ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ИСЛОМ КАРИМОВ НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

ЭНГ МУҲИМ МАЪЛУМОТЛАР ТЎПЛАМИ

3

Тошкент 2019

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ИСЛОМ КАРИМОВ НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

ЭНГ МУҲИМ МАЪЛУМОТЛАР ТЎПЛАМИ

3

Тошкент 2019

Муаллифлар: ҚАЮМОВ Ш, АРЗИҚУЛОВ Ғ.П.
ОЛИЙ МАТЕМАТИКА энг муҳим маълумотлар тўплами 3.
- Тошкент: ТошДТУ, 2019. 125.

Мазкур маълумотлар тўплами «Олий математика» фанининг математик анализ бўлимидаги энг муҳим тушунчаларни ўз ичига олган бўлиб, олий ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган.

Ушбу қўлланма Тошкент давлат техника университети илмий-услубий кенгаши қарорига асосан чоп этилди.

Тақризчилар: **1. Қосимов Ш** - ЎзМУ «Дифференциал тенгламалар ва математик физика» кафедраси доценти,ф.м.ф.д.
2.Расулов С.И - ТошДТУ «Олий математика» кафедраси доценти,ф.м.ф.н.

Сўз боши

Ўқувчилар эътиборига ҳавола қилинаётган ушбу ўқув қўлланма 2017 йил чоп қилинган «Олий математика энг муҳим маълумотлар тўплами-2» китобининг мантиқий давоми бўлиб, унда математик таҳлилнинг асосий тушунчалари назарий ва амалий томондан баён қилинган. Китобда келтирилган маълумотларни олий математика фанини ўрганувчилар учун энг зарур муҳим маълумотлар манбаи сифатида қараш мумкин. Қўлланма барча олий ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, унга амалиёт дарсларида, мустақил таълим жараёнида ўрганувчиларга тўғри йўл кўрсатувчи йўриқнома сифатида қараш мумкин.

1. КОМПЛЕКС СОН ТУШУНЧАСИ

1.1. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Таъриф. Комплекс сон деб, $\alpha = a + ib$ кўринишдаги ифодага айтилади. Бу ерда a ва b ҳақиқий сонлар бўлиб, a га α комплекс соннинг ҳақиқий қисми, ib га мавҳум қисми дейилади.

Комплекс сонга маълум тартибда олинган иккита ҳақиқий соннинг $(a; b)$ системаси сифатида қаралади.

Ушбу, $z = x + iy$ ифодага комплекс ўзгарувчи дейилади. Бу ерда ҳам x ва y лар ҳақиқий ўзгарувчилар, x га z нинг ҳақиқий қисми, iy га мавҳум қисми дейилади. x ва y лар хусусий ҳолларда доимий сонларни қабул қилгани сабабали унга мос z ҳам комплекс сонни ифодалайди. Шу сабабли кейинги баёнларда z ни комплекс сон деб атаймиз.

Демак, $z = x + iy$ кўринишидаги ифода комплекс сон бўлиб, x ва y ҳақиқий сонлар, i эса мавҳум бирлик бўлиб, $i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i$ худди шунингдек $i^4 = 1,\ i^5 = i \ldots$.

⎘ Комплекс сонлар тўплами $\mathbb{C}$ ҳарфи билан белгиланади.

⎘ Ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbb{R}$, комплекс сонлар тўплами $\mathbb{C}$ га қисм бўлади, яъни $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

⎘ x сони z комплекс соннинг ҳақиқий қисми дейилади ва $\boldsymbol{Rez = x}$ (лотинча "**reabis**" - ҳақиқий сўзининг бош ҳарфи)каби, y сони z комплекс соннинг мавҳум қисми дейилади ва $\boldsymbol{Imz = y}$ (лотинча "**imagtnarius**" - мавҳум сўзининг бош ҳарфи)каби белгиланади.

Масалан $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ комплекс сон учун,

$$Rez = Re\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \ \ Imz = Im\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

⎘ Иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар тенг $(z_1 = z_2)$ дейилади, агарда бу комплекс сонларнинг ҳақиқий қисми ҳақиқий қисмига$(x_1 = x_2)$ ва мавҳум қисми мавҳум қисмига $(y_1 = y_2)$ тенг бўлса. Хусусий ҳолда комлекс сон нолга тенг$(z = 0)$ бўлади, агарда $x = y = 0$ бўлса.

⎘ Катта ва кичик тушунчаларини комплекс сонлар учун киритиб бўлмайди.

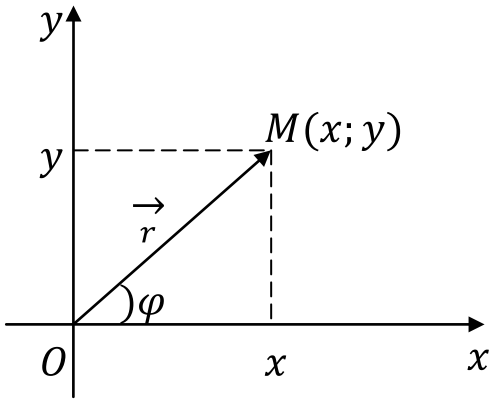
⎘ Мавҳум қисмлари ишоралари билан фарқ қилувчи иккита $z = x + iy$ ва $\overline{z} = x - iy$ комплекс сонларга қўшма комплекс сон деб аталади ва $\overline{z}$ каби белгиланади.

⎘ Ҳақиқий ва мавҳум қисмларининг ишораси билан фарқ қилувчи иккита $z_1 = x + iy$ ва $z_2 = -x - iy$ комплекс сонларга қарама-қарши комплекс сонлар дейилади.

1.2. КОМПЛЕКС СОННИНГ ГЕОМЕТРИК ШАКЛИ

Ҳар бир $z = x + iy$ комплекс сонни Oxy координаталар текислигининг ягона $M(x; y)$ нуқтаси билан ифодалаш мумкин (бу ерда $x = Rez$, $y = Imz$) ва аксинча координаталар текислигининг ҳар бир $M(x; y)$ нуқтасини $z = x + iy$ комплекс соннинг геометрик тасвири деб қараш мумкин.

🖻 Комплекс сонларни ифодаловчи текислик комплекс сонлар текислиги деб аталади. Бунда абсциссалар ўқи Ox − **ҳақиқий ўқ**, ординаталар ўқи Oy − **мавҳум ўқ** деб аталади.



🖻 $z = x + iy$ комплекс сонни $M(x; y)$ нуқтанинг радиус вектори $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ орқали ҳам ифодалаш мумкин. Бунда $\vec{r}$ векторнинг узунлигига **комплекс соннинг модули** деб аталади ва$|z|$ ёки r билан белгиланади.

🖻 $z = x + iy$ комплекс соннинг модули $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ формула билан аниқланади.

🖻 Радиус векторнинг ҳақиқий ўқ билан мусбат йўналишда ҳосил қилган бурчаги φ га **комплекс соннинг аргументи** деб аталади ва $Argz$ каби белгиланади, яъни $\varphi = Argz$.

🖻 $z = 0$ комплекс соннинг аргументи аниқланмаган.

🖻 $z \neq 0$ комплекс соннинг аргументи кўп қийматли бўлиб, $Argz = argz + 2\pi k$ $(k \in Z)$, аниқликда топилади. Бу ерда $argz$ −аргументнинг $(-\pi; \pi]$ оралиқда ётувчи бош қиймати.

1.3. КОМПЛЕКС СОННИНГ ЁЗИЛИШ ФОРМАЛАРИ

🖻 Ушбу

$$\boldsymbol{z = x + iy}$$

ифодага **комплекс соннинг алгебраик формаси** дейилади.

🗐 Комплекс соннинг тригонометрик формаси:

қутб координаталари $x = rcos\varphi,\ \ y = rsin\varphi$ га кўра.

$$z = x + iy = rcos\varphi + i\,rsin\varphi = r(cos\varphi + isin\varphi),$$

$$\boldsymbol{z = \ r(cos\varphi + i\ sin\varphi)}$$

ифодага **комплекс соннинг тригонометрик формаси** дейилади.

Бунда $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ формула билан аниқланади.

φ аргумент эса,

$$cos\varphi = \frac{x}{r},\ \ sin\varphi = \frac{y}{r},\ \ \ tg\varphi = \frac{y}{x}$$

формулалардан топилади.

$\varphi = Argz = argz + 2\pi k, k \in Z$ эканлигидан,

$$cos\varphi = cos(argz + 2\pi k) = cos(argz),\ \ \ sin\varphi = sin(argz)$$

келиб чиқади. Шу сабабли комплекс соннинг алгебраик шаклидан тригонометрик шаклига ўтишда комплекс сон аргументининг бош қийматини аниқлаш етарли бўлади.

$-\pi < argz \leq \pi$ бўлгани учун $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ тенгликдан топамиз:

$$\varphi = argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x},\ \ I \text{ ва } IV \text{ чорак ички нуқталари учун,} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi,\ \ II \text{ чорак ички нуқталари учун,} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi,\ \ III \text{ чорак ички нуқталари учун.} \end{cases}$$

🗐 Эйлер формуласи деб аталувчи

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \ sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} => cos\varphi + isin\varphi = e^{i\varphi}$$

формулалар ёрдамида $z = x + iy = r(cos\varphi + isin\varphi)$ тенгликдан

$$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$$

ифода келтириб чиқарилади ва бу ифодага комплекс соннинг кўрсаткичли формаси деб аталади.

Мисол. $z = -1 + i$ комплекс соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли формаларини ёзинг.

Ечими. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $M(-1;1)$ II чоракдаги нуқта.

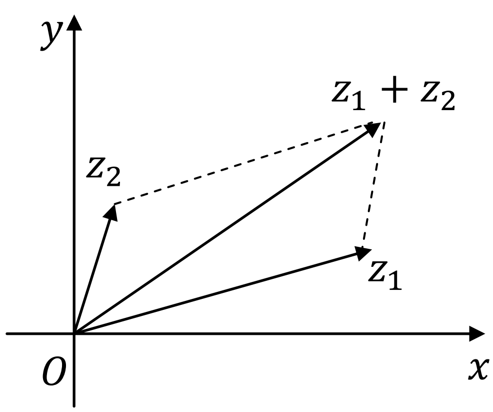
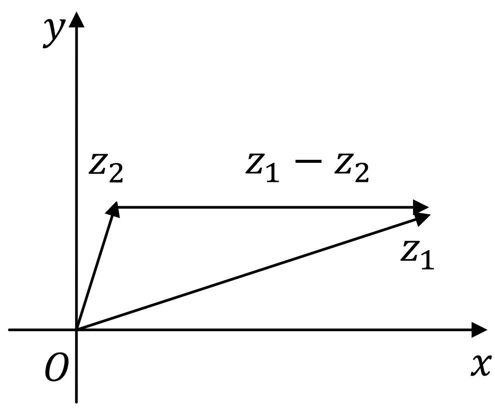
$$argz = arctg\frac{1}{(-1)} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Демак, $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

1.4. КОМПЛЕКС СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Бизга иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин.

- **Қўшиш.** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- **Айириш.** $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(учбурчак тенгсизлиги)</td>
<td>$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
(икки нуқта орасидаги масофа)</td>
</tr>
</table>

🖹 **Кўпайтириш.** $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$ бўлиб, бу ерда $i^2 = -1$ га тенг эканлиги ҳисобга олинган. Ҳақиқатан ҳам:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

Худди шунингдек комплекс соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли формалари учун ҳам кўпайтма формуласини келтириш мумкин.

$$\boxed{\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) \cdot r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}}$$

🖹 Иккита қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси ҳақиқий сон бўлади, яъни $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

🖹 **Комплекс сонни даражага ошириш. Муавр формуласи.**

$$\boxed{z^n = [r(cos\varphi + i\ sin\varphi)]^n = r^n[cos(n\varphi) + i\ sin(n\varphi)].}$$

Мисол. $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^9$ топинг.

Ечиш. Аввал $z = 1 + \sqrt{3}i$ комплекс соннинг тригонометрик формаси ёзиб олинади.

$$r = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;\ \ \varphi = \ argz = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right).$$

Муавр формуласига кўра,

$$z^9 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^9 = 2^9\left(cos\left(9 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + isin\left(9 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^9(-1) = -512.$$

Комплекс сонни комплекс сонга бўлиш.

Бунинг учун $\frac{z_1}{z_2}$ нисбатни махраждаги комплекс соннинг қўшмасига кўпайтириб бўламиз.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z_2}}{z_2\cdot\bar{z_2}}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Худди шунингдек комплекс соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли формалари учун ҳам бўлинма формуласини келтириш мумкин.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(cos\varphi_1+isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2+isin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+isin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Мисол. $\frac{1+3i}{2+i}$ бўлинмани топинг.

Ечиш. $\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+6i+3}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$

Комплекс сондан илдиз чиқариш.

$$\omega_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(cos\varphi+i\,sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k=0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ \ldots\ \ ,(n-1).$$

Агар $n=k$ га тенг бўлса,

$$\omega_k=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\,sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi}{n}+i\,sin\frac{\varphi}{n}\right)=$$

$= \omega_0. \qquad (k = 0).$

Мисол. $\sqrt[3]{i}$ ни ҳисобланг.

Ечими. Аввал $z = i$ комплекс соннинг тригонометрик формасини ёзиб оламиз, $i = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\ sin\ \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$ да,

$$\omega_0 = cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$k = 1$ да,

$$\omega_1 = cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = cos\frac{5\pi}{6} + i\ sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$k = 2$ да,

$$\omega_2 = cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\ sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Комплекс соннинг логарифми.

Элементар математикада фақат мусбат соннинг логарифмини текшириш билан чегараланилади. Комплекс сонлар учун эса нолдан бошқа ҳар қандай комплекс соннинг, шу жумладан манфий соннинг ҳам логарифми мавжуд.

Дастлаб берилган $z = x + iy$ комплекс соннинг тригонометрик формасини ёзиб оламиз.

$$z = x + iy = r(cos\varphi + i\ sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = argz = arctg\frac{y}{x},$$

У ҳолда,

$$Lnz = lnr + i\varphi + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \ldots$$

Агар $k = 0$ бўлса, у ҳолда логарифмнинг бош қиймати ҳосил бўлади, яъни $Lnz = lnr + i\varphi$.

Мисол. (-1) нинг логарифмини ҳисобланг.

Ечими. Аввал $z = -1$ комплекс соннинг тригонометрик формасини ёзиб оламиз,

$$x = -1, \ y = 0 \ => \ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg0 = \pi => \varphi = \pi,$$

$$z = -1 = cos\pi + isin\pi, \ r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0} = 1, \quad \ln r = 0.$$

Шу сабабли,

$$Lnz = Ln(-1) = 0 + \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i,$$

$$k = 0, \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \ldots$$

Комплекс сонни комплекс даражага кўтариш.

Ушбу, $W = z^{\alpha}$ комплекс сонни комплекс даражага кўтариш масаласини қараймиз бу ерда, $z = x + iy \neq 0$ ва $\alpha = a + ib$ комплекс сонлар. $z = e^{Lnz}$ формулага кўра,

$$W_k = z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot Lnz} = e^{\alpha(lnr + i\varphi + 2\pi k i)} \text{ ёки}$$

$$W_k = z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot Lnz} = e^{\alpha(lnr + i\varphi)} e^{2\pi k \alpha i}, \qquad k = 0, \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \ldots$$

Мисол. $(-1)^i$ ни ҳисобланг.

Ечими. Аввал $z = -1$ комплекс соннинг тригонометрик формасини ёзиб оламиз,

$$x = -1,\ \ y = 0\ \ => \ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg0 = \pi => \varphi = \pi,$$

$$z = -1 = cos\pi + isin\pi,\ \ r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0} = 1,\quad \ln r = 0.$$

$$W_k = (-1)^i = e^{i(0+i\pi)}e^{2\pi kii} = e^{-\pi}e^{-2\pi k} = e^{-(2k+1)\pi}.$$

$$k = 0, \pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3, \ldots$$

2. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ВА БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ

Дифференциал ҳисобнинг асосий вазифаси берилган $f(x)$ функцияга кўра унинг ҳосиласи $f'(x)$ ни ёки дифференциали $d(f(x)) = f'(x)dx$ ни топишдан иборат эди. Интеграл ҳисобнинг асосий вазифаси эса бунинг тескариси бўлиб, ҳосиласи $F'(x) = f(x)$ га тенг бўлган $F(x)$ функцияни топишдан иборат.

