_{m-1}^{(m,k)}\right) D_x^{m-k} D_y^k \omega_{ns} = \\ = \lambda_n \omega_{ns} = \lambda_n \left(x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}\right). \tag{18}$$

А теперь сравниваем старшие коэффициенты при одночленах степени n. В правой части равенства (18) есть только один старший член $\lambda_n x^{n-s} y^s$. В двойной сумме все старшие члены будут иметь вид $x^{n-s} y^s$ с соответствующими коэффициентами. Следовательно, у многочлена (17) также должен быть только один старший член вида $x^{n-k} y^k$, т. е. в формуле (17) имеем условие для старших коэффициентов $a_{nq} = 0$ при $q \neq k$. Поэтому из формулы (18) находим равенство

$$a_{ns}(n-s)!\,s!\,x^{n-s}y^s +$$
$$+ x^{n-s}y^s \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{s} C_m^k a_m \frac{(n-s)!\,s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!} = \lambda_n x^{n-s} y^s.$$

Следовательно, имеем формулу

$$\lambda_n = (n-s)!\,s!\,a_{ns} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{k=0}^{s} \frac{C_m^k (n-s)!\,s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!}. \tag{19}$$

Далее воспользуемся формулой

$$\sum_{k=0}^{s} C_m^k \frac{(n-s)!\,s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{20}$$

В результате равенство (19) приводится к виду

$$\lambda_n = (n-s)!\,s!\,a_{ns} + n! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{(n-m)!} \tag{21}$$

Из этого равенства следует, что первое слагаемое не зависит от s. Поэтому можно ввести обозначение $(n-s)!s!a_{ns} = n!a_n$, из которого следует равенство $a_{ns} = C_n^s a_n$. Этим формулы (14) и (15) доказаны. Если $n > N$, то в правых частях равенств (19) и (21) не будет первого слагаемого. А многочлен (15) естественно рассматривать только при условии $m \leqslant N$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если выполнены условия* (14) *и* (15), *а постоянные* (16) *таковы, что все числа* (14) *отличны от нуля и попарно различны, то уравнение* (3) *допустимо.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5) при условиях (14) и (15). Докажем, что это уравнение имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени n.

Рассмотрим многочлен с произвольными коэффициентами

$$B_{ns}(x, y) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_{pq}^{(n,s)} x^{p-q} y^q. \tag{22}$$

Подставляя этот многочлен в уравнение (5), находим

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\left(C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}\right) D_x^{m-k}D_y^k B_{ns} = \lambda_n B_{ns}(x, y).$$

Далее вычисляем коэффициенты при одночлене $x^{p-q}y^q$ в обеих частях равенства. В результате имеем равенство

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}\left[C_m^k a_m \frac{(p-q)!\,q!}{(p-q-m+k)!\,(q-k)!}\right] A_{pq}^{(n,s)} + \\ + \sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{mk}A_{mk}^{(n,s)} = \lambda_n A_{pq}^{(n,s)}.$$

Внутреннюю сумму в первой двойной сумме вычисляем с помощью равенства (20). Применяя затем формулу (14), находим

$$(\lambda_p - \lambda_n)\, A_{pq}^{(n,s)} + \sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{mk}A_{mk}^{(n,s)} = 0.$$

В этих равенствах нельзя полагать $p = n$. Следовательно, все старшие коэффициенты

$$A_{n0}^{(n,s)},\quad A_{n1}^{(n,s)}, \ldots, A_{nn}^{(n,s)} \tag{23}$$

у многочлена (22) остаются произвольными. Фиксируя эти коэффициенты произвольно и перенося слагаемые с этими коэффициентами в правую часть, получим систему уравнений

$$(\lambda_p - \lambda_n)\, A_{pq}^{(n,s)} + \sum_{m=p+1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} b_{mk}A_{mk}^{(n,s)} = c_{pq}, \tag{24}$$

$$p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\quad q = 0,\ 1,\ \ldots,\ p,\quad m+k > p+q.$$

При указанных значениях индексов система (24) является треугольной системой линейных неоднородных уравнений. У определителя этой системы ниже главной диагонали стоят нули. А главная диагональ составлена из разностей вида $(\lambda_p - \lambda_n)$, где $p < n$, причем некоторые из этих разностей повторяются. Более того, поскольку система (24) треугольная, то ее можно решать начиная с последнего уравнения. Например, последние три уравнения имеют вид

$$(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, A_{(n-1)(n-3)}^{(n,s)} + b_{(n-1)(n-2)}^{(n-1,n-3)} A_{(n-1)(n-2)}^{(n,s)} + \\ + b_{(n-1)(n-1)}^{(n-1,n-3)} A_{(n-1)(n-1)}^{(n,s)} = c_{(n-1)(n-3)},$$

$$(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\,A^{(n,s)}_{(n-1)(n-2)}+b^{(n-1,\,n-2)}_{(n-1)(n-1)}A^{(n,s)}_{(n-1)(n-1)}=$$
$$=c_{(n-1)(n-2)},$$
$$(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\,A^{(n,s)}_{(n-1)(n-1)}=c_{(n-1)(n-1)}.$$

Таким образом, система уравнений (24) разрешима. Более того, поскольку в правых частях уравнений (24) стоят $n+1$ произвольных постоянных (23), то имеется $n+1$ линейно независимых решений системы уравнений (24). Теорема доказана.

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы* 5, *то при любом n уравнение* (5) *не имеет нетривиальных решений в виде многочлена степени не выше $n-1$.*

Доказательство. Предположим противное, что при некотором n существует отличный от тождественного нуля многочлен $B_{n-1}(x,\ y)$ степени не выше $n-1$, который является решением уравнения (5). Тогда все рассуждения, приведшие к системе уравнений (24), остаются справедливыми. Только в данном случае все числа (23) равны нулю, и, следовательно, в данном случае система (24) становится однородной. Но поскольку определитель системы отличен от нуля, то система имеет только тривиальное решение. Следовательно, все коэффициенты многочлена $B_{n-1}(x,\ y)$ равны нулю. Теорема доказана.

Таким образом, из доказанных трех теорем настоящего параграфа следует, что условия (14) и (15) необходимы и достаточны для допустимости уравнения (3), если все числа (14) отличны от нуля и различны между собой.

Рассмотрим частные случаи уравнения (3).

Если $N=1$, то получим уравнение

$$(x+b_1)\frac{\partial u}{\partial x}+(y+b_2)\frac{\partial u}{\partial y}=nu, \tag{25}$$

ибо в данном случае в силу формулы (14) имеем $\lambda_n=na$. Уравнение (25) аффинным преобразованием $x=t-b_1$, $y=\tau-b_2$ приводится к виду

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu. \tag{26}$$

Моническая система многочленов

$$\Phi_{nk}(x,\ y)=x^{n-k}y^k,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{27}$$

является решением уравнения (26). Принимая эту систему как базис, получим пространство многочленов W_n, которые являются решениями уравнения (26). Допустим, что существует линейный функционал F, относительно которого все многочлены из пространства W_n ортогональны многочленам меньших степеней. По системе монических многочленов (27) можно построить базис $\{B_{nk}(x, y)\}$, ортонормированный относительно функционала F. Каждый многочлен $B_{nk}(x, y)$ является однородным относительно многочленов (27). Следовательно, многочлен $B^2_{nk}(x, y)$ также является однородным, но уже степени $2n$, т. е. имеем разложение

$$B^2_{nk}(x, y) = \sum_{s=0}^{2n} c_s \Phi_{(2n)s}(x, y). \tag{28}$$

С другой стороны, предположим, что функционал F согласован с уравнением (26). Тогда выполняются условия $F(\Phi_{nk}) = 0$. Следовательно, применяя функционал F к многочлену (28), получим равенство

$$F\left(B^2_{nk}\right) = \sum_{s=0}^{2n} c_s F\left(\Phi_{(2n)s}\right) = 0.$$

Таким образом, функционал F вырожден, и поэтому уравнение (26) не представляет интереса с точки зрения теории ортогональных многочленов.

Пусть теперь $N = 2$. Тогда из формул (14) и (15) находим

$$\lambda_n = n!\left[\frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_2}{(n-2)!}\right] = n\,[a_1 + (n-1)\,a_2],$$

$$Q_{10}(x, y) = a_1 x + g_0, \quad Q_{11}(x, y) = a_1 y + d_0,$$

$$Q_{20}(x, y) = C_2^0 a_2 x^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},$$

$$Q_{21}(x, y) = C_2^1 a_2 xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00},$$

$$Q_{22}(x, y) = C_2^2 a_2 y^2 + c_{10}x + c_{01}y + c_{00}.$$

Вводя обозначения $a_1 = B$ и $a_2 = A$ и подставляя все эти многочлены в уравнение (3), получим уже рассмотренное ранее допустимое дифференциальное уравнение второго порядка.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [VII. 18].

Глава X

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Примеры представления ортогональных по области многочленов через многочлены Якоби

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые частные случаи, когда ортогональные по области многочлены представляются в виде различных произведений многочленов Якоби. К таким случаям относятся и ортогональные многочлены Аппеля.

Пусть на интервале $(-1, 1)$ дана весовая функция Якоби

$$h(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \quad t \in (-1, 1), \tag{1}$$

где параметры, как обычно, удовлетворяют условиям

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{2}$$

Обозначим через $\{\widehat{P}_n(t;\ \alpha,\ \beta)\}$ ортонормированные многочлены Якоби. Каждый такой многочлен имеет положительный старший коэффициент, а для всех многочленов Якоби выполняется условие ортонормированности

$$\int_{-1}^{1} h(t)\, \widehat{P}_n(t;\ \alpha,\ \beta)\, \widehat{P}_k(t;\ \alpha,\ \beta)\, dt = \delta_{nk}. \tag{3}$$

На концах интервала ортогональности имеем

$$\widehat{P}_n(1;\ \alpha,\ \beta) = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(\beta+n+1)}}, \tag{4}$$

$$\widehat{P}_n(-1;\ \alpha,\ \beta) = (-1)^n \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)}}. \tag{5}$$

Если выполняется условие

$$q = \max\{\alpha, \beta\} \geqslant -1/2, \tag{6}$$

то максимум абсолютного значения многочлена Якоби на отрезке $[-1, 1]$ достигается на одном из концов этого отрезка. Следовательно, из формул (4) и (5) при условии (6) имеем неравенство

$$\left|\widehat{P}_n(t; \alpha, \beta)\right| \leqslant c_1(\alpha, \beta)(n+1)^{q+\frac{1}{2}}, \quad t \in [-1, 1]. \tag{7}$$

Далее, если выполняются условия

$$\alpha \geqslant -\frac{1}{2}, \quad \beta \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{8}$$

то для многочленов Якоби имеет место весовая оценка

$$(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\left|\widehat{P}_n(t; \alpha, \beta)\right| \leqslant c_2(\alpha, \beta),$$
$$t \in [-1, 1]. \tag{9}$$

Все эти результаты изложены в монографиях [II. 21, 24].

Заметим, что в случае совпадения индексов, т. е. при условии $\alpha = \beta$, для многочленов Якоби применяется обозначение

$$\widehat{P}_n(t; \alpha) = \widehat{P}_n(t; \alpha, \alpha). \tag{10}$$

Пример 1. Для краткости введем обозначение

$$\alpha_k = \alpha + k + \frac{1}{2} \tag{11}$$

и рассмотрим систему многочленов

$$F_{nk}(x, y; \alpha) = \widehat{P}_{n-k}(x; \alpha_k)(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{P}_k\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}; \alpha\right) \tag{12}$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Докажем, что эти многочлены ортонормированы в единичном круге

$$G = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < 1\} \tag{13}$$

с весовой функцией

$$h(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^\alpha, \qquad \alpha > -1. \tag{14}$$

В самом деле, используя формулы (12) и (14), находим

$$J_{nm}^{(k,s)} = \iint\limits_{G} \widehat{F}_{nk}(x, y; \alpha)\, \widehat{F}_{ms}(x, y; \alpha)\, h(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \widehat{P}_{n-k}(x; \alpha_k)\, \widehat{P}_{m-s}(x; \alpha_s)\, (1-x^2)^{\frac{k+s}{2}} \times$$

$$\times \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \widehat{P}_k\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}; \alpha\right) \widehat{P}_s\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}; \alpha\right) \times \right.$$

$$\left. \times (1-x^2-y^2)^{\alpha}\, dy \right] dx. \qquad (15)$$

Во внутреннем интеграле заменим переменное по формуле $y = t\sqrt{1-x^2}$. В результате этот интеграл приведется к виду

$$(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \widehat{P}_k(t; \alpha)\, \widehat{P}_s(t; \alpha)\, (1-t^2)^{\alpha}\, dt. \qquad (16)$$

Если $k \neq s$, то интеграл (16) в силу условия (3) и обозначения (10) равен нулю. Пусть теперь $k = s$. Тогда из формулы (15) получим

$$J_{nm}^{(k,k)} = \int_{-1}^{1} \widehat{P}_{n-k}(x; \alpha_k)\, \widehat{P}_{m-k}(x; \alpha_k)\, (1-x^2)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}\, dx.$$

В силу обозначения (11) этот интеграл равен нулю, если $n \neq m$, и 1 при $n = m$.

Таким образом, многочлены (12) ортонормированы по области (13) с весовой функцией (14). Эти многочлены были рассмотрены в § 4 гл. V. Они удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.4.24). С помощью свойств многочленов Якоби для многочленов (12) можно получить оценки внутри области (13), равномерные оценки в замкнутом единичном круге и весовые оценки, аналогичные неравенствам (7) и (9).

