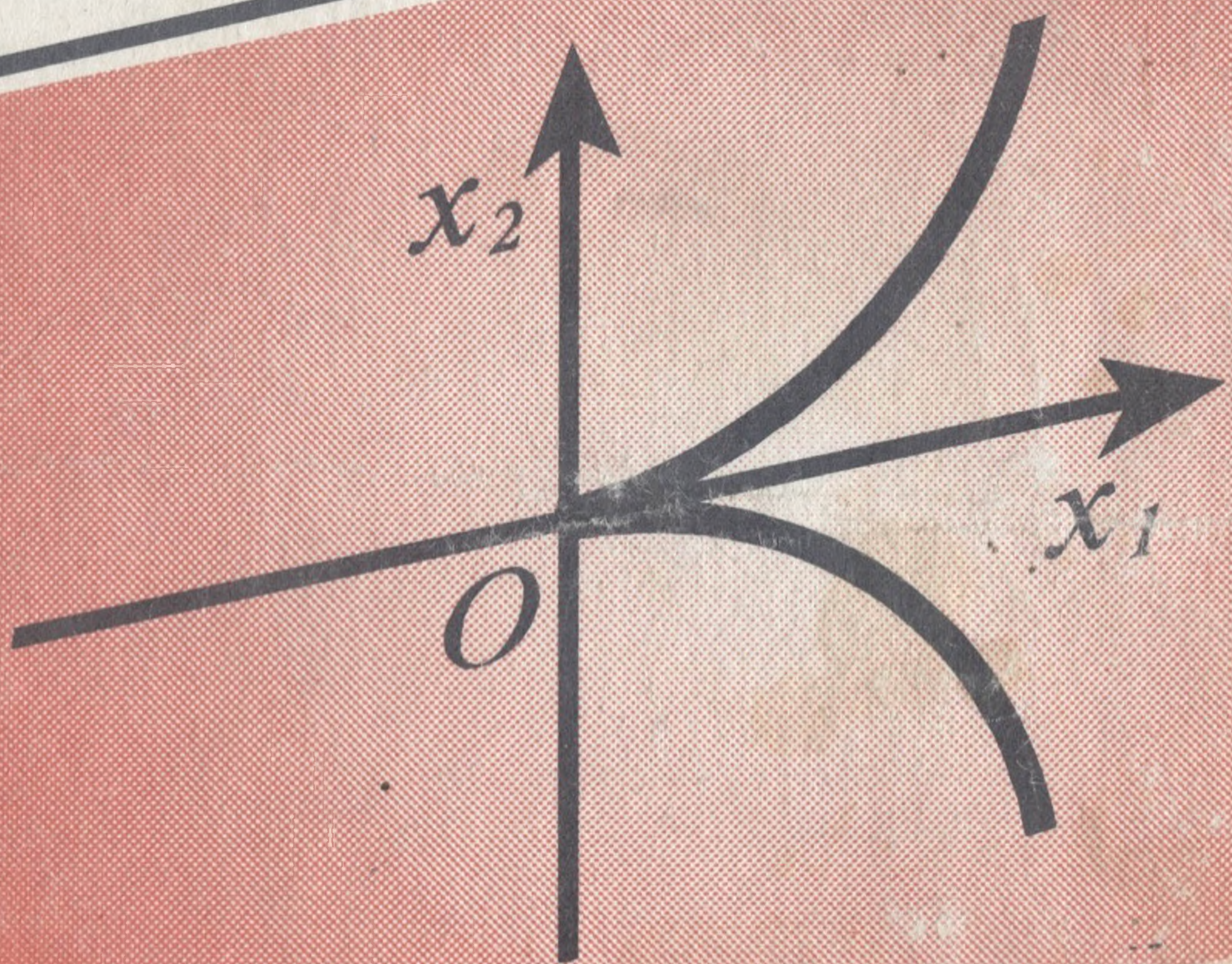
Р. ГАБАСОВ, Ф. КИРИЛЛОВА

ОПТИМАЛЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ



"ЎЗБЕКИСТОН"

Таржимонлар: **Х. Н. Жумаев, И. И. Исроилов**

Муҳаррирлар: **У. Ҳусанов, Ю. Музаффархўжаев**

ISBN 5—640—01326—5

Г $\frac{1602070000-102}{У\ 353\ (04)-95}$ 95

РУСЧА НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Оптималлаштириш масалалари инсон фаолиятининг хилма-хил соҳаларида учрайди. Ҳар бир оқилона ҳаракат қандайдир маънода оптимал ҳам бўлади, чунки у, одатда, бошқа вариантлар билан таққослангандан сўнг танланади. Энг яхши усулда танлаш масалаларига қизиқиш ҳамиша катта бўлиб келган, у кейинги йилларда фан ва техниканинг жадал ривожланиши натижасида янада кучайди. Бир томондан, одамларга кўп ҳолда мавжуд воситалар ва ресурслардан энг кўп самара билан фойдаланиш талаб қилинадиган жараёнлар билан шуғулланишга тўғри келса, иккинчи томондан, ҳисоблаш техникасининг ривожланиши натижасида инсоннинг ўрганиладиган жараёнларга таъсир қилиш имконияти ортиб бораяпти. Ҳозирги замон амалий оптималлаштириш масалаларининг мураккаблиги билан боғлиқ ўлароқ, қарор қабул қилишда борган сари «идрокка», интуиция ва инсон тажрибасига асосланиш қийинлашиб боряпти. Текширилаётган масалаларни математик моделлаштиришга асосланган илмий ёндашув зарур бўлиб бормоқда.

Геометрик шакл (доира, квадрат ва ҳ. к.) ларнинг экстремал хоссаларини ўрганиш ҳақидаги биринчи масалалар жуда қадим замонлардаёқ ечилган. Дифференциал ва интеграл ҳисобнинг юзага келиши оптималлаштириш усулларининг ривожланишига кучли таъсир кўрсатиб, бу ҳол XVIII асрда вариацион ҳисобнинг пайдо бўлишига олиб келди. Ҳозирги замон илмий техника инқилоби натижасида оптималлаштириш назарияси ва амалиёти жадал ривожлана бошлади. Қисқа вақт ичида назариянинг шундай янги бўлимлари (чизиқли программалаштириш, оптимал бошқарув назарияси ва бошқалар) яратилдики, улар амалда учрайдиган кўплаб экстремал масалаларни ечишнинг қатор самарали ҳисоблаш усулларини яратишга олиб келди. Оптималлаштириш усуллари бўйича изланишлар узлуксиз чуқурлашиб, татбиқ доираси кенгаймоқда.

«Оптималлаштириш усуллари» курси бўйича 0647 («Амалий математика») ихтисослиги учун мавжуд дастур асосида ёзилган мазкур ўқув қўлланмасида ҳар хил оптималлаштириш масалаларини ечишда қўлланиладиган, ҳозирги вақтда назарий ва амалий ишда фойдаланиладиган асосий усуллар баён қилинади. Асосий эътибор оптималлаштириш усулларининг принципиал масалаларига қаратилган. Батафсил баён эса баъзи классик бўлиб қолган усуллар учунгина берилади. Усул деб атаса ҳам бўладиган баъзи услублар умумий принципларни амалда қўллаш намунаси сифатида тайин мисолларда баён қилинади.

Қўлланманинг иккинчи нашри биринчисидан келтирилган материалнинг ҳажми, уни баён қилишнинг шакли ва тартиби билан фарқ қилади. Бунда Белоруссия давлат университети амалий математика факультетида ўқитиш тажрибасидан фойдаланиб, оптималлаштириш усулларининг охирги йиллардаги тараққиёти натижалари ҳисобга олинган.

Дастлаб чизиқли программалатиришнинг классик усуллари баёни берилган. Биринчи нашрда бу материал чизиқсиз ва квадратик программалаштиришнинг умумий натижаларидан кейин келган эди. Энди эса у бутун курсга асос қилиб олинган. Баённинг бундай тартиби баъзи университетларда алоҳида ўқитилаётган чизиқли программалаштириш бўйича маърузаларни оптималлаштиришнинг умумий курси билан табиий боғлаш имкониятини беради. 1 бобнинг натижалари оптималлаштиришнинг умумий масалаларини текширишда муҳим бўлиб, қайтақайтқ қўлланилади. Айниқса бу ерда топилган тенгсизликлар ва қавариқ кўпёқли тўпламлар назариясидан қўшимча маълумотлар талаб қилмайдиган ихчам ва содда баён қўлланма таркибини ўзгартиришга сабаб бўлди. Аввало симплекс усул ЭҲМ да фойдаланиш учун қулай ҳолда келтирилиб, сўнгра мисоллар ечишда унинг ҳозирги замон машина программаларида кўпдан бери ишлатилмаётган анъанавий жадвал шакли тушунтирилади. Чизиқли программалаштиришнинг иккиланмалик назарияси (2-§) симплекс усулнинг таҳлилидан чиқарилади. Бу унга маълум маънода конструктивлик бахш этади ва табиий йўл билан иккиланма симплекс усулни (3-§) киритиш имконини беради. Иккинчи нашрда ҳозирги пайтда ҳар бир тугалланган оптималлаштириш усули учун характерли бўлган тўғри ва иккиланма симплекс усулларнинг бирлиги алоҳида қайд қилинади. Нақлиёт (транспорт) масалаларини ечиш усуллари ҳам янгича баён қилинган. Бунга асос қилиб потенциаллар усули ҳамда ечилиши матрицавий кўринишга мослаштириладиган турли модел олинган.

