

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН**

ВАХОБОВ ВАЛИЖОН

ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАДОВИЧ

**Ташкентский институт ирригации инженеров и механизации
сельского хозяйства**

*Учебное пособие для студентов бакалавриатуры 5340700-«гидротехнические
сооружения», 5141100-«гидрология», 5311500-«геодезия, картография и кадастр».*

Ташкент- 2019

Учебное пособие предназначена для студентов обучающихся по направлениям образования бакалавриатуры 5340700-«Гидротехнические сооружения», 5141100-«Гидрология», 5311500-«Геодезия, картография и кадастр». В пособие приведены необходимые теоретические сведения, формулы и помещены примеры для практических занятий по курсу математический анализ и дифференциальная уравнения.

Ўқув қўлланма 5340700- «Гидротехника қурилиши», 5141100-«Гидрология», 5311500-«Геодезия, картография ва кадастр» бакалавриат таълим йўналиши талабалари учун мўлжалланган. Қўлланмада математик анализ ва дифференциал тенгламалар курсининг бўлимларига доир назарий тушунчалар, формулалар ва амалий машғулотлар учун мисоллар келтирилган.

The training manual is intended for students studying in the fields of bachelor's degree education, 5340700-«Hydraulic structures», 5141100-«Hydrology», 5311500-«Geodesy, cartography and cadastre» The manual contains the necessary theoretical information, formulas and examples for practical exercises in the course of mathematical analysis and differential equations.

Рецензенты:

А. Рахматуллаев - ТИИМСХ , кандидат физико математических наук, доцент .

Т. Эргашев- Институт математика имени В.И. Романовского при академии наук Республики Узбекистан, кандидат физико математических наук, доцент.

В.Вахобов
Ш.Лакаев

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Предисловие

Настоящий “Курс высшей математики” является расширенным изложением лекций, которые авторами прочитаны студентам Ташкентского института ирригации инженеров и механизации сельского хозяйства. Он может использоваться в качестве учебного пособия для студентов естественных факультетов нематематического профиля, где различные разделы высшей математики объединены в один курс.

Авторам стремились изложить материал по возможности полно и доступно и ставили своей целью не просто сообщить читателю те или иные сведения по высшей математике, а развить у него математическое мышление, показать внутреннюю связь математических понятий, т.е. представить математику в ее развитии.

Книга содержит краткие сведения основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, понятия о теории дифференциальных уравнений и рядах.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Б.А.Худоярову и доценту А.А.Файзиеву за просмотр рукописи и сделанные им замечания, а также опыт и знания которого помогли в создании книги.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Оглавление.....	12
Глава I. Функция. Основные понятия	
1.1.1. Понятие функции	13
1.1.2. Способы задания функций	16
1.1.3. Основные характеристики функции	17
1.1.4. Основные элементарные функции	19
Глава II. Теория пределов. Теория последовательностей	
2.1.1. Определение числовой последовательности	20
2.1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины	20
2.1.3. Предел числовой последовательности	21
2.1.4. Предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	21
2.1.5. Второй замечательный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	22
Предел функции. Основные теоремы о пределах.	
2.2.1. Предел функции	24
2.2.2. Бесконечно малые функции и их свойства	25
2.2.3. Бесконечно большие функции	26
2.2.4. Основные теоремы о пределах	27
2.2.5. Предел функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	27
Глава III. Непрерывность функции точки разрыва I-го и II-го рода	
3.1.1. Приращение аргумента и функции	29
3.1.2. Определение непрерывности функции	30
3.1.3. Основные теоремы о непрерывных функциях	31
3.1.4. Точки разрывы функции	32
При помощи непрерывности функции вычисление некоторые важные пределы	

3.2.1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	33
3.2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	34
3.2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 1$	34

Глава IV. Производная и дифференциал

4.1.1. Введение	35
4.1.2. Задачи, приводящие к понятию производной	36
4.1.3. Определение производной, ее геометрический и физический смысл	37
4.1.4. Производные основные элементарные функции	39
4.1.5. Основные правила дифференцирования	41
4.1.6. Таблица производных	42

Производная от сложной функции. Дифференциал функции.

4.2.1. Производная от сложной функции	42
4.2.2. Дифференциал функции	44
4.2.3. Дифференциал суммы, произведения и частного	44
4.2.4. Геометрическое значение дифференциала	45
4.2.5. Таблица для дифференциалов	46
4.2.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	46

Производная неявной и параметрически заданной функции.

Производные высших порядков

4.3.1. Производная неявной функции	47
4.3.2. Производная функции, заданной параметрически	48
4.3.3. Производные высших порядков	49
4.3.4. Производные различных порядков от неявных функции и функции заданных параметрически	50

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Правило Лопиталя.

4.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления	50
4.4.2. Правило Лопиталя	52
Глава V. Исследование функций с помощью производной	
5.1.1. Условие постоянства функции	55
5.1.2. Условия монотонности функции	55
5.1.3. Экстремумы функции. $\max$ и $\min$	56
5.1.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	59
5.1.5. Асимптоты графика функции.....	62
5.1.6. Общая схема исследования функций и построения	
графиков	63
Глава VI: Определение комплексных чисел и операции над ними.	
6.1.1. Введение	64
6.1.2. Определение комплексных чисел. Сложение и	
вычитание комплексных чисел	66
6.1.3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	67
6.1.4. Модуль и аргумент комплексного числа	68
6.1.5. Тригонометрическая форма комплексного числа	69
6.1.6. Умножение и возведение в степень комплексных чисел	
заданными в тригонометрической форме	69
6.1.7. Извлечение корня из комплексного числа	71
Глава VII. Неопределенный интеграл	
Первообразная и неопределенный интеграл	
7.1.1. Понятия о первообразной функции	73
7.1.2. Неопределенный интеграл и его свойства	74
7.1.3. Таблица неопределенных интегралов	75
7.1.4. Простейшие правила интегрирования	76
7.1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле	
(интегрирование подстановкой)	76
7.1.6. Интегрирование по частям	77

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

7.2.1. Интегрирование рациональных дробей	78
7.2.2. Интегрирование иррациональных выражений	84
7.2.3. Интегрирование тригонометрических выражений	86

Глава VIII. Определенный интеграл

8.1.1. Определение определенного интеграла	89
8.1.2. Геометрический смысл определенного интеграла.....	91
8.1.3. Физический смысл определенного интеграла	92
8.1.4. Свойства определенного интеграла	94
8.1.5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	95

Методы вычисления определенного интеграла.

Геометрические приложения определенного интеграла

8.2.1. Методы вычисления определенного интеграла	95
8.2.2. Геометрические приложения определенного интеграла	98
а) Вычисление площадей плоских фигур	
б) Вычисление объема тела вращения	

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

8.3.1. Полярная система координат	101
8.3.2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.....	102
8.3.3. Вычисление длины дуги кривой	103

Вычисление объема и площадь поверхности тела

8.4.1. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений	106
8.4.2. Объем тела вращения	107
8.4.3. Площадь поверхности тела вращения	108

Несобственные интегралы

8.5.1. Интегралы с бесконечными пределами	110
8.5.2. Интегралы от разрывной функции	114

Глава X. Функции нескольких переменных

9.1.1. Определение функции нескольких переменных	116
9.1.2. Геометрическое изображение функции двух переменных	118
9.1.3. Частное и полное приращение функции двух переменных.....	119
9.1.4. Непрерывность функции двух переменных	120
9.1.5. Частные производные функции двух переменных	122
9.1.6. Частные производные высших порядков	123
9.1.7. Полное приращение и полный дифференциал	124
9.1.8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	125
9.1.9. Производная сложной функции. Полный дифференциал сложной функции	126
9.1.10. Производная в данном направлении. Градиент функции	128
9.1.11. Экстремумы функции двух независимых переменных	130

Глава X. Дифференциальные уравнения.

Основные понятия и определения дифференциальные уравнения

10.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	133
10.1.2. Основные понятия и определения	135
10.1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка	137
10.1.4. Дифференциальные уравнения с разделенными переменным	138
10.1.5. Дифференциальные уравнения в полных	

дифференциалах	140
10.1.6. Однородный дифференциальные уравнения первого порядка	142
10.1.7. Дифференциальные уравнения проводимые к однородным	144
10.1.8. Линейные дифференциальные уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами	146
10.1.9. Линейные дифференциальные уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	149
Дифференциальные уравнения высшего порядка	
10.2.1. Дифференциальные уравнения второго порядка	153
10.2.2. Простейшие уравнения второго, допускающие понижение порядка	155
10.2.3. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков	157
10.2.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	159
Неоднородные линейные уравнения второго порядка	
10.3.1. Основные теоремы для решений неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка	162
10.3.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	164
Система дифференциальных уравнений	
10.4.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	168
10.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	172

Глава XI. Теория рядов

11.1.1.	Введение	176
11.1.2.	Числовой ряд. Общий член ряда	177
11.1.3.	Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда	177
11.1.4.	Общие свойства сходящихся рядов	178
11.1.5.	Необходимый признак сходимости ряда	179
11.1.6.	Достаточные признаки сходимости	180
11.1.7.	Знакопеременные ряды	183

Функциональные ряды

11.2.1.	Область сходимости функционального ряда	189
11.2.2.	Равномерно (правильно) сходящиеся функционально ряды и их свойства	191
11.2.3.	Интегрированию и дифференцированию	
	функционального ряда	191

Степенные ряды

11.3.1.	Степенной ряд. Теорема Абеля	192
11.3.2.	Область сходимости степенного ряда	193
11.3.3.	Радиус сходимости степенного ряда	194
11.3.4.	Степенные ряды можно по членное	
	можно дифференцировать и интегрировать	195
11.3.5.	Разложение функции в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена	195
11.3.6.	Разложение элементарных функции в ряд Маклорена	198
11.3.7.	Биномиальный ряд	198

Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям. Разложение в ряд Фурье. Непериодические функции.

11.4.1.	Приближённое нахождения значений функций	199
---------	--	-----

11.4.2.	Приближённое вычисление корней	200
11.4.3.	Приближённое вычисление пределов и интегралов	201
11.4.4.	Разложение в ряд Фурье. Непериодические функции ..	202
11.4.5.	Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$	204

Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

11.5.1.	Основные свойства четных и нечетных функций	207
11.5.2.	Разложение в ряд Фурье четную функцию	213
11.5.3.	Разложение в ряд Фурье нечетную функцию	215

Глава I. Функция. Основные понятия

Введение

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Определение. Постоянной величиной называется величина принимающую одно и то же значение.

Переменной величиной называется величина которое может принимать различные числовые значения.

Приведем примеры постоянных и переменных величин.

Пример 1. Диаметр и длина окружности, в зависимости от обстоятельств, могут принимать различные значения и следовательно, вообще говоря, являются величина переменными. Однако отношение длины окружности к ее диаметру сохраняют всегда одно и то же значение и, следовательно, есть величина постоянная, называемая числом $\pi \approx 3,14159 \dots$

Пример 2. Объем V и давление P определенной массы газа являются величинами переменными; однако $V \cdot P$ – есть величина постоянная.

1.1.1. Понятие функции

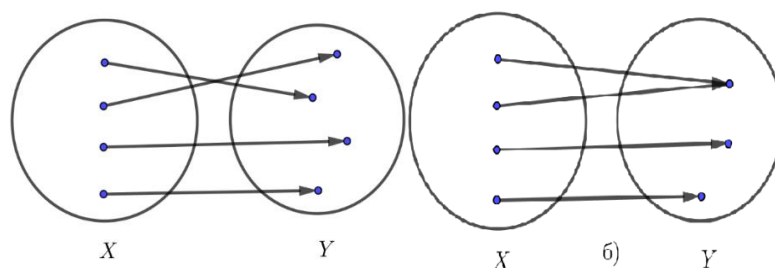
На практике изучая какое-нибудь явление, мы имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин (независимые) полностью определяют значения других (зависимые переменные или функции).

Например, изучая газ, мы имеем дело с тремя переменными: Объем V и t можно рассматривать как независимые переменные, а p – как зависимую (функцию).

Теперь дадим определение понятия функции, являющегося центральным понятием высшей математики.

Пока мы ограничимся случаем двух переменных величин.

Пусть даны два непустых множества X и Y .



Определение 1. Соответствие или правило, которое каждому элементу x из X сопоставляет один и только один элемент y из Y , называется функцией, определенной на множестве X со значениями в Y .

Тот факт, что y есть функция от x , сокращено обозначают так:

$$y = f(x) \quad (1)$$

Где x – аргумент, независимая переменная, y – функция, зависимая переменная, символ f можно употребляют любую другую букву например, g, h, φ, F , и т.д.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записываются так: $f(a)$.

Например, если $f(x) = x(1 - x)$, то $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = -2$ и т.п.

Приведем пример поясняющее понятие функции.

Пример 4. Из формулы площади круга $S = \pi R^2$, следует, что каждому допустимому (положительному) значению радиуса R соответствует определенное значение площади S есть функция от R , где $S > 0$ и $R > 0$.

Определение 3. Множества всех y из Y , для которых существует хоть x из X , такое, что $y = f(x)$, называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется числовой функцией, если ее $D(f)$ и $E(f)$ содержится в множестве действительных чисел R .

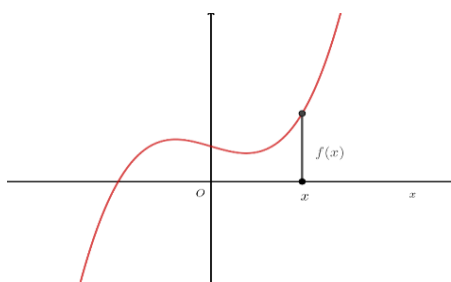
Отметим, что область определения функции могут быть: интервал (a, b) , сегмент или отрезок $[a, b]$, полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$, бесконечные интервалы $[-\infty, a)$, (b, ∞) , $(-\infty, \infty)$ и т.д.

Определение 5. Множество всех точек (x, y) плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяет уравнение $y = f(x)$ называется графиком функции $y = f(x)$.

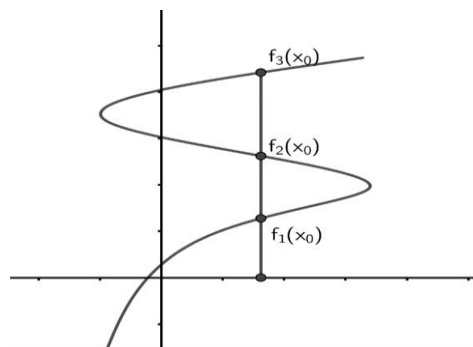
Если каждому значению переменной x соответствует одно значение переменной y , то $y = f(x)$ называется однозначной функцией от x ; а если же хотя бы некотором значении переменной x соответствует несколько и бесконечное значений переменной y , то $y = f(x)$ называется многозначной функцией от x .

Например $y = x^2$, $y = \sin x$ однозначные а $y = \pm\sqrt{x}$ – двузначная, $y = \arcsin x$ – многозначная функция от x .

В дальнейшем основном мы имеем дело с однозначными функциями.



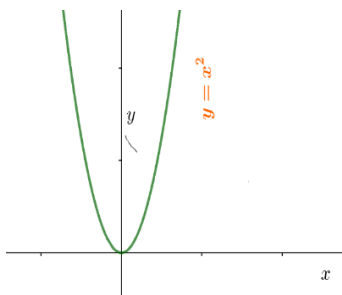
однозначная



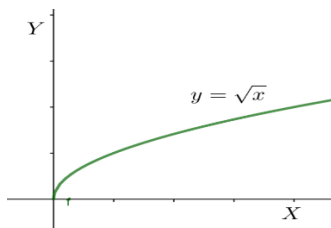
многозначная

Рассмотрим примеры для функции.

Пример 1. $y = x^2$ – функция $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}_+$, f – соответствие или правило играть действие возведение в квадрат.



Пример 2. $y = f(x) = \sqrt{x}$ – функция. $D(f) = E(f) = [0, +\infty)$, f – правило является действие извлечение квадратного корня.



1.1.2. Способы задания функции

Функции могут быть заданы различными способами.

4. Аналитический способ

В этом случае функция задается, при помощи некоторой формулы.

$$y = f(x) = x^2 + 5x + 6, y = g(x) = 2^x + 1$$

$$y = h(x) = \log_2(x - 3), y = \varphi(x) = \sin 3x$$

5. Графический способ

Здесь соответствие между x и y устанавливается с помощью заданного графика по которому для каждого значения аргумента x определяется значение функции y .

Часто графики функции вычерчиваются автоматически самопишущими приборами. Например, в метеорологии барограф вычерчивает барограмму-график изменения атмосферного давления, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму-график работы сердца и т.д.

6. Табличный способ

В этом случае функция задается таблицей. Нам известно таблицы значений функций $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \lg x$, $y = \sin x$ и так далее.

Определение 6. Если функция задана аналитически уравнением $y = f(x)$ (1) разрешенным относительно y , то такое задание функции называется явным.

Например, $y = 2x^2 - 1$, $y = \sin 3x$, $y = 4^x$

Определение 7. Если функция задана уравнением

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

не разрешенным относительно y то такое задание функции называется неявным.

Например, $2x - 3y - 6 = 0$, $x^2 - e^{xy} + 3 = 0$

Заметим, что не всякое уравнение вида (2) задает функцию. Так, уравнение $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не определяет функцию.

Определение 8. Функция, заданная в виде $y = f(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функцией f и g .

Например, $f(x) = \cos x^2$, $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ $y = f(g(x)) = \cos(1 + \sqrt{x})^2$

Сложную функцию часто записывают в виде $y = f(u)$, где $u = g(x)$

Например, $y = \lg(\arcsin x)$

1.1.3. Основные характеристики функции

Пусть функция $y = f(x)$, определена на множестве X и $x \in X$, $-x \in X$.

Определение 9. Если $f(-x) = f(x)$ то функция $y = f(x)$ является четной, а $f(-x) = -f(x)$, то она нечетной.

Например, функция $f(x) = x^2$, $x \in R$ является четной, так как

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x);$$

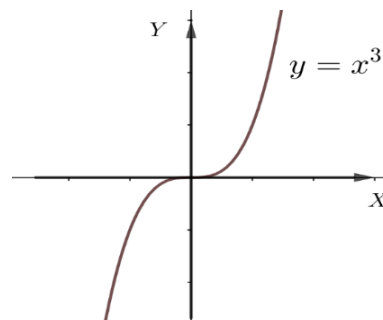
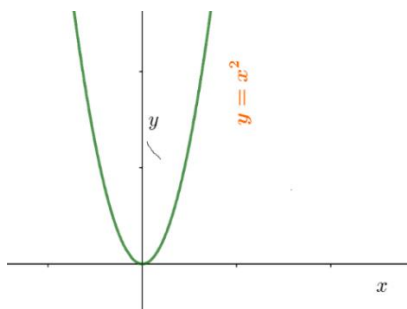
а функция $y = f(x) = x^3$, $x \in R$ является нечетной, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Определение 10. Функция, которые не является ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида.

Например, $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = 2^x$ – функции общего вида.

Замечание. График четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции симметричен относительно начало координат.



Определение 11. Функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называется возрастающей на интервале (a, b) , если при любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

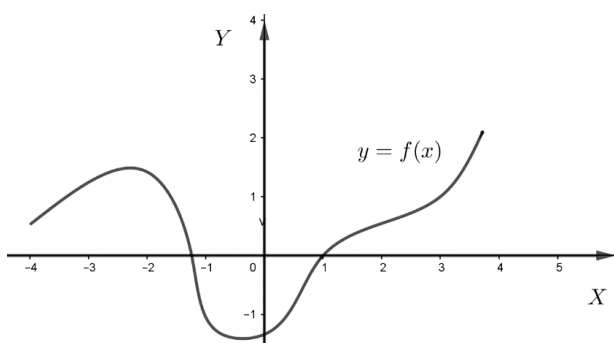
Определение 12. Функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называется убывающей на интервале (a, b) , если при любых $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$ принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Определение 13. Функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называется неубывающей (невозрастающей) на интервале (a, b) , если для любых $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

Определение 14. Интервалы, в которых функция либо только возрастает (не убывает), либо только убывает (не возрастает), называются интервалами строгой монотонности (интервалами монотонности).



$y = f(x)$ на $(-4, -2)$ возрастает, $(-2, 0)$ убывает на $(0, 3)$ она неубывает, на $(-4, -2)$, $(-2, 0)$ строго монотонна.

1.1.4. Основные элементарные функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

- a) Постоянная функция $f(x) = c, c \in R$;
- b) Степенная функция $f(x) = x^\alpha$, где α – любое действительное число;
- c) Показательная функция $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$;
- d) Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;
- e) Тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$
- f) Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Упражнения:

В задачах 1-7 даны функции и два значения аргумента x_1 и x_2 . Требуется:

- 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва; 3) построить график данной функции.

- | | | | |
|----|--------------------------|-------------|------------|
| 1. | $y = \frac{3x}{x-1};$ | $x_1 = 1;$ | $x_2 = 4.$ |
| 2. | $y = \frac{4x}{x-2};$ | $x_1 = 2;$ | $x_2 = 6.$ |
| 3. | $y = \frac{4x}{x+2};$ | $x_1 = -2;$ | $x_2 = 2.$ |
| 4. | $y = 9^{\frac{1}{2-x}};$ | $x_1 = 2;$ | $x_2 = 0.$ |
| 5. | $y = 4^{\frac{1}{3-x}};$ | $x_1 = 3;$ | $x_2 = 1.$ |
| 6. | $y = \frac{2x}{x+3};$ | $x_1 = -3;$ | $x_2 = 0.$ |
| 7. | $y = \frac{4x}{x+5};$ | $x_1 = -5;$ | $x_2 = 5.$ |

Глава II. Теория пределы. Теория последовательностей

2.1.1. Определение числовой последовательности

Определение 1. Функция определенного на множестве натуральных чисел, т.е. $f(n)$, $n \in N$ называется числовая последовательность.

Приведем примеры:

Пример 1. Последовательность всех четных чисел т.е. 2, 4, 6, 8,...

Пример 2. Последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Пример 3. Последовательности целых десятков 10, 20, 30, ..., 90

Общий член последовательности обозначается через x_n, y_n, a_n, b_n , и так далее.

Таким образом согласно определению числовая последовательности имеем

$$x_n = f(n), n \in N.$$

Для выше приведенных примеров общий члены будут $x_n = 2n, n \in N$;

$$y_n = \frac{1}{n}, n \in N; z_n = 10n, n = 1, 2, \dots, 9.$$

2.1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 2. Величина x_n , которое с ростом n ($n \rightarrow \infty$) стремится к нулю, то такие величины называется бесконечно малые и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Определение 3. Величина x_n , которое с увеличением n ($n \rightarrow \infty$) стремится к бесконечности, то такие величины называется бесконечно большими т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Например: 1) Величина $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in N$ есть бесконечно малые.

2) Величина $\beta_n = 2n, n \in N$ является бесконечно большим.

Арифметическая и геометрическая прогрессия служат примерами числовой последовательности.

Теоремы о пределах последовательности

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ – постоянная.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

2.1.3. Предел числовой последовательности

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, a – постоянная, α_n – бесконечно малые $\varepsilon > 0$.

Определение 2. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равным числу a и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Определение 3. Если $\{x_n\}$ можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n$$

то число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \rightarrow \infty$, т.е

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Пример 1. Найти предел $x_n = \frac{2n+1}{3n}$

$$\text{Решение. } x_n = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2n}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$$

Согласно определению 3 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$.

2.1.4. Предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718 \quad (2)$$

При вычислении предел последовательностей воспользуемся следующих формул:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n^k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 0 \\ \infty, & \text{если } k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A \cdot n^k = \begin{cases} \infty, & \text{если } k > 0 \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases}$$

где A – постоянная.

Пример 2. Найти предел $x_n = \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{n^2(2 + \frac{5}{n^2})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{5}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

2.1.5. Второй замечательный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

Теорема 1. Переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предел,

заключенный между 2 и 3.

Доказательство. По формуле Бинома Ньютона можем написать

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n - (n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (1)$$

После алгебраические преобразования, получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем, что переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ ограничена.

Замечая, что $\left(1 - \frac{1}{n} \right) < 1$, $\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) < 1$, и так далее, из (2) получим неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

Замечая, далее, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

Можем написать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{< 2}$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ и первым членом $a = 1$,

Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Следовательно, для всех n получаем $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Из равенства (2) следует, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Таким образом, получаем неравенства

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Итак переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастающая и ограниченная, то она имеет предел. (§5 Теорема 7)

Этот предел обозначается числом e . $2 \leq e < 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2,7182818284 \dots$$

Можно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad x \in (-\infty, 1) \cup (0, \infty)$$

Если положим $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha > -1$) $\Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}$ то будем иметь, при $x \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Примеры:

Пример 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^3 = e^3$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \left[\begin{matrix} x = 2y, x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{matrix} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2$

Пример 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x-1+4} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4.$

Тема. Предел функции. Основные теоремы о пределах.

2.2.1. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки, в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена.

Определение 1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, что при всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta \quad (1)$$

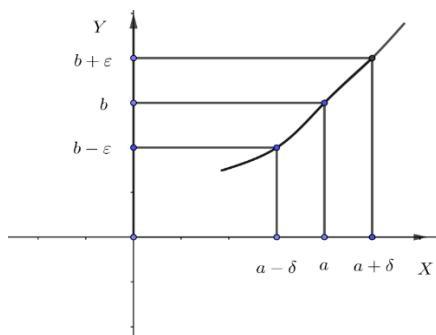
выполняется и неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (2)$$

Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (3)$$

$$f(x) \rightarrow b \text{ при } x \rightarrow a. \quad (4)$$



Рассматриваются также односторонние пределы функции:

Предел слева

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1 \quad (2)$$

Предел справа

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2 \quad (3)$$

Отметим, что если односторонние пределы равны, т.е

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_1 = b_2 = b,$$

то предел b в точке $x = a$ существует.

Если односторонние пределы различны

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \text{ т.е. } b_1 \neq b_2 \text{ рис. а}$$

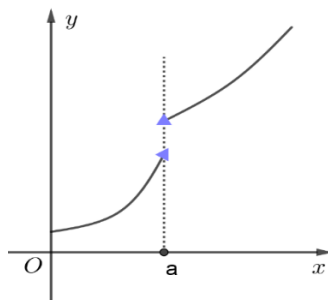


рис. а

или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в точке $x = a$.

2.2.1. Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0 \quad (1)$$

Например, функция $\alpha(x) = (x-3)^2$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow 3$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 3} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0,$$

функция $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Свойства бесконечно малых функции

1°. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то

$$f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow y = b + \alpha \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечная малая при $x \rightarrow a$.

Обратное также верно:

Если верно (2), то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

2°. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$. т.е. если $u(x) = \alpha(x) - \beta(x) + \gamma(x)$, где α, β, γ – бесконечно малые, то $u(x)$ – также будет бесконечно малая.

$$u(x) = (x-2)^2 + x^2 - 5x + 6 + (x-2).$$

3°. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию, есть бесконечна малая. $\alpha(x) \rightarrow 0 \quad |\beta(x)| < C$

$$u(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a$$

Следствие 1. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малая то $\gamma(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$ – есть бесконечно малая.