П р и м е р 2. Рассмотрим многочлены по двум переменным

$$Q_{nk}(x, y; \alpha, \beta) = \widehat{P}_{n-k}(2x-1; \alpha, \beta_k)\, (2x)^{k/2}\, \widehat{P}_k\left(\frac{y}{\sqrt{x}}; \beta\right), \qquad (17)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где для краткости введено обозначение

$$\beta_k = \beta + k + \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Докажем, что многочлены (17) ортогональны по области

$$G = \{(x, y): y^2 < x < 1\} \tag{19}$$

с весовой функцией

$$h(x, y) = (1 - x)^\alpha (x - y^2)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{20}$$

В самом деле, как и в предыдущем случае, имеем

$$J_{nm}^{(k,s)} = \iint_G Q_{nk}(x, y; \alpha, \beta) Q_{ms}(x, y; \alpha, \beta) h(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \widehat{P}_{n-k}(2x - 1; \alpha, \beta_k)(2x)^{k/2}(1 - x)^\alpha \times$$

$$\times \widehat{P}_{m-s}(2x - 1; \alpha, \beta_s)(2x)^{s/2} \times$$

$$\times \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \widehat{P}_k\left(\frac{y}{\sqrt{x}}; \beta\right) \widehat{P}_s\left(\frac{y}{\sqrt{x}}; \beta\right)(x - y^2)^\beta\, dy\right] dx. \tag{21}$$

Во внутреннем интеграле заменяем переменное интегрирования по формуле $y = t\sqrt{x}$. В результате этот интеграл приводится к виду

$$x^{\beta + \frac{k}{2}} \int_{-1}^{1} \widehat{P}_k(t; \beta) \widehat{P}_s(t; \beta)(1 - t^2)^\beta\, dt.$$

Если $k \neq s$, то это произведение равно нулю. Пусть теперь $k = s$. Тогда из формулы (21), учитывая обозначение (18), находим

$$J_{nm}^{(k,k)} = 2^k \int_0^1 \widehat{P}_{n-k}(2x - 1; \alpha, \beta_k)(1 - x)^\alpha \times$$

$$\times x^{\beta_k} \widehat{P}_{m-k}(2x - 1; \alpha, \beta_k)\, dx. \tag{22}$$

Заменяя переменное интегрирования по формуле $2x -$

$-1=t$, из равенства (22) получаем

$$J_{nm}^{(k,k)}=2^k\int_{-1}^{1}\widehat{P}_{n-k}(t;\alpha,\beta_k)\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\beta_k}\widehat{P}_{m-k}(t;\alpha,\beta_k)\frac{1}{2}\,dt=$$
$$=\frac{2^k}{2^{\alpha+\beta_k+1}}\int_{-1}^{1}\widehat{P}_{n-k}(t;\alpha,\beta_k)(1-t)^{\alpha}\times$$
$$\times(1+t)^{\beta_k}\widehat{P}_{m-k}(t;\alpha,\beta_k)\,dt=\frac{\delta_{(n-k)(m-k)}}{2^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}}}.\qquad(23)$$

Если $n\neq m$, то величина (23) равна нулю. Следовательно, многочлены (17) ортогональны по области (19) с весовой функцией (20). А из равенства (23) при $n=m$ следует, что ортонормированные многочлены, соответствующие весовой функции (20) в области (19), определяются формулой

$$\overline{Q}_{nk}(x,y;\alpha,\beta)=\sqrt{2^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}}}\,Q_{nk}(x,y;\alpha,\beta).\qquad(24)$$

Аналогично предыдущему примеру из асимптотических свойств многочленов Якоби можно получить для многочленов (24) различные оценки внутри области (19), в замкнутой области, а также весовые оценки.

А теперь рассмотрим самый важный случай, когда ортогональные по области многочлены представляются через многочлены Якоби.

Пример 3. Пусть в треугольнике

$$G=\{(x,\ y):\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}\qquad(25)$$

определена весовая функция Аппеля

$$h(x,\ y)=x^{\alpha}y^{\beta}(1-x-y)^{\gamma}\qquad(26)$$

при обычных условиях

$$\alpha>-1,\quad\beta>-1,\quad\gamma>-1.\qquad(27)$$

Для краткости введем обозначение

$$a_k=\beta+\gamma+2k+1\qquad(28)$$

и рассмотрим многочлены

$$A_{nk}(x, y) = A_{nk}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = \\ = \widehat{P}_{n-k}(1-2x; \alpha, a_k)(1-x)^k \widehat{P}_k\left(\frac{2y}{1-x} - 1; \gamma, \beta\right), \quad (29)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Докажем, что эти многочлены ортогональны по области (25) с весовой функцией (26). В самом деле, используя формулы (26) и (29), находим

$$J_{nm}^{(k,s)} = \iint_G A_{nk}(x, y) A_{ms}(x, y) h(x, y)\,dx\,dy = \\ = \int_0^1 \widehat{P}_{n-k}(1-2x; \alpha, a_k)(1-x)^{k+s} x^\alpha \widehat{P}_{m-s}(1-2x; \alpha, a_s) \times \\ \times \left[\int_0^{1-x} \widehat{P}_k\left(\frac{2y}{1-x} - 1; \gamma, \beta\right) \widehat{P}_s\left(\frac{2y}{1-x} - 1; \gamma, \beta\right) \times \right. \\ \left. \times y^\beta (1-x-y)^\gamma\,dy\right] dx. \quad (30)$$

Во внутреннем интеграле заменяем переменную интегрирования по формулам

$$\frac{2y}{1-x} - 1 = t, \quad y = \frac{(1+t)(1-x)}{2}, \quad 1-x-y = \\ = \frac{(1-x)(1-t)}{2}.$$

В результате этот интеграл приводится к виду

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\beta+\gamma+1} \int_{-1}^1 \widehat{P}_k(t; \gamma, \beta) \widehat{P}_s(t; \gamma, \beta)(1-t)^\gamma (1+t)^\beta\,dt.$$

Если $k \neq s$, то это произведение равно нулю. А если $k = s$, то из равенства [30] получаем

$$J_{nm}^{(k,k)} = \frac{1}{2^{\beta+\gamma+1}} \int_0^1 \widehat{P}_{n-k}(1-2x; \alpha, a_k) \times \\ \times (1-x)^{2k+\beta+\gamma+1} x^\alpha \widehat{P}_{m-k}(1-2x; \alpha, a_k)\,dx. \quad (31)$$

Заменим в этом интеграле переменные по формулам

$$1-2x=t,\quad x=\frac{1-t}{2},\quad 1-x=\frac{1+t}{2}.$$

Тогда, используя обозначение (28) и вводя для краткости еще одно обозначение

$$b_k=k+\gamma+\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, \tag{32}$$

получим равенство

$$J_{nm}^{(k,k)}=\frac{1}{2^{2b_k}}\int_{-1}^{1}\widehat{P}_{n-k}(t;\alpha,a_k)\widehat{P}_{m-k}(t;\alpha,a_k)\times$$
$$\times(1-t)^{\alpha}(1+t)^{a_k}dt. \tag{33}$$

Следовательно, многочлены (29) ортогональны по области (25) с весовой функцией (26). А из формул (29) и (33) следует, что ортонормированные многочлены Аппеля определяются равенством

$$\widehat{A}_{nk}(x,y;\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^n\,2^{b_k}A_{nk}(x,y;\alpha,\beta,\gamma). \tag{34}$$

Таким образом, ортонормированные многочлены Аппеля представляются через многочлены Якоби по формулам (29) и (34).

Обозначим через $\mu_n(\alpha,\beta)$ старший коэффициент ортонормированного многочлена Якоби $\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)$. Тогда из равенств (29), (32) и (34) находим, что главный коэффициент ортонормированного многочлена Аппеля определяется формулой

$$c_{nk}=\mu_{n-k}(\alpha,a_k)\,\mu_k(\gamma,\beta)\,2^{n+k+\gamma+\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}}. \tag{35}$$

Далее, вычислим многочлены Аппеля на сторонах треугольника (25). Из формул (29) и (34) находим

$$\widehat{A}_{nk}(x,0;\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=(-1)^n\,2^{b_k}\widehat{P}_{n-k}(1-2x;\alpha,a_k)(1-x)^k\,\widehat{P}_k(-1;\gamma,\beta),$$
$$\widehat{A}_{nk}(0,y;\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=(-1)^n\,2^{b_k}\widehat{P}_{n-k}(1;\alpha,a_k)\,\widehat{P}_k(2y-1;\gamma,\beta),$$
$$\widehat{A}_{nk}(x,1-x;\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=(-1)^n\,2^{b_k}\,\widehat{P}_{n-k}(1-2x;\alpha,a_k)(1-x)^k\,\widehat{P}_k(1;\gamma,\beta).$$

Из этих формул с помощью свойств многочленов Якоби можно получить оценки для ортонормированных многочленов Аппеля на сторонах треугольника (25). Заметим, что параметры весовой функции Аппеля, удовлетворяющие условиям (27), отличаются от тех параметров, при которых многочлены Аппеля рассмотрены в гл. III.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [V. 4].

§ 2. Ортогональные многочлены по двум сопряженным комплексным переменным

При обычных обозначениях $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ множество всех одночленов $\{z^n \bar{z}^m\}$ можно расположить в виде треугольной таблицы

$$
\begin{array}{l}
1, \\
z,\ \bar{z}, \\
z^2,\ z\bar{z},\ \bar{z}^2, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
z^n,\ z^{n-1}\bar{z},\ \ldots,\ z\bar{z}^{n-1},\ \bar{z}^n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
\tag{1}
$$

Поскольку эти одночлены линейно независимы, то можно рассматривать многочлены вида

$$
P_{nk}(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} c_{ms} z^{m-s} \bar{z}^s + \sum_{s=0}^{k} c_{ns} z^{n-s} \bar{z}^s. \tag{2}
$$

Будем считать, что главный коэффициент многочлена (2) отличен от нуля, т. е. $c_{nk} \neq 0$. В этом случае порядок многочлена (2) равен (n, k).

Для многочленов вида (2) можно ввести определение ортогональности аналогичное тому, которое рассматривалось до сих пор для обычных алгебраических многочленов по двум переменным.

Пусть на плоскости xOy дана конечная односвязная область G, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, и в этой области определена весовая функция $h(x, y)$, удовлетворяющая обычным условиям (1.1.14). Далее, пусть дана система многочленов

$P_{00}(z, \bar{z})$,

$P_{10}(z, \bar{z})$, $P_{11}(z, \bar{z})$,

$$P_{20}(z, \bar{z}),\ P_{21}(z, \bar{z}),\ P_{22}(z, \bar{z}), \tag{3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_{n0}(z, \bar{z}),\ P_{n1}(z, \bar{z}),\ \dots,\ P_{nn}(z, \bar{z}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Эта система многочленов называется ортонормированной по области G с весовой функцией $h(x, y)$, если выполняются условия:

1. У каждого многочлена $P_{nk}(z, \bar{z})$ главный коэффициент c_{nk} положителен.

2. Для любых двух многочленов системы (3) имеет место условие ортонормированности

$$\iint_G P_{nk}(z, \bar{z})\,\overline{P_{ms}(z, \bar{z})}\,h(x, y)\,dx\,dy = \delta_{nm}\delta_{ks}. \tag{4}$$

Теорема существования для этих многочленов доказывается так же, как аналогичная теорема для алгебраических многочленов в § 2 гл. I.

Можно рассматривать случай неограниченной области, но тогда к обычным условиям на весовую функцию добавляется условие существования при любом n интегралов вида

$$\iint_G h(x, y)\,|z|^{2n}\,dx\,dy < \infty.$$

Для ортонормированных многочленов (3) справедливы оба критерия ортогональности, изложенные в § 2 гл. I для обычных алгебраических многочленов по двум действительным переменным.

Далее, по системе одночленов (1) можно ввести моменты весовой функции

$$h_{nk} = \iint_G h(x, y)\, z^{n-k}\bar{z}^k\,dx\,dy.$$

В результате получим треугольную таблицу моментов, аналогичную таблице (1.3.2). Из этих моментов можно составить определители вида (1.3.4). Все такие определители положительны, и поэтому для многочленов (3) имеют место формулы вида (1.3.11).

Процесс ортогонализации можно применить и в том случае, когда из пачки с номером n системы одночленов (1) берется только один одночлен вида $z^{n-k}\bar{z}^k$. В результате получим моническую систему ортонормированных многочленов. Каждый такой многочлен ортогонален только многочленам младших степеней. Поэтому по моническим многочленам можно определить нормальную биортогональную систему многочленов аналогично тому, как это проделано в § 5 гл. I. Можно рассматривать также и обобщенные монические ортогональные многочлены, а также общие ортогональные многочлены, которые получаются из многочленов (3) с помощью ортогональных матриц.

Рассмотрим некоторые примеры и частные случаи, когда ортогональные многочлены вида (3) представляются через ортогональные многочлены по одному действительному переменному.

Пример 1. Пусть в единичном круге

$$G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \tag{5}$$

определена весовая функция

$$h(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^\alpha, \quad \alpha > -1. \tag{6}$$

Рассмотрим многочлены

$$B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) = \widehat{P}_k(2z\bar{z} - 1; \alpha, n - k) z^{n-k}, \tag{7}$$

$$B_{kn}(z, \bar{z}; \alpha) = \widehat{P}_k(2z\bar{z} - 1; \alpha, n - k) \bar{z}^{n-k}. \tag{8}$$

В этих формулах индексы изменяются при условиях

$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

причем первый индекс у многочленов (7) и (8) означает наивысшую степень переменной z, а второй — переменной $\bar{z}$. Заметим, что многочлены (7) и (8) при фиксированном n в условиях (9) не составляют одной пачки, а заполняют таблицу (3) по углам, стороны которого параллельны краям таблицы.

Докажем, что многочлены (7) и (8) ортогональны по области (5) с весовой функцией (6). В самом деле, сначала для многочленов (7) при условиях $k \leqslant n$ и $s \leqslant m$ имеем

$$J_{nm}^{(k,s)} = \iint_G B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) \overline{B_{ms}(z, \bar{z}; \alpha)}\, h(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \widehat{P}_k(2\rho^2 - 1; \alpha, n - k) \rho^{n-k} e^{i(n-k)\varphi} \times\right.$$

$$\times \overline{\widehat{P}_s (2\rho^2 - 1; \alpha, m-s)\, \rho^{m-s} e^{-i(m-s)\varphi}}\, (1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho \Big] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n-k-m+s)\varphi}\, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^1 \widehat{P}_k (2\rho^2 - 1; \alpha, n-k)\, \overline{\widehat{P}_s (2\rho^2 - 1; \alpha, m-s)} \times$$

$$\times \rho^{n-k+m-s} (1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho. \quad (10)$$

Если $n-k \neq m-s$, то первый интеграл равен нулю. Предположим, что $n-k = m-s$. Тогда равенство (10) примет вид

$$J_{nm}^{(k,s)} = 2\pi \int_0^1 \widehat{P}_k (2\rho^2 - 1; \alpha, n-k)\, \widehat{P}_s (2\rho^2 - 1; \alpha, n-k) \times$$

$$\times \rho^{2(n-k)} (1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho.$$

В этом интеграле произведем замену по формулам

$$2\rho^2 - 1 = t, \quad \rho^2 = \frac{1+t}{2}, \quad 1-\rho^2 = \frac{1-t}{2}.$$

В результате получим

$$J_{nm}^{(k,s)} = 2\pi \int_{-1}^1 \widehat{P}_k (t; \alpha, n-k)\, \widehat{P}_s (t; \alpha, n-k) \times$$

$$\times \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha \frac{dt}{4} = \frac{\pi}{2^{n-k+\alpha+1}} \delta_{ks}. \quad (11)$$

Таким образом, многочлены (7) ортогональны между собой. Аналогично доказывается ортогональность многочленов (8). Далее, аналогично формуле (10) для двух многочленов из систем (7) и (8) при условиях $k \leqslant n$ и $s \leqslant m$ имеем

$$J_{ns}^{(k,m)} = \iint_G B_{nk} (z, \bar{z}; \alpha)\, \overline{B_{sm} (z, \bar{z}; \alpha)}\, h(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n-k+m-s)\varphi}\, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^1 \widehat{P}_k (2\rho^2 - 1; \alpha, n-k)\, \overline{\widehat{P}_s (2\rho^2 - 1; \alpha, m-s)} \times$$

$$\times \rho^{n-k+m-s} (1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho. \quad (12)$$

Если хотя бы одно из равенств $n=k$ и $m=s$ не выполняется, то первый интеграл в правой части формулы (12) равен нулю. А если оба эти равенства выполняются, то из формулы (12) находим

$$J_{nm}^{(n,m)} = 2\pi \int_0^1 \widehat{P}_n(2\rho^2-1;\alpha,0)\,\widehat{P}_m(2\rho^2-1;\alpha,0)\times$$
$$\times(1-\rho^2)^\alpha \rho\,d\rho = \frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\delta_{nm}.$$

Эта величина равна нулю, если $n\neq m$. А если выполняется условие $n=m=k=s$, то формулы (7) и (8) определяют один и тот же многочлен, который в общей системе ортогональных многочленов, определяемых областью (5) и весовой функцией (6), выписывается, конечно, один раз.