Иккинчи нашрда қавариқ программалаштиришнинг (II боб) баёни асосан чизиқли программалаштириш натижаларига асосланади. Қўшимча равишда, тўғри симплекс усулнинг бевосита умумлашмаси бўлган квадратик программалаштириш қавариқ масалаларини ечишнинг чекли усули келтирилади.

Чизиқсиз программалаштириш (III боб) назариясини баён қилишда асосан биринчи нашрда келтирилган масалалар қаралган бўлиб, улар I бобнинг натижаларига асосланган.

Чизиқсиз программалаштиришнинг ҳисоблаш усуллари (IV боб) бўйича материал асосан қайта ишлаб чиқилган. Усуллар кетма-кет яқинлаштириш принципи нуқтаи назаридан баён қилинган. Амалий масалаларни ечишда фойдаланиладиган бошқа оптималлаштириш усулларининг моҳияти ҳам тушунтирилади.

Янги нашрда динамик программалаштириш (V боб) чизиқсиз программалаштиришнинг ҳисоблаш усулларидан кейин келиб, у махсус масалаларни ечиш усули сифатида талқин қилинади. Физик маъноси аниқ бўлган масалалар мисолида динамик программалаштиришнинг асосий принциплари ҳамда масалалар хусусиятларини ҳисобга оладиган шакллари тушунтирилади. Динамик программалаштиришнинг оптимал бошқарув масалаларига татбиқи VII бобга кўчирилган.

Классик вариацион ҳисобнинг (VI боб) асосий натижалари баъзи янги натижалар билан тўлдирилган ва биринчи нашрдаги каби фақат кучсиз минимум шартлари қаралган. Кучли минимум шартлари (VII боб) оптимал бошқарув назарияси натижаларидан ҳосил қилинади.

Қўлланма оптимал бошқарув назариясининг асосий масалаларини (VII боб) кўриш билан тугалланади. Иккинчи нашрда бу материал қайта ишланган ва кейинги йилларда ривожлантирилиб, амалда қўлланилаётган мавзулар билан тўлдирилган.

тремал масалаларни ечишнинг қатор самарали ҳисоблаш усулларини яратишга олиб келди. Оптималлаштириш усуллари бўйича изланишлар узлуксиз чуқурлашиб, татбиқ доираси кенгаймоқда.

«Оптималлаштириш усуллари» курси бўйича 0647 («Амалий математика») ихтисослиги учун мавжуд дастур асосида ёзилган мазкур ўқув қўлланмасида ҳар хил оптималлаштириш масалаларини ечишда қўлланиладиган, ҳозирги вақтда назарий ва амалий ишда фойдаланиладиган асосий усуллар баён қилинади. Асосий эътибор оптималлаштириш усулларининг принципиал масалаларига қаратилган. Батафсил баён эса баъзи классик бўлиб қолган усуллар учунгина берилади. Усул деб атаса ҳам бўладиган баъзи услублар умумий принципларни амалда қўллаш намунаси сифатида тайин мисолларда баён қилинади.

Қўлланманинг иккинчи нашри биринчисидан келтирилган материалнинг ҳажми, уни баён қилишнинг шакли ва тартиби билан фарқ қилади. Бунда Белоруссия давлат университети амалий математика факультетида ўқитиш тажрибасидан фойдаланиб, оптималлаштириш усулларининг охирги йиллардаги тараққиёти натижалари ҳисобга олинган.

Дастлаб чизиқли программалатиришнинг классик усуллари баёни берилган. Биринчи нашрда бу материал чизиқсиз ва квадратик программалаштиришнинг умумий натижаларидан кейин келган эди. Энди эса у бутун курсга асос қилиб олинган. Баённинг бундай тартиби баъзи университетларда алоҳида ўқитилаётган чизиқли программалаштириш бўйича маърузаларни оптималлаштиришнинг умумий курси билан табиий боғлаш имкониятини беради. 1 бобнинг натижалари оптималлаштиришнинг умумий масалаларини текширишда муҳим бўлиб, қайта-қайта қўлланилади. Айниқса бу ерда топилган тенгсизликлар ва қавариқ кўпёқли тўпламлар назариясидан қўшимча маълумотлар талаб қилмайдиган ихчам ва содда баён қўлланма таркибини ўзгартиришга сабаб бўлди. Аввало симплекс усул ЭҲМ да фойдаланиш учун қулай ҳолда келтирилиб, сўнгра мисоллар ечишда унинг ҳозирги замон машина программаларида кўпдан бери ишлатилмаётган анъанавий жадвал шакли тушунтирилади. Чизиқли программалаштиришнинг иккиланмалик назарияси (2-§) симплекс усулнинг таҳлилидан чиқарилади. Бу унга маълум маънода конструктивлик бахш этади ва табиий йўл билан иккиланма симплекс усулни (3-§) киритиш имконини беради. Иккинчи нашрда ҳозирги пайтда ҳар бир тугалланган оптималлаштириш усули учун характерли бўлган тўғри ва иккиланма симплекс усулларнинг бирлиги алоҳида қайд қилинади. Нақлиёт (транспорт) масалаларини ечиш усуллари ҳам янгича баён қилинган. Бунга асос қилиб потенциаллар усули ҳамда ечилиши матрицавий кўринишга мослаштириладиган турли модел олинган.

Иккинчи нашрда қавариқ программалаштиришнинг (II боб) баёни асосан чизиқли программалаштириш натижаларига асосланади. Қўшимча равишда, тўғри симплекс усулнинг бевосита умумлашмаси бўлган квадратик программалаштириш қавариқ масалаларини ечишнинг чекли усули келтирилади.

Чизиқсиз программалаштириш (III боб) назариясини баён қилишда асосан биринчи нашрда келтирилган масалалар қаралган бўлиб, улар I бобнинг натижаларига асосланган.

Чизиқсиз программалаштиришнинг ҳисоблаш усуллари (IV боб) бўйича материал асосан қайта ишлаб чиқилган. Усуллар кетма-кет яқинлаштириш принципи нуқтаи назаридан баён қилинган. Амалий масалаларни ечишда фойдаланиладиган бошқа оптималлаштириш усулларининг моҳияти ҳам тушунтирилади.

Янги нашрда динамик программалаштириш (V боб) чизиқсиз программалаштиришнинг ҳисоблаш усулларидан кейин келиб, у махсус масалаларни ечиш усули сифатида талқин қилинади. Физик маъноси аниқ бўлган масалалар мисолида динамик программалаштиришнинг асосий принциплари ҳамда масалалар хусусиятларини ҳисобга оладиган шакллари тушунтирилади. Динамик программалаштиришнинг оптимал бошқарув масалаларига татбиқи VII бобга кўчирилган.

Классик вариацион ҳисобнинг (VI боб) асосий натижалари баъзи янги натижалар билан тўлдирилган ва биринчи нашрдаги каби фақат кучсиз минимум шартлари қаралган. Кучли минимум шартлари (VII боб) оптимал бошқарув назарияси натижаларидан ҳосил қилинади.

Қўлланма оптимал бошқарув назариясининг асосий масалаларини (VII боб) кўриш билан тугалланади. Иккинчи нашрда бу материал қайта ишланган ва кейинги йилларда ривожлантирилиб, амалда қўлланилаётган мавзулар билан тўлдирилган.

Иккинчи нашр устида ишлашда муаллифларга Белоруссия давлат дорилфунуни оптимал бошқарув усуллари кафедраси ҳамда Белоруссия ФА МИ нинг бошқарув жараёнлари назарияси лабораториясининг ходимлари катта ёрдам бердилар: О. И. Костюкова II бобнинг 3- § и, V бобнинг 2—5- § ини ишлаб чиқишда, В. М. Ракецкий II бобнинг 4- § ини ишлаб чиқишда қатнашди; III боб, 5- § ининг баёни А. Я. Кругерга тааллуқли; В. В. Гороховик VII бобнинг 3- ва 8- § ларини ёзган; В. С. Глушенков Блэнд модификациясининг янги исботини ишлаб чиқди; Т. Н. Гурина, М. П. Димков қўлёзмани нашрга тайёрлашда қатнашдилар. Мазкур ўртоқларга чуқур миннатдорчилик изҳор қиламиз.