Таъриф: $F(x)$ функция, $f(x)$ функциянинг $(a;b)$ интервалдаги **бошланғич функцияси** деб аталади, агарда ихтиёрий $x \in (a;b)$ учун $F'(x) = f(x)$ (ёки $dF(x) = f(x)dx$) тенгликлар ўринли бўлса.

Масалан. $y = x^2$, $x \in R$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^3}{3}$дан иборат, яъни $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$.

Мисолдаги $y = x^2$ функция учун $F(x) = \frac{x^3}{3} + C(C = const)$ ҳам бошланғич функциядир. Чунки,

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in R).$$

Теорема: Агар $F(x)$ функция, $f(x)$ функциянинг (a,b) интервалдаги бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция учун барча бошланғич функциялари тўпламини $F(x) + \mathrm{C}$ (C —ўзгармас сон) формула билан бериш мумкин.

Теорема: Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари бўлса, у ҳолда ушбу

$\Phi(x) = F(x) + \mathrm{C}$ тенглик ўринли бўлади, бунда C —ихтиёрий ўзгармас сон.

Демак теоремадан келиб чиқадики, ҳар қандай узлуксиз функция чексиз кўп бошланғич функцияларга эга бўлиб, уларнинг ихтиёрий иккитаси бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади.

2.1. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Таъриф: Агар $F(x)$ функция бирор оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x) + \mathrm{C}$ функциялар тўплами шу оралиқда $f(x)$ функциянинг **аниқмас интеграли** дейилади ва қуйидагича белгиланади.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (C - const)$$

бу ерда,

$\int$ —аниқмас интеграл белгиси.

x —интеграллаш ўзгарувчиси.

$f(x)$ —интеграл остидаги функция.

$f(x)dx$ —интеграл остидаги ифода.

Аниқмас интегрални топиш жараёни ёки берилган функциянинг бошланғич функциясини топиш жараёни функцияни интеграллаш дейилади. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, аниқмас интеграл геометрик жиҳатдан бу бошланғич функцияни вертикал равишда юқорига ва пастга силжитишлардан ҳосил бўладиган чизиқлар синфини ифодалайди.

Берилган $f(x)$ функция қачон бошланғич функцияга эга бўлади деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда у бу кесмада узлуксиз бўлган бошланғич функцияга эга бўлади.

🖹 Кўп ҳолларда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўладиган $(a;b)$ интервал кўрсатилмайди. Бундай ҳолда $(a;b)$ интервал сифатида $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси тушунилади.

🖹 Бошланғич функциянинг графиги **интеграл эгри чизиқ** деб аталади.

Аниқмас интеграл геометрик жиҳатдан ихтиёрий С ўзгармасга боғлиқ бўлган барча интеграл эгри чизиқлар оиласини ифодалайди.

2.2. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

1⁰. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг, яъни

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) .$$

∆ Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x)+0 = f(x). \blacksquare$$

2⁰. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг, яъни

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx .$$

Δ Ҳақиқатан ҳам,

$d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)dx.$ ■

3⁰. Бирор функциянинг ҳосиласидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int F'(x)dx = F(x) + C\ .$$

4⁰. Бирор функциянинг дифференциалидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C\ .$$

Δ Ҳақиқатан ҳам дифференциалнинг таърифига кўра

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.\ ■$$

5⁰. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин

$$\int \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\cdot\int f(x)dx\,, \qquad \alpha\neq 0 - \text{ўзгармас.}$$

6⁰. Функцияларнинг алгебраик йиғиндисидан олинган аниқмас интеграл, шу функцияларнинг ҳар биридан олинган аниқмас интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

7⁰. Функцияларнинг алгебраик айирмасидан олинган аниқмас интеграл, шу функцияларнинг ҳар биридан олинган аниқмас интегралларнинг алгебраик айирмасига тенг.

$$\int [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx \,.$$

8⁰. (Интеграллашнинг инвариантлик формуласи)

Агар $\int f(x)dx = F(x) + C$ бўлса, у ҳолда $\int f(u)dx = F(u) + C$ бўлади. Бу ерда $u = \varphi(x)$ −ихтиёрий функция бўлиб, узлуксиз ҳосилага эга.

9⁰. Агар $\int f(x)dx = F(x) + C$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C \,.$$

ўринли бўлади. Бу ерда $a(a \neq 0)$ ва b ўзгармас сонлар.

2.3. АСОСИЙ ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ

1. $\int du = u + C, \quad C = const\,;$

2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C; \;\; (\alpha \neq -1)$

3. $\int \dfrac{du}{u} = ln|u| + C;$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{lna} + C;$

5. $\int e^u du = e^u + C;$

6. $\int sinu\, du = -cosu + C;$

7. $\int cosu\, du = sinu + C$;

8. $\int tgu\, du = -ln|cosu| + C$;

9. $\int ctgu\, du = ln|sinu| + C$;

10. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$;

11. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$;

12. $\int \frac{du}{sinu} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$;

13. $\int \frac{du}{cosu} = \int \frac{dx}{sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)} = ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$;

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\ arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$;

17. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$;

18. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$;

19. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\ arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$;

20. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

2.4. АСОСИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

2.4.1. ТЎҒРИДАН-ТЎҒРИ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛИ

Тўғридан-тўғри интеграллаш усулига берилган интеграл остидаги функция (ёки ифода) аниқмас интегралнинг хоссаларидан келиб чиқиб битта ёки бир нечта интеграллаш жадвалидан фойдаланиб ҳисобланадиган интегралларга айтилади.

Аниқмас интегрални топишда қуйидаги дифференциал остига киритиш амалидан фойдаланилади.

$du = d(u+a), \quad a = const$	$du = \frac{1}{a} d(a\,u), \quad a \neq 0$
$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$	$\frac{1}{u}\,du = d(ln\,u),$
$cosudu = d(sinu\,),$	$sinu\,du = -d(cosu),$
$\frac{1}{cos^2u} du = d(tgu),$	$\frac{1}{sin^2u} du = -d(ctgu).$

Умуман олганда, $f'(u)du = d(f(u))$ формуладан баъзи ҳолларда интегрални ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисоллар:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = ln|x+3| + C,$

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C,$

3) $\int ctg^2\, x\, dx = \int \frac{cos^2 x}{sin^2 x}\, dx = \int \frac{1 - sin^2 x}{sin^2 x}\, dx =$

$= \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{sin^2 x}\, dx - \int\, dx = -\, ctgx - x + C,$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{3}\, x\right)}{\sqrt{(2)^2 - \left(\sqrt{3} \cdot x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C,$

5) $\int cos^2\, 6x\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + cos12x)\, dx =$

$= \frac{1}{2} \int\, dx + \frac{1}{2} \int cos12x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{24} \int cos12x\, d(12x) =$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{24}\, sin12x + C,$

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)(x+2)} dx =$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)} dx + \frac{1}{3} \int \frac{(x+2)}{(x-1)(x+2)} dx =$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3} ln|x+2| + \frac{1}{3} ln|x-1| + C,$

7) $\int tg\, x\, dx = \int \frac{sin\, x\, dx}{cos\, x} = -\int \frac{d(cos\, x)}{cos\, x} = -ln|cos\, x| + C,$

8) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{cos^2 \frac{x}{2} + sin^2 \frac{x}{2}}{2\, sin \frac{x}{2}\, cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{cos^2 \frac{x}{2}}{2\, sin \frac{x}{2}\, cos \frac{x}{2}} dx +$

$$+\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right) + \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \int ctg\frac{x}{2}\; d\left(\frac{x}{2}\right) + \int tg\frac{x}{2}\; d\left(\frac{x}{2}\right) = ln\left|sin\;\frac{x}{2}\right| -$$

$$-ln\left|cos\;\frac{x}{2}\right| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C,$$

9) $$\int \frac{dx}{ctg^5x\cdot sin^2x} = -\int (ctg\;x)^{-5}\,d(ctgx) = \frac{1}{4\,ctg^4x} + C,$$

10) $$\int\left(4\,x^3 - \frac{5}{cos^2\,2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int\; x^3\,dx - \frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{cos^2\,2x} -$$

$$-\int 3^{1-x}\,d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2}\;tg2x - \frac{3^{1-x}}{ln\;3} + C.$$

Демак, бевосита интеграллаш жараёнида ҳар бир интеграл остидаги функцияга алоҳида ёндашиш орқали уни жадвал интеграли ёрдамида ҳисобланади.

2.4.2. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛДА ЎЗГАРУВЧИЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Агар $\int f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблашда $f(x)$ мураккаб функция бўлса, $x = \varphi(t)$ алмаштириш оламиз. Бу ерда $\varphi(t)$ −функция узлуксиз ҳосилага эга. У ҳолда, $dx = \varphi'(t)\,dt$ ва асосий инвариантлик хоссасига кўра қуйидаги формула ўринли бўлади.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\;dt.$$

Бу формулага аниқмас интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи дейилади. Интеграл ҳисоблангандан кейин тенгликнинг ўнг томонидаги янги ўзгарувчи t эски x ўзгарувчига келтирилади.

Мисоллар:

1) $\int e^{\frac{x}{4}}\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: $\frac{x}{4}=t$ белгилаш киритамиз ва интегралдаги барча x ўзгарувчиларни янги t ўзгарувчи бўйича ёзамиз. У ҳолда $x=4t,\ dx=4dt$. Топилган ифодаларни интегралга қўямиз.

$$\int e^{\frac{x}{4}}\ dx=4\int e^{t}\ dt=4e^{t}+C=4e^{\frac{x}{4}}+C.$$

2) $\int x\cdot\sqrt{x-3}\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: $\sqrt{x-3}=t$ белгилаш киритамиз ва интегралдаги барча x ўзгарувчиларни янги t ўзгарувчи бўйича ёзамиз.

У ҳолда $x-3=t^2\Rightarrow x=t^2+3,\ dx=2\,t\,dt$. Бу ифодаларни интегралга қўямиз.

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\ dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2t\ dt=2\int(t^4+3t^2)\,dt=2\int t^4\,dt+$$

$$+6\int t^2\,dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3) $\int x\cdot(x+2)^{100}\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: $x+2=t$ белгилаш киритамиз ва интегралдаги барча x ўзгарувчиларни янги t ўзгарувчи бўйича ёзамиз.

У ҳолда $x+2=t\Rightarrow x=t-2,\ \ dx=dt$. Ушбу ифодаларни интегралга қўямиз.

$$\int(t-2)\cdot t^{100}\ dt=\int t^{101}\ dt-2\int t^{100}\ dt=\frac{t^{102}}{102}-2\frac{t^{101}}{101}+C=$$

$$= \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2\,(x+2)^{101}}{101} + C.$$

4) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: $e^x = t$ белгилаш киритамиз ва интегралдаги барча ўзгарувчиларни янги t ўзгарувчи бўйича ёзамиз.

У ҳолда $e^x = t \Rightarrow x = ln\, t,\ dx = \frac{dt}{t}$ ва бу топилган ифодаларни интегралга қўямиз.

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t\,(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right| + C = -ln\left|\frac{t+1}{t}\right| + C =$$

$$= ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = ln\ \frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

2.4.3. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛНИ БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ

Фараз қилайлик, $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлсин. У ҳолда ушбу

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$$

тенглик ўринли бўлиб, уни интеграллаб

қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\int \boldsymbol{u\cdot dv = u\cdot v -} \int \boldsymbol{v\cdot du}\,.$$

Ушбу формулага аниқмас интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи берилган интеграл остидаги ифода қандайдир иккита u ва dv функциянинг кўпайтмаси бўлган ҳолларда қўлланилади. Баъзи ҳолларда, берилган интеграл учун бўлаклаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллашимиз мумкин.

Бўлаклаб интеграллаш қулай бўлиши учун баъзи хусусий ҳолларни кўрсатамиз:

1. Ушбу,

$$\int \boldsymbol{P_n(x)\, e^{\alpha x}\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{P_n(x)\, a^{\alpha x}\, dx},$$

$$\int \boldsymbol{P_n(x) \cdot sin\beta x\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{P_n(x) \cdot cos\beta x\, dx}$$

кўринишдаги интегралларда ($P_n(x)$ −кўпҳад, α, β −ўзгармас сонлар) $u = P_n(x)$ деб, қолган барча қисмини dv деб белгиланади.

2. Ушбу,

$$\int \boldsymbol{lnx\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{arcsinx\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{arctgx\, dx}.$$

кўринишдаги интегралларда. $dx = dv$ деб, қолган барча қисмини u деб белгиланади.

3. Ушбу,

$$\int \boldsymbol{P_n(x)\, ln^n x\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{P_n(x)\, arcsinx\, dx}, \qquad \int \boldsymbol{P_n(x)\, arctgx\, dx},$$

кўринишдаги интегралларда $P_n(x)\ dx = dv$ деб, қолган барча қисмини u деб белгиланади.

4. Ушбу,

$$\int \boldsymbol{e^{\alpha x} \cdot sin\beta x\, dx}, \qquad\qquad \int \boldsymbol{e^{\alpha x} \cdot cos\beta x\, dx},$$

кўринишдаги интегралларда (α ва β –ўзгармас сонлар) $u = e^{\alpha x}$ функция белгиланади, қолгани dv деб олинади.

Мисоллар:

1. $\int (2x+1)\, e^{3x}\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш:

$$\int (2x+1)\, e^{3x}\ dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = (2x+1)\ \frac{1}{3}\ e^{3x} -$$

$$- \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x}\ 2\, dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}\ e^{3x} + C.$$

2. $\int lnx\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш:

$$\int lnx\ dx \quad = \left| \begin{matrix} u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \cdot ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx =$$

$$= x \cdot ln|x| - x + C = x(ln|x| - 1) + C = x\ ln\left|\frac{x}{e}\right| + C.$$

3. $\int x^2\, e^x\, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш:

$$\int x^2\, e^x\, dx \ = \left| \begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x\, dx.$$

Бу ерда $\int x \cdot e^x\, dx$ интегрални яна бир марта бўлаклаб интеграллаймиз.

$$\left|\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x\, dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right|$$

$$\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + \text{C}\,.$$

Демак,

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\, e^x + C = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + C.$$

4. $\int arctgx\ dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш:

$$\int arctgx\ dx \quad \Rightarrow \left[\begin{matrix} u = arctgx \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}\ dx \\ dv = \ dx \ \Rightarrow \qquad v = x \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\ arctgx - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\ dx = x\ arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\ arctgx -$

$-\dfrac{1}{2} ln(1 + x^2) + C.$

2.5. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ. КЎПҲАД ТУШУНЧАСИ

Ушбу,

$$P_n(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

кўринишдаги функцияга кўпҳад (ёки бутун рационал функция) дейилади. Бу ерда, n −натурал сон, $a_i\,(i = 0,1,2,\dots,n) -$ ўзгармас коэффициентлар. $n -$ сони кўпҳаднинг даражаси дейилади.

2.5.1. КЎПҲАДНИНГ ИЛДИЗИ

$P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи деб шундай x_0 сонга айтиладики, агарда бу сонни кўпҳадга қўйсак, $P_n(x_0) = 0$ бўлади.

1-Теорема. Агар x_0 сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда кўпҳад $x - x_0$ га қолдиқсиз бўлинади ва уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x),$$

бу ерда, $P_{n-1}(x)$ кўпҳад $(n-1)$ даражали.

2-Теорема. (Алгебранинг асосий теоремаси) Ҳар қандай n −даражали$(n > 0)$ кўпҳад ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий ёки комплекс илдизга эга бўлади.

3-Теорема. Ҳар қандай $P_n(x)$ кўпҳадни қуйидаги кўринишда ифодалашимиз мумкин.

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

бу ерда, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ −кўпҳаднинг илдизлари, a_0 −кўпҳад-нинг x^n ҳади олдидаги коэффициенти.