Таким образом, многочлены, определяемые формулами (7) и (8), ортогональны по области (5) с весовой функцией (6).

Из формулы (11) имеем равенство

$$\|B_{nk}\|_G^2 = \pi/2^{n-k+\alpha+1}.$$

Следовательно, ортонормированные многочлены системы (7) определяются по формуле

$$\widehat{B}_{nk}(z,\bar z;\alpha) = \sqrt{2^{n-k+\alpha+1}/\pi}\,B_{nk}(z,\bar z;\alpha).$$

Аналогичная формула справедлива и для многочленов (8).

С помощью свойств многочленов Якоби можно оценить многочлены (7) и (8) внутри круга (5) и в замкнутом круге.

П р и м е р 2. Пусть на интервале $(0, R^2)$, где $R\leqslant\infty$, определена весовая функция $h(t)$. Обозначим через $\{\widehat{Q}_n(t;k)\}$ многочлены, ортонормированные на том же интервале $(0, R^2)$ с весовой функцией

$$h_k(t) = t^k h(t),\qquad t\in(0,R^2). \tag{13}$$

Следовательно, для этих многочленов выполняются условия

$$\int_0^{R^2} \widehat{Q}_n(t;k)\,\widehat{Q}_m(t;k)\,h_k(t)\,dt = \delta_{nm}. \tag{14}$$

При условиях (9) рассмотрим многочлены

$$\widehat{H}_{nk}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{Q}_k(z\bar{z}; n-k) z^{n-k}, \tag{15}$$

$$\widehat{H}_{kn}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{Q}_k(z\bar{z}; n-k) \bar{z}^{n-k}. \tag{16}$$

Докажем, что эти многочлены ортонормированы в круге

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} \tag{17}$$

с весовой функцией

$$h(x^2 + y^2) = h(z\bar{z}). \tag{18}$$

В самом деле, для двух многочленов из системы (15) при условиях $k \leqslant n$ и $s \leqslant m$ имеем

$$J_{nm}^{(k,s)} = \iint_G \widehat{H}_{nk}(z, \bar{z}) \overline{\widehat{H}_{ms}(z, \bar{z})} h(z\bar{z})\, dx\, dy =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \widehat{Q}_k(\rho^2; n-k) \widehat{Q}_s(\rho^2; m-s) \times \right.$$
$$\left. \times \rho^{n-k+m-s} e^{i(n-k-m+s)\varphi} h(\rho^2) \rho\, d\rho \right] d\varphi. \tag{19}$$

Если $n-k \neq m-s$, то интеграл (19) равен нулю. Предположим, что $n-k = m-s$. Тогда из равенства (19) находим

$$J_{nm}^{(k,s)} = 2 \int_0^R \widehat{Q}_k(\rho^2; n-k) \widehat{Q}_s(\rho^2; n-k) \rho^{2(n-k)} h(\rho^2) \rho\, d\rho.$$

Полагая в этом интеграле $\rho^2 = t$ и учитывая формулу (13), получим

$$J_{nm}^{(k,s)} = \int_0^{R^2} \widehat{Q}_k(t; n-k) \widehat{Q}_s(t; n-k) h_{n-k}(t)\, dt = \delta_{ks}.$$

Здесь учтено условие (14). Таким образом, многочлены (15) ортонормированы по области (17) с весовой функцией (18). Аналогично доказывается ортонормированность многочленов (16) и ортогональность между собой многочленов (15) и (16). Заметим, что, как и в предыдущем случае, формулы (15) и (16) при $n = k$ определяют один и тот же многочлен.

Пример 3. Пусть дана весовая функция Чебышева — Лагерра

$$h(t) = t^{\alpha} e^{-t}, \qquad \alpha > -1, \quad t > 0,$$

и ей соответствуют ортонормированные многочлены Чебышева — Лагерра $\{\widehat{L}_n(t;\ \alpha)\}$. В этом случае вместо равенств (13) и (14) имеем формулы

$$h_k(t) = t^{\alpha+k} e^{-t}, \qquad t > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \widehat{L}_n(t; \alpha + k)\, \widehat{L}_m(t; \alpha + k)\, h_k(t)\, dt = \delta_{nm}.$$

А весовая функция (18) в этом случае имеет вид

$$h(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha}\, e^{-(x^2+y^2)}. \tag{20}$$

Следовательно, многочлены

$$\widehat{H}_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{L}_k(z\bar{z}; \alpha + n - k)\, z^{n-k}, \tag{21}$$

$$\widehat{H}_{kn}(z, \bar{z}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{L}_k(z\bar{z}; \alpha + n - k)\, \bar{z}^{n-k} \tag{22}$$

ортонормированы на всей плоскости с весовой функцией (20). Это проверяется непосредственным вычислением. Кроме того, формулы (21) и (22) являются частным случаем формул (15) и (16).

В настоящем параграфе изложены результаты из работы [V. 4].

§ 3. Многочлены Чебышева по двум сопряженным комплексным переменным для области Штейнера

Среди многочленов Якоби наиболее выделяются своими свойствами и важными применениями многочлены Чебышева первого рода и второго рода.

Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весовой функцией

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1). \tag{1}$$

Для этих многочленов справедливы формулы

$$P_n\left(x; -\frac{1}{2}\right) = T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos n\theta, \tag{2}$$

$$\widehat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n(x), \qquad n \geq 1. \tag{3}$$

Аналогично многочлены Чебышева второго рода ортогональны с весовой функцией

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{4}$$

и для них имеют место формулы

$$P_n\left(x; \frac{1}{2}\right) = U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \tag{5}$$

$$\widehat{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, U_n(x). \tag{6}$$

Если ввести переменное $w = e^{i\theta}$, то из формул (2) и (5) получим равенства

$$T_n(x) = \cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}), \tag{7}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}. \tag{8}$$

В работе Т. Коривиндера [V. 4] рассмотрены многочлены Чебышева по двум сопряженным комплексным переменным для области Штейнера. При этом установлены аналоги формул (7) и (8). В настоящем параграфе излагаются некоторые результаты из указанной работы. На плоскости sOt рассмотрим треугольник R с вершинами в точках

$$A_0(0, 0), \quad A_1\left(\pi, -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right), \quad A_2\left(\pi, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right). \tag{9}$$

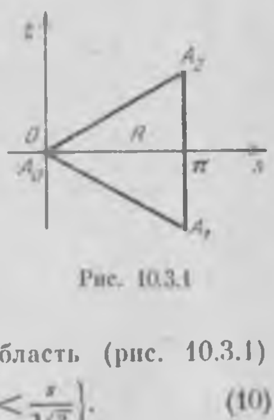

Рис. 10.3.1

Иными словами, рассматривается область (рис. 10.3.1)

$$R = \left\{(s, t)\colon 0 < s < \pi, -\frac{s}{\sqrt{3}} < t < \frac{s}{\sqrt{3}}\right\}. \tag{10}$$

Стороны этого треугольника расположены на прямых

$$t=-\frac{1}{\sqrt{3}}s,\quad t=\pi,\quad t=\frac{1}{\sqrt{3}}s. \tag{11}$$

Вводим новые переменные по формулам

$$\sigma=s+\frac{t}{\sqrt{3}},\quad \tau=s-\frac{t}{\sqrt{3}}. \tag{12}$$

Это преобразование переводит точки (9) в точки

$$P_0(0,0),\ \ P_1\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right),\ P_2\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right), \tag{13}$$

которые являются вершинами треугольника (рис. 10.3.2)

$$D=\left\{(\sigma,\tau)\colon\ 0<\sigma\leqslant\frac{2\pi}{3},\ \frac{\sigma}{2}<\tau<2\sigma;\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\sigma<\right.$$
$$\left.<\frac{4\pi}{3},\ \frac{\sigma}{2}<\tau<2\pi-\sigma\right\}. \tag{14}$$

При отображении (12) прямые (11) преобразуются в прямые

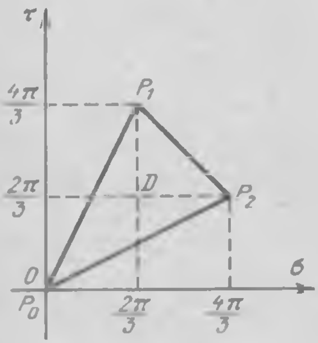

Рис. 10.3.2

$$\tau=2\sigma,\quad \tau=2\pi-\sigma,$$
$$\tau=\frac{1}{2}\sigma, \tag{15}$$

на которых расположены стороны треугольника D. Якобиан отображения (12) имеет вид

$$\frac{D(\sigma,\tau)}{D(s,t)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\sigma}{\partial s} & \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\tau}{\partial s} & \dfrac{\partial\tau}{\partial t}\end{vmatrix}=-\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь при натуральных n и k вспомогательные функции

$$E_{nk}^{(\pm)}(\sigma,\tau)=e^{i(n\sigma+k\tau)}\pm e^{i[(n+k)\sigma-k\tau]}+$$
$$+e^{i[-(n+k)\sigma+n\tau]}\pm e^{i(-k\sigma-n\tau)}+$$
$$+e^{i[k\sigma-(n+k)\tau]}\pm e^{i[-n\sigma+(n+k)\tau]}, \tag{17}$$

$$E_{nn}^{(+)}(\sigma,\tau)=e^{in\sigma}+e^{-in\tau}+e^{i(-n\sigma+n\tau)}, \tag{18}$$

$$E_{0k}^{(+)}(\sigma,\tau) = e^{-ik\sigma} + e^{ik\tau} + e^{i(k\sigma-k\tau)}, \tag{19}$$

$$E_{00}^{(+)}(\sigma,\tau) = 1. \tag{20}$$

Эти функции разобьем на две системы:

$$\{E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau)\}, \quad n \geqslant 0, \quad k \geqslant 0, \tag{21}$$

$$\{E_{nk}^{(-)}(\sigma,\tau)\}, \quad n \geqslant 1, \quad k \geqslant 1. \tag{22}$$

Отметим несколько свойств этих систем функций. Прежде всего, заметим, что имеют место формулы комплексного сопряжения

$$\overline{E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau)} = E_{kn}^{(+)}(\sigma,\tau), \tag{23}$$

$$\overline{E_{nk}^{(-)}(\sigma,\tau)} = -E_{kn}^{(-)}(\sigma,\tau). \tag{24}$$

Далее, при $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ из формулы (17) имеем равенство

$$\begin{aligned} E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau)E_{mp}^{(+)}(\sigma,\tau) = \\ = E_{(n+m)(k+p)}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n+m+p)(k-p)}^{(+)}(\sigma,\tau) + \\ + E_{(n-m-p)(k+m)}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n-p)(k-m)}^{(+)}(\sigma,\tau) + \\ + E_{(n+p)(k-m-p)}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n-m)(k+m+p)}^{(+)}(\sigma,\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогично из формул (17) — (19) находим

$$\begin{aligned} E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau)E_{m0}^{(+)}(\sigma,\tau) = E_{(n+m)k}^{(+)}(\sigma,\tau) + \\ + E_{n(k-m)}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n-m)(k+m)}^{(+)}(\sigma,\tau), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau)E_{0m}^{(+)}(\sigma,\tau) = E_{n(k+m)}^{(+)}(\sigma,\tau) + \\ + E_{(n-m)k}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n+m)(k-m)}^{(+)}(\sigma,\tau). \end{aligned} \tag{27}$$

Кроме того, из равенств (18) и (19) получаются формулы

$$E_{n0}^{(+)}(\sigma,\tau)E_{k0}^{(+)}(\sigma,\tau) = E_{(n-k)k}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n+k)0}^{(+)}(\sigma,\tau), \tag{28}$$

$$E_{n0}^{(+)}(\sigma,\tau)E_{0k}^{(+)}(\sigma,\tau) = E_{nk}^{(+)}(\sigma,\tau) + E_{(n-k)0}^{(+)}(\sigma,\tau). \tag{29}$$

Наконец, для функций системы (22) имеем основную формулу

$$
\begin{aligned}
E^{(-)}_{nk}(\sigma, \tau)\, E^{(-)}_{mp}(\sigma, \tau) &= \\
&= E^{(+)}_{(n+m)(k+p)}(\sigma, \tau) - E^{(+)}_{(n+m+p)(k-p)}(\sigma, \tau) + \\
&\quad + E^{(+)}_{(n-m-p)(k+m)}(\sigma, \tau) - E^{(+)}_{(n-p)(k-m)}(\sigma, \tau) + \\
&\quad\quad + E^{(+)}_{(n+p)(k-m-p)}(\sigma, \tau) - E^{(+)}_{(n-m)(k+m+p)}(\sigma, \tau). \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Все эти равенства доказываются элементарными преобразованиями.