Муаллифлар

1-боб. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ усули

Чизиқли программалаштириш деб чизиқли тенгликлар ва тенгсизликлар билан аниқланадиган тўпламларда чизиқли функцияларни оптималлаштириш масалалари (максимумга ёки минимумга доир масалалар) ўрганиладиган математиканинг бўлимига айтилади. Чизиқли программалаштиришнинг дастлабки масалалари 30- йилларда Л. В. Канторович томонидан қўйилган ва ўрганилган. Бу назариянинг жадал ривожланиши ва натижаларининг амалда кенг қўлланилиши 40- йилларда американик математик Ж. Данциг томонидан симплекс усул асослангандан кейин бошланган.

1- §. СИМПЛЕКС УСУЛ

Симплекс усул чизиқли программалаштиришнинг асосий ҳисоблаш усулидир.

1. Каноник масала. Базис режа. Классик симплекс усул чизиқли программалаштиришнинг *каноник масаласи* учун ишлаб чиқилган бўлиб, у m та чизиқли

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1} x_2 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

$(b_1, b_2, \ldots, b_m \geqslant 0)$ тенгликларни ва n та чизиқли

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0 \tag{2}$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиган n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси максимумини топиш ҳақидаги

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max \tag{3}$$

масаладан иборат.

Бундан буён, асосан, вектор-матрицавий ёзув қўлланилади. Ушбу $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ индекслар тўпламларини киритамиз. У ҳолда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар мажмуасини $x = x(J) = \{x_j,\ j \in J\}$ вектор кўринишида ёзиш мумкин. Шунга ўхшаш, $c = c(J) = \{c_j,\ j \in J\}$, $b = b(I) = \{b_i,\ i \in I\}$, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ параметрлар мажмуасини эса $A = A(I, J) = \{a_{ij},\ i \in I,\ j \in J\}$ матрица кўринишида ёзиш қулайдир. Векторлар ва матрицалар устида амаллар матрица ҳисобининг қоидалари бўйича амалга оширилади. Бунда амалларда иштирок этувчи ҳар бир вектор-устун кўринишида ёзилган деб ҳисобланади. Вектор-сатрни ҳосил қилиш учун (′) штрих белгиси билан ифодаланадиган транспонирлаш (ағдариш) операторидан фойдаланилади. Демак, $c = c(J)$, $x = x(J)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $c'x$ кўринишда ёзилади. x вектор учун ёзилган $x = 0$, $x \geqslant 0$ ифодалар мос равишда компоненталар бўйича ёзилган $x_j = 0$, $j \in J$ тенгликлар ва $x_j \geqslant 0$, $j \in J$ тенгсизликларни ифодалайди.

Янги белгилашларда (1) — (3) каноник масала ушбу

$$c'x \to \max,\ \ Ax = b,\ \ x \geqslant 0 \tag{4}$$

ихчам ёзувга эга бўлади.

c векторни *қиймат вектори* (c_j компоненталар—*қиймат коэффициентлари*), b векторни — *чеклашлар вектори*, A матрицани эса *шартлар матрицаси (ҳаражатлар матрицаси)*, $a_j = A(I, j)$ устунларни — *шартлар векторлари* деб аташ қабул қилинган. $c'x$ функция масаланинг *мақсад функцияси*,

$$Ax = b \tag{5}$$

тенглик каноник масаланинг *асосий чеклаши*, $x \geqslant 0$ тенгсизлик масаланинг *тўғри чеклаши* деб аталади.

1- таъриф. Масаланинг барча чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар бир n- вектор x шу масаланинг *режаси* деб аталади.

2- таъриф. (4) масаланинг ечими бўлган, яъни

$$c'x_0 = \max\ c'x,\ \ Ax^0 = b,\ \ x^0 \geqslant 0$$

хоссага эга бўлган x^0 режа *оптимал режа* деб аталади.

Симплекс усулнинг асосида *базис режа* тушунчаси ётади.

3-таъриф. Агар x режанинг $n-m$ та компонентаси нолга тенг бўлиб, қолган

$$x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{jm} \tag{6}$$

компоненталарига чизиқли эркли

$$a_{j_1},\ a_{j_2},\ \ldots,\ a_{jm} \tag{7}$$

шартлар векторлари мос бўлса, у базис режа деб аталади. $J_Б = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ тўпламни *базис индекслар тўплами* деб, $J_Н = J \diagdown J_Б$ ни эса *нобазис индекслар тўплами* деб атаймиз. 3-таъриф қуйидагига тенг кучли: $x_Н = x(J_Н) = 0$, $\det A_Б \neq 0$, $A_Б = A(I, J_Б)$ бўлса, $x = x(J)$ базис режа бўлади.

(7) тўплам базис режанинг *базиси* деб аталади, базиснинг векторларидан тузилган $A_Б$ матрица — *базис матрица*, x_j, $j \in J_Б$ компоненталар x режанинг *базис ўзгарувчилари*, x_j, $j \in J_Н$ компоненталар *нобазис ўзгарувчилари* деб аталади.

Изоҳ. Базис режа учун (5) асосий чеклашлар $A_Б x_Б = b$ кўринишни олади, бу ерда $x_Б = x(J_Б)$. Демак, $x = \{x_Б, x_Н\}$ базис режани базис матрица орқали қуриш мумкин: $x_Б = A_Б^{-1} b$, $x_Н = 0$. Шу туфайли, 3-таъриф ўрнига дастлаб A матрицанинг махсус бўлмаган ва $A_Б^{-1} b \geqslant 0$ шартни қаноатлантирувчи $m \times n$-қисм мартицасининг $A_Б$ базис матрица тушунчасини киритиб, сўнгра базис режани қуриш мумкин.

4-таъриф. Агар базис режанинг барча базис ўзгарувчилари (6) мусбат ($x_j > 0$, $j \in J_Б$) бўлса, базис режа *бузилмаган* дейилади.

2. Мақсад функцияси орттирмаси формуласи. Фараз қилайлик, x базис режа бўлиб, $A_Б = A(I, J_Б)$ унинг базис матрицаси бўлсин. Бошқа $\bar{x} = x + \Delta x$ режа олиб (базис бўлиши шарт эмас), мақсад функциясининг

$$c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x$$

орттирмаси учун формула топамиз.

Фаразимизга кўра, $A\bar{x} = b$, $Ax = b$. Демак, режанинг $\Delta x = \bar{x} - x$ орттирмаси $A \Delta x = 0$ тенгликни қаноатлантиради. Бу тенгликнинг компоненталар бўйича ифодаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$A_Б \Delta x_Б + A_Н \Delta x_Н = 0,\ A_Н = A(I, J_Н),$$
$$\Delta x_Б = \Delta x(J_Б),\ \Delta x_Н = \Delta x(J_Н). \tag{9}$$

Бундан

$$\Delta x_Б = -A_Б^{-1} A_Н \Delta x_Н \tag{10}$$

ни топамиз ва натижани (8) га қўямиз:

$$c' \Delta x = c'_Б \Delta x_Б + c'_Н \Delta x_Н = -(c'_Б A_Б^{-1} A_Н - c'_Н) \Delta x_Н,$$
$$c_Б = c(J_Б). \tag{11}$$

$u = u(I)$ потенциалларнинг m- вектори

$$u' = c'_Б A_Б^{-1} \tag{12}$$

ни ва $\Delta_Н = \Delta(J_Н)$ баҳоларнинг $(n - m)$- вектори

$$\Delta'_Н = u' A_Н - c'_Н \tag{13}$$

ни киритамиз.

(12), (13) ни ҳисобга олиб, (11) дан мақсад функцияси орттирмаси учун

$$c'\overline{x} - c'x = -\Delta'_Н \Delta x_Н = \sum_{j \in J_Н} \Delta_j \Delta x_j \tag{14}$$

формулани ҳосил қиламиз.

(14) формуладан ва тезликнинг ҳосила сифатидаги умумий таърифидан Δ_j баҳонинг физик маъноси келиб чиқади: Δ_j — базис режанинг нобазис j- ўзгарувчиси ортганда мақсад функциясининг x нуқтадаги тескари ишора билан олинган ўзгариш тезлигидир.

3. Оптималлик аломати. Фараз қилайлик, x базис режа бўлиб, $A_Б$ унинг базис матрицаси бўлсин. (4) масалани ечишда савол туғилади: берилган режа оптимал бўладими? Шу x режа учун баҳолар вектори (13) ни ҳисоблайлик.

1- теорема (оптималлик аломати). Қаралаётган x базис режанинг оптимал бўлиши учун

$$\Delta(J_Н) \geqslant 0 \tag{15}$$

тенгсизликнинг бажарилиши етарли, x режа бузилмаган (айнимаган) ҳолда зарур ҳамдир.

