ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ҚИШЛОҚ ВА СУВ
ХЎЖАЛИГИ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ АГРАР УНИВЕРСИТЕТИ

Б.АБДАЛИМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КУРСИДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

II

Олий ўқув юртлараро илмий-услубий бирлашмалар
фаолиятини мувофиқлаштирувчи кенгаш
томонидан олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланма
сифатида тавсия этилган

ТОШКЕНТ «ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ
ЭНЦИКЛОПЕДИЯСИ» - 2003

Мазкур дарслик Аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг олий математика дастури асосида ёзилган бўлиб, унда текислик ва фазода аналитик геометиря, математик анализ, дифференциал тенгламалар, векторлар ва чизиқли алгебра элементлари, ҳақида қисқача малумотлар, масалалар ечиш намуналари, сўнгра мустақил ечиш учун мисол ва масалалар берилган.

Дарслик қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари талабалари учун мылжалланган бўлиб, унда иқтисодиёт ва техника олий ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин. Шунингдек, ушбу дарсликни қтшлоқ хўжалиги соҳасидаги коллежлар ҳамда академик лицейлар ўув жараёнида ҳам қўлланиши мумкин.

Тақризчи: Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университети Олий математика кафедраси мудири, С.Исамухамедов.

Махсус муҳаррир: Х.Мансуров – ЎзМУ доценти, физика математика фанлари номзоди

СЎЗ БОШИ

Тошкент давлат аграр университети қишлоқ хўжалиги ҳамда иқтисод соҳалари бўйича малакали кадрлар тайёрловчи республикамизнинг етакчи олий ўқув юрти ҳисобланади.

Талим соҳасидаги тубислоҳатлар, кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури асосида бу олий ўқув юртида ҳам кўп йўналишлар бўйича меъёрий хужжатлар: давлат талим стандартлари, ўқув режалар ва дастурлар ишлаб чиқилади.

Навбатдаги вазифа ушбу бакалаврлар тайёрлаш дастури асосида дарслик ҳамда қўлланмалар яратишдан иборат. Қишлоқ хўжалик ўқув юртлари талабларининг иқтисодий масалаларни ечишда зарур бўладиган математик аппарат асослари билан чуқуроқ таништириш, ҳалқ хўжалиги масаларининг математик моделларини қуришнинг самарали йўлларини кўрсатишда, мазкур олий ўқув юрти талабалари учун, муаллифнинг «Ўқитувчи» нашриёти томонидан 1994 йилда чоп этилган «Олий математика» дарслиги муносиб хизмат қилиб келмоқда.

Сизга ҳавола қилинаётган ушбу қўлланма муаллифнинг юқорида келтирилган дарсликка мослаб ёзилаётган масалалар тўпламининг биринчи қисми бўлиб, 8 бобдан иборатдир. Биринчи бобда жуда кўп учрайлиган ва қўлланиладиган сонлар ва улар устида амаллар, пропорция ва фоизлар, тенгламалар ва тенгсизликларга бағишлангандир. 2-7 боблари аналитик геометрияга, 8 боб эса чизиқли ва векторлар алгебрасининг бошланғич тушунчаларига доирдир.

Сизга ҳавола қилинаётган ушбу қўлланма муаллифнинг юқорида келтирилган дарсликка мослаб ёзилаётган масалалар тўпламининг иккинчи қисми бўлиб, II бобдан иборатдир, 9-17 боблар математик таҳлилга, 18 боб қаторлар назариясига 19 боб дифференциал тенгламаларининг бошланғич тушунчаларига доирдир.

9 БОБ

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

1^0. Функция таърифи.

1-таъриф. Агар X ($X \subset R$) тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y ($Y \subset R$) тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у $y=f(x)$ каби белгиланади.

Бу ерда X тўплам функциянинг аниқлаш соҳаси, Y эса функциянинг ўзгариш соҳаси дейилади.

x эркли ўзгарувчи ёки функция аргумент, y эса эрксиз ўзгарувчи ёки x ўзгарувчининг функцияси деб аталади.

1-Мисол. f: $X=(-\infty,+\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир x сонга унинг квадратини мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда $y=f(x)=x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty,+\infty)$ да аниқланган.

2-Мисол. Қуйидаги функциянинг аниқланиш соҳаси топилсин:

$$y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

Ечиш. Бу мисолда x аргументнинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлиши учун

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

бўлиши керак. Бу тенгсизликлар системасини ечиб, $1 \le x < 2$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $X=[1,2)$ бўлади.

2^0. Функциянинг графиги.

$y=f(x)$ функция аргументи $x \in X$ га мос функция қиймати $f(x)=y$ билан ҳосил қилинган ушбу

$$\{(x,y): x \in X, y=f(x)\}$$

нуқталар тўплами $y=f(x)$ функциянинг графиги деб аталади. Бу функциянинг графиги қуйидагича ясалади:

1) функциянинг аниқлаш соҳасидан бир нечта $x_1, x_2, \ldots x_n$ қийматлар олинади;

2) аргументнинг шу қийматларига мос функциянинг қийматлари топилади;

3) ушбу жадвал тузиб олинади;

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$y=f(x)$	y_1	y_2	y_3	...	y_n

4) тексликда $A_1=A_1\ (x_1,y_1)$, $A_2=A_2\ (x_2,y_2)$,...$A_n=A_n\ (x_n,y_n)$ нуқталар ясалади.

Бу $A_1, A_1, \ldots A_n$, нуқталар ўзаро туташтиришдан, ҳосил бўлган чизиқ $y=f(x)$ функциянинг графигини (тақрибан) тасвирлайди.

3-Мисол. $y=f(x)=2x+1$ функциянинг графиги чизилсин.

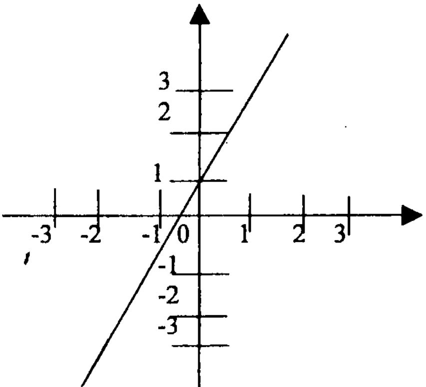
Ечиш. Равшанки, бу функция $(-\propto,+\propto)$ да аниқланган x ўзгарувчининг –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, қийматларини олиб, функциянинг уларга мос қийматларни топамиз:

$$f(-3)=-5, \quad f(-2)=-3, \quad f(-1)=-1, \quad f(0)=1,$$
$$f(1)=3, \quad f(2)=5, \quad f(3)=7$$

Натижада қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3		
$Y=f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7		

Сўнг (-3; -5), (-2; -3), (-1; -1), (0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7) нуқталарни тексликда белгилаб ва уларни ўзаро туташтириб, берилган функциянинг графигини ясаймиз (16-чизма).

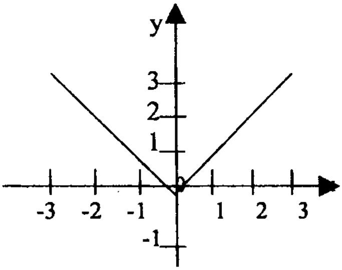


(16-чизма)

4-Мисол. $y=|x|$ функциянинг графиги чизилсин.

Маълумки, $y=|x|=\begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Демак, $x \geq 0$ да $y=x$ бўлиб, у биринчи чорак биссектриссаси, $x<0$ да $y=-x$ бўлиб, у учинчи чоракнинг биссектриссаси бўлади. Бу функциянинг графиги 17-чизмада тасвирланган



17 - чизма

3^0. Функциянинг чегараланганлиги.

$y=f(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин.

Агар шундай ўзгармас M(M>0) сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$|f(x)| \leq M$$

тенгсизлик бажарилса, $y=f(x)$ функция X оралиқда чегараланган деб аталади.

Масалан, $y=f(x)=x^2$ функция $x=(0,1)$ оралиқда чегараланган бўлади, чунки $\forall x \in (0,1)$ учун $|f(x)| \leq 1$ $(M=1)$ бўлади.

Ушбу $y=\dfrac{1}{x}$ функция (0,1) оралиқда берилган, аммо бу функция шу оралиқда чегараланган эмас.

4^0. Жуфт ва тоқ функциялар.

$y=f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлиб, $\forall x \in X$ учун — $-x \in X$ бўлсин. (Масалан, (-1;1), [-3;3] оралиқлар айтилган хусусиятга эга бўлади.)

2-Таъриф. Агар $\forall x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ жуфт функция деб аталади.

3-Таъриф. Агар $\forall x\in x$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ тоқ функция деб аталади.

Масалан, $y=x^3$, $y=\sin x$ функциялар тоқ функциялар бўлади, чунки $(-x^3)=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$.

5^0. Монотон функциялар.

$y=f(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин.

4-Таъриф. Агар аргумент x нинг X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1)\le f(x_2)$ тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X оралиқда ўсувчи деб аталади.

5-Таъриф. Агар аргумент x нинг X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1)\ge f(x_2)$ тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X оралиқда камаювчи деб аталади.

Ўсувчи ва камаювчи функциялар монотон функциялар деб аталади.

5-Мисол. $f(x)=x^3$ функция монотонликка текширилсин.

Ечиш. Бу функция $X=(-\infty,+\infty)$ оралиқда аниқланган. Бу оралиқдан ихтиёрий x_1, x_2 нуқталарни оламиз. Улар учун $x_1 < x_2$ бўлсин. Сўнг $f(x_2)-f(x_1)$ айирмани қараймиз:

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=$$

$$=(x_2-x_1)(x_2^2+2\cdot\frac{1}{2}x_2x_1+x_1^2+\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_1^2)=$$

$$=(x_2-x_1)(x_2^2+2x_2\cdot\frac{x_1}{2}+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2)=$$

$$=(x_2-x_1)\left[(x_2+\frac{x_1}{2})^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

Демак, $f(x_2)-f(x_1)>0$, яъни $f(x_1)<f(x_2)$. Шундай қилиб $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1)<f(x_2)$ бўлар экан. Бу эса берилган функциянинг $(-\infty,+\infty)$ да ўсувчи эканини билдиради.

6^0. Даврий функция.

$f(x)$ функция X да аниқланган бўлсин.

6-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T(T\ne 0)$ сон топилсаки, ихтиёрий $x\in X$ да $x-T\in X$, $x+T\in X$ бўлиб,

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ даврий функция, T сони функциянинг даври дейилади.

Масалан. f(x)=Sinx, f(x)=cos x функциялар T=2 π даврли, f(x) tgx, f(x)=ctgx функцияларди. T=π даврли функциялар бўлади

7^0. Мураккаб функция.

$y=f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлиб, аргумент x нинг X оралиқдан олинган ҳар бир қийматида функциянинг мос қийматларидан иборат У тўпламда ўз навбатида $u=F(y)$ функция аниқланган бўлсин. Натижада X тўпламдан олингин ҳар бир x сонга У тўпламда битта y сони $(y=f(x))$ ва У тўпламдан олинган бундай y сонга битта u сони $(u=F(y))$ мос қўйилиб

$$u=F(y)=F(f(x)).$$

функция ҳосил бўлади.

Одатда бундай функция мураккаб функция деб аталади.

Масалан, $u=\sqrt{x^2-1}$, $u=\sin 2x$, $u=\cos^2 x$ функциялар мураккаб функциялар бўлади.

8^0. Тескари функция.

$y=f(x)$ функция X оралиқда аниқланган У эса шу функция қийматлари тўплами бўлсин:

$y_0 \in У$ учун X тўпламда шундай $x_0(x_0 \in X)$ сони топиладики, $f(x_0)=y_0$ бўлади. Бу y_0 сонга x_0 сонни мос қўямиз. Натижада $У$ тўпламдан олингин ҳар бир y га юқорида кўрсатилгандек битта x сон $(x \in X)$ мос қўйилиб, функция хосил бўлади. Одатда бундай функция, берилган $y=f(x)$ функцияга нисбатан тескари функция деб аталади ва $x=f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

6-Мисол. $y=f(x)=2x+1$ функцияни $x=[0,1]$ оралиқда қарайлик. Равшанки, бу функция қийматларидан иборат тўплам $У=[1;3]$ бўлади. $У=[1;3]$ оралиқда берилган $x=\frac{1}{2}(y-1)$ функция қаралаётган функцияга нисбатан тескари функция бўлади:

$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$$

9^0. Содда (элементар) функциялар.

1. Чизиқли ва квадратик функциялар. Ушбу

$$y=ax+в, y=ax^2+вx+c$$

кўринишдаги функциялар мос равишда чизиқли ва квадратик функциялар деб аталади, бунда а,в,с – ўзгармас ҳақиқий сонлар.

2. Даражали функция. Ушбу

$$y=x^{\lambda} \qquad (x>0)$$

кўринишдаги функция даражали функция деб аталади.

3. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y=a^x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

кўринишдаги функция кўрсаткичли функция деб аталади.

4. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=log_a{}^x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

кўринишдаги функция логарифмик функция деб аталади.

5. Тригонометрик функциялар.

Ушбу

$$y=sinx, \quad y=cosx, \quad y=tgx, \quad y=ctgx$$

функциялар тригонометрик функциялар деб аталади.

6. Тескари тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y=arcsinx, \quad y=arccosx, \quad y=arctgx, \quad y=arcctgx$$

функциялар тескари тригонометрик функциялар деб аталади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги тенгсизликларни очинг:

1. $|x+2| \leq 3$
2. $|3x-2| <4$
3. $|x|<4$
4. $|x-3|>3$
5. $|<|x+2|<4$

Қуйидаги тенгламалар ечимига эгами?

6. $|x| =x+5$
7. $|x| =x-5$

Қуйидаги муносабатларнинг тўғрилигини кўрсатинг.

8. $x \leq |x|$
9. $|x|^2=x^2$
10. $|x-y|\geq||x|-|y||$

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

11. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-1}}-\sqrt{1-x^2}$
12. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$
13. $y=\log_2(x^2-9)$
14. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$

15. $y = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$ 16. $y = cosx$

17. $y = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$ 18. $y = ars\cos\frac{1-2x}{3}$

19. $y = \lg\sqrt{1-x^2}$ 20. $y = -\sqrt{2\sin x}$

Қуйидаги функцияларнинг графигини чизинг.

21. $y = x^2 - 2x + 1$ (X=(-2,4))

22. $y = \frac{16}{x^2} - 1$, Ох ўқи билан кесишиш оралиқларида.

23. $$y = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x < 0 \text{ булса}, \\ x^2, & \text{агар } 0 \le x \le 1 \text{ булса}, \\ \frac{2}{x}, & \text{агар } x > 1 \text{ булса}. \end{cases}$$

24. $y=|x-2|-3$

25. $y=x^2+5x-2$

26. $y = \frac{2x-5}{x^2-1}$

27.

x	0	1	2	-1	-3
y	0	1	8	-1	-27

28. $y=|x-1|$

29. y=0,5. tgx

30. Берилган функциянинг аниқланиш соҳасини графикларини ясанг.

а) y=cosx-1

б) y=sinx

Функциялар жуфт функциялар эканини исботланг.

31. $f(x) = 3x^2 + x^4$ 33. $f = (x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$

32. $f(x)=x^2\cos x$ 34. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2-1}$

Қуйидаги тоқ функциялар эканини исботланг.

35. $f(x)=x^5\cos 3x$ 36. $f=(x)=x(5-x^2)$

37. $f=(x)=\dfrac{x^2\sin x}{x^2-9}$

Қуйидаги функцияларни жуфт ҳамда тоқликка текширинг.

38. $y=x+\dfrac{1}{x}$ 39. $y=\sin\sqrt{x}$

40. $y=\dfrac{tgx-ctgx}{[x]}$ 41. $y=\dfrac{[\sin x]}{1-\cos x}$

42. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$

Функциянинг ўсиши ва камайиши оралиқларини топинг.

43. $y=(x-3)^4$ 44. $y=\cos x-1$

45. $y=x^2-2|x|$ 46. $y=\sin(x+\dfrac{\Pi}{6})$

Қуйидаги функцияларни монотонликка текширинг.

47. $y=x^3+3x+5$

48. $y=a^x,(a>1)$

49. $y=|x+1|+x+1$

50. $y=\sin x+1$

51. $y=\begin{cases}4x+1 & \text{агар } x<0 \text{ булса}\\ x^2, & \text{агар } x>0 \text{ булса}\end{cases}$

52. $y=2x$

Келтирилган функцияга кўра тескари f^1 функция топилсин:

53. $f(x) = -2x+1$

54. $f = (x) = \frac{1}{2}x-1$

55. $f(x) = -\frac{1}{2}x$

56. $f(x) = \sin x$

57. $f(x) = \frac{x}{x+2}$

58. $f(x) = \sqrt{x+1}$

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

1^0. Натурал аргументли функция-сонлар кетма-кетлигининг лимити.

f(x) функция X=N тўпламда берилган бўлсин. Уни f(n) деб оламиз.

Бу функция қийматлари $f(n)=x_n$ дан ташкил топган ушбу

$$x_1, x_2, x_3\ldots,\ x_n\ldots$$

тўплам сонлар кетма-кетлиги деб аталади. Сонлар кетма-кетлигини ташкил этган x_1, $x_2,\ldots,$ $x_n\ldots$ сонлар кетма-кетлигини ҳадлари дейилади, x_n эса кетма-кетликнинг n – ҳади ёки умумий ҳади дейилади. Сонлар кетма-кетлигини $\{x_n\}$ каби белгиланади.

Бирор a нуқта (a - ҳақиқий сон) ҳамда мусбат ε сони берилган бўлсин.

7-таъриф. Берилган а нуқтани ўз ичига олган

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in R : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\ \}$$

интервал, a нуқтанинг атрофини (a нуқтанинг ε атрофи) деб аталади.

8 – таъриф. Агар $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,\ x_n, \ldots$$

кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг ихтиёрий $(a\text{-}\varepsilon, a+\varepsilon)$ аторфига тегишли бўлса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва lim $x_n = a$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ёки $x_n \to a$ каби белгиланади.

9 – таъриф. Агар ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай n натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва юқоридагидек

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

каби белгиланади.

7-Мисол. Ушбу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

кетма-кетлкнинг лимити 0 га тенг бўлади. Шуни исботлаймиз. Ихтиёрий мусбат ε сони олиб, унга кўра $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$* ни топамиз ва $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ деймиз, у ҳолда $n > n_0$ бўлган барча натурал n сонлар учун

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \le \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

бўлади. Таърифга кўра

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

бўлади.

*) $[a]$ - a сонини ўзидан катта бўлмаган бутун қисми.

10-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади. Агар кетма-кетликнинг лимити чекли бўлмаса ёки кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик деб аталади.

Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиб,

$$x_n = y_n \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim x_n = \lim y_n$$

бўлади.

2. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$$x_n \le y_n \qquad (n=1,2,3...)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim x_n \le \lim y_n$$

бўлади.

3. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n$$

бўлади.

4. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n-y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim(x_n-y_n)=\lim x_n-\lim y_n$$

бўлади.

5. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim(x_n \cdot y_n)=\lim x_n \cdot \lim y_n$$

бўлади.

6. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}(y=0; n=1,3...)$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

бўлади.

8-Мисол.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

$$9-\textit{мисол.}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}=0;$$

$$10-\textit{мисол.}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+1}=\infty$$

11-таъриф. Ушбу

$$\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$$

кетма-кетликнинг лимити *е* сони деб аталади.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

е сони иррационал сон. Унинг қиймати тақрибан 2,71 га тенг ($e\approx 2{,}718281\ldots$. Асоси *е* бўлган логарифм натурал логарифм деб аталади).

Мисол ва масалалар.

1. Умумий ҳади $x_n=\frac{1}{n+1}$ бўлган кетма-кетликнинг дастлабки 6 та ҳади ёзилсин. Бу кетма-кетликнинг кейинги ҳадлари тўғрисида нима дейиш мумкин?

2. Умумий ҳади $x_n=n+1$ бўлган кетма-кетликнинг дастлабки 6 та ҳади ёзилсин. Бу кетма-кетликнинг кейинги ҳадлари тўғрисида нима дейиш мумкин?

3. Умумий ҳади $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ бўлган кетма-кетликнинг дастлабки 6 та ҳади ёзилсин. Бу кетма-кетликнинг кейинги ҳадлари тўғрисида нима дейиш мумкин?

4. Ушбу $x_n=\frac{(-1)^n+1}{2^n}$ кетма-кетликнинг 1, 10, 100-ҳадлари, шунингдек 9, 99-999-ҳадлари топилсин.

5. Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра, $x_n=\frac{n+1}{n}$ кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг бўлиши кўрсатилсин.

6. Кетма-кетлик таърифига кўра, $x_n=\frac{2n+3}{n+1}$ кетма-кетликнинг лимити 2 га тенг бўлиши кўрсатилсин.

7. Ушбу $x_n=(-1)^n$ кетма-кетлик лимитга эга эмаслиги тушунтирилсин.

Кўрсатилган кетма-кетликларнинг лимитлари топилсин:

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^2+5n+6}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n^3}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^2 n}{n^2+1}$.

14 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2})$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+2+\ldots+n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n})$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+3n+1}$

20. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири лимитга эга бўладими?

2^0. Ихтиёрий аргументли функция лимити.

Бирор X ҳақиқий сонлар тўплами (оралиқ) ҳамда a нуқта (a-ҳақиқий сон) берилган бўлсин.

12 – таъриф. Агар *a* нуқтанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)(\varepsilon>0)$ атрофида X тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлса, *a* нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси (қуюқланиш нуқтаси) деб аталади.

X бирор сонлар тўплами, *a* эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлиб, *f(x)* функция X да берилган бўлсин.

13. – таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, *a* га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олингандан ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим ягона в га интилса, шу b сон *f(x)* функциянинг *a* нуқтадаги (ёки $x \to a$) даги лимити деб аталади ва уни

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

каби белгиланади.

11-Мисол. 1. f(x)=C=const функция ҳар доим лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} C=C$$

бўлади. Бу функция лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

12-мисол. $f(x)=x^2+x+1$ функция X=[-1,1] оралиқда қарайлик. Бу функциянинг $x\to 0$ даги лимитини топамиз.

X=[-1,1] тўплам нуқталаридан 0 га интилувчи иътиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик: $x_n \to 0$. Берилган функциянинг $x=x_n$ даги қийматларидан иборат кетма-кетлик

$$\{f(x_n)\}=\{\ x_n^{\ 2}+x_n+1\ \}$$

бўлади. $x_n \to 0$ да $f(x_n)$ лимитини топамиз:

$$\lim f(x_n)=\lim(x_n^{\ 2}+x_n+1)=\lim x_n^{\ 2}+\lim x_n+\lim 1=1$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)=1$$

14 – таъриф. Агар ҳар қандай мусбат ε сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, х ўзгарувчининг $|x-a| < \delta$ тенгсизликни қанотлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, в сон f(x) функциянинг а нуқтадаги ($x \to a$ даги) лимит деб аталади ва юқоридагидек,

$$\lim f(x)=b$$
$$x \to a$$

каби белгиланади.

15 – таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta. > 0$ сон топилсаки, $|x| > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча х ларда

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда b сон f(x) функциянинг $x \to \infty$ даги лимити дейилади ва

$$\lim f(x)=b$$
$$x \to \infty$$

каби ёзилади.

16 – таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, х нинг a<x<$a+\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда b сон f(x) функциянинг x=a даги ўнг лимити дейилади ва

$$\lim_{x \to a+0} f(x)=b \qquad \text{ёки} \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)=b$$

каби белгиланади.

17-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\delta > 0$ сон топилсаки, х нинг a - $\delta < x < a$ тенгсизликни қаторлантирувчи барча қийматларида $|f(x)-l| < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда b сон f(x) функциянинг x=a даги чап лимити дейилади ва $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l$ ёки $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ каби белгиланади.

ЛИМИТГА ЭГА БЎЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ХОССАЛАР

1^0. Агар $x \to a$ да f(x) ва g(x) функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда f(x)±g(x) функция ҳам чекли лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

бўлади.

2^0. Агар $x \to a$ да f(x) ва g(x) функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда f(x)·g(x) функция ҳам чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim_{x\to\infty} g(x)$$

бўлади.