В силу формул комплексного сопряжения (23) и (24) один из сомножителей в левой части каждого из равенств (25)—(30) можно заменить комплексно сопряженной величиной. Например, в силу формул (23) и (24) имеем равенства

$$E^{(+)}_{nk}(\sigma, \tau)\, E^{(+)}_{mp}(\sigma, \tau) = E^{(+)}_{nk}(\sigma, \tau)\, \overline{E^{+}_{pm}(\sigma, \tau)}, \qquad (31)$$

$$E^{(-)}_{nk}(\sigma, \tau)\, E^{(-)}_{mp}(\sigma, \tau) = -E^{(-)}_{nk}(\sigma, \tau)\, \overline{E^{(-)}_{pm}(\sigma, \tau)}. \qquad (32)$$

В системах функций (21) и (22) произведем замену переменных по формулам (12). При этом введем новые обозначения:

$$F^{(\pm)}_{nk}(s, t) = E^{(\pm)}_{nk}\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}},\ s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right). \qquad (33)$$

Для этих функций, в силу формулы (17), имеем

$$
\begin{aligned}
F^{(\pm)}_{nk}(s, t) &= E^{(\pm)}_{nk}\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}},\ s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \\
&= \exp i\left[n\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + k\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] \pm \\
&\pm \exp i\left[(n+k)\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) - k\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] + \\
&+ \exp i\left[-(n+k)\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + n\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] \pm \\
&\pm \exp i\left[-k\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) - n\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] + \\
&+ \exp i\left[k\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) - (n+k)\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] \pm \\
&\pm \exp i\left[(n+k)\left(s - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + n\left(s + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right] =
\end{aligned}
$$

$$= \exp i\left[(n+k)s + (n-k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right] \pm \exp i\left[ns + (n+2k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right] +$$

$$+\exp i\left[-ks-(k+2n)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\pm\exp i\left[-(n+k)s+(n-k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]+$$
$$+\exp i\left[-ns+(n+2k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\pm\exp i\left[ks-(2n+k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right].$$

Из этого равенства получаем две формулы:

$$F_{nk}^{(+)}(s,t)=2\left[\exp i(n-k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\cos(n+k)s+$$
$$+2\left[\exp i(n+2k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\cos ns+$$
$$+2\left[\exp i(2n+k)\left(\frac{-t}{\sqrt{3}}\right)\right]\cos ks, \quad (34)$$

$$F_{nk}^{(-)}(s,t)=2i\left[\exp i(n-k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\sin(n+k)s-$$
$$-2i\left[\exp i(n+2k)\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\sin ns-$$
$$-2i\left[\exp i(2n+k)\left(\frac{-t}{\sqrt{3}}\right)\right]\sin ks. \quad (35)$$

Кроме того, из формул (18) и (19) имеем еще два равенства:

$$F_{n0}^{(+)}(s,t)=2\left[\exp in\frac{t}{\sqrt{3}}\right]\cos ns+\exp i2n\left(\frac{-t}{\sqrt{3}}\right), \quad (36)$$

$$F_{0k}^{(+)}(s,t)=2\left[\exp ik\left(\frac{-t}{\sqrt{3}}\right)\right]\cos ks+\exp i2k\frac{t}{\sqrt{3}}. \quad (37)$$

В силу обозначения (33) вместо функций (21) и (22) имем две системы функций:

$$\{F_{nk}^{(+)}(s,t)\},\qquad n\geqslant 0,\quad k\geqslant 0, \quad (38)$$
$$\{F_{nk}^{(-)}(s,t)\},\qquad n\geqslant 1,\quad k\geqslant 1. \quad (39)$$

Лемма 1. *Система функций* (38) *ортогональна по области* (10), *т. е. для двух различных функций этой системы выполняется условие*

$$\iint_{H} F_{nk}^{(+)}(s,t)\,\overline{F_{mp}^{(+)}(s,t)}\,ds\,dt=0. \quad (40)$$

Доказательство. Сначала докажем ортогональность функции (37) единичной функции (20). В силу

(10) имеем

$$\iint_R F_{nk}^{(+)}(s,t)\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[2\cos ks \int_{-s/\sqrt{3}}^{s/\sqrt{3}} \exp ik\frac{(-t)}{\sqrt{3}}\,dt + \int_{-s/\sqrt{3}}^{s/\sqrt{3}} \exp i2k\frac{t}{\sqrt{3}}\,dt\right]ds =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\left[2\cos ks \int_0^{s/\sqrt{3}} \cos k\frac{t}{\sqrt{3}}\,dt + \int_0^{s/\sqrt{3}} \cos 2k\frac{t}{\sqrt{3}}\,dt\right]ds =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{k}\int_0^{\pi}\left(2\cos ks\sin\frac{ks}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2ks}{3}\right)ds =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{k}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{4ks}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2ks}{3}\right)ds = 0.$$

Аналогично доказывается ортогональность функции (36) единичной функции (20). Заметим, что функции (36) и (37) при совпадении индексов комплексно сопряжены.

Докажем теперь ортогональность функции вида (34) единичной функции (20). С помощью формулы (34) аналогично предыдущему равенству получаем

$$\iint_R F_{nk}^{(+)}(s,t)\,ds\,dt = 4\int_0^{\pi}\left[\cos(n+k)s\int_0^{s/\sqrt{3}}\cos(n-k)\frac{t}{\sqrt{3}}dt + \right.$$

$$\left. + \cos ns\int_0^{s/\sqrt{3}}\cos(n+2k)\frac{t}{\sqrt{3}}dt + \cos ks\int_0^{s/\sqrt{3}}\cos(2n+k)\frac{t}{\sqrt{3}}dt\right]ds =$$

$$= 4\sqrt{3}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{n-k}\cos(n+k)s\sin(n-k)\frac{s}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+2k}\cos ns\sin(n+2k)\frac{s}{3} + \frac{1}{2n+k}\cos ks\sin(2n+k)\frac{s}{3}\right]ds =$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{n-k}\left[\sin(4n+2k)\frac{s}{3} - \sin(2n+4k)\frac{s}{3}\right] + \right.$$

$$+\frac{1}{n+2k}\left[\sin(4n+2k)\frac{s}{3}+\sin(2k-2n)\frac{s}{3}\right]+$$
$$+\frac{1}{2n+k}\left[\sin(2n+4k)\frac{s}{3}+\sin(2n-2k)\frac{s}{3}\right]\Bigg\}ds=$$
$$=-6\sqrt{3}\left\{\frac{1}{n-k}\left[\frac{\cos(4n+2k)\frac{s}{3}}{4n+2k}-\frac{\cos(2n+4k)\frac{s}{3}}{2n+4k}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{n+2k}\left[\frac{\cos(4n+2k)\frac{s}{3}}{4n+2k}+\frac{\cos(2k-2n)\frac{s}{3}}{2k-2n}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{2n+k}\left[\frac{\cos(2n+4k)\frac{s}{3}}{2n+4k}+\frac{\cos(2n-2k)\frac{s}{3}}{2n-2k}\right]\right\}\Bigg|_0^{\pi}. \quad (41)$$

Если $k=n$, то вычисления упрощаются с самого начала и число слагаемых будет меньше. А если $k\neq n$, то все косинусы при $s=\pi$ равны 1/2. Следовательно, после подстановки пределов везде в числителях будет стоять величина $-1/2$. Поэтому величина (41) приводится к виду

$$3\sqrt{3}\left[\frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{4n+2k}-\frac{1}{2n+4k}\right)+\frac{1}{n+2k}\left(\frac{1}{4n+2k}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2k-2n}\right)+\frac{1}{2n+k}\left(\frac{1}{2n+4k}+\frac{1}{2n-2k}\right)\right]=0.$$

Таким образом, все функции системы (38), кроме единичной, ортогональны единичной функции (20).

Далее, в силу формул (25)—(29), (31) и (32) любое произведение, стоящее под знаком интеграла (40), можно представить через алгебраическую сумму функций системы (38) без единичной функции. Следовательно, интеграл (40) равен нулю для любых двух различных функций системы (38). Лемма доказана.

Лемма 2. *Система функций* (39) *ортогональна по области* (10), *т. е. для любых двух различных функций этой системы выполняется условие*

$$\iint_R F_{nk}^{(-)}(s,t)\,\overline{F_{mp}^{(-)}(s,t)}\,ds\,dt=0. \quad (42)$$

Доказательство следует из формулы (30).

Из условий ортогональности (40) и (42) следует, что системы функций (21) и (22) ортогональны по области

(14), т. е. выполняются условия

$$\iint\limits_D E_{nk}^{(+)}(\sigma, \tau)\,\overline{E_{mp}^{(+)}(\sigma, \tau)}\,d\sigma\,d\tau = 0, \tag{43}$$

$$\iint\limits_D E_{nk}^{(-)}(\sigma, \tau)\,\overline{E_{mp}^{(-)}(\sigma, \tau)}\,d\sigma\,d\tau = 0. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь комплексную переменную

$$z = x + iy = E_{10}^{(+)}(\sigma, \tau) = e^{i\sigma} + e^{-i\tau} + e^{i(-\sigma+\tau)}. \tag{45}$$

Сопряженная величина имеет вид

$$\bar{z} = x - iy = E_{01}^{(+)}(\sigma, \tau) = e^{-i\sigma} + e^{i\tau} + e^{i(\sigma-\tau)}. \tag{46}$$

Предположим, что точка $P(\sigma, \tau)$ описывает границу области D против часовой стрелки (рис. 10.3.2). Определим кривую Γ на плоскости xOy, в которую переходит граница области D.

Пусть сначала точка $P(\sigma, \tau)$ пробегает сторону P_0P_2. Тогда $\sigma = 2\tau$, где τ изменяется от 0 до $2\pi/3$. Подставляя это условие в формулу (45), получим

$$z = x + iy = e^{i2\tau} + 2e^{-i\tau}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi/3. \tag{47}$$

Аналогично, если точка $P(\sigma, \tau)$ изменяется по стороне P_2P_1, то в силу (15) имеем $\sigma = 2\pi - \tau$, причем τ изменяется от $2\pi/3$ до $4\pi/3$. Следовательно, из формулы (45) находим

$$z = x + iy = 2e^{-i\tau} + e^{i2\tau}, \quad 2\pi/3 \leqslant \tau \leqslant 4\pi/3. \tag{48}$$

Наконец, если точка $P(\sigma, \tau)$ пробегает отрезок P_0P_1 в направлении от P_1 до P_0, то имеем $\tau = 2\sigma$, причем σ изменяется от $2\pi/3$ до 0. Поэтому из формулы (45) поолучаем

$$z = x + iy = 2e^{i\sigma} + e^{-i2\sigma}, \quad 2\pi/3 \geqslant \sigma \geqslant 0. \tag{49}$$

В этом равенстве заменим параметр σ по формуле $\sigma = 2\pi - \theta$. Тогда равенство (49) приведется к виду

$$z = x + iy = 2e^{-i\theta} + e^{i2\theta}, \quad 4\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{50}$$

А теперь из формул (47), (48) и (50) находим общую формулу

$$z = x + iy = 2e^{-i\theta} + e^{i2\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{51}$$

Это есть параметрическое уравнение кривой Γ, в которую переходит периметр треугольника D.

Нетрудно доказать, что уравнение (51) определяет на плоскости xOy кривую Штейнера, т. е. гипоциклоиду при $m = 3$ (рис. 10.3.3). В самом деле, как известно, уравнение кривой Штейнера имеет вид [I. 10, 11]

$$(x^2 + y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 18(x^2 + y^2) - 27 = 0. \qquad (52)$$

Переходя к сопряженным комплексным переменным (45) и (46), получим [V. 4]

$$z^2\bar{z}^2 - 4z^3 - 4\bar{z}^3 + 18z\bar{z} - 27 = 0. \qquad (53)$$

А теперь, подставляя функцию (51) в уравнение (53), после элементарных преобразований получим тождество.

Внутренность G кривой Штейнера будем называть областью Штейнера. Вычислим якобиан преобразования области D в область G. В силу равенства

$$\frac{D(\sigma, \tau)}{D(x, y)} = \frac{D(\sigma, \tau)}{D(z, \bar{z})} \cdot \frac{D(z, \bar{z})}{D(x, y)} \qquad (54)$$

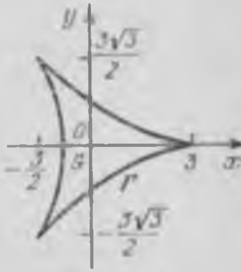

Рис. 10.3.3

достаточно вычислить два вспомогательных якобиана. С помощью формул (45) и (46) находим

$$\frac{D(z, \bar{z})}{D(\sigma, \tau)} = -E_{11}^{(-)}(\sigma, \tau) = \\ = -8i \sin\left(\sigma - \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma + \tau}{2}\right) \sin\left(\tau - \frac{\sigma}{2}\right). \qquad (55)$$

Следовательно, из формулы (54) получаем

$$\frac{D(\sigma, \tau)}{D(x, y)} = \frac{2i}{E_{11}^{(-)}(\sigma, \tau)}. \qquad (56)$$

Таким образом, определитель (54) отличен от нуля. Поэтому отображение (45) преобразует область D в область G взаимно однозначно.

Теорема 1. *Для каждой пары неотрицательных целых чисел* (n, k) *существует единственный многочлен вида*

$$T_{nk}(z, \bar{z}) = z^n\bar{z}^k + Q_{n+k-1}(z, \bar{z}), \qquad (57)$$

для которого выполняется условие

$$T_{nk}[z(\sigma, \tau), \overline{z(\sigma, \tau)}] \equiv E_{nk}^{(+)}(\sigma, \tau). \qquad (58)$$

Доказательство. В формуле (57) второе слагаемое в правой части есть многочлен степени не выше $n+k-1$ по совокупности переменных z и $\bar{z}$, а в тождестве (58) переменные $z(\sigma, \tau)$ и $\overline{z(\sigma, \tau)}$ определяются формулами (45) и (46). В силу формул (45) и (46) утверждение теоремы справедливо для пар индексов (1, 0) и (0, 1). Кроме того, из очевидной формулы

$$E_{11}^{(+)}(\sigma, \tau) = E_{10}^{(+)}(\sigma, \tau) E_{01}^{(+)}(\sigma, \tau) - 3 = z\bar{z} - 3 \qquad (59)$$

следует справедливость теоремы и при индексах (1, 1).

Далее применяем метод индукции. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех пар индексов, сумма которых не превосходит числа $n+k$. Тогда, полагая в формуле (26) $m=1$ и используя равенство (45), получим

$$E_{(n+1)k}^{(+)}(\sigma, \tau) = E_{nk}^{(+)}(\sigma, \tau) z - \\ - E_{n(k-1)}^{(+)}(\sigma, \tau) - E_{(n-1)(k+1)}^{(+)}(\sigma, \tau). \qquad (60)$$

Эта формула справедлива при условиях $n>1$ и $k>1$. А если $n=1$ и $k>1$, то перед третьим слагаемым будет коэффициент 2. Аналогично при условиях $k=1$ и $n>1$ коэффициент 2 будет у второго слагаемого в правой части формулы (60). Этим формула (58) доказана для всех индексов вида $(n+1, k)$, где оба индекса отличны от нуля. А если хоть один из этих индексов равен нулю, то следует воспользоваться формулами (28) либо (29).