Исботи. *Етарлилиги.* Базис режанинг таърифига кўра $x(J_Н) = 0$ тенглик бажарилади. Тўғри чеклашлардан ихтиёрий x режа учун

$$\Delta x(J_{\text{Н}}) = \bar{x}(J_{\text{Н}}) - x(J_{\text{Н}}) = \bar{x}(J_{\text{Н}}) \geqslant 0 \qquad (16)$$

муносабатларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Сўнгра (15) ва (16) лардаги $\Delta(J_{\text{Н}})$, $\Delta x(J_{\text{Н}})$ векторларни (14) орттирма формуласига қўйсак, x режанинг оптимал эканлигини исботловчи $c'\bar{x} - c'x \leqslant 0$ тенгсизликка келамиз.

Зарурийлиги. Фараз қилайлик, x

$$x(J_{\text{Б}}) > 0 \qquad (17)$$

шартни қаноатлантирувчи бузилмаган базис режа бўлиб, (15) тенгсизлик бажарилмасин, яъни бирор $j_0 \in J_{\text{Н}}$ учун Δ_{j_0} баҳо манфий бўлсин:

$$\Delta_{j_0} < 0. \qquad (18)$$

Δx ни қуйидагича танлаш ҳисобига $\bar{x} = x + \Delta x$ векторни тузамиз. Нобазис компоненталарни қуйидагича танлаймиз:

$$\Delta x_{j_0} = \theta \geqslant 0,\ \Delta x_j = 0,\ j \neq j_0,\ j \in J_{\text{Н}}. \qquad (19)$$

Базис компоненталарни (10) дан топамиз:

$$\Delta x(J_{\text{Б}}) = -A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{Н}} \Delta x(J_{\text{Н}}) = -\theta A_{\text{Б}}^{-1} a_{j_0}. \qquad (20)$$

Шунда $\bar{x}$ вектор, (9) га кўра, ҳар қандай θ да асосий чеклашларни қаноатлантиради:

$$A\bar{x} = Ax + A\Delta x = Ax = b.$$

Шунингдек, (19) дан $\bar{x}(J_{\text{Н}})$ компонента барча $\theta \geqslant 0$ лар учун тўғри чеклашларни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$\bar{x}(I_{\text{Н}}) = x(J_{\text{Н}}) + \Delta x(J_{\text{Н}}) = \Delta x(I_{\text{Н}}) \geqslant 0. \qquad (21)$$

Сўнгра, (20) ни ҳисобга олсак, $x(J_{\text{Б}})$ компонента учун

$$\bar{x}(J_{\text{Б}}) = x(J_{\text{Б}}) + \Delta x(J_{\text{Б}}) = x(J_{\text{Б}}) - \theta A_{\text{Б}}^{-1} a_j, \qquad (22)$$

муносабатни оламиз. Маълумки, (17) муносабат бажарилганда шундай етарли кичик $\theta > 0$ сон топиладики, $\bar{x}(J_{\text{Б}}) \geqslant 0$ бўлади. Шундай қилиб, топилган θ учун $\bar{x}$ вектор (4) масаланинг режаси бўлади. (18), (19) ларни (14) орттирма формуласига келтириб қўйсак, x режанинг оптималлигига зид бўлган

$$c'\bar{x} - c'x = -\theta\Delta x_{j_0} > 0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Теорема исботланди.

4. Масала ечилмайдиган бўлишининг етарлилик шарти Фараз қилайлик, қаралаётган x базис режада оптималлик аломати (15) бажарилмасин, яъни бирор $j_0 \in J_Н$ учун Δ_{j_0} баҳо манфий бўлсин ((18) га қ.). $A_Б^{-1} a_{j_0}$ векторнинг x_{jj_0}, $j \in J_Б$ компоненталари мусбат бўлмаган ҳолни қараймиз:

$$x_{jj_0} \leqslant 0, \quad j \in J_Б.$$

Бу ҳолда, (22) га кўра, барча $\theta \geqslant 0$ лар учун $\bar{x}(J_Б)$ компонента манфий бўлмайди, яъни $\bar{x} = \{\bar{x}(J_Б), \bar{x}(J_Н)\}$ вектор ихтиёрий $\theta \geqslant 0$ учун (4) масаланинг режаси бўлади. (23) дан кўринадики, θ ортиши билан $\bar{x}$ режада мақсад функциясининг қиймати чексиз ортади. Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик:

2- теорема. x базис режанинг баҳолари орасида манфий баҳо мавжуд бўлса ($\Delta_{j_0} < 0$) ва унга мусбат бўлмаган компоненталарга эга $A_Б^{-1} a_{j_0}$ вектор мос бўлса, у ҳолда (4) масаланинг мақсад функцияси x базис режанинг x_{j_0} ўзгарувчиси ортиши билан чексиз ўсади.

5. Итерация. $A_Б$ базис матрицали x базис режани таҳлил қилишни давом эттирамиз. Энди бирорта ҳам манфий Δ_{j_0} баҳо учун (24) тенгсизликлар бажарилмаган ҳолни қараймиз. У ҳолда (23) дан кўринадики, (18) бажарилганда, (19) даги θ нинг ортиши мақсад функциясининг ўсишига олиб келади. Шунинг учун, (4) масала нуқтаи назаридан, θ-нинг максимал мумкин бўлган қийматини танлаб олиш мақсадга мувофиқдир. Компоненталар бўйича $\bar{x}_j = x_j - \theta x_{jj_0}$, $j \in J_Б$ кўринишда ёзилган (22) формуладан кўринадики, θ ортиши билан $\bar{x}(J_Б)$ векторнинг камида битта компонентаси манфий бўлиб қолади. Фақат мусбат x_{jj_0} кўпайтувчига эга $\bar{x}_j$ компоненталаргина ноль орқали ўтади, x_j учун бу ҳол

$$\theta = \theta_j = x_j / x_{jj_0} \tag{25}$$

бўлганда амалга ошади.

Агар $\theta \leqslant \min \theta_j$, $x_{jj_0} > 0$ бўлса, барча (25) сонлар манфий бўлмайди ва $\bar{x} = \{\bar{x}(J_Б), \bar{x}(J_Н)\}$ вектор (4) масаланинг режаси бўлади. Агар $\theta > \min \theta_j$, $x_{jj_0} > 0$ бўлса, $\bar{x}$ вектор компоненталари орасида манфийлари топилади. Демак,

$\bar{x} = x + \Delta x$ вектор режа бўла олиши учун энг катта θ^0 қуйидагича бўлиши керак:

$$\theta^0 = \theta_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{\substack{x_{ij_0} > 0 \\ i \in J_Б}} \frac{x_i}{x_{ij_0}}. \tag{26}$$

Агар x базис режа бузилмаган (яъни $x_i > 0$, $i \in J_Б$) бўлса, у ҳолда

$$\theta^0 > 0. \tag{27}$$

Базис режа x ни янги $\bar{x} = x + \Delta x$ режа билан алмаштирамиз, бу ерда Δx—компоненталари (19), (20) бўлган вектор бўлиб, $\theta = \theta^0$. Бу ҳолда (23) га кўра мақсад функцияси $-\Delta_{j_0} \theta^0 \geqslant 0$ миқдорга ортади ва бу миқдор, агар дастлабки x режа бузилмаган бўлса, (18), (27) ларга кўра мусбат бўлади.

Шу $\bar{x}$ нинг базис режа эканлигини кўрсатамиз. $\bar{x}_j$, $j \in J_Н$ компоненталар ичида фақат битта $\bar{x}_{j_0} = \theta^0$ компонента мусбат бўлиши мумкин. Иккинчи томондан, $\bar{x}_i$, $i \in J_Б$ компоненталар ичида битта $\bar{x}_{i_0}$ компонента албатта нолға тенг бўлади, чунки (25), (26) ларга асосан,

$$\bar{x}_{i_0} = x_{i_0} - \theta^0 x_{i_0 j_0} = x_{i_0} - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} \cdot x_{i_0 j_0} = 0.$$