3^0. Агар $x \to a$ да f(x) ва g(x) функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ функция ҳам чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \qquad (\lim_{x\to a}g(x)\neq 0)$$

бўлади.

13-Мисол.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-3x^2+x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x^2-3x+1)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7}(2x^2-3x+1)=\frac{1}{7}$$

14-Мисол.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x-1}\right)\left(\sqrt{1+x+1}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x+1})}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$$

Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e \qquad (\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e)$$

лимитлар ажойиб лимитлар дейилади.

15-Мисол.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx}\cdot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b},$$

16-Мисол.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot 2}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=e\cdot e=e^2$$

3^0. ЧЕКСИЗ КИЧИК ВА ЧЕКСИЗ КАТТА ФУНКЦИЯЛАР. ФУНКЦИЯЛАРНИ СОЛИШТИРИШ

18 – таъриф. Агар $x\to a$ да $\lambda(x)$ ва функциянинг лимити нолга тенг бўлса:

$$\lim_{x\to a}\lambda(x)=0$$

у ҳолда $\lambda(x)$ функция $x\to a$ да чексиз кичик функция деб аталади.

19 – таъриф. Агар $x\to a$ да β(x) функциянинг лимити чексиз бўлса:

$$\lim_{x\to\infty}\beta(x)=\infty$$

у ҳолда $\beta(x)$ функция $x\to a$ да чексиз катта функция деб аталади.

20 – таъриф. Агар $f(x)$ да $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас С(С>0) сон топилсаки, а нуқтанинг атрофидаги барча х лар учун

$$|f(x)|\leq c|g(x)|$$

тенгсизлик берилса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган деб аталади ва

$$f(x)=O(g(x))$$

каби белгиланади.

21 – таъриф. Агар f(x) ва g(x) чексиз кичик функциялар учун

$$f(x)=\lambda(x)\cdot g(x)$$

бўлиб, бунда $\lim\limits_{x\to a}\lambda(x)=0$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва

$$f(x)=0(g(x))$$

каби белгиланади.

Мисол ва масалалар.

Функция лимити таърифидан фойдаланиб, қуйидагилар исботлансин:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{6x+2}=\dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{6}}\sin x=\dfrac{1}{2}$

Кўрсатилган функция лимитлари ҳисоблансин:

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$
10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$
11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$

12. $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$

13. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-16x+1}{3x^2+5x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$

15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x4+2x2-3}{x2-3x+2}$

17. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^4-4x^2+1}{(x-1)^2}$

18. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x-1}$

19. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x^{20}-1}$

20. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$

21. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

22. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$

23. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$

24. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

25. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$

26. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$

27. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

29. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-3}$

30. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$

31. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

32. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

33. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$

34. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$

35. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{5x^3+x^2-8}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-4}$

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^3+x-1}$ 39. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$ 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+6x-5}{4x^7+2x+3}$

42. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+2x}$ 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+8x+1}{x^3+x^2+x+1}$

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3x+4}{x^5+x^3}$ 45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+x^2-3x^5}$

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 47. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ 49. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Ушбу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ дан фойдаланиб қуйидаги лимитлар топилсин:

51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin10x}{\sin15x}$ 52. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\cdot tg2x}$ 54. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\arcsin2x}$

55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^x-\sin x}{x^3}$ 56. $\lim\limits_{x\to\frac{П}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x}{\sin^2 3x}$

58 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$

59. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot ctg3x$

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{1-\cos 4x}$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg2x}{1-\cos 3x}$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{arctg^2 2x}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

65. $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x}2$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tg}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$

69. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin[2(x-1)]}{x^2-7x+6}$

70. $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin^{\frac{l}{2^x}}$

Ушбу $\lim\limits_{x\to\pm}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ ёки $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ лимитлардан фойдаланиб қуйидаги лимитлар топилсин:

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

73. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+10x)^{\frac{5}{x}}$

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$

77. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$

78. $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$

79. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

80. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$

81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{l}{\sqrt{x}}\right)^{x}$

82. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$

83. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}$

84. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x^2}{x-2}}$

85. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{(1+4x)^3}$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари (бир томонли лимитлари) топилсин:

86. f(x)=[x], x=n (n∈Z)

87. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, x=1

88. $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^2}$, x=2

89. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, x=0

90. $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$, x=0

91. $f(x)=tg(x),$ $\qquad x=\frac{\pi}{2}$

X БОБ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1^0. Функциянинг узлуксиз тушунчаси

$f(x)$ функция бирор X тўпламда берилган бўлиб, $x_0(x_0\in X)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1 – таъриф. Агар $x\to x_0$ да $f(x)$ функциячекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилди.

1-Мисол. $f(x)=x^2+5x+6$ функцияни қарайлик. Равшанки бу функция $(-\infty,+\infty)$ да аниқланган. Бу функция ихтиёрий $x_0(x_0\in(-\infty,+\infty))$ нуқтада узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(x^2+5x+6)=x_0^2+5x_0+6$$

бўлади ва агар $x_0^2+5x_0+6=f(x)$ бўлишни эътиборга олсак, у ҳолда берилган функция учун

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

эканлигини топамиз. Демак, $f(x)=x^2+5x+6$ функция x_0 нуқтада $(x_0\in(-\infty,+\infty))$ узлуксиз.

2 – таъриф. Агар аргумент орттирмаси Δx нолга интилганда функция орттирмаси Δy ҳам нолга интилса, яъни

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

2-Мисол.

$f(x)=C$ *(C – ўзгармас сон)* функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty,+\infty)$ да аниқланган. Аргумент x га Δx орттирма бериб, бу функциянинг мос орттирмасини топамиз:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

Унда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$$

бўлади. Демак, $f(x)=C$ функция $x \in (-\infty,+\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

3-Мисол. $f(x)=\sin x$ функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty,+\infty)$ да аниқланган. Аргумент x га Δx орттирма бериб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

Маълумки,

$$\sin\lambda - \sin\beta = 2\sin\frac{\lambda-\beta}{2}\cos\frac{\lambda+\beta}{2}$$

Унда

$$\Delta f = 2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\ \cos\frac{x+\Delta x+x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлди. Бу тенгликда $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim \Delta f = \lim 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

$$= 2\left[\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\lim \cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right] = 2\sin\frac{0}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{0}{2}\right) = 0$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)=\sin x$ функциянинг $x \in (-\infty,+\infty)$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

3 – таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, функция аргументи x нинг $|x-x_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

4 – таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, уҳолда $f(x)$ функция X тўпламда узлуксиз деб аталади.

2^0. Функциянинг узилиши.

5 – таъриф. Агар

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$$

муносабат бажарилмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилишига эга (узилади) деб аталади.

1). $x \to x_0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга (уни $в$ дейлик) эга бўлиб, бу лимит $f(x_0)$ га тенг эмас:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \neq f(x_0)$$

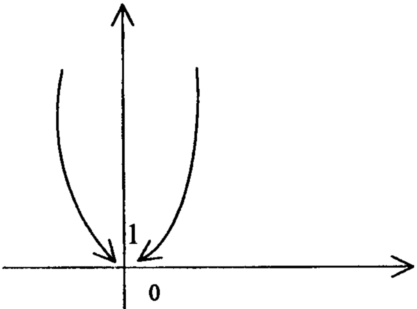
Масалан, ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \quad агар \quad x \neq 0 \quad булса \\ 1, \quad агар \quad x \neq 0 \quad булса \end{cases}$$

функция учун $lim\ f(x)=0$. Бироқ, $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги қиймати $f(0)=1$ бўлганлигидан

$$\lim_{x \to 0} f(x)=0 \neq f(0)$$

бўлади. Қаралаётган $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада узилади



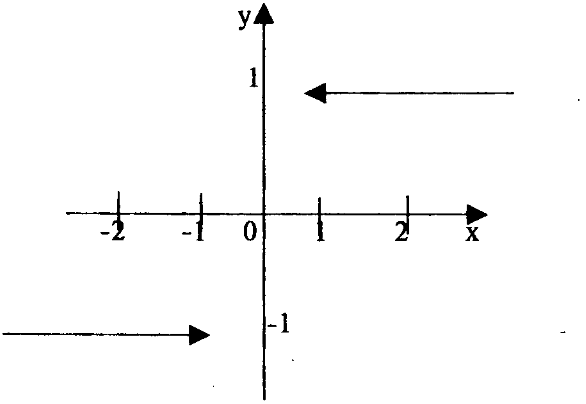
(18-чизма)

2). $x \to x_0$ да f(x) функциянинг лимити мавжуд эмас ёки у чексиз.

Масалан. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} \quad агар \quad x \neq 1 \quad булса \\ 0, \quad агар \quad x = 1 \quad булса \end{cases}$$

функция $x \to 1$ да лимитга эга эмас. Бу ҳолда ҳам (1) муносабат бажарилмайди. Демак, $f(x)$ функция $x_0=1$ нуқтада узилади. (19-чизма).



(19-чизма)

Айтайлик, *y=f(x)* функция X оралиқда аниқланган ва шу оралиқда узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x) \qquad (x_0\in X) \qquad (2)$$

бўлади. Бу муносабатдан функция лимитларини топишда фойдаланилади.

4-Мисол. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log a(1+x)}{x}$ $(a\neq 1,\ a>0)$

лимит ҳисоблансин.

Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасида узлуксизлигидан ва (2) муносабатни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\frac{1}{x}\log_a(1+x)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a\left[\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

Хусусан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

5-Мисол. $\lim \frac{a^x - 1}{x}$ $(a \neq 1, \quad a > 0)$ лимит ҳисоблансин.

Бу лимитни ҳисоблаш учун a^x-1=t деб белгилаймиз.

Равшанки, . $x \to 0$ да. $t \to 0$ ва

$a^x\text{-}1=t \Rightarrow a^x=1+t \Rightarrow \log_a a^x=\log_a(1+t) \Rightarrow$

$x\cdot\log_a a =\log_a(1+t) \Rightarrow x=\log(1+t)$

Натижада ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}$$

Агар

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

бўлишни ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a\neq1),\ (a>0)$$

эканлигини топамиз.

6-Мисол. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}$ лимит топилсин.

Юқоридагига ўхшаш мулоҳаза билан бу лимитни 1 га тенг бўлишини кўрсатиш мумкин:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lambda$$

Одатда бу

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a l \qquad (\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a\neq1,\quad a>0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lambda$$

лимитлар ажойиб лимитлар дейилади.

3^0. Функциянинг текис узлуксизлиги.

f(x) функция *X* тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

6 – таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарида

$|f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon|$ тенгсизлик бажарилса, *f(x)* функция *X* тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Бу таърифдан кўриндики, агар *f(x)* функция *X* да текис узлуксиз бўлса, у шу *X* да узлуксиз ҳам бўлади.

7-Мисол. $f(x) = \sqrt{x}$ функция *X=[1,2]* сегментда қарайлик. Равшанки, бу функция [1,2] да узлуксиз, $\forall\varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \varepsilon$ деб олинса, $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_1 $x_2 \in [1,2]$ учун

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| =$$

$$\left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| \le \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall x_1, x_2 \in [1,2]$ учун

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Бу эса f(x)=$\sqrt{x}$ функциянинг [1,2] да текис узлуксиз эканини билдиради.

1-теорема (Кантор теоремаси). Агар f(x) функция [a,в] сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАРЛАР

1. Ушбу f(x)=x^2 функцияни ихтиёрий $x_0 \in R$ да узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. Ушбу f(x)=sinx функцияни ихтиёрий $x_0 \in R$ да узлуксиз бўлиши исботлансин.

3. Ушбу f(x)=$\sqrt{x}$ функцияни ихтиёрий $x_0 \in R[0,+\infty]$ да узлукиз бўлиши исботлансин.

4. Ушбу $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ функцияни ихтиёрий $x_0 \in [-\infty,5] \cup$

$\cup$ [-5,+∞] да узлуксиз бўлиши исботлансин.

$$f(x)=\begin{cases} x, \ \textit{агар} \ \ x-\textit{рационал} \ \ \textit{сон}, \ \textit{булса}, \\ -x, \ \textit{агар} \ \ x-\textit{иррационал} \ \ \textit{сон}, \ \textit{булса} \end{cases}$$

функциянинг фақат x=0 нуқтадагина узлуксиз бўлиши исботлансин.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва турлари аниқлансин:

6. $f(x)=\frac{1}{x}$

7. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

8. $f(x)=\frac{x^2-2}{|x-2|}$

9. $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$

10. $f(x)=\lg(x^2+3x)$

11. $f(x)=signx$

12. $f(x)=sign\cos x$

13. $$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ \ \textit{агар} \ \ x\le 1 \ \ \textit{булса} \\ 2x \ \ \textit{агар} \ \ 1<x\le 3 \ \ \textit{булса} \\ x+2 \ \ \textit{агар} \ \ x>3 \ \ \textit{булса} \end{cases}$$

14. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}$

15. $$f(x)=\begin{cases} -1 \ \ \textit{агар} \ \ x<0 \ \ \textit{булса}, \\ \cos \ \ \textit{агар} \ \ 0\le x\le \ \pi \ \ \textit{булса}, \\ 1-x \ \ \textit{агар} \ \ x>\pi \ \ \textit{булса} \end{cases}$$

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширилсин:

16. f(x)=| x-1|

17. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & агар\ \ x\neq 1\ \ булса\\ \mathrm{A}\ \ агар\ \ x=1\ \ булса\end{cases}$$

18. $f(x)=sign\ (x^2\text{-}2x\text{-}3)$

19. $$f(x)=\begin{cases}-2x^2\ \ агар\ \ x\leq 3\ \ булса\\ x\ \ агар\ \ x>3\ \ булса\end{cases}$$

20. $$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}\ \ агар\ \ x\neq 0\ \ булса\\ 0\ \ агар\ \ x=0^{\bullet}\ булса\end{cases}$$

21. $f(x)=arctg\ x$

22. $f(x)=sign\ sinx$

23. $$f(x)=\begin{cases}2x\ \ агар\ \ 0\leq x\leq 1\ \ булса\\ 2-x\ \ агар\ \ 1<x\leq 2\ \ булса\end{cases}$$

24. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

25. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

26. $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$

27. $$f(x)=\begin{cases}x+4\ \ агар\ \ x<-1\ \ булса\\ x^2+2\ \ агар\ \ -1\leq x<1\ \ булса\\ 2x\ \ агар\ \ x\geq 1\ \ булса\end{cases}$$

28. $f(x)=\begin{cases} -x \quad агар \quad x \le 0 \quad булса \\ x^2 \quad агар \quad 0 < x \le 2 \quad булса \\ x+1 \quad агар \quad x > 2 \quad булса \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} \quad агар \quad x \le 0 \quad булса, \\ 0 \quad агар \quad 0 < x \le 2 \quad булса, \\ x-2 \quad агар \quad x > 2 \quad булса \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} \sin x - агар - x < 0 - булса, \\ x - агар - 0 \le x \le 2 - булса \\ 0 - агар - x > 2 - булса \end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} 1 \quad агар \quad x \le 0 \quad булса \\ 2^x \quad агар \quad 0 < x \le 2 \quad булса \\ x+3 \quad агар \quad x > 2 \quad булса \end{cases}$

32. $f(x)=\begin{cases} 3x+4 \text{ агар } x\le -1 \text{ булса,} \\ x^2-2 \text{ агар } -1<x<2 \text{ булса,} \\ x \text{ агар } x>2 \text{ булса.} \end{cases}$

33. $f(x)=\begin{cases} 2 \text{ агар } x<-1 \text{ булса,} \\ 1-x \text{ агар } -1\le x\le 1 \text{ булса,} \\ \ln x \text{ агар } x>1 \text{ булса.} \end{cases}$

34. $f(x)=\begin{cases} -x \text{ агар } x\le 0 \text{ булса,} \\ x^3 \text{ агар } 0<x\le 2 \text{ булса,} \\ x+4 \text{ агар } x>2 \text{ булса.} \end{cases}$

35. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3$

36. $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1$

37. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1$

38. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$

39. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1$

40. $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$(a>0)$$

муносабатлардан фойдаланиб функциянинг лимитлари ҳисоблансин:

41. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-1}{x-l}$ 42. $\lim n(\sqrt[n]{2}-1)$

43. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10}$

11 БОБ.

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1-§. ФУНКЦИЯ ҲОСИЛАСИ.

1^0. Функция ҳосиласи тушунчаси.

y=f(x) функция (а,в) интервалда берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ $x_0+\Delta x\in(a,b)$ бўлсин $(\Delta x\geq 0)$.

1 – таъриф. Агар $\Delta x\to 0$ да

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит *f(x)* функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f^1(x_0)$, ёки $y^1{}_{x=x_0}$, ёки $\frac{dy}{dx}$ каби белгиланади:

$$f^1(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

1-Мисол. 1. *y=f(x)=C (C=const)* функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумен x га Δx орттирма бериб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

Сўнг бу орттирмани аргумент орттирмаси Δx га бўламиз. Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

бўлиб, ундан

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $y^1=0$

у=с бўлса, $y^1=0$ бўлади.

2-Мисол. $y=f(x)=x$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумент х га Δx орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$$

Сўнг бу орттирмани аргумент орттирмаси Δx га бўламиз.

Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $y^1=1$ бўлади.

3-Мисол. $y = \frac{1}{x}$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумент х га Δx ортирма бериб, функция ортирмасини топамиз:

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

Бу Δy ни Δx га бўламиз. Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

Энди $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

Демак,

$$y^1 = -\frac{1}{x^2}$$

Шундай қилиб, $y=\frac{1}{x}$ бўлса, $y^1=-\frac{1}{x^2}$ бўлади.

4-Мисол. $y=sin\ x$ функциянинг ҳосиласи топилсин. Бу функция учун

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

бўлади. Маълумки,

$$\sin\lambda-\sin\beta=2\sin\frac{\lambda-\beta}{2}\cos\frac{\lambda+\beta}{2}$$

Бу формуладан фойдалансак, унда Δy учун

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

бўлишини топамиз. У ҳолда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

Бундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos(\lim(x+\frac{\Delta x}{2}))=\cos x$$

бўлиши эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\ .$$

тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, $y=sinx$ бўлса, $y^1=cosx$ бўлади.

f(x) функциянинг x_0 нуқтадаги $f^1(x_0)$ ҳосиласи шу функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтадаўтказилган уринманинг бурчак коэффицентидан иборат.

f(x) функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f^1(x_1)\cdot(x - x_0),$$

нормалнинг тенгламаси эса

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f^1(x_0)}(x - x_0) \qquad (f^1(x_0)\neq 0)$$

бўлади.

2⁰. Содда қоидалар. Ҳосилалар жадвали.

f(x) ва g(x) функциялар (а,в) орлалиқда $f^1(x)$ ва $g^1(x)$ ҳосилаларига эга бўлсин. У ҳолда

1. $$[f(x)\pm g(x)]^1 = f^1(x)\pm g^1(x)$$

2. $$[f(x)\cdot g(x)]^1 = f^1(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g^1(x),$$

3. $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^1 = \frac{f^1(x)\cdot g(x)\cdot g^1(x)}{g^2(x)} \qquad (g\ (x)\neq 0)$$

4. Агар $y=f(x)$ функция $x_0(x_0\in(a,\text{в}))$ нуқтада $f^1(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб $f^1(x_0)\neq 0$ бўлса, y функцияга тескари бўлган $x=\varphi(y)$ функция $y=f(x_0)$ нуқтада ҳосилага эга бўлади ва

$$\varphi^1(y_0) = \frac{1}{f^1(x_0)}$$

тенглик ўринли бўлди.

5. Агар $y=\varphi(x)$ функция x_0 нуқтада $\varphi^1(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $u=f(y)$ функция $y_0(y_0=\varphi(x_0))$ нуқтада $f^1(y_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $u=f(\varphi(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлади ва ушбу

$$[f(\varphi(x))]^1_{x=x_0} = f^1(y_0)\cdot\varphi^1(x_0) = f^1(\varphi(x_0))\cdot\varphi^1(x_0)$$

формула ўринли бўлади.

Юқорида келтирилган элементлар функцияларнинг ҳосилаларини жамлаб қуйидаги ҳосилалар жадвалини тузамиз:

1⁰. $y=C=Const$ бўлса, $y^1=0$ бўлади.

2⁰. $y=x^{\mu}$ $(x>0)$, $y^1=\mu\cdot x^{\mu-1}$

$3^0.\ y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1),\ y^1=a^x\cdot \ln a$

$4^0.\ y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1),\ y^1=\frac{1}{x}\log_a e$

$5^0.\ y=\ln x\ (x>0),\ y^1=\frac{1}{x}$

$6^0.\ y=\sin x,\ y^1=\cos x$

$7^0.\ y=\cos x,\ y^1=-\sin x$

$8^0.\ y=tgx,\ y^1=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (x\neq \frac{\Pi}{2}+k\Pi, k\in Z)$

$9^0.\ y=ctg\, x,\ y^1=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (x\neq k\Pi,\ k\in Z)$

$10^0.\ y=\arcsin x,\ y^1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1<x<1)$

$11^0.\ y=\arccos x,\ y^1=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1<x<1)$

$12^0.\ y=arctg\, x,\ y^1=\frac{1}{1+x^2}$

$13^0.\ y=arctg\, x,\ y^1=-\frac{1}{1+x^2}$

5-Мисол. $y=\arcsin x\ (-1<x<1)$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Равшанки, $y=\arcsin x$ функция $x=\sin y$ функцияга нисбатан тескари функциядир. Формулага кўра $y^1{}_x=\frac{1}{x^1{}_y}$ бўлади:

$$y^1{}_x=\frac{1}{x^1y}\Rightarrow y^1=\frac{1}{(\sin y)^1}\Rightarrow y^1=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow y^1=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\Rightarrow y^1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Демак, y=arcsin x бўлса, $y^1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлади.

6-Мисол. $u=\sin^3 x$ функция ҳосиласи топилсин. Агар $u=y^3$, $y=\sin x$ дейилса, унда

$u^1=(y^3)^1\cdot(\sin x)^1=3y^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cdot\cos x$ бўлади.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

$y=f(x)$ функция (а,в) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a,в)$ $x_0+\Delta x \in (a,в)$ бўлсин.

2-таъриф. Агар $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни ушбу

кўринишда ифодаланса $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади. Бунда А ўзгармас, λ эса Δx га боғлиқ ва $\Delta x \to 0$ *да* $\lambda \to 0$.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\text{A}\cdot\Delta x + \lambda\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Бу ҳолда $A=f^1(x_0)$ бўлади. (1) ифодаги $f^1(x_0)\cdot\Delta x$ ҳад $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали дейилади ва dy ёки $df(x_0)$ каби белгиланади:

Масалан. Ушбу

$y=x^2+2x+1$ $\qquad$ $y=l^x+sin2x$

функциянинг дифференциали

$dy=y\cdot dx=(x^2+2x+1)^1\ dx=2(x+1)dx,$

$dy=y^1\cdot dx=(ex+sin2x)^1\ dx=(e^x+2cos2x)dx$ бўлади.

Функция ҳосилалари жадвалидан фойдаланиб, элементлар функцияларнинг дифференциаллари жадвалини келтирамиз:

$1^0.\ y=C=Const,\ dy=0$

$2^0.\ y=x^\mu,\ dy=\mu\cdot x^{\mu-1}\,dx \qquad (x>0)$

$3^0.\ y=a^x,\ dy=a^x\cdot lna\ dx \qquad (a>0,\ a\neq 1)$

$4^0.\ y=log_a x,\ dy=\frac{1}{x}\,log_a e\ dx \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

$5^0.\ y=lnx,\ dy=\frac{1}{x}\ dx$

$6^0.\ y=sinx,\ dy=cosxdx$

$7^0.\ y=cosx,\ dy=-sinxdx$

$8^0.\ y=tgx,\ dy=\frac{1}{cos^2 x}\ dx \qquad (x\neq\frac{П}{2}+kП,\ k\in Z)$

$9^0.\ y=ctgx,\ dy=-\frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad (x\neq kП,\ k\in Z)$

10^0. $y=\arcsin x,\ dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ \ (-1<x<1)$

11^0. $y=\arccos x,\ dy=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ \ (-1<x1)$

12^0. $y=\operatorname{arctg} x,\ dy=\frac{1}{1+x^2}dx$

13^0. $y=\operatorname{arcctg} x,\ dy=-\frac{1}{1+x^2}dx$

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,в)$ да берилган бўлиб, $x(x\in(a,в))$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

а) $d[f(x) \pm g(x)]=df(x) \pm dg(x)$

б). $d[f(x) \cdot g(x)]=df(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot dg(x);$

в). $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot df(x)-f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$

бўлади.