Следствие 2. Если $u(x) = C \cdot \alpha(x)$ где $\alpha(x)$ бесконечно малая то $u(x)$ также будет бесконечно малая. $u(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

2.2.3. Бесконечно большие функции

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) если для любого $N > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)| > N,$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2.2.4. Основные теоремы о пределах

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$ или $(x \rightarrow \infty)$, т.е

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot A$, где C – постоянная.

Теорема 5. Если $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = C$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 7) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 7 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 5$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$

2.2.5. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$, при $x \rightarrow 0$

Для нахождения предела отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ нельзя применить

теорему о пределе частного, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

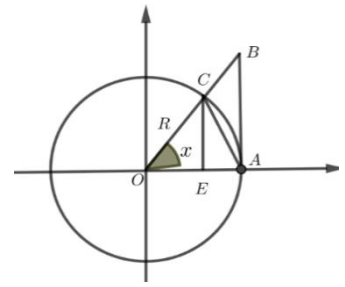
Также нельзя сделать никаких преобразований для вычисления предела данного отношения.

Однако имеет место следующий предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

Этот предел можно доказать с помощью геометрического соображения.

Возьмем окружность радиуса R , и центральный угол x , выраженный в радианном мере. Проведем хорду AC и касательную AB пересекающую продолжение радиуса OC в точке B . из рисунка видно:



$$S_{\triangle AOC} < S_{\text{сек} AOC} < S_{\triangle AOB};$$

$$\frac{1}{2} OA \cdot EC < \frac{OA \cdot \overset{\smile}{AC}}{2} < \frac{OA \cdot AB}{2}$$

$$EC < \overset{\smile}{AC} < AB.$$

Разделим все члены последних неравенств на R :

$$\frac{EC}{R} < \frac{\overset{\smile}{AC}}{R} < \frac{AB}{R} \quad (2)$$

Но из треугольника OEC имеем $\frac{EC}{R} = \sin x$, из $\triangle OAB$ имеем:

$$\frac{AB}{R} = \operatorname{tg} x, \quad \frac{\overset{\smile}{AC}}{R} < x \quad | = \alpha R$$

тогда неравенства (2) имеет вид:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Так как x – острый угол, то $\sin x > 0$;

Разделив последнее неравенства на $\sin x$ получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (3)$$

В неравенстве (3) переходим пределу при $x \rightarrow 0$, т.е

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Тогда $1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow$ согласно теореме 5

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел носят названия первый замечательный предел.

Упражнения:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ kx \rightarrow 0}} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{n} \cdot \frac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{k}{n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{k}{n}$$

Глава III. Непрерывность функции точки разрыва I-го и II-го рода

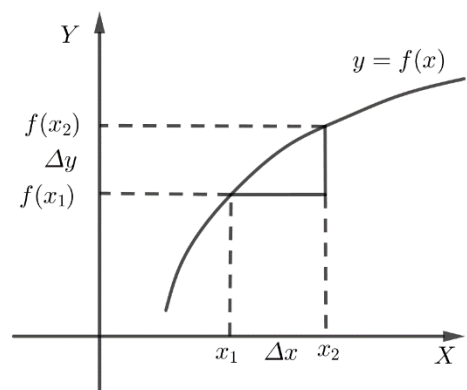
3.1.1. Приращение аргумента и функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на X и $x_1 \in X$, $x_2 \in X$.

Разность между новым и первоначальным значениям аргумента x называется приращением аргумента и обозначается через Δx . Таким образом $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$.

Величина x_2 иначе называется нарастанным значением аргумента (переменной).

Приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным числом. Например если значение x если изменятся от 5 до 5,2, то



$$\Delta x = 5,2 - 5 = 0,2$$

а если оно изменяется от 10 до 9,7, то

$$\Delta x = 9,7 - 10 = -0,3.$$

Пусть дана функция $y = f(x) = x^2$. Предположим, что $x_1 = 3$ $x_2 = 3,5$, тогда $\Delta x = 3,5 - 3 = 0,5$.

Найдем значения функция $f(x) = x^2$ в этих точках:

$$y_1 = f(x_1) = 3^2 = 9, y_2 = f(x_2) = (3,5)^2 = 12,25$$

Разность $y_2 - y_1$ называется приращением функции и обозначается через Δy .

$$\text{Таким образом, } \Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 12,25 - 9 = 3,25$$

Найдем приращение Δy функции $y = x^2$ при любом изменении x .

Допустим, что x первоначальное значение и оно получает приращение Δx .

Тогда новое наращенное значение аргумента будет $x + \Delta x$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2, y = f(x) = x^2.$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Мы нашли, приращение данной функции в общем виде.

Пример 1. Найти приращение функции $y = f(x) = 2x^2 + 3$.

Решение: $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3;$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3 - 2x^2 - 3 = 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$$

Пример 2. Найти приращение функции $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}; \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

3.1.2. Определение непрерывности функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (следовательно, и в самой точке x_0), существует предел функции при $x \rightarrow x_0$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Другими словами, функции $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$, $x \in R$ в точке $x = x_0 = 2$ непрерывна, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = f(2) = 2^2 = 4.$$

Определение 2. Функция $f(x)$, $x \in R$ называется непрерывной в точке $x = x_0$ если:

- 1) Она определена при $x = x_0$ ($x_0 \in X$);
- 2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ (2)

Определение 3. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 . Тогда и только, когда

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (3)$$

Определение 4. Функция $f(x)$, $x \in X$ непрерывна на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества X .

Пример 2. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in R$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in X$.

Решение. $y_0 = f(x_0) = \sin x_0$,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right) = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right). \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

3.1.3. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0 .

Доказательство. Так как $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ на основании теоремы о пределах имеем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

Опираясь на свойства пределов, так же можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 3. Частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция, если знаменатель в точке $x = x_0$ не обращается в нуль.

Теорема 4. Если $u = g(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Теорема 5. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Пример 3. Функция $y = f(x) = x^3$, $x \in R$, непрерывна в любой точке x_0 , так как,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = x_0^3, \lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 3^3 = 27.$$

Пример 4. Функция $y = f(x) = e^x$, $x \in R$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$.

3.1.4. Точка разрыва функции

Точки разрыва первого рода.

Пусть точка x_0 является предельной точкой области определения X функции $f(x)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 – точка устранимого разрыва. а если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 – точка неустранимого разрыва первого рода.

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0 .

Точки разрыва второго рода.

Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \pm \infty.$$

Пример 1. Исследовать на разрывность функции $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$.

Решение. $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ Тогда $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = f(0-0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0+0) = 1$

Поскольку $f(0+0) \neq f(0-0)$, то функция в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода. Скачок равен

$$f(0+0) - f(0-0) = 1 - (-1) = 2$$

Пример 2. Функция $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ имеет разрыв второго рода в точке

$x=0$. Действительно, при $x=0$ функция неопределена:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Легко показать, что эта функция непрерывна при любом значении $x \neq 0$.

При помощи непрерывности функции вычисление некоторые важные пределы

3.2.1. Доказательство предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e.$$

В частности, при $a=e$ из (1) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$$

3.2.2. Доказательство предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Положим $a^x - 1 = y \Rightarrow a^x = y + 1 \Rightarrow \log_a a^x = \log_a (y + 1) \Rightarrow x = \log_a (1 + y)$

В силу непрерывности функции $f(x) = a^x$ при $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$

$$\text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a (1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a (1 + y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a (1 + y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} \Rightarrow$$

$$\text{так как, } \log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}. \text{ Итак, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

3.2.3. Доказательство предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Положим $1+x = e^y \Rightarrow x = e^y - 1$; при $y \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \alpha \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \right] = \alpha \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y}}{\frac{e^y - 1}{y}} \right] = \alpha$$

Согласно пределу (2) при $a = e$ имеем $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} = 1$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Приведем примеры:

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 5x + 7)}{x - 2} \left(\frac{0}{0} \right)$

Решение: положим $x - 2 = \alpha \Rightarrow x = \alpha + 2$, тогда

$$x^2 - 5x + 7 = (\alpha + 2)^2 - 5(\alpha + 2) + 7 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 - 5\alpha - 10 + 7 = \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ при } x \rightarrow 2 \quad \alpha \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + \alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha} \right] =$$

Согласно пределу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 3^x}{x} \left(\frac{0}{0} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3^x \cdot \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = 3^0 \cdot \ln 3 = \ln 3.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{7}} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{7}} - 1}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$$

Упражнения:

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$.

2. Вычислите $\lim_{x \rightarrow -1} (4x + 3)$.

3. Вычислите $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$.

4. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6}$.

5. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{\sqrt{5-x} - 2}$.

6. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6}$.

Глава IV: Производная и дифференциал

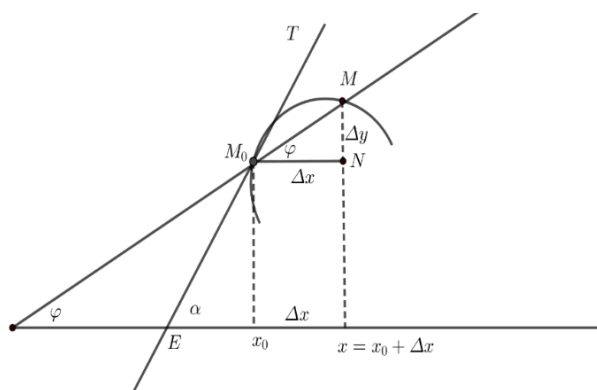
1. Введение

Производная – одна из важнейших понятий современной математики. С помощью производной можно характеризовать скорость изменения функции, скорость протекания некоторого процесса, явления. С введением производной появилась возможность решать задачи, не доступные методам элементарной математики.

4.1.2. Задачи, приводящие к понятию производной

К понятию производной приводят многие задачи геометрии, физики, химии и других наук. Рассмотрим некоторые из них.

Задачи о касательной



Введем декартову прямоугольную систему координат Oxy , рассмотрим график функции $y = f(x)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка этого графика и $M(x, y)$ – любая другая его точка, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

Из треугольника M_0MN находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

где φ – угол, образуемый секущей M_0M с осью Ox .

Пусть $M \rightarrow M_0$ вдоль графика $y = f(x)$, M_0T – касательная к нему в точке M_0 , α – угол наклона касательной к оси Ox , тогда если $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

4.1.2. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости неравномерного прямолинейного движения

Пусть материальная точка N движется неравномерно прямолинейно по закону $y = f(t)$



OM – длина пути, $f(t)$ – заданная функция времени t .

Пусть при $t = t_0$ движущаяся точка совпадала с точкой $M_0(y_0)$, $y_0 = f(t_0)$, в момент времени t находилась в точке M .

Приращение пути Δy за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ будет равна

$$\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Средний скоростью V_{cp} движения за промежуток времени Δt называется частное

$$V_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4)$$

Скоростью движения в момент t_0 называется предел отношения (4), когда $\Delta t \rightarrow 0$, т.е

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (5)$$

Эти задачи сведет к понятию производной. В обоих задачах мы вычисляли предел отношения приращению функцию к приращению аргумента, когда последнее стремился к нулю.

В первом задаче этот предел давал угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, а втором задаче этот предел означая скорость движения материальной точки в момент времени $t = t_0$.

4.1.3. Определение производной, ее геометрический и физический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором конечном или бесконечном интервале $X = (a, b)$ и непрерывна на этом интервале.

Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$, такое что $x + \Delta x \in X$, тогда функция $y = f(x)$ получит соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1)$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение дает среднюю скорость изменения функции $y = f(x)$ относительно аргумента x на промежутке $[x, x + \Delta x]$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда $\Delta x \rightarrow 0$ и ее обозначают через $y' = f'(x)$.

Таким образом

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

Отметим, что производная функции $y = f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная из данной функции.

Функция, имеющая производную на множестве X , называется дифференцируемой на этом множестве.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Геометрический смысл производной

Производная $y' = f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$, т.е

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x) \quad (4)$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

Нормалью к кривой в некоторой ее точке называется перпендикуляр к касательной в той же точке.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали к функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (6)$$

Физический смысл производной

Пусть материальная точка движется по закону $s = s(t)$.

Тогда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{cp}$$

означает средний скорость, а $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V$ – мгновенную скорость.

Таким образом, производная $y' = f'(x)$ есть скорость изменения функции $y = f(x)$ в данный момент x .

Производная даст возможность изучить характер изменения функции.

Если $k = f'(x) > 0$, то график функции $y = f(x)$ круге поднимается, а если $k = f'(x) < 0$, то она опускается.

4.1.4. Производные основные элементарные функции

1. $y = f(x) = x^\alpha$, где α – действительное число. $D(f)$ зависит от α .

$$y' = f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \frac{x^\alpha \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Согласно пределу $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, имеем $y' = f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Отметим частные случаи этой формулы:

Если $\alpha = 1$, $y = x$ $y' = 1$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$ $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Если $\alpha = -1$, $y = \frac{1}{x}$ $y' = -\frac{1}{x^2}$

2. Производная логарифмической функции.

$$y = f(x) = \log_a x, a > 1, a \neq 1, x > 0$$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \quad (2)$$

Доказательство.

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Нам известно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$

Тогда $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e$

Поскольку $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$, итак $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

Если $a = e$, то $y = \log_e a = \ln x$ $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

3. Производная $y = f(x) = \sin x$, $x \in R$.

$$y' = f'(x) = (\sin x)' = \cos x \quad (3)$$

Доказательство.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Согласно формула $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Rightarrow y' = f'(x) = 1 \cdot \cos x = \cos x. (\sin x)' = \cos x.$$

4.1.5. Основные правила дифференцирования

1. $y = u \pm v \quad y' = u' \pm v'$
2. $y = u \cdot v \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. $y = Cu \quad y' = Cu'$
4. $y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$

Производная обратной функции

Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции и

$$y'_x \neq 0, x'_y \neq 0, \text{ то } x'_y = \frac{1}{y'_x} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

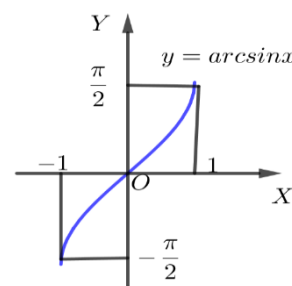
Производная $y = \arcsin x$, где $-1 \leq x \leq 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Обратная функция имеет вид $x = \sin y$, причем

$$x'_y = \cos y \neq 0, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Тогда $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Итак

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Аналогично можно показать, что производная $y = \arccos x$ будет равна

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Производная $y = (\arctg x)$ где $-\infty \leq x \leq \infty$, и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Обратная функция имеет вид $x = \operatorname{tg} y$. Тогда, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Таким образом, $y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}$. Можно показать, что $y' = (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

4.1.6. Таблица производных

1. $y = x^n \quad y' = (x^n)' = nx^{n-1}$
2. $y = \frac{1}{x} \quad y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
3. $y = \sqrt{x} \quad y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = e^x \quad y' = (e^x)' = e^x$
5. $y = a^x \quad y' = (a^x)' = a^x \ln a$
6. $y = \ln x \quad y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $y = \log_a x \quad y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
8. $y = \sin x \quad y' = (\sin x)' = \cos x$
9. $y = \cos x \quad y' = (\cos x)' = -\sin x$
10. $y = \operatorname{tg} x \quad y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
11. $y = \operatorname{ctg} x \quad y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $y = \operatorname{arctg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная от сложной функции. Дифференциал функции.

4.2.1. Производная от сложной функции

Рассмотрим функции $y = f(u)$, $u = g(x)$. Тогда функция $y = f[g(x)]$ называется функцией от функции, или сложной функцией; в этом случае u называют промежуточным аргументом, x – независимой переменной.

Например, $y = f(x) = \sin x$, простая функция а, $y = \sin \sqrt{x+1}$ сложная функция, т.е $y = f(u)$, $u = \sqrt{x+1}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $y = f(u)$, $u = g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(g(x))$ существует и равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу по независимой переменной x , т.е

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x \quad (1)$$

Доказательство. По определению производной $y'_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \text{ где } \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \Delta u \rightarrow 0, \text{ откуда } \Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u \text{ и } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + 0 \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_x$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin(3x + 5)$.

Решение. Данную функцию можно представить так: $y = \sin u$, $u = 3x + 5$.

Поскольку $y'_u = \cos u$, $u'_x = 3$, то формуле (1) имеем

$$y'_x = [\sin(3x + 5)]' = \cos(3x + 5) \cdot 3 = 3 \cos(3x + 5).$$

Пример 2. $y = (3 - 2x)^5$ $y'_x = ?$

Решение. Так как $y = u^5$, $u = 3 - 2x$, $y'_u = 5u^4$, $u'_x = (3 - 2x)' = -2$, то

$$y'_x = [(3 - 2x)^5]' = 5u^4(-2) = -10(3 - 2x)^4.$$

Пример 3. $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ $y'_x = ?$

Решение. $y = \ln u$, $u = \sqrt{x^2 - 1}$; $y'_u = \frac{1}{u}$, $u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$$\text{Итак, } y'_x = \left(\ln \sqrt{x^2 - 1} \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

4.2.2. Дифференциал функции

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала одного из важнейших понятий высшей математики.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда производная этой функции в некоторой точке $x \in [a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \quad (1)$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Из (2) имеем

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (3)$$

Таким образом, приращение Δy состоит из двух слагаемых, из которых первая слагаемое называется главная часть приращения, линейная относительно Δx .

Произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ называют дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначают через

dy или $df(x)$:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (4)$$

Если $y = x$, то $y' = f'(x) = 1$, и следовательно $dy = dx = \Delta x$

$$dy = f'(x)dx \quad (5)$$

4.2.3. Основные свойства дифференциала.

$$1^\circ d(u + v) = du + dv$$

$$2^\circ d(uv) = u dv + v du$$

$$3^\circ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$4^\circ d(Cu) = C du$$

Пример 4. $y = x^2 \cdot \sin x$ $dy = ?$

$$dy = x^2 d \sin x + \sin x dx^2 = x^2 \cdot \cos x dx + \sin x \cdot 2x dx = (x^2 \cos x + 2x \sin x) dx$$

Дифференциал сложной функции $y = f(u)$, $u = g(x)$, то

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx \quad (5)$$

Пример 5. $y = \operatorname{tg}^2 x$ $dy = ?$

$$y = u^2, u = \operatorname{tg} x.$$

$$dy = y'_u \cdot u'_x dx = 2u \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2u du$$

Пример 6. $y = \sin \sqrt{x}$ $dy = ?$

$$y = \sin u, u = \sqrt{x}.$$

Тогда

$$dy = y'_u \cdot u'_x dx = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \cos \sqrt{x} d(\sqrt{x})$$

4.2.4. Геометрическое значение дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и соответствующую ей кривую

$$M(x, y) \quad M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

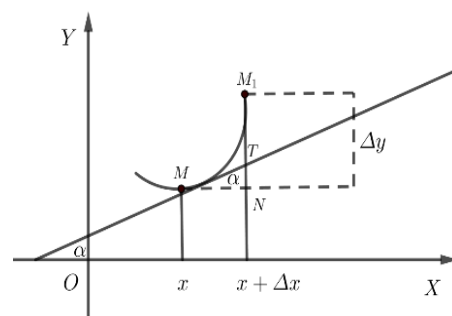
Из треугольника MNT находим

$$\frac{NT}{MN} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x) \Rightarrow$$

$$NT = f'(x) MN = f'(x) \Delta x.$$

Согласно определению дифференциала

$$f'(x) \Delta x = dy.$$



Таким образом, $NT = f'(x)\Delta x = dy$

Итак, дифференциал функции $f(x)$ равен приращению ординаты касательной к графику данной функции, когда аргумент получает приращение Δx .

Это и есть геометрический смысл дифференциала.

Пример 7. Дана функция $y = f(x) = x^2$.

Найти: 1) $dy = f'(x)dx$;

2) dy и Δy при переходе от точки $x=1$ к точке $x + \Delta x = 1,1$ $\Delta x = 0,1$

Решение: 1) $dy = f'(x)dx = 2x dx = 2 \cdot 1 \cdot 0,1 = 0,2$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (1,1)^2 - 1^2 = 1,21 - 1 = 0,21$$

$$\Delta y - dy = 0,01$$

4.2.5. Таблица дифференциалов

1. $dx^n = nx^{n-1}dx$

5. $d(\sin x) = \cos x dx$

9. $de^x = e^x dx$

2. $d(\cos x) = -\sin x dx$

6. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

10. $da^x = a^x \ln a dx$

3. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

7. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

11. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$

4. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$

8. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$

12. $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$

4.2.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Нам известно, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (1)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

Из (1) находим приближенную формулу

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

или

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x)dx$$

или

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)dx \quad (2)$$

С помощью приближенную формулу (2) мы можем вычислить приближенную значения функции в точке $x + \Delta x$.

Пример 8 Вычислить приближенное значение $\arcsin 0,51$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. полагая $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ и применяя формулу (2) имеем:

$$\arcsin(x + \Delta x) \cong \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x$$

$$\arcsin 0,51 \cong \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{0,75}} \cdot 0,01 = 0,513$$

Пример 9.

$$\sqrt[4]{15,8} = \sqrt[4]{16 - 0,2} = \sqrt[4]{16 \left(1 - \frac{0,2}{16}\right)} = 2 \left(1 - \frac{0,2}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cong 2 \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \frac{0,2}{16}} \right] = 2 \left[1 - \frac{0,1}{16} \right] = 1,9938$$

$$3 \sqrt{x_0 + \Delta x} \cong \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \Delta x$$

Производная неявной и параметрически заданной функции.

Производные высших порядков

4.3.1. Производная неявной функции

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

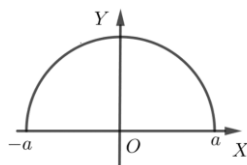
Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) , так, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x , то функция $y = f(x)$ есть неявная функция, определенная уравнением (1).

Например, уравнение

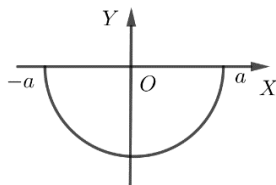
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

неявно определяет следующие элементарные функции

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$$



$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (4)$$



Действительно, после подстановки в уравнение (2) этих значений y получим тождество $x^2 + a^2 - x^2 - a^2 = 0$

выражения (3) и (4) получились путем решения уравнения (2) относительно y . Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно, т.е. можно представить в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ есть элементарная функция.

Например, функция, заданные уравнениями $y^6 - y - x^2 = 0$ или $y - x - \frac{1}{4} \sin y = 0$, не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y .

Правило нахождения производной неявной функции таково:

Дифференцируется обе части заданного уравнения $F(x, y) = 0$ по x , считая, что y есть функция от x т.е. сложной функции.

Например, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, то $2x + 2yy' = 0$ $2yy' = -2x$ $y' = -\frac{x}{y}$

Если будем брать соответствующую явную функцию $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

производную то получим тот же результат. $y' = \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$

Для функции $y^6 - y - x^2 = 0$, $6y^5y' - y' - 2x = 0 \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$

4.3.2. Производная функции, заданной параметрически

Зависимость между переменными x и y иногда удобно задавать двумя уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, (1) где t – вспомогательная переменная

(параметр). Особенно часто этим пользуются в механике, где параметр t обычно обозначает время, а уравнения (1) представляют собой параметрические уравнения траектории движущейся точки $M(x, y)$.

Если функция $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (2)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

Пример 1. $x = x(t) = t^2, y = y(t) = t^3$ $y'_x = ?$

$$x'(t) = 2t \quad y'(t) = 3t^2; \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

$$x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow y = t^3 = (\sqrt{x})^3$$

$$y'_x = \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}t$$

Параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ будет

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Параметрические уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ имеет вид: } x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Пример 2. Функция y от x задана параметрически:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad y'_x = ?$$

$$\text{Решение: } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}$$

4.3.3. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$.

Производная $f'(x)$ представляет собой тоже функции от x . Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной и обозначается y'' или $f''(x)$,

$$(y')' = (f'(x))' = f''(x)$$

Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

Вообще, производной n -го порядка от функции $f(x)$ обозначается символом $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$

Имеет место очевидные формулы:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, (cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}$$

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}$$

Последняя есть формула Лейбница.

4.3.4. Производные различных порядков от неявных функций.

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от неявных функций.

Пример1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad y''_x = ?$

Решение: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x'y - xy'}{y^2} \Rightarrow$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'_x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + x \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{(a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^2 y^3}$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad y''_x = -\frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 b^2}{a^2 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

4.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Правило Лопиталя.

С помощью производной функции $f(x)$ можно получить информацию о поведении функции которые обоснованы в следующих теоремах.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и в точке $x_0 \in [a, b]$ принимает экстремальное значение а также существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля (теорема о корнях производной)

Пусть функция $f(x)$:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема в каждой точке интервала $[a, b]$;
- 3) принимает на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c в которой производная функции равна нулю: $f'(c) = 0$

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) .

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c ($a < c < b$), в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = 0$, т.е

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Таким образом

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа.

4.4.2. Правило Лопиталя. Введение

В теории пределов познакомились понятиями бесконечно малые и бесконечно большие величинами.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ (a – вещественное число или символ ∞), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки a ($a - \varepsilon, a + \varepsilon$), что $|f(x)| < \varepsilon$ при $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Аналогично функция $f(x)$ называется бесконечно большой, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \rightarrow a$. Тогда говорят, что в точке $x = a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет неопределенность, соответственно, вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Требуется вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right) \quad (1)$$

Например:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \left(\frac{0}{0} \right), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

С помощью производные $f'(x)$ и $g'(x)$ можно раскрыть неопределенностей вида (1), которое основано теоремы Лопиталья. (правило Лопиталья)

Теорема 1. (неопределенность $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что:

- 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$;
- 3) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$
- 4) существует (конечный и бесконечный) предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2)$$

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

Доказательство. Докажем для случая $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}. \text{ Переходим пределу когда } x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Таким образом

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ также аналогично доказывается.

Следует отметить, что существуют также неопределенностей вида:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

Упражнения:

1. Найдите производную функции $y = \sin(3x^2 + 6x - 2)$.
2. Найдите производную функции $y = \ln\left(\frac{5}{x^3} - 3\sqrt[4]{x^5} - x + 7\right)$.
3. Найдите производную функции $y = \ln \arcsin 6x$.
4. Найдите в точке $x = 0$ производную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x} + 5}}$ и дифференциал функции в этой точке.
5. Найдите производную функции $f(x) = \frac{\cos 7x}{\sqrt{1 - 3x^4}}$.
6. Найдите производную функции $y = 3^{\lg x} \cdot \sin 5x$.
7. Найдите производную функции $y = 5^{\arctg x}$.
8. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sqrt[3]{x} - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 8$.
9. Для производственной функции $y = x \ln(x^3 + 1)$ определите предельную эффективность ресурса при $x = 1$.
10. Для производственной функции $y = x \ln(x^3 + 1)$ найдите эластичность $E_x(y)$ при $x = 1$.
11. Найдите производную $\frac{dy}{dx}$ функции $x^3 y + y^4 - x - 7 = 0$ в точке $M_0(2; 1)$.