Шундай қилиб, $\bar{x}$ режанинг $n - m$ та

$$\bar{x}_j, \ j \in \bar{J}_Н, \ \bar{J}_Н = (J_Н \setminus j_0) \cup i_0,$$

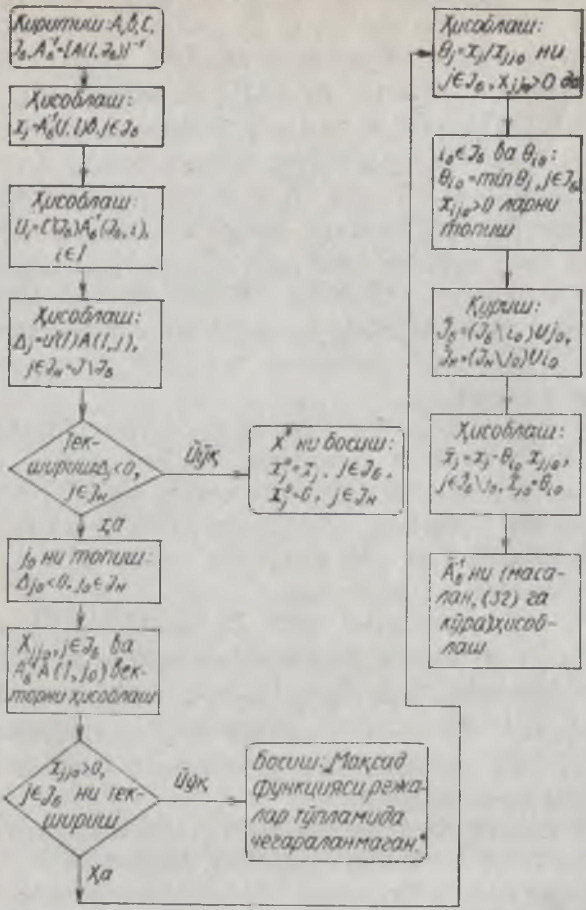
ўзгарувчилари нолга тенг бўлади. Қолган $\bar{x}_i$, $i \in \bar{J}_Б$, $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus i_0) \cup j_0$ ўзгарувчиларга

$$a_i, \ \ i \in \bar{J}_Б \tag{28}$$

шарт векторлари мос келади.

$A_Б^{-1}$ матрицанинг элементларини u_{ij}, $i \in J_Б$, $j \in I$ деб белгилайлик. Таърифга кўра, $A_Б^{-1}$ матрицанинг j - устуни бирлик $e_j = \{0, 0, \ \ldots, \ 0, 1, 0, \ \ldots, \ 0\}$ векторнинг $A_Б = \{a_i, i \in J_Б\}$ матрицанинг устунлари бўйича ёйилмаси коэффициентларидан иборатдир:

$$\sum_{i \in J_Б} a_i u_{ij} = e_j, \ j \in I. \tag{29}$$



1.1- чизма.

агар $i \neq j$, $j \neq i_0$ бўлса, $d_{ii_0} = -x_{ij_0}/x_{i_0j_0}$, $i \in \bar{J}_Б \setminus j_0$, $i \neq j_0$; $d_{j_0i_0} = 1/x_{i_0j_0}$.

Агар $J_Б = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k = i_0, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_m\}$, $\bar{J}_Б = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_m\}$ бўлса, яъни $\bar{J}_Б$ тўпламнинг j_0 индекси $J_Б$ тўпламнинг i_0 индекси билан бир хил жойлашган бўлса, D_k матрица бирлик диагонал матрицадан фақат i_0- устуни билан фарқ қилади ва қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$
D_k = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_1 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & -x_{i_2 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_m j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} \dots j_0. \qquad (35)
$$

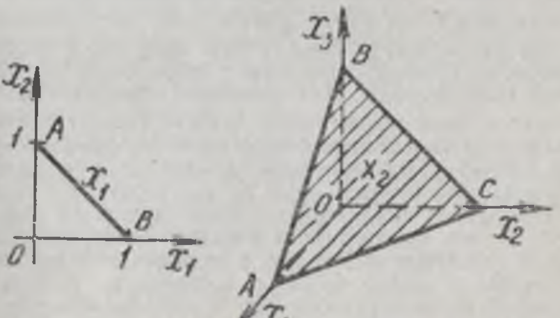
Бошланғич $A_{Б}^{-1}$ матрица (9- бандга қ.) бирлик матрица бўлганлигидан (34) дан

$$(A_{Б}^{-1})_{k+1} = D_k D_{k-1} \dots D_1 \qquad (36)$$

ни оламиз.

Тескари матрицанинг (36) мультипликатив кўриниши бизни $(A_{Б}^{-1})$ $(m \times m)$- матрицаларни қайта ҳисоблашдан озод қилади ва дастлабки маълумотга $m+1$ сондан иборат тўпламни (i_0- устуннинг тартиб рақами ва элементлари) қўшиш имконини беради. Яхлитлаш натижасидаги хатоларнинг тўпланишини камайтириш учун маълум бир сондаги итерациялардан кейин тескари матрица янгиланади ва сўнгра яна (35) кўпайтувчилар ҳисобланади. Кейинги йилларда тескари матрицанинг (36) дан фарқ қилувчи кўринишларидан ҳам фойдаланила бошланди.

7. Геометрик талқин. Геометрик усул. Чекли сондаги яримфазолар ва гипертекисликларнинг кесишуви натижасида ҳосил бўлган тўплам кўпёқли тўплам деб аталади. 1.2- чизмада R_2 ва R_3 да иккита кўп ёқли $X_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$, $X_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\}$ тўпламлар тасвирланган. Демак, чизиқли программалаштириш масаласининг режалар тўплами—*кўпёқликдир*. Кўпёқли тўпламда базис режага *четки (бурчак) нуқта (уч)*, яъни, тўплам-



1.2- чизма

да тўла ўтувчи, нолдан фарқли ҳеч бир чизиқ кесмасининг ўртасига киритиш мумкин бўлмаган нуқта мос келади. Масалан, X_1 ва X_2 тўпламларнинг четки нуқталари A, B, C лардан иборат (1.2- чизма). Симплекс итерация бир четки нуқтадан унга қўшни бўлган иккинчи четки нуқтага уларни туташтирувчи қирра бўйлаб шундай ўтишга мос келадики, мақсад функциясининг ундаги қиймати эски нуқтадагисидан кам бўлмайди. Симплекс усул—режалар тўпламининг қирралари бўйича шундай йўналган ҳаракатдан иборатки, унда мақсад функцияси ўсмайдиган қирралар чиқариб ташланади. Симплекс усул ўз номини режалар тўпламининг структурасига кўра олган бўлиб, бу тўплам дастлабки ечилган масалаларда, *симплекс* деб аталувчи x_1, x_2 тўпламлар (1.2- чизма) кўринишида бўлган.

Агар $n = 2$ ва m ихтиёрий бўлса, $\{x_1, x_2\}$ текисликда график усулда $X = \{x : a_i' x \leqslant b_i, \ i = \overline{1, m}, \ x = \{x_1, x_2\} \geqslant 0\}$ кўринишдаги тўпламларни қуриш осон. Шунингдек, чизиқли $c'x$ функциянинг сатҳ чизиқларини таҳлил қилиш ёрдамида $c'x \to \max$, $x \in X$ масаланинг ечимини топиш қийин эмас. Чизиқли программалаш масалаларини геометрик усулда ечишнинг моҳияти шундан иборат. Агар $n = 3$ бўлса, уни амалга ошириш қийин бўлиб, $n > 3$, $m > 3$ бўлганда умуман қўлланилмайди.

8. Симплекс алгоритмнинг чеклилиги. Агар оптималлаштириш масаласини ечиш алгоритмининг ЭҲМ даги реализацияси чекли сондаги операциялар ёрдамида (чекли вақт давомида) оптимал режа қуришни амалга оширса, бундай алгоритм (ва унга мос усул) чекли дейилади. Ҳар бир симплекс итерация ЭҲМ нинг чекли сондаги операцияларини ўз ичига олганлигидан, симплекс алгоритмнинг чеклилигини кўрсатиш учун унинг итерацияларининг чеклилигини кўрсатиш етарлидир.

Агар чизиқли программалаш каноник масаласининг барча базис режалари бузилмаган бўлса, бундай масала *бузилмаган масала* деб аталади.

3- теорема. Ечимга эга бўлган ҳар бир бузилмаган (4) масала ва ихтиёрий бошланғич базис режа учун симплекс алгоритм чеклидир.

Исботи. Фараз қилайлик, x^1 ихтиёрий базис режа бўлсин. Симплекс итерациялар ёрдамида x^k, $A_Б^k$, $k = 1, 2, \ldots$, базис режалар ва базис матрицалар кетма-кетлигини тузамиз. Ҳар бир $x^k \to x^{k+1}$ итерацияда x^k бузилмаган бўлганлигидан, мақсад функцияси $c'x$ ўсувчи бўлади. Шунингдак, $c'x^k = c'(J_Б^k)\, x(J_Б^k) = c'(J_Б^k)(A_Б^{-1})_k b$ бўлганлигидан итерациялар жараёнида бирорта базис матрица икки марта такрорланмайди. Шарт матрицаси A чекли сондаги базис матрицаларга эга. Демак, чекли сондаги итерациялардан сўнг оптималлик аломатини қаноатлантирувчи x^{k_0}, $k_0 < \infty$ базис режани қуриш мумкин. Теорема исботланди.