3-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

3-таъриф. Функция ҳосиласининг ҳосиласи шу функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталади ва y^{II} ёки $f^{II}(x)$ каби белгиланади:

$$y^{II}=(y^I)^I,$$

Умуман, функциянинг п-тартибли ҳосиласи (п-1) – тартибли ҳосиласининг ҳосиласидир:

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})^I$$

Масалан ушбу а) $y=ax^2+вx+c$; б) $y=2^{\sin x}$; в) $y=\operatorname{arctg} x$ функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари топилсин:

а) $y^1=(ax2+bx+c)^1=2ax+b,$

$y^{II}=(y^1)^1=(2ax)+b)^1=2a$

б) $y1=(2^{\sin x})^1=2\sin x\cdot \ln 2\cdot \cos x,$

$y^{II}=(y^1)^1=(\ln^2\cdot 2^{\sin x}\cdot \cos x)^1=\ln 2(2^{\sin x}\cdot \cos x)^1=$

$\ln 2[(2^{\sin x})^1 \cos x+2^{\sin x}(\cos x)^1]=\ln 2\cdot 2^{\sin x}(\cos^2 x\cdot \ln 2\cdot \sin x)$

в). $y^1=(\operatorname{arctg} x)1=\frac{1}{1+x^2};$

$$y^{II}=(y^1)^1=(\frac{1}{1+x^2})1=\frac{1\cdot(1+x^2)-(1+x^2)^1}{(1+x^2)^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

4-таъриф. y=f(x) функция дифференциали dy нинг дифференциали берилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва d^2y ёки $d^2f(x)$ каби белгиланади:

$$dy=d(dy) \qquad \text{ёки } d^2f(x)=d(df(x))$$

Худи шунга ўхшаш, функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибли дифференциаллари таърифланади.

Умуман, функциянинг *n* — тартибли дифференциали унинг *(n-1)* — тартибли дифференциалнинг дифференциалидан иборатдир:

$$d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x)$$

Функциянинг юқори тартибли дифференциали унинг ҳосиласи орқали қуйидагича ифодаланади: $d^ny=y^{(n)}dx^n$

Масалан, $y=\sin 2x$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали қуйидагича бўлади:

$dy=y^!dx=2\cos 2xdx$, $d^2y=d(dy)=-4\sin 2x\cdot dx^2$

Мисол ва масалалар

1. Ушбу функцияларнинг $x=x_0$ нуқтадаги орттирмаси топилсин: (x_0 ва $x_0+\Delta x$ лар функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли)

1. $f(x)=a^x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$
2. $f(x)=\log_a x \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$
3. $\sin x=f(x)$
4. $f(x)=\cos(x)$

2. Ушбу функцияларнинг $x=x_0$ нуқтадаги орттирмаси топилсин (x_0 ва $x_0+\Delta x$ лар функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли)

1. $f(x)=x^3$ 3. $f(x)=\sqrt{x}$

2. $f(x)=\frac{1}{x}$ 4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Ушбу $f(x)=|x|$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси ҳисоблансин.

Қуйидаги функциялар учун ушбу

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

нисбат тузилсин (x_0 ва $x_0+\Delta x$ лар f(x) функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли).

1. $f(x)=x^3$ 2. $f(x)=\frac{1}{x}$

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 4. $f(x)=\sqrt{x}$

5. 1. $f(x)=a^x$ 2. $f(x)=\log_a x$
3. $f(x)=\sin x$ 4. $f(x)=\cos x$

6. Ушбу f(x)=lnx функция учун, x=1 нуқтада

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

нисбат топилсин.

7. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $f(x)=2x^3+3x$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи топилсин.

8. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, f(x)=lnx (x>0) функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи топилсин.

9. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, f(x)=tgx функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи топилсин.

10. Ҳосила таърифидан фойдалиниб, $f(x)=|x|$ функциянинг x=0 нуқтада ҳосилага эга эмаслиги кўрсатилсин.

11. Ушбу $f(x)=|x-2|$ функция x=2 нуқтада ҳосилага эга бўладими?

12. Ушбу $f(x)=x^3-2x+2$ функциянинг таърифга кўра ҳосиласи ҳисоблансин, сўнг $f^1(0)$, $f^1(2)$ лар топилсин.

13. Ушбу f(x)=sin2x функциянинг таърифга кўра ҳосиласи топилсин, сўнг $f^1\left(\frac{\pi}{2}\right), f^1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ лар ҳисоблансин.

Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

14. $y=2x^3-5x^2+7x-12$

15. $y=x^4-3x^2+17$ 16. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$

17. $y=x^3(x^2-1)^2$ 18. $y=\sqrt[3]{x}$

19. $y=\sqrt{x}+\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}$

20. $y=5x^4-3\sqrt[7]{x^3}+\frac{7}{x^5}+4$

21. $y=3x^3+5\sqrt[3]{x^5}-\frac{4}{x^3}$

22. $y=\sqrt[7]{x^5}-\frac{2}{x^4}+7x^6$

23. $y=4\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}+3x^2$

24. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

25. $y=x\cdot\sin x$

26. $y=\sqrt{x}\ \ cosx$

27. $y=\frac{x}{1-x^2}$

28. $y=\frac{3x-1}{x^5}$

29. $y=x^3\sin x$

30. $y=(x^9+1)\cdot\cos x$

31. $y=e^x(1+x+x^2)$

32. $y=x\ \ln x$

33. $y=\frac{1}{\sin x}$

34. $y=\frac{1}{\cos x}$

35. $y=\frac{1}{\ln x}$

36. $y=lx(\sin x\cdot\cos x)$

37. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$

38. $y=\frac{e^{x-1}}{e^{x+1}}$

39. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

40. $y=2e^x+\ln x$

Мураккаб функция ҳосиласини топиш қоидасидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнингҳосилалари ҳисоблансин:

41. $y=sin5x$

42. $y=l^{-x}$

43. $y=ln(x^2+1)$

44. $y=2^{sinx}$

45. $y=\sin x^2$

46. $y=tg\sqrt{x}$

47. $y=\sqrt{x^2+x+1}$

48. $\sin^3 x$

49. $y=\cos^3 x$

50. $y=e^{x2}$

51. $y=\ln\sin x$

52. $y=\ln(x^3+x^2)$

53. $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$

54. $y=\ln tgx$

55. $y=arctg\sqrt{x}$

56. $y=\sqrt[3]{1+x^2}$

57. $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$

58. $y=(x-1)\sqrt{x^2+1}$

59. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$

60. $y=\cos\dfrac{a}{x}$

61. $y=\cos^3 x^2$

62. $y=\log_2(x+\sqrt{x})$

63. $y=\ln\ln x$

64. $y=\ln x^2$

65. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$

66. $y=\sqrt{x^2+4x+3}$

67. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

68. $y=e^{-\frac{1}{x}}$

69. $y=2^{1-\sqrt{x}}$

70. $y=\sin(\ln x)$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

71. $y=\sqrt[3]{x^4+\sin^4 x}$

72. $y=e^{arctg\sqrt{x}}$

73. $y=\ln^5(x-2^{-x})$

74. $y=\sin(tg\sqrt{x})$

75. $y=arctg\sqrt{1+x^2}$

76. $y=\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin^2 x+1}}$

77. $y=(\sin^3 x+\cos^3 2x)^2$

78. $y=3^{x2}-tg^4 2x$

79. $y=arctg\sqrt{1+e^{-x}}$

80. $y=(1+x^4)^{tg7x}$

81. $y=e^{-x2}\cdot arctg\sqrt{x^3+1}$

82. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

83. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$

84. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{3x-2}}$

85. $y=5\cdot\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

86. $y=e^{-\frac{1}{\cos x}}$

87. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$ 88. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

89. $y = \ln\frac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{x}$ 90. $y = \arcsin(tgx)$

91. $y = \ln\sqrt{\frac{1 + tgx}{1 - tgx}} - x$ 92. $y=tg^2(x^2+1)$

93. $y = \ln\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 94. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x \cdot \sqrt{3}}{1 + x^2}$

95. $y = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}\arcsin\sqrt{x}$

96. $y = \frac{\sin(2\ln x) - \cos(2\ln x)}{x^2}$

97. $y = \arccos\frac{2 - x}{x\sqrt{2}}$ 98. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}$

99. $y = \arcsin\frac{2x}{1 + x^2}$ 100. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\arcsin x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

Маълумки, $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиқларнинг уларнинг кесишиш нуқтасидаги (бу нуқтанинг абсциссаси x_0) уринмалар φ бурчак, яъни икки эгри чизиқ орасидаги бурчак, ушбу

$$tg\varphi = \frac{f^1{}_2(x_0) - f^1{}_1(x_0)}{1 + f^1{}_1(x_0) \cdot f^1{}_2(x_0)}$$

формула ёрдамида топилади.

Шу формуладан фойдаланиб қуйидаги эгри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин:

101. $y=\sin x$ билан $y=\frac{1}{2}$

102. $y=\frac{1}{x}$ билан $y = \sqrt{x}$

103. $y=x-x^3$ билан $y=5x$

104. $y=x^3$ билан $y=\frac{1}{x^2}$

105. y=$\frac{x-1}{1+x^2}$ билан y=0

106. Ушбу $y=\ln(1+\frac{x}{\sqrt{3}})$ эгри чизиқ ох ўқини қандай бурчак остида кесиб ўтади?

107. а нинг қандай қийматида ушбу

$$y=\frac{1}{n}(ax+x^2)$$

эгри чизиқ ох ўқини 45^0бурчаук остида кесади?

108. Ушбу

$$y=(x-2)^2, \qquad y=-4+6x-x^2$$

параболалар қандай бурчак остида кесишишади?

109. Ушбу y=lnx эгри чизиқ Ох ўқини қандай бурчак остида кесади?

110. а нинг қандай қийматида ушбу $y=a^x$ эгри чизиқ Оу ўқини 45^0 бурчак остида кесади?

111. Ушбу $y=3x-x^2$ параболага (1; 2) нуқтасидан ўтказилган уринма тенгламаси топилсин.

112. Ушбу $y=4x^2+4x+3$ эгри чизиққа (-1, -3) нуқтасидан ўтказилган уринма тенгламаси топилсин.

113. Ушбу $y=\frac{1}{3}(x^2-3x+3)$ параболага ўтказилган шундай уринма топилсинки, у y=x тўғри чизиққа параллел бўлсин.

114. Ушбу $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ эгри чизиққа (0, 3) нуқтасидан ўтадиган уринма ва нормал тенгламалари топилсин.

115. Ушбу $y=\frac{x+9}{x+5}$ эгри чизиққа ўтказилган шундай уринма топилсинки, бу уринма координаталар бошидан ўтсин.

116. Ушбу $y=x^3-3x^2+4x-12$ эгри чизиққа (-1; -20) ва (1; -10) нуқталарда ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак топилсин.

117. Моддий нуқтанинг ҳаракати ушбу

$$S=t^3-3t^2+3t+5$$

формула билан ифодаланади. Қандай вақтда бу ҳаракатнинг лиги нолга тенг бўлади?

118. Модий нуқта $S=4t^{3'}+2t-5$ қонун билан ҳаракатда бўлса, унинг 2 секунддан кейин тезлиги қанча бўлади?

Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари ҳисоблансин:

119. $y=x^3+3x^2+x+7$ 120. $y=5-x^7$

121. $y=(x-7)^5$ 122. $y=^{15x2+x}$

123. $y=e^{-x2}$ 124. $y=cos^2x$

125. $y=\dfrac{1}{x^3}$ 126. $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$

127. $y=arctg\ 3x$ 128. $y=e^{-x}\ sinx$

129. $y=(1-x^2)cosx$ 130. $y=2e^{2x}+3+e^x$

131. $y=\sqrt[3]{x^2}$ 132. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

133. $y=x^4lnx$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги ҳосилалари ҳисоблансин:

134. $y=x^7$, $y^{(VI)}=?$

135. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y^{III}=?$

136. $y=23x$, $y^{III}=?$

137. $y=x^2cos3x$, $y=^{(VI)}=?$

138. $y=\dfrac{2}{x^{10}}$, $y=^{(VI)}=?$

139. $y=x^2e^{3x}$ $y=^{(VI)}=?$

140. $y=e^xsinx$, $y=^{(VI)}=?$

141. $y=arctg\ (x+\sqrt{1+x^2})$, $y^{III}=?$

142. Ушбу $y=C,\ e^{-x}+C_2e^{-2x}\ (C_1C_2-cost)$ функция қуйидаги

$$y^{II}+3y+2y=0$$

тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

143. Ушбу $y=e^{-x}cosx$ функция қуйидаги

$$y^{(VI)}+4y=0$$

тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

Қуйидаги функцияларнинг n – тартибли ҳосилалари ҳисоблансин.

144. $y=e^{2x}$ 145. $y=\sqrt{x}$

146. $y=\ln x$ 147. $y=\sin x$

148. $y=\cos x$

Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

149. $y=\sqrt{1+x^2}$ 150. $y=\frac{1}{x}+arctgx$

151. $y=(x^3-a)^2$ 152. $y=\ln(\sqrt{1-x^2})$

153. $y=(e^x+e^{-x})^2$ 154. $y=x\cdot tg^3x$

155. $y=\sqrt{arctgx}$ 156. $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$

157. $y=(x^2+1)\ arctgx$ 158. $y=e^{-2x}\cos 2x$

Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциаллари топилсин:

159. $y=x^3\ln x$ 160. $y=\frac{\ln x}{x}$

161. Ушбу $f(x)=2x^2-x$ функциянинг $x_0=1$ нуқтадаги, $\Delta x=0{,}01$ бўлганда, орттирмаси $\Delta f(x_0)$ ҳамда дифференциали $df(x_0)$ лари топилсин ва улар ўзаро таққослансин.

162. Ушбу $f(x)=x^3+2x$ функциянинг $x_0=-1$ нуқтадаги, $\Delta x=0{,}02$ бўлганда, орттирмаси $\Delta f=(x_0)$ ҳамда дифференциали $df(x_0)$ лар топилсин ва улар ўзаро таққослансин.

Ушбу $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$ таркибий формуладан фойдаланиб, қуйидаги миқдорлар таркибий ҳисоблансин:

164. $\lambda=\ln 1{,}01$ 165. $\lambda=\sqrt[4]{17}$

166. $\lambda=\cos 31^0$ 167. $\lambda=\sin 29^0$

12. БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛИИ ҲИСОБНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСУВЧИ ВА КАМАЮВЧИ БЎЛИШИ

Агар $f(x)$ функция (a,b) да $f^1(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in (a,в)$ учун

$$f^1(x)\geq 0$$

бўлса, функция (а,в) да ўсувчи бўлади.

Агар f(x) функция (a,b) да $\mathrm{f}^1(\mathrm{x})$ ҳосилага эга блиб, $\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{а},\mathrm{в})$ учун $f^1(x)\geq 0$ бўлса, функция (a,b) да камаювчи бўлади.

Демак,

$$f^1(x)\geq 0 \qquad \text{ва} \qquad f^1(x)\geq 0$$

тенгсизликларни ечиб, берилган функциянинг ўсувчи ҳамда камаювчи бўладиган оралиқлари топилади.

Масалан, ушбу $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f^1(x)=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^1=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

бўлади. Энди $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\geq 0$ тенгсизликнии ечамиз:

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\geq 0 \Rightarrow 1-x^2 \geq\Rightarrow (1-x)(1+x)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-x\geq 0\\ 1+x\geq 0\end{cases} \textit{ва} \begin{cases}1-x\leq 0\\ 1+x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ x\geq -1\end{cases} \textit{ва} \begin{cases}x\geq 1\\ x\leq -1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ x\geq -1\end{cases} \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

Демак, берилган f(x) функция [-1,+1] оралиқда ўсувчи бўлади. Равшанки,

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\leq 0 \Rightarrow 1-x^2\leq 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}-\infty<x\leq -1\\ 1\leq x<+\infty\end{array}\right.$$

Демак, берилган f(x) функция (-∞, -1] ва [1,+∞) оралиқда камаювчи бўлади.

2-§. ФУНКЦИЯ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

Айтайлик, f(x) функция (а,в) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,в)$ бўлсин.

1–таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)(\delta>0)$ атрофи топилсаки, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

учун

$$f(x) \leq f(x_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда f(x) функция x_0 нуқтада максимумга эришади дейилади. Бунда x_0 нуқта функцияга максимум қиймат берадиган нуқта, $f(x_0)$ эса функциянинг максимум қиймати дейилади.

Функция максимум қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x_0)=\max_{x} \{f(x)\}$$

2–таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)(\delta>0)$

атрофи топилсаки $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ учун

$$f(x) \geq f(x_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади дейилади. Бунда x_0 функцияга минимум қиймат берадиган нуқта, $f(x_0)$ эса функциянинг минимум қиймати дейилади.

Функциянинг минимуми қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x_0)=\min_{x} \{f(x)\}$$

Функциянинг максимум ва минимум қийматлари умумий ном билан унинг экстремум қийматлари деб аталади.

2-Мисол. $f(x)=x^2$ функцияни қарайлик. Бу функция x=0 нуқтада минимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, x=0 нуқтанинг $(0-\delta, 0+\delta)=(-\delta,\delta)(\delta>0)$ атрофидаги барча x нуқталар учун

$$f(x) \geq f(0) \text{ яъни } x^2 \geq 0$$

бўлади:

$$\forall x \in (-\delta,\delta) \Rightarrow f(x) \geq f(0)$$

Функция экстремумини қуйидаги қоидага кўра топилади:

1) берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f^1(x)$ ни топиб,

$$f^1(x)=0$$

тенгламани ечамиз. Айтайлик, бу тенгламанинг ечимларидан бири x_0 бўлсин:

2) бу x_0 нуқтанинг $(x_0-\delta, x_0+\delta)(\delta>0)$ атрофини оламиз:

3) агар

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad учун \quad f^1(x)<0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad учун \quad f^1(x)>0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади. Функциянинг максимум қиймати $f(x_0)$ бўлади;

4) агар

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad учун \quad f^1(x)>0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad учун \quad f^1(x)<0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади. Функциянинг минимум қиймати $f(x_0)$ бўлади;

5) агар

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad учун \quad f^1(x)>0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad учун \quad f^1(x)>0$$

ёки

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad учун \quad f^1(x)<0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad учун \quad f^1(x)<0$$

бўлса, унда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

3-Мисол. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$ функциянинг экстремумлар топилсин.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз.

$f^1(x)=(2x^3-9x^2+12x-2)^1=6(x^2-3x+2)$

Сўнгра

$f_1(x)=0$ яъни $6(x^2-3x+2)=0$

тенгламани ечамиз:

$$6(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=2$$

Демак, $x_1=1$, $x_2=2$ нуқталар берилган функциянинг стационар нуқталари бўлади.

Энди функция ҳосиласини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f^1(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$x=1$, $x=2$ стационар нуқталарнинг атрофларини олиб, унда функция ҳосиласи $f^1(x)$ нинг ишорасини текширамиз.

$x=1$ нуқтанинг $(1-\delta,1+\delta)(0<\delta<\frac{1}{2})$ атрофини олайлик. Унда $\forall x\in(1-\delta,1)$ учун $f^1(x)=6(x-1)(x-2)>0$ бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2<0$ бўлади.

Шундай қилиб $f^1(x)$ ҳосила $x_1=1$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «+» дан «-» га ўзгартиради. Демак, берилган функция $x=1$ нуқтада максимумга эришади ва функциянинг максимум қиймати

$$\max\{f(x)\}=f(1)=3$$

$x=2$ нуқтанинг $(2-\delta,2+\delta)(0<\delta<\frac{1}{2})$ атрофини олайлик. Унда

$\forall x\in(2-\delta,2)$ учун $f^1(x)=6(x-1)(x-2)<0$ бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2<0$ бўлади.

$\forall x\in(2,2+\delta)$ учун $f^1(x)=6(x-1)(x-2)<0$ бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2<0$ бўлади.

Шундай қилиб, $f^1(x)$ ҳосила $x_2=2$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартиради. Демак, берилган f(x) функция $x_2=2$ нуқтада минимумга эришади ва функциянинг минимум қиймати

$$\min\{f(x)\}=f(2)=2$$

Агар f(x) функциянинг x_0 нуқтада иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлиб,

$$f^1(x_0)=0,\quad f^{II}(x_0)>0$$

бўлса, у ҳолда f(x) функция x0 нуқтада максимумга,

$$f^1(x_0)=0,\quad f^{II}(x_0)>0$$

бўлса, у ҳолда f(x) функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

4-Мисол. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$ функциянинг экстремумлари топилсин.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f^1(x)=(x^5-5x^4+5x^3+1)^1=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)$$

Сўнгра

$f^I(x)=0$ яъни $5x^2(x^2-4x+3)=0$

тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ечимлари $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$ бўлади. Демак, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$ нуқталар берилган функциянинг стационар нуқталаридир.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$f^{II}(x)=(f^I(x))^I=(5x^4-20x^3+15x^2)^I=20x^3-60x^2+30x=10x(2x^3-6x+3)$

$x_1=0$ нуқтада $f^{II}(0)=0$,

$x_2=1$ нуқтада $f^{II}(1)=-10<0$,

$x_3=2$ нуқтада $f^{II}(3)=90>0$

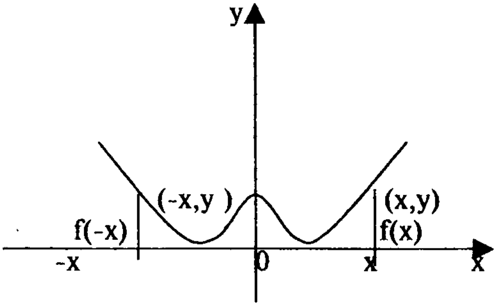
бўлади. Демак, берилган функция $x_2=1$ нуқтада максимумга, $x_3=3$ нуқтада минимумга эришади ва

$max\{f(x)\}=f(1)=2,\ min\{f(x)\}=f(2)=-26$

3-§. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ, БУКИЛИШИ (ЭГИЛИШ НУҚТАСИ)

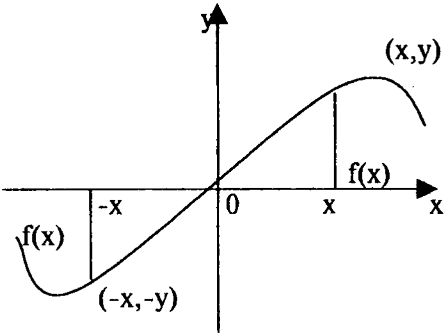
f(x) функция графиги бўлган эгри чизиқни (функция графигини) $A\breve{B}$ билан белгилаймиз.

3 – таъриф. Агар (а,в) интервалнинг барча нуқталарида $A\breve{B}$ эгри чизиқ ҳар доим уринмадан пастда бўлса, у ҳолда $A\breve{B}$ эгри чизиқ (а,в) да қавариқ деб аталади. (чизма)



(20-чизма)

4 – таъриф. Агар (a,b) интервалнинг барча нуқталарида $A\breve{B}$ эгри чизиқ ҳар доим уринмадан юқорида бўлса, у ҳолда $A\breve{B}$ эгри чизиқ (а,в) да ботиқ деб аталади. (21-чизма)



(21-чизма)

5—таъриф. Агар x_0 нуқтанинг $(x_0-\delta,x_0+\delta)((x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,в))$ атрофи олинганда $(x_0-\delta,x_0)$ да эгри чизиқ қаварик, $(x_0,x_0+\delta)$ да эгри чизиқ ботиқ ёки $(x_0-\delta,x_0)$ да эгри чизиқ ботиқ, $(x_0,x_0+\delta)$ да эгри чизиқ қаварик бўлса, у ҳолда эгри чизиқ x_0 нуқтада букилади (эгилади) деб аталади. Эгри чизиқнинг $(x_0,f(x_0))$ нуқтаси эса унинг букилиш (эгилиш) нуқтаси дейилади.