Глава V. Исследование функций с помощью производной

5.1.1. Условие постоянства функции

Нам известно, что если функция $f(x)$ на каждой точке интервала (a, b) принимает одно и те же значение то она будет постоянной в этом интервале.

Например, $y = f(x) = 2, x \in R$ постоянная.

Постоянность функции можно определить с помощью производной которая имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функции $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b) .

Для того, чтобы эта функция была постоянной на интервале (a, b) , необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) = 0$, для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ постоянная на (a, b) , то $f'(x) = 0, x \in (a, b)$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a, b), x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2$.

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0, x_1 < c < x_2,$$

т.е. значения функции в двух любых точках интервала совпадают, следовательно, $f(x) = \text{const}$.

5.1.2. Условия монотонности функции

На практике приходится иметь дело с функциями более сложного вида. Вообще, нахождения интервалы монотонности функции на заданном множестве основано на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b) . Для того, чтобы эта функция была монотонно возрастающей на интервале (a, b) (монотонно убывающей в этом интервале) необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (a, b)$ ($f'(x) \leq 0$ для $x \in (a, b)$).

Доказательство. Необходимость.

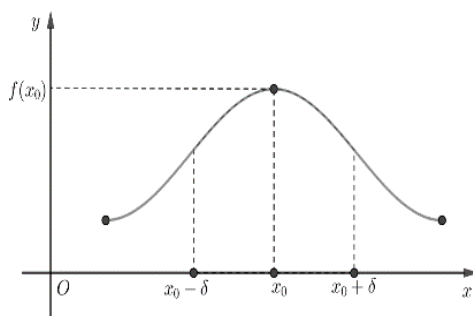
Если $f(x)$ монотонно возрастает, то для любых $x, x + \Delta x \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ выполняется

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

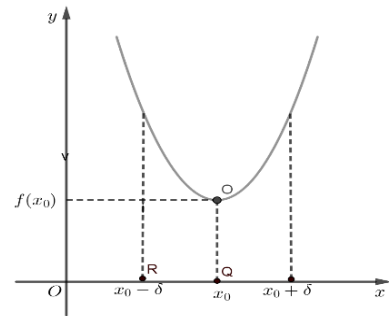
Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0, x \in (a, b)$ $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b), x_2 \geq x_1$. Тогда по формуле конечных приращений Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0, x_1 < c < x_2$, т.е $y = f(x)$ монотонно возрастает на (a, b) .

5.1.3. Экстремумы функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $x_0 \in X$ вместе с некоторой своей δ -окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$



max



min

Определение 2. Точка x_0 называется точкой (строго) минимума функции $f(x)$ ($f(x)$ имеет минимум в точке x_0), если для любого x из δ -окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$

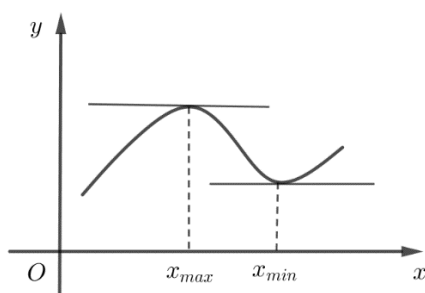
Максимум и минимум функции называют общим названием экстремум, а точка x_0 — точки экстремума.

Необходимое условие экстремума

Необходимые условия существования экстремума дает теорема Ферма.

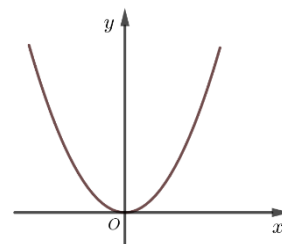
Теорема (Ферма). Если точка x_0 является $y = f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке экстремума x_0 , параллельно оси абсцисс.



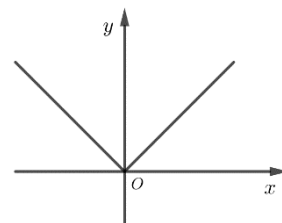
Определени 3. Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называется критическими точками (первого рода).

Пример 1. Производная функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 0$ обращается в нуль и в этой точке она имеет экстремум (минимум).



Пример 2. Производная функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ обращается в нуль, а экстремум в этой точке функция не имеет.

Пример 3. Функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной. Однако, в точке $x_0 = 0$ она имеет экстремум (минимум)



Таким образом, экстремум функции, если он существует, может быть только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

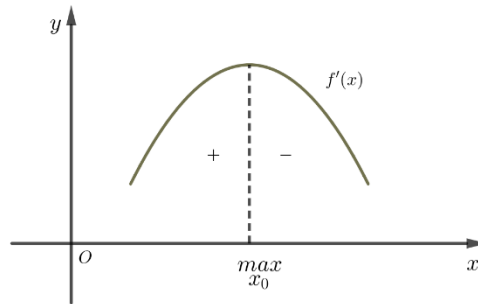
Критичность точки есть необходимое, но недостаточное условие экстремума функции.

Достаточные условия экстремума функции

Теорема 3. (Первое достаточное условие)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в некоторой ее δ -окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки x_0 . Тогда

- 1) если производная $f'(x)$ при переходе через точки x_0 меняет знак с плюса(+) на минус(-), то x_0 является точкой максимума.



- 2) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса (-) на плюс (+), то x_0 является точкой минимума.
- 3) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Теорема 4.(второе достаточное условие)

Если функция $y = f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение: 1) Находим производную $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right)' = x^2 - 4x + 3$

- 2) Решая уравнения $f'(x) = 0$ т.е $x^2 - 4x + 3 = 0$, находим критические точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

3) Находим вторую производную: $f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right)'' = 2x - 4$

- 4) Определим знак второй производной в критических точках $f''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$ $f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$ значить точка $x_1 = 1$ – точка максимума, а $x_2 = 3$ – точка минимума.

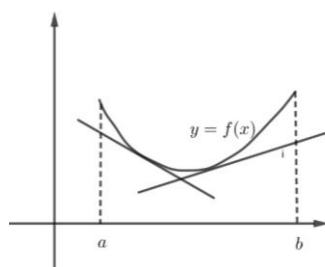
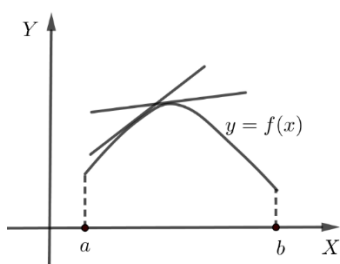
$$y_{\max} = f(1) = -2 \frac{2}{3} \quad y_{\min} = f(3) = -4.$$

5.1.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Выпуклость графика функции.

При исследовании поведения функции и формы ее графика, полезно установить, на каких интервалах график функции обращен выпуклостью вверх, а на каких-выпуклостью вниз.

Определение 1. График функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вверх, если он расположен не выше любой касательной, пройденной на этом интервале



Определение 2. График функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз, если он расположен не ниже любой касательной, пройденной на этом интервале.

Для более сложных функций определить выпуклость по определениям 1 и 2 будет сложным. Окажется с помощью производной функции легче определить выпуклость ее которую основано на следующей теореме.

Теорема 1. (Достаточное условие выпуклости графика функции).

Пусть функция $y = f(x)$, имеет на интервале (a, b) вторую производную $f''(x)$.

Если $f''(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, то её график имеет на этом интервале выпуклость, направленную вниз, а $f''(x) \leq 0$, то она имеет выпуклость направленную вверх.

Отметим, что $f''(x)$ может менять свой знак лишь в точках, где обращается в нуль, или в точках, где $f''(x)$ не существует.

Определение 3. Точки x которые производная $f''(x)=0$, либо не существует называется критическими точками второго рода.

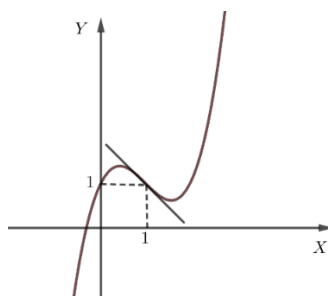
Пример 1. Исследовать на выпуклость график функции
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

Решение. $D(f) = R$. Находим критические второго рода

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, \quad f''(x) = 6x - 6. \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Исследуем интервалы $(-\infty; 1)$ и $(1; \infty)$. Методом пробных точек определяем знак $f''(x)$ в этих интервалах: $x = 0 \in (-\infty, 1)$ $f''(0) = -6 < 0$, $x = 2 \in (1, \infty)$, $f''(2) = 6 > 0$.

Итак в точке $x = 1$ производная $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, на интервале $(-\infty, 1)$ график выпуклен вверх, а на интервале $(1; \infty)$ – выпуклостью вниз.



Точки перегиба

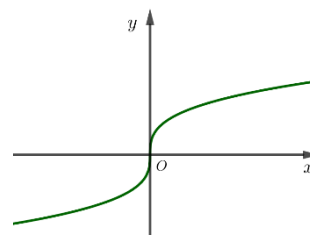
Определение 4. Точка графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба.

Согласно определению в точке перегиба касательная к графику функции с одной стороны расположена выше графика, а с другой – ниже, т.е. в точке перегиба касательная пересекает кривую.

1. Необходимое условие точки перегиба.

Теорема 2. Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, и пусть в точке x_0 существует непрерывная вторая производная $f''(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$

Замечание. Точка перегиба может быть также точка $(x, f(x))$, в которой $f''(x)$ не существует. Например функция $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке $(0,0)$, но в точке $x=0$ $f'(x)$ и $f''(x)$ не существует.



2. Достаточное условие точки перегиба

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ $x \in (a; b)$ дважды дифференцируема и $x_0 \in (a; b)$ критическая точка второго рода. Если при переходе через $x_0 \in (a; b)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в $(a; b)$, то существует касательная в точке $x_0 \in (a; b)$. Пусть $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$.

Тогда при $x < x_0$ график функции обращен выпуклостью вниз, а при $x > x_0$ – выпуклостью вверх. Таким образом, точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Решение. Находим $f'(x) = x^2 - 4x + 7$, $f''(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ т.е $x = x_0 = 2$ – критическая точка второго рода.

Проверим знак $f''(x)$ в интервалах $(-\infty; 2)$ и $(2; \infty)$. Берем контрольную точки $x = 0 \in (-\infty; 2)$ и $x = 3 \in (2; \infty)$. $f''(0) = -4 < 0$, $f''(3) = 2 > 0$. Значит, точка кривой с абсциссой $x = 2$ является точкой перегиба.

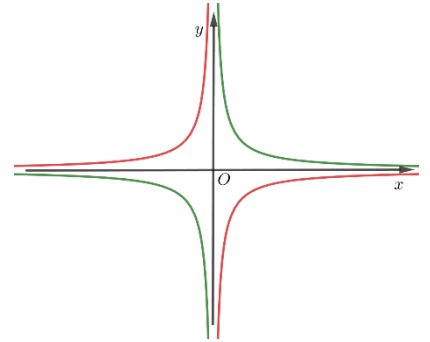
Находим ординату точки перегиба: $f(2) = 4\frac{2}{3}$. Таким образом, точка $\left(2; 4\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба графика данной функции, причем на интервале $(-\infty; 2)$ функция обращена выпуклостью вверх, а на интервале $(2; \infty)$ – выпуклостью вниз.

5.1.5. Асимптоты графика функции

С ростом аргумента x к бесконечности ($x \rightarrow \pm\infty$) график функции $y = f(x)$ сколь угодно близко приближается к некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой графика функции $y = f(x)$. Например функция

$y = f(x) = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$, k – постоянная имеет два

асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. Её график будет гиперболой которая при $x \rightarrow \pm\infty$ приближается к прямыми $x = 0$ (осью Oy) и $y = 0$ (осью Ox).



Асимптоты графика функции бывают:
Наклонной, горизонтальной и вертикальной.

Определение 5. (наклонная асимптота). Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

Отсюда

$$f(x) - kx - b = \alpha(x) \quad (1)$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Из (1) имеем

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b + \alpha(x)}{x}, \quad b = f(x) - kx - \alpha(x) \quad (2)$$

Из (2) вытекает, что

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad (3)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \quad (4)$$

Аналогично определяется и находится асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Очевидно, что если $k = 0$, то уравнение асимптоты примет вид

$$y = b \quad (5)$$

Определение 6. (горизонтальная асимптота)

Асимптота, определяемая уравнением (5), называется горизонтальной асимптотой.

Определение 7. (вертикальная асимптота)

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$$

Отметим, что прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ только в случае, когда точка $x = a$ – точка разрыва второго рода этой функции.

Пример 3. Найти асимптоты кривой $y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = -\infty$$

то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Чтобы найти наклонной асимптоты находим k и b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 1}{(x - 2)} = 2$$

Итак, $y = x + 2$ является наклонной асимптотой данной функции при $x \rightarrow \pm\infty$

Таким образом, данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную

$$y = x + 2.$$

5.1.6. Общая схема исследования функций и построения графиков

Схема:

1. Найти область определения функции;
2. Найти нечетность и четность
3. Проверить периодичность
4. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва
5. Найти критические точки первого рода

6. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции
7. Найти критические точки второго рода
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба
9. Найти асимптоты графика функции
10. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно)
11. Построить график функции.

Упражнения:

1. Найти частные производные функции:

а) $z = xy + 5y^2 + 6x^3$;

б) $z = x^2y^3 - 15y^2 - 26x$;

в) $z = \sqrt{x^3 + y^5} \cdot (x^2 - y^3)^2$;

г) $z = \frac{e^{x^3} + y}{x^8}$.

2. Найти полный дифференциал функции:

а) $z = \sin^3(x + 6y^2)$;

б) $z = \frac{xy^2 + 9}{x^2 + y}$.

3. Найти экстремумы функций:

а) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x - 6y + 1$;

б) $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$.

Глава VI: Определение комплексных чисел и операции над ними.

6.1.1. Введение

В современной математике, а также ряд разделов физики и техники (электротехнике, электронике, механике, гидродинамике, аэродинамике и др.) Помимо действительных чисел используются числа более общей природы, которые называются комплексными числами.

В истории развития математики комплексные числа первоначально возникла в связи с решением алгебраических уравнений.

Как известно, действительные корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (2)$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет два корня. Если же $D < 0$ уравнение (1) в множестве действительных чисел не имеет решений.

Например уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$ $D = 4 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$. Значит, для этого уравнения формула (2) неприменима. Следовательно, тот факт, что из отрицательного числа нельзя извлечь квадратный корень, не может еще служить причиной для введения в математике новых чисел.

Теперь рассмотрим уравнения третьей степени

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

При помощи подстановки $y = x - \frac{a}{3}$ получим

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) в XVI веке была найдена формула Кардано (итальянский математик (1501-1576))

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D_1}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D_1}} \quad (4)$$

$$\text{где } D_1 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Если $D_1 \geq 0$, то уравнения (3) имеет один корень, а если $D_1 < 0$, то оказывается оно не имеет действительных корней.

Если же $D_1 < 0$, то извлечение квадратного корня из D_1 становится невозможным, тем не менее уравнение (3) в этом случае имеет три действительные корни.

Пример 1. Найти куб, объем которого на четыре единицы меньше полусуммы его ребер.

Решение: Обозначим через x длину ребра искомого куба, его объем будет x^3 , а полусумма ребер $6x$. Приходим уравнению $x^3 + 4 = 6x$,

$$x^3 - 6x + 4 = 0 \quad (5)$$

$p = -6$ $q = 4$. Тогда по формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Думается, что уравнение не имеет действительных корней, однако уравнение (5) имеет три действительных корня: $x_1 = 2$ $x_2 = -1 + \sqrt{3} \approx 0,73$ $x_3 = -1 - \sqrt{3} \approx -2,73$ условию задачи удовлетворяет первые два корня.

Таким образом, для расширения понятия действительного числа вели новую числу $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

6.1.2. Определение комплексных чисел. Сложение и вычитание

Определение 1. Комплексным числом называется выражение $a + bi$, где a и b действительные числа, а i – называется мнимой единицей.

Запись $a + bi$, называется алгебраической формой комплексного числа.

Если $z = a + bi$, то a – называется действительной частью, а b – мнимой частью комплексного числа z и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Определение 2. Комплексные числа $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ называются равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Определение 3. Суммой комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z = (a + c) + (b + d)i$.

$$z = z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (1)$$

Разность комплексных чисел z_1 и z_2 имеет вид:

$$z = z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i \quad (2)$$

Определение 4. Произведением комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (3)$

Пример 1. $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 2i$. Найти

$$z = z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(-4 + 2i) = -8 + 4i + 12i - 6i^2 = -8 + 16i + 6 = -2 + 16i.$$

Определение 5. Частным комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$

называется комплексное число

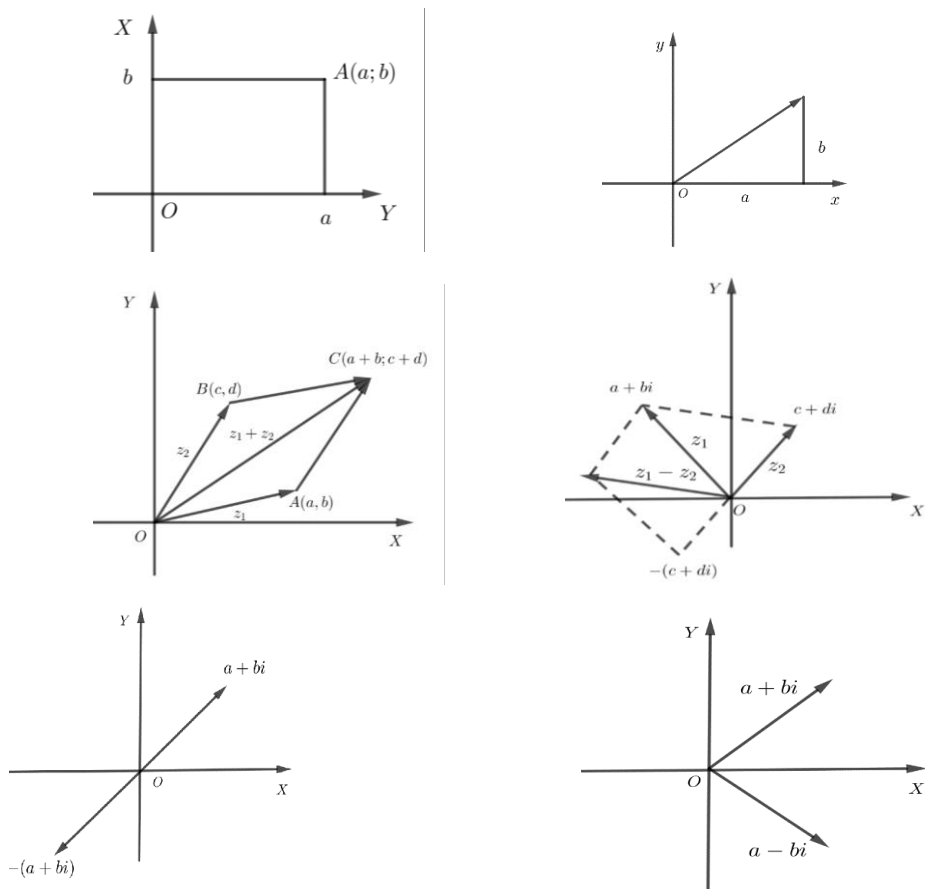
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (4)$$

Пример 2. $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 1 + 2i$. Найти $z = \frac{z_1}{z_2} = ?$

Решение. $z = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 4i - 3i + 6i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{-4 - 7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

6.1.3. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Каждое комплексное число $a + bi$ геометрически изображается на плоскости как точка $A(a; b)$ или как вектор $\overrightarrow{OA}$ с началом в начале координат и с концом в точке $A(a; b)$.



6.1.4. Модуль и аргумент комплексного числа

Определение 1. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина (модуль) соответствующему вектора.

Модуль обозначается символом $|z|$ или через r . $|z| = r \geq 0$.

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

Если $z = a + 0 \cdot i$ – действительное число, то $|z| = r = \sqrt{a^2} = |a|$,

Аналогично, если $z = bi = 0 + bi$, то $|z| = r = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$

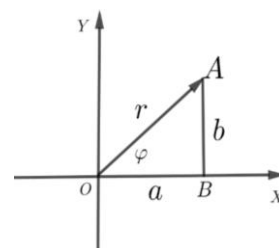
В частности, $|\pm i| = |\pm 1| = 1$

Пример 1. $z = 4 - 3i$ $|z| = r = ?$ $|z| = r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

Множество всех чисел z , для которых $|z| = r$, представляет окружность радиусом r с центром в начале координат.

Аргумент комплексного числа.

Определение 2. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется величина любого направления угла, образованного положительным направлением с оси Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$, соответствующим числу z .



Аргумент числа z обозначается символом $\arg z$ или $\varphi = \arg z$. Числа r и φ могут быть рассмотрены как полярные координаты точки $z = a + bi$.

Из $\triangle OAB$ имеем

$$\frac{a}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi \quad (2)$$

По формулам (2) можно найти значение аргумента φ . В зависимости точка $z = a + bi$ каком квадранте находится аргумент определяется по формулам

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, a > 0, b > 0 \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{-a}, a < 0, b > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, a < 0, b < 0 \\ 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{-b}{a}, a > 0, b < 0 \end{cases}$$

6.1.5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из (2) имеем

$$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi \quad (3)$$

При помощи формул (3) можно перейти от алгебраической формы $z = a + bi$ комплексного числа к новой записи комплексного числа

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (4)$$

Полученное выражение называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел и записать их в тригонометрической форме.

$$z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_4 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{-a} = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\varphi_3 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

$$\varphi_4 = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{-b}{a} = 2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ$$

6.1.6. Умножение и возведение в степень комплексных чисел заданными в тригонометрической форме

1. Умножение. Пусть даны комплексные числа

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и}$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Для произведения этих чисел имеет место следующее формула:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1)$$

Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Следовательно,

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Пример 1. $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \right] = 6 \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}.$$

2. Возведение в степень.

Если комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ самому себя умножаем n раз, то получим

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (2)$$

Формула (2) называется формулой Муавра (1667-1754)-английский математик.

Таким образом, чтобы возвести комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль r , а аргумент умножить на показатель степени.

Пример 2. Вычислить $(1+i)^{10}$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму числа $1+i$.

$$a = b = 1 \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$(1+i)^{10} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) =$$

$$= 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = 32(0 + i) = 32i$$

3. Деление.

Пусть даны комплексные числа

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Для частного этих чисел имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (3)$$

Итак, модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей, а аргумент частного равен разности аргументов.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\left| r_1 \right|}{\left| r_2 \right|} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Пример 3. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ и

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

Найти частное

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(-\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(2\pi - \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{7\pi}{12} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right] \end{aligned}$$

6.1.7. Извлечение корня из комплексного числа

Определение 1. Корнем n -й степени, $n \in N, n \geq 2$, из числа z называется любое комплексное число w , для которого

$$w^n = z \Rightarrow w = \sqrt[n]{z} \quad (4)$$

Для извлечения корня n -й степени имеет место формула

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[3]{1+i}$

Решение. $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$$w_k = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad w_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right), \quad w_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

6.1.8. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (6)$$

Это формула Эйлера.

Показательная форма комплексного числа имеет вид:

$$z = r e^{i\varphi} \quad (7)$$

Упражнения:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$.

Найти число $z = \frac{(z_1 + z_3) \cdot \bar{z}_2}{z_3}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

а) $z_1 = 2 - 2i$; б) $z_2 = -i$; в) $z_3 = \sqrt{3} + i$.

3. Решить уравнения

а) $x^2 + 4x + 5 = 0$; б) $x^2 + 9 = 0$.

4. Ток меняется по закону $i = 90 \sin(\omega t - \frac{5\pi}{6})$ А. Найти комплексную амплитуду

$\dot{I}$ тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

Глава VII. Неопределенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл

Введение

Нам известно из школьной математики что математические действия будут по парам и взаимно и обратными действиями. Например сложение и вычисления, умножения и деления, возведения в степень и извлечение корня и так далее.

В предыдущем семестре мы познакомились действием или понятием производная функции. Для нахождения производной существует обратная действия интегрирование или первообразной функции.

Теперь нам будет известно производная функции и по этим производным найти такую функцию $F(x)$ которая производная ее будет равна $f(x)$, т.е.

$$f(x) = F'(x), \quad x \in R.$$

Например $f(x) = 2x, x \in R$, то $F(x) = x^2, x \in R$.

Таким бразом по известным производным нахождение первоначальную функцию принято называт первообразную функцию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $X \in (a, b)$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $f(x)$ является производной для $F(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

или

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Первообразная определена неоднозначно:

Например, для $f(x) = 2x, F(x) = x^2, x \in R$ но можно показать, что $H(x) = x^2 - 1, G(x) = x^2 + 3$ также является первообразными для $f(x) = 2x, x \in R$.

Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим следующие свойства первообразной.
Свойства первообразной.

1°. Если функция $F(x)$ -первообразная для функции $f(x)$ на интервале X , то функция $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале.

$$\text{Доказательство:} \quad F'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$$

потому что $C' = 0$

2°. Если функция $F(x)$ -некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X = (a, b)$, то любая другая функция первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная на X .

Доказательство: Так как функции $F(x)$ и $F_1(x)$ – первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = F_1'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) - F_1(x))' = 0$

Нам известно, что производная функция будет равен нулю, если она будет постоянной.

Поэтому из последнего вытекает $F(x) - F_1(x) = C$ или $F_1(x) = F(x) + C$.

3°. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство

$$dF(x) = f(x)dx$$

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ – некоторая первообразная функция $f(x)$ на интервале X , то всё множество первообразных функции $f(x)$ на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, C – произвольная постоянная.

7.1.2. Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Итак, если $F(x)$ – некоторая первообразная функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла:

$$1^\circ. \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$2^\circ. d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

$$3^\circ. \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$$

$$4^\circ. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ где } k - \text{постоянная}$$

$$5^\circ. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\text{Например } \int (2x + x^2)dx = \int 2x dx + \int x^2 dx = x^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

7.1.3. Таблица неопределенных интегралов

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + m} \right| + C, m - \text{пост.ч}$$

$$14. \int \sqrt{x^2 + m} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + m} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 + m} \right| + C$$

$$15. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| + C.$$

7.1.4. Простейшие правила интегрирования

1) Подведение под знак дифференциала постоянного слагаемого:

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+a)dx = F(x+a) + C$ (a – постоянная)

Например: $\int \cos(x+3)dx = \int \cos(x+3)d(x+3) = \sin(x+3) + C$

2) Подведение под знак дифференциала постоянного множителя:

если $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

Например: $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$

Вообщее имеет место формулы: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ a, b – постоянная.

7.1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле (интегрирование подстановкой)

Этот способ интегрирование основано на производную сложной функции.

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Если $x = g(t)$ то получим

$$\int f[g(t)]dg(t) = \int f[g(t)]g'(t)dt = F[g(t)] + C \quad (3)$$

$$F'[g(t)] = f[g(t)]$$

Действительно, $[F(g(t))]' = f[g(t)]g'(t)$. Итак $F[g(t)]$ является первообразной для $f(g(t))g'(t)$, т.е.

$$\int f[g(t)]dg(t) = F[g(t)] + C$$

Пример 1. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$

Пример 2. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

Теперь сделаем замены переменной

$$\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin t \Rightarrow dx = d(\arcsin t) \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ итак,

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C$$

7.1.6. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям основано на нахождении производную Опроизведению.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции имеющие непрерывные частные производные.