Бузилган (4) масалаларда бузилган базис режали баъзи итерацияларда $\theta^\circ = 0$ бўлганлиги туфайли мақсад функциясининг қиймати ўзгармаслиги мумкин. Агар бу ҳол қаторасига бир неча бор такрорланса, олдин фойдаланилган базис матрицага қайтиш хавфи туғилади. Бу ҳол кузатиладиган мисоллар мавжуддир. Бу жараён *цикланиш* деб аталади. Равшанки, цикланиш бўлганда симплекс алгоритм чекли бўлмайди. Симплекс алгоритмнинг базис матрицалар такрорланиши юз бермайдиган махсус модификациялари қурилган. Бу чекли модификациялар ЭҲМ программаларида қўлланилмайди. чунки цикланиш жуда кам учрайдиган ҳодиса бўлиб, уни ЭҲМда амалга ошириш қийин ва мутахассисларнинг таъкидлашича, амалий масалаларда кузатилган эмас. Бузилган масалаларнинг табиати шундайки, масала параметрларининг етарли кичик вариациялари мавжуд бўлиб, улардан сўнг масала бузилмаган бўлиб қолади. Лекин, кўпгина амалий масалаларни ЭҲМда ечишдаги яхлитлаш натижасидаги хатолар таъсири қандайдир маънода параметрларнинг вариациясига эквивалент бўлганлигидан, 3—6- бандларда баён қилинган симплекс усулни чизиқли программалаштиришнинг ихтиёрий каноник масаласини ечишнинг чекли усулидан иборат, деб ҳисоблаш мумкин.

Симплекс усулнинг Блэнд томонидан тавсия этилган чекли модификациясини келтирамиз, бунда j_0 — оптималлик аломати (15) ни каноатлантирмайдиган Δ_j бахолар индекслари $j \in J_{\text{Н}}$ ичида минимал индекс, i_0 — максимал жоиз қадам θ^0 ни амалга оширадиган θ_{i_0} сонларнинг индекслари $i_0 \in J_{\text{Б}}$ ичида энг кичигидир.

Блэнд модификациясида цикл рўй берган деб ҳисоблайлик, яъни ноль қадамли чекли сондаги итерациялардан сўнг базис режа такрорлансин. $T_{\text{Б}}$ — цикл давомида ҳар доим базис индекслар тўплами, T_0— цикл давомида, баъзан базис, баъзан нобазис индекслар тўплами, $T_{\text{Н}}$— цикл давомида ҳар доим нобазис индекслар тўплами, t эса T_0 тўпламдан олинган максимал индекс бўлсин. Агар $j_0^p = t$, яъни t базис бўлса, циклнинг p- итерациясидаги баҳолар векторини Δ^p билан, $i_0^q = t$, яъни t нобазис бўлса, циклнинг q- итерациясидаги режа ўзгаришининг йўналишини $(\Delta x - \theta l)$ l^q билан белгилаймиз, $l^q_{j_0^q} = 1$, $\Delta^q_{j_0^q} < 0$. $T_{\text{Б}}$, $T_{\text{Н}}$ тўпламларнинг таърифидан $\Delta^p(T_{\text{Б}}) = 0$, $l^q(T_{\text{Н}}) = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунингдек, t индекс T_0 дан олинган максимал индекс ва $j_0^p = t$ бўлганлигидан, $\Delta^p(T_0 \setminus t) \geqslant 0$. Цикл давомида $x(T_0) = 0$ ва $i_0^q = t$. Шунинг учун $l^q(T_0 \setminus t) \geqslant 0$. Энди $\Delta = A'u - c$, $Al^q = 0$ эканлигини хисобга олиб, $\Delta^{p'} l^q = \Delta^{q'} l^q \; \Delta^q_{j_0^q} \; l^q_{j_0^q} < 0$ га эга бўламиз. Иккинчи томондан: $\Delta^{q'} l^p = \Delta^{p'}(T_{\text{Б}}) \, l^q(T_{\text{Б}}) + \Delta^p_t \, l^q_t + \Delta^{p'}(T_k) \, l^q(T_{\text{Н}}) + \Delta_p{}'(T_0 \setminus t) \, l^q(T_0 \setminus t) = \Delta^p_t \, l^q_t + \Delta^{p'}(T_0 \setminus t) \, l^q(T_0 \setminus t) \geqslant 0$. Қарама-қаршилик Блэнд модификациясининг чеклилигини кўрсатади.

Шундай махсус мисоллар қуриш мумкинки, улар учун симплекс усул барча базис режаларни саралаб чиқишга келтирилади, бироқ симплекс усулни реал масалаларга қўллаш тажрибаси кўрсатадики, итерациялар сони, одатда, $2m$ дан ошмайди. Бу эса усулнинг жуда яхши характеристикасидир, чунки базис режалар сони n элементдан m тадан гуруҳлашлар сони C_n^m га етиши мумкин.

9. Биринчи фаза. Энди (4) масалани юқорида келтирилган қуришларга асос бўлган қуйидаги хоссаларсиз қараймиз: 1) $\operatorname{rank} A = m$; 2) масаланинг чекланишлари қарама-қарши эмас; 3) бошланғич базис режа мавжуд.

Масаланинг параметрлари ёрдамида ёрдамчи

$$-e' x_c \to \max, \; Ax + x_c = b, \; x \geqslant 0, \; x_c \geqslant 0 \qquad (37)$$

масалани тузамиз. Бу ерда $x_c = x(J_c)$, $J_c = \{n+1, \ldots, m+n\}$ — *сунъий ўзгарувчиларнинг m- вектори*, $e = \{1, 1, \ldots, 1\}$ — бирлардан тузилган m- вектор.

Лемма. Берилган (4) масаланинг режалар тўплами бўш бўлмаслиги учун (37) масаланинг (x^*, x_c^*) ечимида x_c^* компонентанинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Агар x^* (4) масаланинг режаси бўлса, $\{x^*, x_c^* = 0\}$ ифода (37) масаланинг ечимидан иборатдир, чунки бу вектор (37) нинг барча чеклашларини қаноатлантиради ва бу вектор учун $-e'x_c^* = 0$ бўлиб, (37) нинг ихтиёрий бошқа $\{x, x_c\}$ режаси учун $-e'x_c \leqslant 0$ тенгсизлик бажарилади.

Етарлилиги. Равшанки, агар $\{x^*, x_c^* = 0\}$ ифода (37) масаланинг ечими бўлса, x^* режа (4) масаланинг режаси бўлади. Лемма исботланди.

(37) масала учун бошланғич базис режа жуда содда тузилади. $x(J) = 0$, $x(J_c) = b$ деб оламиз. У ҳолда $\{x(J), x(J_c)\}$ вектор (37) масаланинг барча чеклашларини қаноатлантиради. У n та нолдан иборат x_j, $j \in J$ компоненталарга эга бўлиб, бу компоненталар сони $n+m$ та x_j, $j \in J \cup J_c$ ўзгарувчилар сонидан m та кам, x_j, $j \in J_c$ компоненталарга эса чизиқли эркли (*сунъий*), бирлик диагонал базис матрицани ифодаловчи

$$a_j = e_{j-n}, \ j \in J_c$$

шарт векторлари мос келади.

Симплекс усул ёрдамида (37) масалани ечиш (4) масалани ечишда *симплекс усулнинг биринчи фазаси* деб, (37) масаланинг ўзи эса *биринчи фаза масаласи* деб аталади.

Симплекс усулнинг биринчи фазасидан сўнг (37) масаланинг қуйидаги учта шартлардан ҳеч бўлмаганда биттасини қаноатлантирувчи, $\{x^*, x_c^*\}$ оптимал базис режаси ва $A_Б^*$ матрицаси қурилади: *а*) $x_c^* \neq 0$; б) $x_c^* = 0$, $A_Б^*$ базис матрица бошланғич масаланинг шарт векторларидан тузилади, яъни $A_Б^* = A(I, J_Б^*)$, $J_Б^* \cap J_Б = \varnothing$; в) $x_c^* = 0$, $A_Б^*$ базис матрицада сунъий шарт векторлари мавжуд, яъни

$$J_Б^* \cap J_c \neq \varnothing.$$

Келтирилган ҳар бир ҳолни алоҳида таҳлил қиламиз.

а) Агар $x_c^* \neq 0$ бўлса, леммага асосан, бошланғич масаланинг чекланишлари қарама-қаршидир. Бу ҳолда (4) ни ечиш жараёни тугалланади.

б) Бу ҳолда x^* режа (4) масаланинг $A_Б^*$ базис матрицали базис режасидан иборат. У (4) масаланинг бошланғич базис режаси сифатида олинади ва унга симплекс усул қўлланилади. Бу босқич *симплекс усулнинг иккинчи фазаси* деб аталади, бутун ёзилган тадбир эса (4) масалани ечишнинг *икки фазали симплекс усули* деб аталади.