Аналогично из формулы (27) при $m=1$ находим равенство

$$E_{n(k+1)}^{(+)}(\sigma, \tau) = E_{nk}^{(+)}(\sigma, \tau) z - \\ - E_{(n-1)k}^{(+)}(\sigma, \tau) - E_{(n+1)(k-1)}^{(+)}(\sigma, \tau). \qquad (61)$$

Отсюда следует, что тождество (58) распространяется на все индексы вида $(n, k+1)$. Если один из индексов принимает значение 0 или 1, то формула (61) заменяется другой формулой аналогично тому, как это отмечено для формулы (60). Теорема доказана.

Многочлены (57) называются *многочленами Чебышева первого рода для области Штейнера*. Из формулы комплексного сопряжения (23) для многочленов (57) находим равенство

$$T_{nk}(z, \bar{z}) = T_{kn}(\bar{z}, z). \qquad (62)$$

Эти многочлены можно вычислять последовательно с помощью рекуррентных формул вида (60) и (61). Вычислим несколько первых из них. В силу определения вспомогательных функций (17)—(19) имеем формулы

$$\begin{aligned}
&E_{20}^{(+)}(\sigma, \tau) = zE_{10}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{01}^{(+)}(\sigma, \tau),\\
&E_{30}^{(+)}(\sigma, \tau) = zE_{20}^{(+)}(\sigma, \tau) - E_{11}^{(+)}(\sigma, \tau),\\
&E_{21}^{(+)}(\sigma, \tau) = zE_{11}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{10}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{02}^{(+)}(\sigma, \tau), \quad (63)\\
&E_{22}^{(+)}(\sigma, \tau) = zE_{12}^{(+)}(\sigma, \tau) - E_{11}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{03}^{(+)}(\sigma, \tau),\\
&E_{31}^{(+)}(\sigma, \tau) = zE_{21}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{20}^{(+)}(\sigma, \tau) - E_{12}^{(+)}(\sigma, \tau).
\end{aligned}$$

Используя все эти равенства, а также формулы (59)—(61), находим

$$\begin{aligned}
&T_{00}(z, \bar{z}) = 1, \quad T_{10}(z, \bar{z}) = z, \quad T_{01}(z, \bar{z}) = \bar{z},\\
&T_{20}(z, \bar{z}) = z^2 - 2\bar{z}, \quad T_{11}(z, \bar{z}) = z\bar{z} - 3,\\
&T_{02}(z, \bar{z}) = \bar{z}^2 - 2z,\\
&T_{30}(z, \bar{z}) = z^3 - 3z\bar{z} + 3, \quad T_{21}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z} - 2\bar{z}^2 - z,\\
&T_{12}(z, \bar{z}) = z\bar{z}^2 - 2z^2 - \bar{z}, \quad T_{03}(z, \bar{z}) = \bar{z}^3 - 3\bar{z}z + 3,\\
&T_{22}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z}^2 - 2z^3 - 2\bar{z}^3 + 4z\bar{z} - 3, \quad (64)\\
&T_{31}(z, \bar{z}) = z^3\bar{z} - 3\bar{z}^2 z - z^2 + 5\bar{z}.
\end{aligned}$$

Далее, из определения функции (17) аналогично равенству (30) имеем формулу

$$\left[E_{11}^{(-)}(\sigma, \tau)\right]^2 = E_{22}^{(+)}(\sigma, \tau) - 2E_{30}^{(+)}(\sigma, \tau) - \\ - 2E_{03}^{(+)}(\sigma, \tau) + 2E_{11}^{(+)}(\sigma, \tau) - 6.$$

Правую часть вычисляем с помощью формул (58) и (64). В результате получим

$$\left[E_{11}^{(-)}(\sigma, \tau)\right]^2 = z^2\bar{z}^2 - 4z^3 - 4\bar{z}^3 + 18z\bar{z} - 27.$$

А теперь вводим обозначение

$$S(z, \bar{z}) = -\left[E_{11}^{(-)}(\sigma, \tau)\right]^2 = -z^2\bar{z}^2 + 4z^3 + \\ + 4\bar{z}^3 - 18z\bar{z} + 27. \quad (65)$$

В силу формул (53) и (55) величина (65) обращается в нуль на кривой Штейнера и положительна внутри этой кривой. Поэтому из равенства (56) находим

$$|J(x, y)| = \left|\frac{D(\sigma, \tau)}{D(x, y)}\right| = \frac{2}{\sqrt{S(z, \bar{z})}}. \quad (66)$$

Рассмотрим теперь условие ортогональности (43). Преобразуя интеграл по области D в интеграл по области Штейнера G и используя формулы (58) и (66), получим

$$\iint\limits_D E^{(+)}_{nk}(\sigma, \tau)\overline{E^{(+)}_{mp}(\sigma, \tau)}\,d\sigma\,d\tau =$$
$$= 2\iint\limits_G T_{nk}(z, \bar z)\overline{T_{mp}(z, \bar z)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{S(z, \bar z)}} = 0. \qquad (67)$$

Таким образом, многочлены Чебышева первого рода, которые определяются по формуле (58), ортогональны по области Штейнера с весовой функцией

$$h(x, y; -1/2) = \frac{1}{\sqrt{S(z, \bar z)}}, \quad z \in G. \qquad (68)$$

Переходим к рассмотрению многочленов Чебышева второго рода.

Теорема 2. *Для любой пары неотрицательных целых чисел* (n, k) *существует единственный многочлен*

$$U_{nk}(z, \bar z) = z^n \bar z^k + Q_{n+k-1}(z, \bar z), \qquad (69)$$

который удовлетворяет условию

$$U_{nk}[z(\sigma, \tau), \overline{z(\sigma, \tau)}] = \frac{E^{(-)}_{(n+1)(k+1)}(\sigma, \tau)}{E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau)}. \qquad (70)$$

Доказательство. Из равенства (17) нетрудно получить формулы

$$zE^{(-)}_{11}(\sigma, \tau) = E^{(-)}_{21}(\sigma, \tau), \quad \bar z E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau) = E^{(-)}_{12}(\sigma, \tau),$$
$$zE^{(-)}_{12}(\sigma, \tau) = E^{(-)}_{22}(\sigma, \tau) + E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau).$$

Следовательно, формула (70) доказана для четырех пар индексов (0, 0), (1, 0), (0, 1) и (1, 1). Далее применяем индукцию. Предположим, что теорема справедлива для всех пар индексов, сумма которых не превосходит $n+k$. Из формул (17), (45) и (46) аналогично формулам (60) и (61) имеем равенства

$$E^{(-)}_{(n+1)k}(\sigma, \tau) =$$
$$= zE^{(-)}_{nk}(\sigma, \tau) - E^{(-)}_{(n-1)(k+1)}(\sigma, \tau) - E^{(-)}_{n(k-1)}(\sigma, \tau),$$
$$E^{(-)}_{n(k+1)}(\sigma, \tau) =$$
$$= \bar z E^{(-)}_{nk}(\sigma, \tau) - E^{(-)}_{(n+1)(k-1)}(\sigma, \tau) - E^{(-)}_{(n-1)k}(\sigma, \tau).$$

Эти формулы справедливы при условиях $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$. А если $m = 0$ или $p = 0$, то полагаем $E^{(-)}_{mp}(\sigma, \tau) = 0$, и обе формулы имеют место и в этих случаях. Из этих двух формул следует справедливость теоремы для индексов $(n+1, k)$ и $(n, k+1)$. Теорема доказана.

Многочлены (69) называются *многочленами Чебышева второго рода для области Штейнера.* Эти многочлены можно вычислять с помощью рекуррентных формул. Несколько первых из них имеют вид

$$
\begin{aligned}
&U_{00}(z, \bar z) = 1, \quad U_{10}(z, \bar z) = z, \quad U_{01}(z, \bar z) = \bar z,\\
&U_{11}(z, \bar z) = z\bar z - 1, \quad U_{20}(z, \bar z) = z^2 - z,\\
&U_{21}(z, \bar z) = z^2\bar z - \bar z^2 - z,\\
&U_{30}(z, \bar z) = z^3 - 2z\bar z + 1.
\end{aligned}
$$

Из формулы комплексного сопряжения (24) для многочленов Чебышева второго рода получается равенство $U_{nk}(z, \bar z) = U_{kn}(\bar z, z)$.

А теперь рассмотрим условие ортогональности (44). В силу формул (66) и (70) из этого условия находим

$$
\iint\limits_D E^{(-)}_{(n+1)(k+1)}(\sigma, \tau)\, \overline{E^{(-)}_{(m+1)(p+1)}(\sigma, \tau)}\, d\sigma\, d\tau =
$$

$$
= \iint\limits_D \frac{E^{(-)}_{(n+1)(k+1)}(\sigma, \tau)}{E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau)}\, \overline{\frac{E^{(-)}_{(m+1)(p+1)}(\sigma, \tau)}{E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau)}}\, [E^{(-)}_{11}(\sigma, \tau)]^2\, d\sigma\, d\tau =
$$

$$
= 2 \iint\limits_G U_{nk}(z, \bar z)\, \overline{U_{mp}(z, \bar z)}\, \sqrt{S(z, \bar z)}\, dx\, dy = 0.
$$

Таким образом, многочлены Чебышева второго рода (69) ортогональны по области Штейнера с весовой функцией

$$
h\left(x, y; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{S(z, \bar z)}, \qquad z \in G. \tag{71}
$$

Обобщая формулы (68) и (71), можно рассматривать весовую функцию вида

$$
h(x, y; \alpha) = [S(z, \bar z)]^{\alpha}, \quad z \in G. \tag{72}
$$

В силу теоремы существования и единственности весовая функция (72) однозначно определяет систему многочленов

$$
\{\hat P_{nk}(z, \bar z; \alpha)\} \tag{73}
$$

ортонормированных по области Штейнера с весовой функцией (72). Эти многочлены можно рассматривать как обобщение ультрасферических многочленов Якоби на случай области Штейнера. Ясно, что многочлены Чебышева первого рода и второго рода являются частными случаями многочленов (73). Нетрудно показать, что параметр α в формуле (72) должен удовлетворять условию $\alpha > -5/6$.

§ 4. Еще одно обобщение многочленов Якоби на случай двух переменных

Пусть на плоскости uOv дана область G (рис. 10.4.1), ограниченная двумя перпендикулярными между собой прямыми $v = u - 1$ и $v = -u - 1$, которые пересекаются в точке $M_1(0, -1)$, и параболой $4v = u^2$, которая касается указанных прямых в точках $M_2(-2, 1)$ и $M_3(2, 1)$, т. е. имеем

$$G = \{(u, v):\ |u| < v + 1,\quad 4v < u^2\}. \tag{1}$$

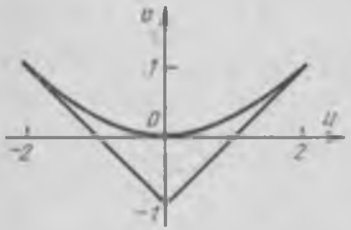

Рис. 10.4.1

Предположим, что в этой области определена весовая функция

$$h(u, v) = (1 - u + v)^\alpha \times (1 + u + v)^\beta (u^2 - 4v)^\gamma, \tag{2}$$

где параметры удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\alpha > -1,\quad \beta > -1,\quad \gamma > -1,\\ \alpha + \gamma > -3/2,\quad \beta + \gamma > -3/2.\end{gathered} \tag{3}$$

Далее, как обычно, вводим ортонормированные многочлены

$$\{\overline{F}_{nk}(u, v;\ \alpha, \beta, \gamma)\},\qquad n = 0, 1, \ldots,\quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

соответствующие области (1) и весовой функции (2). В силу формулы весовой функции (2) многочлены (4) можно рассматривать как обобщение и аналог многочленов Якоби на случай двух переменных для области (1).

Во всех приведенных определениях заменим переменные по формулам

$$u = x + y,\quad v = xy. \tag{5}$$

Это отображение преобразует в область (1) треугольник

$$D = \{(x, y): -1 < y < x < 1\}. \tag{6}$$

Выясним, как преобразуется весовая функция (2) при отображении (5). В силу равенств

$$1 - u + v = (1 - x)(1 - y), \quad 1 + u + v = (1 + x)(1 + y),$$
$$u^2 - 4v = (x - y)^2$$

из формулы (2), учитывая еще якобиан преобразования (5), находим

$$h(x, y) = (1 - x)^\alpha (1 - y)^\alpha (1 + x)^\beta (1 + y)^\beta (x - y)^{2\gamma+1}. \tag{7}$$

Далее, подставляя переменные (5) в многочлены (4), получим систему многочленов

$$\{\widehat{F}_{nk}(x + y, xy; \alpha, \beta, \gamma)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Нетрудно доказать, что многочлены (8) ортонормированы с весовой функцией (7) по области (6). Для этого достаточно доказать, что каждый многочлен из системы (8) имеет положительный главный коэффициент. В самом деле, для многочлена из системы (4) имеем формулу

$$\widehat{F}_{nk}(u, v; \alpha, \beta, \gamma) = c_{nk} u^{n-k} v^k + Q_{n+k-1}(u, v), \tag{9}$$

где многочлен $Q_{n+k-1}(u, v)$ имеет порядок меньше, чем (n, k). Подставляя в формулу (9) значения (5), находим

$$\widehat{F}_{nk}(x + y, xy; \alpha, \beta, \gamma) = c_{nk}(x + y)^{n-k}(xy)^k + R_{n+k-1}(x, y) = c_{nk}(x^n y^k + x^k y^n) + B_{n+k}(x, y), \tag{10}$$

где многочлен $B_{n+k}(x, y)$ имеет порядок меньше, чем $(n + k, k)$. Таким образом, если ортонормировать систему одночленов $\{x^m y^p\}$ по области (6) с весовой функцией (7), то получим систему многочленов (8). Заметим, что многочлен (9) имеет степень n, а степень многочлена (10) по совокупности переменных равна $n + k$. Поэтому многочлены (8) при указанных значениях индексов располагаются не по пачкам, как многочлены (4), а заполняют основную таблицу по сторонам углов, параллельным сторонам треугольной таблицы.

Рассмотрим некоторые частные случаи системы многочленов (8).