Тогда по формуле дифференцирования произведения имеем:

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

Находим неопределенные интегралы для обеих частей этого равенства

Поскольку $\int d(uv) = uv + C$, то

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \quad (4)$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям

Пример 3: $\int x \sin x dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \int dv = \int \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\int x \sin x dx = (uv - \int v du) = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Пример 4: $\int \ln x dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x dx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

Метод интегрирование по частям применяются интегралом вида $\int P(x) f(x) dx$, где $P(x)$ – многочлен, а

$$f(x) = \{\sin ax, \cos ax, a^x, e^{ax}, \ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x\}$$

При вычисление этого вида интеграла имеет место два случая:

1-случай. Если $f(x) = \{\sin ax, \cos ax, a^{mx}, e^{ax}\}$, то в качестве $u = u(x)$ берут многочлен $P(x)$

$$\text{т.е. } u = P(x) \quad dv = f(x) dx.$$

2-случай. Если $f(x) = \{\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \operatorname{arcctg} x\}$, то в этом случае в качестве

$u = u(x)$ удобно взять $u = f(x), dv = P(x)dx$

Пример 1. Вычислит интеграл. $\int x \cos x dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow$

$$\int x \cos x dx = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Пример 2. Вычислит интеграл $\int x \ln x dx$.

$$\int x \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int x \ln x dx = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Замечание. Отметим, что в некоторых случаях при вычисление исходного интеграла этот метод применяется несколько раз.

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

7.2.1. Интегрирование рациональных дробей

Можно показать, что не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающейся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Пусть заданы многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ или целые рациональные функции со степенями n и m соответственно, т.е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

где $a_i, b_j, (i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m})$ – числа которые называются коэффициентами многочленов.

Дробью вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – называют дробно рациональная функция или просто рациональный дробь. Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Если $n < m$, то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – называется правильным, в противном случае т.е. $n > m$, то она называется неправильным. Всякая неправильной дробь можно представить в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } k < m.$$

Например,
$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$$

Таким образом, интегрирование неправильную дробь сводятся к интегрированию правильной дроби.

1. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$

III. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad (D=b^2-4ac < 0)$

IV. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} \quad (D=b^2-4ac < 0), \quad k - \text{целое положительное число, } k \geq 2$

Называются простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Дробей типа I, II, III и IV легко интегрируется:

I.
$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{Ad(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + B - A\frac{b}{2a}}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \\ &+ \left(B - A\frac{b}{2a} \right) \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]} = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{\left(B - A\frac{b}{2a} \right)}{ak} \operatorname{arctg} \frac{\left(x + \frac{b}{2a} \right)}{k} \end{aligned}$$

где $k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа.

Рассмотрим интеграл этого типа, т.е.

$$\text{IV.} \quad \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} dx$$

Сделаем преобразования:

$$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - A\frac{b}{2a}. \text{ Тогда}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^k} dx + \left(B - \frac{A}{2a} \cdot b \right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Второй интеграл обозначим через I_k .

Первый интеграл вычисляется подстановкой $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (2ax+b)dx$

$$\frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{t^k} = \frac{A}{2a} \int t^{-k} dt = \frac{A}{2a} \cdot \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{2a} \cdot \frac{1}{(-k+1)(ax^2+bx+c)^{k-1}} + C$$

Теперь покажем как интегрируется второй интеграл т.е. I_k .

$$I_k = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{1}{a^k} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right]^k}$$

Обозначим $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, $m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{a^k} \int \frac{dt}{[t^2 + m^2]^k} = \frac{1}{a^k m^2} \int \frac{[t^2 + m^2 - t^2] dt}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{a^k m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^k m^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} \end{aligned}$$

Интегрируя второй интеграл по частяммы получим рекуррентную формулу:

$$I_k = \frac{1}{2a^k m^2 (k-1)} \cdot \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^k m^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}.$$

После $(k-1)$ -кратного применения этого формула интеграл I_k сводится к табличному

$$\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C$$

Рассмотрим пример для интеграла IV типа.

Пример 1. $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

Решение. $n = 2$. Применим рекуррентную формулу

$$I_k = \frac{1}{2a^2 m^2 (k-1)} \cdot \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2 m^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_1.$$

В нашем примере $a = 1$, $m = 1$, $k = 2$

Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 2. $I_2 = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$

$$3x+2 = \frac{3}{2}(2x+2) + 2-3 = \frac{3}{2}(2x+2) - 1$$

$$I_k = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+3^2]^2} + C = -\frac{3}{2} \frac{1}{(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \frac{x+1}{x^2+2x+10} -$$

$$-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} = -\frac{3}{2} \frac{1}{(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C$$

Всякая рациональная дробь вида $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде сумму простейших дробей, которые оно зависеть корнями $Q_m(x)$.

Возможны следующие случаи:

1-случай. Корни $Q_m(x)$ действительны и различны, т.е.

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b) \cdots (x-d)$$

Тогда

$$\frac{R_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}$$

Например:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

2-случай Корни $Q_m(x)$ действительные, причем некоторые из них крайные:

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdots (x-d)^\delta$$

Например:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3 \cdot (x-3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-3}$$

3-случай. Среди корней $Q_m(x)$ есть комплексные и различные

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q) \cdots (x^2 + lx + s)(x-a)^\alpha \cdots (x-d)^\delta$$

Например:

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

3-случай. Среди корней $Q_m(x)$ есть комплексные кратные:

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q)^\alpha \cdots (x^2 + lx + s)^\beta (x-a)^\gamma \cdots (x-d)^\delta$$

Например:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$x^3-2x = Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^3-2x = Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

$$x^3+0 \cdot x^2+2x+0 = Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^3|1 = C \Rightarrow C = 1$$

$$x^2|0 = D \Rightarrow D = 0$$

$$x|-2 = A+C \Rightarrow A = -3$$

$$x^0|0 = B+D \Rightarrow B = 0$$

Итак

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{x}{(x^2 + 1)} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C\end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$

Решение. $\frac{R_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

Поскольку $Q_3(x) = (x-1)(x-2)(x-4) = 0$ т.е. знаменатель имеет три различных корни $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 4$

Тогда согласно случай 1 имеем:

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)$$

В последнем равенстве полагая, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 4$ мы находим коэффициенты $A = 3$, $B = -7$, $C = 5$ соответственно.

Таким образом

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx &= \int \frac{3dx}{x-1} - \int \frac{7dx}{x-2} + \int \frac{5dx}{x-4} = \\ &= 3 \ln |x-1| - 7 \ln |x-2| + 5 \ln |x-4| + C = \ln \frac{|x-1|^3 |x-4|^5}{|x-2|^7} + C\end{aligned}$$

7.2.2. Интегрирование иррациональных выражений

1. Интеграл вида $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$

В этом интеграле удобно подстановка

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t^n = ax+b \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t^n - b) \Rightarrow dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt.$$

$$\int \sqrt[n]{ax+b} dx = \int t \frac{n}{a} t^{n-1} dt = \frac{n}{a} \int t^n dt =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{a} t^{n+1} + C = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{a} t \cdot t^n + C =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{a} [(ax+b)^n \sqrt[n]{ax+b}] + C$$

2. Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Интегрируется с помощью дополнения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ до полного квадрата и сводятся к одному из двух интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Нам известно что

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \text{ и } (x = a \sin t)$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C \quad (\sqrt{a^2 + x^2} = t - x)$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x \Rightarrow a^2 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (2t - 2x)dt - 2tdx \Rightarrow (2t - 2x)dt = 2tdx \Rightarrow (t - x)dt = tdx$$

$$\frac{dx}{(t-x)} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$

$$\text{Из } \sqrt{a^2 + x^2} = t - x \Rightarrow t = x + \sqrt{a^2 + x^2}.$$

$$\text{Имеем табличный интеграл } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$\text{Пример 2. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} \Rightarrow$$

Согласно интегралу (2) имеем

$$\ln |(x-3) + \sqrt{(x-3)^2 + 4}| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 - 6x + 13}| + C$$

3. Интеграл вида $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

В этом интеграле удобно подстановка $x = a \sin t$ и можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] + C \quad (3)$$

4. Интеграл вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Этот интеграл путем замены $t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)'$ сводятся к интегралу

$$\int \frac{Dt + E}{\sqrt{kt^2 + m}} dt$$

Пример 3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$

Решение. $t = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)' = x + 2 \Rightarrow x = t - 2 \Rightarrow dx = dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{(t-2)dt}{\sqrt{(t-2)^2 + 4(t-2) + 5}} = \int \frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2 \ln |x^2 + 4x + 5| + C$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x + \frac{1}{2})^2}} = \arcsin \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \arcsin \frac{2x + 1}{\sqrt{5}} + C,$$

где

$$F(x) = \arcsin \frac{2x + 1}{\sqrt{5}} \quad F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x - x^2}}$$

7.2.3. Интегрирование тригонометрических выражений

1. В приложениях важное значение имеют интегралы

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \quad (1)$$

где m и n целые неотрицательные числа.

Здесь различают два случая:

Случай 1. Если хотя бы один из показателей m и n есть число нечетное, то они интегрируются непосредственно.

Пример 5. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

Решение. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

Пример 6. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$

Решение. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin x) dx = - \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot d(\cos x) \Rightarrow$

$$- \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot d(\cos x) = - \int \cos^2 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

Случай 2. Если оба показателя m и n есть числа четные, то для вычисления интеграла (1) используют формулы двойного аргумента

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad \text{и} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

Пример 7. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Решение. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) = \frac{1}{16} \int 1 dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \end{aligned}$$

2. В теории рядов Фурье важное значение имеют интегралы вида

$$\int \sin ax \cdot \sin b x dx,$$

$$\int \cos ax \cdot \cos b x dx,$$

$$\int \sin ax \cdot \cos b x dx.$$

Эти интегралы вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Пример 8. $\int \sin x \cdot \sin 5x dx$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 4x dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \end{aligned}$$

3. Интегралы вида $\int tg^m x dx$ и $\int ctg^m x dx$ вычисляются с помощью замены

$$tg x = t \Rightarrow x = arctg t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Пример 9. $\int tg^2 x dx$

Решение.

$$\int tg^2 x dx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt = t - arctg t + C = tg x - x + C$$

4. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$,

где R рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. В таких интегралах удобно сделать подстановки

$$tg \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg t \Rightarrow x = 2 arctg t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример 10. $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t^2}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \Rightarrow \int \frac{1}{\frac{2t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{tg \frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

Упражнения:

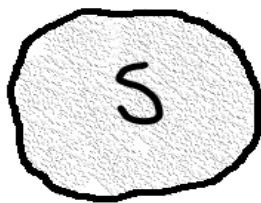
В задачах 1-3 найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)} dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int 6x^2 \arctg 2x dx$.
2. а) $\int \frac{2x^4+9x^3+3x^2+27}{x^3+6x^2+9x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$; в) $\int x \ln(x^2 + 2) dx$.
3. а) $\int \frac{7x^3+40x-96}{2x^4+5x^3-12x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$; в) $\int x^2 \cos 4x dx$.

Глава VIII. Определенный интеграл

Введение

Интегралы имеют широкое применение в экономике, технике, сельском хозяйстве и других отраслях науки. Например, с помощью определенного интеграла можно найти площадь произвольной плоской фигуры, объем произвольного тела, длина криволинейной линии, пройденный путь в определенной времени неравномерно движущуюся материальной точки (автомобиль, поезд, самолет и др) и так далее.



Поэтому Дифференциальные и интегральные исчисления курса Высшей математики имеют важное значение.

8.1.1. Определение определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ ($b > a$) задана непрерывная функция принимающая на этом отрезке неотрицательные значения: $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$.

Рассмотрим задачу вычислить площадь S трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху функцией $y = f(x)$, которое сведет к определению определенного интеграла.

Для решения этой задачи:

1) разобьём отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$; длину i -го отрезка обозначим Δx_i , где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$; максимальную из этих отрезков обозначим λ ; $\lambda = \max_i \Delta x_i$.

2) на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i , и вычислим значение функции $f(x)$: $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$.

3) составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Сумма S_n называется интегральной суммой.

Определение 1 (Определение определенного интеграла)

Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм S_n при $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), не зависящей ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i , то функция $f(x)$ называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx$$

где $f(x)$ – подинтегральная функция, числа a и b – соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Вывод. Если предел (2) существует, то функция $f(x)$ будет интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теперь сформулируем теорему о существовании определенного интеграла.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ либо имеет конечное число разрыв I-го тура на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по этому отрезку.

8.1.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху графиком функции $f(x)$.

Итак
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Приведем пример вычисления значения определенного интеграла по вышеприведенному определению определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной снизу с осью Ox , слева и справа прямыми $x = 0$ и $x = 1$, сверху функцией $y = x^2$.

Решение. 1) разделим отрезок $[0, 1]$ на n равных частей с точками

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1$$

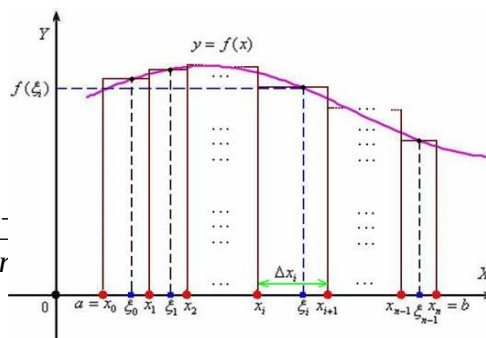
Длину i -го отрезка обозначим через Δx_i , где $\Delta x_i = \left[\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right] = \frac{1}{n}$

2) на каждом отрезке выберем точки ξ_i середины этого отрезка т.е

$$\xi_i = \frac{\frac{i}{n} + \frac{i+1}{n}}{2} = \frac{2i+1}{2n}, \quad i = \overline{1, n}$$

3) составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2i+1}{2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$



$$= \frac{1}{4n^2} \cdot \frac{1}{n} [1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2] = \frac{1}{4n^3} \cdot \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{(1+\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n})}{3}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3}$$

8.1.3. Физический приложения определенного интеграла

Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур.

Пусть на плоскости XOY задана система материальных точек

$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. *Статическим моментом*

M_x этой системы относительно оси Ox называется сумма произведений масс

этих точек на их ординаты: $M_x = \sum_{k=1}^i m_k y_k$. Аналогично (как сумма

произведений масс точек на их абсциссы) определяется статический момент

системы оси Oy : $M_y = \sum_{k=1}^i m_k x_k$.

Моментами инерции I_x , и I_y системы относительно осей Ox и Oy

называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от

соответствующей оси. Таким образом, $I_x = M_x = \sum_{k=1}^i m_k y_k^2$; $I_y = M_y = \sum_{k=1}^i m_k x_k^2$.

За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

принимаются соответствующие моменты условных масс, равномерно

распределенных вдоль этих дуг и фигур с плотностью, равной единице.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$

($a \leq x \leq b$) вычисляются по формулам: $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dL$, $M_y = \frac{1}{2} \int_a^b x dL$, $I_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dL$,

$I_y = \frac{1}{2} \int_a^b x^2 dL$, где $dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ – дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции,

ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$,

вычисляются по формулам: $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dS = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$, $M_y = \frac{1}{2} \int_a^b x dS = \frac{1}{2} \int_a^b xy dx$,

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dL, \quad I_y = \frac{1}{2} \int_a^b x^2 dS = \frac{1}{2} \int_a^b x^2 y dy.$$

В этих формулах $dS = ydx$ – дифференциал площади криволинейной трапеции.

Пусть материальная точка M движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$,

t – время. Найти пройденный его путь за промежуток времени $a \leq t \leq b$.

Предполагая, что траекторией точки является ось Ox и $S = S(t)$ есть уравнение движения, будем иметь

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = v(t)dt$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от $t = a$ до $t = b$, получим путь

пройденный точкой M за промежуток времени $[a, b]$: $\int_a^b ds = \int_a^b v(t)dt \Rightarrow$

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b v(t)dt \quad (4)$$

Пример 3. На какую высоту за 10 сек поднимается ракета, брошенная вертикально вверх, если ее скорость (км/с) меняется по закону

$$v = V(t) = 2 + \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Чему равна средняя скорость полета ракеты за этот промежуток времени?

Решение. Путь, пройденной ракетой за 10 сек, согласно формулу (4) равен

$$S = \int_0^{10} \left[2 + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt = \left(2t - \frac{1}{1+t} \right) \Big|_0^{10} = \left(20 - \frac{1}{11} \right) - (0 - 1) = 21 - \frac{1}{11} \approx 20,9 \text{ км}$$

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{20,9 \text{ км}}{10 \text{ с}} = 2,09 \text{ км/с}$$

8.1.4. Свойства определенного интеграла

1°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $A = \text{const}$, то

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

2°. определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3°. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4°. Если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5°. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

6°. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

7°. Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

8.1.5. Вычисления определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ является какое-либо ее первообразной на этом интервале, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin x \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = 2 \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Методы вычисления определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла.

8.2.1. Методы вычисления определенного интеграла

А) Вычисление определенного интеграла методом подстановки имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть : 1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$;

3) множеством значений функций $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$;

4) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая либо первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ сложную функцию $F(\varphi(t))$. Так как

$[F(\varphi(t))] = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции

$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, которая непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \quad (3)$$

Формула (3) называется формулой методом подстановки (или замена переменной) в определенном интеграле.

Пример 1. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin x}{(1 - \cos x)^2} dx$

Решение: Положим $1 - \cos x = t$, тогда $\sin x dx = dt$. $\alpha = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$,

$\beta = 1 - \cos(\pi) = -1 - (-1) = -2$.

Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin x}{(1 - \cos x)^2} dx = 2 \int_1^{-2} \frac{dt}{t^2} = 2 \int_1^{-2} t^{-2} dt = -\frac{2}{t} \Big|_1^{-2} = -\left(\frac{2}{-2} - \frac{1}{1}\right) = -(1 - 2) = 1$$

В) Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.

Нам известно, что

$$d(uv) = u dv + v du \quad (4)$$

в пределах от a до b , получим

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du \quad (5)$$

Поскольку по формуле Ньютон-Лейбница имеем $\int_a^b duv = uv \Big|_a^b$. Тогда из (5)

следует, что

$$\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du \quad (6)$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям* для определенного интеграла

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

Решение. Положим $u = x$ $dv = e^{2x} dx$, тогда $du = dx$

$$v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x} d(2x) = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - e^0) = \frac{1}{4} (e^2 + 1). \end{aligned}$$

8.2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

А) Вычисление площадей плоских фигур.

При вычислении площадей плоских фигур с применением определенного интеграла возможны следующие случаи.

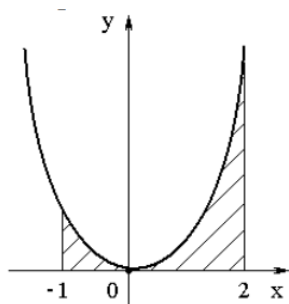
1. Фигура ограничена графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, прямыми $x = -2, x = 3$ и осью абсцисс.

Решение. $f(x) = x^2, a = -1, b = 2$ то согласно формулу (1) имеем:

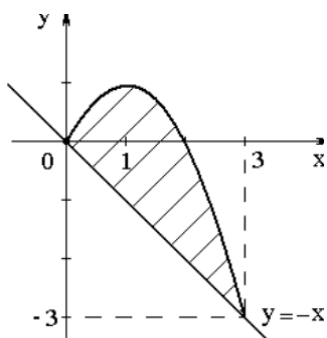
$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$



Фигура ограничена графиками двух непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$ где $(f(x) \geq g(x))$ и $a \leq x \leq b$. В этом случае искомая площадь S вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (4)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x$ и $-(y-1) = (x-1)^2$.



Решение: Найдем точки пересечения параболы и прямой т.е. решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

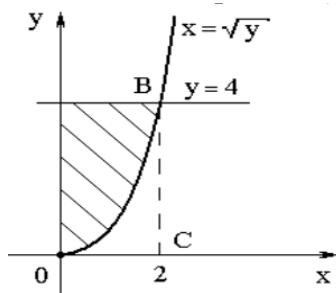
Выполним чертеж к задаче:

Вычислим площадь сегмента при $f(x) = -x$ $g(x) = 2x - x^2$, если $a = 0, b = 3$

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left. \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{9}{2} = 4,5$$

2. Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c, d]$ оси Oy . Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле $S = \int_c^d \varphi(y) dy$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0, y = 4$



$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y = 4 \end{cases}, \text{ получаем,}$$

Решение. Из чертежа видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей: $S = S_{OABC} - S_{OBC}$, каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла. Решая систему

что точка B пересечения прямой $y = 4$ и $x = \sqrt{y}$ имеет координаты $(2;4)$. Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4 dx = 4 \int_0^2 dx = 4x \Big|_0^2 = 8 \quad S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \text{ Окончательно } S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

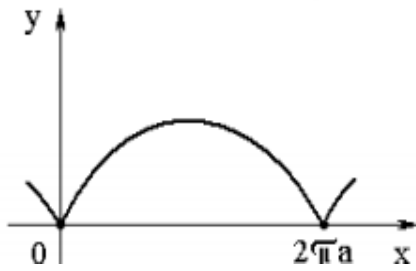
Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной в

параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y(t) \geq 0, t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и

отрезком $[a, b]$ оси Ox , то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt$,

t_1 и t_2 определяются из равенства $a = x(t_1), b = x(t_2)$.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры ограниченной одной аркой



циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox .

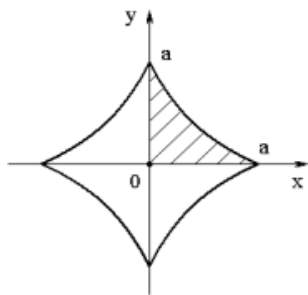
Решение. Арка циклоиды описывается при изменении t в пределах от 0 до 2π , так как

$y(0) = y(2\pi) = 0$, а в остальных точках указанного промежутка. Пределы интегрирования соответственно равны $x(0) = 0$ и $x(2\pi) = 2\pi a$. Сделаем подстановку: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $dx = a(1 - \cos t)dt$.

При изменении x на отрезке $[0, 2\pi a]$ t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0 \right) = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой



$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Решение. Так как фигура симметрична относительно осей координат Ox и Oy , то можно вычислить четверть искомой площади S_1 . Для S_1 : $x_1 = 0$, или $a \cos^3 t = 0$, т.е.

$$t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = a, \text{ или } a \cos^3 t = a, \text{ т.е. } t_2 = 0; \text{ Четверть искомой}$$

площади:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot (1 - \sin^2 t) dt = 3a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right) = \frac{3}{32} \pi a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь фигуры $S = 4S_1 = \frac{3}{8} \pi a^2$.

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.

8.3.1. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определить с помощью так называемой полярной системы координат.

На плоскости выбираем некоторую точку O , называемой полюсом, и выходящую из этой точки полупрямую, называемую полярной осью.

$$\rho = |ON|, \varphi = \angle XON$$

Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами ρ и φ .

Числа ρ и φ называется полярными координатами точки N , $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\rho \geq 0$.

Связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами имеет вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Пример 1. Уравнение $\rho = a$, где $a = \text{const}$, определяет в полярных координатах окружность с центром полюсе и радиусом a .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2.$$

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

8.3.2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – непрерывная функция при $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Требуется определить площадь сектора OAB , ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и радиус векторами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

Разобьем данную область радиус векторами $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta_n = \beta$, на n частей.

Обозначим через $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ углы между проведенными радиус векторами.

Обозначим через $\bar{\rho}_i$ длину радиус-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\bar{\theta}_i$, заключенному между θ_i и θ_{i+1} .

Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\bar{\rho}_i$ и центральным углом $\Delta\theta_i$.

Площадь этого сектора будет равна $\Delta S_i = \frac{1}{2} \bar{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i$.

Сумма

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[f(\bar{\theta}_i) \right]^2 \cdot \Delta\theta_i$$

будет равна площадь “ступенчатого” сектора. Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2 = \left[f(\bar{\theta}) \right]^2$ на отрезке $\alpha \leq \theta \leq \beta$, то ее

предел при $\max \Delta\theta_i \rightarrow 0$ есть определенный интеграл $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$

таким образом, площадь сектора OAB равна

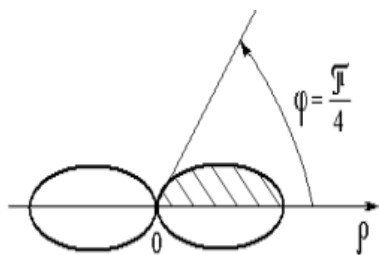
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (1)$$

или

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \quad (1')$$

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Решение: Находим четверть частью искомой площадью

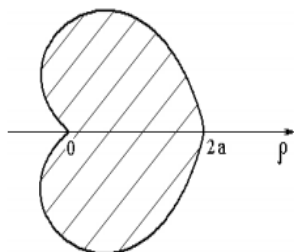


$$\begin{aligned}\frac{1}{4} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d(2\theta) = \frac{a^2}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

Итак, площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, будет равна $S = a^2$.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. В силу симметричности данной фигуры относительно оси достаточно вычислить площадь верхней половины



$$\begin{aligned}S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2\end{aligned}$$

8.3.3. Вычисление длины дуги кривой

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением

$y = f(x)$ Требуется найти длину $\overset{\smile}{AB}$ этой кривой, заключенной между

вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Для этого:

- 1) Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ с абциссами

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b.$$

- 2) Проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \dots, M_iM_{i+1}, \dots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Тогда получим ломанную $AM_1M_2\dots M_nB$, вписанную в дугу $\overset{\smile}{AB}$. Длина

ломанной равна $S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$

Длина S дуги AB называется предел

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad (1)$$

где

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i),$$

где $x_i < \xi_i < x_{i+1}$.

Следовательно, $\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$.

Таким образом, длина вписанной ломанной рана

$$\Delta S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

Если на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ и ее производная непрерывна, то существует предел

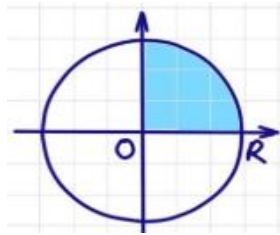
$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2)$$

Итак, получили формулу для вычисления длины дуги:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Пример 1. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = R^2$

Решение: Вычислим сначала длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Тогда уравнение дуги $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ откуда



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$\frac{1}{4}S = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} R$$

Тогда длина всей окружности $S = 4 \frac{\pi}{2} R = 2\pi R$

1. Если уравнение кривой задано в параметрическом форме :

$$x = g(t), \quad y = \varphi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

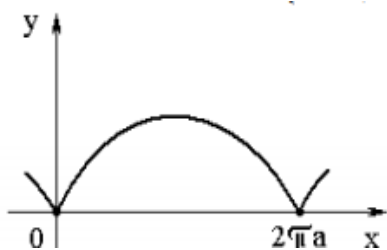
то длина дуги кривой определяется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2} dt \quad (4)$$

Пример 2. Вычислить длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ при

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Решение. Так как $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, то



$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

Длина дуги кривой в полярных координатах

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой $\rho = f(\theta)$, где ρ – полярный радиус, θ – полярный угол.