Агар функция (a,в) да иккинчи тартибли $f^{II}(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x\in(a,в)$ учун

$$f^{II}(x)<0$$

бўлса, у ҳолда эгри чизиқ (функция графиги) (a,b) да қаварик,

$$f^{II}(x)>0$$

бўлса, у ҳолда эгри чизиқ (функция графиги) (a,b) да ботиқ бўлади.

1 — натижа. Эгри чизиқнинг эгилиш нуқтасини функция иккинчи тартибли $f^{II}(x)$ ҳосилани нолга айлантираиган нуқталар орасида топилади.

5-Мисол. $f(x)=x^4-6x^2+5$ функцияни қавариқликка ва ботиқликка текшириб, эгилиш нуқтаси топилсин.

Аввало берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$f^I(x)=(x^4-6x^2+5)^1=4x^3-12x,$

$f^{II}(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$

Модомики, берилган функция барча нуқталарда биринчи тартибли ҳосилага эга экан, унда функция графигининг ҳар бир нуқтасида уринма мавжуд.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини нолга тенглаб, топамиз:

$f^{II}(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)=0$,

$x_1=-1$, $x_2=1$

$x_1=-1$ ва $x_2=1$нуқталарнинг атрофларини олиб, унда функция иккинчи тартибли ҳосиласи $f^{II}(x)$ нинг ишорасини текширамиз.

$x_1=-1$ нуқтанинг $(-1-\delta,\ -1+\delta)$ атрофини $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ олайлик. Унда

$\forall x\in(-1-\delta,\ -1)$ учун $f^{II}(x)=12(x-1)(x+1)>0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x-1<0$, $x+1<0$ бўлади.

$\forall x\in(-1,\ -1+\delta)$ учун $f^{II}(x)=12(x-1)(x+1)<0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x-1<0$, $x+1>0$ бўлади.

$x_2=1$ нуқтанинг $(1-\delta,1+\delta)(0<\delta<\frac{1}{2})$ атрофини олайлик. Унда

$\forall x\in(1-\delta,\ 1)$ учун $f^{II}(x)=12(x-1)(x+1)<0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x-1<0$, $x+1>0$ бўлади.

$\forall x\in(1,1+\delta)$ учун $f^{II}(x)=12(x-1)(x+1)>0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x-1>0$, $x+1>0$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган функциянинг графиги $(-\infty,-1)$ оралиқда ботиқ, $(-1,1)$ оралиқда қаварик $(1,+\infty)$ оралиқда ботиқ, бўлади. $x=-1$ ва $x=1$ нуқталар эгилиш нуқталари бўлади.

4-§. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ АСИМПТОТЛАРИ

$y=f(x)$ функцияни қарайлик. Унинг графиги бирор эгри чизиқни тасвирласин. Баъзи ҳолларда функция графиги – эгри чизиқ шундай бўладики, x ўзгарувчи $+\infty$ (ёки$-\infty$) га интила борганда, y бирор тўғри чизиққа тобора яқинлаша боради. Одатда бундай тўғри чизиқ қаралаётган эгри чизиқнинг асимптотаси дейилади.

5–таъриф. Агар

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

бўлса, у ҳолда $y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимтотаси (оғма асимтотаси) дейилади.

6–таъриф. Агар

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-b]=0$$

бўлса, у ҳолда y=b тўғри чизиқ f(x) функция графигининг горизонтал асимтотаси деб аталади.

7—таъриф. Агар

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0$$

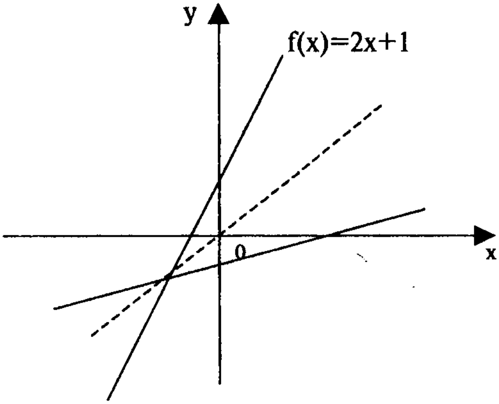
бўлса, у ҳолда x=a тўғри чизиқ f(x) функция графигининг вертикал асимтотаси деб аталади.

Масалан. $f(x)=\frac{1}{x}$ функция графиги вертикал асимтотаси x=0 тўғи чизиқдан (ОУ ўқидан) иборатдир, чунки (22-чизма)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}=0$$

f(x)=arctgx функциянинг графиги горизонтал асимтоталарси $y=\frac{П}{2}$, $y=-\frac{П}{2}$ тўғри чизиқлардан иборатдир, чунки

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty} \text{arctgx}=\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim \text{arctgx}=-\frac{П}{2}$$



(22-чизма)

6-Мисол. $f(x)=2\sqrt{x^2+4}$ функция графигининг асимтотаси топилсин.

Маълумки, функция графигининг асимтотаси y=kx+b тўғри чизиқдан иборат бўлиб,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

бўлар эди. Шу формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 2 \lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2,$$

$$b = \lim\left[f(x) - kx\right] = \lim\left[2\sqrt{x^2 + 4} - 2x\right] =$$

$$= 2\lim \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x2 + 4 + x}} = 2\lim \frac{(x^2 + 4) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} =$$

$$= 2\lim \frac{4}{\sqrt{x2 + 4} + x} = 0$$

Шундай қилиб, берилган функция графиги асимтотага (оғма асимтотага) эга ва бу асимтота y=2x тўғри чизиқдан иборат.

5-§. ФУНКЦИЯНИ ТЕКШИРИШНИНГ УМУМИЙ СХЕМАСИ

Функция ҳақида ўрганилган маълумотлар берилган у ёки бу функцияни тўлароқ тасаввур этишга имкон беради. Уни қуйида келтирилган схема бўйича текширишни тавсия этамиз:

1) Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;
2) Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;
3) Функциянинг жуфт, тоқ ва даврийлигини аниқланиш;
4) Функцияни монотонликка текшириш;
5) Функциянинг экстремумга текшириш;
6) Функция графигининг қаварик ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;
7) Функция графигининг асимтоталарини топиш;
8) Функциянинг ҳақиқий илдизларини-координата ўқларини кесиб ўтиш нуқтасини топиш (агар улар мавжуд бўлса).

7-Мисол. $f(x)=e^{-x^2}$ функция тўлиқ текширилсин.

Берилган функция (-∞, +∞) интервалда аниқланган ва узлуксиз.

Бу $f(x)= e^{-x^2}$ функция учун

$$f(-x)=e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} =f(x)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ жуфт функция. Унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$f^{I}(x)= e^{-x^2} (-2x)=-2x\, e^{-x^2}$

$f^{II}(x)=(-2xe^{-x2})^{I}=2[e^{-x^2} +x\, e^{-x^2} \cdot(-2x)]=-2x\, e^{-x^2} (e-2x^2)=2(2x^2-e)$ e^{-x^2}

Биринчи тартибли ҳосилани нолга тенглаб функциянинг стационар нуқтасини топамиз:

$$f^{I}(x)=-2xe^{-x2}=0 \Rightarrow x=0$$

Демак, $x=0$ функциянинг стационар нуқтаси.

Агар

$$f^{II}(0)=-2<0$$

бўлишни эътиборга олсак, унда берилган функцияни $x=0$ нуқтада максимумга эга бўлишни аниқлаймиз. Демак,

$$max\{f(x)\}=max\{e^{-x2}\}=e^{-0}=e$$

Равшанки,

$\forall x\in(-\infty,0)$ учун $f^{I}(x)=-2xe^{-x2}>0$

$\forall x\in(0,+\infty)$ учун $f^{I}(x)=-2xe^{-x2}<0$

бўлади. Демак, (-∞,0) да функция ўсувчи, да камаювчи.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини нолга тенглаб топамиз:

$$f^{II}(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\forall x \in (-\infty,-\frac{1}{2}) \quad учун \quad f^{II}(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$$

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad учун \quad f^{II}(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} < 0$$

$$\forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right) \quad учун \quad f^{II}(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$$

Демак, берилган функциянинг графиги $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *ва* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ ораликларда ботиқ, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ораликда қавариқ бўлади. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ва* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталари. Сўнгра

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$$

Демак, $y=0$ тўғри чизиқ *(Ox ўқи)* берилган функция графигининг горизонтал асимтотаси бўлади. $f(x)=e^{-x2}$ функция графиги – чизмада тасвирланган.

6-§. АНИҚМАСЛИКЛАРНИ ОЧИШ. ЛОПИТАЛЬ ҚОИДАЛАРИ

Берилган функциялар ҳосилаларга эга бўлса, улардан фойдаланиб, аниқмасликларни очиш мумкин. Бу йўл билан аниқмасликларни очиш Лопиталль қоидалари дейилади.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,в)$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, улар куйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1). $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2). $(a,в)$ да чекли $f^1(x)$ ва $g^1(x)$ ҳосилаларга эга ва $g^1(x)\neq 0$;

3). $\lim \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = k$ $\qquad$ *(k – чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = k$$

бўлади.

8-Мисол. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x}$ лимит ҳисоблансин.

Юқоридаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim \frac{tgx - x}{x - sunx} = \lim \frac{(tgx - x)^1}{(x - \sin x)^1} = \lim \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim \frac{1 - \cos^2 x}{\cos 2(1 - \cos x) =} \lim \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

Баъзи ҳолларда Лопиталь қоидасини қўллаш натижасида х→а да

$$\frac{f^1(x)}{g^1(x)}$$

нисбатнинг ўзи ҳам $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб қолади. Агар $f^1(x)$ ва $g^1(x)$ юқоридаги теореманинг шартларини қаноатлантирса, унда

$$\lim_{x \to a} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{II}(x)}{g^{II}(x)}$$

бўлади.

9-Мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$ лимит ҳисоблансин. Лопиталь қоидасини икки марта кетма-кет қўллаб топамиз:

$$\lim \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim \frac{(x - \sin x)^1}{(x^2)^1} = \lim \frac{1 - \cos x}{2x} =$$

$$= \lim \frac{(1 - \cos x)^1}{(2x)^1} = \lim \frac{\sin x}{2} = 0$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи экани аниқлансин:

1. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + 4$ *2.* $y=1^{(x-1)3}$

3. $y=lnx$ *4.* $y=x-cosx$

5. $y=-arctgx+x$

Қуйидаги функцияларнинг камаювчи экани аниқлансин:

6. $y=-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-x$ 7. $y=arctgx-x$

8. $y=e^{-x3}$

Қуйидаги функцияларни монотонликка текширилсин:

11. $y=x^3-3x^2+7$ 12. $y=x^4+4x-6$

13. $y=2x^3-15x^2+36x-270$ 14. $y=\frac{1}{x}$

15. $y=8x^2-enx$ 16. $y=e^{-x2}$

17. $y=x^2e^{-x2}$ 18. $y=ln(x)$

19. $y=\cos\frac{\Pi}{x}$ 20. $y=ln(1-x^2)$

21. $y=P^x+5x$ 22. $y=(1+2\sqrt{x})$

23. $y=\frac{2x}{1+x^2}$

24. x ўзгарувчининг қандай қийматларида $y=\frac{x}{1+x^2}$ функция ўсувчи бўлади?

25. x ўзгарувчининг қандай қийматларида $y=x^3(1-x)$ функция камаювчи бўлади?

26. Функциянинг максимуми таърифига кўра ушбу $y=\frac{1}{1+x^2}$ функциянинг $x=0$ нуқтада максимумга эришиши кўрсатилсин.

27. Функциянинг минимум таърифига кўра ушбу $y=x^2$ функциянинг $x=0$ нуқтада минимумга эришиши кўрсатилсин.

28. Ушбу $y=6x-x^2$ функциянинг максимумини топинг.

29. Ушбу $y=x^2-8x$ функциянинг минимумини топинг.

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматлари топилсин:

30. $y=2x^2-x^4$ 31. $y=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$

32. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ 33. $y=(1-x^2)^3$

34. $y=xe^{-x}$ 35. $y=\frac{x}{1+x^2}$

36. $y=\frac{x^2}{x^4+4}$

37. $y=xln\ x$

38. $y=x\sqrt{1-x^2}$

39. $y=e^x-e^{-x}$

40. $y=e^x\ cosx$

41. $y=x+\sqrt{3-x}$

42. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

43. $y=lnx-arctgx$

44. $y=e^{-x}-e^{-2x}$

45. $y=x-arctg2x$

46. $y=2sinx+cos2x$

47. $y=x^2lnx$

48. $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$

49. $y=x-ln(1+x)$

50. $y=x\ ln^2x$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин:

51. $y=x3-3x2-9x+35$,	$4\le x\le 4$
52. $y=x2\ \ln\ x$,	$1\le x\le 1$
53. $y=2\ \sin x+\sin 2x$,	$0\le x\le \frac{3}{2}\Pi$
54. $y=\mathrm{arctg}\ x^2$,	$-\infty<x<+\infty$
55. $y=x+\sqrt{x}$,	$0\le x\le 4$
56. $y=\sqrt{4-x^2}$,	$-2\le x\le 2$
57. $y=arctgx-\frac{1}{2}\ln x$,	$\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le\sqrt{3}$
58. $y=x-2\ln\ x$,	$1\le x\le e$
59. $y=\sin x\cdot\sin 2x$,	$-\infty<x<+\infty$
60. $y=\mathrm{arc}\ \cos x^2$,	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва эгилиш нуқталари топилсин.

66. $y=3x^2-x^3$

67. $y=x^4-12x^3+48x^2-50$

68. $y=e^x$

69. $y=ln\ x$

70. $y=xe^x$

71. $y=e^{-x2}$

72. $y=arctg\ x-x$

73. $y=ln(1+x^2)$

74. $y=l^x+(x+1)^4$

75. $y=xl^{-x}$

Қуйдаги эгри чизиқларнинг асимтоталари топилсин:

76. $y=\dfrac{2x^2-9}{x+9}$

77. $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$

78. $y=2\sqrt{x^2+4}$

79. $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$

80. $y=x\,e^{-x}$

81. $y=\mathrm{arcctg}\,x$

82. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

83. $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$

84. $y=\dfrac{2x^2+x-2}{x-1}$

85. $y=\dfrac{x^4}{(1-x)^3}$

Қуйидаги функциялар тўлиқ текширилсин ва графиклари чизилсин:

86. $y=x^2-3x+2$

87. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

88. $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

89. $y=e^{\frac{1}{x+5}}$

90. $y=\dfrac{x^2-1}{4x^2-1}$

91. $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2}$

92. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

93. $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos x$

94. $y=x^2-2\ln x$

95. $y=\ln(x^2+1)$

96. $y=x\ln^2 x$

97. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$

98. $y=1-\ln^3 x$

99. $y=(x+1)e^{2x}$

100. $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$

101. $y=x^2\sqrt{x+1}$

102. $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

Лопиталь қоидаларидан фойдаланиб, қуйидаги лимитлар топилсин.

103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{\sin x}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$

106. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xctgx-1}{x^2}$

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$

108. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$

109. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-arctgx}{x^3}$

110. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

111. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

112. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$

113. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

114. $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln x)$

115. $\lim\limits_{x\to 0}\ (1-e^{2x})\cdot ctgx$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$

117. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1-x^3}$

118. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

119. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-l^{-x}}$

120. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$

XIII БОБ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

1^0. Аниқмас интеграл тушунчаси.

1-таъриф. Агар F(x) функциянинг ҳосиласи $F^1(x)$ берилган f(x) функцияга тенг бўлса,

$$F^1(x)=f(x) \qquad (x\in(a,в))$$

ёки

$$dF(x)=f(x)dx$$

бўлса, у ҳолда F(x) функция f(x) функциянинг бошланғич функцияси деб аталади.

Масалан. 1. $f(x)=x^2$. Бу функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ бўлади, чунки

$$F^1(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^1=\frac{1}{3}3x^2=x^2=f(x)$$

2-таъриф. Ушбу ифода

$$F(x)+C \qquad (C=const)$$

f(x) функциянинг аниқмас интеграл деб аталади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,,$$

бунда $\int$ интеграл белгиси, *f(x)* интеграл остидаги функция, *f(x)dx* интеграл остидаги ифода дейилади.

1-мисол. $\int x^2dx$ аниқмас интеграл топилсин. Равшанки, $F(x)=\frac{1}{3}x^2$ функция учун

$$F^1(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^1=\frac{1}{3}3x^2=x^2$$

Демак,

$$\int x^2dx=F(x)+C=\frac{1}{3}x^3+C$$

2-мисол. $\int cosx\ dx$ интеграл топилсин.

Ҳосиласи *cos x* га тенг бўлган функция *sin x* эканини эътиборга олиб, *F(x)=sin x* бўлишни аниқлаймиз. Демак,

$$\int cosx\ dx=sinx+C$$

2^0. Аниқмас интеграл хоссалари:

1) $d[\int f(x)dx]=f(x)dx$

2) $\int dF(x)=F(x)+C. \qquad (C=const)$

3) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (k=const,\ k\neq 0)$

4) $\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3^0. Интеграллар жадвали:

1) $\int x^2 dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C, \qquad (\lambda \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad (x \neq 0)$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$

$\int e^x dx = e^x + C$

4) ∫sinx dx=-cosx+C *5) ∫cosx dx=sinx+C*

6) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg + C$ 7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 9) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$

3-мисол. $\int x\sqrt{x}dx$ интеграл ҳисоблансин.

Аввало интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Жадвалдаги 1) – формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

Демак,

$$\int x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

4-мисол. $\int (x^2+1)^2$ dx интеграл ҳисоблансин.
Равшанки,
$(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$
Унда

$$\int(x^2+1)^2dx=\int(x^4+2x^2+1)dx=\int x^4dx+2\int x^2dx+\int 1dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+x+C$$

бўлади. демак,

$$\int(x^2+1)^2dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+x+C$$

5-мисол. $\int tg^2x dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int tg^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\left[\frac{1}{\cos^2x}-1\right]dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int dx=tgx-x+C$$

Демак,

$$\int tg^2x\,dx=tgx-x+C$$

6-мисол. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx=\int(x^{-4}-x^{-5})\,dx=\int x^{-4}dx-\int x^{-5}dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\frac{x^{-5+1}}{-5+1}-C=-\frac{1}{3}x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-4}+c$$

$$=\frac{1}{4x^4}\frac{1}{3x^3}+C$$

7-мисол. $\int(\cos x-2e^x+\frac{3}{\sin^2x})dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int(\cos x-2e^x+\frac{3}{\sin^2x})dx=\int\cos xdx-2\int e^xdx+3\int\frac{dx}{\sin^2x}=\sin x-2e^x-3ctgx+C$$

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

1^0. Ўзгарувчилари алмаштириб интеграллаш усули.

Айтайлик,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

бўлсин. Бу интегралда $x=\varphi(t)$ алмаштириш бажарайлик. Унда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi^1(t)dt \qquad (x=\varphi(t))$$

бўлади. Бу аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.

8-мисол. $\int(2+3x)^{\smile}\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Шу интегралда $2+3x=t$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$2+3x=t \Rightarrow x=\frac{t-2}{3},\quad dx=\frac{1}{3}dt$$

Натижада берилган интеграл ушбу интегралга келади:

$$\int(2+3x)^5dx=\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^5dt$$

Бу интеграл эса тез ҳисобланади:

$$\int(2+3x)^5dx=\frac{1}{3}\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(2+3x)^6+C$$

9-мисол. $\int cos^2x\ sinx\ dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $cosx=t$ деб алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$cos^2x\text{-}sinx\ dx \Rightarrow -cos^2x\ d(cosx) \Rightarrow -t^2dt$$

бўлиб,

$$\int cos2x\sin xdx=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{\cos^3x}{3}+C$$

бўлади.

10-мисол. $\int e^{ax}dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $ax=t$ деб оламиз. Унда

$$e^{ax}dx=e^td\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{a}e^tdt$$

бўлиб,

$$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int e^tdt=\frac{1}{a}e^t+C=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

бўлади.

11-мисол. $\int\frac{x^3dx}{\sin^2x^4}$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $x^4=t$ деймиз. Унда

$$\int\frac{x^3dx}{\sin^2x^4}=\frac{dx^4}{4\sin^2x^4}=\frac{dt}{4\sin^2t}$$

бўлиб,

$$\int\frac{x^3dx}{\sin^2x^4}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sin^2x^4}=\frac{1}{4}(-ctgt)+C=-\frac{1}{4}ctgx^4+C$$

бўлади.

12-мисол. $\int x\sqrt{x-5}dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $\sqrt{x-5}=t$ деймиз. Унда

$$x\sqrt{x-5}dx=(t^2+5)\cdot t\quad d(t^2+5)=(t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt=(2t^4+10t^2)dt$$

бўлиб,

$$\int x\sqrt{x-s}dx=\int(2t^4+10t^2)dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+10\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5+\frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3+C$$

2^0. Бўлаклаб интеграллаш усули.

$U=U(x)$, $V=V(x)$ функциялар узлуксиз $U^1(x)$ ва $V^1(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Унда

$$\int Udv=U\cdot V-\int Vdu$$

бўлади. Бу бўлаклаб интеграллаш формуласидир.

13-мисол. $\int xe^x\,dx$ ҳисоблансин. Интеграл остидаги $xe^x\,dx$ ифодани udv кўринишда ёзиб олишимиз керак. Агар $u=x$, $dv=e^x\,dx$ дейилса, унда $xe^x\,dx=udv$ бўлади. Формуладан фойдаланиш учун du ва Vларни топмшимиз керак бўлади:

$u=x\Rightarrow du=dx,$

$dv=e^x dx\Rightarrow\int dv=\int e^x\,dx\Rightarrow V=e^x$

бўлади. Формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$$

Эслатма. Агар $\int xe^x\,dx$ интегрални формуладан фойдаланиб ҳисоблашда, $u=e^x$, $xdx=dv$ дейилганда, унда $du=e^x\,dx$, $V\frac{x^2}{2}$ бўлиб,

$$\int xe^x\,dx=\frac{x^2}{2}e^x-\int\frac{x^2}{2}e^x dx$$

бўлар эди. Натижада берилган интегрални ҳисоблаш ундан мураккаброқ, интегрални ҳисоблашга олиб келади. Шунинг учун интеграл остидаги ифодани u ва dv ларнинг кўпайтмаси сифатида ёзиб олинишга алоҳида аҳамият бериш керак.

14-мисол. $\int\ln xdx,\ (x>0)$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда *u=lnx, dv=dx* деб оламиз. Унда $du=\frac{1}{x}dx$, $u=x$ бўлади. Демак, формулага кўра

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

15-мисол. *∫e^x* sinxdx интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $U=e^x$, $dv=\sin xdx$ деб оламиз. Унда $du=e^xdx$, $V=-\cos x$ бўлиб, формулага кўра берилган интеграл қуйидагича бўлади

$\int e^x\cdot\sin xdx=-e^x\cos x+\int e^x\cdot\cos xdx$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $\int e^x\cdot\cos xdx$ га яна бўкаклаб интеграллаш формуласини қўллайми: $U=e^x$, $dv=\cos xdx$ деб оламиз. Унда $du=e^xdx$, $v=\sin x$ бўлиб,

$\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

бўлади. Натижада, ушбу тенгликка келамиз:

$\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\, dx$

Бу тенгликдан эса

$2\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x$

яъни

$$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}(e^x\sin x-e^x\cos x)+C=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

бўлиши келиб чиқади.

16-мисол. $\Im_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n=1,2.3,...)$ интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\qquad dv=dx$$

деб оламиз. Унда

$$du=\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)^1 dx=((x^2+a^2)^{-n})^1dx=-n(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx,\qquad v=x$$

бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра топамиз:

$$\Im_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \int x\cdot\left(-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$
$$\Im^n - a^2\cdot\Im^{n+1}$$

Унда берилган интеграл ушбу

$$\Im_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}} + 2n\Im_n - 2na^2\cdot\Im_{n+1}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликдан эса $\Im_{n+1}$ ни топамиз:

$$2na^2\Im_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\Im_n - \Im_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\Im n,$$

$$\Im_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\Im_n$$

Бу реккурент формуладан фойдаланиб, $\Im_1$ ни билган ҳолда бирин-кетин $\Im_2, \Im_3, \ldots$ ларни топиш мумкин. Равшанки, n=1 бўлганда

$$\Im_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

бўлади. Масалан, формуладан фойдаланиб,

$$\Im_2 = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\Im_2=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}\Im_1=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}arctg\frac{x}{a}+C$$

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ.