Теорема 3. *Если в формуле весовой функции* (7) $\gamma=-1/2$, *то для многочленов* (8) *имеет место равенство*

$$\widehat{F}_{nk}\left(x+y,\ xy;\ \alpha,\ \beta,\ -\frac{1}{2}\right)=$$
$$=a_{nk}\left[\widehat{P}_n(x;\ \alpha,\ \beta)\,\widehat{P}_k(y;\ \alpha,\ \beta)+\widehat{P}_k(x;\ \alpha,\ \beta)\,\widehat{P}_n(y;\ \alpha,\ \beta)\right]. \tag{11}$$

Доказательство. В связи с формулой (11) вводим обозначение

$$Q_{nk}(x,\ y)=\widehat{P}_n(x;\ \alpha,\ \beta)\widehat{P}_k(y;\ \alpha,\ \beta)+$$
$$+\widehat{P}_k(x;\ \alpha,\ \beta)P_n(y;\ \alpha,\ \beta). \tag{12}$$

Этот многочлен не меняет своего значения, если поменять местами x и y. Аналогичным свойством обладает и весовая функция (7) при условии $\gamma=-1/2$. Рассмотрим треугольник

$$D_1=\{(x,\ y):\ -1<x<y<1\}. \tag{13}$$

Многочлен (12) и весовая функция (7) принимают одни и те же значения в симметричных точках, расположенных в треугольниках (6) и (13). Объединяя эти два треугольника, получим квадрат B. Используя формулу весовой функции (7) при $\gamma=-1/2$ и формулу (12), находим

$$2\iint\limits_{D} Q_{nk}(x,\ y)\,Q_{ms}(x,\ y)\,h(x,\ y)\,dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_{B} Q_{nk}(x,\ y)\,Q_{ms}(x,\ y)\,h(x,\ y)\,dx\,dy=$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\,\widehat{P}_k(y;\alpha,\beta)+\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\,\widehat{P}_n(y;\alpha,\beta)\right]\times$$
$$\times\left[\widehat{P}_m(x;\alpha,\beta)\,\widehat{P}_s(y;\alpha,\beta)+\widehat{P}_s(x;\alpha,\beta)\,\widehat{P}_m(y;\alpha,\beta)\right]\times$$
$$\times(1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1+y)^{\beta}\,dx\,dy=$$
$$=\delta_{nm}\delta_{ks}+\delta_{km}\delta_{ns}+\delta_{ns}\delta_{km}+\delta_{ks}\delta_{nm}. \tag{14}$$

Докажем, что эта сумма равна нулю, если $(n,\ k)\neq(m,\ s)$. Пусть сначала $n\neq m$ и $k\neq s$. Предположим, что $n>m$. Тогда в силу условий $k\leqslant n$ и $s\leqslant m$ имеем $s\leqslant m<n$. Следовательно, в этом случае все слагаемые

в сумме (14) равны нулю. Случай $n<m$ рассматривается аналогично. Пусть теперь $n=m$ и $k\neq s$. Если $k<s$, то имеем $k<m$, и опять вся сумма (14) равна нулю. Случаи $s<k$ и $k=s$ при $n\neq m$ рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Для вычисления коэффициента a_{nk} в формуле (11) положим $n=m$ и $k=s$ в формуле (14). В результате получим $2\|Q_{nk}\|^2=2[1+\delta_{nk}]$. Следовательно, для искомого коэффициента имеем равенство $a_{nk}=1/\sqrt{1+\delta_{nk}}$.

Теорема 4. *Если в формуле весовой функции* (7) $\gamma=1/2$, *то для многочленов* (8) *имеет место равенство*

$$\widehat{P}_{nk}(x+y, xy; \alpha, \beta, 1/2) = \\ = \frac{\widehat{P}_{n+1}(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_k(y; \alpha, \beta)-\widehat{P}_k(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_{n+1}(y; \alpha, \beta)}{x-y}. \quad (15)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что правая часть равенства (15) есть многочлен, ибо в числитель можно прибавить величину

$$-\widehat{P}_{n+1}(y; \alpha, \beta)\widehat{P}_k(y; \alpha, \beta)+\widehat{P}_{n+1}(y; \alpha, \beta)\widehat{P}_k(y; \alpha, \beta).$$

Далее, обозначим через $R_{nk}(x, y)$ правую часть равенства (15). Учитывая формулу весовой функции (7) при $\gamma=1/2$, аналогично равенству (14) получаем

$$2\iint_D R_{nk}(x, y)\,R_{ms}(x, y)\,h(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\widehat{P}_{n+1}(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_k(y; \alpha,\beta)-\widehat{P}_k(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_{n+1}(y; \alpha, \beta)\right]\times$$
$$\times\left[\widehat{P}_{m+1}(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_s(y; \alpha, \beta)-\widehat{P}_s(x; \alpha, \beta)\,\widehat{P}_{m+1}(y; \alpha, \beta)\right]\times$$
$$\times(1-x)^\alpha(1-y)^\alpha(1+x)^\beta(1+y)^\beta\,dx\,dy =$$
$$= 2\delta_{(n+1)(m+1)}\delta_{ks}-\delta_{(m+1)k}\delta_{(n+1)s}-\delta_{(n+1)s}\delta_{(m+1)k}. \quad (16)$$

Как и в конце доказательства предыдущей теоремы, здесь нетрудно показать, что сумма (16) равна нулю, если $(n, k)\neq(m, s)$. А при условиях $n=m$ и $k=s$ эта сумма равна 2. Теорема доказана.

В настоящем параграфе изложены результаты из работы Т. Корнвиндера [V. 4].

§ 5. Несколько замечаний о рядах Фурье по ортогональным многочленам двух переменных

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые достаточные условия, при которых дважды непрерывно дифференцируемая функция двух переменных разлагается в ряд Фурье по ортогональным многочленам двух переменных.

Пусть конечная односвязная область G ограничена гладкой жордановой кривой Γ. Для расстояния между точками $M(x, y)$ и $P(\xi, \eta)$ вводим обозначение

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \tag{1}$$

Далее, вводим функцию

$$v(\xi, \eta; x, y) = \ln r = \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \tag{2}$$

Эта функция называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости [1.3, 7, 12].

Предположим теперь, что в области G дана функция двух переменных $f(x, y)$, которая непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$, и ее частные производные до второго порядка включительно также непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда для этой функции имеет место интегральное представление

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left[f(\xi, \eta) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - \ln r \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G} (\ln r)\, \Delta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

В этой формуле $M(x, y)$ — внутренняя точка области G, Δ — оператор Лапласа, а ν — направление внешней нормали к кривой Γ в точке $P(\xi, \eta)$. Формула (3) хорошо известна [1.7] и получается из второй интегральной формулы Грина на плоскости.

Формулу (3) можно использовать при исследовании условий, достаточных для разложения функций двух переменных в ряды Фурье по ортогональным многочленам двух переменных.

Пусть в области G определена весовая функция $h(x, y)$ и ей соответствует система основных ортонормированных многочленов

$$\{F_{nk}(x, y)\}. \tag{4}$$

Предположим, что функция (2) разлагается в ряд Фурье по многочленам (4), т. е. имеем

$$\ln r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(\xi, \eta) F_{nk}(x, y), \tag{5}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$a_{nk}(\xi, \eta) = \iint_G h(x, y) \ln r F_{nk}(x, y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Предположим теперь, что выполнены следующие условия.

1. При фиксированной точке $M(x, y)$ внутри области G ряд (5) сходится равномерно относительно точки $P(\xi, \eta)$ на Γ.

2. Ряд (5) можно дифференцировать почленно по направлению внешней нормали ν в точке $P(\xi, \eta)$ на Γ, т. е. имеем разложение

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \nu} [a_{nk}(\xi, \eta)] F_{nk}(x, y), \tag{7}$$

причем полученный ряд сходится равномерно относительно точки $P(\xi, \eta)$ на контуре Γ при фиксированной точке $M(x, y)$ внутри области G.

3. При фиксированной точке $M(x, y)$ внутри области G и при изменении точки $P(\xi, \eta)$ по всей области G ряд (5) сходится таким образом, что его можно интегрировать почленно по площади области G, т. е. имеет место равенство

$$\iint_G (\ln r) \Delta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \iint_G a_{nk}(\xi, \eta) \Delta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta F_{nk}(x, y). \tag{8}$$

При выполнении всех этих условий, подставляя разложения (5), (7), (8) в формулу (3), находим

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} F_{nk}(x, y) \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} [a_{nk}(\xi, \eta)]\, ds -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} F_{nk}(x, y) \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma a_{nk}(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} F_{nk}(x, y)\frac{1}{2\pi}\iint_G a_{nk}(\xi, \eta)\,\Delta f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \quad (9)$$

А теперь введем коэффициенты по формуле

$$a_{nk}(f)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[f(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial\nu}a_{nk}(\xi, \eta)-a_{nk}(\xi, \eta)\frac{\partial f}{\partial\nu}\right]ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_G a_{nk}(\xi, \eta)\,\Delta f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \quad (10)$$

Тогда из равенства (9) получим разложение

$$f(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}(f)\,F_{nk}(x, y). \quad (11)$$

Таким образом, если выполнены сформулированные выше три условия, то всякая функция $f(x, y)$, имеющая в замкнутой области $\overline{G}$ непрерывные производные до второго порядка включительно, разлагается в ряд Фурье по ортогональным многочленам двух переменных. Заметим, что вышеупомянутые три условия зависят только от весовой функции $h(x, y)$.

Рассмотрим подробнее формулу (10). Учитывая формулу (6), находим

$$a_{nk}(f)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\xi, \eta)\left[\iint_G h(x, y)\frac{\partial\ln r}{\partial\nu}F_{nk}(x, y)\,dx\,dy\right]ds-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial f}{\partial\nu}\left[\iint_G h(x, y)\ln r F_{nk}(x, y)\,dx\,dy\right]ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_G\Delta f(\xi, \eta)\left[\iint_G h(x, y)\ln r F_{nk}(x, y)\,dx\,dy\right]d\xi\,d\eta=$$
$$=\iint_G h(x, y)F_{nk}(x, y)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[f(\xi, \eta)\frac{\partial\ln r}{\partial\nu}-\ln r\frac{\partial f}{\partial\nu}\right]ds+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\iint_G\ln r\,\Delta f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right\}dx\,dy. \quad (12)$$

В силу формулы (3) все выражение в фигурных скобках равно $f(x, y)$. Следовательно, равенство (12) приводится к виду

$$a_{nk}(f) = \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) f(x, y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, ряд (11) есть обычный ряд Фурье функции $f(x, y)$ по системе многочленов (4).

Далее, в правой части равенства (3) содержатся три интеграла

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} \ln r\, ds, \tag{13}$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(\xi, \eta) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu}\, ds, \tag{14}$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_G \Delta f(\xi, \eta) \ln r\, d\xi\, d\eta. \tag{15}$$

Эти интегралы называются *логарифмическими потенциалами* соответственно *простого слоя, двойного слоя* и *по области*. Если все эти логарифмические потенциалы разлагаются в ряды Фурье по многочленам (4), то имеет место равенство (11). Но условия представления трех функций (13)—(15) рядами Фурье по многочленам (4) могут быть различными в смысле требований, налагаемых на функцию $f(x, y)$ и на весовую функцию $h(x, y)$. Поэтому вместо трех функций (13)—(15), зависящих от одной функции $f(x, y)$, целесообразно рассмотреть логарифмические потенциалы с тремя различными функциями распределения

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi_1(\xi, \eta) \ln r\, ds, \tag{16}$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi_2(\xi, \eta) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu}\, ds, \tag{17}$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_G \varphi_3(\xi, \eta) \ln r\, d\xi\, d\eta. \tag{18}$$

Таким образом, общая задача о разложении произвольной функции двух переменных $f(x, y)$ в ряд Фурье по многочленам (4) в силу формулы (3) сводится к исследованию условий представимости рядами Фурье по тем же многочленам (4) логарифмических потенциалов простого слоя (16), двойного слоя (17) и по области (18).

КОММЕНТАРИИ И ДОПОЛНЕНИЯ

В теории ортогональных многочленов можно различать два крайних существенно различных направления исследований. В первом из них свойства ортогональных многочленов рассматриваются при наиболее общих условиях, налагаемых на весовую функцию без конкретизации вида этой функции. Во втором направлении изучаются наиболее характерные классы ортогональных многочленов, определяемые весовыми функциями конкретного вида. В первом из этих направлений получено не так уж много результатов и эти результаты почти не имеют применений. Напротив, второе направление весьма богато по содержанию, характеризуется конструктивными результатами, интенсивно развивается и имеет многочисленные применения. Так, например, если весовая функция только суммируема, то для соответствующих ей ортогональных многочленов можно доказать теорему существования, экстремальные свойства, некоторые из алгебраических свойств и очень мало из дальнейших свойств. А если предположить, что весовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона, то возникает целая теория классических ортогональных многочленов.

Таким образом, в теории ортогональных многочленов наиболее важной является задача исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов при весовых функциях конкретных классов. При этом сужение класса весовых функций во многих случаях не обедняет тему, не упрощает задачу и, самое главное, не исключает возможности важных применений полученных результатов.

Все вышесказанное относится и к случаю ортогональности по двум переменным. Именно поэтому в настоящей монографии главное внимание уделяется отдельным наиболее характерным классам ортогональных многочленов двух переменных.

ГЛАВА I

В первых трех параграфах этой главы излагаются простейшие свойства ортогональных многочленов двух переменных в общем случае, когда весовая функция только суммируема по области. Результаты этих параграфов аналогичны соответствующим свойствам ортогональных многочленов одного переменного, но по форме, конечно, более сложны. Из содержания следующих трех параграфов следует, что случай двух переменных конструктивно более сложен и более многообразен. Наиболее характерным результатом является тот факт, что при каждом натуральном n весовая функция и область ортогональности определяют пространство W_n размерности $n+1$ ортогональных многочленов степени n. В связи с этим усложняется и конструкция ряда Фурье по ортогональным многочленам двух переменных и появляется возможность варьировать этот ряд в зависимости от разлагаемой функции. Рассмотрен случай дифференциального веса, но все результаты справедливы и для интегрального веса $dF(x, y)$ при условии, что функция $F(x, y)$ не убывает и имеет ограниченную вариацию, например, в смысле Витали [I.9]. Эта глава написана по работе Д. Джексона [VII.9]. Учтены также результаты из монографии-справочника [I.1]. Установить авторство конкретных результатов, изложенных в этой главе, затруднительно. Следует заметить, что в некоторых современных работах авторы перед изложением новых результатов отдельные параграфы посвящают общим свойствам ортогональных многочленов двух переменных, которые давно рассмотрены в упомянутой работе Д. Джексона.

ГЛАВА II

В § 1 излагается простейшая схема перехода от одномерного случая к двумерному, когда весовая функция в прямоугольной области допускает разделение переменных. Для произведений различных классических ортогональных многочленов одного переменного выводятся некоторые линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, которые далее в гл. IV отмечаются независимо от гл. II как отдельные частные случаи в общей классификации допустимых дифференциальных уравнений.