Мисол: Ушбу

$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш: $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ кўпҳад $x = -1,\ x = 1,\ x = 2.$ ларда нолга тенг бўлади. Шунга кўра,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

4-Теорема: Ҳақиқий коэффициентли ихтиёрий кўпҳадни ҳақиқий коэффициентли чизиқли ва квадратик кўпайтувчиларга ёйиш мумкин, яъни

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_r)^{k_r} \dots (x - x_n) \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

Бунда, $k_1 + k_2 + \dots + k_r + \cdots + 1 + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$ бўлиб, барча квадрат учҳадлар илдизга эга эмас.

Мисоллар:

1) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$

2) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4).$

3) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) =$

$= (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x - 3)^2 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1).$

2.5.2. КАСР-РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАР

Каср-рационал функция (ёки рационал каср) деб, қуйидаги икки кўпҳаднинг нисбатига айтилади, яъни

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1)$$

бу ерда, $P_m(x) -\ m$ даражали кўпҳад, $Q_n(x) -\ n$ даражали кўпҳад.

Агар (1) рационал каср, суратининг даражаси махражининг даражасидан кичик $(m < n)$ бўлса, унга **тўғри рационал каср дейилади**.

Агар (1) рационал каср, суратининг даражаси махражининг даражасидан катта ёки тенг $(m \geq n)$ бўлса, унга **нотўғри рационал каср дейилади**.

Ҳар қандай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нотўғри рационал касрнинг одатдагидек суратини махражига бўлиб, $L(x)$ бутун кўпҳад билан $\frac{R(x)}{Q(x)}$ тўғри касрнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин, яъни

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Мисол. Ушбу

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$$

нотўғри рационал касрни бутун ва каср қисмларга ажратинг.

Ечиш. Касрнинг суратини махражига бўламиз.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad - 5x + 9 & x - 2 \\
\hline
-\underline{x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\quad} & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
2x^3 \qquad - 5x + 9 & \\
-\underline{2x^3 - 4x^2 \qquad\quad} & \\
4x^2 - 5x + 9 & \\
-\underline{4x^2 - 8x \quad} & \\
3x + 9 & \\
-\underline{3x - 6} & \\
15. &
\end{array}$$

Бунда, $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ кўпҳад ва $R(x) = 15$ қолдиқ.

Натижада,

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2} \ .$$

2.5.3. ЭНГ СОДДА ТЎҒРИ РАЦИОНАЛ КАСРЛАР

Ушбу, кўринишдаги рационал касрларга

(I). $\dfrac{A}{x-a}$;

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2, \ \ k \in N)$;

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (D = p^2 - 4q < 0)$;

(IV). $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \geq 2,\ \ D = p^2-4q < 0),$

(I), (II), (III), (IV) типдаги энг содда рационал касрлар дейилади. Бу ерда, A, a, M, N, p, q –ҳақиқий сонлар.

Фараз қилайлик $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср берилган бўлиб, махраж қуйидагича кўпайтувчиларга ажралган бўлсин.

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{s_m}.$$

Теорема: Ҳар қандай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қуйидаги содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{C_1\, x + D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2\, x + D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{s_1}\, x + D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{M_1\, x + N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2\, x + N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \cdots + \frac{M_{s_m}\, x + N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}.$$

Бу ерда $A_1,\ A_2, \ldots, B_1,\ B_2, \ldots,\ C_1,\ D_1, \ldots,\ M_1,\ N_1, \ldots$ аниқланиши зарур бўлган номаълум ҳақиқий доимий коэффициентлардир.

Мисоллар:

1). $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3};$

2). $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1};$

3). $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}\ .$$

4). $\dfrac{3x+4}{x(x+5)(x-7)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+5}+\dfrac{C}{x-7}\ .$

5). $\dfrac{x^2+3x}{(x^2-3x+5)(x^2+4)}=\dfrac{Ax+B}{x^2-3x+5}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}\,.$

6). $\dfrac{3x}{x^3-8}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}\,.$

2.5.4. НОМАЪЛУМ КОЭФФИЦИЕНТЛАРНИ ТОПИШ ҚОИДАЛАРИ

1. Тенгликнинг ўнг томони умумий махражга келтирилади.
2. Тенгликнинг ўнг ва чап томонларидаги махражлар бир хил бўлганлиги учун ташлаб юборилади, ўнг ва чап томон суратларини тенглаштириб, айният ҳосил қиламиз.
3. Даражалари бир хил бўлган ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентлардан тузилган системага келамиз.
4. Системани ечиб номаълум коэффицентларни топамиз.
5. Топилган коэффициентларни тенгликка қўйиб, тўғри рационал касрнинг содда касрлар йиғиндиси кўринишини ҳосил қиламиз.

Мисол. $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ касрни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

Ечиш: Теоремага кўра,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\,x+C}{x^2-2x+5}\ .$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндини умумий махражга келтирамиз.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A\,(x^2-2x+5)+(x-1)(B\,x+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}\ .$$

Ўнг ва чап томон суратларини тенглаштирамиз

$$2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

яъни,

$$2x^2-3x-3\equiv(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Айниятдаги x^2, x^1 ва x^0 ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз.

$$\begin{array}{l|c} x^2: & 2=A+B, \\ x^1: & -3=-2A-B+C, \\ x^0: & -3=5A-C\ . \end{array}$$

Системани ечиб, $A=-1,\ B=3,\ C=-2.$ ларни ҳосил қиламиз.

Демак, берилган тўғри рационал каср қуйидаги содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаланар экан.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\ .$$

Мисол. $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ касрни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

Ечиш: Теоремага кўра,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1},$$

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)},$$

$$3x-4 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2),$$

$$3x-4 \equiv A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x),$$

$$3x-4 \equiv (A+B+C)\,x^2 + (-A+B-2C)\,x^1 + (-2A)x^0.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 = A+B+C, \\ 3 = -A+B-2C, \\ -4 = -2A. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A = 2, \\ B = \dfrac{1}{3}, \\ C = -\dfrac{7}{3}. \end{array}$$

Демак,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} - \frac{\frac{7}{3}}{x+1}.$$

2.5.5. СОДДА РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Энди юқоридаги келтирилган (I), (II), (III), (IV) типдаги энг содда рационал касрларни интеграллаш масаласини қараймиз. Бунда (I), (II) турдаги содда рационал касрларнинг интеграли тўғридан тўғри интеграллаш жадвалига тушади.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ ln|x-a| + C,$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C,$

III. $I = \int \frac{M\,x+N}{x^2+px+q}dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Касрнинг махражини тўла квадратга ажратамиз:

$$I = \int \frac{M\,x+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx,$$

бу ерда, $q-\frac{p^2}{4}>0$ бўлиб, ҳисоблаш осон бўлиши учун, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ билан белгилаб оламиз. Интегралда $x+\frac{p}{2}=t$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда $x=t-\frac{p}{2},\ dx=dt.$

Натижада, юқорида берилган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$I = \int \frac{M\,x+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\,x+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx =$$

$$= \int \frac{M\,\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{M\cdot p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot ln(t^2+a^2)+\left(N-\frac{M\cdot p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\,arctg\frac{t}{a}+C,$$

Энди x ўзгарувчига қайтамиз, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ ва $x+\frac{p}{2}=t$ ларни инобатга олиб, ушбу формулани ҳосил қиламиз.

$$I = \int \frac{M\,x + N}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= \frac{M}{2}\, ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \dfrac{M \cdot p}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} \cdot arctg \frac{x + \dfrac{p}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} + C.$$

Мисол. Интегрални ҳисобланг.

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx$$

Ечиш: Касрнинг махражи $x^2 + 2x + 10 = (x + 1)^2 + 9$ бўлиб, бунда $x + 1 = t$ белгилаш киритамиз, $x = t - 1, \quad dx = dt$ ва

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{3(t - 1) + 1}{t^2 + 9} dt = 3 \int \frac{t\,dt}{t^2 + 9} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} =$$

$= \frac{3}{2}\, ln(t^2 + 9) - \frac{2}{3}\, arctg \frac{t}{3} + C$ бўлиб, $t = x + 1$ га кўра

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{3}{2} ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{2}{3}\, arctg \frac{x + 1}{3} + C.$$

IV. $I = \int \frac{M\,x + N}{(x^2 + px + q)^k} dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Бунда, $k \geq 2,\ q - \frac{p^2}{4} > 0$. Бу интегралда ҳам юқоридагидек, $x + \frac{p}{2} = t \ \Rightarrow \quad x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt,$ алмаштириш бажарамиз. Натижада, берилган интеграл иккита интеграл йиғиндисига келади:

$$I=\int\frac{M\,x+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{M\,x+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^k}dx=$$

$$=\int\frac{M\,\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^k}dt=M\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

бунда, $\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2$.

Биринчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Иккинчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt==\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\right.$$

$$\left.-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

Охирги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз,

$$u=t,\qquad dv=\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k},\quad du=dt,$$

$$v=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

У ҳолда,

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}=$$

$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Натижада, топилганларни иккинчи интегралга қўйиб, қуйидаги рекурент формулага келамиз.

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} \cdot J_{k-1}\right)$$

ёки

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\, J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Бу рекурент формула $k > 1$ натурал сон бўлганда ихтиёрий J_k интегрални ҳисоблаш имконини беради.

Мисол. Интегрални ҳисобланг.

$$J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

Ечиш: бунда, $a = 1$, $k = 3$ бўлиб юқоридаги формулага кўра,

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgx + C,$$

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C.$$

2.5.6. РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Бу мавзуда юқорида ўрганган маълумотлардан фойдаланиб рационал касрларни интеграллаш қоидасини ўрганамиз.

1. Агар каср нотўғри бўлса, у ҳолда уни кўпҳад ва тўғри каср йиғиндисига келтирилади.
2. Тўғри касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратилади ва касрни содда касрлар йиғиндиси кўринишига келтирилади.
3. Интеграл остидаги кўпҳад ва содда касрлар йиғиндиси интегралланади.

Мисол: Интегрални ҳисобланг.

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx .$$

Ечиш. Интеграл остидаги функцияни бутун ва каср қисмларга ажратамиз.

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = (x - 2) + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2},$$

ўнг томондаги тўғри касрни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз.

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2 ,$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B ,$$

Айниятдан ушбу тенгламалар системасини тузамиз.

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases} \Rightarrow \text{бунда,} \quad B = 2, \quad A = 0, \quad C = 4, \quad D = 2\,.$$

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}\ ,$$

ва натижада интеграл остидаги рационал каср қуйидагича ёзилади,

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = (x - 2) + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}\,.$$

Ҳосил қилинган тенгликни интеграллаймиз.

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Бунда, $x + 1 = t$ белгилаш киритамиз, у ҳолда $x = t - 1$ ва $dx = dt$. У ҳолда:

$$\int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1} dt = 4\int \frac{tdt}{t^2 + 1} - 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= 2ln(t^2 + 1) - 2arctgt + C \Rightarrow (t = x + 1) \Rightarrow$$

$$= 2\ln(x^2 + 2x + 2) - 2arctg(x + 1) + C.$$

Демак, мисолда берилган интеграл қуйидагига тенг бўлади.

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2 + 2x + 2) - 2arctg(x + 1) + C\,.$$

2.6. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Баъзи тригонометрик функциялар иштирок этган функцияларни интеграллашни қараймиз. Рационал амаллар(қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш)ни қаноатлантирувчи $sinx$ ва $cosx$ ўзгарувчилар қатнашган функцияни $R(sinx; cosx)$ орқали белгиланади. Бу ерда R −рационал функция.

Қуйидаги, $\int R(sinx; cosx)dx$ кўринишдаги интеграллар

$$tg\frac{x}{2} = t$$

универсал алмаштириш ёрдамида тригонометрик функциялар қатнашмаган рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$sinx = \frac{sinx}{1} = \frac{sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$cosx=\frac{cosx}{1}=\frac{cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$tg\frac{x}{2}=t\ =>\ \frac{x}{2}=arctgt=>x=2arctgt,\ \ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Демак,

$$\int R(sinx;cosx)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt\,.$$

Бу универсал усул амалиётда анча меҳнат талаб қилади лекин ҳар доим натижага олиб келади. Баъзан интеграл остидаги функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, $\int R(sinx;cosx)dx$ интегрални ҳисоблашни соддалаштириш мумкин.

1. Агар $R(sinx;cosx)$ функция $sinx$ функцияга нисбатан тоқ функция, яъни $R(-sinx;cosx)=-R(sinx;cosx)$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{cosx=t}$ алмаштириш интегрални рационаллаштиради.

2. Агар $R(sinx;cosx)$ функция $cosx$ функцияга нисбатан тоқ функция, яъни $R(sinx;-cosx)=-R(sinx;cosx)$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{sinx=t}$ алмаштириш интегрални рационаллаштиради.

3. Агар $R(sinx;cosx)$ функция $sinx$ ва $cosx$ функцияларга нисбатан жуфт функция, яъни $R(-sinx;-cosx)=R(sinx;cosx)$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{tgx=t}$ алмаштириш интегрални рационаллаштиради.

Мисоллар.

1. Ушбу $\int \frac{dx}{3+sinx+cosx}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу мисолда $tg\frac{x}{2}=t$ универсал алмаштириш оламиз.

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \ sinx=\frac{2t}{1+t^2},\ \ cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Натижада,

$$\int \frac{dx}{3+sinx+cosx}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+t+2}=\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/_2}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C.$$

2. Ушбу $\int \frac{dx}{1+sin^2x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу мисолда

$$R(-sinx;-cosx)=\frac{1}{1+(-sinx)^2}=\frac{1}{1+sin^2x}=R(sinx;cosx).$$

бўлиб, $tgx=t$ алмаштиришдан фойдаланамиз. Демак,

$$x=arctgt,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\quad \text{ва}\quad sin^2x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+sin^2x}=\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{dt}{2t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C.$$

3. Ушбу $\int \frac{dx}{cosx}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу интегрални ҳисоблашда $tg\frac{x}{2} = t$ универсал алмаштиришдан фойдаланамиз.

$$tg\frac{x}{2} = t \ => x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

топилган алмаштиришларни интегралга қўямиз.

$$\int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = -2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right| + C =$$

$$= ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

$\int \boldsymbol{sin^m x \cdot cos^n x\, dx}$ кўринишдаги интегрални ҳисоблаш.

а) Агар $n -$ бутун мусбат тоқ сон бўлса, $\boldsymbol{sinx = t}$ алмаштириш,

б) Агар $m -$ бутун мусбат тоқ сон бўлса, $\boldsymbol{cosx = t}$ алмаштириш,

в) Агар m ва $n -$мусбат жуфт сонлар бўлса, даражани пайсайтириш формулаларидан фойдаланилади, яъни

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1+cos2x), \quad sin^2x = \frac{1}{2}(1-cos2x).$$

г) Агар $m+n -$манфий жуфт сонлар бўлса, у ҳолда интегрални топишда $\boldsymbol{tgx = t}$ алмаштиришдан фойдаланилади.

Мисоллар.

1. Ушбу интегрални ҳисобланг.

$$\int sin^4x \cdot cos^5xdx\ .$$

Ечиш. $m = 4,\ n = 5,\ \ sinx = t$ белгилаш киритамиз.

$$x = arcsint,\ \ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \ cosx = \sqrt{1-sin^2x} = \sqrt{1-t^2}.$$

$$\int sin^4x \cdot cos^5xdx = \int t^4 \cdot \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 \cdot (1-t^2)^2dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5}sin^5x - \frac{2}{7}sin^7x + \frac{1}{9}sin^9x + C.$$

2. Ушбу интегрални ҳисобланг.

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx\ .$$

Ечиш.