1^0. Содда касрларни интеграллаш. Ушбу

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^m},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\quad (m>1)$$

кўринишдаги касрлар содда касрлар деб аталади. Бунда A,B,C a,p,q – ўзгармас ҳақиқий сонлар, m-натурал сон, x^2+px+q – квадрат уч ҳад (ҳақиқий илдизларга эга эмас).

1) $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз:

$$\int\frac{A}{(x-a)}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$$

2). $\frac{A}{(x-a)^m}$ (m>1) содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$$

3). $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаш учун аввало бу касрнинг махражида турган x^2+px+q квадрат учҳадни ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{P}{2}x+(\frac{P}{2})^2=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+q-\frac{P^2}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+a^2\quad\left(a^2=q-\frac{P^2}{4}\right)$$

у ҳолда

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{(x+\frac{P}{2})^2+a^2}dx$$

бўлади. Кейинги интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x+\frac{P}{2}=t$$

Равшанки,

$$\mathrm{dx=dt},\ x=t-\frac{P}{2}$$

Натижада

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+a^2}dx = \int \frac{B(t-\frac{P}{2})+C}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \int \frac{Bt+C-\frac{P}{2}B}{t^2+a^2}dt = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{P}{2}B\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (C-\frac{Bp}{2})\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{1+(\frac{t}{a})^2} = \frac{B}{2}\ln(t^2+a^2) +$$

$$+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}arctg\ \frac{t}{a}+C = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{\sqrt{q-\frac{P^2}{4}}}arctg\ \frac{x+\frac{l}{2}}{\sqrt{q-\frac{P^2}{4}}}+C$$

4) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ (m>1) содда касрнинг интегралини ҳисоблашда x^2+px+q квадрат учҳадни 3) –ҳолдагидек ёзиб, сўнг $x+\dfrac{p}{2}=t$ алмаштириш бажарилиш.

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{(Bx+C)dx}{\left[(x+\frac{P}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}=\int\frac{B(t-\frac{P}{2})+C}{(t^2+a^2)}dt=$$

$$=B\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Бу тенгликдаги $\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл реккурент формула ёрдамида ҳисобланади.

2^0. Рационал функцияларни интеграллаш.

Ушбу

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

бутун рационал функциянинг интеграли осон ҳисобланади:

$$\int P_n(x)dx=\int[a_0+a_1x+a_2x^2+...a_nx^n]dx=$$

$$a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+...+an\frac{x^{n+1}}{n+1}+e$$

Каср рационал функция

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$$

ни интеграллаш бирмунча мураккаб бўлади.

Агар $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нотўғри каср (n>m) бўлса, унинг бутун қисми ажратилиб бутун рационал функция ва тўғри каср йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P^1{}_n(x) + \frac{P^{II}{}_n(x)}{Q_m(x)}$$

У ҳолда

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int P^1{}_n(x) dx + \int \frac{P^{II}(x)}{Q_m(x)} + dx$$

бўлади. Демак, юқоридаги $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ни интеграллаш тўғри каср $\frac{P^1{}_n(x)}{Q_m(x)}$ ни интеграллашга келади. Тўғри касрни интеграллаш учун, аввало бу касрларни содда касрлар йиғиндиси сифатида ёзиб олинади, сўнг уларнинг интеграллари топилади.

17-мисол. Қуйидаги интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x-2)^3}$$

Бу интегрални топиш учун интеграл остидаги тўғри касрни содда касрларнинг йиғиндиси шаклида ёзиб оламиз:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Бу тенгликни қаноатлантирувчи коэффициентларни топиш учун тенгликнинг икки томони $(x-1)(x-2)^3$ га кўпайтирамиз:

$$A(x-2)^3+B(x-1)(x-2)^2+C(x-1)(x-2)+Д(x-1)=x$$

Ундан

$$A(x^3-6x^2+12x-8)+B(x^3-5x^2+8x-4)+C(x^2-3x+2)+Д(x-1)=x$$

тенгламага эга бўламиз. Энди x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентларини тенглаштириб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$A+B=0,$$

$$\begin{cases} C-6A-5B=0 \\ 12A+8B-3C+Д=1 \end{cases}$$

$$2C-Д-8A-4B=0$$

Бу системани ечиб, A=-1, B=1, C=-1, ва Д=2 ларни топамиз. Демак,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}$$

Натижада

$$\frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3}=-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}+2$$

$$\int\frac{dx}{(x-2)^3}=-\ln|x-1|+\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C=$$

$$\int\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C$$

бўлади.

18-мисол. Қуйидаги интеграл топилсин:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Интеграл остидаги рационал каср содда касрга қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Бундан

$(Ax+B)(x^2+4)+(\text{Д}x+E)(x^2+1)=1$

Демак,

$(A+\text{Д})x^3+(B+E)x^2+(4A+\text{Д})x+(4B+E)=1$

Бу тенгликдаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентларини тенглаштириб

A+Д=0
4A+Д=0
B+E=0
4B+E=1

системага эга бўламиз. Бу системадан эса A=0, Д=0, $B=\frac{1}{3}$,

$E=-\frac{1}{3}$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}arctgx - \frac{1}{6}arctg\frac{x}{2} + \mathrm{C}$$ булади.

3^0. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш. Ушбу

$$\int R(x,(ax+b)^{\lambda},(ax+b)^{\beta},...)dx$$

$$\int R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\lambda},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\beta},...)dx$$

интеграллар

ax+b=t^k, $\quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

алмаштиришлар ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келади.

19-мисол. Қуйидаги интеграллар топилсин:

1). $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ $\qquad$ 2). $\int \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

3). $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$ $\qquad$ 4). $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

5). $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^3+2}}$

1). x=t^6 алмаштириш бажарамиз. Бу ҳолда dx=6t^{5}dt бўлди. Демак,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6(t - arctgt) + C =$$

$$= 6(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}) + C$$

2). $t^2 = \frac{x-2}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда

$x=\frac{2}{1-t^2}$ ва $dx=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx=\int\frac{1}{2}(1-t^2)t\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt=2\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=2\int\frac{t^2dt}{1-t^2}$$

$$=2\int\frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}-2\int dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2t+C=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}+C$$

3). $t^3=2x-3$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x=\frac{1}{2}(t^3+3)$ ва $dx=\frac{3}{2}t^2dt$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3+1}}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{3}{2}\int dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{3}{2}t2-\frac{3}{2}t+\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{3}}+\ln\left|\sqrt[3]{2x-3}+1\right|+C$$

4). Интеграл остидаги ифода x ва $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ га нисбатан рационал функциядир. Шунинг учун $t\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ алмаштиришни бажарамиз.

Бундан

$x=\frac{2-2t^3}{1+t}$, $2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$ бўлади.

$$\int\frac{2}{(2-x)2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int\frac{2(1+t^3)t12t^2}{16t^6(1+t^3)}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$$

5). $t^2=x^2+2$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^2=t^2-2$ ва $xdx=tdt$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{(t^2-2)tdt}{t}=\int(t^2-2)dt=\int t^2dt-2\int dt=$$

$$=\frac{1}{3}t^3-2t+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}-2\sqrt{x^2+2}+C$$

4^0. Тригонометрик функцияларни интеграллаш.

1) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик, бу ерда R(sinx, cosx) ифода sinx ва cosx ларнинг рационал функцияси

Агар cosx нинг ишораси ўзгариш билан R(sinx, cosx) нинг ишораси ўзгарса, унда t=sinx алмаштириш ёрдамида R(sinx, cosx) функция t нинг рационал функциясига келади.

Агар sinx нинг ишораси ўзгариши билан R(sinx, cosx) функциянинг ишораси ўзгарса унда t=cosx алмаштириш орқали R(sinx, cosx) функция t нинг рационал функциясига келади.

Агар sin x, cos x ларнинг ишоралари бир вақтда ўзгарганда R(sinx, cosx) функциянинг ишораси ўзгармаса, t=tgx алмаштириш ёрдамида R(sinx, cosx) функция t нинг рационал функциясига келади.

Ушбу $t=tg\frac{x}{2}$ алмаштириш ёрдамида R(sinx, cosx) функциянинг t нинг рационал функциясига келади.

2. $\int\sin^{2n}xdx,\quad\int\cos^{2n}xdx,\quad\int\sin^{2n}x\ \cos^{2n}xdx$

кўринишдаги интегралларни топишда

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\sin x \ \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

формулалар ёрдамида интеграл остидаги функциянинг даражаси пасайтириб борилади ва охири sinkx ва coskx функцияларнинг тоқ даражасига келтирилади.

3). $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ кўринигдаги интеграллар t=tgx ва t=ctgx алмаштиришлар ёрдамида топилади.

4). $\int \sin ax \ \cos bx dx$, $\int \sin ax \ \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$ кўрнишдаги интеграллар

$$\sin ax \ \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \ \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos x \ \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

формулалар ёрдамида топилади.

5) $\sqrt{a^2+x^2}$ ифодалар қатнашган интегрални топишда мос равишда *x=a tg t, x=a sin t* каби белгилашдан фойдаланиш қулайдир.

20-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг.

1) $\int \sin^5 x dx$

2) $\int \sin^4 x \ \cos x dx$

3) $\int \cos^4 x dx$

4) $\int tg^2 x dx$

5) $\int \sin^3 x \ \cos^3 x dx$

6) $\int \sin^3 x \ \sin^4 x dx$

7) $\int \cos\frac{4}{3}x \ \cos 3x dx$

1) $\int \sin^5 x dx$ интеграл I турдаги интегралнинг иккинчи хили бўлганлиги учун аввал берилган интегрални

$$\int \sin^5 xdx = \int \sin^4 x \cdot \sin xdx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin xdx$$

кўринишда ёзиб олиб, кейин t=cosx деб белгиласак, берилган интеграл

$$\int \sin^5 xdx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^3+t^4)dt$$

кўрнишга келади. Демак,

$$\int \sin^5 xdx = -\int dt + 2\int t^2 dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C =$$

$$-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

бўлар экан.

2) $\int \sin^4 x\cos xdx$ интегрални топиш учун t=sinx алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда dt=cosxdx бўлгани учун

$$\int \sin^4 x \cdot \cos xdx = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

бўлади.

3) $\int \cos^4 xdx$ интегрални топиш учун II қоидани қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx + \int \cos 2xd(2x) + \int \cos^2 2xdx\right]$$

Бу интеграллардан биринчи иккитаси жадвалдаги интеграллардир, учинчиси эса яна II қоидадан фойдаланиб топилади:

$$\int \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4xd(4) =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

Бу ифодани юқоридаги тенгликка қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

4) $\int tg^2 xdx$ интегрални топиш учун III қоидани қўлланамиз. Демак,

$$\int tg^2 x dx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t - arctgt + C = tgx - x + C$$

бўлар экан.

5)

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

Энди t=sin t алмаштиришни бажариб топамиз

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \int t^3 (1 - t^2) dt = \int t^3 dt - \int t^5 dt =$$

$$= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C$$

6) $\int \sin 3x \ \sin 4x dx$ интегрални IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(3-4)x - \cos(3+4)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$$

7) $\int \cos \frac{4}{3} x \ \cos 3x dx$ интеграл ҳам IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int cos \frac{4}{3} x \ \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos(\frac{4}{3} + 3)x + \cos(\frac{4}{3} - 3)x \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\cos \frac{13}{3} x + \cos \frac{5}{3} x \right] dx = \frac{1}{2} \ \frac{3}{13} \sin \frac{13}{3} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} x + C =$$

$$= \frac{3}{26} \sin \frac{13}{3} x + \frac{3}{10} \sin \frac{5}{3x} + C$$

Мисол ва масалалар

Интеграллаш жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги аниқмас интеграллар ҳисоблансин:

1. $\int (2 - 3x^4) dx$ 11. $\int \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} dx$

2. $\int(4x^3+3x^2+5x-4)dx$

3. $\int\frac{dx}{x^3}$

4. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

5. $\int\frac{x^5-x^3+1}{x^2}dx$

6. $\int\frac{dx}{3\sqrt{x}}$

7. $\int\frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}dx$

8. $\int\sqrt[3]{x^2}dx$

9. $\int(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2dx$

10. $\int(x^3+3^x)dx$

12. $\int\frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$

13. $\int\frac{\sin 2x}{\sin x}dx$

14. $\int\frac{1}{\sin^2 x\ \cos^2 x}dx$

15. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

16. $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$

17. $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$

18. $\int\frac{x^4-1}{x^2+1}dx$

19. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

20. $\int\frac{3-2ctg^2x}{\cos^2 x}dx$

Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

21. $\int(x-3)^{10}dx$

22. $\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

23. $\int\sqrt{3x+5}dx$

24. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

25. $\int\frac{xdx}{1+x^2}$

31. $\int xe^{x^2}dx$

32. $\int e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

33. $\int x^2\sin 3x^3dx$

34. $\int\frac{\ln x}{x}dx$

35. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

26. $\int x\sqrt{2x^2+1}dx$

27. $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$

28. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $\int tgxdx$

30. $\int ctgxdx$

36. $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3}$

37. $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x^2}$

38. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{n}}$

39. $\int\cos^3 x\cdot\sqrt{\sin x}dx$

40. $\int\frac{dx}{\sin x}$

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб интеграллар ҳисоблансин:

41. $\int x\sin xdx$

42. $\int x\cdot e^{-x}dx$

43. $\int arctgxdx$

44. $\int\arcsin xdx$

45. $\int x\cos xdx$

46. $\int\ln xdx$

47. $\int arctg\sqrt{x}dx$

48. $\int x\ln xdx$

49. $\int(x^2+1)e^x dx$

50. $\int xarctgxdx$

51. $\int x2e^{-2x}dx$

52. $\int x^2\ln xdx$

53. $\int\sin x\cdot e^x dx$

54. $\cos x\cdot e^x dx$

55. $\int\sqrt{x}\ln^2 xdx$

56. $\int\frac{\ln_x}{x^2}dx$

57. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$

58. $\int\sin x\ln(tgx)dx$

59. $\int e^{2x}\cdot\sin^2 xdx$

60. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

61. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

71. $\int\frac{dx}{x^3+4x}$

62. $\int\frac{dx}{x^2-5x+4}$

63. $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$

64. $\int\frac{2x+3}{(x-2)\ (x+5)}dx$

65. $\int\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+5)}dx$

66. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

67. $\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$

68. $\int\frac{x}{x^3-1}dx$

69. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}$

70. $\int\frac{dx}{x^4-1}$

72. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

73. $\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx$

74. $\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}$

75. $\int\frac{1}{x^4+1}dx$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

76. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

77. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

78. $\int\frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$

79. $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$

80. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2\cdot\sqrt{x}}$

81. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$

82. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$

83. $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

84. $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

85. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

86. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ 87. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$

88. $\int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}dx$ 89. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

90. $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$ 91. $\int\sqrt{x^2-2x+2}dx$

92. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}dx$ 93. $\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

94. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ 95. $\int\sqrt[3]{x-x^2}dx$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

96. $\int\sin^4 xdx$ 97. $\int\cos^3 xdx$

98. $\int\frac{dx}{\sin 2x}$ 99. $\int\frac{dx}{\cos 2x}$

100. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^4 x}$ 101. $\int tg^3xdx$

102. $\int\sin 2x\cos 4xdx$ 103. $\int\cos x\cdot\cos 4xdx$

104. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin 4x}dx$ 105. $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$

106. $\int\frac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx$ 107. $\int\frac{tgx}{tgx-3}dx$

108. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ 109. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$

110. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

XIV. БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. Аниқ интеграл ва унинг хоссалари

1^0. Аниқ интеграл тушунчаси.

Айтайлик, f(x) функция [a,b] сегментда берилган бўлсин. Бу [a,b]сегментни

$x_0, x_1,x_2,..., x_n$ $(a =x_0<x_1<x_2<...<x_n=b)$

нуқталар ёрдамида n та

$[x_0,x_1], [x_1,x_2],..., [x_k, x_{k+1}],..., [x_{n-1},x_n]$

бўлакка бўламиз. Сўнг $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ деб $\max\{\Delta x_k\}$ ни λ билан белгилаймиз: $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да оламиз. Берилган $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(K_k =_k)$ ни Δx_k га кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\cdot\Delta x_k = f(\zeta_k)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_k)\cdot\Delta x_1 + ... + f(\zeta_k)\cdot\Delta x_k + .. f(\zeta_k)\cdot\Delta x_{n-1}$$

Уни f(x) функциянинг интеграл йиғиндиси дейилади ва δ орқали белгиланади:

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(K_k =_k)\cdot\Delta x_k$$

таъриф. Агар $\lambda \to 0$ да f(x) функциянинг интеграл йиғиндиси δ чекли лимитга эга бўлса, бу лимит f(x) функциянинг аниқ интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(K_k)\cdot\Delta x_k$$

Агар f(x) функция [a,в] сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\lambda \to 0$ да интеграл йиғиндиси δ чекли лимитга эга бўлади, яъни f(x) функция [a,в] да интегралланувчи бўлади. Бу ҳолда интеграл йиғиндининг лимити [a,в] сегментнинг бўлиниш усулига ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да $K_k=_k$ нуқтаси олинишга боғлиқ бўлмайди.

1-Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 x^2 dx$$

интегрални таърифга кўра ҳисобланг.

Равшанки, бу ҳолда $f(x)=x^2$, $a=0$, b=1. [0,1] сегментни

Равшанки, бу ҳолда f(x)=x², $a=0$, b=1. [0,1] сегментни

$$x_0=0,\ \ x_1=\frac{1}{n},\ \ x_2=\frac{2}{n},\dots,x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ \ x_n=\frac{n}{n}=1$$

нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка ажратиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да $1_k=x_k$ деб оламиз. У ҳолда

$$\delta=\sum_{k=0}^{n-1} f(K_k)\cdot\Delta x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^2{}_k=\frac{1}{n}(x_0{}^2+x^2{}_1+\dots+x^2{}_{n-1})=$$

$$=\frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\quad .$$

2^0. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари. Айтайлик, f(x) ва g(x) функциялар [a,b] сегментда берилган бўлиб, улар шу сегментда узлуксиз бўлсин. Унда қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

1). $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2). $\int_a^a f(x)dx=0$

3). $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4). $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

5). $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx \qquad (k=const)$

6) Агар $\forall x \in [a,b]$да $\quad м \le f(x) \le M$ бўлса, у ҳолда

$$m \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b - a)$$

бўлади.

2-Мисол. Ушбу

$$\int_0^{\frac{П}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}$$

интегрални ҳам қуйидан ҳам юқоридан баҳоланг.

Равшанки, ҳар доим

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

бўлади. Унда

$$\frac{1}{5 + 3\cos^2 x} \le \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5 + 3\cos^2 x} \ge \frac{1}{8}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{1}{8} \le \frac{1}{5 + 3\cos^2 x} \le \frac{1}{5}$$

формуладан фойдаланиб

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{П}{2} \le \int_0^{\frac{П}{2}} \frac{1}{5 + 3cos^2 x} dx \le \frac{1}{5} \cdot \frac{П}{2}$$

яъни

$$\frac{П}{16} \le \int_0^{\frac{П}{2}} \frac{1}{5 + 3cos^2 x} dx \le \frac{П}{10}$$

бўлишни топамиз.

2. Аниқ интегрални ҳисоблаш.

1^0. Ньютон – Лейбниц формуласи. f(x) функция [a,в] сегментда берилган ва узлуксиз бўлиб, шу сегментда бошланғич F(x) функцияга ($F^1(x)=f(x)$) эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(в) - F(a)$$

бўлади. Формула Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

3-Мисол. Ушбу

$$\int_{\frac{П}{4}}^{\frac{П}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

интегрални ҳисобланг.

$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ функциянинг бошланғич функцияси

$$F(x)=-ctgx$$

бўлади. Унда Ньютон-Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{\frac{П}{2}}^{\frac{П}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx \Big|_{\frac{П}{2}}^{\frac{П}{2}} = -(ctg\frac{П}{2} - ctg\frac{П}{2}) = -(0-1) = 1$$

2^0. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Айтайлик, U=U(x) ва V=V(x) функциялар [a,в] сегментда аниқланган, узлуксиз $U^1(x)$ ва $V^1(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)\cdot u(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

бўлади. Бу формула аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Фараз қилайлик, f(x) функция [a,b] сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x = \varphi(t)$ функция эса қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1. φ (t) функция $[\lambda,\beta]$ да аниқланган ва узлуксиз.
2. $\varphi(\lambda)=a$, $\varphi(\beta)=b$
3. φ (t) функция $[\lambda,\beta]$ да узлуксиз φ^1 (t) ҳосилага эга. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\lambda^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi^1(t)dt$$

бўлади.

Бу формула ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш формуласи дейилади.

4-Мисол. 1. Ушбу

$$\int_e^{e^2} x\ln x dx$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

Берилган интегралда

$$u=\ln x, \qquad dv=xdx$$

деб топамиз:

$$du=\frac{1}{x}dx, \qquad v=\frac{x^2}{2}$$

Унда

$$\int_e^{e^2} x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\int_e^{e^2}-\frac{1}{2}\int_e^{e^2}xdx=\frac{1}{2}$$

$$\left[e^4\ln e^2-e^2\ln e-\left(\frac{x^2}{2}\right)^{e^2}{}_e\right]=\frac{1}{2}\left(2e^4-e^2-\frac{e^4}{2}+\frac{e^2}{2}\right)=\frac{1}{4}(3e^2-1)\cdot e^2$$

бўлади.

5. Ушбу

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегрални ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз: Агар x=sint дейилса, унда dx=cost dt ва $t\in\left[0,\frac{\Pi}{2}\right]$ бўлиб,

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2x}\cdot\cos tdt=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\cos^2tdt=$$

$$=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2t\right]dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin2t\right]^{\frac{\Pi}{2}}{}_0=\frac{\Pi}{4}$$

бўлади.

3^0. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш. f(x) функция [а,в] сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли қуйидаги формулалар ёрдамида тарқибий ҳисоблансинлди:

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласи: (к=0,1,2,...n-1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1}))$$

б) Трапециялар формуласи:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f_{(x_{n-1})})\right]+f(x_n)$$

в) Симпсон формуласи:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0)+f(x_{2n}))+4(f(x_1)+f(x_3)+\dots+f(x_{2n-1}))]$$
$$+2(f(x_2)+f(x_4)+\dots+f(x_{2n-2}))$$

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x2}dx$$

интегрални тақрибий ҳисобланг.

[0,1] сегментни $x_0=0$; $x_1=0,2$; $x_2=0,4$; $x_3=0,6$; $x_4=0,8$; $x_5=1,0$ нуқталар ёрдамида 5 та тенг бўлакка бўламиз:

Сўнг $f(x)=e^{-x2}$ функциянинг шу нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз.

$f(x_0)=f(0)=e^0=1,00000$
$f(x_1)=f(0,2)\approx 0,96079$
$f(x_2)=f(0,4)\approx 0,85214$
$f(x_3)=f(0,6)\approx 0,69768$
$f(x_4)=f(0,8)\approx 0,52729$
$f(x_5)=f(1,0)\approx 0,36788$

Унда тўғри тўртбурчак формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x2}dx \approx \frac{1-0}{5}[f(o)+f(x_1)+(x_2)+f(0,6)+f(0,8)]\approx$$

$$\approx \frac{1}{5}(1,00000+0,96079+0,85214+0,69768+0,52729)=0,80758$$

бўлади. Демак

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,80758$$

Бу интеграл учун трапеция формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74805$$

Симпсон формуласи бўйича эса

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74682$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги аниқ интегралларни таъриф бўйича ҳисобланг.

1. $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

2. $\int_0^1 e^x dx$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

5. $\int_0^{0,8} \cos x dx$

6. $\int_{0,1}^{1,7} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

7. $\int_0^1 \frac{arctgx}{x}dx$

Қуйидаги интегралларни баҳоланг.

8. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx$

9. $\int_{-1}^1 \frac{1}{8+x^2}dx$

10. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{10+3cosx}dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}dx$

12. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0{,}5\cos x}dx$

13. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$

14. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$

15. $\int_1^e \frac{1}{\ln x+2}dx$

Қуйидаги интегралларни Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб ҳисобланг:

16. $\int_{0}^{4}(1+e^{\frac{x}{4}})dx$ 17. $\int_{-1}^{1}(1-\sqrt[3]{x^2})dx$

18. $\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ 19. $\int_{0}^{\frac{\Pi}{4}}\cos^2 xdx$

20. $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ 21. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

22. $\int_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ 23. $\int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$

24. $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^4}dx$ 25. $\int_{0}^{2}|1-x|dx$

Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисобланг:

26. $\int_{0}^{\frac{\Pi}{2}}x\cos x\ \ dx$ 27. $\int_{0}^{1}\arcsin x\ \ dx$

28. $\int_{1}^{2}(3x+2)\ln x\ \ dx$ 29. $\int_{}^{1}xe^{-x}dx$

30. $\int_{0}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx$ 31. $\int_{1}^{e}\ln x\ \ dx$

32. $\int_{0}^{1}x^3e^{2x}dx$ 33. $\int_{0}^{\Pi}e^x\sin x\ \ dx$

34. $\int_{0}^{2\Pi}x^2\cos x\ \ dx$ 35. $\int_{1}^{\sqrt{3}}arctg\sqrt{x}dx$

Қуйидаги интегралларни ўзгарувчини алмаштириш формуласидан фойдаланиб ҳисобланг:

36. $\int\limits_1^2 \sqrt{x+1}dx$

37. $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

38. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

39. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

40. $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

41. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(4x+1)\sqrt{x}}dx$

42. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$

43. $\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx$

44. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}dx$

45. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

Қуйидаги интегралларни тақрибий ҳисобланг:

47. $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$

48. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

49. $\int\limits_0^1 \frac{arctgx}{x}dx$

50. $\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin x \ dx$

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

I^0. Текис шаклнинг юзини ҳисоблаш. Текисликда юоридан y=f(x) (f(x)≥0, x∈[a,b]) узлуксиз функция графиги, ён томондан x=a, x=в тўғри чизиқлар, пастдан 0_x ўқи билан чегараланган шакл эгри чизиқли трапецияни юзи ушбу

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx$$

формула билан топилади.

Текисликда юқоридан $f_2(x)$ узлуксиз функция графиги,ён томонлардан x=a, x=в тўғри чизиқлар, пастдан $f_1(x)$ узлуксиз функция графиги ($f_2(x)\geq f_1(x)$, x∈[a, b]) билан чегараланган шаклнинг юзи қуйидаги

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

формула билан топилади.

7-Мисол. I. Ушбу $y=4x-x^2$ парабола ва 0х ўқи билан чегараланган шаклнинг юзини топинг:

Аввало берилган параболанинг 0х ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} y=4x-x^2 \\ y=0 \end{cases}$$

Равшанки, бу системанинг ечими (0,0) ва (4,0) бўлади. Демак, парабола 0х ўқи билан (0,0) ва (4,0) нуқталарда кесишади.

Унда шаклнинг юзи

$$S=\int_0^4 (4x-x^2)dx=(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^4=\frac{32}{3}$$

бўлади.

8-Мисол. Ушбу

$$f_1(x)=\frac{1}{2p}x^2, \qquad f_2(x)=\sqrt{2}px \ (p>0)$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу ҳолда шакл $y=\sqrt{2px}$, $y=\frac{1}{2p}x^2$ $(p>0)$ параболалар билан чегараланган. Қаралаётган параболалар (0,0) ҳамда (2p, 2p) нуқталарда кесишади ва $\forall x\in[0, 2p]$ да $\sqrt{2px}\geq\frac{1}{2p}x^2$ бўлади.

Формуладан фойдаланиб томамиз:

$$S=\int_0^{2p}(\sqrt{2px}-\frac{1}{2p}x^2)dx=(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p})\Big|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2$$

2^0. Текисликда эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш.

y=f(x) функция [a,в] сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг графиги $\overline{AB}$ эгри чизиқни-ёйни ифодалансин. Агар f(x) функция [a.в] сегментда узлуксиз $f^1(x)$ ҳосилага эга бўлса, ёй узулиги ушбу

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f^{1^2}(x)} \ \ dx$$

формула билан топилади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзини ҳисобланг.

1. $y=-x^2$, $x+y+2=0$
2. $y=\frac{x^2}{2}$, $x=1$, $x=3$
3. $y=2x-x^2$, $x+y=0$.
4. $y=2x^2+3x-9$, $y=0$
5. $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$
6. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, $x=0$, $y=0$, $x=a$ $(a>0)$
7. $y=\frac{8}{4+x^2}$, $y=\frac{x^2}{4}$
8. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$
9. $y=2^x$, $y=2$, $x=0$
10. $y=x-\frac{\Pi}{2}$, $y=\cos x$, $x=0$
11. $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{10}{3}-x$ $(x\geq 1)$
12. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$
13. $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$, $x-2y+9=0$
14. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг берилган ораликдаги ёйи узунлиги ҳисобланг:

16. $y=\frac{x^2}{2}-1$, $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$
17. $y=\ln\cos x$, $0\leq x\leq a$ $(a<\frac{\Pi}{2})$
18. $y=\ln(x^2-1)$, $2\leq x\leq 5$

19. $y=2(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}),\quad 0\le x\le 4$

20. $y=x^3$, $0\le x\le 1$
21. $y^2=(x-1)^2$, $2\le x\le 5$

22. $y=\ln x,\qquad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

23. $y=^{\frac{3}{2}},\qquad 0\le x\le 4$

24. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x},\qquad 0\le x\le\dfrac{5}{3}a$

25. $y^2=2px,\qquad 0\le x\le\dfrac{p}{2}$

XV БОБ. ҲОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР.

I-§. Чегаралари чексиз ҳосмас интеграллар.

1^0. Ҳосмас интеграл тушунчаси.

f(x) функция $[a,+\infty]$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин.

1-таъриф. Агар $y\to+\infty$ да

$$F=(y)\int_a^y f(x)dx\ (a<y<\infty)$$

функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лиммит f(x) функциянинг $[a,+\infty)$ оралиқдаги ҳосмас интеграли деб аталади ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{y\to+\infty}F(y)=\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)dx$$

Агар $y \to +\infty$ да $F(y)=\int_a^y f(x)dx$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли булса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $y \to +\infty$ да $F(y)$ функциянинг лимити чексиз булса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Юқоридаги каби таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{a} f(x)dx, \quad (-\infty < y < a);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{y \to -\infty \\ t \to +\infty}} \int_{y}^{t} f(x)dx, \quad (-\infty < y < t < +\infty);^{1}$$

1-Мисол.1. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ ҳосмас интеграл ҳисоблансин.

Чегараси чексиз ҳосмас интеграл таърифидан фойдаланиб топамиз :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_0^{y} e^{-2x}\,dx = \lim_{y \to +\infty} (-1/2) \int_0^{y} e^{-2x}\,d(-2x) = -$$

$$1/2 \lim_{y \to +\infty} e^{-2x} \Big|_0^y = -1/2 \lim_{y \to +\infty} (e^{-2y} - e^{0}) = 1/2$$

Демак, берилган ҳосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = 1/2$$

2-Мисол. J= $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ (α >0, a >0) интеграл ҳисоблансин.

Агар α >1 булса, у ҳолда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_0^y X^{-\alpha}\, dx = \lim\limits_{y\to+\infty}$ $(\frac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1})=$

$= \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} (y^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}) = -\frac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}$

бўлади. Бу эса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ҳосмас интегралнинг яқинлашувчи эканлигини билдиради.

Агар α>1 бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y x^{-\lambda} dx= \lim\limits_{y\to+\infty} (y^{1-\alpha}-$

$a^{1-\alpha})\frac{1}{1-\alpha}=+\infty$

бўлади. Ҳосмас интеграл узоқлашувчи. Агар α=1 бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y \frac{dx}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} (\ln y-\ln a)=+\infty$$

бўлади. Бу интеграл узоқлашувчи

Шундай қилиб, берилган $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (α>0, a>0) ҳосмас интеграл α>1 бўлганда яқинлашувчи, α≤1 бўлганда узоқлашувчи бўлади.

2^0. Асосий ҳоссалари

1) Агар $\int\limits_a^{+\infty}$ f(x)dx яқинлашувчи ва k ўзгармас сон бўлса, унда

$\int\limits_a^{+\infty}$ k f(x) dx ҳам яқинлашувчи бўлади ва

$$\int\limits_a^{+\infty} k\, f(x)\, dx = k \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

2) Агар $\int\limits_a^{+\infty}$ f(x) dx ва $\int\limits_a^{+\infty}$ g(x) dx интеграллар яқинлашувчи бўлса,

у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty}$ [f(x)±g (x)] dx интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва

$$\int\limits_a^{+\infty} [f(x) \pm g\,(x)] = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

3). Агар $\forall x \in [a_1 + \infty]$ да $0 \le f(x) \le g(x)$ бўлиб, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлади.

3-Мисол. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ҳосмас интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

Ихтиёрий x≥1 бўлганда $e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ бўлади. Равшанки $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интеграл яқинлашувчи. Унда юқорида айтилганига кўра $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ҳосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Маълумки, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

интеграл мавжуд. Унда интегралнинг 2-ҳоссасидан фойдаланиб,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

қуйидаги $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx}$

ҳосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

2-§.ЧЕГАРАЛАНМАГАН ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРИ

f(x) функция $[a,\mathrm{b})$ ярим интервалда берилган ва узлуксиз бўлиб, (t,b) да (a<t<b) чегараланмаган бўлсин.

2-таъриф. Агар t→b-0 да Q(t)= $\int_a^t f(x)dx$, (a<t<b)

функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган f(x) функциянинг $[a,\mathrm{b})$ оралиқдаги ҳосмас интеграли деб аталади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} Q(t) = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Агар t→b-0 да Q(t)= $\int_a^t f(x)dx$ нинг лимити мавжуд ва чекли

бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ ҳосмас интеграл яқинлашувчи

дейилади.

Агар t→b-0 да Q(t) функциянинг лимити чексиз бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ ҳосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

4-Мисол. 1. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

x=1 нуқта атрофида f(x)=$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ функция чегараланмаган. Демак, берилган интеграл чегараланмаган функциянинг ҳосмас интеграли. Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

бўлади.

Агар $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$

$$\int_0^t (1-x)^{\frac{-1}{2}} d(1-x) = -\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^t = -2\left[(1-t)^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}\right] = 2 - 2\sqrt{1-t}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}(2 - 2\sqrt{1-t}) = 2$$

бўлиб,

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$=2

эканлигини топамиз. Демак, берилган ҳосмас интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг.

5-Мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ интегрални қарайлик.

x=0 нуқта $f(x)=\frac{1}{x}$ функциянинг махсус нуқтаси. Ҳосмас интегралнинг таърифига кўра

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+0}[\ln 1-\ln t]=+\infty$$

бўлади. Демак, берилган ҳосмас интеграл узоқлашувчи.

6-Мисол. Ушбу $A=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $B=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (α>0)

интеграллар яқинлашувчиликка текширилсин.

Бу чегараланмаган функцияларнинг ҳосмас интегралларидир.

а) α≠1, бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b(x-a)^{-\lambda}d(x-a)=$$

$$=\lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^b=\lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-a}\left[(b-a)^{1-\alpha}-(t-a)^{1-\alpha}\right]$$

бўлиб, бу лимит α<1 булганда чекли, α>1 булганда эса чексиз бўлади.

б) α=1 бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_a^b\frac{dx}{x-a}\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{d(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to a+0}[\ln(t-a)]_t^b=+\infty$$

бўлади. Демак,

$$A=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}\quad(\alpha>0)$$

интеграл α<1 бўлганда яқинлашувчи, α≥1 бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Ҳудди шунга ўхшаш,

$$B=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}\quad(\alpha>0)$$

ҳосмас интеграл α<1 бўлганда яқинлашувчи, α≥1 бўлганда эса узоқлашувчи бўлиши кўрсатилади.

МИСОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР.

Қуйидаги чегаралари чексиз ҳосмас интегралларни ҳисобланг.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} x^2 dx$

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$

3. $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

4. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

5. $\int\limits_{-\infty}^{0} x e^{x} dx$

6. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

8. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Қуйидаги чегараланмаган функциянинг ҳосмас интегралларини ҳисобланг:

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

12. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$

15. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$

16. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

17. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x dx}{x^2-1}$

18. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

19. $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$

20. $\int\limits_{0}^{-\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

XVI БОБ. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР.

1-§. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1^0.Функция ва унинг лимити тушунчалари.

Текисликда бирор М тўплам берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар М тўпламдан олинган ҳар бир (x,y) нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий z сони мос қуйилган бўлса, у ҳолда М тўпламда икки аргументли функция берилган деб аталади. Уни

$$z = f(x,y)$$

каби ёзилади. Одатда М тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси деб аталади. x ва y (эркли ўзгарувчилар) функция аргументлари, Z эса x ва y ларнинг функцияси дейилади.

1-Мисол. Текисликдаги ҳар бир (x,y) нуқтага шу нуқта координаталари x ва y нинг кўпайтмасини мос қўядиган қоида берилган бўлсин.

Натижада

$$z = f(x,y) = xy$$

функцияга эга бўламиз.

2-Мисол.Қуйидаги функциялар икки аргументли функцияларга мисолдир:

$$Z = x^2 + y^2,\ Z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ Z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

z$= f(x,y)$ функция М тўпламда берилган бўлиб, х ва у ўзгарувчиларнинг ҳар бири (α,β) интервалда берилган функциялар бўлсин:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (t \in (\alpha,\beta))$$

Бунда t ўзгарувчи (α,β) оралиқда ўзгарганда мос х ва у лардан тузилган (x,y) жуфтликлар М тўпламга тегишли бўлсин. Натижада ушбу

$$Z = f(x,y) = f(\varphi(t),\psi(t))$$

функцияга эга бўламиз. Бу ҳолда Z ўзгарувчи t ўзгарувчининг мураккаб функцияси деб аталади.

2-таъриф. Маркази (x_0,y_0) нуқтада, радиуси $\varepsilon(\forall\varepsilon > 0)$ га тенг бўлган очиқ доира (x_0,y_0) нуқтанинг атрофи (доиравий атрофи) деб аталади ва $U_\varepsilon((x_0,y_0))$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon((x_0,y_0)) = \{(x,y) \in R^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

Агар (x_0,y_0) нуқтанинг ҳар бир атрофида М тўпламнинг (x_0,y_0) нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, у ҳолда (x_0,y_0) нуқта М тўпламнинг лимит нуқтаси деб аталади.

3-таъриф. Агар М тўпламнинг нуқталаридан тузилган (x_0,y_0)га интилувчи ҳар қандай $\{(x_n,y_n)\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n,y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим битта А сонга интилса, бу А сон f(x,y) функциянинг (x_0,y_0) нуқтадаги лимити деб аталади ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

каби ёзилади.

Функция лимитини қуйидагича таърифласа ҳам бўлади.

4-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, d((x,y), (x_0,y_0))$< \delta$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x,y)$\in$ М нуқталар учун

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда А сон f(x,y) функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити деб аталади ва юқоридаги

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

каби белгиланади.

3-Мисол. f(x,y) = $x^2 + y^2$ функцияси (0;0) нуқтадаги лимити топилсин.

(0;0) нуқтага интилувчи $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетликни оламиз: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = (0;0)$. Юқорида айтилганига кўра, бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

бўлади.

Берилган функциянинг (x_n, y_n)даги қийматларидан тузилган кетма-кетлик

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{x_n^2 + y_n^2\}$$

бўлиб, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ да $f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \to 0$ бўлади.

Демак,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) = 0$$

2^0.Асосий ҳоссалари.

1)Агар $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ f(x,y) мавжуд бўлса, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ kf(x,y) ҳам мавжуд ва $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ f(x,y) = к $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ f(x,y) бўлади (к = const).

2). Агар $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} q(x,y) = B$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \pm q(x,y)] = A \pm B$$

бўлади.

3). Агар $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} q(x,y) = B$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \cdot q(x,y)] = A \cdot B$$

бўлади.

4). Агар $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} q(x,y)=B$ бўлиб,

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} q(x,y)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f(x,y)}{q(x,y)}=\dfrac{A}{B}$ бўлади.

2-§. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

z=f(x,y) функция M тўпламда берилган бўлиб, (x_0,y_0) $((x_{01},y_0)\in M)$ нуқтада шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

5 – таъриф. Агар

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

бўлса, у ҳолда f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз деб аталади.

6 – таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $d((x,y),((x_0,y_0))<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x,y)\in M$ нуқталар учун

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Функция узлуксизлиги унинг орттирмаси ёрдамида ҳам таърифланиши мумкин.

7 – таъриф. Агар аргумент орттирмалари Δx ва Δy нолга интилганда функциянинг тўлиқ орттирмаси $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ ҳам нолга интилса, у ҳолда f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз деб аталади.

Агар f(x,y) функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу M тўпламда узлуксиз деб аталади.

4-Мисол. $f(x,y)=x^2+y^2$ функцияни қарайлик.

Ихтиёрий $(x_0,y_0)\in R^2$ нуқтани ҳамда $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in R^2$ ни олиб, функциянинг тўлиқ орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-$$

$$-(x_0{}^2+y_0{}^2)=x_0{}^2+2x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2+y_0{}^2+2y_0\cdot\Delta y+\Delta y^2-x_0{}^2-y_0{}^2=$$

$$=(2x_0+\Delta x)\cdot\Delta x+2(y_0+\Delta y)\cdot\Delta y$$

Бундан эса

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(x_0,y_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[(2x^0+\Delta x)\cdot\Delta x+(2y_0+\Delta y)\cdot\Delta y)\right]=0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x,y)=x^2+y^2$ функция R^2 тўпламда узлуксиз.

Эслатма. Агар юқоридаги муносабат бажарилмаса, у ҳолда f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада узилишга эга деб аталади. М тўпламда берилган f(x,y) функция тўпламнинг бирор нуқтасида ёки тўпламдаги бирор чизиқда узилишга эга бўлиши мумкин.

5-Мисол.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \textit{агар}\ \ (x,y)\neq(0,0)\ \ \textit{булса}\\ 1, & \textit{агар}\ \ (x,y)=(0,0)\ \ \textit{булса}\end{cases}$$

функция (0,0) нуқтада узилишга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$$

бўлиб, бу лимит берилган функциянинг (0:0) нуқтадаги қиймати f(0,0) =1 га тенг эмас:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)\neq f(0,0)$$

3-§. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1^0. Функциянинг хусусий ҳосилалари.

z=f(x,y) функция $M(M\subset R^2)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,y_0)\in M$ $(x_0+\Delta,y_0)\in M$ бўлсин.

8 – таъриф. Агар $\Delta x\to 0$ да

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x\cdot y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит f(x,y) функциянинг (x_0,y_0) нуқтадаги x аргументи бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади ва $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ ёки $f^1{}_x(x_0,y_0)$ (қисқача $\frac{\partial f}{\partial x}$ *ёки* $f^1{}_x$) каби белгиланади:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f^1{}_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

худди шунга ўхшаш агар, $\Delta y \to 0$ да

$$\frac{\Delta y f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит f(x,y) функциянинг (x_0,y_0) нуқтадаги y аргументи бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади ва $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ ёки $f^1{}_y(x_0,y_0)$ (қисқача $\frac{\partial f}{\partial y}$ ёки $f^1{}_y$) каби белгиланади.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = f^1{}_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Мисоллар. 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ функциянинг хусусий ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$f^1{}_x(x,y) = (x^2+y^2)^1{}_x = 2x$$

$$f^1{}_y(x,y) = (x^2+y^2)^1{}_y = 2y$$

2. $f(x,y)=x^y$ $(x>0)$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y\cdot\ln x$$

бўлади.

3. $z = arctg\frac{x}{y}$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.\frac{l}{y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}.\frac{l}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{\frac{x^2+y^2}{y^2}.y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

бўлади

9-таъриф. Агар f(x,y) функциянинг (x_0,y_0)нуқтадаги ортирмаси

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\_$$

ушбу

$$\Delta f(x_0y_0)=A.\Delta x+B\Delta y+\Delta.\lhd x+\beta.\lhd y$$

кўринишда ифодаланса, у ҳолда функция (x_0,y_0) нуқтада диференциалланувчи деб аталади, бунда A,B- ўзгармас,$\propto$ ва β эса Δx ва Δy га боғлиқ ҳамда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да $\Delta\lambda$ ва $\Delta\beta$ лар ҳам нолга интилади.

7-Мисол. f(x,y)=x·y функцияни қарайлик. Бу функциянинг (x_0,y_0) нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0,y_0$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0=y_0\Delta x+x_0\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y=$$
$$=A\cdot\Delta x+B\Delta y+\lambda\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

бу ерда

$$A=y_0,\quad B=x_0,\quad \lambda=\Delta y,\qquad \beta=0$$

Демак, берилган функция (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи.

Агар f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада $f^1{}_x$ ва $f^1{}_y$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, функция орттирмаси эса ушбу

$$\Delta f(x_0,y_0)=f^1{}_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f^1{}_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\lambda\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

кўринишга эга бўлади.

10 – таъриф. Ушбу

$$f^1{}_x(x_0,y_0)\Delta x+f^1{}_x(x_0,y_0)\Delta y=f^1{}_x(x_0,y_0)dx+f^1{}_y(x_0,y_0)dy$$

ифода f(x,y) функциянинг (x_0,y_0) нуқтадаги дифференцияли дейи-лади ва df(x_0,y_0) каби белгиланади.

2^0. Функциянинг юқори тартибли ҳосиласи ва дифференцияси.

11-таъриф. z=f(x,y) функция хусусий ҳосилалари $f^1{}_x(x,y)$, $f^1{}_y(x,y)$ нинг хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва

f^{II}, f^{II}, f^{II} ёки $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ каби белгиланади.

Демак,

$$f^{II}{}_{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(f^1{}_x(x,y))^1{}_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f^{II}{}_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(f^1{}_x(x,y))^1{}_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f^{II}{}_{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(f^1{}_y(x,y))^1{}_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

худди юқоридагидек, z=f(x,y) функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳакозо тартибли хусусий ҳосилалари таърифланади.

8-Мисол. $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y^2$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2y^2)=2x+2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+x^2y^2)=2y+2x^2y$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2x+2xy^2)=2+2y^2=2(1+y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(2y+2xy^2)=2+2x^2=2(1+x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(2x+2xy^2)=4xy$$

12 – таъриф. z=f(x,y) функциянинг (x,y) нуқтадаги дифференциали df(x,y) нинг дифференциали берилган функциянинг икинчи тартибли дифференциали деб аталади ва $d^2f(x,y)$ каби белгиланади.

$d^2f(x,y)$ каби белгиланади:

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y))$$

Бунда

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

бўлади.

Худди юқоридагидек, z=f(x,y) функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳаказо тартибли дифференциаллари таърифланади ва уларнинг ифодалари топилади.

z=f(x,y) функция (x_0, y_0) нуқтанинг

$$\cup_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2:d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

атрофида берилган бўлиб, унда функция биринчи, иккинчи ва ҳоказо (n+1) – тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^n}(x-x_0)^n+C^1{}_n\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\ldots+\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n\right]+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0),y0+\theta_2(y-y_0))}{\partial x^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}+\ldots+\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0)}{\partial y^{n+1}}(y-y_0)n+1\right]$$

бўлади. Бу формула икки аргументли функциянинг Тейлор формуласи деб аталади.

4-§. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМ ҚИЙМАТЛАРИ

z=f(x,y) функция M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,y_0)\in M$ бўлсин.