В этом случае длина дуги определяется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} d\theta \quad (5)$$

Пример 3. Вычислить длину кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ при $a = 0$, $b = 2\pi$

Так как кардиоида симметрична относительно оси Ox , то $l = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

При $\rho' = 2 \sin \varphi$, $(\rho')^2 = 4 \sin^2 \varphi$.

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \varphi + 4(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = 4 \int_0^{\pi} 2 \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 16. \end{aligned}$$

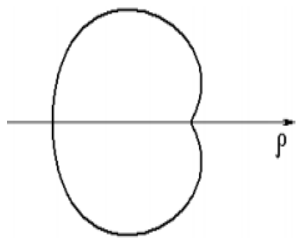
Вычисление объема и площадь поверхности тела

8.4.1. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть дано некоторое тело T . Предположим, что известно любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox .

Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от x и её обозначим через $S(x)$. Предположим, что $S(x)$ есть непрерывная функция от x . Требуется найти объем этого тела. Для этого:

- 1) Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots$, $x = x_n = b$. Эти плоскости разобьют тело на слои.
- 2) В каждом частичном промежутке $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и вычислим площадь сечения $S(\xi_i)$. ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$).



- 3) Таким образом, исходное тело разбиваются на несколько элементарных цилиндрических тел с площадью основания $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Объем таких тел будет равен $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

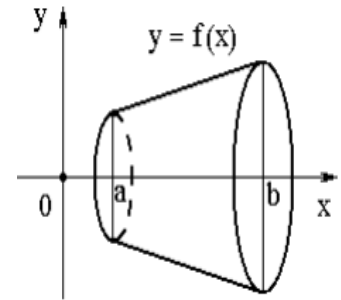
Тогда объем всех этих цилиндрических тел будет $V_n = \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Предел этой суммы при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ называется объемом данного тела:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx \quad (1)$$

8.4.2. Объем тела вращения

Рассмотрим тело образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. В этом случае произвольное сечение тело плоскостью перпендикулярной к оси Ox , есть круг, площадь которого равна



$$S(x) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot [f(x)]^2.$$

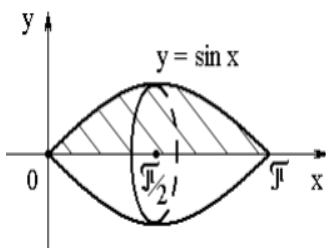
Тогда по формулу (1) получим объема тела вращения

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (2)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, $c \leq y \leq d$ то

объем тела вращения равен $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$ или $V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$.

Пример 1. Найти объем тела образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$



Решение.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} x \Big|_0^\pi - \frac{\pi}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти объем тела образованного вращением вокруг оси Oy и прямой $y = 1$.

Решение.
$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

8.4.3. Площадь поверхности тела вращения

Пусть нам дана поверхность, образованного вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox . Определим площадь этой поверхности на участке $a \leq x \leq b$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную во всех точках $[a, b]$.

Для этого:

1) На дуге $\overset{\cup}{AB}$ возьмем точки $A, N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots, N_n = B$ абциссами

$$x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = b$$

Проведем хорды $AN_1, N_1N_2, \dots, N_iN_{i+1}, \dots, N_{n-1}B$, длины которых обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Каждая хорда длины ΔS_i при вращении опишет усеченный конус, с радиусами $r = y_i, R = y_{i+1}$ и образующему $l = \Delta S_i$. Площадь поверхности этого элементарного усеченного конуса будет равна

$$\Delta p_i = 2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta S_i = \pi(R + r) \cdot l$$

но

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Применяя теорему Лагранжа, имеем $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i)$, где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$,

следовательно, $\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$

Тогда площадь поверхности, описанной ломанной, будет равна

$$P_n = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

Переходим пределу когда $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$

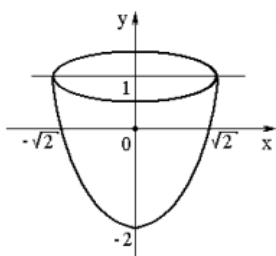
$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^n 2f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (2)$$

Итак, площадь поверхности тела вращения вычисляется по формулу

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (3)$$

Пример 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2x, x \in [0, 4]$ вокруг оси Ox .

Решение. Выразим из уравнения параболы y ; $y = \sqrt{2x}$. Найдем



$y'; y' = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$. Для нахождения площади

поверхности воспользуемся формулой (3)

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \pi \left(\frac{2(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{2\pi}{3} (27-1) = \frac{52}{3} \pi. \end{aligned}$$

Если дуга кривой, заданная функций $x = \varphi(y), c \leq y \leq d$, вращается вокруг ос

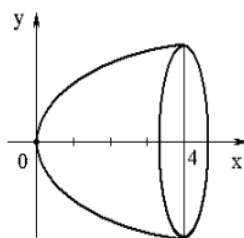
Oy , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \cdot \sqrt{1 + (x')^2} dy, \quad (4)$$

где c и d -ординаты начала и конца дуги.

Пример 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2 = y + 2$, $y = 1$ вокруг оси Ox .

Решение. Воспользуемся формулой (4). Получим $x = \sqrt{y + 2}$, $x' = \frac{1}{2\sqrt{y + 2}}$



$$\begin{aligned}\sqrt{1 + (x')^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y+2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4(y+2)}} = \sqrt{\frac{4y+9}{4(y+2)}} = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_{-2}^1 \sqrt{4y+9} dy = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^1 (4y+9)^{\frac{1}{2}} d(4y+9) = \frac{\pi}{4} \frac{2(4y+9)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{\pi}{6} (13\sqrt{13} - 1).\end{aligned}$$

Несобственные интегралы

8.5.1. Интегралы с бесконечными пределами

При определении определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

предполагалось, что :

- 1) Промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен;
- 2) Подынтегральная функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Такой определенный интеграл собственным (слово собственный обычно опускается).

Если нарушается по меньшей мере одно из двух условий: 1) или 2), то символ (1) будем называть несобственным определенным интегралом.

Выясним смысл этого нового понятия для двух простейших случаев.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a < x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении в интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b . Рассмотрим поведение этого интеграла при $b \rightarrow \infty$

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

Если предел (2) существует, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, в противном случае она называется расходящимся.

Геометрический смысл, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью OX .

Пусть $F(x)$ – первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. На основании формулы (2) имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)]$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования обобщенную формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(+\infty) - F(a)]. \quad (3)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg b - \arctg 0] = \arctg \infty - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Пример 2. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Решение.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Нам известно, что второй интеграл равен $\frac{\pi}{2}$. Вычислим первый интеграл:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg 0 - \arctg(-\infty)] = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится или расходится, данный интеграл и оценить его значение. Для этого могут быть полезными

следующие теоремы, которые мы приведем без доказательства, а применение их докажем на примерах.

Теорема 1. Если для всех x ($x \geq a$) выполняется неравенство

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ также сходится, при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

Пример 3. Исследовать сходится ли интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx$

Решение: Заметим, что $1 \leq \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$. Далее, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$

Следовательно, исходный интеграл сходится и его значение меньше 1.

Теорема 2. Если для всех x ($x \geq a$) выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пример 4. Исследовать, сходится ли интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$

Решение. Заметим, что $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} > \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^{\infty} = +\infty$.

Следовательно, расходится и данный интеграл.

Если функция $f(x)$ меняет знак в бесконечном интервале, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Пример 5. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Решение. Замечаем, что $\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|$.

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$. Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ сходится. Отсюда следует, то сходится и данный интеграл.

8.5.2. Интегралы от разрывной функции

А) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x \leq b$ и имеет точку разрыва при $x=b$. Тогда соответствующий несобственный интеграл от разрывной функции определяется формулой

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \right] \quad (4)$$

В) Если функция $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a, b]$ (т.е. при $x=a$) то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \quad (5)$$

С) Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x=c$ где $a \leq c \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (6)$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ функция терпит разрыв в точке $x=1$.

Решение.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2[\sqrt{1-(1-\varepsilon)} - 1] = 2$$

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений могут быть применены теоремы, аналогичные теоремы для оценки интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 1' Если на отрезке $[a, b]$ $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке b , причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0, \text{ и } \int_a^b \varphi(x) dx \text{ сходится, то } \int_a^b f(x) dx \text{ также сходится.}$$

Теорема 2'. В условиях теоремы 1' выполнены неравенство $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$, и $\int_a^b \varphi(x) dx$ расходится, то и $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

В задачах 1-12 требуется вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем представительного разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда

1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

2. $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

3. $\int_0^1 x \cos \sqrt{x} dx.$

4. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx.$

5. $\int_0^{1/4} x e^{-\sqrt{x}} dx.$

6. $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx.$

7. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$

8. $\int_0^{1/4} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

9. $\int_0^{1/2} \frac{\arctg x}{x} dx.$

10. $\int_0^{1/3} \frac{\sin 3x}{x} dx.$

1. $\int_0^1 x^2 \cos \sqrt{x} dx.$

12. $\int_0^{1/4} x \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$

Глава IX. Функции нескольких переменных

9.1.1. Определение функции нескольких переменных

Введение

На практике приходится решить технические, экономические, сельскохозяйственные и другие задачи связанные с функциями многих переменных. Рассмотрим некоторые из них:

Задача 1. Годовые расходы предприятия могут быть выражены функцией

$$z = f(x, y) = a + b_1x + b_2y + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y}$$

где a, b_1, b_2, c_1, c_2 - постоянные.

При каких значениях x и y расходы предприятия будут наименьшими?

Задача 2. Стоимость постройки 1 м^2 фасада равна a , других стен- b , крыши- c . Определить, при каких соотношениях длины по фасаду x , ширина y и высоты z , при данной кубатуре V , общая стоимость всех стен и крыши (вместе с верхним перекрытием) здания, описываемой формулой

$$S(x, y) = a\frac{V}{y} + b\frac{V}{y} + 2b\frac{V}{x} + cxy,$$

будет наименьшей.

Задача 3. Надо строит с заданном объеме V силосохранилище чтобы затраты была минимальной для этой стройки, каково должна быть размеры этого сооружения

$$S(x, y) = xy + 2xz + 2yz, \quad V = xyz$$

$$S(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

9.1.2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Мы до сих пор имели дело с функциями одной переменной. Однако на практике приходится иметь дело с функциями двух и более независимых переменных. Например урожайность получаемых из сельскохозяйственных культур зависит от нескольких факторов (удобрение, погоды, качества семени, обработки культивацию и другие).

Для наглядности приведем несколько примеров.

Пример 1. Площадь прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y , выражается формулой $S = x \cdot y$. Каждой паре значений x и y соответствует определенное значение площади S ; S есть функция двух переменных.

Пример 2. Объем V есть функция трех переменных x, y, z , выражается формулой $V = xyz$.

Здесь V есть функция трех переменных x, y, z .

Пример 3. Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ есть функция четырех переменных x, y, z, t .

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой их области D , соответствует определенное значение величины z , то мы говорим, что z есть функция двух независимых переменных x и y , определенная в D .

Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т.д.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения или областью существования этой функции и ее обозначается через D .

Пример 4. Определить область определения функции $z = 2x + y$. Эта функция имеет смысл при любых значениях x и y . $D = \{(x, y), x \in R, y \in R\}$

Следовательно, естественной областью определения этой функции является вся плоскость Oxy .

Пример 5. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \quad D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Нетрудно заметить, что областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ является, часть плоскости Oxy или вся плоскость Oxy .

9.1.2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ (1) определенную в области D на плоскости Oxy и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$. В каждой точке $M(x, y)$ поставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x, y)$.

Геометрическое место точек P , координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных. В пространстве график функции $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность.

Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения

9.1.3. Частное и полное приращение функции двух переменных

Предположим, что y функции $z = f(x, y)$, $y = \text{const}$. Если x дадим приращение Δx , тогда z получит приращение которое называют частным приращением z по x и обозначают через $\Delta_x z$, так что

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x) - f(x, y) \quad (1)$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy , то z получает приращения, называемое частным приращением z по y . Это приращение обозначают символом $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2)$$

Если оба переменные x и y получает приращение Δx и Δy соответственно, то z также получит приращение Δz ,

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$

Δz называется полным приращением функции $z = f(x, y)$.

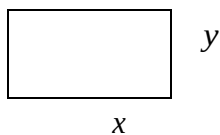
Необходимо отметить, что вообще говоря

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

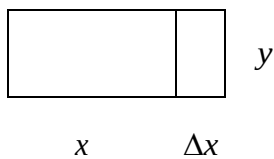
Пример. Дано функции $z = f(x, y) = xy$. Найти $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz .

Решение:

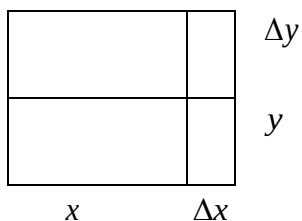
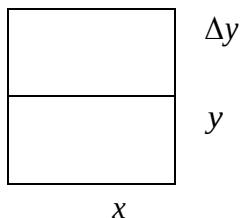
$$1) \Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y\Delta x;$$



$$2) \Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x\Delta y;$$



$$3) \Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$



При $x = 2, y = 1, \Delta x = 0,3, \Delta y = 0,2$ имеем

$$\Delta_x z = y \cdot \Delta x = 1 \cdot 0,3 = 0,3; \quad \Delta_y z = x \cdot \Delta y = 2 \cdot 0,2 = 0,4;$$

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0,4 + 0,3 + 0,06 = 0,76$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) = 2,3 + 1,2 = 2,76$$

9.1.4. Непрерывность функции двух переменных

Введем одно важное понятие окрестности данной точки. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех (x, y) ,

удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Сначала рассмотрим понятие предела функции двух переменных

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная на G плоскости Oxy , и $M_0(x_0, y_0) \in G$.

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точки $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, что для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$, то пишут

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \left(\frac{\sin 2xy}{3xy} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 2} \frac{\sin 2xy}{3xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{6x} = \frac{4}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Определение 2. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] = f(x_0, y_0) \quad (2)$$

или
$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad (3)$$

либо
$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0 \quad (4)$$

Пример 1. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывно при любых x и y плоскости Oxy .

Решение: $\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2)] = 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y,$

итак $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

9.1.5. Частные производные функции двух переменных

Определение 1. Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремления Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z = f(x, y)$ обозначается одним из символов

$$z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (1)$$

Аналогично частная производная по y от функции $z = f(x, y)$ обозначается одним из символов

$$z'_y, \quad f'_y(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

и определяется по формулу

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2)$$

Замечание 1. При вычисление производной от функции $z = f(x, y)$ по x , переменная y , считается постоянная, аналогично $z = f(x, y)$ по y , переменная x считается постоянная.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = x^3 + 2xy + y^3$

$$z'_x = (x^3 + 2xy + y^3)' = 3x^2 + 2y$$

$$z'_y = (x^3 + 2xy + y^3)' = 2x + 3y^2$$

9.1.6. Частные производные высших порядков

Частные производные $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y . Поэтому можно снова находить частные производные. Отметим, что частных производных второго порядка от функции $z = f(x, y)$ будет четыре:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

Частные производные третьего порядка их будет, очевидно уже восемь.
 Вообще, частная производная n -го порядка есть первая производная от производной $(n-1)$ -го порядка.

Пример 2. Найти частные производные второго порядка от функции
 $z = f(x, y) = x^2y + y^3$

Решение: $z'_x = 2xy$ $z'_y = x^2 + 3y^2$; $z''_{xx} = 2y$ $z''_{xy} = 2x$ $z''_{yx} = 2x$ $z''_{yy} = 6y$

Заметим, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пример 3. Найти z'''_{xxy} и z'''_{yyx} если $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$

Решение: $z'_x = y^2e^x + 2xy^3$, $z''_{xx} = y^2e^x + 2y^3$, $z'''_{xxy} = (y^2e^x + 2y^3)'_x = 2ye^x + 6y^2$

$$z'_y = 2ye^x + 3x^2y^2, \quad z''_{yx} = 2ye^x + 6xy^2, \quad z'''_{yxx} = (2ye^x + 6xy^2)' = 2ye^x + 6y^2$$

Заметим, что $z'''_{xxy} = z'''_{yxx}$

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x, y)$,

$$z''_{xy} = z''_{yx} \quad (f''_{yx} \neq f''_{xy})$$

Аналогичная теорема имеет место и для функции любого числа переменных

Если $z = f(x, y, t)$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial t} = \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x \partial y} \quad (z'''_{xyt} = z'''_{txy})$$

Пример 4. Найти $z'''_{xyt} = z'''_{txy}$, если $z = e^{xy} \cdot \sin t$

9.1.7. Полное приращение и полный дифференциал

Пусть дано функция $z = f(x, y)$. Нам известно, что если x и y придадим приращению Δx и Δy соответственно, то функция z также получит

приращение Δz , которое называется полным приращением функции $z = f(x, y)$ и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если ее полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (2)$$

где A и B — числа, а α, β — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, т.е.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0, \lim_{y \rightarrow 0} \beta = 0$. Главная линейная часть Δz , равенства (2) $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$

называется дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz . Итак,

$$dz = A \Delta x + B \Delta y \quad (3)$$

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

Доказательство. Чтобы из Δz получить $\Delta_x z$ достаточно положить $\Delta y = 0$. Из

(2) следует, что если $\Delta y = 0$, то $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A$$

Аналогично можно показать, что при $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (B + \beta) = B$$

Тогда для дифференциала dz имеем

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Обычно вместо Δx и Δy пишут dx и dy .

Итак, для полного дифференциала dz имеем формулу

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy \quad (4)$$

Пример 1. Найти dz для функции $z = f(x, y) = x^3 y^2 + \sin(x^2 + y^2)$

Решение. $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 2x \cdot \cos(x^2 + y^2)$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 2y \cdot \cos(x^2 + y^2)$

$$dz = (3x^2 y^2 + 2x \cdot \cos(x^2 + y^2))dx + (2x^3 y + 2y \cdot \cos(x^2 + y^2))dy$$

9.1.8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Тогда полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$

Из (1) имеем

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z \quad (2)$$

Нам известно, что

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \quad (3)$$

Подставляя формулу (3) в место (2) получим приближенную формулу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \quad (4)$$

С помощью этой приближенной формулы мы можем вычислить значение функции в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, зная его значение в точке (x_0, y_0) .

Пример 1. Найти приближенное значение величины $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Решение. Положим $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

$$x = x_0 + \Delta x = 1 + 0,03 \quad y = y_0 - \Delta y = 2 - 0,02$$

$$x_0 = 1 \quad \Delta x = 0,03 \quad y_0 = 2, \quad \Delta y = -0,02$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{1^2 + 2^3} = \sqrt{9} = 3$$

9.1.9. Производная сложной функции. Полный дифференциал сложной функции.

Пусть в уравнение

$$z = f(u, v) \quad (1)$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y , где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y .

Например, $z = u^3 v^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = e^{x+y}$

Если функция $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные, а функция $f(u, v)$ имеет непрерывные частные производные в точки (x_0, y_0) и она определяется по формуле

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

Найдем производная функцию $z = u^3 v^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = e^{x+y}$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^3 v$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x+y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 v \cdot 2x + 2u^3 v \cdot e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot e^{x+y} \cdot 2x + 2(x^2 + y^2)^3 \cdot e^{2x+2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2v \cdot 2y + 2u^3v \cdot e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot e^{x+y} \cdot 2y + 2(x^2 + y^2)^3 \cdot e^{2x+2y}$$

Полный дифференциал сложной функции

$z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ определяется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (3)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (4)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (5)$$

Пример 1. $z = u^2v^2$, $u = x^2y$, $v = xy^2$. Найти $dz = ?$

Решение: 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$ 2) $\frac{\partial v}{\partial x} = y^2$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$ 3) $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2v$$

Тогда согласно (5) имеем:

$$\begin{aligned} dz &= 2uv^2 \cdot (2xydx + x^2dy) + 2u^2v \cdot (y^2dx + 2xydy) = \\ &= 2x^2y \cdot x^2y^4(2xydx + x^2dy) + 2x^4y^2 \cdot xy^2(y^2dx + 2xydy) \end{aligned}$$

9.1.10. Производная в данном направлении. Градиент функции.

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ в направлении

вектора $l = \overline{MM_1}$ называется предел $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_0 \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{M_0 \cdot M} = \lim_{MM_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$

где $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

В частности, $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть производная функции $z = f(x, y)$ по положительному направлению оси X , а $\frac{\partial z}{\partial y}$ – производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению $\vec{l}$.
 для простоты, можно считать, что $\vec{l}$ – единичный вектор с координатами $(\cos \alpha, \cos \beta)$.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке существует производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ по любому направлению $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ и она вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \quad (1)$$

где $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0)$.

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная по данному направлению определяется по формуле.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (2)$$

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, выходящий из точки M , с координатами $\vec{l} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ и она указывает направление максимального роста функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Градиент функции $z = f(x, y)$ обозначается через $gradz$ и вычисляется по формуле

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \quad (3)$$

В случае функции $u = f(x, y, z)$ градиент функции равен

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (4)$$

$$|\text{grad}z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (5)$$

Пример 1. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1,1)$ в направлении вектора l , составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x_0=1 \\ y_0=1}} = 2$ $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -2$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 60^\circ \right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \quad |\text{grad}z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

Пример 2. Найти производную функции $u = f(x, y, z) = xyz^3$ в точке $M_0(3;2;1)$ в направлении вектора $\overline{MM_0}$, где $M(5;4;2)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{MM_0} = l$

$$l = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} \quad \cos \beta = \frac{2}{3} \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3 \Big|_{\substack{y_0=2 \\ z_0=2}} = 4 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 \Big|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2 \\ z_0=1}} = 12 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 \Big|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2 \\ z_0=1}} = 12 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \Big|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2 \\ z_0=1}} = 36$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8 + 24 + 36}{3} = \frac{68}{3} = 22 \frac{2}{3}.$$

Максимальная рост функции $|gradz| = \sqrt{4^2 + 12^2 + 36^2} = 4\sqrt{1+9+81} = 4\sqrt{91} \approx 38,15$

9.1.11. Экстремумы функции двух независимых переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывна в этой точке.

Определение 1. Если для всех точек (x, y) в окрестности точки (x_0, y_0) выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$), то точка (x_0, y_0) называется точкой максимума (минимума) функции $f(x, y)$.

Пример 1. $z = f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1$

Эта функция в точке $(x_0, y_0) = (2, 1)$ достигает своего наименьшего значения.

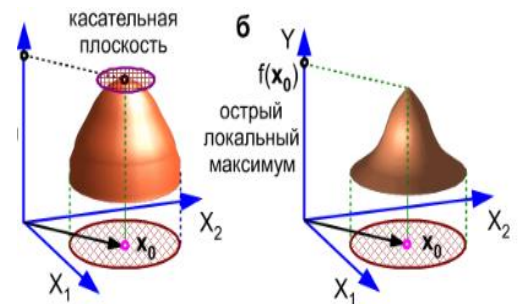
Пример 2. $u = f(x, y, z) = 0,5 - \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

Для этой функции точка $(0, 0, 0)$ является точкой максимума. Но в этой точке она не достигает наибольшего значения. Она достигает наибольшего значения 1,5 если $\sin(x^2 + y^2 + z^2) = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$.

Теорема 1. (Необходимое условие экстремума) Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке (x_0, y_0) , то в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ либо хотя бы одна из них не существует.

Согласно этой теореме, чтобы найти точки экстремума, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$



Точки, в которых частные производные равны нулю называются стационарными или критическими точками.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Введем обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{и} \quad \Delta = AC - B^2.$$

1) Если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет максимум.

2) Если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет минимум.

3) Если $\Delta < 0$ то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремум.

4) Если $\Delta = 0$, то ничего определённого про наличие экстремума сказать нельзя; требуется дополнительное исследование.

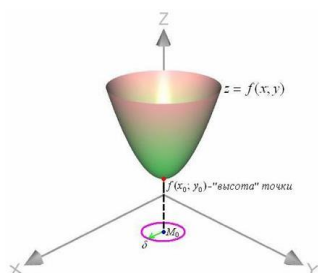
Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 4x^2 - 6xy - 34x + 5y^2 + 42y + 7.$$

Решение: Будем следовать указанному выше алгоритму. Для начала найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x - 6y - 34; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 10y + 42.$$

Составим систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 8x - 6y - 34 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 10y + 42 = 0 \end{cases}$$



Сократим каждое уравнение этой системы на 2 и перенесём числа в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 17 \\ -3x + 5y = -21 \end{cases}$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений. Наиболее удобным применением метода Крамера для решения полученной системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 20 - 9 = 11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -3 \\ -21 & 5 \end{vmatrix} = 17 \cdot 5 - (-3) \cdot (-21) = 85 - 63 = 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ -3 & -21 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-21) - 17 \cdot (-3) = -84 + 51 = -33.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-33}{11} = -3;$$

Значения $x = 2$, $y = -3$ – это координаты точки $(2, -3)$. Теперь приступим по второму шагу алгоритма, Найдём производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6.$$

Вычислим значение Δ :

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 8 \cdot 10 - (-6)^2 = 80 - 36 = 44$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то согласно алгоритму $(2, -3)$ есть точкой минимума функции z .

Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки $(2, -3)$.

$$z_{\min} = z(2, -3) = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-3) - 34 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)^2 + 42 \cdot (-3) + 7 = -90$$

Ответ: $(2, -3)$ – точка минимума; $z_{\min} = -90$

Глава X. Дифференциальные уравнения.

1. Введение

При решении различных задач геометрии, физики, механики, техники, сельского хозяйства и других отраслях науки играют большую роль разделы дифференциальных уравнений курса высшей математики.

Отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомой функцию и производные этой функции называется дифференциальным.

10.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Опытным путём установлено, что скорость размножения бактерий

в любой момент времени положительно и пропорциональна их массе. Найти зависимость массы бактерий от времени.

Решение. Обозначим через $m(t)$ массу бактерий в момент времени t ; Тогда $\frac{dm}{dt}$ будет скорость размножения этих бактерий. Согласно условию задачи скорость размножения $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна массе $m(t)$ бактерий поэтому

$$\frac{dm(t)}{dt} = k \cdot m(t) \quad (1)$$

где $k > 0$.

Уравнение (1) содержит искомые функции $m(t)$ и её производную, поэтому является дифференциальным уравнением. Убедимся, что любая функция вида

$$m(t) = C \cdot e^{kt} \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная, является решением уравнения (1)

Задача 2. Скорость распада радия пропорциональна её массе. Если через t_0 года её масса уменьшается на половину, то найти закон распада радия. За 100 лет её масса на сколько процент уменьшается.

Решение. Обозначим через $m(t)$ массу радия в момент времени t , m_0 её массу в момент $t=0$. Тогда скорость распада будет равна $\frac{dm(t)}{dt}$ и она будет

отрицательным, потому что с ростом t она уменьшается. Итак по условию задачи

$$\frac{dm(t)}{dt} = -k \cdot m(t) \quad (3)$$

где $k > 0$.