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int (sinx\ cosx)^2 \cdot sin^2xdx =$$

$$= \int \frac{1}{4}sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1-cos2x)dx = \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int sin^2 2x\ cos2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-cos4x)dx - \frac{1}{16}\int sin^2 2x\ d(sin2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sin4x - \frac{1}{48}sin^3 2x + C.$$

3. Ушбу интегрални ҳисобланг.

$$\int \frac{dx}{cosx \cdot sin^3x}\ .$$

Ечиш. Бу мисолда, $m + n = -4$ бўлиб, $tgx = t => x = arctgt,$

алмаштириш бажарамиз. Демак,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \frac{dx}{cosx \cdot sin^3x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt +$$

$$+ \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + ln|t| + C = -\frac{1}{2} ctg^2x + ln|tgx| + C.$$

$$\int \boldsymbol{sin\alpha x \cdot cos\beta x\, dx}, \quad \int \boldsymbol{cos\alpha x \cdot cos\beta x\, dx}, \quad \int \boldsymbol{sin\alpha x \cdot sin\beta x\, dx}$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда ушбу,

$$\boldsymbol{sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha-\beta) + sin(\alpha+\beta)]},$$

$$\boldsymbol{cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)]},$$

$$\boldsymbol{sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]},$$

формулалардан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг.

$$\int sin8x\, cos2xdx\,.$$

Ечиш.

$$\int sin8x\, cos2xdx = \frac{1}{2}\int (sin10x + sin6x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}cos10x - \frac{1}{6}cos6x\right) + C.$$

Амалиётда қулайлик туғдириш учун тригонометрик функциялар иштирок этган интегралларни ҳисоблашнинг баъзи хусусий ҳолларни келтирамиз.

Интеграл	Қисқача кўрсатма
$\int cos^2xdx,$	$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$
$\int cos^2x \cdot sin^6xdx,$	$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$
$\int sin^4 2xdx$	$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$
$\int cos^3xsin^5xdx$	$cosxdx = d(sinx)$
$\int cos^4x \cdot sin^3xdx,$	$sinxdx = -d(cosx)$
$\int \sqrt{cosx} \cdot sin^3xdx,$	$sin^2x = 1 - cos^2x$
$\int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx,$	$sin^4x = (1-cos^2x)^2$
$\int \frac{dx}{3+2cosx}, \quad \int \frac{dx}{cos^3x},$ $\int \frac{dx}{sinx-3cosx}, \quad \int \frac{dx}{sinx},$	$tg\frac{x}{2} = t, \ \ x = 2arctgt,$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2},$

$\int \frac{dx}{3 - sinx + cosx}.$	$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$
$\int \frac{dx}{1+tgx}, \quad \int tg^4xdx, \quad \int tg^5xdx,$ $\int \frac{dx}{4+3sin^2x}, \quad \int \frac{dx}{cos^4x},$ $\int \frac{sin^2x\,dx}{2 - sin^2x + 3cos^2x}.$	$tgx = t, \; x = arctgt,$ $dx = \frac{dt}{1+t^2},$ $sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2},$ $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$
$\int sin^5xdx, \int cos^2x \cdot sin^3xdx,$ $\int cos^3xdx, \quad \int \frac{sin^3xdx}{cos^4x}.$	$sinxdx = -d(cosx)$ $cosxdx = d(sinx).$

2.7. ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Баъзи иррационал функцияларни ўз ичига олган қуйидаги интегралларни қараймиз.

1. Ушбу типдаги,

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\,, \qquad (1)$$

$$\int \sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\;\boldsymbol{dx}\,, \qquad (2)$$

$$\int \frac{\boldsymbol{mx+n}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\;\boldsymbol{dx}\,, \qquad (3)$$

аниқмас интегралларга квадратик иррационлик деб аталади.

Бундай типдаги интегралларни топиш учун, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тўла квадратга ажратилади, яъни

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Бунда $\boldsymbol{x + \frac{b}{2a} = t}$ алмаштириш олинади ва натижада (1) ва (2) интегралллар тўғридан-тўғри интеграллаш жадвалига тушади. (3) интеграл эса интеграл жадвалидаги иккита йиғиндига келади.

Мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ интегрални топинг.

Ечиш. Дастлаб $4x^2 + 2x + 1$ квадрат учҳадни тўла квадратга ажратамиз.

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right].$$

У ҳолда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}} =$$

$$=> \left(x + \frac{1}{4} = t,\ \ x = t - \frac{1}{4}\ ,\ \ dx = dt\ \right) => \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C.$$

Мисол. Ушбу $\int \frac{x + 4}{\sqrt{6 - 2x - x^2}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Худди юқоридаги мисол каби, $6-2x-x^2$ квадрат учҳадни тўла квадратга ажратамиз.

$6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-[(x+1)^2-7]=7-(x+1)^2.$

у ҳолда, $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$ алмаштиришдан сўнг,

$$\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx=\int\frac{(x+1)+3}{\sqrt{7-(x+1)^2}}dx=\int\frac{t+3}{\sqrt{7-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{t}{\sqrt{7-t^2}}dt+3\int\frac{1}{\sqrt{7-t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{d(7-t^2)}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-t^2}}dt=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\cdot arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C.$$

2. Ушбу $\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\,\boldsymbol{dx}$ типдаги интегрални ҳисоблаш.

Бу ерда, $P_n(x)-n$ даражали кўпҳад. Берилган интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади, яъни

$$\int\frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\,\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{Q_{n-1}(x)}\cdot\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}+\boldsymbol{\lambda}\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}},$$

бу ерда, $Q_{n-1}(x)-$ номаълум коэффициентли $(n-1)$ даражали кўпҳад, λ −номаълум сон.

Формуладаги номаълум коэффициентларни топиш учун келтирилган формуланинг иккала томонидан ҳосила оламиз, яъни:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

ёки

$$P_n(x) \equiv Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+\lambda\,.$$

Охирги тенгликдан(айниятдан) x нинг бир хил даражалилари-ни тенгалаштириб номаълум коэффициентлар ва λ топилади.

Мисол. Ушбу $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида келтирилган формулага кўра, $n=2,\;\; n-1=1$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,,$$

тенгликни дифференциаллаймиз.

$$\left(\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx\right)'$$

$$=\left((Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2}\right)'+\left(\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}\right)',$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}=$$

$$=A\sqrt{1-2x-x^2}+(Ax+B)\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,,$$

соддалаштиришлардан сўнг қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз

$$x^2=A(1-2x-x^2)+(Ax+B)(-1-x)+\lambda\,,$$

$$\begin{array}{ll} x^2: & -A-A=1 \\ x^1: & -2A-A-B=0 \\ x^0: & A-B+\lambda=0 \end{array} \;=>\; \begin{array}{l} A=-{}^{1}\!/_{2}, \\ B={}^{3}\!/_{2}, \\ \lambda=2. \end{array}$$

Демак,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

бундан охирги интегрални ҳисоблаймиз.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} => [1-2x-x^2 = 2-(x+1)^2] =>$$

$$=> \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x+1)^2}} = arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,$$

Натижада ушбу ечимга эга бўламиз,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Ушбу, $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\boldsymbol{\alpha_1}/\boldsymbol{\beta_1}}, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\boldsymbol{\alpha_2}/\boldsymbol{\beta_2}}, \dots, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\boldsymbol{\alpha_i}/\boldsymbol{\beta_i}}\right) \boldsymbol{dx}$

типдаги интегрални ҳисоблаш. Бу ерда, $a, b, c, d -$ ҳақиқий сонлар, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$, $\alpha_i, \beta_i -$ натурал сонлар.

Бундай кўринишдаги интегралларда $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ алмаштириш берилган интегрални рационаллаштиради. Бу ерда $k -$сони $^{\alpha_1}/_{\beta_1}, ^{\alpha_2}/_{\beta_2}, \dots, ^{\alpha_i}/_{\beta_i}$ касрлар махражларининг энг кичик умумий карралиси, яъни ЭКУК$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i) = k$.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k => x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a} \quad \text{ва}$$

$$dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}dt.$$

Натижада юқорида берилган интеграл, t параметрга боғлиқ бўлган рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

Мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида келтирилган формулага кўра, $x+2=t^6$, чунки ЭКУК$(3,2)=6$. Демак, $x+2=t^6 => x=t^6-2 => dx=6t^5dt$.

Натижада,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}=\int \frac{6t^5dt}{t^4-t^3}=6\int \frac{t^2dt}{t-1}=6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt=$$

$$=6\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3t^2+6t+6ln|t-1|+C=$$

$$=3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C\ .$$

Мисол. Ушбу $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(1-x)^2}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган мисолда $\frac{x+1}{x-1}=t^3$ белгилаш киритамиз,

$$x+1=t^3(x-1) => x=\frac{t^3+1}{t^3-1} => dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

Натижада,

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(1-x)^2}=-\int t\cdot\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\frac{dt}{\left(1-\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)^2}=-\frac{3}{2}\int t^3dt=$$

$$=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C.$$

4. Баъзи иррационал функцияларни интеграллашда тригонометрик алмаштириш бажариш.

Баъзи иррационал функциялар иштирок этган интегралларда тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида интеграллар рационал функцияларни интеграллашга келтирилади, яъни:

a) $\int \boldsymbol{R\left(x;\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx}$ интегралда $x=a\cdot sint$ ёки $x=a\cdot cost$ алмаштириш берилган интегрални рационаллаштиради.

б) $\int \boldsymbol{R\left(x;\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$ интегралда $x=\dfrac{a}{sint}$ ёки $x=\dfrac{a}{cost}$ алмаштириш берилган интегрални рационаллаштиради.

в) $\int \boldsymbol{R\left(x;\ \sqrt{x^2+a^2}\right)dx}$ интегралда $x=a\cdot tgt$ ёки $x=a\cdot ctgt$ алмаштириш берилган интегрални рационаллаштиради.

Мисол. Ушбу $\int \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган мисолда юқори келтирилган а) кўринишга кўра $x=2sint$ алмаштириш бажарамиз. Демак, $dx=2costdt$, $t=arcsin\dfrac{x}{2}$ белгилашларни берилган интегралга қўямиз,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{\sqrt{4-4sin^2t}}{4sin^2t}\cdot 2\,cost\,dt=\int ctg^2tdt=$$

$$=\int \left(\frac{1}{sin^2t}-1\right)dt=-\,ctgt-t+C=C-arcsin\frac{x}{2}-ctg\left(arcsin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=> \left(ctgt = \frac{\sqrt{1-sin^2t}}{sint} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} \right) => = C - arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Мисол. Ушбу $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу мисолда юқори келтирилган в) алмаштириш бажарамиз.

$$\left(x = tgt, \quad dx = \frac{dt}{cos^2t}, \;\; t = arctgx. \right)$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg^4t} \cdot \frac{dt}{cos^2t} = \int \frac{\frac{1}{cost}}{tg^4t \cdot cos^2t}dt =$$

$$= \int \frac{cost}{sin^4t}dt = \int \frac{d(sint)}{sin^4t} = -\frac{1}{3sin^3t} + C = C - \frac{1}{3[sin(arctgx)]^3} =$$

$$\left[\left(\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \text{ га кўра} \right]$$

$$= C - \frac{1}{3\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]^3} = C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$$

Мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу мисолда юқори келтирилган б) алмаштириш бажарамиз.

$$\left(x = \frac{3}{sint}, \;\; sint = \frac{3}{x} => t = arcsin\left(\frac{3}{x}\right), \;\; dx = -\frac{3cost}{sin^2t}dt. \right)$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{-\frac{3cost}{sin^2t}}{\frac{9}{sin^2t}\sqrt{\frac{9}{sin^2t}-9}}dt=-\frac{1}{9}\int sint\,dt=$$

$$=\frac{1}{9}cost+C=\frac{1}{9}cos\left(arcsin\frac{3}{x}\right)+C=\frac{1}{9}\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$$

5. $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\ \sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\right)\boldsymbol{dx}$ типидаги интегралларни ҳисоблаш учун ax^2+bx+c квадрат учҳадни тўла квадратга ажратиб оламиз, яъни

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2}\right],$$

ва бу ерда, $x+\frac{b}{2a}=t$ алмаштириш киритамиз, натижада интеграл юқорида ўрганилган қуйидаги,

$$\int R\left(x;\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x;\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \int R\left(x;\ \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$$

интеграллардан бирига келади ва бу интегралларда тегишли тригонометрик алмаштириш бажариб интеграл ҳисобланади.

Мисол. Ушбу $\int\frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган интегралда юқорида келтирилган формулага кўра алмаштириш бажарамиз, яъни

$$x^2+2x-4=(x+1)^2-5 => \begin{pmatrix} x+1=t, \\ x=t-1, \\ dx=dt. \end{pmatrix} =>$$ топилганларни интегралга қўямиз

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3} = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}dt =>$$ бунда, $t=\frac{\sqrt{5}}{sinz}$ алмаштириш бажарамиз, яъни $dt=-\frac{\sqrt{5}\,cosz}{sin^2z}dz$ ва $z=arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$ бўлиб,

Натижада,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3} = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}dt = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{sinz}\right)^2-5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{sinz}\right)^3}\left(-\frac{\sqrt{5}\,cosz}{sin^2z}dz\right) =$$

$$= -\int \frac{\sqrt{5}\frac{\sqrt{1-sin^2z}}{sinz}}{\frac{5\sqrt{5}}{sin^3z}} \cdot \frac{\sqrt{5}cosz}{sin^2z}dz = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int cos^2zdz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1+cos2z}{2}dz = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\int (1+cos2z)dz =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(z+\frac{1}{2}sin2z\right)+C = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+\frac{1}{2}sin2\left(arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right]+C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+sin\left(arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\cdot cos\left(arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right]+C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+\frac{\sqrt{5}}{t}\cdot\sqrt{1-\frac{5}{t^2}}\right]+C => (x+1=t) =>$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{1-\frac{5}{(x+1)^2}}+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left[arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5}\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right] + C.$$

Эслатма: Ушбу, $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ типдаги интегралларни ҳисоблашда интегралда $t = \frac{1}{x}$ алмаштириш бажарилади.

Мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган интегрални юқорида келтирилган формулага кўра ҳисоблаймиз.

$$t = \frac{1}{x} => x = \frac{1}{t},\ \ dx = -\frac{1}{t^2}dt => \int \frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 4\cdot\frac{1}{t} - 4}}dt =$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{1+4t-4t^2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+t-t^2\right)}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+t-t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} => \begin{pmatrix} t-\frac{1}{2} = z \\ t = z+\frac{1}{2} \\ dt = dz \end{pmatrix} => -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}-z^2}} =>$$

$$\left(z = \frac{1}{\sqrt{2}}cos\xi => cos\xi = \sqrt{2}z => \xi = arccos\left(\sqrt{2}z\right),\ \ dz = -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\xi d\xi\right)$$

Натижада, $-\frac{1}{2}\int \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\xi d\xi}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\xi\right)^2}} = \frac{1}{2}\int d\xi = \frac{1}{2}\xi + C =$

$$= \frac{1}{2}arccos\sqrt{2}\, z + C = \frac{1}{2}arccos\sqrt{2}\ \left(t - \frac{1}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{\sqrt{2}x} + C.$$

2.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ БИНОМНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Ушбу $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p dx$ интегралга дифференциал биномли интеграл деб аталади. Бу ерда, a, b —ҳақиқий сонлар, m, n, p — рационал сонлар. Бу интегрални ҳисоблаш m, n, p —даражаларнинг қийматларига боғлиқ бўлиб, агар p, $\frac{m+1}{n}$ ёки $\frac{m+1}{n} + p$ ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси бутун сон бўлса П.Л.Чебышев исбот қилганки, дифференциал биномлар интеграли элементар функциялар интегралларига келтирилади.

Қуйида хусусий ҳолларда мос алмаштиришлар орқали берилган интеграл рационаллаштирилади.

1). Агар $\boldsymbol{p}$ —**бутун сон** бўлса, $\boldsymbol{x = t^k}$ ўрнига қўйиш бажарилади, бу ерда $k =$ ЭКУК(m, n).

2). Агар $\boldsymbol{\frac{m+1}{n}}$ —**бутун сон** бўлса, $\boldsymbol{a + bx^n = t^s}$ ўрнига қўйиш бажарилади, бу ерда s сони, p — нинг махражига тенг.

3). Агар $\boldsymbol{\frac{m+1}{n} + p}$ —бутан сон бўлса, $\boldsymbol{a + bx^n = x^n t^s}$ ўрнига қўйиш бажарилади, бу ерда s сони, p — нинг махражига тенг.