13 – таъриф. Агар (x_0,y_0) нуқтанинг M тўпламга тегишли шундай

$$\bigcup_{\delta}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R:d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

атрофи топилсаки, $\forall(x,y)\in\bigcup_{\delta}((x_0,y_0))$ учун

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада максимум қийматига эришади дейилади. (x_0,y_0) нуқта функцияга максимум қиймат берадиган нуқта, $f(x_0,y_0)$ эса функциянинг максимум қиймати дейилади. Уни

$$\max\{f(x,y)\} \qquad ((x,y)\in\bigcup_{\delta}((x_0,y_0)))$$

каби белгиланади.

Демак,

$$f(x_0,y_0)=\max\{f(x,y)\}$$

14 - таъриф. Агар (x_0,y_0) нуқтанинг M тўпламга тегишли бўлган шундай

$$\bigcup_{\delta}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2:d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

атрофи топилсаки, $\forall(x,y)\in\bigcup_{\delta}((x_0,y_0))$ учун

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада минимумга эришади дейилади. (x_0,y_0) нуқта функцияга минимум қиймат берадиган нуқта, $f(x_0,y_0)$ эса функциянинг минимум қиймати дейилади. Уни

$$\min\{f(x,y)\} \qquad ((x,y)\in\bigcup_{\delta}(x,y))$$

каби белгиланади. Демак,

$$f(x_0,y_0)=\min\{f(x,y)\}$$

Айтайлик, f(x,y) функция (x_0,y_0) нуқтада иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Функциянинг экстремуми қуйидагича топилади:

1) f(x,y) функциянинг хусусий ҳосилалари топилиб уларни 0 га тенглаб

$$\begin{cases} f^1{}_x(x,y)=0 \\ f^1{}_y(x,y)=0 \end{cases}$$

система ечилади.

2) Айтайлик, (x_0,y_0) системанинг бирор ечими бўлсин. Сўнг

$$f^{II}{}_{x^2}(x_0,y_0)=a_{II},\qquad f^{II}{}_{xy}(x_0,y_0)=a_{12},\qquad f^{II}{}_{y^2}(x_0,y_0)=a_{22}$$

лар ҳисобланади.

3) Агар a^{II} a_{22}-$a^2{}_{12}$ ва $a_{II}<$ бўлса, f(x,y) функция (x_0,y_0) да максимумга эришади.

Агар a^{II} a_{22}-$a^2{}_{12}$ >0 ва $a_{II}>$бўлса, f(x,y) функция (x_0,y_0) да экстремумга эришмайди.

Мисол. $z=x^2+2xy+2y^2-4x+6y+10$ функциянинг экстремуми топилсин.

Берилган функциянинг ҳусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-4,\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y+6$$

бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб, ушбу

$$2x-2y-4=0$$
$$-2x+4y+6=0$$

системанинг ечамиз.

$$\begin{cases}2x-2y-4=0\\-2x+4y+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-2=0\\-x+2y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+1=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\x=1\end{cases}$$

Демак, (1,-1) нуқта берилган функциянинг стационар нуқтаси.

Функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топиб, уларнинг стационар (1,-1) нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-2y-4)=2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-2x+4y+6)=4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x-2y-4)=-2$$

Демак, $a_{11}=2$, $a_{12}=-2$, $a_{22}=4$,

Энди $a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=2\cdot4-(-2)^2=8-4=4$

Демак, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0$ ва $a_{11}=2>0$. Юқорида айтилганига кўра берилган функция (1,-1) нуқтада минимумга эришди. Функциянинг минимум қиймати эса

$$\min(x^2-2xy+2y^2-4x+6y+10)=5$$

га тенг.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

1. $z=x+y$
2. $z=\dfrac{1}{x+y}$
3. $z=4-x-2y$
4. $\dfrac{3}{x^2+y^2}$
5. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$
6. $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$
7. $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$
8. $z=\arcsin(x+y)$
9. $z=\ln(-x+y)$
10. $z=\sqrt{x}+y$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{y}$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{xy}{\sin(xy)}$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг:

21. $z=\dfrac{3y}{2x-y}$

22. $z=x^2+xy+y^2$

23. $z = \frac{x-y}{x+y}$ 24. z=ln(9-x^2-y^2)

25. $z = \frac{xy}{x+y}$

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

26. z=x^3+7xy^2+y^2+1 27. z=x^2+2y^2-3xy-4x+2x+5

28. z=$\frac{x-y}{x+y}$ 29. z=$\frac{y}{x}$

30. z=$\sqrt{x^2-y^2}$ 31.z=$\ln(x^2+y^2)$

32. z=arctg$\frac{y}{x}$ 33. z=$x^2\sin^4 y$

34. $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$ 35. $z = x^y$

36. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$ 37. $z = arctg\frac{y}{1+x^2}$

38. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$ 39. $z = xe^{-xy}$

40. z=ln sin(x-2y)

Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ дифференциалларини топинг.

41. z=xy^2 42. $z = \frac{xy}{x-y}$

43. z=y ln2x 44. z=y^x

45. z=e^{xy} 46. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

47. $z = \sin\frac{x}{y}$ 48. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

49. $z = arctg\frac{x}{y}$ 50. $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини ҳисобланг:

51. $z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

52. $z=xy+\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

53. $z=\ln tg(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

54. $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

55. $z=x\sin xy+y\cos xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

56. $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{V}$, $u=tg^2x$, $V=ctg^2x$

57. $z = \frac{x^2-u}{x^2+u}$, $u=3x+1$

58. $z=x^2\cdot u$, $u=\cos x$

59. $z=u^2+v^2$, $u=x+y$, $v=x-y$

60. $z=\ln(u^2+v^2)$: $u=xy$

Қуйидаги функцияларни экстремумга текширинг:

61. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$ 62. $z=(x-1)^2-2y^2$

63. $z=x^3+xy^2+6xy$ 64. $z=(x^2+y)\cdot\sqrt{e^y}$

65. $z = x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$ 66. $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

67. $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

68. $z = 3\ln\frac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$

69. $z=(x-y)^3+(y-1)^3$

70. $z=x^3+y^3-15xy$

71. $z=(x^2+y^2)(e^{-(x^2+y^2)}-1)$

XVII. БОБ. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ИНТЕГРАЛИ

1-§. ИККИ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛ

1^0. Икки каррали интеграл тушунчаси.

Текисликда бирор чегараланган ёпиқ (S) соҳа берилган бўлиб, унинг юзи S га тенг бўлсин.

Бу (S) соҳада z=f(x,y) функция аниқланган бўлсин. (S) соҳани чизиқлар ёрдамида n та (S_1), (S_2),...,(S_n) соҳаларга ажратамиз. Уларнинг юзлари мос равишда S_1 S_2..., S_n бўлсин. (S_k) (k=1,2,...n) соҳада ихтиёрий $M(x_к,y_к)$ нуқта олиб, бу нуқтада берилган функциянинг қийматини ҳисоблаймиз: f(x,y). Сўнг уни (Sk) соҳанинг юзи *Sk* га кўпайтириб, қуйидаги

$$\delta=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot S$$

йиғиндини тузамиз. Бу йиғинди *f(x,y)* функциянинг *(S)* бўйича интеграл йиғинди деб аталади.

Одатдагидек, (S) (k=1,2..., n) соҳалар диаметрларнинг энг каттасини λ деб оламиз.

1 – таъриф. Агар $\lambda\to 0$ да интеграл йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда f(x,y) функция (S) соҳа бўйича интегралланувчи дейилиб, бу лимит эса f(x,y) функциянинг (S) соҳа бўйича икки каррали интеграли деб аталади. Уни

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot S$$

Агар *z=f(x,y)* функция чегараланган ёпиқ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ интеграл мавжуд бўлади.

2^0. Икки каррали интегралнинг асосий хоссалари.

1). Агар *(S)=(S₁)U(S₂)* бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dxdy$$

бўлади.

2). Қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\iint\limits_{(S)} kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy \quad (k = const)$$

3). $f(x,y)$ функция билан бирга $g(x,y)$ функция ҳам (S) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} [f(x,y) \pm (x,y)]dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(S)} g(x,y)dxdy$$

3^0. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш.

Текисликдаги (S) соҳа ушбу

$$(S) = \left\{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, \quad c \le y \le d\right\}$$

тўғри тўртбурчак соҳадан иборат бўлсин. У ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)ds = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy, \qquad (1)$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d (x,y)dy\right]dx \qquad (2)$$

бўлади.

1-Мисол. $\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}dxdy$ интеграл ҳисоблансин, бунда

$$(S) = \left\{(x,y) \in R^2 : 3 \le x \le 5, \quad 1 \le y \le 2\right\}$$

(1) формуладан фойдаланамиз:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}dxdy = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_3^5 \frac{x}{y}dx\right]dy$$

Аввал $\int\limits_3^5 \frac{x}{y}dx$ интегрални ҳисоблаймиз. Унда у уни у

ўзгармас деб қараймиз:

$$\int_3^5 \frac{x}{y} ds = \frac{1}{y}\int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2}\int_3^S = \frac{1}{2y}(5^2-3^2) = \frac{8}{y}$$

Натижада —

$$\iint_{(S)} \frac{x}{y} ds \int_1^2 \left[\int_3^5 \frac{x}{y} dx\right] dy = \int_1^2 \frac{8}{y} dy = 8\ln y \int_1^2 = 8(\ln 2 - \ln 1) = 8\ln 2$$

бўлади.

Энди (S) соҳа юқоридан y=φ_2(x) функция графиги, пастдан y=φ_1(x) функция графиги, ён томонларидан x=a, x=в вертикал чизиқлар билан чегараланган соҳа бўлсин.

У ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x,y)ds = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (2)$$

бўлади.

2-Мисол. $\iint_{(S)}(x+y)ds$ интеграл ҳисоблансин, бунда

$$(S) = \left\{x,y\right\} \in R^2 : 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2 - x^2$$

Юқоридаги (2) формулага кўра

$$\iint_{(S)}(x+y)\cdot dy = \int_0^1 \left[\int_x^{2-x^2}(x+y)dy\right]dx$$

бўлади. Равшанки,

$$\int_x^{2-x^2}(x+y)dy = \int_x^{2-x^2} xdy + \int_x^{2-x^2} ydy = x\int_x^{2-x^2} dy + \int_x^{2-x^2} ydy =$$

$$= xy\Big|_0^{2-x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x^2} = x(2-x^2-x) + \frac{1}{2}((2-x^2)^2 - x^2) = 2x - x^3 - x^2$$

$$+2 - 2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2.$$

У ҳолда $\iint(x+y)dxdys = \int_0^1\left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2\right]dx =$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \frac{7}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 + 2 = \frac{101}{60}$$

бўлади.

2-§. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1^0. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл. Текисликда бирор эгри чизиқ (ёй) берилган бўлсин. Уни АВ ёки (l) билан белгилаймиз (-чизма).

Бу эгри чизиқ узунлика эга ва унинг узунлиги L бўлсин. Шу AB эгри чизиқда $z=f(x,y)$ функция берилган (бунда $(x,y) \in (L)$. AB эгри чизиқни $A_0=A, A, A_2 ..., An-1, An=B$ нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўлиб, ҳар бир $A_K A_{K+1}$ бўлакчада ихтиёрий $(\varepsilon_{k1}, \gamma_k)$ $(\varepsilon_{k1}, \gamma_k \in \breve{A}_k \breve{A}_{kм})$ нуқта оламиз. Бу нуқтада $f(x,y)$ функциянинг қиймати $f(\varepsilon_{k1}, \gamma_k)$ ни ҳисоблаб, уни мос A_{K+1} бўлакчанинг узунлигига кўпайтирамиз ва ниҳоят

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_{1k}\gamma_k) \cdot \Delta S_k$$

йиғиндини тузамиз. Бу ҳам интеграл йиғинди дейилади.

2 - таъриф. Агар $\lambda = \max \int \Delta s_k \int \to 0$ да δ йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x,y)$ функция $\breve{A}B$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилиб, бу лимит эса $f(x,y)$ функциянинг AB эгри чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли дейилади.

Уни

$$\int_{\breve{A}B} f(x,y)ds \qquad \text{AB}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{\breve{A}B} f(x,y)ds = \lim_{\lambda \to 0} \delta = \lim \sum_{k=o}^{n=1} f(\varepsilon_{1k}\eta_k)\Delta S_k$$

1) AB эгри чизиқ ушбу

$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \qquad ((\alpha \le t \le \beta))$

система билан берилган бўлиб, бунда $\varphi(\varphi)$ ва $\varphi(\varphi)$ функциялар $[\alpha,\beta]$да узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(t),\psi(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Уҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi^{1^2}(t)+\psi^{1^2}(t)}dt \qquad (3)$$

бўлади.

АВ эгри чизиқ ушбу

$У=У(x) \qquad (\alpha\le x\le b)$

Тенглама билан берилган бўлиб, $y(a)=A$, $y(в)=B$ бўлсин. $У(x)$ функция эса $[a,в]$ сегментда узлуксиз ҳамда узлуксиз $y^1(x)$ ҳосилаларга эга. У ҳолда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y(x)).\sqrt{1+y^{1^2}(x)}dx \qquad (4)$$

3-Мисол. Қуйидаги $\int\limits_{AB}\sqrt{x^2+y^2}ds$

биринчи тур эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бунда $\overset{\smile}{AB}$ маркази $(0,0)$ нуқтада, радиуси $\tau=2$ бўлган айлананинг биринчи квадрнтдаги қисмидан иборат. Аналитик геометирядан маълумки, маркази $(0,0)$ нуқтада, радиуси $\tau=2$ бўлган айлананинг тенгламаси

$$x^2+y^2=4$$

бўлади.

Бу айлананиг биринчи квадрнтдаги қисми

$$y=\sqrt{4-x^2} \quad (0\le x\le 2)$$

бўлади.

(3) формуладан фойдаланиб топамиз.

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int\limits_0^2 \sqrt{x^2+4-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)^2} =$$

$$\int\limits_0^2 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx = 2\int\limits_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} =$$

$$= 4\int\limits_0^2 \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 4\cdot\frac{\Pi}{2} = 2\Pi$$

2^0. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар. Текисликда $\breve{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлиб, бу эгри чизиқда *z=f(x,y)* функция аниқланган бўлсин (-чизма).

$\breve{AB}$ эгри чизиқни $A_0, A_1 A_2. \, . \, ., A_n (A_0=A, A_n=B)$ нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўлиб, ҳар бир $A_k A_{k+1} (k=0,1,2,..n-1)$ бўлакчада ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта оламиз.Бу нуқтадаги функциянинг қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни $A_k A_{k+1}$ ейинг ох ўқидаги проекцияси Δx_k га, сўнг *Oy* ўқидаги проекцияси Δy_k га кўпайтириб, ушбу йиғиндиларни тузамиз.

$$\delta_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_{1k}, \varphi_k)\cdot\Delta x_k, \ \delta_2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_{1k}\varphi_k)\cdot\Delta y_k \quad (5)$$

ҳам интеграл йиғиндилар деб аталади.

3-таъриф.

Агар

$\lambda_1 = \max\{\Delta x_k\} \to 0$ *да* δ_1, $\alpha_2 = \max\{\Delta y_k\} \to 0$ *да* δ_2

йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда *f(x,y)* узлуксиз *AB* эгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилади, бу лимитлар эса *f(x,y)* функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари дейилади. Улар мос равишда қуйидагича

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx \qquad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dy$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx = \lim_{\lambda_1\to 0}\delta_1 = \lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi,_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dy = \lim_{\lambda_2\to 0}\delta_2 = \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k$$

Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx + \int\limits_{AB} g(x,y)dy$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

каби белгиланади:

3-§ ПАРАМЕТРЛАРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

1^0.Параметрга боғлиқ интеграл тушунчаси ва унинг хоссалари.

$z=f(x,y)$ функция текисликдаги тўғри тўртбурчак соҳа (Д)$=\{(x,y)\in R^2; a\le x\le b, c\le y\le d\}$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Равшанки, $\int_a^b f(x,y)dx$

Интеграл у ўзгарувчининг [c,d]оралиқдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\mathrm{J(y)}= \int_a^b f(x,y)dx$$

Бу интегрални параметрга боғлиқ интеграл дейилади.

1)

$$f(x,y)\_функция(Д) = \{(x,y)\in R^2; a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\Im(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

функция ҳам *[c,d]* ораликда узлуксиз бўлади.

2). *f(x,y)* функция *(Д)* сохада берилган ва узлуксиз, у шу соҳада узлуксиз $fy^1(x,y)$ хусусий ҳосилага эга бўлса

$$\Im'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

бўлади

3). *f(x,y)* функция *(Д)* сохада берилган ва узлуксиз бўлса

$$\int_c^{\alpha} \Im(y)dy = \int_c^{a}[\int_a^{b} f(x,y)dx]dy = \int_a^{b}[\int_c^{a} f(x,y)dy]dx$$

бўлади.

2⁰. ПАРАМЕТРЛАРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ.

f(x,y) функция ушбу

$\{(x,y) \in R^2; a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d\}$

соҳада берилган бўлиб, у ўзгарувчининг [c,d] ораликдан олинган ҳар бир тайин кийматида x аргументи бўйича $[a,+\infty]$ интегралланувчи бўлсин.

Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл параметрга боғлиқ бўлган хосмас (чегараси чексиз) интеграл бўлади.

Худди шунга ўхшаш параметирга боғлиқ чегараланмаган функция хосмас интеграли тушунчаси киритилади.

Ушбу

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (7)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (8)$$

интеграллар Эйлер интеграллари дейилади. (7) интеграл Бета функция, (8) интеграл гамма-функция деб аталади. Бета-функция

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

x ва *y* ўзгарувчиларнинг *x>0,y>0* бўлган қийматларида аниқланган (мавжуд бўлади). Гамма функция

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}dt$$

эса x ўзгарувчининг x>0 бўлган қиёматларида аниқланган (мавжуд бўлади).

B(x,y) ва *Г(x)* функциялар бир қатор муҳим хоссаларга эга.

1). Барча *(x,y) (x>0,y>0)* учун

$$B(x,y)=B(y,x)$$

бўлади

2). B(x,y) функцияни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

3) Барча *x,y* учун *(x>0,y>1)* $B(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$

бўлади.

4) Агар *У=1-х (0<x<1)* бўлса, у ҳолда

$$B(x,y)=B(x,1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{1+t}=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

бўлади

Хусусан, $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$

бўлганда

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}=\Pi \qquad (9)$$

бўлади.

5) Барча *x>0,* учун

$$\Gamma(x+1)=\Gamma(x)$$

бўлади

6) Барча *x>0, y>0* учун

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (10)$$

бўлади.

Натижа (9) ва (10) муносабатлардан $0<x<1$ учун

$$\Gamma(x).\Gamma(1+x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Хусусан, $x=\frac{1}{2}$ бўлганда $\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

ёки

$$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2=\pi$$

бўлиб,

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйдаги такрорий интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_0^1 dx\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2}$

2. $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2dy}{1+y^2}$

3. $\int_2^4 dy\int_1^4(x^3+y^3)dx$

4 $\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{x^2}dy$

5. $\int_0^3 dy\int_0^{\frac{2}{3}y}(x+y)dx$

Қуйидаги икки каррали интегралларни ҳисобланг

6. $\iint\limits_{(Д)}xydxdy\_(Д)=\{(x,y)\in R^2;0\le x\le a,0\le y\le b\}$

7.

$$\iint\limits_{Д}(6xy^2-12x^2y)dxdy(Д)=\{(x,y)\in R^2;0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

8.

$\iint\frac{1}{(x+y+2)^2}dxdy(Д)=\{(x,y)\in R^2;1\le x\le 2,0\le y\le 1\}$

D

9. $\int\limits_D\int e^{x+y}dxdy\_(Д)=\{(x,y)\in R^2:0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

10. $\iint\limits_{(Д)}\sin(x+y)dxdy\_(Д)=\{(x,y)\in R^2:0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$

11. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(x+y)dy$

12. $\iint\limits_{(Д)}x^2ydxdy,(Д)-coos\_y=-x^2,\_x=y^2\_чизиклар$

билан чегарали нган соҳа.

13. $\iint\limits_{(Д)}e^{-y^2}dxdy,_(Д)-$учлари (0,0), (0,1), (1,1)

нуқталарда бўлган учбурчак.

14. $\iint_{(Д)}xy^2dxdy,\_(Д)-ушбу\_x^2+y^2=4$, x+y-2=0

чизиқлар билан чегараланган соҳа

15. $\iint\limits_{(Д)}x^4ydxdy,\_(Д)-ушбу\_xy=-1,\_y-x=0$ x=2

чизиқлар билан чегараланган соҳа.

16. $\iint\limits_{(Д)}e^{x+y}dxdy,\_(Д)=ушбу\_y=e^x,\_x=0,y=2$

чизиқлар билан чегараланган соҳа.

17. $\iint\limits_{(Д)}e^{\frac{x}{y}}dxdy,\_(Д)-ушбу\_y^2=x,x=0,y=1$

чизиқлар билан чегараланган соҳа.

18. $\int_0^{П}dx\int_0^{1+\cos x}y^2\sin xdx$

19. $\int_0^{\frac{П}{2}}dx\int_{\cos x}^{1}ydy$

20. $\iint\limits_{(Д)}\frac{x}{x+y^2}dxdy,\ (Д)-ушбу\ y=\frac{x^2}{2}, y=x$

чизиқлар билан чегараланган соҳа.

Қуйдаги эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

21. $\int\limits_l xy^2dl,$,бунда L-A(0,0), B(4;3) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

22. $\int\limits_l xdl,$ бунда L- ушбу y=x^2+1 эгри чизиқнинг A(0,1) ва B (1,2) нуқталари орасидаги қисми.

23. $\int\limits_l \sqrt{1+x^2}dl,$ бунда L- ушбу 2y-x^2=0 эгри чизиқ ($1\le x\le 3$) ёйидан иборат.

24. $\int ydl$ бунда L- ушбу y=x^3 эгри чизиқнинг A(0,0) ва B(I,I) нуқталари орасидаги қисми.

25. $\int\limits_l (2x+y)dl$, бунда L-учлари A(I,0), B(0,2),0(0,0) нуқталарда бўлган учбурчак контури.

26. $\int\limits_l x^2dx+xy^2dy,$ бунда L –икки A(0,1)ва B(I,2) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

27. $\int\limits_l x^2dx+\frac{1}{y^2}dy,$ бунда L ушбу $x=\frac{1}{y}$ эгри чизиқнинг A (I,I) ва B(4,$\frac{1}{4}$) нуқталари орасидаги қисми.

28. $\int\limits_l \cos^3 xdx+ydy$, бунда L- ушбу y=sinx эгри чизиқ ($0\le x\le\frac{П}{2}$) ёйидан иборат.

29. $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy,$ бунда L-ушбу y=a^x эгри чизиқнинг A(0,1) ва B(1,0) нуқталари орасидаги қисми.

30. $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$ бунда L-ушбу $y=x^2$ эгри чизиқнинг A(I,I) ва B(2,4) нуқталари орасидаги қисми.

Эйлер интегралларидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

31. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2 dx}$

32. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

33. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4}$

34. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin^6 x \_ \cos^4 x dx$

35. $\int_0^1 \frac{dx}{n\sqrt{1 - x^n}}$ (n>1)

36. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^4}$

37. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$

38. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ (n∈N)

39. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2 dx}$ (a>0)

40. $\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx$

XVIII БОБ ҚАТОРЛАР

I-§ СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1^0 Сонли қатор тушунчаси

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots . (1)$$

ифода чексиз қатор (қисқача қатор) деб аталади. a_n (n=1,2,3,...) сонлар қаторнинг ҳадлари дейилади.

1-таъриф. Агар n$\to\infty$да қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $S=a_1+a_2+...+a_n$ сонлар кетма кетлиги чекли лимитга эга.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, S эса қаторнинг йиғиндиси дейилади:

2 - таъриф. Агар $n\to\infty$ да (1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $S_n=a_1a_{2+...+}a\,n$ сонлар кетма кетлигининг лимити чексиз бўлса ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

1-Мисол. I $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

қаторни қараймиз Бу қаторучун

$$S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+$$

$$+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

га тен.г Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси I га тенг:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+......+\frac{1}{n(n+1)}+.....=1$$

2-Мисол. Ушбу $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+}......+\frac{1}{\sqrt{n}}+.....$

қаторни қараймиз. Бу қатор учун

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=n.\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

бўлиб lim $S_n=+\infty$ бўлади. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

3-Мисол. Ушбу $1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+$ ... қаторни қараймиз.