Уравнение (3) также является дифференциальным. Позже покажем, что она имеет решения

$$m(t) = C \cdot e^{-kt} \quad (4)$$

10.1.2. Основные понятия и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и её производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение (ДУ) записывают так:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Например, уравнения $2x + y - 3y' = 0$, $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y'^2 - 4y = 0$ являются дифференциальными уравнениями.

Определения 2. Порядком ДУ называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение 3. ДУ первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Например, $xy + y - 2 = 0$ есть ДУ первого порядка.

Определение 4. ДУ вид

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

называется уравнение первого порядка, разрешённым относительно производной. Например, $y' = \frac{y}{x}$

Определение 5. Решением ДУ (1) называется любая функция $y = y(x)$, дифференцируемая по крайней мере n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение (1) последнее обращается в тождество.

Например, для ДУ $y' - y = 0$ одним из решений являются функция $y = e^x$.

Однако это решение не единственное: любая функция вида $y = Ce^x$, где C – постоянная, такие являются решением данного уравнения и оно называется общее решение. Придавая C определенное числовое значение мы будем получать конкретные или, как говорят, частные решения уравнения

$$y' - y = 0.$$

В качестве другого примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$$

где C_1 и C_2 постоянные. Это решение является общее решение уравнения. При конкретных значениях C_1 и C_2 будем получать частные решения.

Из этих примеров можно заметить, что общее решение зависит от столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Отметим, что решение любого ДУ находится путем ее интегрирования и поэтому в ее решения участвует произвольные постоянные $C_i, i = 1, \dots, n$. Таким образом общее решение ДУ

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

и она называется интегральными кривыми.

Пример 1. Найти общее решение уравнение $y' = \frac{y}{x}$

Решение: $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow y = Cx$$

Это уравнение представляет семейство прямых проходящих через начало координат.

10.1.3. Дифференциальные уравнение первого порядка. Задача Коши.

Определение 6. ДУ вида

$$y' = f(x) \tag{1}$$

называется простейшее ДУ первого порядка.

Уравнение (1) имеет решение $y = F(x) + C$.

Действительно, $y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \Rightarrow$
 $y = \int f(x)dx + C = F(x) + C$

где $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $y' = x\sqrt{x}$

Решение: $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x} \Rightarrow dy = x\sqrt{x}dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

Задача Коши.

При решение конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений ДУ то частное решение, которое является ответом на постоянный вопрос. Таким образом требуется найти решение $y = y(x)$

уравнения $y' = f(x, y)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента x принимает заданное значение $y = y_0$ т.е. $y|_{x=x_0} = y_0$ оно называется частным решением удовлетворяющим начальным условиям. Нахождение такую решение называется задача Коши.

Теорема(Коши). Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ то существует такая окрестность точки (x_0, y_0) в которой уравнения $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение удовлетворяющим начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$

Определение 7. Если задание начальной точки (x_0, y_0) определяет единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, то такое решение называется частным решением.

Иногда не удастся получить решения дифференциального уравнения в явной форме $y = y(x)$ или $y = y(x, C)$ а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида $\Phi(x, y) = 0$ или $\Phi(x, y, C) = 0$. Выражение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$. Например уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение в неявном форме $x^2 + y^2 = 2C \Rightarrow x^2 + y^2 - c = 0$. Значит, выражение $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c = 0$ является общим интегралом уравнения $y' = -\frac{x}{y}$

10.1.4. Дифференциальные уравнение с разделенными и разделяющимися переменными.

Во многих случаях ДУ первого порядка $F(x, y, y') = 0$ задаются в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ известные непрерывные функции.

Если в уравнение (1) $M(x, y) = M(x)$ и $N(x, y) = N(y)$, то имеем уравнение

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) называется ДУ первого порядка с разделенными переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Пример 1. Решить уравнения $x dx + y dy = 0$

$$x dx + y dy = 0 \Rightarrow \int x dx + \int y dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C = C_1^2$$

С геометрической точки зрения совокупность всех решений этого уравнения представляет собой семейство кругов центр которого находится в начало координат.

Если уравнение (1) $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$ и $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$, то получим уравнение

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) называется ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Для решения уравнения (3) разделим обе части на произведение $N_1(x)M_2(y) \neq 0$.

Тогда после очевидных сокращений получим ДУ.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{M_2(y)}{N_2(y)} dy = 0. \quad (4)$$

с разделенными переменными.

В этом случае общий интеграл уравнения будет равна

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{M_2(y)}{N_2(y)} dy = C. \quad (5)$$

Пример 2. Найти частное решение ДУ $(1+x^2)dy + ydx = 0$ при начальном условии $y(1)=1$.

Решение. Разделяя переменные получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = -\arctg x + C$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную C .

$$\ln 1 = -\arctg 1 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \quad \text{итак } y = e^{-\arctg x + \frac{\pi}{4}}$$

10.1.5. Дифференциальные уравнение в полных дифференциалах.

Интегрирующий множитель

Определение 1. Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывные дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

где $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Если выполняется равенство (2), то левая часть уравнения (1) будет полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

Итак, общий интеграл (1) или (3) имеет вид

$$u(x, y) = C \quad (4)$$

где для $u(x, y)$ имеет место формула

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right] dy \quad (5)$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

Решение. Сначала проверим условия (2).

$$M(x, y) = 2x^3 - xy^2, \quad N(x, y) = 2y^3 - x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

Условие (2) выполняется значит, решение исходного уравнения находим по формуле (5) т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (2x^3 - xy^2)dx + \int \left[(2y^3 - x^2y) - \int (-2xy)dx \right] dy = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \\ &+ \int \left[(2y^3 - x^2y) - \int (-2xy)dx \right] dy = 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + 2\frac{y^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + C = \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C \end{aligned}$$

Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнения (1) т.е. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ не является полным дифференциалом иначе говоря не выполняется условия (2), то можно подобрать такую функцию $\mu = \mu(x, y)$, после умножения всех членов уравнения (1) получается уравнения полным дифференциалом.

Итак, уравнения

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

(6)

является полным дифференциалом, и должна выполняться соотношение

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (7)$$

Функция $\mu = \mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем уравнения (1).

$\mu = \mu(x, y)$ находятся одна из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \\ \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пример 2. Решить уравнение $(y + xy^2)dx - xdy = 0$

Решение: $M(x, y) = y + xy^2$, $N(x, y) = -x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Согласно формулу (8) находим интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y)$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = \frac{-2(1 + xy)}{y(1 + xy)} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \partial \ln \mu = -\frac{2}{y} dy \Rightarrow \int d \ln \mu = -2 \int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln \mu = -2 \ln y \Rightarrow \mu = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

Умножая данное уравнения на $\mu = \frac{1}{y^2}$ получим уравнение

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

в полных дифференциалах. Потому что, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$. Решение

последнего уравнения находим по формуле (5). $M(x, y) = \frac{1}{y} + x$, $N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$

$$u(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} + x \right) dx + \int \left[-\frac{x}{y^2} - \int -\frac{1}{y^2} dx \right] dy = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \int \left[-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} \right] dy + C$$

$$u(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C.$$

10.1.6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией k -того измерения

(k -тый степени) если при любом t – имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \quad (1)$$

Например, $f(x, y) = x + y$ – однородные первого измерения $f(x, y) = x^2 + y^2$ – однородные второго измерения.

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ однородная функция нулевого измерения.

Уравнение $y' = f(x, y)$ можно представить в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися через постановкой

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \quad (3)$$

где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция

Пример 1. Найти решения уравнения $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

Решение. В этом уравнении функции $M(x, y) = x^2 - 2y^2$, $N(x, y) = 2xy$ – однородные второго измерения. Поэтому, данное уравнение является однородным.

Положим $y = zx \Rightarrow dy = xdz + zdx$. Тогда заданное уравнение имеет вид

$$x^2 dx - 2(zx)^2 dx + 2xz(x)(zdx + xdz) = 0,$$

т. е.

$$x^2 dx - 2z^2 x^2 dx + 2z^2 x^2 dx + 2zx^3 dz = 0,$$

или

$$x^2 dx + 2zx^3 dz = 0; x^2 \neq 0$$

$$dx + 2zxdz = 0$$

Разделяем переменные

$$\begin{aligned} 2zdz + \frac{dx}{x} &= 0 \Rightarrow \int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1 \\ z^2 + \ln|x| &= \ln C_1 \Rightarrow \ln|x| - \ln|C_1| = -z^2 \\ \ln\left|\frac{x}{C_1}\right| &= -z^2 \Rightarrow \frac{x}{C_1} = e^{-z^2} \Rightarrow x = C_1 e^{-z^2}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$z = \frac{y}{x} \text{ то } x = C_1 e^{-\frac{y^2}{x^2}}$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$ если $y = 2$ при $x = 1$. **Ответ:** $x^2 - y^2 + 3x = 0$

10.1.7. Дифференциальные уравнения приводимые к однородным

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводится к однородным подстановкой $x = u + \alpha, y = v + \beta$,

где $(\alpha; \beta)$ -точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановка $a_1x + b_1y = t$ позволяет разделить переменные.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$

Решение: $y' = -\left(\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}\right)$. Поскольку $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$.

Находим точку пересечения прямых $2x + y + 1 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$ имеем $x = \alpha = -1, y = \beta = 1$. Сделаем замену переменных $x = u - 1$ и $y = v + 1$, $dx = du$, $dy = dv$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0$$

В полученном однородном уравнении положим $\frac{v}{u} = t \Rightarrow v = ut \Rightarrow dv = udt + tdu$

Тогда придем к уравнению с разделяющимися переменным

$$\begin{aligned} 2(t^2 + t + 1)udu + u^2(1 + 2t)dt &= 0 \Rightarrow \\ \frac{du}{u} &= -\frac{(1 + 2t)dt}{2(t^2 + t + 1)} = -\frac{d(t^2 + t + 1)}{2(t^2 + t + 1)} \\ \ln|u| &= -\frac{1}{2}\ln(t^2 + t + 1) + \ln C \\ u &= \frac{C}{\sqrt{t^2 + t + 1}} \Rightarrow u^2(t^2 + t + 1) = C^2 \end{aligned}$$

Поскольку $t = \frac{v}{u}$, то

$$u^2\left(\frac{v^2}{u^2} + \frac{v}{u} + 1\right) = C^2 \Rightarrow u^2 + uv + v^2 = C^2$$

Возвращаясь к переменным x и y т.е $u = x + 1$, $v = y - 1$ после элементарных преобразований найдем общий интеграл исходного уравнения

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1, \quad C_1 = C^2 - 1$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$

Решение. Поскольку $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то сделаем замену $y + x = t \Rightarrow dy = dt - dx$

Тогда данное уравнение примет вид

$$(t + 2)dx + (2t - 1)(dt - dx) = 0, \text{ или}$$

$$(3-t)dx + (2t-1)dt = 0 \Rightarrow dx + \frac{2t-1}{3-t}dt = 0 \Rightarrow dx - \frac{2t-1}{t-3}dt = 0$$

$$x - 2t - 5\ln|t-3| = C, \quad t = x + y \quad -x - 2y - 5\ln|x+y-3| = C$$

10.1.8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad (1)$$

называется линейным, где $p(x)$ и $Q(x)$ заданные функции. Таким образом искомая функция

y и ее производная y' входит в линейное уравнение в первой степени.

Если в частном случае $Q(x) = 0$ то уравнение (1) называется однородным уравнением, т.е.

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

Например уравнения $y' = y \cos^2 x + x^2$, $xy' = y + e^x$ - линейные, а уравнения $yy' + xy^3 = \sin x$ не является линейным.

Линейное уравнение первого порядка (1) удобно интегрировать методом Бернулли, который заключается в следующем:

1) Сделаем подстановку $y = uv \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = uv' + u'v$ где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ -

две неизвестные функции тогда исходное уравнение имеет вид :

Тогда уравнение примет вид

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

или

$$u[v' + P(x)v] + vu' = Q(x) \quad (3)$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функции (например v) может быть выбрана совершенно произвольно, за v принимают любое частное решение уравнения

$$v' + P(x)v = 0 \Rightarrow v = e^{-\int P(x)dx} \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} vu' = Q(x) &\Rightarrow u' = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \\ \frac{du}{dx} &= Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения согласно (4) и (5) будет равна

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \quad (6)$$

Пример 1. Найти общее решения уравнения $y' - \frac{1}{x}y = x^2$

Решение: 1) $-\int P(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

2) $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln|x|} = x$

3) $e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

4) $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}$

5) $y = x \left[\frac{x^2}{2} + C \right]$

Уравнение Бернулли.

Нелинейное уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x)y^m \quad (1)$$

где $m \neq 0, m \neq 1$, называется уравнением Бернулли. Его можно преобразовать в линейное уравнение, путем замены $z = y^{1-m}$, которое исходное уравнение сводится к виду

$$\frac{1}{1-m} z' + P(x)z = Q(x) \quad (2)$$

Уравнение (1) можно интегрировать с помощью методом Бернулли $y = uv$, либо методом вариации произвольной постоянной.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 4 \frac{\arctg x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{y}$

Решение. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = uv$.

Подставляя в исходное уравнение $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u \left(v' - \frac{2x}{1+x^2} v \right) = 4 \frac{\arctg x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{uv}$$

Принимаем за v какое-либо частное решение уравнения

$$v' - \frac{2x}{1+x^2} v = 0$$

Разделяя в нем переменные, находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \ln v = \ln(1+x^2) \Rightarrow v = 1+x^2$$

Для отыскания u имеем уравнение

$$u'v = 4 \frac{\arctg x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{uv},$$

или

$$v = 1+x^2 \quad u' = 4 \frac{\arctg x}{1+x^2} \sqrt{u}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2} \Rightarrow \sqrt{u} = \operatorname{arctg}^2 x + C$$

Таким образом, $u = (\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$ и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = (1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2.$$

10.1.9. Линейные дифференциальные уравнение второго порядка с постоянным коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 - постоянны причем $a_0 \neq 0$. Разделив все члены уравнения на a_0 и обозначим $\frac{a_1}{a_0} = p, \frac{a_2}{a_0} = q$, то уравнение (1) имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

Как известно для нахождения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка достаточно знать его фундаментальную систему частных решений. Будем искать частное решение уравнение (2) в виде

$$y = e^{kx} \quad (3)$$

Дифференцируя эту функцию дважды и поставив выражения для y, y' и y'' в уравнение (2), получим

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$$

Так как $e^{kx} \neq 0, x \in R$ то сокращая на e^{kx} получим

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (4)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (4) то e^{kx} будет решением уравнения (1).

Уравнение (4) называется характеристическим уравнением по отношению к уравнению (1). Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня обозначим их через k_1 и k_2 . При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Возможны следующие случаи

1. k_1 и k_2 - действительные причем
2. k_1 и k_2 - комплексные числа
3. k_1 и k_2 - действительные равные числа т.е k_1 и k_2

Рассмотрим каждый случай отдельно.

- I. Корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$.

В этом случае частными решениями уравнения (1) будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы т.к. $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{Const}$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (5)$$

Пример1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$

которое имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$. Тогда общий интеграл есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

II. Корни характеристического уравнения комплексные;

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

В этом случае частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (6)$$

Эти решения можно представить в виде суммы действительной и мнимой части

$$y_1 = e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

$$y_2 = e^{\alpha x} [\cos \beta x - i \sin \beta x]$$

частными решениями уравнения (1) будут действительные функции

$$\overline{y_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \overline{y_2} = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (7)$$

Функции $\overline{y_1}$ и $\overline{y_2}$ линейно независим так как

$$\frac{\overline{y_1}}{\overline{y_2}} = \frac{e^{2x} \cos \beta x}{e^{2x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}$$

Следовательно общее решение уравнение (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 \overline{y_1} + C_2 \overline{y_2} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (8)$$

где C_1 и C_2 -произвольные постоянные.

Важным частным случаем решения (8) являются случай, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые.

Это имеет место тогда когда в уравнение (1) $p = 0$ и она имеет вид

$$y'' + qy = 0$$

Характеристическое уравнение (4) примет вид $k^2 + q = 0$, $q \geq 0$

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \alpha = 0$$

В этом случае решение (8) имеет вид

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

Пример 2. Дано уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$

Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. $y|_{x=0} = 0$ $y'|_{x=0} = 1$

Решение. 1) Напишем характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ и найдем её корни $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$.

Следовательно, общий интеграл есть

$$y = e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$$

2) Найдем частное решение:

$$y' = -e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + e^{-x}[-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x]$$

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \Rightarrow \\ y'|_{x=0} = 1 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 = C_1 \\ 1 = -C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$$

III. Корни характеристического уравнения действительные и равные

$$k_1 = k_2 = k_0$$

В этом случае одно частное решение берем $y_1 = e^{k_1 x}$. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым.

Будем искать второе частое решение в виде $y_1 = u(x) \cdot e^{k_1 x}$, где $u(x)$ - неизвестная функция подлежащая определению

Нетрудно показать что $u(x)$ будет равна $u(x) = Ax + Bx$. В частности, можно положить $A=1, B=0$ тогда $u = x$.

Таким образом в качестве второго частного решения можно взять:

$$y_2 = x \cdot e^{k_1 x}$$

Это решение линейно независимо с первым так как

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq const$$

Поэтому общее решение уравнение (1) будет функция

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x) \quad (9)$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4 = 0$

Решение: $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k - 2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_0 = 2$

Общим интегралом будет $y = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$

Дифференциальные уравнения высшего порядка.

10.2.1. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

или в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

Как и в случае уравнения первого порядка, для уравнения второго порядка могут существовать общее и частное решение. А это рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. $y'' = 2$

Для решения этого уравнения введем обозначения

$$y' = u(x).$$

Тогда $y'' = u'(x)$, и исходное уравнения примет вид $u' = 2$.

Отсюда следует, что $u = 2x + C_1 \Rightarrow y' = 2x + C_1$.

Последнее интегрируя еще раз, найдем

$$y = x^2 + C_1x + C_2.$$

Полученное общее решение зависит от двух произвольных постоянных. Геометрически это решение представляет множество парабол. Для выделения из множества этих кривых какой-либо одной интегральной кривой необходимо, кроме координат точки (x_0, y_0) , через которую проходят параболы, дополнительно задать угловой коэффициент касательной, т.е. значение производной y' в этой точке.

Таким образом, условия, с помощью которых из общего решения уравнения второго порядка выделяется частное решение (начальные условия), имеют вид:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \text{ где } x_0, y_0 \text{ и } y'_0 - \text{ заданные числа.}$$

Зададим, на примере 1 следующие начальные условия: $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = 1$

Поскольку
$$\begin{cases} y' = 2x + C_1 \\ y = x^2 + C_1x + C_2 \end{cases}$$

то используя начальные условия, получаем для определения C_1 и C_2 систему уравнения.

$$\begin{cases} 1 = 2 \cdot 1 + C_1 \\ 2 = 1 + C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Следовательно искомое частное решение имеет вид $y = x^2 - x + 2$.

Нахождение такое решение называется задачей Коши, которое имеет для уравнения второго порядка.

Таким образом для уравнения второго порядка, имеет место теорема существования и единственности.

Теорема. Пусть правая часть $f(x, y, y')$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$ ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y' . Тогда какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0, y'_0) , этой области,

данное уравнение имеет единственное решение $y = g(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \quad (3)$$

Функция $y = g(x, C_1, C_2)$ называется общим решением уравнения (2) в области D .

Частное решение уравнение (2), будет $y = g(x, C_{10}, C_{20})$ удовлетворяющим начальным условием (3), где C_{10} и C_{20} находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = g(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = g'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

На примере 1 мы видели, что частное решение имеет вид $y = x^2 - x + 2$

10.2.2. Простейшие уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Здесь мы рассмотрим уравнение второго порядка, которые с помощью замены переменной сводятся к уравнению первого порядка.

1. Уравнение $y'' = f(x)$

называется простейшим уравнения второго порядка. Введем новую функцию $u = u(x)$ и положим $y' = u(x)$. Тогда $y'' = u'(x)$, и мы получим уравнение первого порядка:

$u' = f(x)$. Решая его, имеем

$$u(x) = \int f(x)dx + C_1,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных $f(x)$. Так как $u(x) = y'$, то имеем, что $y' = F(x) + C_1$. Отсюда, интегрируя еще раз, находим общее решение уравнения (1):

$$y = \int F(x)dx + C_1x + C_2.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

$$y' = u(x) \Rightarrow y'' = u'(x) \Rightarrow u'(x) = \sin x$$

$$u(x) = -\cos x + C_1 \Rightarrow y' = -\cos x + C_1 \Rightarrow y = -\int (\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1x + C_2.$$

2. $y'' = f(y, y')$

в этом уравнение x явно не содержит.

Для понижения порядка уравнения снова полагаем

$y' = u(y)$ где $y = y(x)$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du(y)}{dx} = \frac{du(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Поскольку $\frac{dy}{dx} = u(y)$, то

$$y'' = \frac{du}{dy} \cdot u = f(y, u)$$

получим уравнение первого порядка относительно функции $u = u(y)$.

Пусть $u(y) = g(y, C_1)$ является общим решением последнего уравнения.

Учитывая, что

$u(y) = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = g(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{g(y, C_1)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y, C_1)} = x + C_2$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' = \frac{(y')^2}{y}$

Решение. $y' = u(y) \Rightarrow y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$

Тогда $y'' = \frac{(y')^2}{y} \Rightarrow u \cdot \frac{du}{dy} = \frac{u^2}{y} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln u = \ln y C_1 \Rightarrow u = \frac{dy}{dx} = y C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln y = C_1 x + \ln C_2 \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

$$3. \quad y'' = f(x, y') \quad (3)$$

В этом уравнение y явно не содержит. Пологая $y' = u \Rightarrow y'' = u'$ и получим

уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = u \Rightarrow dy = u(x, C_1) dx \Rightarrow y = \int u(x, C_1) dx + C_2$

Пример 4. Решить уравнение $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{2x}{1+x^2} y'$.

Решение. Пологая $y' = u \Rightarrow y'' = u'$

$$u' = \frac{2x}{1+x^2} u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2x}{1+x^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2x}{1+x^2} dx \Rightarrow \ln u = \ln|1+x^2| + \ln C_1$$

$$u = (1+x^2) \cdot C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x^2) \cdot C_1 \Rightarrow y = \int C_1(1+x^2)dx + C_2 = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

10.2.3. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков.

Дифференциальное уравнение n – го порядка в общем виде записывается следующим образом:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или если она разрешено относительно $y^{(n)}$, то

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Общее решение уравнения n – го порядка зависит от n производных постоянных, т.е. является функцией вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (2)$$

При конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$

получается частное решение уравнения.

Для того чтобы из общего решения уравнения выделить частное решение, задаются начальные условия. В случае уравнения n – го порядка начальные условия имеют вид:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

Используя начальные условия (3) постоянные $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ определяется из следующей системы:

(4)

условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = 1$$

Решение.

$$y''' = (y'')' = 24x + 6 \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = (y'')' = 12x^2 + 6x + C_1$$

$$y' = 4x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = x^4 + x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

УСЛОВИЯМ.

$$y' = 4x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2$$

$$y'' = 12x^2 + 6x + C_1$$

В этом примере система (4) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = C_3 \Rightarrow C_3 = 0 \\ 0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \\ 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \end{cases}$$

И так, требуем частное решение, имеет вид:

$$y = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

10.2.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Большое количество задач математики механики, электротехники и других технических наук сводятся к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

1. Определение и общие свойства.

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad (1)$$

называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Здесь коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $b(x)$ – заданные функции аргумента x .

Пологая $a_0(x) \neq 0$, обе части уравнения (1) разделим на $a_0(x)$, то получим

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

где $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, $f(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$.

Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Если же $f(x) \neq 0$, то уравнение (2) называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Например, уравнения $y'' - 5y' + 6y = e^x$ и $y'' + y' + x^2y = 0$

являются линейным, причем первое из них неоднородное, а второе – однородное.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Рассмотрим некоторые теоремы (или свойства) относительно решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка (3), т.е.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Теорема 2. Если $y_1 = y_1(x)$ есть решение уравнения (3) и C – постоянная, то Cy_1 есть также решение уравнения (3).

Определение 1. Два решения (3) y_1 и y_2 называется линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е. если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

В противном случае решения называются линейно зависимыми. Иными словами, два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если существует такое постоянное число k , что $\frac{y_1}{y_2} = k \Rightarrow y_1 = ky_2$ при $a \leq x \leq b$.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $y'' - y = 0$.

Легко проверить, что функции $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$, являются решениями этого уравнения. При этом функции e^x и e^{-x} линейно независимы на R , так как

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq \text{const.}$$

Тогда как функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = 3e^x$ линейно зависимы, так как

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = \text{const.}$$

Определение 2. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ суть функции от x то определитель (детерминант)

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$$

называется определителем *Вронского* или вронскианом данных функций.

Теорема 3. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W(y_1, y_2) = 0$.

Теорема 4. Если функции y_1 и y_2 являются линейно независимыми два решения уравнения (3) то $W(y_1, y_2) \neq 0$.

В этом случае общее решение уравнения (3) имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Например для примера 1 решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = -e^x$ являются линейно независимыми т.е.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$

Следовательно общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Неоднородные линейные уравнения второго порядка.

10.3.1. Основные теоремы для решений неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

где p и q - постоянные числа, $f(x)$ - известная функция.

Структура общего решения такого уравнения (1) определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Общее решение неоднородного уравнения (1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения $y^* = y^*(x)$, $\bar{y} = \bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

Итак, общего решения уравнения (1) имеет вид

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x) \quad (3)$$

Нетрудно доказать, что сумма (3) есть общее решение уравнения (1). Таким образом, если известно общее решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$ однородного уравнения (2), то основная задача состоит в нахождении какого-либо частного решения $y^* = y^*(x)$ уравнения (1). Укажем общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения, которое называется методом вариации произвольных постоянных. Метод вариации заключается в следующем. Пусть общее решение однородного уравнения (2) есть

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$u(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (4)$$

где функция $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \quad (5)$$

Решение этой системы находится по формулам:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \quad ; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$$

где $w(y_1, y_2)$ – определитель Вронского.

Тогда общее решение уравнения (1) будет равна

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u(x)$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$

Решение. Можно показать что частные решения однородного уравнения

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

будут функции $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\cos x}{x}$. Из Вронского $w(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}$

Поэтому $u(x)$ можно найти по формулам (4) и (6) т.е.

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1 \cdot C_1(x) + y_2 \cdot C_2(x) = -\frac{\sin x}{x} \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} dx = \\ &= \frac{\sin x}{x} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx - \frac{\cos x}{x} \int \cos x dx = \frac{\sin x}{x} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x \right] - \frac{\cos x}{x} \sin x = \frac{\sin x}{x} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

10.3.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

где p и q - некоторые числа, а правая часть $f(x)$ - известная функция.

Однородное уравнение соответствует уравнению (1) есть

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

нам известно, что общее решение уравнения (1) представляет собой сумму общего решения уравнения (2) $\bar{y}(x)$ и частного решения $y^*(x)$ уравнения (1), т.е.