В § 2 излагается общий метод перехода от многочленов, ортогональных по одному переменному, к ортогональным многочленам двух переменных. Этот метод охватывает довольно большой класс ортогональных по области многочленов. В результате получаются формулы, которые в некоторых частных случаях представляют ортогональные по области многочлены через ортогональные многочлены по одному переменному. В разработке этого метода принимали участие Ф. Дидон, Г. Орлов, А. Кошмидер, Х. Лархер, С. А. Агаханов [VI.1]. Этот метод успешно применяется и в современных работах [V.3, 4; VII.23, 29].

В следующих двух параграфах гл. II изложены результаты, которые получили С. Огава, С. Арнока и С. Кида [VII.23]. В § 3 рассматривается общий случай весовой функции с разделяющимися переменными. Здесь доказывается некоторая обратная теорема, в которой из свойств ортогональных многочленов выводятся утверждения о конфигурации области ортогональности. Далее, в § 4 для ортогональных по области многочленов получена конструктивная формула в одном частном случае, когда весовая функция и область ортогональности связаны между собой некоторым условием. Результаты этих двух параграфов показывают большое многообразие и сложность различных частных случаев ортогональности по области.

В § 5 приводятся примеры областей и весовых функций, для которых степенные моменты весовой функции вычисляются в конечном виде.

ГЛАВА III

Классические многочлены Аппели являются наиболее естественным обобщением многочленов Якоби на случай двух переменных. Эти многочлены были введены в 1881 г. в работе П. Аппеля [VII.1]. Основные свойства их изложены в монографии П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1]. В этой монографии нормальная биортогональная система Аппеля построена при условиях $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma = \alpha + \beta$. Общий случай рассмотрен в работах [VI.34; VII.5].

ГЛАВА IV

Дифференциальное уравнение (4.7.6) изучали Ш. Эрмит, Ф. Дидон и другие французские математики. Соответствующие многочлены двух переменных, ортогональные в единичном круге, называются многочленами Эрмита, который ввел эти многочлены с помощью производящей функции аналогично многочленам Лежандра, а затем вывел для них уравнение (4.7.6). В монографии Г. Орлова [II.19], опубликованной в 1881 г., рассматривается уравнение (4.7.6), приводится формула Родрига для многочленов Эрмита, а также устанавливается первый и второй критерии ортогональности для этих многочленов. Дальнейшие свойства многочленов Эрмита и уравнения (4.7.6) излагаются в монографии П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [III.1].

В 1967 г. Г. Кролл и И. Шеффер [VII.18] впервые рассмотрели 9 различных типов допустимых дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Затем в 1974 г. эти же уравнения подробно исследовал Г. К. Энгелис [VI.35]. При этом он дал классификацию этих уравнений при несколько более общих условиях, применил другой метод исследования и установил формулу Родрига для соответствующих ортогональных многочленов.

Глава IV написана по работе Г. К. Энгелиса [VI.35]. При этом многие формулировки изменены и дана новая классификация допустимых уравнений, основанная на другом принципе. В этой классификации получается 15 типов допустимых уравнений, среди которых содержатся все 9 типов, указанных Г. К. Энгелисом. В новой классификации отдельно рассматриваются те допустимые уравнения, характеристический многочлен которых имеет пониженный порядок.

ГЛАВА V

Как известно [II.7, 21, 24], классические ортогональные многочлены одного переменного характеризуются следующими свойствами.

1. Ортогональные многочлены являются собственными функциями некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка.

2. Весовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона и некоторому граничному условию.

3. Ортогональные многочлены представляются через весовую функцию по формуле Родрига.

4. Имеется простая конструктивная формула представления производящей функции ортогональных многочленов через весовую функцию.

5. Производные ортогональных многочленов также ортогональны на том же интервале.

Этими свойствами обладают только классические ортогональные многочлены, т. е. многочлены Якоби, Чебышева — Эрмита, Чебышева — Лагерра, а также многочлены, получающиеся из этих трех систем линейными преобразованиями независимого переменного. Каждое из пяти указанных свойств является характеристическим в том смысле, что из одного следуют остальные четыре,

В случае ортогональности по двум переменным ситуация значительно усложняется. В гл. IV рассмотрены классы ортогональных многочленов двух переменных, которые являются собственными функциями допустимых уравнений, т. е. для таких многочленов выполняется аналог свойства 1.

В гл. V рассматриваются условия, при которых для ортогональных по области многочленов выполняются аналоги свойств 1 и 2. При этом оказалось необходимым рассматривать систему уравнений Пирсона для весовой функции, условие потенциальной самосопряженности для допустимых уравнений и, кроме того, условие согласованности допустимого дифференциального оператора и линейного функционала. Только при выполнении всех этих условий для ортогональных по области многочленов имеет место некоторая формула Родрига, т. е. выполняется аналог свойства 3. Глава V написана по работе Г. К. Энгелиса [VI.35].

ГЛАВА VI

Почти все результаты, изложенные в § 2, 3, 4 гл. VI, являются новыми и публикуются впервые. Некоторые из них являются аналогами и следствиями соответствующих свойств ортогональных по площади многочленов по комплексному переменному, изложенных в монографии [II.23].

В § 5 изложены результаты А. А. Цыганкова [VI.32], причем многие формулировки изменены в связи с тем, что в настоящей монографии принято другое, более естественное упорядочение исходной системы однородных гармонических многочленов.

ГЛАВА VII

При введении ортогональных многочленов двух переменных возникают два направления исследований. Во-первых, можно ввести многочлены, ортогональные по области. Эти многочлены были рассмотрены во всех предыдущих шести главах. Во-вторых, можно ввести многочлены по двум переменным, ортогональные на плоской кривой. Эти два направления различны по формулировкам, условиям и результатам, хотя некоторая аналогия имеется. Основное различие заключается в том, что в любой области G система одночленов $\{x^n y^k\}$ является линейно независимой, а если кривая Г алгебраическая, то эта система уже не является линейно независимой, и из нее необходимо исключить одночлены, линейно зависимые на кривой Г. В результате нарушается симметрия и возникают дополнительные трудности. Кроме того, если кривая Г замкнута, то внутри этой кривой ортогональные многочлены обладают некоторыми дополнительными свойствами. Таким образом, случаи ортогональности по области и по контуру необходимо рассматривать отдельно.

В гл. VII рассматриваются в основном те свойства ортогональных по контуру многочленов, которые отличают их от многочленов, ортогональных по области. Эта глава написана по работам А. А. Цыганкова [VI.30—32], но почти все формулировки изменены. Некоторые результаты являются новыми и публикуются впервые. В § 5 и 6 изложены наиболее существенные результаты А. А. Цыганкова, но формулировки изменены.

ГЛАВА VIII

В предыдущем изложении неоднократно упоминалась работа Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18]. В этой работе имеются разделы:

I. Введение. II. Формальные свойства. III. Допустимые дифференциальные уравнения в частных производных. IV. Характеристика ортогональных многочленов применительно к уравнениям второго порядка. V. Продолжение.

В разделе II ортогональные многочлены двух переменных рассматриваются при минимальных условиях на весовую функцию. Вместо дифференциального веса (как это изложено в гл. I) рассматривается интегральный вес иногда даже без условия неотрицательности. Кроме того, часть результатов этого раздела относится к случаю, когда линейный функционал, определяющий условие ортогональности, не имеет интегрального представления, а определяется только на множестве многочленов своими степенными моментами по одночленам $\{x^h y^k\}$. В этом случае область ортогональности и весовая функция не конкретизируются. Во многих определениях и формулировках теорем некоторые свойства линейного функционала, которые в случае дифференциального веса доказываются, в общем случае постулируются. В целом получается формальная теория, вполне аналогичная той, которую разработал Д. Джексон [VII.9].

Глава VIII написана по разделу II вышеупомянутой работы Г. Кролла и И. Шеффера. При этом многие формулировки изменены. Основное отличие заключается в том, что в гл. VIII, как и во всей настоящей монографии, не применяются двойные ряды.

ГЛАВА IX

Первые три параграфа гл. IX написаны по разделу IV работы Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18]. В § 1 рассматриваются вспомогательные результаты о связи канонического допустимого оператора и обобщенных монических многочленов. В следующих двух параграфах устанавливаются необходимые и достаточные условия согласованности канонического допустимого оператора и линейного функционала в самом общем случае, когда линейный функционал определяется своими степенными моментами.

В § 4 изложен важный результат С. А. Агаханова [VI.1]. Этот результат показывает, что помимо допустимых дифференциальных уравнений есть еще другие случаи, когда ортогональные по области многочлены являются собственными функциями линейных дифференциальных операторов в частных производных.

В § 5 излагается общая теорема об условиях допустимости линейного дифференциального уравнения в частных производных произвольного порядка. Эта теорема впервые установлена в работе Г. Кролла и И. Шеффера [VII.18]. В гл. IV изложена теорема Г. К. Энгелиса об условиях допустимости линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Доказательства теорем Г. К. Энгелиса и Г. Кролла и И. Шеффера различны, но первое из них, которое уступает в общности, представляется более удобным для анализа условий допустимости. Именно поэтому оба эти доказательства приведены в настоящей монографии.

ГЛАВА X

Во многих современных работах по теории ортогональных многочленов рассматриваются различные обобщения многочленов Якоби на случай двух переменных. При этом часто вводятся новые области ортогональности и даже новые определения ортогональных многочленов по двум переменным. Кроме того, постоянно расширяется множество частных случаев, когда ортогональные по области многочлены двух переменных представляются через многочлены, ортогональные по одному переменному. Такого характера результаты содержатся в работах Т. Корнвиндера [V.3, 4; VII.12—14]. Наиболее важные из них излагаются в гл. X.

В § 1 рассматриваются некоторые случаи, когда ортогональные по области многочлены представляются через многочлены Якоби. К таким случаям относятся и основные ортогональные многочлены Аппеля.

В § 2 вводятся ортогональные многочлены по двум сопряженным комплексным переменным. Это новый вид ортогональных многочленов, который в настоящее время интенсивно изучается. Такие многочлены можно ввести для всех областей и весовых функций, рассмотренных ранее. В § 3 вводятся аналоги многочленов Чебышева по двум сопряженным комплексным переменным для области Штейнера.

В § 4 рассмотрены многочлены по двум действительным переменным, ортогональные в области, ограниченной двумя перпендикулярными между собой прямыми и параболой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Большинство работ из списка литературы процитировано в тексте. Многие авторы упомянуты в предисловии и в комментариях потому, что их работы имеют важное значение в теории ортогональных многочленов. Некоторые работы в тексте не цитируются, но включены в список литературы, ибо они имеют непосредственное отношение к теории ортогональных многочленов двух переменных.

В монографии приведено мало результатов о рядах Фурье по ортогональным многочленам двух переменных. Этот вопрос вообще разработан недостаточно. Имеющиеся в этом направлении результаты относятся к отдельным случаям и носят незаконченный характер [I.1; III.1; V.5; VI.17, 18, 29]. А между тем аналогичный круг вопросов для кратных тригонометрических рядов Фурье и для рядов Фурье — Лапласа исследован очень подробно [II.27, 28; IV.3, 7].

Далее, связь ортогональных многочленов двух переменных с теорией дифференциальных уравнений в частных производных несколько шире и сложнее [IV.8; VII.12, 13], чем те результаты по этому вопросу, которые изложены в настоящей монографии.

К сожалению, многие важные вопросы, связанные с ортогональными многочленами двух переменных, ввиду недостатка места не включены в настоящую монографию. Например, не рассмотрены ортогональные многочлены по дискретным переменным, производящие функции в наиболее важных случаях, связь ортогональных многочленов с теорией представлений групп, многочлены Эрмита, ортогональные в круге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ И СПРАВОЧНИКИ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра: Пер. с англ.— 2-е изд.— М.: Наука, 1973.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены: Пер. с англ.— 2-е изд.— М.: Наука, 1974.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— 5-е изд.— М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— 5-е изд.— М.: Наука, 1981.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— 4-е изд.— М.: Наука, 1973.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1967, 1968.
7. Михлин С. Г. Линейные уравнения с частными производными.— М.: Высшая школа, 1977.
8. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики.— М.: Наука, 1978.
9. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу: Пер. с франц.— 2-е изд.— М.: Мир, 1979.
10. Савелов А. А. Плоские кривые.— М.: Физматгиз, 1960.
11. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка.— М.: Физматгиз, 1961.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— 4-е изд.— М.: Наука, 1972.

II. МОНОГРАФИИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1963.
2. Амербаев В. М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра.— Алма-Ата: Изд-во АН КазССР, 1974.
3. Амербаев В. М., Утембаев Н. А. Численный анализ лагерровского спектра.— Алма-Ата: Изд-во АН КазССР, 1982.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.— М.: Физматгиз, 1961.
5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.
6. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области: Пер. с нем.— М.: Мир, 1986.

7. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов: Обзор достижений отечественной математики.— М.: Гостехиздат, 1950.
8. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке.— М.: Физматгиз, 1958.
9. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости.— М.: Наука, 1975.
10. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1948.
11. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.
12. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов: Пер. с нем.— М.: Физматгиз, 1958.
13. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды.— М.: Наука, 1984.
14. Келдыш М. В. Избранные труды: Математика.— М.: Наука, 1985.
15. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— 2-е изд.— М.: Наука, 1967.
16. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы.— М.: Наука, 1981.
17. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.— М.: Наука, 1985.
18. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.
19. Орлов Г. О некоторых полиномах с одною и многими переменными.— СПб.: Изд-во Академии наук, 1881.
20. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер. с польск.— М.: Наука, 1983.
21. Сеге Г. Ортогональные многочлены: Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1962.
22. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления.— М.: Машиностроение, 1986.
23. Суетин П. К. Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха.— Труды Мат. ин-та АН СССР.— Т. 100.— М.: Наука, 1971.
24. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
25. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера.— М.: Наука, 1984.
26. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1961.
27. Янушаускас А. И. Двойные ряды.— Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1980.
28. Янушаускас А. И. Кратные тригонометрические ряды.— Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1986.

III. КНИГИ НА ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

1. Appell P., Kampè de Fèriet J. Fonctions hypergéometriques et hyperspheriques. Polinomes d'Hermite.— Paris: Gauthier — Villars, 1926.