Бу қатор учун

$$S_n = 1-1+1-1+...+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, \text{ агар } n-\text{ток булса} \\ 0, \text{ агар } n-\text{жуфт булса} \end{cases}$$

бўлиб бу йиғиндилардан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик *1,0,1,0,1,0,..* бўлади.

Равшанки, бу кетма кетлик лимитга эга эмас. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4-Мисол. Ушбу $a+a q+a q^2+...+a q^{n-1}...$қаторни қараймиз. Бу қаторнинг ҳадлари геометрик прогрессия ташкил қилади. Шунинг учун уни геометирик қатор дейилади. Унинг қисмий йиғиндиси

$$S_n=a+a q+a q^3+...+a q^{n-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

бўлади.

Бу кетма кетликнинг лимити q га боғлиқ бўлади.

а) IqI<1 бўлсин.

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Унда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n-a}{q-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}.q^n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-a}-\frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$$

бўлади.

Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S=\frac{a}{1-q}$ бўлади.

б) q>1 бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}q^n\right) = \infty$$

бўлади. Демак, q>1 бўлганда гиометирик қатор узоқлашувчи.

в) $q=1$ бўлсин. Бу ҳолда $S_n=a+a+...+a=na$ бўлиб,

$$\frac{\lim}{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty, & агар \quad a>0 \quad булса \\ -\infty, & агар \quad a<0 \quad булса \end{cases}$$

бўлади. Демак, $q=1$ бўлганда қатор узоқлашувчи.

г) $q<-1$ бўлсин. Бу ҳолда $/S_n/$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлмайди.

Шунингдек, $q=1$ бўлганда ҳам $/S_n/$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас. Чунки бу ҳолда $/S_n/$ кетма-кетлик ушбу a,0, a,0... кўринишга эга бўлиб, у лимитга эга эмас $(a\#0)$. Демак, $q\le -1$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади. Шундай қилиб,

$$a+a\,q+a\,q^2+\ldots+a\,q^{n-1}+\ldots$$

Геометирик қатор /q/<1 бўлганда яқинлашувчи (йиғиндиси $S=\dfrac{a}{1-q}$ га тенг), /q/$\ge$1 бўлганда узоқлашувчи бўлади.

2^0 Яқинлашувчилик аломатлари

а) КОШИ АЛОМАТИ

Агар

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+..(a_n\ge 0, n=1,2,3\ldots)$ қаторда

$\sqrt[n]{a_n}\le q(q<1)$ бўлса қатор яқинлашуви, $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$ бўлса, қатор узоқлашув бўлади.

Агар қаторда

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$$

бўлиб, k<1 бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади, k>1 бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

5-Мисол. Ушбу

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$$

қаторни қараймиз. Бу қаторнинг n-ҳади $a_n=\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ бўлиб,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

б) ДАЛАМБЕР АЛОМАТИ

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$(a_n \geq 0, \quad n = 1,2,\ldots)$$

қаторда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \qquad (n = 1,2,3\ldots)$$

бўлиб, q<1 бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (a \geq 0, \quad n = 1,2,\ldots)$$

қаторда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

бўлиб, $d<1$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади. $d>1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

6-Мисол. Ушбу қаторни қараймиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+...+\frac{n!}{n^n}+...$$

Бу қаторда

$$a_n=\frac{n!}{n^n},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdots n}=$$

$$=(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

бўлади.

Лимитга ўтиб топамиз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$. Демак, берилган қатор яқинлашувчи

Лейбниц теоремаси. Ушбу

$$a_1-a_2+a_3-a_n+...+(-1)^{n-1}a_n+... \qquad (a_n>0)$$

қаторнинг ҳадлари учун

1) $a_1>a_2>...>a_n>...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

3-таьриф. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$$

қатор абсолют яқинлашувчи қатор деб аталади.

2-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

қатор функционал қатор деб аталади.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи дейилади.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сонли қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада узоқлашувчи дейилади.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қатор x тўпламда (соҳада) яқинлашувчи дейилади. Ушбу

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$$

йиғинди (1) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси дейилади.

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

эса қатор йиғиндиси дейилади.

1-Мисол: Ушбу функционал қаторни қараймиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

Бу қатор учун

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

бўлади.

Равшанки, $x=1$ да $S_n(x)=1+1+\ldots+1=n$

Демак,

$$S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, & агар \quad x \neq 1 \quad булса \\ n, & агар \quad x = 1 \quad булса \end{cases}$$

бўлади.

Айтайлик, $x \in (-1,1)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} Sn(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x}\cdot x^n = \frac{1}{1-x}$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган функционал қатор $X=(-1,1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

га тенг.

2-Мисол. Ушбу функционал қаторни қараймиз.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(n+x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots$$

Бу функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}$$

Унда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}$$

бўлади.

Демак, берилган функционал қатор $X = R - \{-1,-2,\ldots\}$ тўпламда яқинлашувчи, унинг йиғиндиси эса $S(x) = \dfrac{1}{x+1}$ га тенг.

4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай натурал n_0 сон топилсаки, барча $n>n_0$ ва ихтиёрий x нуқталар учун бир вақтда

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор X тўпламда *S(x)* га текис яқинлашади дейилади.

Вейерштрасс аломати.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир *$f_n(x)$* ҳади *X* тўпламда ушбу

$$|f_n(x)| \leq C_n \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор *X* тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

3-Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

функционал қатор X=(∞,+∞) да текис яқинлашувчи бўлади, чунки

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ сонли қатор яқинлашувчи.

3-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

кўринишдаги қатор даражали қатор деб аталади, бунда a_0, a_1, a_2, a_3,... a_n, лар ўзгармас сонлар бўлиб, улар даражали қаторнинг коэффицентлари дейилади.

Теорема (Абель теоремаси).

Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор х нинг $x=x_0$ $(x_0 \neq 0)$ қийматида яқинлашувчи бўлса, x нинг

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Натижа. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор $x=x_1$ нуқтада узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда қатор x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Айтайлик,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

даражали қатор $x=x_0$ $(x_0 \neq 0)$ да яқинлашувчи $x=x_1$ да эса узоқлашувчи бўлсин.

Даражали қаторнинг яқинлашадиган нуқталардан иборат тўплам $\{x\}$ учун

$R=Sup\{x\}$ бўлсин.

Ушбу $(-R, R)$ интервал даражали қаторнинг яқинлашиш интервали, R эса яқинлашиш радиуси деб аталади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси қуйидаги формула билан топилади:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

4-Мисол. Ушбу $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилсин.

Юқоридаги формулага кўра

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R=1$ яқинлашиш интервали $(-1,1)$ бўлади.

Бу даражали қатор $R=-1$, $R=1$ нуқталарда узоқлашувчидир (чунки $1+1+1+...$ ва $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$ сонли қаторлар узоқлашувчи).

5-Мисол. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+...+\frac{x^n}{n^2}+...$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилсин.

Формуладан фойдаланиб топамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)^2}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) =$$

Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R=1$ яқинлашиш интервали эса $(-1,1)$ бўлади. Берилган даражали қатор $R=-1$, $R=1$ нуқталарда яқинлашувчи бўлади, чунки $1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ ва $1-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$ сонли қаторлар яқинлашувчидир).

y=f(x) функция (-δ,δ) (δ>0) оралиқда берилган бўлиб, у шу оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f^1(0)}{1!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

даражали қатор Маклорен қатори дейилади.

$f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\lambda$ функцияларнинг Маклорен қатори қуйидагича бўлади:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги сонли қаторларнингn-ҳадини ёзинг:

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$

3. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ 4. $\frac{2}{1} + \frac{4}{2^\lambda} + \frac{8}{3^\lambda} + \frac{16}{4^\lambda} + \ldots$

5. $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \frac{1}{5\ln 5} + \ldots$ 6. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \ldots$

7. $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \ldots$

8. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$ 9. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

9. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \ldots$

Қатор йиғиндиси таърифидан фойдаланиб қуйидаги қаторларнинг йиғиндисини топинг:

11. $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots$

12. $\frac{1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+2)} + \frac{1}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+3)} + \frac{1}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+4)} + \ldots$

13. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\ldots$

14. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

15. $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$

Қуйидаги қаторларда қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилишини текширинг.

16. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

17. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$

18. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\ldots+\frac{2n}{2n+1}+\ldots$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

Қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

21. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+1}$ 31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$ 33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{2n^2}$ 35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ 37. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+2}\right)^n$ (a>0) 39. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+2}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n(2n+1)}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}$ (a>0) 45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(n!)^2}$

Қуйидаги қаторларни яқинлашувчиликка (абсолют яқинлашувчиликка) текширинг:

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ 47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\Pi}{4n}$ 49. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топинг.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 52. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ 54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x^n)}{n}$

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}xe^{nx}$

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда текис яқинлашувчилигини исботланг:

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},$ $x=(-\infty,+\infty)$

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x},$ $x=(1,+\infty)$

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n},$ $x=(-\infty,+\infty)$

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2},$ $x=(-\infty,+\infty)$

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}},$ $x=[0,+\infty)$

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб исботланг:

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},$ $x=[-1,1]$

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{nx}},$ $x=[1,+\infty]$

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}},$ $x=(-\infty,+\infty)$

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $x=[0,+\infty)$

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x=(-2,+\infty)$

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервалини топинг:

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 67. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n!}x^n$ 69. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^n}\cdot x^n$

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ 71. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$

72. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)\cdot x^n$ 73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}x^n$

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ 75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}x^n$

Ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш ёрдамида қуйидаги даражали қаторларнинг йиғиндасини топинг:

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 77. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

Қуйидаги функцияларни Маклорен қаторига ёйинг:

81. $f(x)=(1+x)\cdot e^x$ 82. $f(x)=\sin^2 x$

83. $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$ 84. $f(x)=xe^{-2x}$

85. $f(x)=\cos 2x$

XIX БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР.

Эркли ўзгарувчи x, номаълум функция y=y(x) ва бу функциянинг ҳосилаларини боғловчи тенглама дифференциал тенглама дейилади.

Бундай тенглама умумий холда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x,y,y^1, y^{II},...,y^{(k)})=0 \qquad (1)$$

(1)тенгламада қатнашган номаълум функция ҳосилаларининг энг юқори тартибли дифф еренциал тенгламанинг тартиби дейилади. Демак, (1)тенглама n-тартибли дифференциал тенгламадир.

Агар $y=\varphi$ (x) функция ва унинг ҳосилаларини ( ) тенгламага қўйилганда уни айниятга айлантирса, яъни

$$F(x, \varphi(x), \varphi^1(x)... \varphi^{(n)}(x)) =0$$

бўлса, унда $y=\varphi(x)$ функция (1) тенгламанинг ечими дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$y^{II}-x=0 \qquad (2)$$

тенгламани қарайлик. Бу 2-тартибли дифференциал тенгламадир. $\varphi(x)=\frac{1}{6}x^3+x$ функция унинг ечими бўлади. Хақиқатан ҳам,

$$\varphi^1(x)=(\frac{1}{6}x^3+x)'=\frac{1}{2}x^2+1, \qquad \varphi^{II}(x)=(\frac{1}{2}x^2+1)'=x$$

бу тенглама айниятга айланади:

$$\varphi^{II}(x)-x = x-x=0$$

(2) тенгламанинг умумий ечими

$$F(x)= \frac{1}{6}x^3+c_1\ x+c_2$$

бўлади, бунда C_1 C_2-ихтиёрий ўзгармас сонлар. (Хусусан, $C_2=0$, $C_1=1$ бўлганда, умумий ечимдан юқоридаги ечим келиб чиқади).

I-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x,y,y^1)=0$$

Ушбу

$$y^1 = f(x,y)$$

Тенглама ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама дейилади.

2-Мисол. $y^1=2x^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани интеграллаб топамиз:

$$y= \int 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3 + c$$

3-Мисол. $У^1 =7y^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{7y^2}$$

Бу тенгликдан эса

$$dx = \frac{1}{7} : \frac{dy}{y^2}$$

Бўлиши келиб чиқади. Уни интеграллаб топамиз:

$$x = \frac{1}{7}\int\frac{dy}{y^2} + c = \frac{1}{7}\int y^{-2}dy + c = \frac{1}{7}.\frac{-1}{y} + c = -\frac{1}{7y} + c$$

Демак.

$$У = \frac{1}{7}\frac{\overline{1}}{c-x}$$

4-Мисол. $y^1=xy+x+y+1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг ўнг томони учун

$$xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y+1)$$

Бу тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтирсак ва y+1га бўлсак, унда

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)dx$$

тенгликка келамиз. Интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x+1)dx+\ln c,$$

$$\ln(y+1)=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln c, \qquad \frac{y+1}{c}=\ell^{\frac{(x+1)^2}{2}}$$

$$y=e^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1$$

2-§. БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Агар

$$y^1=f(x,y) \qquad (3)$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги f(x,y) ифода бир жинсли функция бўлса, у холда (3) тенглама бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

F(x,y) бир жинсли функция бўлса, у холда ихтиёрий t учун

$$F(tx,ty)=f\ (x,y)$$

бўлади. Хусусан, $t=\frac{1}{x}$ бўлганда

$$F(1,\frac{y}{x})=f(x,y)$$

бўлади ва бу ҳолда (3) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$y^1=f(1,\frac{y}{x})=4(\frac{y}{x})$$

Бу тенгламани ечиш учун $\frac{y}{x}=u$ деб оламиз.

Тенгламанинг ечими ушбу кўринишда бўлади:

$$\ln cx = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}$$

Мисол. Ушбу $y^1 = \frac{y}{x+y}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$ функция бир жинсли функция. Ҳақиқатан ҳам,

$$F(tx,ty) = \frac{ty}{tx+ty} = \frac{ty}{t(x+y)} = \frac{y}{x+y}$$

Демак, берилган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама. Бу тенгламани қуйидагича

$$y^1 = \frac{y}{x+y} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

ёзиб, сўнг

$$\frac{y}{x} = u$$

деб оламиз. Уҳолда

$$y = u.x \qquad y^1 = u^1x + u$$

бўлиб,

$$u^1x + u = \frac{u}{1+u},$$

$$u^1x = \frac{u}{1+u} - u = -\frac{u^2}{1+u}$$ бўлади.

Натижада

$$x\frac{du}{du} = -\frac{u^2}{1+u} \quad \text{яъни} \quad -\frac{1+u}{u^2}du = \frac{dx}{x}$$

тенгламага келамиз. Бундан

$$\int\left(-\frac{1+u}{u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x} + \ln c,$$

$$\frac{1}{u} - \ln u = \ln x + \ln c, \qquad x=y.\ln cy$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган тенгламанинг умумий ечимидир.

3-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлган ушбу

$$y^1+p(x)y+q(x)=0 \qquad (4)$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама дейилади, бунда p(x) ва q(x) узлуксиз функциялар.

Берилган(4) тенгламанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C - \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) \qquad (5)$$

бўлади

6-Мисол. Ушбу $y^1+xy-x^3=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Унинг учимини(5) формуладан фойдаланиб топамиз

(бунда p(x)=x $\quad$ $q(x)=-x^3$):

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C - \int(-x^3)e^{\int p(x)dx}dx) = e^{-\frac{x^2}{2}}(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}dx) =$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}(C + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} 2e^{\frac{x^2}{2}}) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$$

4-§.ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$y^{II}+p(x)y^1+q(x)y=f(x) \qquad (6)$$

Кўринишдаги тенглама иккинчи тартибли чизиқли дифферунциал тенглама дейилади, бунда p(x), q(x) ва f(x)-узлуксиз функциялар.

Ушбу

$$y^{II}+p(x)y^1+q(x)y=0 \qquad (7)$$

тенглама иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенглама дейилади.

1-теорема. Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (7) тенгламанинг чизиқли эркли хусусий ечимлари бўлса, уҳолда(7) тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=c,y,(x)+c_2y_2(x)$$

бўлади, бунда C_1,C_2 –ихтиёрий ўзгармас сонлар.

9-теорема.(6)тенгламанинг умумий ечими шу тенглама ҳусусий ечими билан (7) тенгламаниниг умумий ечими йиғиндисига тенг бўлади.

5-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦЕНТЛИ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ўзгармас коэффицентли бир жинсли дифференциал тенглама деб

$$y^{II}+py^{I}+qy=0 \qquad (8)$$

Кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда p ва q –ўзгармас ҳақиқий сонлар.

Ушбу

$$k^2+pk+q=0 \qquad (9)$$

Тенглама (8) енгламанинг характеристик тенгламаси дейилади. (9) тенгламанинг илдизларини қ ва $к_2$ билан белгилаймиз:

а) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар ҳил ($к_1=к_2$) бўлсин.

Бу ҳолда (8)тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_1x}$$

кўринишда бўлади.

б) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг бўлсин. ($к_1=к_2$)

Бу ҳолда (8) тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1e^{к,x}+c_2x\,e^{к,x} \;=e^{к,x}(c_1+c_2x)$$

кўринишда бўлади.

в) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлиб

$к_1=s+iв$, $к_2=s-iв$ кўринишида бўлсин.

У ҳолда дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$У=e^{sx}(c_1cosвx+ c_2sinвx)$$

кўринишида бўлади.

Ўзгармас коэффцентли бир жинслимас чизиқли

$$y^{II} + p.y^1 + q.y = f(x)$$

дифференциал тенгламанинг ечими мос

$$y^{II} + py^1 + qy = 0$$

бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $\overline{y}$ билан тенгламанинг ихтиёрий ҳусусий ечими йиғиндисидан иборат бўлади:

$$y = \overline{y} + u$$

Ҳусусий ечимини эса қуйидаги ҳолларга мувофиқ топилади:

а) s сони $k^2 + pk + 2 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаган ҳол. Бу ҳолда биз ҳусусий ечимни

$$u = (A_0x^m + A_1x^{m^{-1}} + ... + A_m)e^{sx} = Q_m(x)e^{sx}$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $Q_m(x) - m -$ даражали кўпхад.

б) s сони $k^2 + pk + q = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлган ҳол. Бу ҳолда хусусий ечим $u_\bullet = xQ_m(x)$ кўринишда изланади;

в) s сони характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлган ҳол. Бу ҳолда хусусий ечим $u = x^2Q_m(x)e^{sx}$ кўринишида изланади.

6-мисол. $y^{II} - 7y^1 + 12y = x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Аввал бир жинсли $y^{II} - 7y^1 + 12y = 0$ тенгламани ечамиз. Характеристик тенглама $k^2 - 7k + 12 = 0$ бўлиб,унинг илдизлари: $к_1=3$, $к_2=4$. Берилган тенгламанинг ўнг томонидаги функцияни $p_4(x)e^{sx} = xe^{sx}$ деб қарасак, s=0 бўлиб, $к\neq к_2$. Шунинг учун унинг ҳусусий ечимини

$$u = (A_0x + A_1)e^{ox} = A_ox + A_1$$

кўринишда излаймиз. u^1 ва u^{II} ни топиб, ўрнига қўямиз:

$$-7A_1 + 12A_ox + 12A_1 = x$$

Бу ердан A_0A_1ни топамиз:

$$12A_0 = 1 \qquad A_o = \frac{1}{12}, \qquad -7A_0 + 12A_1 = 0 \quad A_1 = \frac{7}{144}$$

Демак, ҳусусий ечим

$$u = \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

кўринищда, умумий ечими эса

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{4^x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

кўринишда бўлади.

7-мисол. $y^{II} - 5y^1 + 6y = 3e^{2x}$

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизлари $K_1=3$, $K_2=2$. Бу ерда sхарактеристик тенглама илдизларидан бирига s=2. Шунинг учун, берилган тенгламанинг ҳусусий ечимини

$$u = xA_oe^{2x}$$

кўринищда излаймиз. u^{1} ва u^{II} ни топиб, тенгламага қўямиз:

$$2A_oe^{2x} + 2A_oe^{2x} + 4A_oxe^{2x} - 5A_0e^{2x} - 10A_0xe^{2x} + 6A_0xe^{2x} = 3e^{2x}$$

Соддалаштирамиз:

$$-A_0e^{2x}=3e^{2x}$$

Бу ердан: A_0=-3. Демак, умумий ечим

$$У=(C_2e^{2x}+c_2e^{3x})-3xe^{2x}$$

ёки

$$У=C_1e^{3x}+(C_2-3x)e^{2x}$$

бўлади.

8-мисол. $y^{II}-4y^{I}+4y=3e^{2x}$

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $K_1=K_2=2$ илдизларга эга бўлиб, S нинг қийматига тенгдир $(s=2)$; в) ҳолига кўра ҳусусий ечимини $U=x^2A_0e^{2x}$ кўринишида излаймиз. Сўнгра:

$$u^{I}=2xA_0e^{2x}+A_22x^2e^{2x}$$
$$u^{II}=2A_0e^{2x}+4A_0xe^{2x}+4A_0x^2e^{2x}$$

Буларни тенгламага қўямиз:

$2A_0e^{2x}+4A_0xe^{2x}+4A_0xe^{2x}+4A_0x^2e^{2x}-8A_0xe^{2x}-$
$8A_0x^2e^{2x}+4A_0x^2e^{2x}=3e^{2x}$.

$2A_0e=3e^{2x}$ былиб, $A_0=\frac{3}{2}$ га тенгдир. Бу ердан хусусий ечим:

$$U= \frac{3}{2}x^2e^{2x}.$$

Умумий ечим: $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{3}{2}x^2\ e^{2x}$ ёки

$$Y=(C_1+C_2x+\frac{3}{2}x^2)e^{2x}$$

Мисол ва масалалар

Қуйида келтирилган функциялар мос дифференциал тенгламаларнинг ечими бўлишини кўрсатинг:

1. $y=\frac{3}{2}x^2+c \qquad y^1=3x$
2. $y=\frac{25}{4}(x+c)^2 \qquad y^1=5\sqrt{y}$
3. $y=-\sin x+c_1x^2+c_2x+c_3 \quad y^{III}=\cos x$
4. $y=c(x^2-1)$, $dy.(x^2-1)-2xydx=0$
5. $y=-\frac{c}{\cos^2 x} \quad y^1-2tgx.y=0 \ \ (-\frac{\overline{II}}{2}<x<\frac{\overline{II}}{2})$
6. $y=c_1(c_2x-1-x^2) \qquad y^{II}+\frac{2x}{1-x^2}y^1-\frac{2y}{1-x^2}=0-1<x<1)$
7. $y=ce^{-\sin x}+\sin x-1 \ \ y^1+y\cos x=\sin x\cos x$

Қуйидаги биринчи тартибли дифференцал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

8. $y^1.x^3=2y$
9. $y^1=x(y^2+1)$
10. $y^1-\frac{1}{x}y=x$
11. $y^1+\frac{2}{x}y=x^3$

12. $y^{1^2} - \frac{2}{x}y = -1$

13. $4y^{1^2} - 9x = 0$

14. $y^1 - \frac{2x-1}{x2}y = 1$

15. $(1-x^2)y^1+xy=a$

Қуйидаги биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечинг:

25. $y^1-9y=0$

26. $y^1=\overline{\Pi^2 y}$

27. $y^1+y=x$

28. $y^1-y=e^x$

29. $y^1+y=cosx$

Қуйидаги иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечинг.

46. $y^{II}-5y^I+6y=0$

47. $y^{II}-9y=0$

48. $y^{II}+y=0$

49. $y^{II}+2y^{I+}y=0$

50. $y^{II}+4y^I+13y=0$

51. $y^{II}-4y=x^2e^{2к}$

52. $y^{II}+2y^I+y=e^{2x}$

53. $y^{II}-y=e^x$

54. $y^{II}+y^I-2y=8sin2x$

55. $y^{II}+y^I=sin^2x$

Босишга рухсат этилди 5.06.03. Бичими 64х80 $^{1}/_{16}$. Шартли босма табоғи 10.
Нашриёт босма табоғи 10. Адади 500 нусха. Баҳоси келишилган нархда.

Ўзбекистон Республикаси Давлат Матбуот қўмитасининг 10-505 сонли гувоҳномаси асосида ТошДАУ нашр таҳририяти бўлимининг РИЗОГРАФ аппаратида чоп этилди.