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x) \quad (3)$$

Частное решение $y^*(x)$ уравнение (1) можно найти методом вариации постоянных, с которым мы познакомились в первом пункте. Однако, если правая часть уравнения (1) имеют специальный вид, то существует более простой способ нахождения частного решения. Этот способ называется методом подбора или методом неопределенных коэффициентов формы частного решения (1). Рассмотрим некоторые случаи по отдельности.

Пусть правая часть уравнения (1)

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

В этом случае частное решение $y^*(x)$ следует искать в виде

$$y^*(x) = Q_n(x) \times x^r \quad (4)$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1$

Тогда общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Поскольку

$$f(x) = P_1(x) = 5x + 3$$

и $r=1$, то частное решение, согласно формуле (4), надо искать в виде

$$y^* = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$$

Подберем коэффициенты A и B таким образом, чтобы y^* было решением данного уравнения. Для этого подставим выражение для y^* в данное уравнение

$$(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = 5x + 3$$

$$2A + 2Ax + B = 5x + 3 \Rightarrow 2Ax + 2A + B = 5x + 3$$

$$\begin{cases} 2A = 5 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 5 \\ 5 + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ B = -2 \end{cases}$$

Итак, частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{5}{2}x^2 - 2x,$$

А общее решение будет

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 2x$$

II. Правая часть уравнение

$$f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$$

где $P_n(x)$ - многочлен, $a \in R$.

В этом случае частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = Q_n(x)e^{2x} \cdot x^r \quad (5)$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом a в показателе.

Замечание. Если $a = 0$ имеет место случай (I).

Пример 2 Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}$

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 3$

Общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Поскольку $k_2 = a = 3$, то $r=1$, и частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = (Ax + B)e^{3x} \cdot x$$

Находим $y^{*'}$ и $y^{*''}$ и ставим в исходное уравнение, после упрощений имеем

$$\begin{aligned} 8Ax + (2A + 4B) &= x + 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = \frac{7}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда частное решение будет

$$y^* = \left(\frac{1}{8}x + \frac{7}{16} \right) e^{3x} \times x$$

Общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{x}{8} \left(x + \frac{7}{2} \right) e^{3x}$$

III. Если $f(x) = ax + b$, то частное решение (1) пишется в виде

$$y^* = Ax + B$$

IV. Если $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) то частное решение (1) пишется в виде

$$y^* = Ax^2 + Bx + C$$

V. Если $f(x) = ae^{mx}$, то частное решение (1) пишется в виде

$$y^* = Ae^{mx}$$

VI. Если $f(x) = M \cos mx + N \sin mx$, где M, N и m – заданные числа.

В этом случае частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = A \cos mx + B \sin mx$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + i, k_2 = -2 - i$

Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Частное решение (1) надо искать в форме

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

$$y^{*'} = -A \sin x + B \cos x ; \quad y^{*''} = -A \cos x - B \sin x$$

Подставляя $y^*, y^{*'}$ и $y^{*''}$ в данное уравнение, получим

$$\begin{aligned} (4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x &= 2 \cos x - \sin x \\ \begin{cases} 4A + 4B = 2 \\ 4B - 4A = -1 \end{cases} &\Rightarrow A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение уравнения

$$y^* = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

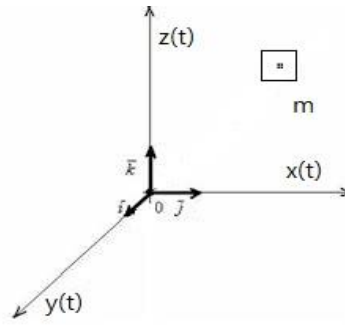
а общее решение уравнения

$$y = y^* + \bar{y} = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Система дифференциальных уравнений

10.4.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой несколькими дифференциальными уравнениями. Совокупность таких уравнений называется системой дифференциальных уравнений.



Предположим, что по некоторой кривой L в пространстве под действием силы F движется материальная точка m . Требуется определить закон движения, зависимость координат точки от времени $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$

Обозначим через $r = r(t)$ – радиус-вектор движущейся точки, то
 $r = x(t)i + y(t)j + z(t)k$.

Скорость и ускорение движущейся точки вычисляются по формулам

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k,$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k.$$

Сила F , под действием которой движется точки, является функцией времени, координат точки и проекцией скорости на оси координат. На основании второго закона Ньютона уравнение движение точки имеет вид:

$$ma = F$$

Проектируя векторы, стоящие в левой и правой частях этого равенства, на оси координат, получим три дифференциальных уравнения движения:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},) \end{cases} \quad (1)$$

Мы ограничимся изучением только системы уравнений первого порядка специального вида относительно искомых функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Эта система имеет вид

и называется системой в нормальной форме, или нормальной системой.

Решением системы (2) называется совокупность функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

$$u(t) = \frac{dx}{dt}, v(t) = \frac{dy}{dt}, w(t) = \frac{dz}{dt}$$
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \quad (3)$$

Для этой нормальной системы ДУ теорема Коши о существовании и единственности решения формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть правые части уравнений системы (3), т.е. функции $f_i(t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ непрерывны по всем переменным в некоторой области D и имеет в ней непрерывные частные производные: $\frac{df_i}{dx}, \frac{df_i}{dy}, \frac{df_i}{dz}$,

Тогда каковы бы ни были значения t_0, x_0, y_0, z_0 принадлежащие области D , существует единственное решение системы $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t), z_0 = z_0(t) \quad (4)$$

Для нахождения решения нормальную систему можно применить метод исключения неизвестных.

Покажем его применение на примере. Для простоты ограничимся системой двух уравнений.

Пример1. Пусть дана система уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0, y(0) = 1$

Решение. Дифференцируем первые из уравнений системы по t находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Учитывая второе уравнение системы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7 \frac{dx}{dt} + (-2x - 5y)$$

Теперь из первого уравнения системы находим y т.е.

$y = \frac{dx}{dt} + 7x$, это ставим к последнему уравнению и получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7x \frac{dx}{dt} - 2x - 5 \frac{dx}{dt} - 35x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12 \frac{dx}{dt} + 37x = 0$$

Итак, мы пришли к линейному однородному уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции $x = x(t)$. Составим характеристическое уравнение т.е. $x(0) = k^2 + 12k + 37 = 0$ $k_{1,2} = -6 \pm i, \alpha = -6, \beta = 1$.

Тогда общее решение этого уравнения будет

$$x(t) = e^{-6t} [C_1 \cos t + C_2 \sin t] \quad (*)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6t} [(-6C_1 \cos t + C_2) \cos t - (6C_2 + C_1) \sin t] \quad (**)$$

(*) и (**) ставим в $y = \frac{dx}{dt} + 7x$ и получим

$$y = y(t) = e^{-6t} [(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t] \quad (***)$$

Таким образом (*) и (***) являются решением данной системы т.е.

$$\begin{cases} x = e^{-6t} [C_1 \cos t + C_2 \sin t] \\ x = e^{-6t} [(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t] \end{cases}$$

Теперь находим частные решения удовлетворяющим начальным условиям

$$x(0) = 0 \text{ и } y(0) = 1$$

$$\begin{cases} 0 = e^0 [C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0] \\ 1 = e^0 [(C_1 + C_2) \cos 0 + (C_2 - C_1) \sin 0] \end{cases} \Rightarrow 0 = C_1, C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Следовательно искомое частное решение имеет вид

$$x = e^{-6t} \sin t, \quad y = e^{-6t} [\cos t + \sin t]$$

10.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим еще один метод интегрирования, применимый только к нормальным системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для простоты ограничимся системой (ЛДУ) трех уравнений с тремя неизвестными функциями $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$ т.е.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x = \alpha e^{kt}, y = \beta e^{kt}, z = \gamma e^{kt} \quad (2)$$

Нам нужно определить коэффициенты α, β, γ и показатель степени k так, чтобы функция (2) была решением системы (1).

Подставим эти функции и их производные в (1) и сокращая на множитель $e^{kt} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} k\alpha = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ k\beta = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ k\gamma = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) является однородной системой уравнений. Для того чтобы система (3) имела решения, отличные от нулевого, определитель системы должно быть равно нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Из (4) получим уравнение третьей степени относительно k и называется характеристическим уравнением для системы (1). Ограничимся случаем, когда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни k_1, k_2, k_3 .

Для каждого из этих корней напомним соответствующую систему уравнений (4) и определим коэффициенты $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$;

Если обозначим частные решения системы, соответствующие корню характеристического уравнения k_i , через $x_i, y_i, z_i, i=1,2,3$, то общее решение системы ДУ (1) запишется в виде

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$z(t) = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 t} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 t} \\ y(t) = C_1 \beta_1 e^{k_1 t} + C_2 \beta_2 e^{k_2 t} + C_3 \beta_3 e^{k_3 t} \\ z(t) = C_1 \gamma_1 e^{k_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 t} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 t} \end{cases}$$

Если среди корней характеристического уравнения (4) имеются комплексные вида $k_j = m \pm in, j=1,2,3$, то частные решения системы (1) ищется в виде:

$$x_j = \alpha_j e^{(m \pm in)t}, y_j = \beta_j e^{(m \pm in)t}, z_j = \gamma_j e^{(m \pm in)t}, j=1,2,3$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x'(t) = -x + y + z \\ y'(t) = x - y + z \\ z'(t) = x + y - z \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение системы. Поскольку

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1, \text{ то}$$

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(k-1)(k^2+4k+4)=0 \Rightarrow k_1=1, k_2=k_3=-2$$

1) При $k=1$ находим решения системы (3) т.е.

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Решения последней однородной системы находим согласно формулам:

$$\alpha_1 = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3m \quad \beta_1 = -m \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3m \quad \gamma_1 = m \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3m$$

В частности, если $m=1, \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = -3$.

2) при $k_2 = k_3 = -2$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \equiv -16 \neq 0$$

В этом случае последняя система имеет единственное нулевое решение

$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ Итак, при $k_2 = -2$ $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ и при $k_3 = -2$ также

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0$$

Таким образом, исходная система имеет решение

$$x(t) = -3C_1 e^t + 0 + 0 = -3C_1 e^t, \quad y(t) = -3C_1 e^t + 0 + 0 = -3C_1 e^t$$

Упражнения:

Решить дифференциальные уравнения

1. $(x+1)dx + \sqrt{y}dy = 0$. 2. $xy' = y^2 + 1$.

3. $(x^2 + 4)y' = x(y + 5)$. 4. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

5. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$, $y(0) = 0$. 6. $y' + 2xy = \frac{x^2}{y^2}$.

7. $y'' = 6x^2 - \sin x$. 8. $y^2 y'' = (y')^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Найти общее решение ДУ второго порядка

9. $y'' + 2y' - 15y = 0$. 10. $y'' - 10y' + 25 = 0$.

11. $y'' - 4y' + 13y = 0$. 12. $y'' + 4y = 0$.

13. $y'' + 4y = x$. 14. $y'' - 2y' = 2e^x$.

15. $y'' - 4y' + 4 = \sin 2x$.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Глава XI. Теория рядов

11.1.1. Введение

При решении многих задач математического анализа приходится рассматривать суммы, составленных из бесконечного количество слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества каких-то однотипных объектов (чисел, функции и т.п.) решается в теории рядов, составляющей одну из важных глав курса высшей математики. Таким образом, мы займемся изучением свойств бесконечных рядов, а также разложением функций в степенные и тригонометрические ряды которые имеют широкое применение в прикладных задачах. Например, степенные ряды являются незаменимым средством приближенных вычислений. В частности, с помощью степенных

рядов вычисляются приближенные значения функций, приближенное вычисление корней, приближенное вычисление определенных интегралов и так далее. Например, $\ln 0,5$, $\sqrt[4]{650}$, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

11.1.2. Числовой ряд. Общий член ряда.

Определение 1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется числовым рядом. При этом числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда.

Член ряда a_n , с произвольным номером n называется общим членом. Ясно, что a_n есть некоторая функция от n , т.е. $a_n = f(n)$, $n \in N$.

Например, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ есть ряд с общим членом $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n -й частичной суммой ряда и ее обозначим через S_n . Итак,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2)$$

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

11.1.3. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда

Определение 3. Если последовательность S_n частичных сумм имеет предел, т.е. существует число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а число называется суммой ряда.

В этом случае также говорят, что ряд сходится к сумме и пишут

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. не существует, то говорят, что ряд расходится или он не имеет суммы.

Пример 1. Рассмотрим ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ (3)

Это геометрическая прогрессия с первым членом a и знаменателем q ($a \neq 0$).

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна при ($q \neq 0$),

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| > 1$ то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. в этом случае ряд (3) расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$ (4)

Так как $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то для n -й частичной суммы ряда имеем

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow S_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Итак, ряд (4) сходится и его сумма равна 1.

11.1.4. Общие свойства сходящихся рядов.

1°. Если ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится, то сходится и любой ряд, полученный из него отбрасыванием конечное число членов.

Доказательство. Пусть S_n – сумма n первых членов, ряда (1), S_k – сумма k отброшенных членов, S_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в S_k . Тогда имеем

$S_n = S_k + S_{n-k}$ где S_k – постоянное число, не зависящее от n . Из последнего соотношения следует, что, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-k}$.

2° Если ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

сходится и его сумма равна S , то ряд

$$ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n + \dots,$$

где k – какое –либо число, также сходится и его сумма равна kS .

3° Если ряды

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ и}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

сходится и их суммы, соответственно равны S' и S'' , то ряды

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

$$\text{и } (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) + \dots$$

также сходится и их суммы, соответственно, равны $S' + S''$ и $S' - S''$.

11.1.5. Необходимые признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основная задача заключается о том, что сходится ли данный ряд или расходится. В приложениях обычно применяются лишь сходящиеся ряды. Поэтому важно знать признаки сходимости рядов. Рассмотрим сначала необходимый признак сходимости ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости)

Если ряд сходится, то его n – й член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Доказательство. Пусть ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (1)$$

Где S – сумма ряда (конечное число); но тогда имеет место также равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \quad (2)$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0 \text{ или}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если n -й член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

Пример 1. Ряд $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$ расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отметим, что рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным.

11.1.6. Достаточные признаки сходимости.

Теорема 1. (Первый признак сравнения)

Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

Если члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2), т.е. $a_n < b_n$ ($n=1,2,3,\dots$), и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Решение. Исходный ряд сравниваем сходящего рядом

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Поскольку $a_n < b_n$ ($n=1,2,3\dots$), то согласно теоремы 1 исходный ряд также сходится.

Теорема 2. (Второй признак сравнения)

Если члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2), т.е. $a_n \geq b_n$, и ряд (2) расходится, то и ряд (1) расходится.

Пример 4. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

рассходится, так как его члены (начиная со второго) больше

соответствующих членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ который

рассходится т.е. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq 2$). Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то :

- 1) если $d < 1$, ряд сходится,
- 2) а если $d > 1$, ряд расходится.

Пример 5 Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^2} \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots$

Решение. $a_n = \frac{2n-1}{3^n} \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3^n} \cdot \frac{3^n}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3}$$

Итак, $d = \frac{1}{3} < 1$, и следовательно данный ряд сходится.

Признак Коши

Если для ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

- 1) $K < 1$ то ряд сходится
- 2) $K > 1$ то ряд расходится

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Решение. Применим признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1. \text{ Ряд сходится.}$$

Интегральный признак:

Пусть члены ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Положительны и не возрастает, т.е.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots,$$

и пусть $a_n = f(n)$ – непрерывная, невозрастающая функция, $n \in N$.

Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ несобственный интеграл сходится то ряд (1) сходится, если интеграл расходится то ряд (1) тоже расходится.

11.1.7. Знакопеременные ряды

До сих пор мы изучали только ряды, все члены которых были положительными. Теперь мы перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называются знакопеременными.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2} + \dots \quad (1)$$

Изучение знакопеременных рядов мы начнем с частного случая, так называемых знакопеременных рядов, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, и за каждым отрицательным членом следует положительный.

Обозначая через $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, знакопеременный ряд запишем следующим образом:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^n u + \dots \quad (2)$$

Для знакопеременных рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (2) абсолютные величины членов убывают:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \quad (3)$$

и общий член ряда стремится к нулю т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m .

Запишем теперь S_{2m} , группируя члены иным образом:

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратных скобках будет также положительной. Поэтому $S_{2m} < u_1$ для любого значения m . Таким образом, последовательность четных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m , оставаясь при этом

ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет предел $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = 0$. При этом, так

как $S_{2m} < u_1$ то ясно, что $0 < S \leq u_n$. Рассмотрим теперь

сумму нечетного числа членов: $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$.

При $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ и, следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел S . Это означает, что вообще $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Пример 1. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n-1)^2} - \dots$$

Решение. Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2^2} > \frac{1}{2 \cdot 3^2} > \frac{1}{3 \cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n-1)^2} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0$$

Следовательно, ряд сходится.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда.

Будем предполагать, что в ряде

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (4)$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для таких рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Если для знакопеременного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5)$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| \quad (6)$$

то данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (5) и (6):

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + \dots + \frac{u_n + |u_n|}{2} + \dots \quad (7)$$

Имеем:

$$\text{при } u_n > 0 \quad u_n = |u_n| \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|$$

$$\text{при } u_n < 0 \quad |u_n| = -u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0$$

Таким образом, члены ряда (7) либо равны членам сходящегося ряда (6), либо меньше их. Поэтому ряд (7) сходится на основании признака сравнения

Умножив все члены сходящегося ряда (5) на $\frac{1}{2}$ получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \dots + \frac{|u_n|}{2} + \dots \quad (8)$$

Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (6) и (7)

$$\left(\frac{u_1 + |u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2} \right) + \left(\frac{u_2 + |u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2} \right) + \dots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п. 3.

Но ряд (4) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2 \cdot \left[\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2} \right] = 2 \cdot \frac{u_n}{2} = u_n$$

Следовательно, ряд (4) также сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots \quad (9)$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (9')$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, на основании доказанного признака сходится и данный ряд (9). Этот признак является достаточным, но не необходимым. Это значит, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Действительно рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots \quad (10)$$

который, очевидно, сходится по признаку Лейбница. Между тем, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (9) является гармоническим и, следовательно, расходится.

Хотя рассмотренные выше ряды (9) и (10) оба сходятся, однако характер их сходимости различен.

Ряд (9) сходится одновременно с рядом , составленным из абсолютных величин его членов, тогда как ряд , составленный из абсолютных величин сходящегося ряда (10) расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots,$$

составленный из абсолютных величин его членов.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий абсолютно сходящийся ряд будет сходящимся.

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots ,$$

составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можем сказать , что ряд (9) является абсолютно сходящимся, а ряд (10) условно сходящимся.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Это свойство, которое мы приводим без доказательства, формулируется следующим образом.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов. Наоборот, в неабсолютно сходящемся ряде нельзя переставлять члены, так как в случае их перестановки может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов, мы подразумеваем, что меняем местами бесконечное множество членов, так как, переставляя два, три, четыре или любое конечное число членов, мы, очевидно, не изменим суммы ряда.

Рассмотрим в качестве примера неабсолютно сходящийся ряд (10)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

сумму которого обозначим через S .

Переставим члены этого ряда, поместив после каждого положительного члена два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots$$

Функциональные ряды

11.2.1. Область сходимости функционального ряда

Определение 1. Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$$

члены которого являются функции от x , определенные в некоторой области изменения аргумента X называются функциональными.

Определение 2. Совокупность значений X , при которых функции $f_i(x), i=1,2,\dots$ определены и ряд (1) сходится, называют областью сходимости функционального ряда.

Областью сходимости функционального ряда чаще всего бывает какой-нибудь промежуток оси OX .

Пример 1. Определить область сходимости функционального ряда

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} + \dots$$

Решение. Члены ряда образуют геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{x^2}$ и $b_1 = \frac{1}{x^2}$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}$$

геометрическая прогрессия сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| > 1$.

Итак, данный ряд сходится для тех значений X , при которых $\frac{1}{x^2} < 1$ или

$$x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad -\infty < x < -1 \text{ и } 1 < x < +\infty.$$

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых его n членов

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

Является функций переменной X и её обозначим через $S(x)$.

Например для примера 1 имеем

$$S(x) = \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}(x^2 - 1)}$$

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Признак Вейерштрасса

Если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ т.е

$|f_n(x)| \leq C_n, n = 1, 2, 3, \dots$ и числовой ряд $C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots$ сходится, то

функциональный ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ в этой области сходится равномерно.

Пример 2. Исследовать сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$,

$x \in R$.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

согласно интегральному признаку сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $X \in R$.

11.2.2. Основные свойства равномерно сходящихся рядов

1°. Всякий функциональный ряд, равномерно сходящихся на $[a, b]$, сходится абсолютно в любой точке этого отрезка $[a, b]$.

2°. Если члены равномерно сходящихся на отрезка $[a, b]$ функционального ряда $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ непрерывны, то его сумма также непрерывна на отрезке $[a, b]$.

11.2.3. Интегрирование и дифференцированию функционального ряда.

1. Если ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ где $f_i(x)$, непрерывные функции, равномерно сходится на $[a, b] \in X$ и имеет сумму $S(x)$ то ряд

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx + \dots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$

2. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ определены в X и имеет в этой области производные $f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x), \dots$.

Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\}'_x$.

Пример 3. Можно ли интегрировать на сегменте $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$

функционального ряда $\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos nx + \dots$

Решение. Поскольку $\left| \frac{1}{2^{n-1}} \cos nx \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, n \in N$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

сходится, тогда согласно признаку Вейерштрасса исходный функциональный ряд равномерно сходится на $(-\infty, \infty)$.

Таким образом исходный ряд можно интегрировать почленно по отрезку

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right].$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos nx dx + \dots$$

Тема: Степенные ряды

11.3.1. Степенной ряд. Теорема Абеля.

Определение 1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и a - постоянные числа.

В частности при $a = 0$ то получим ряд $a = 0$ то получим ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

Например,

$$3 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

являются степенными рядами.

Признак Абеля. Если степенной ряд (1) в точке $x = x_0$ сходится, то он абсолютно сходится при всех x удовлетворяющий неравенству $|x - a| < |x_0 - a|$

11.3.2. Область сходимости степенного ряда.

Определение 2. Множества всех значений x для которых ряд (1) сходится называется *областью сходимости* степенного ряда.

Для степенного ряда (1) возможны только три случая:

- 1) Ряд сходится в единственной точке $x = a$;
- 2) Ряд сходится при всех значения x ;
- 3) Существует такое $R > 0$, что ряд сходится при всех x , для которых $|x - a| < R$, и расходится при всех x , для которых $|x - a| > R$,

Итак, областью сходимости ряда (1) является или точка $x = a$ или вся числовая прямая, или конечный интервал $(a - R, a + R)$, к которой присоединяется один или оба конца.

Определение 3. Интервал $(a - R, a + R)$ называется интервалом сходимости ряда (1), а число R называется радиусом сходимости этого ряда.

11.3.3. Радиус сходимости степенного ряда.

Для определения интервала и радиус сходимости ряда (1) можно пользоваться одним из следующих способов.

1. Если среди коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ нет равных нулю, т.е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x - a$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (1^*)$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}(x-2)^{n+1} + \dots$$

Решение. $a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1$$

Итак, ряд в промежутке $-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ сходится.

Если $x = 3$, то получим ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

которое согласно интегральному признаку сходится а если положим $x = 1$, то имеем:

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots$$

Этот ряд абсолютно сходится. Таким образом интервал сходимости исходного ряда будет $1 \leq x \leq 3$

2. Если исходный ряд имеет вид $a_0 + a_1(x-a)^p + a_2(x-a)^{2p} + \dots + a_n(x-a)^{np} + \dots$

где $p \geq 2$, то

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \quad (2^*)$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степенной разности $x-a$ любая, то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} \quad (3^*)$$

Во всех случаях интервал сходимости можно находить применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду.

4. Степенные ряды можно по членное можно дифференцировать и интегрировать

Если
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \Rightarrow$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1},$$

где $-R < x-a < R$.

11.3.4. Разложение функции в степенные ряды.

Ряды Тейлора и Маклорена.

1. Введение

Во многих практических исследованиях приходится вычислить значений функций с определенной точности. Например, $e^{0,2}$, $\sqrt[3]{245}$, $\ln 2$, $\arctg 1,2$ и другие. Оказывается, с помощью разложением функции в степенные ряды

получим очень важные ряды формулы которые дает нам возможность вычислить значений функции с большой точности. С этой целью мы познакомимся разложением функции в степенные ряды.

11.3.5. Разложение функции в степенные ряды.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - a| < R$ т. е $a - R < x < a + R$, может быть разложена в этом интервале в сходящейся к ней бесконечный степенной ряд Тейлора которые имеет вид

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (1)$$

Этот ряд представляет геометрическая прогрессия с первым членом равным $b_1 = 1$ и со знаменателем $q = x$. Тогда сумма этого ряда будет равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - x}$$

Таким образом, мы получим разложение функции $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ в степенной ряд т.е.

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (1)$$

1) Разложение функции $f(x) = \ln(1 + x)$ в степенной ряд.

В разложение (1) положим $x = -z$,

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n-1} z^{n-1} + \dots$$

Поскольку $0 \leq |z| \leq |x| < 1$, то последнее равенство можно интегрировать в пределах от 0 до x , т.е.

$$\int_0^x \frac{1}{1 + z} dz = \int_0^x (1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n-1} z^{n-1} + \dots) dz$$

$$\ln(1+z) \Big|_0^x = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots \right) \Big|_0^x \Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad -1 < x < 1 \quad (2)$$

Если в этой формуле заменить x на $-x$ то получаемая ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \quad (3)$$

который сходится в интервале $(-1;1)$.

С помощью рядов (1) и (2) можно вычислить логарифмы чисел, заключенных между нулем и двумя.

Можно вывести формулу для вычисления натуральных логарифмов любых целых чисел.

Вычитая из равенства (2) почленно равенства (3) получим

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

Положим, далее,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow x = \frac{1}{2n+1}$$

При любом $n > 0$ имеем $0 < x < 1$, поэтому

$$\ln \frac{n+1}{n} = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

при $n=1$ отсюда получаем:

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right] = 0,693147$$

2) Разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд.

В разложение (1) положим, $x = -z^2$, то получим

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots$$

Этот ряд можно интегрировать в пределах от 0 до x т.е.

$$\int_0^x \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^x (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots) dz$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Например при $x=1$, получим

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \dots$$

11.3.6. Разложение элементарных функции в ряд Маклорена.

Нам известно, что ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (3)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (4)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5)$$

11.3.7. Биномиальный ряд

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m – произвольное постоянное число.

Для этой функции имеет место следующее разложение

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-n+1]}{n!}x^n + \dots$$

(1)

Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям

Введение

Разложения элементарных функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arctg x$, $(1+x)^n$, $\ln(1+x)$ и так далее в ряд Маклорона дает возможность приближённое вычисления значений функций, вычисления корней и пределов а также определенные интегралы когда подынтегральная функция не имеет первообразная выраженных в элементарных функциях.

Рассмотрим конкретные примеры относительно только что сформулированных приближенных вычислениях.