2. Askey R., Wilson J. Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials.— Providence (Rh. I): AMS, 1985.— (Mem. Amer. Math. Soc., V. 54, № 319).
3. Draux A. Polynomes orthogonaux formels. Applications.— Berlin: Springer, 1983.
4. Freud G. Orthogonale Polynome.— Budapest: Akad. Kiado, 1969.
5. Rusev P. Analytic functions and classical orthogonal Polynomials.— Sofia: Publishing house of the Bulgarian Academy of Sciences, 1984.
6. Shohat J. A., Hille E., Walsh J. L. A bibliography on orthogonal polynomials.— Washington: Publ. National Academy of Sciences, 1940.— (Bull. of the Nat. Res. Conn.; № 103).

IV. ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

1. Андриевский В. В. О приближении функций гармоническими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— Т. 51, № 1.— С. 3—15.
2. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. Вып. 1.— М.: Наука, 1983.— С. 124—266.
3. Голубов Б. И. Кратные ряды и интегралы Фурье.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982.— С. 3—54.— (Итоги науки и техники. Математический анализ; Т. 19).
4. Гончар А. А., Мергелян С. Н. Теория приближения функций комплексного переменного // История отечественной математики.— Т. 4, кн. 1.— Киев: Наукова думка, 1970.— С. 112—193.
5. Дзядык В. К. Об аналитических и гармонических преобразованиях и о приближении гармонических функций // Укр. мат. журн.— 1967.— Т. 19, № 5.— С. 33—57.
6. Дьедонне Дж. О биортогональных системах // Математика: Сб. переводов.— М.: ИЛ, 1959.— Т. 3, № 4 — С. 133—145.
7. Жижиашвили Л. В., Топурия С. В. Ряды Фурье — Лапласа на сфере.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1977.— С. 83—130.— (Итоги науки и техники. Математический анализ; Т. 15).
8. Розенблюм А. В., Розенблюм Л. В. Ортогональные полиномы многих переменных, связанные с представлениями группы евклидовых движений // Дифференциальные уравнения.— Минск.— 1986.— Т. 22, № 11.— С. 1961—1972.
9. Суетин П. К. Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру // Успехи матем. наук.— 1966.— Т. 21. Вып. 2.— С. 41—48.
10. Суетин П. К. Проблема В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1977.— С. 5—82.— (Итоги науки и техники. Математический анализ; Т. 15.)

V. ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ НА ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

1. Dunn K. B., Lidl R. Generalisations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables // Czechoslovak Mathem. Journ.— 1982.— V. 32, № 4.— P. 516—528.
2. Kailath T., Viera A., Morf M. Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials // SIAM Review.— 1978.— V. 20, № 1.— P. 106—119.

3. Koornwinder T. H. The addition formula for Jacobi polynomials and the theory of orthogonal polynomials in two variables, a survey // Mathem. Cent. Afd. toegepaste wisk. TW.— 1974.— № 145, 11 — P. 1—17.
4 Koornwinder T. H. Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials // Theory and Appl. Spec. Funct.— New York, 1975 — P. 435—495.
5. Walsh J. L., Sewell W. E., Elliot H. M. On the degree of polynomial approximation to harmonic and analytic function // Trans. Amer. Mathem. Soc.— 1949.— V. 67, № 2.— P. 381—420.

VI. СТАТЬИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

1. Агаханов С. А. Метод построения ортогональных полиномов двух переменных для одного класса весовых функций // Вестн. ЛГУ 1965.— № 19.— С. 5—10.
2. Бадков В. М. Асимптотическое поведение ортогональных многочленов // Мат. сб.— 1979.— Т. 109, № 1.— С. 46—59.
3. Бадков В. М. Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1983.— Т. 164.— М.: Наука. 1983.— С. 6—36.
4. Бадков В. М. Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Приближение функций полиномами и сплайнами.— Свердловск: УНЦ АН СССР.— 1985.— С. 41—53.
5. Богуславский И. А. Статистический анализ многомерной динамической системы при использовании полиномов Эрмита многих переменных // Математика и телемеханика.— 1970.— № 7.— С. 36—51.
6. Генев В. Н. Нормирани хармонични полиноми и някои техни свойства // Год. ВУЗ. Прил. мат.— София, 1981.— Т. 16, № 2.— С. 181—189.
7. Гольштейн Е. Г. Некоторые оценки для производных гармонических многочленов // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 171—180.
8. Деменин А. Н. Об одном классе ортогональных многочленов от многих переменных // Укр. мат. журн.— 1971.— Т. 23, № 3.— С. 381—387.
9. Деменин А. Н. О некоторых свойствах многомерных полиномов Лагерра // Тр. VIII Летней мат. школы.— Киев: Наукова думка.— 1971.— С. 164—177.
10. Деменин А. Н. Об одном классе многомерных полиномов, зависящих от дискретных переменных // Тр. VIII Летней мат. школы.— Киев: Наукова думка.— 1971.— С. 178—193.
11. Иванова Л. Д. Ряды Фурье по гармоническим многочленам двух переменных // Применение функционального анализа в теории приближений.— Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1983.— С. 47—56.
12. Иванова Л. Д. Ортогональные гармонические многочлены и обобщенные функции // Применение функционального анализа в теории приближений.— Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1984.— С. 55—60.

13. Ильясов М. И. О некоторых свойствах биортогональных полиномов по двум переменным // Применение функционального анализа в теории приближений.— Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1983.— С. 66—77.
14. Ильясов Ш. И. О некоторых свойствах ортогональных многочленов от двух переменных // Материалы 27 Межвузовской научн. конф. мат. кафедр педагогич. ин-тов Уральской зоны.— Ижевск, 1969.— С. 74—76.
15. Ильясов Ш. И. Некоторые вопросы систем ортогональных полиномов, относящиеся к двумерной области // Учен. зап. Казанского ун-та.— 1969.— Т. 129, кн. 3.— С. 120—124.
16. Ильясов Ш. И. О некоторых системах ортогональных многочленов двух и многих переменных // Учен. зап. Казанского ун-та.— 1969.— Т. 129, кн. 6.— С. 49—64.
17. Каратаев Р. И. К вопросу аппроксимации функции многих переменных ортогональными полиномами // Тр. Казан. авиац. ин-та.— 1974.— Вып. 171.— С. 103—106.
18. Киннаин Т. Г. О порядке приближения функций многих переменных суммами Фурье — Якоби // Сообщ. АН ГрузССР.— 1978.— Т. 92, № 1.— С. 37—40.
19. Кошелев А. Д. О керифункции гильбертова пространства функций, полианалитических в круге // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 232, № 2.— С. 277—279.
20. Моторный В. П. О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— Т. 37, № 1.— С. 135—147.
21. Натансон И. П. О разложении функций двух переменных в ряды по ортогональным многочленам простейшего вида // Докл. АН СССР.— 1953.— Т. 91, № 6.— С. 1275—1277.
22. Пулатов А. П. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ортогональным тригонометрическим многочленам // Сб. научн. тр. Ленингр. механического ин-та.— 1965.— Т. 50.— С. 186—190.
23. Пулатов А. П. Вопросы сходимости и квадратур в теории ортогональных тригонометрических многочленов // Научн. тр. Ташк. ун-та.— 1966.— Т. 276.— С. 77—84.
24. Рахманов Е. А. О гипотезе В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Мат. сб.— 1979.— Т. 108, № 4.— С. 581—608.
25. Рахманов Е. А. К проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 254, № 4.— С. 851—854.
26. Рахманов Е. А. Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых отграничен от нуля // Мат. сб.— 1981.— Т. 114, № 2.— С. 269—298.
27. Суетин П. К. О представлении непрерывных и дифференцируемых функций рядами Фурье по многочленам Лежандра // Докл АН СССР.— 1964.— Т. 158, № 6.— С. 1275—1277.
28. Суетин П. К. Порядковое сравнение различных норм многочленов в комплексной области // Мат. зап. Уральского ун-та — 1967.— Т. 5, № 4.— С. 91—100.
29. Худайназаров С. Х. О порядке приближения функций двух переменных для разложения Фурье — Якоби // Вопросы вычисл. и прикл. мат. (Ташкент).— 1981.— Т. 84.— С. 431—444.

30. Цыганков А. А. Гармонические многочлены, ортогональные на плоской кривой // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 197, № 4.— С. 794—797.
31. Цыганков А. А. Некоторые оценки и асимптотические формулы для суперортогональных многочленов // Изв. вузов. Математика.— 1972.— Т. 7.— С. 100—106.
32. Цыганков А. А. Одновременная ортогональность гармонических многочленов по контуру и по площади области // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 216, № 1.— С. 46—48.
33. Чеснокова О. С. Некоторые оценки для функций Лебега для рядов Фурье по многочленам Чебышева — Эрмита и по многочленам Чебышева — Лагерра // Применение функционального анализа в теории приближений.— Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1981.— С. 139—144.
34. Энгелис Г. К. О полиномах, ортогональных на треугольнике // Учен. зап. Латв. ун-та.— 1964.— Т. 58, вып. 2.— С. 43—48.
35. Энгелис Г. К. О некоторых двумерных аналогах классических ортогональных полиномов // Латв. мат. ежегодник.— 1974.— Вып. 15.— С. 169—202.
36. Янушаускас А. И. Двойные ряды ортогональных многочленов // Литов. мат. сб.— 1983.— Т. 23, № 2.— С. 213—216.
37. Янушаускас А. И. Ортогональные многочлены и задачи на собственные значения для вырождающихся уравнений // Докл. расш. заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Т. 1, № 1.— Тбилиси: изд-во Тбил. ун-та.— 1985.— С. 225—228.

VII. СТАТЬИ НА ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

1. Appell P. Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de Jacobi // Archiv der Mathematik und Physik.— 1881.— B. 66.— S. 238—245.
2. Atkinson F. V. Boundary problems leading to orthogonal polynomials in severel variables // Bull. Amer. Math. Soc.— 1963, № 3.— P. 345—351.
3. Blankengel J. Zur Charakterisierung von Orthogonal polynomen in zwei Veranderlichen // Zeitschr. Angew. Math. Mech.— 1979.— B. 59, № 2.— S. 103—123.
4. Derrienuic M. M. Polynomes orthogonaux de type Jacobi sur un triangle // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.— 1985.— Ser. 1, V. 300, № 14.— P. 471—474.
5. Fackerell E. D., Littler R. A. Polynomials biorthogonal to Appells polynomials // Bull. Australl. Math.— 1974.— V. 11, № 2.— P. 181—195.
6. Gröbner W. Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein — und zweidimensionalen Bereichen // Monatsch. Math.— 1948 — B. 52.— S. 38—54.
7. Hermite C. Sur un nouveau developpement en serie des fonctions // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.— 1864.— V. 58.— P. 93—100, 266—273.
8. Hermite C. Sur quelques developpements en series des fonctions de plusieurs variables // Compes Rendus Acad. Sci. Paris.— 1865.— V. 60.— P. 370—377, 432—440, 461—466, 512—518.

9. Jackson D. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables // Duke Math. Journ.— 1936.— V. 2.— P. 423—434.
10. Jackson D. Orthogonal polynomials on a plane curve // Duke Math. Journ.— 1937.— V. 3.— P. 228—236.
11. Jain V. K. On orthogonal polynomials of two variables // Indian Journ. pure Appl. Math.— 1980.— V. 11, № 4.— P. 492—501.
12. Koornwinder T. H. Orthogonal polynomials in two variables which are eingenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. I, II // Proc. Kon. ned. akad. wetensch.— 1974.— A 77, № 1; Indag. math.— 1974.— V. 36, № 1.— P. 48—66.
13. Koornwinder T. H. Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. III, IV // Proc. Kon. ned. akad. wetensch.— 1974.— A 77, № 4; Indag. math.— 1974.— V. 36, N 4.— P. 357—381.
14. Koornwinder T. H. Harmonics and spherical functions on Grassman manifolds of rank two and two — variable analogues of Jacobi polynomials // Lect. Notes Math.— 1977.— V. 571.— P. 141—154.
15. Koornwinder T. H., Sprinkhuizen-Kuyper I. Generalized power series expansions for a class of orthogonal polynomials in two variables // SIAM Journ. Math. Anal.— 1978.— V. 9, № 3.— P. 457—483.
16. Koschmieder L. Über die C — Summierbarkeit gewisser Reien von Didon und Appell // Math. Ann.— 1931.— B. 104.— S. 387—402.
17. Krall H. L., Sheffer I. M. A Characterization of orthogonal polynomials // Journ. Math. Anal.— 1964.— V. 8, № 2.— P. 232—244.
18. Krall H. L., Sheffer I. M. Orthogonal polynomials in two variables // Ann. Mathem. pura ed appl.— 1967.— V. 76, № 4.— P. 325—376.
19. Lorch L. The Lebesque constants for Euler (E, 1) summation of Laplace series // Functions, Series, Operators (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai).— Budapest, 1980.— V. 35.— P. 781—793.
20. Lorch L. Inequalities for ultraspherical polynomials and the gamma function // Journ. Approx. Theory.— 1984.— V. 40, № 2.— P. 115—120.
21. Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series I, II. // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— V. 147.— P. 419—431, 433—460.
22. Munschy G., Pluvinage P. Résolution de l'équation de Schrodinger des atomes à deux électrons. II, III. // Journ. Phus. Radium.— 1957.— V. 8, № 18.— P. 157—160, 552—558.
23. Ogawa S., Arioka S., Kida S. On orthogonal polynomials in two variables and Gaussian cubature formulas // Math. Japonica.— 1980.— V. 25, № 3.— P. 255—277.
24. Proriai J. Sur une famille des polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle.— Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.— 1957.— V. 245. № 26.— P. 2459—2461
25. Ricci P. E. I polinomi di Tchebycheff in piu variabili // Rend mathem. appl.— 1978.— V. 11, № 2.— P. 295—327.

26. Ricci P. E. Polynomi armonici e sistemi di funzioni ortogonali in due variabli // Rend. math. appl.— 1982.— V. 2, № 3.— P. 453—466.
27. Schleusner W. A note on biorthogonal polynomials in two variables // SIAM Journ. Math. Anal.— 1974.— V. 5.— P. 11—18.
28. Sheffer I. M. On polynomials sets of class S^k and sets of rank k // Ann. math. pura ed appl.— 1978.— V. 118.— P. 295—324.
29. Sprinkhuizen—Kuyper I. G. Orthogonal polynomials in two variables. A further analysis of the polynomials orthogonal over a region bounded by two lines and a parabola // SIAM Journ. Math. Anal.— 1976.— V. 7, № 4.— P. 501—518.

Суетин Павел Кондратьевич

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ
ПО ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ

Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Г. Н. Сурова*

ИБ № 32444

Сдано в набор 01.10.87. Подписано к печати 25.05.88. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 20,16. Усл. кр.-отт. 20,16. Уч.-изд. л. 21,5. Тираж 3000 экз. Заказ № 1052. Цена 4 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25