в) (37) масала ечими $\{x^*, x_c^*\}$ нинг сунъий базис ўзгарувчисини $x^*_{i_*}=0$, $i_*\in J_c\cap J^*_Б$, деб белгилаймиз. Ҳар бир $j\in J$, $j\bar{\in} J^*_Б$ учун $(A^*_Б)^{-1}a_j$ векторнинг i_* компонентаси x_{i_*j} ни ҳисоблаймиз. Агар бирор $j_*\in J$ учун $x_{i_*j_*}\neq 0$ бўлса, i_* элементни $J^*_Б$ ва J_c дан, x_{i_*} ўзгарувчини эса (37) масаладан чиқариб ташлаймиз ва $J^*_Б$ да i_* ўрнига j_* ни киритамиз. Агар $x_{i_*j}=0$, $j\in J$, $j\bar{\in} J^*_Б$ бўлса, бу бошланғич масаланинг барча шарт векторлари e_{i_*-n} бирлик векторга ортогонал бўлишини англатади, яъни асосий чекланишлардаги (i_*-n)- тенглик масаланинг бошқа тенгликларидан келиб чиқади. I тўпламдан i_*-n элементни, A матрицадан $A(i_*-n,J)$ қаторни, $A^*_Б$ матрицадан эса i_*- қаторни ва $a_{i_*}=e_{i_*-n}$-устунни чиқариб ташлаймиз. У ҳолда (37) масаланинг ўлчови m биттага камаяди. Кичрайтирилган базис матрицага тескари $(\bar{A}^*_Б)^{-1}$ матрица, эски тескари $(A^*_Б)^{-1}$ матрицанинг i_*- қатори ва (i_*-n)- устунини ўчириш натижасида ҳосил бўлади ва қуйидаги кўринишга эга:

$$(\bar{A}^*_Б)^{-1}=[A(1\setminus(i_*+n),J^*_Б\setminus i_*)]^{-1}=A^{*-1}_Б(J^*_Б\setminus i_*,I\setminus(i_*-n)).$$

Ҳақиқатан, $A^*_Б$ матрицани

$$A^*_Б=\left[\begin{array}{c|c} A(1\setminus(i_*-n),\ J^*_Б\setminus i_*) & 0(I\setminus(i_*-n),\ i_*) \\ \hline A(i_*-n,\ J^*_Б\setminus i_*) & E(i_*-n,\ i_*) \end{array}\right]$$

кўринишда тасвирлаймиз, бу ерда $0(I\setminus(i_*-n),\ i_*)$ —ноль вектор бўлиб, $E(i_*-n,\ i_*)=1$. У ҳолда $A^*_Б$ матрицага тескари матрица қуйидаги кўринишни олади:

$$A^{*-1}_Б\left[\begin{array}{c|c} [A(I\setminus(i_*-n),\ I^*_Б\setminus i_*)]^{-1} & 0 \\ \hline -E)i_*,\ i_*-n)\,A(i_*- & \\ -n,\ J^*_Б\setminus i_*)\,[AI\setminus(i_*-n),\ J^*_Б\setminus i_*)]^{-1} & E(i_*,\ i_*-n) \end{array}\right].$$

Демак, кичрайтирилган базис матрица $\bar{A}^*_Б=A(I\setminus(i_*-n),$ $J^*_Б\setminus i_*)$ га тескари матрица эски тескари матрицадан i_*- қатор ва (i_*-n)- устунни ўчириш натижасида олинар экан.

Поллардан иборат барча сунъий базис ўзгарувчиларни саралаб, (37) масаланинг сунъий шарт векторлари бўлмаган $\bar{A}_Б^*$ базис матрицасини тузамиз. Бунда асосий чеклашлардан барча чизиқли боғлиқ тенгликлар чиқариб ташланади. $\bar{A}_Б^*$ базис матрицали x^* базис режадан симплекс усулнинг иккинчи фазасини бошлаймиз ((б) ҳол).

Шундай қилиб, ихтиёрий (4) каноник масала учун икки фазали симплекс усул: 1) чеклашларнинг қарама-қаршилигини аниқлаш, ёки 2) асосий чеклашларда чизиқли боғлиқ тенгликларни чиқариб ташлаш, ёки 3) режалар тўпламида мақсад функциясининг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатиш, ёки 4) оптимал режа қуриш имкониятларини беради.

10. Каноник масаланинг икки хоссаси. Симплекс алгоритмдан каноник масаланинг симплекс режани яратишда муҳим роль ўйнаган ва ҳозир уни асослашда кўп қўлланиладиган қуйидаги иккита муҳим хоссаси келиб чиқади.

4-теорема. Агар каноник масаланинг режалари мавжуд бўлса, улар ичида базис режалари ҳам бўлади.

5-теорема. Каноник масаланинг оптимал режалари ичида базис режалар мавжуд бўлади.

Теоремаларнинг исботи. (4) масаланинг режалар тўплами бўш бўлмасин. У ҳолда симплекс усулнинг биринчи фазаси масаланинг бошланғич базис режасини қуриш билан тугалланадиган б) ёки в) ҳолга олиб келади. 4-теорема исботланди. 5-теореманинг исботи ечимга эга бўлган масалаларда икки фазали симплекс усул ҳамиша оптимал базис режани қуриш билан якунланганлигидан келиб чиқади.

Натижа. Каноник масаланинг оптимал режалари мавжуд бўлиши учун унинг мақсад функцияси режалар тўпламида юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги* ўз-ўзидан кўриниб турибди.

Етарлилиги. Агар мақсад функцияси режалар тўпламида чегараланган бўлса, икки фазали симплекс усулнинг 9-бандининг охирида келтирилган 1), 3) ҳолларига мос натижалари бўлиши мумкин эмас. Қолган, 2), 4) ҳолларда эса оптимал режа қурилади. Натижа исботланди.

11. Чизиқли масалаларни каноник шаклга келтириш. Нормал шакл. Чизиқли программалаштириш масалалари каноник масаладан бир ёки бир неча элементлари билан фарқ қилиши мумкин. Лекин, уларнинг барчаси каноник шаклга келтирилади, бу эса каноник масаланинг умумийлигини исботлайди.

Минималлаштиришнинг ушбу чизиқли масаласи

$$c'x \to \min, \ x \in X, \tag{38}$$

мақсад функциясининг ишорасини ўзгартирганда, максималлаштириш масаласига келтирилади, яъни (38) масала қуйидаги

$$-c'x \to \max, \ x \in X$$

масалага эквивалентдир.

Агар асосий чекланишларда бирор тенгликнинг b_i параметри манфий бўлса, тенгликнинг ҳар иккала томонини —1 га кўпайтирсак, масаланинг ечими ўзгармайди ва чеклаш каноник кўринишга келади.

Чизиқли масаланинг чеклашлари ичида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \leqslant \beta \tag{39}$$

тенгсизлик қатнашсин. Бу тенгсизлик қуйидаги

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + x_{n+1} = \beta \tag{40}$$

тенглик ва содда

$$x_{n+1} \geqslant 0 \tag{41}$$

тенгсизликка эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, агар n- вектор $\{x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n\}$ (39) тенгсизликни қаноатлантирса, $n+1$ вектор $\{x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n, \ \ x_{n+1}\}$ (бу ерда $x_{n+1} = \beta - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)$ (40) тенглик ва (41) тенгсизликни қаноатлантиради. Аксинча, агар $\{x_1, x_2 \ldots, x_n, \ x_{n+1}\}$ векторда (40), (41) лар бажарилса, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ векторда (39) бажарилади. Шундай қилиб, чизиқли масаланинг «ноканоник» элементи (39) каноник масаланинг (40), (41) элементларига келтирилди. Бундай x_{n+1} ўзгарувчини *эркин ўзгарувчи* деб аташ қабул қилинган.

Агар чизиқли масалада (39) нинг ўрнига тескари маънoли тенгсизлик қатнашса, бу тенгсизликни —1 га кўпайтириш ёрдамида (39) га келтирилади.

Чизиқли масалада x_j ўзгарувчининг ишорасини ифодаловчи чекланишлар қатнашмаслиги мумкин. Бу ҳолда x_j ўзгарувчи

$$x_j = x_j^1 - x_j^2 \tag{42}$$

Эркин ўзгарувчи x_5 ни киритиб ва биринчи тенгликни 5 га бўлиб, каноник кўринишга ўтамиз*:

$$
\begin{gathered}
10x_1 + 30x_2 + 20\,x_3 + 15\,x_4 \to \max, \\
x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 200, \\
5\,x_2 + 10\,x_3 + 5x_4 = 500, \\
10x_3 + 10x_4 + x_5 = 700, \\
x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0.
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Бу масаланинг шарт матрицаси иккита бирлик устунга ($a = e_1$ ва $a_5 = e_3$) эга. Агар бу векторларни $a_6 = e_2$ вектор билан тўлдирсак, бирлик диагонал матрица оламиз. Демак, (45) учун биринчи фаза масаласини ягона сунъий ўзгарувчи x_6 ни киритиш ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$
\begin{gathered}
-\,x_6 \to \max. \\
x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 4\,x_4 = 200, \\
5\,x_2 + 10\,x_3 + 5\,x_4 + x_6 = 500. \\
10\,x_3 + 10\,x_4 + x_5 = 700, \\
x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,\,6}.
\end{gathered}
\tag{46}
$$

$\{200,\ 0,\ 0,\ 0,\ 700,\ 500\}$ вектор (46) масаланинг $A_Б = \{a_1 = e_1,\ a_5 = e_3,\ a_6 = e_2\}$ базис матрицали базис режасидан иборат.