11.4.1. Приближенное нахождение значений функций

Пример 1. Вычислить $\sin 1$ с точности до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением $\sin x$ в ряд Маклорона т.е

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Здесь полагаем $x = 1$, и имеем

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \dots$$

Если отбросить все члены, начиная с 4-го, то погрешность будет по

абсолютной величине меньше $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ (ряд для $\sin 1$ есть ряд,

удовлетворяющий признак Лейбница) Отсюда.

$$\sin 1 \approx \sin 57^\circ 17' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 1 - 0,166666 + 0,008333 = 1 - 0,158333 = 0,84166$$

с точностью 0,0001.

Пример 2. Пользуясь разложением $\cos x$ в ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение. Так как

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Положим $x = 18^\circ = \frac{\pi}{10}$, тогда

$$x = \cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{10} = 0,31416, \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 = 0,009974$$

Достаточно взять три члена ряда, так как $\frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^6 < 0,0001$

Тогда

$$\cos 18^\circ \cong 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,09870 + \frac{1}{24} \cdot 0,00974 = 0,9511$$

Пример 3. Вычислить $\ln 1,04$ с точностью до 0,0001

Решение. Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

В этом равенстве положим $x = 0,04$ и имеем:

$$\ln(1,04) = 0,04 - \frac{(0,04)^2}{2} + \frac{(0,04)^3}{3} - \frac{(0,04)^4}{4} + \dots = 0,04 - 0,0008 + 0,0000064 - \dots$$

Откуда $\ln(1,04) \cong 0,0392$

11.4.2. Приближенное вычисление корней

Пример 4. Вычислить $\sqrt[5]{130}$ с точностью 0,001

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Поскольку $130 = 5^3 + 5$, тогда

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3 + 5} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = 5\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$(1+0,04)^{\frac{1}{3}} = 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} (0,04)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} (0,04)^3 + \dots \right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{9} \cdot \frac{0,0016}{2} + \frac{5}{81} \cdot \frac{0,000064}{2} + \dots = 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{9} \cdot 0,008 + \frac{5}{81} \cdot 0,00032 - \dots$$

четвертый член меньше 0,001, и так $\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0,0667 - 0,0009 = 5,066$

11.4.3. Приближенное вычисление пределов и интегралов

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Решение. Заменяя $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$ их разложениями в степенные ряды,

$$\text{получим } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3!} - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5!}\right) + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + \dots \right] = \frac{1}{6}$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью до 0,0001

Решение. Заменяя в подинтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \dots \cong$$

$$\cong 0,25 - 0,0017 = 0,2483$$

11.4.4. Разложение в ряд Фурье. Непериодические функции.

Пусть $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Так как сумма тригонометрического ряда является периодической функцией, то очевидно, что данная непериодическая функция не может быть разложена в ряд Фурье.

Рассмотрим теперь эту функцию на интервале $(-l < x \leq l)$ и попытаемся построить ряд Фурье, который имел бы ее своей суммой в этом интервале.

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\overline{f(x)}$ – с периодом $T = 2l$, значение которой на интервале $[-l, l]$ совпадают со значениями функции $f(x)$.

Если для функции $\overline{f(x)}$ выполняются условия теоремы Дирехле, то ее можно представить соответствующим рядом Фурье. Этот ряд на интервале $(-l < x \leq l)$ во всех точках непрерывности функции имеет своей суммой $f(x) = \overline{f(x)}$. В некоторых случаях приходится иметь дело с функциями, заданными только в интервале $0 < x \leq l$.

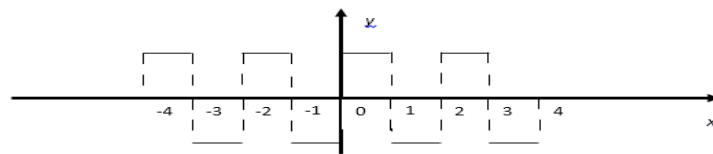
В этом случае мы можем сначала продолжить по какому-либо закону функцию на интервале $-l \leq x \leq 0$, а затем продолжить её на всю числовую прямую периодически с периодом $2l$.

Продолжить функцию из интервала $0 \leq x \leq l$ на интервал $-l \leq x \leq 0$, можно произвольным образом.

В основном функцию продолжают четным или нечетным образом. Если функция продолжается четным образом, т.е. $f(-x) = f(x)$, то ряд Фурье содержит только косинусы и свободный член. Если же функция продолжается нечетным образом, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фурье содержит только синусы.

Таким образом, если функция задана в интервале $0 \leq x \leq l$, то продолжая ее на интервал $-l \leq x \leq 0$, а затем продолжая полученную функцию периодически на всю числовую прямую, мы сможем получить бесчисленное множество рядов Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд по синусу функцию $f(x) = 1$, заданную в интервале $0 < x \leq 1$.



Решение. Для разложения функции в ряд по синусам, надо сначала продолжить на интервал $-1 < x \leq 0$ нечетным образом, а затем полученную функцию продолжить периодически на всю числовую прямую.

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = a_n = 0 \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

Здесь $2l = 2 \Rightarrow l = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \end{cases}$$

Поскольку $f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$ – четное, то $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

$$\frac{2}{1} \int_0^1 \sin n\pi x dx = -2 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1]$$

Ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right]$$

11.4.5. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$.

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции, период которых отличен от 2π .

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирехле, имеет период $T = 2l$, т.е.

$$f(x \pm 2l) = f(x)$$

Введем новую независимую переменную $z = \frac{\pi}{l}x \Rightarrow x = \frac{l}{\pi}z$ и рассмотрим

функцию $\varphi(z) = f\left(\frac{l}{\pi}z\right) = f(x)$.

Покажем, что есть функция с периодом 2π . Действительно,

$$\varphi(z + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(z + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}z + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = \varphi(z).$$

Составим для функции $\varphi(z)$ ряд Фурье.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kz + b_k \sin kz), \quad \text{где коэффициент } a_0, a_k, b_k \text{ находится по}$$

формулам Фурье. В этом случае

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) dz.$$

Учитывая подстановку $z = \frac{\pi}{l}x$ и $dz = \frac{\pi}{l}dx$ получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \cos kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k}{l} x \cdot \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \sin kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx$$

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющий период $2l$, коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x dx; \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx; \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

В этом случае ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (2^*)$$

Если $f(x)$ четный функции, то

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \\ a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x dx; \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (4^*)$$

Если $f(x)$ нечетной функции, то коэффициенты Фурье будут равны

$$\left. \begin{aligned} a_0 = a_k = 0, \\ b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (6^*)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l = 2$, заданную на интервале $-1 \leq x \leq 1$ формулой $f(x) = x - 1$

Решение. Коэффициенты Фурье находим по формулам (1*), полагая $l = 1$.

Учитывая подстановку $z = \frac{\pi}{l} x dz = \frac{\pi}{l} dx$ получим

$$a_0 = \int_{-1}^1 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-1}^1 = -2$$

$$a_k = \int_{-1}^1 (x-1) \cos kx dx = \int_{-1}^1 x \cos kx dx = 0$$

Так как $f(x) = x \cos kx$ нечетная функция.

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^1 (x-1) \sin kx dx = - \frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} dx + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = - \frac{1}{k\pi} [\cos k\pi + \cos(-k\pi)] + \\ &+ \frac{1}{k\pi} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = - \frac{2}{k\pi} \cos(-k\pi) = - \frac{2}{k\pi} (-1)^k \end{aligned}$$

Итак, $a_0 = a_k = 0, \quad b_k = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k \quad b_1 = \frac{2}{\pi}, b_2 = \frac{2}{2\pi}, b_3 = \frac{2}{3\pi}, \dots$

Тогда ряд Фурье для функции

$$f(x) = x - 1 = -1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \dots \right]$$

В частности, $x = 0$, то $f(0) = -1$

Тригонометрические ряды. Ряды Фурье.

11.5.1. Периодические процессы и периодические функции

Весьма многие процессы, происходящие в природе и механике, обладают свойством повторяться через определённые промежутки времени. Такие процессы называются периодическими.

Примерами периодических процессов могут служить движения шатуна и поршня в двигателях автомобиля, явления, связанные с распространением электромагнитных колебаний, и многие другие

Изучение периодических процессов математически описывается периодическими функциями.

Нам известно, что функция $f(x)$ называется периодической, если для любого $T \neq 0$, выполняется соотношение $f(x + T) = f(x)$, где T – период.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен $T = 2\pi$:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x.$$

Функции $\sin kx$ и $\cos kx$ также являются периодическими с периодом 2π .

Любая линейная комбинация простейших функций, т.е. любая функция вида

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

также является периодической с периодом 2π .

Простейший периодический процесс – гармоническое колебание – описывается периодическими функциями $\sin kx$ и $\cos kx$. Более сложные периодические процессы, описываются функциями, составленными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $\sin kx$ и $\cos kx$.

Ортогональность системы простейших функций

Определение 1. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, называются ортогональными друг другу на это отрезке, если

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = 0$$

Приведем несколько формул, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Каковы бы ни были целые числа m и n , имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n. \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n. \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0, \quad (4)$$

Докажем, например, равенство (1). Воспользуемся известной формулой

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Пусть сначала $m \neq n$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

так как $\sin(m \pm n)x = 0$

Если $m = n$, то $\cos mx \cdot \cos nx = \cos^2 mx = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos 2mx] dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Аналогично можно показать справедливость и равенства (2),(3) и (4).

Тригонометрические ряды

Определения 2. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5)$$

называется тригонометрическим рядом, а постоянные числа

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Так как члены тригонометрического ряда (5) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма $S(x)$ ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π .

Теперь займемся к вопросу о разложении заданной функции $f(x)$ в ряд (5).

Предположим, что $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π , и что для всех x справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6)$$

В таком случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд. Предполагая, что этот ряд правильно сходящийся на сегменте $[-\pi, \pi]$ нужно найти его коэффициенты. Относительно коэффициентов ряда (6) имеет место следующая теорема.

Теорема. Если для всех x имеет место равенство (6), причем ряд в правой части этого равенства сходится правильно на всей числовой прямой, то справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Доказательство. Как известно, что правильно сходящийся функциональный ряд можно интегрировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Но так как согласно формуле (4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad \text{то}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

что совпадает с формулой (7).

Теперь докажем формулу (8). Для нахождения коэффициента a_n умножим ряд (6) почленно на $\cos kx$, где k – целое положительное число, т.е.

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

Ряд правой части этого равенства является правильно сходящийся на отрезке $[-\pi, \pi]$, следовательно возможно почленное интегрирование этого ряда:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \quad (10)$$

Здесь $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$ на основании формулы (4), а вследствие равенства (1) и (3)

под знаком суммы отличен от нуля только один интеграл при $n = k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi.$$

Поэтому равенство (10) имеет вид $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi$, откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

Итак, доказана формула (8).

Чтобы доказать формулу (9) умножаем обе части равенства (6) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π , на основании (2), (3) и (4) найдем выражения для коэффициентов b_k :

Таким образом, коэффициенты ряда (6) определяемые по формулам (7), (8) и (9), называются коэффициентами Фурье, а ряд (5) называется рядом Фурье

Сходимость ряда Фурье

При выводе формул (7), (8) и (9) мы заранее предполагаем, что функция $f(x)$ разлагается в правильно сходящийся тригонометрический ряд (5).

Естественно возникает вопрос ряд Фурье сходящийся и если он сходится, то имеем-ли мы утверждать, что он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций. Достаточные условия сходимости ряда Фурье, и, следовательно, возможность разложения функций в ряд Фурье даются теоремой Дирехле (1805-1959) – немецкий математик.

Прежде чем формулировать эту теорему введем два определения.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на сегменте $[a,b]$, если этот сегмент можно разделить на конечное число сегментов, внутри каждого из которых функция либо возрастает, либо только убывает, либо постоянно.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирехле на сегменте $[a,b]$, если:

- 1) Функция непрерывна на сегменте $[a,b]$ или же имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода;
- 2) Функция кусочно-монотонна на сегменте $[a,b]$.

Теорема. (Дирехле) Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом сегменте условиями Дирехле. В таком случае ряд Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при $x \rightarrow x_0$ слева и справа т.е.

$$S(x_0) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right] \cdot \frac{1}{2}$$

Доказательство этой теоремы мы проводить не будем.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ формулой $f(x) = x$.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирехле и, следовательно может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулы (7), (8), и (9), найдём коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [\pi^2 - \pi^2] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \frac{1}{\pi k^2} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi k^2} [\cos \pi k - \cos \pi k] = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{1}{\pi k} [-\pi \cos \pi k - \pi \cos \pi k] + \frac{1}{k^2 \pi} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ = \frac{-2}{k} \cos k\pi = \frac{-2}{k} (-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$$

Таким образом $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$ $b_1 = \frac{2}{1}, b_2 = -\frac{2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = -\frac{2}{4}, \dots$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ имеет вид

$$f(x) = x = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right]$$

Если положим $x = \frac{\pi}{2}$, то

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2 \left[\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5} - \dots \right]$$

или

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left[1 - 0 - \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{5} - \dots \right]$$

Отсюда находим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

11.5.1. Основные свойства четных нечетных функций.

1° Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.

Пусть, например, $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции. Докажем, что функция $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ также четная, так как $f(x) \cdot g(x)$ и $g(-x) = g(x)$, тогда $h(x) = f(x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$, т.е. $h(x)$ – функция четная.

Вторая часть утверждения 1°, аналогично доказывается.

2°. Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Пусть $f(x)$ – четная, а $g(x)$ – нечетная, тогда $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, и $f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x)g(x)$

3°. Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad (1)$$

4°. Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \quad (2)$$

11.5.2. Разложение в ряд Фурье четную функцию.

Пусть $f(x)$ – четная.

Так как $\cos kx$ – функция четная, а $\sin kx$ – функция нечетная, то произведение $f(x)\cos kx$ – является функцией четной, а $f(x)\sin kx$ – функцией нечетной (свойства 1° и 2°).

На основании свойств 3° и 4° получим

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Согласно этому ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (4)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$

Решение. Функция $f(x)$ – четная, поэтому коэффициенты ряда определяются по формулам (3):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^n - 1]$$

Таким образом,

$$a_0 = \pi, a_1 = -\frac{4}{\pi}, a_2 = -\frac{4}{4\pi} [(-1)^2 - 1] = 0, a_3 = -\frac{4}{9\pi}, a_4 = 0, \dots$$

Ряд Фурье соответствующий функции $f(x)$ имеет вид

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!} + \dots \right]$$

Если $x = \pm \frac{\pi}{2}$, то $\left| \pm \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$

11.5.3. Разложение в ряд Фурье нечетной функции.

Пусть $f(x)$ нечетную функцию, ее надо разложить в ряд Фурье.

Согласно свойств 1° и 2° произведение $f(x) \cos kx$ является функцией нечетной, а $f(x) \sin kx$ – функцией четной. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx \quad (6)$$

Таким образом, четная функция разлагается в ряд только по косинусам, а нечетная функция- только по синусам кратных дуг.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$

Решение. Согласно формулам (5) имеем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin kx dx \\ v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{k} \cos k\pi - \frac{\pi}{k} \cos k\pi \right] = -\frac{2}{k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} (-1)^{k+1} \end{aligned} \right\}$$

Итак, для функции $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) = x &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin kx = \\ &= 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sin kx + \dots \right] \end{aligned}$$

Мундарижа

Сўзбоши.....	4
Мундарижа.....	12
I БОБ. Функция. Бошланғич тушунчалар	
1.1.5. Функция тушунчаси.....	13
1.1.6. Функциянинг берилиш усуллари.....	16
1.1.7. Функциянинг асосий характеристикалари.....	17
1.1.8. Асосий элементар функциялар.....	19
II БОБ. Лимитлар назарияси.	
2.1.6. Сонли кетма-кетликнинг таърифи.....	20
2.1.7. Чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар	20
2.1.8. Сонли кетма-кетликнинг лимити.....	21
2.1.9. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ кетма-кетликнинг лимити.....	21
2.1.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ иккинчи ажойиб лимит.....	22
Функциянинг лимити. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар.	
2.2.6. Функциянинг лимити.....	24
2.2.7. Чексиз кичик функциялар ва уларнинг хоссалари.....	25
2.2.8. Чексиз катта функциялар.....	26
2.2.9. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар.....	27
2.2.10. $x \rightarrow 0$ да $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциянинг	27
лимити.....	
III БОБ. Функцияларнинг узлуксизлиги. Биринчи ва иккинчи тур	
узилишлар	29
3.1.5. Аргумент ва функциянинг ўсиши.....	30
3.1.6. Функция узлуксизлигини аниқлаш.....	31
3.1.7. Узлуксиз функциялар ҳақида асосий теоремалар.....	32
3.1.8. Функциянинг узилиш нуқталари.....	

Баъзи муҳим лимитлар

6.2.1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	33
6.2.2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	34
6.2.3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 1$	34

IV БОБ. Ҳосила ва дифференциал 35

4.1.7.	Кириш.....	36
4.1.8.	Ҳосила тушунчасига олиб келувчи масалалар.....	
4.1.9.	Ҳосиланинг таърифи, унинг геометрик ва механик маънолари.....	37 39
4.1.10.	Асосий элементар функциянинг ҳосилалари	41 42
4.1.11.	Дифференциаллашнинг асосий қоидалари.....	42
4.1.12.	Ҳосилалар жадвали	44 44

Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Функциянинг 45

	дифференциали	46
4.2.7.	Мураккаб функциянинг ҳосиласи.....	46
4.2.8.	Функциянинг дифференциали.....	
4.2.9.	Йиғиндининг, кўпайтманинг ва касрнинг дифференциали	47
4.2.10.	Дифференциалнинг геометрик маъноси	
4.2.11.	Дифференциаллар жадвали.....	48 49
4.2.12.	Функция дифференциалини тақрибий ҳисоблашларга қўлланилиши.....	50

Ошқормас ва параметрик функцияларнинг ҳосилалари. 50

Юқори тартибли ҳосилалар.	
4.3.5. Ошкормас функциянинг ҳосиласи	52
4.3.6. Параметрик берилган функцияларнинг ҳосила.....	55
4.3.7. Юқори тартибли ҳосилалар.....	
4.3.8. Ошкормас функцияларнинг ва параметрик берилган функцияларнинг турли тартибли ҳосилалари.....	55 56
Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи теоремалар.	59
Лопитал қондаси.	
4.4.3. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари.....	62
4.4.4. Лопитал қондаси.....	63
V БОБ. Ҳосила ёрдамида функцияни текшириш	64
5.1.7. Функциянинг ўзгармаслик шarti.....	
5.1.8. Функциянинг монотонлик шartлари.....	
5.1.9. Функциянинг максимуми ва минимуми.....	66
5.1.10. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги.	67
Букилиш	68
нуқтаси.....	69
5.1.11. Функциянинг ассимптоталари.....	69
5.1.12. Функцияни текширишнинг умумий схемаси	71
.....	
VI БОБ: Комплекс сонлар.	
6.1.8. Комплекс соннинг таърифи. Комплекс сонлар устида асосий амаллар.....	73 74
6.1.9. Комплекс соннинг геометрик шакли.....	75
6.1.10. Комплекс соннинг модули ва аргументи.....	76 76
6.1.11. Комплекс соннинг тригонометрик шакли.....	77

6.1.12.	Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни	78
	кўпайтириш ва даражага ошириш	84
		86
6.1.13.	Комплекс сондан илдиз	
	чиқариш.....	89
VII БОБ. Аниқмас интеграл		91
Бошланғич функция ва аниқмас интеграл		92
7.1.7.	Бошланғич функция ҳақида тушунча.....	94
7.1.8.	Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари	95
7.1.9.	Аниқмас интеграллар жадвали.....	
7.1.10.	Интеграллашнинг энг оддий	
	қоидалари.....	95
7.1.11.	Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш	98
	усули.....	
7.1.12.	Бўлак-лаб	
	интеграллаш.....	
Рационал касрлар. Энг содда рационал касрлар ва уларни		
интеграллаш		101
7.2.4.	Рационал касрларни интеграллаш	
7.2.5.	Иррационал ифодаларни интеграллаш.....	102
7.2.6.	Тригонометрик ифодаларни интеграллаш.....	103
VIII БОБ. Аниқ интеграл		
8.1.6.	Аниқ интегралнинг таърифи.....	
8.1.7.	Аниқ интегралнинг геометрик маъноси.....	106
8.1.8.	Аниқ интегралнинг механик маъноси	107
8.1.9.	Аниқ интегралнинг хоссалари.....	108
8.1.10.	Аниқ интегрални ҳисоблаш. Ньютон-Лейбниц	
	формуласи....	110
Аниқ интегрални ҳисоблаш методлари. Аниқ интегралнинг		114

геометрияга тадбиқлари	116
8.2.3. Аниқ интегрални ҳисоблаш методлари	118
8.2.4. Аниқ интегралнинг геометрияга тадбиқлари	
с) Текис фигуралар юзасини ҳисоблаш;	119
d) Айланиш жисмининг ҳажмини ҳисоблаш	120
Қутб координаталар системасида эгри чизиқли секторнинг юзи	122
8.3.4. Қутб координаталар системаси.....	124
8.3.5. Қутб координаталар системасида эгри чизиқли секторнинг юзи.....	125
8.3.6. Эгри чизиқли ёй узунлигини ҳисобдаш.....	
Жисм сиртининг юзини ва ҳажмини ҳисоблаш	126
8.4.4. Жисмнинг ҳажмини параллел кесимлар юзлари бўйича ҳисоблаш.....	128
8.4.5. Айланиш жисмининг ҳажми.....	130
8.4.6. Айланиш жисмининг сирти.....	
Хосмас интеграллар	
8.5.3. Чегаралари чексиз бўлган интеграллар	
8.5.4. Узлукли функцияларнинг интегралли.....	133
IX БОБ. Бир неча ўзгарувчининг функцияси	135
9.1.12. Бир неча ўзгарувчи функциясининг таърифи.....	137
9.1.13. Икки ўзгарувчили функциянинг геометрик маъноси.....	138
9.1.14. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ва тўла орттирмаси.....	140
9.1.15. Икки ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги.....	142
9.1.16. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари	144

.....	145
9.1.17. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар	
.....	146
9.1.18. Тўла орттирма ва тўла	
дифференциал.....	149
9.1.19. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларга	
тадбиғи.....	153
9.1.20. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	
Мураккаб функциянинг тўла	155
дифференциали.....	
9.1.21. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент	157
9.1.22. Икки ўзгарувчили функциянинг экстримумлари.....	

X БОБ. Дифференциал тенгламалар.

Дифференциал тенгламаларнинг таърифи ва асосий	
тушунчалари	159
10.1.10. Дифференциал тенгламага олиб келадиган	
масалалар.....	162
10.1.11. Асосий тушунчалар ва таърифлар	
10.1.12. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар	164
10.1.13. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган	
дифференциал тенгламалар.....	168
10.1.14. Тўла дифференциалли тенглама.....	
10.1.15. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал	172
тенгламалар.....	
10.1.16. Бир жинсли дифференциал тенгламага	176
келтириладиган дифференциал тенгламалар.....	177
10.1.17. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал	177
тенгламалар.....	178
Юқори тартибли дифференциал тенгламалар	179

10.2.5.	Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар.....	
10.2.6.	Тартибини пасайтириш мумкин бўлган дифференциал тенгламалар	180
10.2.7.	Юқори тартибли дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча.....	183
10.2.8.	Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар.....	189
10.2.9.	Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар	191
	Бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар	192
10.3.3.	Бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар.....	193
10.3.4.	Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар.....	194
	Дифференциал тенгламалар системаси	195
10.4.3.	Оддий дифференциал тенгламалар системаси.....	195
10.4.4.	Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси.....	198
	XI БОБ. Қаторлар назарияси	198
11.1.8.	Сонли қатор. Қаторнинг умумий ҳади.....	199
11.1.9.	Яқинлашувчи ва узоқлашувчи қаторлар. Қаторнинг йиғиндисы.....	200
11.1.10.	Яқинлашувчи қаторларнинг умумий хоссалари.....	201
11.1.11.	Қатор яқинлашишининг зарурий шарти.....	202
11.1.12.	Қатор яқинлашишининг етарли шартлари	
11.1.13.	Ўзгарувчан ишорали қаторлар.....	204
	Функционал қаторлар	
11.2.4.	Функционал қаторнинг яқинлашаш соҳаси.....	

11.2.5. Текис яқинлашувчи функционал қаторлар ва уларнинг хоссалари.....

11.2.6. Функционал қаторларни интеграллаш ва дифференциаллаш.....

Даражали қаторлар

11.3.8. Даражали қатор. Абеля теоремаси.....

11.3.9. Даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаси.....

11.3.10. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси

11.3.11. Даражали қаторларни ҳадма-ҳад интеграллаш ва дифференциаллаш.....

11.3.12. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш. Тейлор ва Маклорен қаторлари.....

11.3.13. Элементар функцияларни Маклорен қаторига ёйиш.....

11.3.14. Биномиал қатор

Даражали қаторларни тақрибий ҳисоблашларга тадбиқлари.

11.4.6. Функцияларни қийматини тақрибий ҳисоблаш.....

11.4.7. Илдизларни тақрибий ҳисоблаш.....

11.4.8. Лимитлар ва интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Фурье қаторлари. Даврий бўлмаган функциялар.

11.5.1. Даврий жараёнлар ва даврий функциялар. Фурье қатори...

11.5.2. Фурье қаторининг яқинлашиши. Дирихле теоремаси.....

11.5.3. Жуфт ва тоқ функцияларни Фурье қаторига ёйиш.....

11.5.4. Даври $T=2l$ бўлган функцияларни Фурье қаторига ёйиш.....

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.В.Беклемишев. Лурс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 4-е изд.-М.:Наука,1980.
2. Н.В.Ефимов. Квадратичные формы и матрицы.-М.:физматгиз, 1962-1963; Наука, 1964-1975.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.- М.:Гостехиздат, 1954-1956; Физматгиз, 1958-1963; М.;Наука, 1965-1980.
4. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.-М.:Наука, 1970-1978, т.1,2.
5. Б.П.Демидович. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ под ред.-М.: Физматгиз, 1958-1963; М.:Наука, 1964-1978.
6. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функции комплексной переменной.-М.:Наука, 1967-1979.
7. М.Л.Краснов, А.И.Киселов, Г.И.Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения).-М.:Наука, 1971.
8. В.П.Чистяков. Курс теории вероятностей.-М.:Наука, 1978.
9. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.-М.:Высшая школа, 1980, ч.1,2.
- 10.Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.:Наука, 1980.
- 11.Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.:Наука,1980.

12. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. Дифференциальное уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.-М.:Наука,1981.
13. И.С.Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисление. Том первый.-М.:Наука,1978.
14. И.С.Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисление. Том второй.-М.:Наука,1978.
15. В.Е.Шнейдер, А.И.Слуцкий, А.С.Шумов. Краткий курс высшей математики. Том II.-М.: Высшая школа,1978.
16. В.С.Шипачев. Курс высшей математики. Анализ функции одной переменной и аналитическая геометрия. Издательство Московского университета. 1981.
17. В.А.Кудрявцев, Б.П.Демидович. Краткий курс высшей математики.- М.:Наука,1989.