Мисол. Ушбу $I = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган интегрални юқорида келтирилган хусусий ҳоллардан бирига келтирамиз.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}dx =$$

бу мисолда, $m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3}$ бўлиб, $\frac{m+1}{n} = 2$ бутун сон, шунинг учун, $\sqrt[4]{x}+1 = t^3$ алмаштириш бажарамиз, бунда

$$t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1},\ \ x = (t^3-1)^4 => dx = 12t^2(t^3-1)^3dt.$$

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int \frac{12t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt =$$

$$= 12\int (t^6-t^3)dt = 12\cdot\frac{t^7}{7} - 12\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{7/3} -$$

$$-3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{4/3} + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^4} + C.$$

Мисол. Ушбу, $I = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган интегралнинг юқорида келтирилган дифференциал биномини интеграллаш формулаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$I = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx \quad \text{ифодадан}$$

$$m = -11,\ \ n = 4,\ \ p = -\frac{1}{2} \ \text{ ларни топамиз ва } \frac{m+1}{n} + p = -3$$

бутун сон, шунинг учун $1+x^4=x^4\cdot t^2$ алмаштириш бажарамиз

$$t^2=\frac{1+x^4}{x^4} => \quad t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}, \quad x^4=\frac{1}{t^2-1} => x=\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-1}},$$

$$dx=-\frac{1}{4}\cdot 2t(t^2-1)^{-\frac{1}{4}-1}dt=-\frac{tdt}{2\sqrt[4]{(t^2-1)^5}},$$

$$I=\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx=\int\frac{\frac{-tdt}{2\sqrt[4]{(t^2-1)^5}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{(t^2-1)^{11}}}\sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}}=$$

$$=\int\frac{\frac{-tdt}{2\sqrt[4]{(t^2-1)^5}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{(t^2-1)^{11}}}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2-1}\,\sqrt[4]{(t^2-1)^6}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2dt==-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C=$$

$$=C-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{(1+x^4)^{10}}{x^{20}}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(1+x^4)^3}{x^{12}}}-\sqrt{\frac{1+x^4}{4x^4}}\ .$$

Амалиётда мисол ишлашда қулай бўлиши учун баъзи иррационал функцияларни интеграллашни келтирамиз:

Мисол	Бажариладиган алмаштириш
$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx$	$x=t^{12},\ dx=12t^{11}dt.$
$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$	$x=t^{6},\ dx=6t^{5}dt.$
$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$	$x=t^{12},\ dx=12t^{11}dt.$
$\int \frac{1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}dx$	$x=t^{10},\ dx=10t^{9}dt.$
$\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt[3]{3x+2}}dx$	$3x+2=t^{6},\ dx=2t^{5}dt.$
$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{x+1}}dx$	$x+1=t^{6},\ dx=6t^{5}dt.$
$\int \frac{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}dx$	$x-3=t^{4},\ dx=4t^{3}dt.$
$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$	$\frac{1-x}{1+x}=t^2,\ dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt.$
$\int \frac{1}{\sqrt{x-2}+4}dx$	$x-2=t^{2},\ dx=2tdt.$

$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$	$x=t^6,\ \ dx=6t^5dt.$
$\int \frac{1}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}dx$	$x=t^3,\ \ dx=3t^2dt.$
$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{8-x^2}}dx$	$8-x^2=t^3,$ $dx=-\frac{3}{2}t^2(8-t^3)^{-1/2}dt.$
$\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}dx$	$1+x^3=t^3x^3,$ $dx=-t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt$
$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$	$x=t^6,\ \ dx=6t^5dt$
$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x^3}+4}}dx$	$x^{\frac{3}{2}}+4=t^2,\ \ dx=\frac{4}{3}t(t^2-4)^{-\frac{1}{3}}dt$
$\int \frac{1}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}dx$	$2-x^3=t^3x^3,$ $dx=-\sqrt[3]{2}t^2(t^3+1)^{-\frac{4}{3}}dt$
$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}},$ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx,$	$x=a\,sint,\quad dx=a\,costdt,$ $t=arcsin\frac{x}{a},\quad \sqrt{a^2-x^2}=acost.$
$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4}dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}},$	$x=a\,tgt,\quad dx=\frac{a\,dt}{cos^2t},$ $t=arctg\frac{x}{a},\quad \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{cost}.$

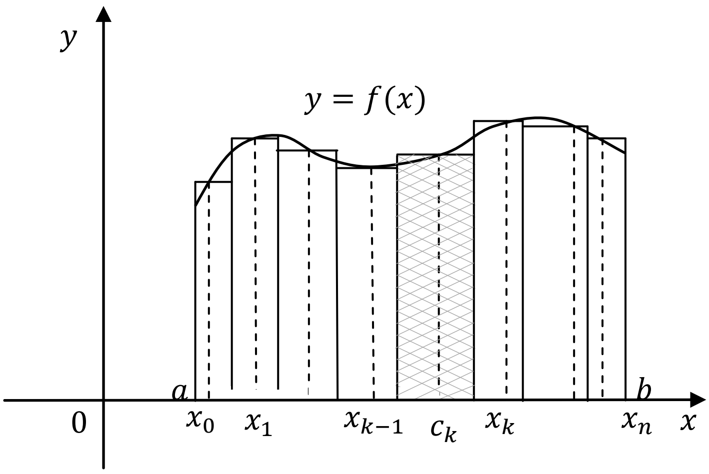
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$	$x = \frac{a}{sint}$; $dx = -\frac{a\, costdt}{sin^2 t}$,
$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^6}dx$,	$t = arcsin\frac{a}{x}$, $\sqrt{x^2-a^2} = \frac{a\, cost}{sint}$.

3. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

Аниқ интеграл математик таҳлилнинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, у ёрдамида юза, ҳажм, ёй узунлиги, тезлик, бажарилган иш, инерция моментлари ва ҳоказолар топилади.

3.1. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИГА КЕЛТИРИЛУВЧИ МАСАЛАЛАР

$y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Қуйидаги амалларни бажарамиз:



1). $[a,b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$

нуқталар ёрдамида n та ихтиёрий бўлакчаларга ажратамиз.

Одатда $(x_{k-1}; x_k)$ га $(k = \overline{1,n})$ қисмий интерваллар деб аталади.

2). Қисмий интервалларнинг узунлигини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ билан белгилаймиз, бу ерда, $k = \overline{1,n}$.

3). Ҳар бир қисмий интервалдан ихтиёрий c_k, $(k = \overline{1,n})$ нуқталарни оламиз ва функциянинг шу нуқтадаги қийматлари $f(c_k)$ $(k = \overline{1,n})$ ни топамиз.

4). Юқорида топилган ифодалардан фойдаланиб, қуйидаги $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = \overline{1,n})$ кўпайтмаларнинг йиғиндисини тузамиз ва бу йиғиндини S_n билан белгилаймиз, яъни:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \,.$$

S_n йиғиндига $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги интеграл йиғиндиси деб аталади ва бу интеграл йиғиндидаги ҳар бир $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ қўшилувчи, баландлиги $f(c_k)$га ва асосининг узунлиги Δx_kга тенг бўлган тўғри тўртбурчакларнинг юзачаларини ифодалайди.

У ҳолда берилган эгри чизиқли трапециянинг юзаси тақрибан қуйидагига тенг бўлади:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k}\,,$$

λ −орқали юзачалар энг катта бўлагининг узунлигини белгилаймиз, яъни:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}\,,$$

Равшанки, агар оралиқлар сонини орттира борсак, юқоридаги йиғиндининг қиймати эгри чизиқли трапециянинг юзига яқинлашади.

3.2. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАЪРИФИ

Таьриф: S_n интеграл йиғиндининг $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ да лимити мавжуд бўлса, бу лимитга $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесма бўйича аниқ интеграли деб аталади ва у қуйидагича белгиланади.

$$\int_a^b f(x)dx\ .$$

Яъни,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} S_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k.$$

Бу ерда,

$\int_a^b -$ аниқ интеграл белгиси,

a −аниқ интегралнинг қуйи чегараси,

b −аниқ интегралнинг юқори чегараси,

x −интеграллаш ўзгарувчиси,

$f(x)$ −интегралланувчи функция,

$f(x)dx$ −интеграл остидаги ифода деб аталади.

Биз қуйидаги муҳим теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда функциянинг шу кесмада аниқ интеграли мавжуд бўлади.

3.3. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Аниқ интеграл геометрик жиҳатдан $f(x)\geq 0$ бўлганда юқоридан $y=f(x)$ функция билан, пастдан $y=0$ тўғри чизиқ билан, ён томонлардан эса $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзасини ифодалайди, яъни

$$\boldsymbol{S}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\,.$$

3.4. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

1^0. $\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx,$ бу ерда, $c=const$.

2^0. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx,$

3^0. Агар $\int_a^b f(x)dx$ да $a=b$ бўлса, $\int_a^a f(x)dx=0,$

4^0. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx\,,$

$5^0.\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \quad c \in [a,b],$

$6^0.\ \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$ $f(c)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмадаги ўрта қиймати деб аталади ва қуйидагича топилади,

$$\boldsymbol{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}\,.$$

$7^0.$ Агар $[a,b]$ кесмада $f(x) \geq g(x)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги

$\int_a^b f(x)dx \ \geq \int_a^b g(x)dx$ тенгсизлик ўринли бўлади.

$8^0.$ Ушбу, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \ \leq M(b-a)$ тенгсизлик ўринли.

бу ерда, m ва M лар $y = f(x)$ функциянинг мос равишда $[a,b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари.

$9^0.\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

$10^0.\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$

3.5. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ ҲИСОБЛАШ. НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСИ

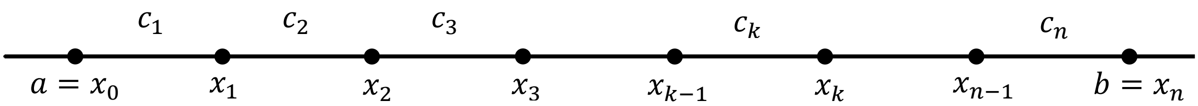
Аниқ интегрални унинг таърифидан фойдаланиб ҳисоблаш жуда ноқулай бўлиб, мураккаб ҳисоблашларни талаб этади. Аниқ интегрални ҳисоблаш ҳақидаги муҳим бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. Агар $y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ кесмада аниқланган ҳамда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ унинг $[a, b]$ кесмадаги бирор бошланғич функцияси бўлса (яъни $F'(x) = f(x)$), у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади.

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)}\,.$$

Бу формулага Ньютон-Лейбниц формуласи деб аталади.

Исбот: $[a, b]$ кесмани юқоридагидек, n –та бўлакчаларга бўлиб чиқамиз ва ҳар бир бўлакчадан c_k нуқтани оламиз.



Натижада қуйидаги айирмани қараймиз.

$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] +$

$+[F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)].$

Ҳар бир қавс ичидаги ифода Лагранж формуласига кўра қуйидаги кўринишни олади, яъни

$(f(b) - f(a) = f'(c)(b - a))$ Лагранж формуласига кўра,

$F(b) - F(a) = F'(c_n)(x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots +$

$$+F'(c_2)(x_2-x_1)+F'(c_1)(x_1-x_0)=\sum_{k=1}^{n}F'(c_k)\,(x_k-x_{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}F'(c_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\,\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

Келтирилган бу формуланинг қулайлиги шундаки, аниқ интегрални ҳисоблаш учун функциянинг бошланғичини билиш етарли экан. Шу сабабли бу формула катта амалий аҳамиятга эгадир.

Мисоллар.

$1-$мисол. $\int_0^3 x^2dx$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида келтирилган Ньютон -Лейбниц формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_0^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{3^3}{3}=9.$$

$2-$мисол. $\int_e^{e^2}\frac{dx}{xlnx}$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида келтирилган Ньютон -Лейбниц формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{xlnx}=\int_e^{e^2}\frac{d(lnx)}{lnx}=ln|lnx|\bigg|_e^{e^2}=ln|lne^2|-ln1=ln2.$$

3.6. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛИ

Фараз қилайлик, $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар бирор $[a, b]$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлсин.

Теорема. Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар ҳосилалари билан $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади.

$$\int_a^b \boldsymbol{udv} = (\boldsymbol{u\,v})\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_a^b \boldsymbol{vdu}\,.$$

Исботи. $[a, b]$ кесмада $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ ўринли, у ҳолда $u \cdot v$ функция $u'v + v'u$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласига кўра,

$$\int_a^b (u'v + v'u)dx = (u\,v)\Big|_a^b => \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b v'u\,dx = (uv)\Big|_a^b =>$$

$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = (u\,v)\Big|_a^b => \int_a^b u\,dv = (u\,v)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Мисоллар.

$1 -$ мисол. $\int_1^e x\,lnx\,dx$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган аниқ интегрални юқорида келтирилган бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_1^e x\,lnx\,dx = \left|\begin{matrix} u = lnx, & dv = xdx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^2}{2}. \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}lnx\,\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

$2-$мисол. $\int_0^1 arctgx\,dx$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган аниқ интегрални юқорида келтирилган бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_0^1 arctgx\,dx = \left|\begin{matrix} u = arctgx\,, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, \qquad v = x. \end{matrix}\right| = xarctgx\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= arctg1 - arctg0 - \frac{1}{2}ln|1+x^2|\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2.$$

3.7. АНИҚ ИНТЕГРАЛДА ЎЗГАРУВЧИЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Айтайлик, $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин, бу ерда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз. $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш учун, $x = \varphi(t)$ узлуксиз функция киритилган бўлсин.

Теорема. Агар $\varphi(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирса, яъни

1). $x = \varphi(t)$ функция ва унинг ҳосиласи, $\varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ узлуксиз.

2). $x = \varphi(t)$ функциянинг қийматлари тўплами $[a, b]$ кесмага тегишли.

3). $\varphi(\alpha) = a$ ва $\varphi(\beta) = b$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt\,. \qquad (*)$$

Исбот. Нъютон- Лейбниц формуласига кўра,

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)d\big(\varphi(t)\big) = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

$(*)$ формула, одатда аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи деб аталади. Ушбу усулга кўра аниқ интегралда ўзгарувчини шундай бир функция билан алмаштириш лозимки, натижада янги ўзгарувчига нисбатан ҳосил бўлган интеграл содда кўринишга эга бўлади.

Мисоллар:

$1 -$ мисол. $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган аниқ интегрални юқорида келтирилган ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx => \begin{pmatrix} x = 2sint, \quad dx = 2costdt \\ x = 0 \text{ да}, \ \ t = 0 \\ x = 2 \text{ да}, \ \ t = \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} =>$$

У ҳолда, $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^2t\cdot\sqrt{4-4sin^2t}\cdot 2costdt =$

$$= 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2t\cdot cos^2t\ dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t\ dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos4t)\ dt =$$

$$= \left(2t - \frac{1}{2}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

$2 -$ мисол. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилган аниқ интегрални юқорида келтирилган ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = sint\ , \\ dx = costdt\ , \\ x = 0 \text{ да}, \ \ t = 0\ , \\ x = 1 \text{ да}, \ \ t = \dfrac{\pi}{2}\ . \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2t}\ \cdot costdt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt == \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Эслатма: Аниқ интегрални ҳисоблашда янги ўзгарувчидан эскисига қайтиш керак эмас, балки янги ўзгарувчининг чегараларини кейинги бошланғич функцияга қўйиш керак. Баъзи ҳолларда ўрнига қўйиш усули билан интеграллашда янги ўзгарувчига нисбатан чегарани аниқлаш мураккаб бўлиши мумкин. Шунинг учун бундай ҳолларда янги ўзгарувчига нисбатан бошланғич функция ҳисоблангандан кейин эски ўзгарувчига қайтилади ва ҳосил қилинган ифодага эски чегаралар қўйилади.

3.8. ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Аниқ интегрални ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида интеграл остидаги функциянинг хоссаларидан фойдаланиб ҳам ҳисоблашимиз мумкин.

Теорема. $y = f(x)$ функция $[-a, a]$ кесмада узлуксиз ва $x = 0$ нуқтага нисбатан симметрик бўлсин, у ҳолда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ агар } f(x) - \text{жуфт функция бўлса,} \\ 0, \quad \text{ агар } f(x) - \text{тоқ функция бўлса.} \end{cases}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $[-a, a]$ кесмани иккита $[-a, 0]$ ва $[0, a]$ кесмаларга ажратамиз, натижада

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

биринчи интервалда $x = -t$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$-\int_{-a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx.$$

Демак,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$$

Агар $f(x)$ −тоқ функция бўлса, $f(-x) = -f(x)$ бўлиб,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

Агар $f(x)$ −жуфт функция бўлса, $f(-x) = f(x)$ бўлиб,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\ .$$

3.9. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛ

Қуйидаги

$$I(\alpha) = \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx$$

интеграл параметрга боғлиқ интеграл дейилади.

Агар $f(x,\alpha)$ ва $f'_{\alpha}(x,\alpha)$ узлуксиз функциялар бўлса,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_{\alpha}(\alpha)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундан

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx.$$

Лагранж теоремасига асосан,

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha), \quad 0<\theta<1.$$

Маълумки $f'_\alpha(x,\alpha)$ узлуксиз бўлганлиги учун $f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)=$ $=f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon,$ бу ерда $\varepsilon=\varepsilon(x,\alpha,\Delta x)$ ва $\Delta x\to 0$ да $\varepsilon\to 0$.

Демак,

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]dx\ .$$

Лимитга ўтсак,

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

ҳосил бўлади.

Бу формулага Лейбниц формуласи дейилади.

Фараз қилайлик, $a=a(\alpha),\ b=b(\alpha)$ бўлсин.

У ҳолда:

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)\,]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx.$$

Ф функция мураккаб функция бўлганлиги учун унинг ҳосиласи

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial\alpha}$$

Маълумки,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\alpha)dx = -f[a(\alpha),\alpha],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)dx = f[b(\alpha),\alpha], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

У ҳолда:

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha\,(x,\alpha)dx + f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha}.$$

Бу формула ёрдамида чегаралари ўзгарувчи бўлган интегралларни дифференциаллаш мумкин.

Мисол. Қуйидаги $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу интегрални тўғридан-тўғри интеграллаб бўлмайди, чунки $e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}$ функцияниуі элементар функциялар орқали ифодаланадиган бошланғич функцияси йўқ.

Бу интегралниуі α параметрни функцияси сифатида Лейбниц формуласи ёрдамида ҳосиласини оламиз.

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}\right]'_\alpha dx = \int_0^\infty e^{-x}cos\alpha x dx.$$

Бу интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Бу ифодани интегралласак $I(\alpha) = arctg\alpha + C$ ҳосил бўлади. C ни аниқлаш учун

$$I(0)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{sin0x}{x}dx=\int_0^{\infty} 0dx=0.$$

Бундан ташқари $arctg0 = 0$.

У ҳолда, $C = 0$ бўлиб, $I(\alpha) = arctg\alpha$ яъни

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx=arctg\alpha.$$

3.10. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ(I тур)

$$\boldsymbol{B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}, \quad (\boldsymbol{a}>0, \quad b>0) \qquad (1)$$

кўринишдаги интегралларга I тур Эйлер интеграли дейилади.

Бу интеграл a ва b нинг мусбат қийматларида яқинлашади.

Эйлер интеграли (1) қуйидаги хоссаларга эга:

1. $B(a,b) = B(b,a)$ (бу $x = 1 - t$ алмаштириш орқали исботланади); яъни интеграл a ва b ларга нисбатан симметрик.

2. $b > 0$ ҳолда уни бўлаклаб интеграллаб

$$\boldsymbol{B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)} \qquad (2)$$

эканлиги исботланади.

Бу формула ёрдамида иккинчи аргументни кетма-кет камайтириб, $b \leq 1$ гача келтириш мумкин.

Худди шундай $a > 1$ бўлганда

$$\boldsymbol{B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,b)} \tag{2^1}$$

ни ҳосил қилиш мумкин.

Агар $b = n$ натурал сон бўлса, (2) дан

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+2}\ B(a,1)$$

ҳосил қилинади.

$$\text{Аммо } B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}.$$

Шу сабабли $B(a,n)$ ва $B(n,a)$ лардан

$$\boldsymbol{B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}} \tag{3}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар $a = m$ натурал сон бўлса (3) дан

$$\boldsymbol{B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}}.$$

Бу формуладан $m = 1,\ n = 1$ да ҳам фойдаланиш мумкин.

3. Агар (1) да $x = {}^{y}\!/_{(1+y)}$ алмаштириш олсак,

$$\boldsymbol{B(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b-1}} dy} \tag{4}$$

ҳосил бўлади.

a параметрни $0 < a < 1$ ўзгаради деб, $b = 1 - a$ алмаштириш олсак

$$\boldsymbol{B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy}\,.$$

Бу интегрални ечиб,

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{sin\pi a}\,. \qquad (0 < a < 1)$$

Хусусий ҳолда $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ десак, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

3.11. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ(II тур)

$$\Gamma(\boldsymbol{a}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} \boldsymbol{x^{a-1} e^{-x} dx} \qquad (\boldsymbol{5})$$

(5) га иккинчи тур Эйлер интеграли дейилади. (5)чи интеграл $a > 0$ қийматларда яқинлашади. Агар бу интегралда $x = ln\frac{1}{z}$ десак

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(ln\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz$$

ҳосил бўлади.

Маълумки,

$$ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right).$$

(бу ифода n ўсиши билан ўсиб боради ва ўзининг лимитига интилади). У ҳолда,

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz.$$

Бу ерда, $z = y^n$ алмаштириш оламиз

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy.$$

Бундан (3) чи формулани этиборга олсак,

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy = B(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}.$$

Шундай қилиб,

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

Эйлер-Гаусс формуласи ҳосил бўлади. $\Gamma(a)$ функциянинг хоссаларини қараймиз.

1. Бу функция да $a > 0$ да узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга.

$$\Gamma'(\boldsymbol{a}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} \boldsymbol{x^{a-1}(lnx)\, e^{-x}dx}, \qquad (\boldsymbol{6})$$

$$\Gamma''^{(a)} = \int_0^{\infty} x^{a-1}(lnx)^2\, e^{-x}dx, \qquad \text{ва ҳ.к.}$$

2. (5) ни бўлаклаб интеграллаймиз

$$a\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}dx = x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a\, e^{-x}dx$$

Яъни

$$\Gamma(\boldsymbol{a}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{a}\Gamma(\boldsymbol{a}) \qquad (7)$$

Бу формулани кетма-кет қўллаб

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)\, a\, \Gamma(a)$$

ҳосил қиламиз.

Бу ерда $a = 1$ десак ва

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

эканлигини этиборга олсак,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ни ҳосил қиламиз.

3. (7) дан $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Ролл теоремасига асосан 1 ва 2 орасида a_0 илдиз ётибди ва $\Gamma'(a)$ ўсувчи ва $\Gamma''(a) > 0$, демак $0 < a < a_0$ оралиқда $\Gamma'(a) < 0$ ва $\Gamma(a)$ функция камаяди.

$a_0 < a < \infty$ да $\Gamma'(a) > 0$ ва $\Gamma(a)$ функция ўсади.

Бу ерда $a_0 = 1{,}4616\ldots$ ва $min\Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0{,}8856\ldots$

Маълумки, $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to \infty$ ($a \to 0$ да)

агар $a > n+1, \Gamma(a) \to +\infty$ ва $\Gamma(a) > n!$.

4. Агар (5) да $x = ty$ (t>0) десак, у ҳолда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^\alpha} = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy\,.$$

a ни $a + b$ ва t ни $1 + t$ билан алмаштирамиз,

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \,.$$

Буни t^{a-1}га кўпайтириб t бўйича интеграллаймиз,

$$\Gamma(a+b)\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{\infty} t^{a-1} dt \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \,.$$

Агар (4), (5) ва (6) ларни эътиборга олсак,

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} y^{a+b-1}\, e^{-y} \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a)\int_0^{\infty} y^{b-1}\, e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\boldsymbol{B(a,b)} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{a})\Gamma(\boldsymbol{b})}{\Gamma(\boldsymbol{a+b})} \,. \qquad \textbf{(8)}$$

5. Агар $b = 1 - a \ (0 < a < 1)$ десак,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sina\pi} \,.$$

Бунга тўлдириш формуласи дейилади.

$a = \dfrac{1}{2}$ бўлса $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ бўлади.

Қуйидаги, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}$ интегралда $z = x^2$ десак, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

6. $b = a$ ҳамда

$$B(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx.$$

Бунда $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$ алмаштириш оламиз

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}\,dt=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

(8) чи формуладан фойдаланиб,

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}$$

ва бундан Лежандр формуласига келамиз.

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)\,.$$

$\Gamma-$функциянинг бундан ташқари жуда ҳам кўп хоссалари мавжуд бўлиб, улардан Лежандр чексиз қаторлар ёрдамида $\Gamma(a)$ ни a ни 1 дан 2 гача қийматларини 0,001 қадам билан 7 хонали ва 12 хонали ўнлик аниқликда ўнли логарифмлари жадвалини ишлаб чиққан, шу сабабли элементар бўлмаган $\Gamma-$функцияни элементар функциялар қаторида ишлатиш мумкин.

3.12. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Маълумки, бирор оралиқда узлуксиз бўлган функция учун ҳар доим бошланғич функция мавжуд, яъни бирор оралиқда узлуксиз бўлган функция интегралланувчи функция бўлади. Лекин ҳар доим ҳам берилган оралиқда берилган функция учун бошланғич функцияни ҳисоблаш мумкин бўлавермаганлиги учун кўпгина аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашга мажбур бўламиз. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш усулларидан энг самарали усуллар тўғри тўртбурчаклар усули, трапеция усули ҳамда парабола усуллари ҳисобланади.

3.12.1. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

$[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)dx$ ни ҳисоблаш талаб қилинсин.

а) Агар $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ ни топиш мумкин бўлса, у ҳолда аниқ интегрални Нъютон-Лейбниц формуласи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

дан фойдаланиб ҳисоблашимиз мумкин.

б) Агар $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ номаълум бўлса (топиб бўлмаса) ёки мураккаб бўлса ҳамда $f(x)$ функция график ёки жадвал кўринишида берилган бўлса, у ҳолда аниқ интегралнинг тақрибий ҳисоблаш усулларидан фойдаланилади.

Биз асосан аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг уч хил усули: Тўғри тўртбурчак, трапеция ва Симпсон усулларидан фойдаланамиз. Бу усуллар интеграл остидаги $f(x)$ функцияни уни тақрибий ифодаловчи, бошланғич функцияси мавжуд бўлган бирор кўпҳад билан алмаштириш (яъни $f(x) \approx P_n(x)$) га асосланади.

Бундан фойдаланиб, берилган интегрални қуйидаги

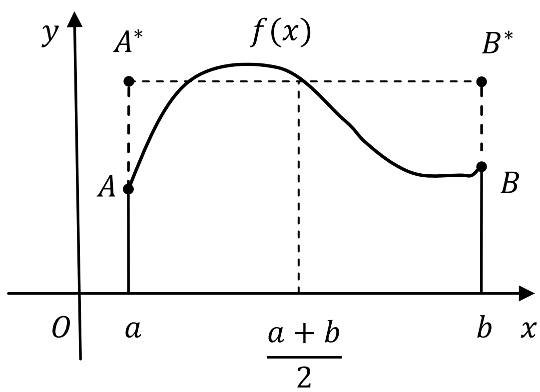
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx$$

интегрални тақрибий ҳисоблаш формуласига келамиз. Бу тақрибий формулани ҳисоблашда албатта, аниқ интеграл таърифидаги интеграл йиғинди тушунчасидан ва аниқ интегралнинг геометрик маъноларидан фойдаланилади.

3.12.2. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКЛАР ФОРМУЛАСИ

$f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)dx$ ни тақрибий ҳисоблаш талаб қилинсин.

$[a,b]$ кесманинг ўртаси $c = \frac{a+b}{2}$ ни топиб оламиз ва бу нуқтадаги функциянинг қиймати $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ни ҳисоблаймиз.



Ихтиёрий $x \in [a,b]$ учун $f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) = const$ деб, яъни эгри чизиқ $f(x)$ ни, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ тўғри чизиқ билан алмаштирамиз ва унга мос интегралини ҳисоблаймиз.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b dx.$$

Бундан эса,

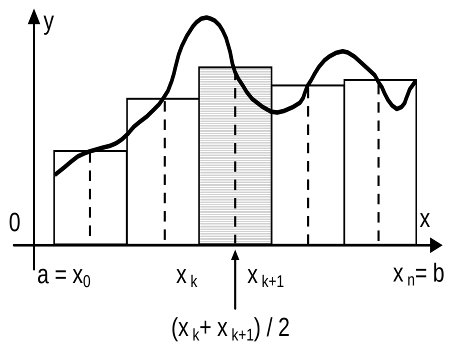
$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),} \qquad (\mathbf{1})$$

формулани ҳосил қиламиз. (1) тақрибий формула, $f(x) \geq 0$ бўлганда, $aABb$ эгри чизиқли трапеция юзини aA^*B^*b тўғри тўртбурчак юзи билан алмаштирилишини кўрсатади.

(1) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a, b]$ кесмани

$$a = x_0,\ x_1, \dots, x_k,\ x_{k+1}, \dots,\ x_n = b$$

нуқталар ёрдамида n та тенг қисмга бўлинади.



n қанчалик катта олинса, интеграл тақрибий қийматининг аниқлик даражаси шунчалик ошиб бораверади.

Ҳар бир бўлакнинг узунлигини $\Delta\, x = \frac{b-a}{n}$ деб оламиз. Ҳар бир кесманинг ўртаси $c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ орқали $f(x)$ функция графигининг ординатаси $\tilde{y}_k = f(c_k) = f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ ни қурамиз ва уни юзаси

$$\Delta x \cdot \tilde{y}_k = \Delta x \cdot f(c_k) = \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзаси деб қабул қиламиз. У ҳолда барча n та тўғри тўртбурчаклар юзаларининг йиғиндиси, берилган эгри чизиқли трапеция юзининг тақрибий қийматига тенг бўлади, яъни:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta\, x \cdot \tilde{y}_1 + \Delta\, x \cdot \tilde{y}_2 + \Delta\, x \cdot \tilde{y}_3 + \cdots + \Delta\, x \cdot \tilde{y}_n =$$

$$= \Delta\, x\, [\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \cdots + \tilde{y}_n] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\, [f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \cdots + f(c_n)].$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=o}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

ёки

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\, [f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \cdots + f(c_n)]\,. \qquad (2)}$$

(2) формулага аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг тўғри тўртбурчаклар формуласи дейилади.

(2) формулада ҳар бир тўғри тўртбурчак юзаларининг баландлиги сифатида кесманинг ярмига мос нуқта ординатаси олинган. Агар шу тўртбурчак баландлиги сифатида унинг x_k нуқтага мос баландлиги $f(x_k)$ олинса, ҳосил бўлган интеграл йиғинди ками билан олинган,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\, [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]. \qquad (3)}$$

баландлик сифатида x_{k+1} нуқтага мос $f(x_{k+1})$ қиймат олинса, у ҳолда кўпи билан олинган интеграл йиғинди,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\,. \qquad (4)}$$

ҳосил бўлади.

Тўғри тўртбурчаклар формуласининг хатолиги $|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24\,n^2}M_2$, га тенг, бу ерда, $M_2 = \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$, $f''(x)$ нинг $[a,b]$ кесмадаги энг катта қиймати бўлиб, хатолик

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\,[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_n)]\right|.$$

3.12.3. ТРАПЕЦИЯ ФОРМУЛАСИ

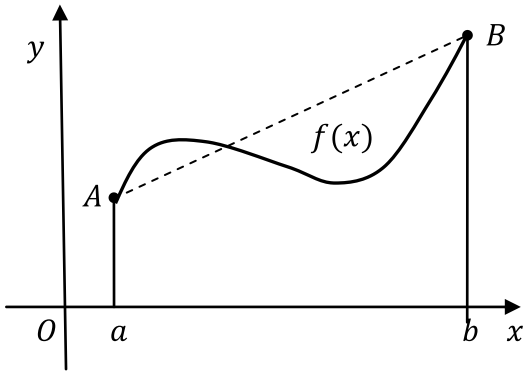
Тўғри тўртбурчаклар формуласига кўра тақрибий ҳисоблашнинг янада аниқроқ натижа берадиган усулини қараймиз.

$f(x)$ функция $[a,b]$ ораликда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)dx$ ни тақрибий ҳисоблаш талаб қилинсин.

Ихтиёрий $x \in [a,b]$ учун

$$f(x) \approx \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a},$$

деб оламиз, яъни бунда $f(x)$ эгри чизиқ, $A(a,f(a))$ ва $B(b,f(b))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ ординатаси билан алмаштирилишини билдиради.



$A(a,f(a))$ ва $B(b,f(b))$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a} \;\Rightarrow y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}.$$

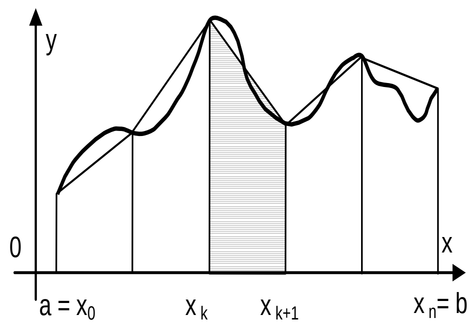
Натижада $\int_a^b f(x)dx$ интегрални тақрибий ҳисобловчи ушбу,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}\right]dx =$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a)\,. \qquad (5)$$

формулани ҳосил қиламиз. (5) тақрибий формула $f(x) \geq 0$ бўлганда $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини $aABb$ трапеция юзи билан алмаштирилишини ифодалайди.

Энди (5) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a,b]$ кесмани $a = x_0,\, x_1, \dots, x_k,\, x_{k+1}, \dots,\, x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та тенг қисмлар(бўлакларга) бўламиз. Ҳар



(5) формулага асосан, ҳар бир $[x_k; x_{k+1}]$ оралиққа мос трапеция бўлагини юзини топамиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\,(x_{k+1} - x_k)\,. \qquad (k = \overline{0,(n-1)})$$

Буни ҳисобга олган ҳолда $[a, b]$ оралиқ учун қуйидагиларни ёзиш мумкин.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots$$

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx =$$

$$= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\,(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,(x_2 - x_1) + \cdots$$

$$+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\,(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\,\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\right].$$

Бундан,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2},$$

ёки

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+\dots+y_{n-1}\right], \qquad (6)}$$

формулани ҳосил қиламиз. (6) формулага аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг трапеция формуласи дейилади.

Трапеция формуласининг абсолют хатолиги $|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}M_2$, га тенг. Бу ерда,

$$M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)| \quad \text{ва хатолик}$$

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+\dots+y_{n-1}\right]\right|.$$

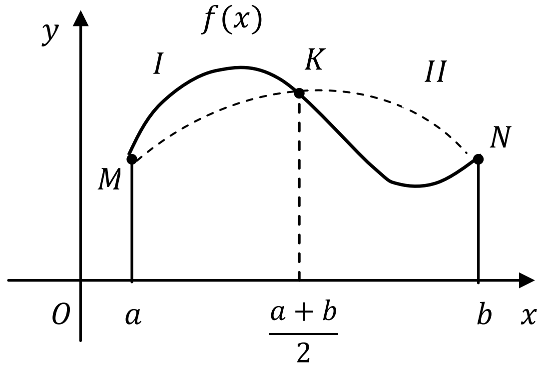
3.12.4. ПАРАБОЛАЛАР (СИМПСОН) ФОРМУЛАСИ

Бу усул юқоридаги тўғри тўртбурчак ва трапеция усулларига қараганда янада аниқроқ натижага олиб келади.

$f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)dx$ ни тақрибий ҳисоблаш талаб қилинсин.

Бу ҳолда $f(x)$ эгри чизиқни $M(a, f(a))$, $K\left(\frac{a+b}{2},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ва $N(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола билан алмаштирамиз яъни,

$$f(x) \approx Ax^2 + Bx + C\ .$$



M, K, ва N нуқталар орқали парабола ўтказиш мумкин ва бу парабола ягона бўлади. Энди $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$ интегрални берилган $\int_a^b f(x)dx$ интегралнинг тақрибий қиймати деб қуйидаги интегрални ҳосил қиламиз.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx\ .$$

Бундан, $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = A\ \frac{x^3}{3}\Big|_a^b + B\ \frac{x^2}{2}\Big|_a^b + Cx\Big|_a^b =$$

$$= A\ \frac{b^3 - a^3}{3} + B\ \frac{b^2 - a^2}{2} + C(b - a) =$$

$$= \frac{b - a}{6}\ [2\,A\,(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C] =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[(A\,a^2 + B\,a + C) + 4\left(A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\,\frac{a+b}{2} + C\right)\right.$$

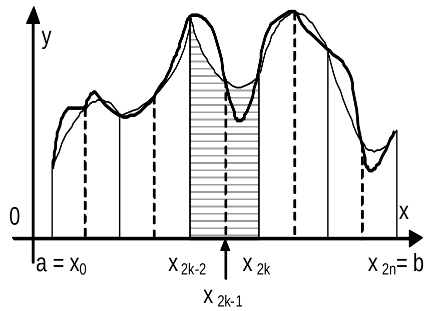
$$\left. + (A\,b^2 + B\,b + C)\right] = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Шундай қилиб,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (7)$$

тақрибий ҳисоблаш формуласига келамиз. Шунда (**7**) формула $aMINb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини $aMIINb$ эгри чизиқли трапециянинг юзи билан алмаштирилишини ифодалайди.

Энди (**7**) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a,b]$ кесмани $a = x_0,\, x_1, \dots, x_k,\, x_{k+1}, \dots,\, x_{2n} = b$ нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг қисмга(бўлакка) бўлиб чиқамиз.



Ҳар бир $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ $\big(k = 0, 1,\ 2\,, \dots, (n-1)\big)$ оралиқ бўйича олинган интегралга (7) формулани қўллаймиз. У ҳолда $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ оралиқ учун,

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}\ [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] =$$

$$= \frac{b-a}{6\,n}\ [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})].$$

Натижада,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\big) + \big(f(x_2) + 4\,f(x_3) + f(x_4)\big) + \cdots$$

$$+\big(f(x_{2n-2}) + 4\,f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)\Big] = \frac{b-a}{6n}\{f(x_0) + \ f(x_{2n}) +$$

$$+4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots +$$

$$+f(x_{2n-2})]\}.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг аниқ интегралини тақрибий ифодалайдиган қуйидаги Симпсон формуласига келамиз.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \text{ ёки}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\{y_0 + \ y_{2n} + \\ +4[y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}] + 2[y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}]\}. \quad (8)\end{gathered}}$$

Симпсон формуласининг абсолют хатолиги $|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}M_4$, га тенг бўлиб, бу ерда,

$M_4 = \max\limits_{a\le x\le b}|f^{IV}(x)|$ бўлиб, $f^{IV}(x)$ нинг $[a,b]$ кесмадаги энг катта қийматидир.

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \ (8)\right|.$$

$1-$Мисол. $\displaystyle\int_0^2 x^3 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $[0,2]$ кесмани 4 та тенг қисмга(бўлакка) бўламиз,

$$a = x_0 = 0, \quad b = x_4 = 2, \quad \Delta x = \frac{b-a}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2,$$

Бу нуқталарда $y = f(x) = x^3$ функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз.

$$x_0 = 0 \quad \text{да,} \quad y_0 = f(x_0) = f(0) = (0)^3 = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{да,} \quad y_1 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

$$x_2 = 1 \quad \text{да,} \quad y_2 = f(x_2) = f(1) = (1)^3 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2} \quad \text{да,} \quad y_3 = f(x_3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8};$$

$$x_4 = 2 \quad \text{да,} \quad y_4 = f(x_4) = f(2) = (2)^3 = 8.$$

Энди топилган бу қийматлардан фойдаланиб берилган мисолни юқорида келтирилган уч хил усулда тақрибий ҳисоблаш масаласини қараймиз. Бу ҳисоблашлардан сўнг натижани солиштириб, усулларнинг қайси бири ечимга яқинроқ бўлишини кўришимиз мумкин.

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласига кўра:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\ [f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_n)]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{4}\ \ [\tilde{y}_1(c_1)+\tilde{y}_2(c_2)+\tilde{y}_3(c_3)+\tilde{y}_4(c_4)]$$

$$c_1=\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4},\quad \tilde{y}_1(c_1)=\tilde{y}_1\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64};$$

$$c_2=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4},\quad \tilde{y}_2(c_2)=\tilde{y}_2\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64};$$

$$c_3=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4},\quad \tilde{y}_3(c_3)=\tilde{y}_3\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64};$$

$$c_4=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{\frac{3}{2}+2}{2}=\frac{7}{4},\quad \tilde{y}_4(c_4)=\tilde{y}_4\left(\frac{7}{4}\right)=f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^3=$$

$$=\frac{343}{64}.$$

Топилган қийматларни юқоридаги интегралнинг ўнг томонига қўямиз.

$$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\ \left[\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right]=3{,}875.$$

2. Трапеция формуласига кўра:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\ \left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}\right].$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{4}\ \left[\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right].$$

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{2-0}{4}\ \left[\frac{0+8}{2}+\frac{1}{8}+1+\frac{27}{8}\right]=4,25.$$

3. Параболалар(Симпсон) формуласига кўра:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\ [y_0+\ y_{2n}+4\,(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})$$

$$+\,2\,(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})]\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6\cdot 2}\ \ [y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2(y_2)]$$

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{2-0}{12}\ \left[0+8+4\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)+2\cdot 1\right]=4\,.$$

Берилган интегрални Нъютон-Лейбниц формуласига кўра ҳисоблайдиган бўлсак,

$$\int_0^2 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=\frac{2^4}{4}=4\,.$$

Демак, юқоридаги усулларга қарайдиган бўлсак, Симпсон усули тўғри тўртбурчак ва трапеция усулларига нисбатан ечимга яқинроқ бўлар экан.

2 – Мисол. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\,.$$

Энди шу мисолни юқорида келтирилган тақрибий ҳисоблашлар ёрдамида кўрсатамиз.

Бунинг учун, $[0,1]$ кесмани 10 та тенг қисмга(бўлакка) бўламиз, $a = x_0 = 0$, $b = x_{10} = 1$, $h = \frac{b-a}{10} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

$n = 10$	$y_k = f(x_k) = \dfrac{1}{1+{x_k}^2}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}0000$
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}9901$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}9615$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}9174$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}8621$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}8000$
$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}7353$
$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}6711$
$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}6098$
$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}5525$
$x_{10} = 1$	$y_{10} = 0{,}500$

Тўғи тўртбурчак формуласига асосан:

(3) формула билан ҳисоблаймиз.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{10}[y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9] =$$

$$= \frac{1}{10}[1{,}0 + 0{,}9901 + 0{,}9605 + 0{,}9174 + 0{,}8621 + 0{,}8 + 0{,}7353$$

$$+ 0{,}6711 + 0{,}6098 + 0{,}5525] = \frac{1}{10}\ 8{,}0998 = 0{,}80998.$$

(4) формула бўйича ҳисоблаймиз.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{10}[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}] =$$

$$= \frac{1}{10}[0{,}9901 + 0{,}9605 + 0{,}9174 + 0{,}8621 + 0{,}8 + 0{,}7353 + 0{,}6711$$

$$+ 0{,}6098 + 0{,}5525 + 0{,}5] = \frac{1}{10}\ 7{,}5998 = 0{,}75998$$

(2) формула бўйича ҳисоблаймиз.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{10}\big[\tilde{y}_1(c_1) + \tilde{y}_2(c_2) + \tilde{y}_3(c_3) + \tilde{y}_4(c_4) + \tilde{y}_5(c_5) +$$

$$+\tilde{y}_6(c_6) + \tilde{y}_7(c_7) + \tilde{y}_8(c_8) + \tilde{y}_9(c_9) + \tilde{y}_{10}(c_{10})\big].$$

яъни:

$$c_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0 + 0{,}1}{2} = 0{,}05; \quad \tilde{y}_1(0{,}05) = \frac{1}{1 + (0{,}05)^2} = 0{,}9975$$

$$c_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0{,}1 + 0{,}2}{2} = 0{,}15; \quad \tilde{y}_2(0{,}15) = \frac{1}{1 + (0{,}15)^2} = 0{,}9779$$

$$c_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25; \quad \tilde{y}_3(0{,}25) = \frac{1}{1 + (0{,}25)^2} = 0{,}9412$$

$$c_4 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{0{,}7}{2} = 0{,}35; \quad \tilde{y}_4(0{,}35) = \frac{1}{1 + (0{,}35)^2} = 0{,}8909$$

$$c_5 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45; \quad \tilde{y}_5(0{,}45) = \frac{1}{1 + (0{,}45)^2} = 0{,}8316$$

$$c_6 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1{,}1}{2} = 0{,}55; \quad \tilde{y}_6(0{,}55) = \frac{1}{1 + (0{,}55)^2} = 0{,}7678$$

$$c_7 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{1,3}{2} = 0,65; \quad \tilde{y}_7(0,65) = \frac{1}{1 + (0,65)^2} = 0,7029$$

$$c_8 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75; \quad \tilde{y}_8(0,75) = \frac{1}{1 + (0,75)^2} = 0,64$$

$$c_9 = \frac{x_8 + x_9}{2} = \frac{1,7}{2} = 0,85; \quad \tilde{y}_9(0,85) = \frac{1}{1 + (0,85)^2} = 0,5806$$

$$c_{10} = \frac{x_9 + x_{10}}{2} = \frac{1,9}{2} = 0,95; \quad \tilde{y}_{10}(0,95) = \frac{1}{1 + (0,95)^2} = 0,5256$$

У ҳолда,

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{10} [0,9975 + 09779 + 0,9412 + 0,8909 + 0,8316 +$$

$$+ 0,7678 + 0,7029 + 0,64 + 0,5806 + 0,5256] = 0,78350.$$

Бу мисолни трапеция формуласига кўра ҳисобласак:

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \approx \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_9\right]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \approx \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1 + 0,5}{2} + 0,9901 + 0,9615 + 0,9174 + 0,8621 +\right.$$

$$\left. + 0,8000 + 0,7353 + 0,6711 + 0,6098 + 0,5525\right] = 0,78498$$

Бу мисолни Симпсон формуласига кўра ҳисобласак:

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \approx \frac{b - a}{6 \cdot 5} \left[y_0 + y_{10} + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_9\right)\right] +$$

$$+ 2\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_8\right).$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 5}[1+0{,}5+$$

$$+4(0{,}9901+0{,}9174+0{,}8+0{,}6711+0{,}5525)+$$

$$+2(0{,}9615+0{,}8621+0{,}7353+0{,}6098\,)]=0{,}78539.$$

Шундай қилиб олинган натижалар қуйидагича:

Усул	**Ечим**	**Хатолик**
Тўғри тўртбурчак формуласи (ками билан)	0,80998	+0,02459
Тўғри тўртбурчак (2) формуласи	0,78350	0,00189
Тўғри тўртбурчак формуласи (кўпи билан)	0,75998	0,02542
Трапеция формуласи	0,78498	0,00041
Симпсон формуласи	0,78539	0,0000
Аниқ ечим	0,785398	

Кўриниб турибдики, Симпсон усулида ҳисобланган тақрибий ечим аниқ ечимга жуда яқин бўлиб, тўғри тўртбурчаклар формуласида ками билан ва кўпи билан олинган натижалар аниқ ечим атрофида ётибди. Симпсон формуласи бўйича олинган ечим аниқ ечим билан устма уст тушади.

4. ХОСМАС ИНТЕГРАЛ

Маълумки, аниқ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ни таърифлашда иккита шарт яъни:

а) интеграл остидаги функция $f(x)$ чегараланган бўлиши ҳамда;

б) интеграллаш чегараси $[a, b]$ чекли бўлишини талаб қилинар эди.

Шунинг учун ҳам биз ҳозирча шу иккита шартдан бирортаси бажарилмай қолган ҳолдаги функциянинг аниқ интеграли ҳақида бирор нарса дея олмаймиз. Лекин қуйида юритиладиган баъзи бир қўшимча маълумотлар ёрдамида бундай интеграллар ҳақидаги тушунчамизни кенгайтиришимиз мумкин.

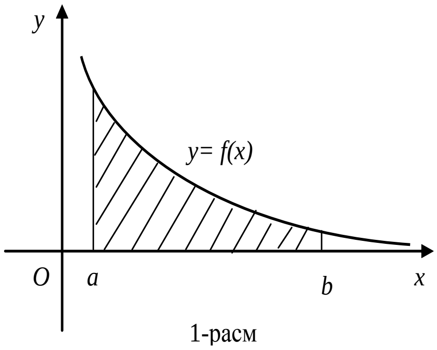
Агар юқоридаги иккита шартдан бирортаси бажарилмаса, бундай интегралларни хосмас интеграллар деб аталади. Жумладан: а) шарт бажарилмаса чегаралари чексиз бўлган интеграллар (1-тур хосмас интеграллар), б) шарт бажарилмаса узлукли функциянинг интеграли (2-тур хосмас интеграллар) дейилади.

Демак, хосмас интеграллар икки турга бўлинар экан. Шулардан дастлаб чегаралари чексиз бўлган интегралларни қарайлик.

4.1. ЧЕГАРАЛАРИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН ИНТЕГРАЛЛАР (I-тур хосмас интеграл)

Дастлаб шу кўринишдаги интегралларга келтириладиган мисоллар билан танишайлик.

1-Мисол. $y=\frac{1}{x}$ ва $x \geq a > 0$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг S юзасини топайлик.



1-расм

Бизга маълум бўлган тушунчалар ёрдамида бу соҳанинг юзасини тополмаймиз. Лекин соҳани $x=b$ тўғри чизиқ билан кесиб, эгри чизиқли трапеция ҳосил қилсак, бу эгри чизиқли трапециянинг юзаси:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx$$

га тенг бўлади. У ҳолда, $b \to \infty$ да қаралаётган соҳанинг юзаси ҳосил бўлади, яъни

$$S=\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty} lnx\,\Big|_a^b = ln\frac{b}{a}=\infty.$$

Демак, бу ҳолда сўралган соҳанинг юзаси ҳақида бирор нарса айта олмаймиз.

2-Мисол. $y=\frac{1}{x^2}$ ва $x \geq a > 0$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг S юзасини топайлик. 1-мисолдаги каби фикр юритсак,

$$S=\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

Демак, бу соҳанинг юзаси $\frac{1}{a}$ га тенг экан, яъни соҳамиз кўриниши чексиз давом этишига қарамай чекли юзага эга экан.

Бу мисолларни умумлаштириб, $a \leq x < \infty$ соҳада узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функцияни кўрамиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқнинг исталган чекли $[a, b]$ $(a < b < +\infty,$ $1 -$ расмга қаранг) қисмидаги $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интеграли b га боғлиқ бўлади. Яъни:

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Таъриф. Агар $b \to +\infty$ да $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интеграл чекли лимитга интилса, бу лимитга $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқдаги хосмас интеграли деб аталади ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,.$$

кўринишда ёзилади. Демак

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx\,.$$

➲ Агар лимит мавжуд бўлса хосмас интеграл яқинлашувчи ёки мавжуд деб аталади.

➲ Агар лимити чексиз бўлса ёки мавжуд бўлмаса, хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Шунга кўра, 1-мисолда $\int_a^\infty \frac{1}{x} dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи, 2-мисолда $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлишини кўришимиз мумкин.

Худди шунингдек, $f(x)$ функция $(-\infty, a]$ ёки $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлганда, бу функциянинг $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари ҳам юқоридагидек таърифланади ва мос равишда қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \,. \qquad (-\infty < a < b)$$

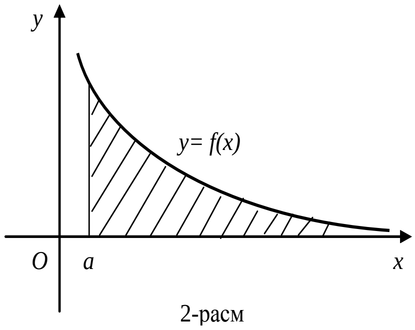
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \,.$$

бу ерда, c —ихтиёрий сон.

Бу хосмас интегралда ўнг томонда турган интегралларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлса,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.



2-расм

Эслатма. Агар узлуксиз $f(x) \geq 0$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқдаги хосмас интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу ифода бирор чексиз ёйилган эгри чизиқли трапециянинг юзасини ифодалайди.

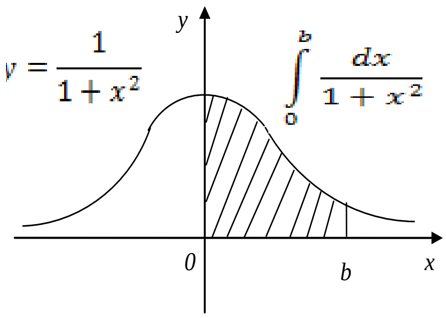
3-Мисол. Ушбу

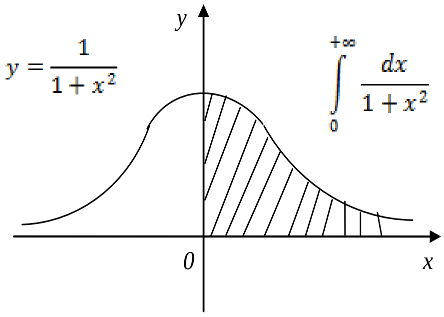
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} arctgx \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$





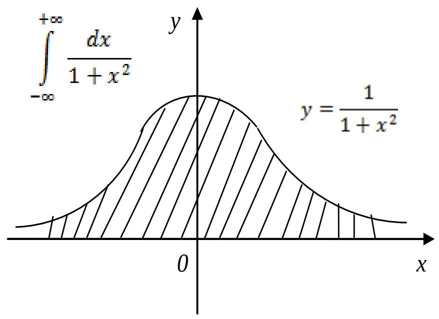
4-Мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx\,.$$



$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{ҳамда} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{интегралларни}$$

яқинлашувчиликка текширамиз:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_{a}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Бу ерда, иккинчи интегралимиз 3 – мисолга кўра $\frac{\pi}{2}$ га тенг.

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

берилган хосмас интеграл яқинлашади.

5 – Мисол. Ушбу $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ хосмас интеграл α – нинг қандай

қийматларида яқинлашади ва ёки узоқлашади.

Ечиш:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(b^{1-\alpha} - 1\right).$$

Демак,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(b^{1-\alpha} - 1\right).$$

1) Агар, $\alpha > 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{-1}{1-\alpha}$ яқинлашувчи.

2) Агар, $\alpha < 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \infty$ узоқлашувчи.

3) Агар, $\alpha = 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \infty$ узоқлашувчи.

6 – Мисол. $\int_0^{+\infty} e^x\, dx$ хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш:

$$\int_0^{+\infty} e^x\, dx = \lim_{b\to+\infty} e^x \Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty} [e^b - 1] = \infty. \text{ узоқлашувчи.}$$

4.2. БАЪЗИ ТАҚҚОСЛАШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Баъзи ҳолларда хосмас интегралнинг аниқ қийматини ҳисоблаш шарт бўлмай, унинг яқинлашишини билиш кифоя бўлади. Бундай ҳолларда бу хосмас интегралларни яқинлашиши (ёки узоқлашиши) маълум бўлган хосмас интеграллар билан таққослаш қулай бўлади.

Шу мақсадда қуйидаги хосмас интегралларни таққослашга асосланган теоремаларни келтирамиз.

1-Теорема. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x \in [a, +\infty)$ интервалда узлуксиз бўлиб, $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантиради. У ҳолда:

а). агар $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса,

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx .$$

б). агар $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлса,

$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ хосмас интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

7 – Мисол. Ушбу $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш: Кўриниб турибдики, интеграл остидаги функциянинг интегралини ҳисоблаш анча мураккаб, шунинг учун бу мисолга таққослаш теоремасини қўллаймиз яъни,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \le \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \left(x^2(1+e^x) \ge x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}\right).$$

ва

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

яқинлашувчи.

Демак,

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

2-Теорема. Агар

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, \ (0 < k < +\infty), (f(x) > 0$ ва $\varphi(x) > 0)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ хосмас интеграллар бир вақтда яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлади.

3-Теорема. Агар

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл абсолют яқинлашувчи бўлади.

4.3. УЗЛУКЛИ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛИ

Узилишга эга бўлган функциянинг хосмас интеграли. (II-тур хосмас интеграл)

$y = f(x)$ функция $a \le x < b$ ораликда узлуксиз ва функция $x = b$ нуқтада узилишга эга бўлсин(яъни функция b нуқтади аниқланмаган).

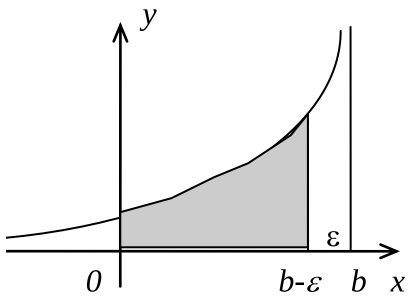
Ушбу, $\int_{a}^{b} f(x)dx$ хосмас интегрални қараймиз.

Дастлаб шу кўринишдаги интегралга келтириладиган мисол билан танишайлик:

8-Мисол.

$y = \dfrac{1}{\sqrt{b-x}}$ $(0 \le x \le b)$ чизиқлар билан чегараланган соҳа юзаси S топилсин.

Ечиш:



Бу функция $x = b$ нуқтада аниқланмаган. Бу соҳа чексиз давом этувчи соҳа бўлгани учун, бизга маълум бўлган усул билан юзасини топа олмаймиз. Агар соҳани $x = b - \varepsilon$ тўғри чизиқ билан кессак, ҳосил бўлган эгри чизиқли трапеция юзаси:

$$S = \int_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

бўлиб, $\varepsilon \to 0$ да сўралган соҳанинг юзаси ҳосил бўлади, яъни

$$S = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{b-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{b-x}\right)\Bigg|_0^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{b-b+\varepsilon}\right) + 2\sqrt{b} = 2\sqrt{b}\,.$$

Бу ҳолларда аниқ интеграл тушунчасини чегараланмаган интеграл остидаги функция тушунчаси билан умумлаштириш мумкин ($f(x)$ функция $[a, b)$ нинг нуқталарида узлуксиз).

2-Таъриф. Агар $\varepsilon \to 0$ да

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

аниқ интеграл чекли лимитга интилса, бу лимитга узлукли функциянинг хосмас интеграли деб аталади ва қуйидагича ёзилади.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Бу ҳолда хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталади. Агар бу лимит мавжуд бўлмаса ёки чексиз бўлса, у ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Одатда бундай хосмас интегралларга ўнгдан узилишга эга бўлган функциянинг хосмас интеграли деб ҳам аталади. Чунки биз аниқ интеграл шартларига тушириш мақсадида $x = b$ нуқтани, ўзимиз атайлаб (алдаш йўли билан) $x = b - \varepsilon$ нуқта орқали чап томонга силжитдик(чизмага қаранг) (бу ерда ε –нолга яқин жудаям кичик сон) ва натижада $x = b - \varepsilon$ нуқтада функциямиз узилишга эга бўлмаслигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин ва натижада бу аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

Эслатиб ўтиш жоизки, хосмас интеграл бу аниқ интегралдан олинган лимит.

Худди шунингдек, интеграл остидаги фукция $x = a$ нуқтада аниқланмаган ёки $x = a$ да узилишга эга бўлса:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\ .$$

Одатда бундай хосмас интегралларга чапдан узилишга эга бўлган функциянинг хосмас интеграли деб ҳам аталади. Чунки биз аниқ интеграл таърифи шартларига тушириш мақсадида $x = a$ нуқтани, ўзимиз атайлаб (алдаш йўли билан) $x = a + \varepsilon$

нуқта орқали ўнг томонга силжитдик (бу ерда ε –нолга яқин жудаям кичик сон) ва натижада $x = a + \varepsilon$ нуқтада функциямиз узилишга эга бўлмаслигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин ва натижада бу аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

Агарда, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг бирор ички $x = c$ $(c \in]a, b[)$ нуқтасида узилишга эга бўлса, у ҳолда биз сегментни иккита $[a, c)$ ва $(c, b]$ сегментларга ажратамиз.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

формула ёрдамида текширилади.

Агар ўнг томондаги ҳар бир интеграл мавжуд ва чекли бўлса, охирги кўринишдаги хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.

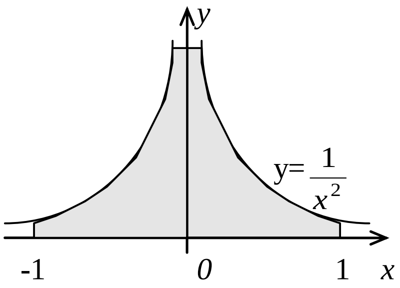
9-Мисол. Ушбу хосмас интегрални ҳисобланг.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

Ечиш.

$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ интегралга Ньютон – Лейбниц формуласини бевосита қўлласак $I = -2$ ҳосил бўлади. Аслида аниқ интеграл хоссасига кўра мусбат функциянинг интеграли мусбат сон бўлиши керак эди.

Бу ердаги зиддият узоқлашувчи бўлган хосмас интегралга(яъни интеграллаш оралиғида узилишга эга бўлган функцияга) Ньютон-Лейбниц формуласини қўллашимиз натижасида келиб чиқди.



Чунки интеграллаш оралиғида ҳамда интеграллаш чегараларида узилишга эга бўлган функциялар учун Ньютон-Лейбниц формуласини ҳеч қачон қўллаб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ функция $x = 0$ нуқтада чексизликка айланади.

У ҳолда,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta \to 0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{0-\varepsilon} + 1\right) = \infty.$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Bigg|_{0+\delta}^{1} = -\lim_{\delta \to 0} \left(1 - \frac{1}{0+\delta}\right) = \infty.$$

Демак, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлар экан.

4.4. II-ТУР ХОСМАС ИНТЕГРАЛНИНГ ЯҚИНЛАШИШ БЕЛГИСИ

4-Теорема. Фараз килайлик, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b)$ интервалда $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ тенгсизликни қаноатлантириб, шу интервалда узлуксиз ва $x = b$ нуқтада узилишга эга бўлсин. У ҳолда

а) агар $\int_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса,

$\int_a^b \varphi(x)dx$ ҳам яқинлашувчи.

б) агар $\int_a^b \varphi(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса,

$\int_a^b f(x)dx$ интеграл хам узоқлашувчи бўлади.

10 – Мисол. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш: Интеграл остидаги функция $x = 1$ да узилишга эга.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (\text{чунки}, \;\; x \in [0,1[\;\text{ да }\; x^4 \le x \Rightarrow 1-x^4 \ge 1-x \;\;)$$

Демак,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{1-x}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = 2\,,$$

яқинлашувчи. У ҳолда 4-теоремага асосан берилган интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Адабиётлар

1. Соатов Ё.У. Олий математика. 1-том. Дарслик - Тошкент: Ўқитувчи, 1992.

2. Шнейдер В. Е, Слуцкий А.И, Олий математика қисқа курси. 1-том. Дарслик. -Тошкент: Ўқитувчи, 1985.

3. Абдалимов Б.А. Олий математика. Дарслик. -Тошкент: Ўқитувчи, 1994.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. -М: Айрис-пресс, 2005-2006.

5. Кругликов В.И. Основы высшей математики, ТашГУ, 2004.

6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике–М: Наука,1973.

7. Қаюмов Ш, Арзиқулов Ғ. Олий математика Энг муҳим маълумотлар тўплами-1.-Тошкент: 2014. 108 b.

8. Qayumov Sh, Arziqulov G’.P. MATEMATIKA eng muhim ma’lumotlar to’plami. -Toshkent: ToshDTU, 2016. 108 b.

9. Қаюмов Ш, Арзиқулов Ғ. Олий математика энг муҳим маълумотлар тўплами-2.-Тошкент: 2017. 116 b.

10. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, M.Fogiel Calculus. Super review. 2005.

11. M.Fogiel Super All you need to know Review CALCULUS. 2003.

12. Sh. R. Xurramov Oliy matematika 1-jild. -Toshkent: 2018.

М У Н Д А Р И Ж А

3. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

4. ХОСМАС ИНТЕГРАЛ

Олий математика
Энг муҳим маълумотлар тўплами 3

Тузувчилар: Қаюмов Ш.
Арзиқулов Ғ.П.

Муҳаррир: Сидиқова К.А.