Масалани қўлда ечиш учун симплекс жадваллардан фойдаланишга асосланган, *симплекс усулнинг янги (жадвал)* усулда амалга оширилишини кўриб чиқамиз**. Бунинг учун, (11) даги баҳоларни ҳисоблаш формуласи $\Delta'_Н = C'_Б A_Б^{-1} A_Н - C'_Н$ дан фойдаланамиз. У компоненталар бўйича ёзилса,

$$\Delta_j = C'_Б A_Б^{-1} a_j - c_j\ ,\quad j \in J_Н. \tag{47}$$

кўринишни олади.

I. 2-жадвал

$C'_Б$	базис \ C^1 / b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
			0	0	0	0	0	−1	
0	a_1	200	1	4	1	4	0	0	200
−1	a_6	500	0	5	$\boxed{10}$	5	0	1	50 →
0	a_5	700	0	0	10	10	1	0	70
	Δ		0	−5	−10 ↑	−5	0	0	

* x_5 эркин ўзгарувчининг физик маъноси эркин (режада фойдаланилмаган) учинчи ресурс ҳажмини ифодалайди.

** 6-банддаги симплекс усулнинг амалга ошиши кўп ҳолларда *тескари матрица усули* деб аталади. У тарихан жадвал кўринишидан кейин вужудга келган.

Ҳар бир нобазис шарт вектори a_j нинг базис бўйича ёйилмаси, яъни $A_Б^{-1} a_j$ векторнинг x_{ij}, $i \in J_Б$ компоненталари берилган бўлсин (I.2-жадвал). У ҳолда, қийматларни ифодаловчи $c_Б$ векторнинг базис компоненталарини $\{x_{ij}, i \in J_Б\}$ векторнинг мос компоненталарига кўпайтириб (x_{ij} a_j устуннинг элементлари), натижалар-и қўшиб ва йиғиндидан c_j (c-қаторнинг j-элементи) ни айириб, (47) (Δ-қаторининг j-элементи) сонни ҳосил қиламиз. Бу амаллар (46) масаланинг бошланғич базис режаси учун *симплекс жадвалда* амалга оширилган (I.2-жадвал)*.

Бошланғич базис матрица бирлик матрица бўлганлигидан b, a_j, $j = \overline{1,6}$ векторларнинг базис бўйича ёйилмаларининг I.2-жадвалда мос векторлар тагида ёзилган компоненталари (46) масаланинг параметрларига тенг, (46) масалада берилган маълумотлар бевосита I.2-жадвалга ёзилади. I.2-жадвалга нолга тенг базис баҳолар киритилган бўлиб, улар, агар $J_Н$ ни J гача кенгайтирсак, (47) га зид бўлмайди.

Жадвалнинг Δ-қаторида минимал $\Delta_{j_0} = \Delta_3 = -10$ элементни топамиз. У манфий бўлганлигидан, бошланғич режа оптимал эмас. Минимал баҳога мос келган a_3 устун симплекс жадвалнинг *етакчи устуни* деб аталади. b-устуннинг етакчи устуннинг мусбат x_{ij_0}, $i \in J_Б$ элементларига мос x_i, $i \in J_Б$ элементларини x_{ij_0} га бўлиб, θ_i (25) натижаларни θ-устунга ёзамиз. Минимал элемент $\theta^0 = \theta_{i_0} = \theta_6 = 50$, равшанки, (26) формула ёрдамида берилган сонга тенг. Минимал θ^0 элементли a_6 қатор *етакчи қатор* деб аталади. Етакчи қатор ва етакчи устунларнинг кесишувида ётган $x_{i_0j_0} = 10$ элемент симплекс жадвалнинг *етакчи элементи* деб аталади.

Симплекс усулга кўра янги $\overline{A}_Б$ базис матрица эски базис $A_Б$ матрицада a_{i_0} векторни a_{j_0} векторга алмаштиришдан хосил бўлади. Бу ҳол I.2-жадвалда янги базисга кирувчи ва эски базисдан чиқувчи шарт векторларини кўрсатувчи стрелкалар ёрдамида кўрсатилган. Янги симплекс жадвалнинг асосий қисми (базис қаторларнинг b ва a_j -устунлар билан кесишмасидаги элементлар) b, a_j, $j \in J$ векторларнинг янги базис бўйича ёйилмаларидан иборат бўлиши керак.

$\overline{A}_Б^{-1}$ матрицанинг элементлари учун ёзилган (34), (35) формулалардан b, a_j, $j \in J$ векторларнинг янги базис бўйича ёйилмалари элементлари $\overline{x}_i$, $\overline{x}_{ij}$ лар учун

$$\overline{x}_{j_0} = x_{i_0}/x_{i_0j_0};\quad \overline{x}_i = x_i - x_{ij_0}x_{i_0}/x_{i_0j_0},\quad i \in \overline{J}_Б/j_0;$$

$$\overline{x}_{j_0j} = x_{i_0j}/x_{i_0j_0},\quad j \in J: \tag{48}$$

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} - x_{i_0j}x_{ij_0}/x_{i_0j_0},\quad i \in \overline{J}_Б \setminus j_0,\quad j \in J.$$

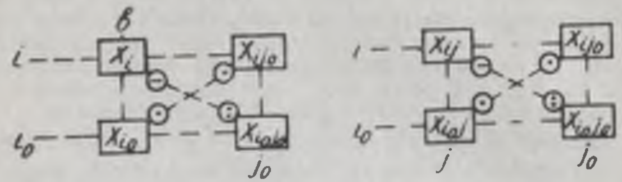
---

* C' — биринчи фазанинг қиймат вектори.

формулалар келиб чиқади. Бу ерда x_i , x_{ij}, $i \in J_Б$, $i \in J$ — эски жадвалнинг элементларидир.

(48) формулалар симплекс жадвалда *тўғри тўртбурчак қоидаси* ёрдамида осонгина амалга оширилади. Янги жадвалда дастлаб янги базиснинг векторлари бўлган устунлар тўлдирилади. Сўнгра a_{i_0} - қатор, яъни эски жадвалда етакчи бўлган қатор (a_{i_0} - қатор) тўлдирилади:

$$\bar{x}_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad \bar{x}_{i_0 j} = \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j \in J,$$



I.3- чизма.

яъни етакчи қатор элементлари етакчи элементга бўлинади. Қолган $\bar{x}_i$ ($\bar{x}_{ij}$) элементларни ҳисоблаш учун қуйидагича иш кўрамиз. Эски жадвалда x_i (ёки x_{ij}) ва етакчи элемент $x_{i_0 j_0}$ ёрдамида тўғри тўртбурчак тузамиз (I.3- чизма). Сўнгра x_i (мос равишда x_{ij}) элементдан «ёндош» диагонал бўйича жойлашган элементлар кўпайтмасининг асосий диагоналдаги етакчи элементга нисбатини айирамиз (бу амал, I.3- чизмада катаклар олдида «—» белги билан кўрсатилган). Натижада, $\bar{x}_i$ ($\bar{x}_{ij}$) элементни ҳосил қиламиз, уни асосий жадвалнинг аввал x_i (x_{ij}) жойлашган катагига қўямиз. $\bar{\Delta}_j$ сонларни (47) формула ёки юқоридаги, бу ҳолда ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш қийин бўлмаган, тўғри тўртбурчак қоидаси ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Шундай қилиб, янги симплекс жадвал тузилди. Шунинг билан қўлда ҳисоблашдаги симплекс итерация тугалланади.

I.3- ж а д в а л

$C_Б$ \ C^1			0	0	0	0	0	-1
	Базис \ b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_1	150	1	7/2	0	7/2	0	$-1/10$
0	a_3	50	0	1/2	1	1/2	0	1/10
0	a_5	200	0	-5	0	5	1	-1

$c_Б$ \ c			10	30	20	15	0	0
	Базис \ b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
10	a_1	150	1	7/2	0	7/2	0	—1/10
20	a_3	50	0	1/2	1	1/2	0	1/10
0	a_5	200	0	—5	0	5	0	1/10
	Δ		0	15	0	30	0	1

I.2- жадвал учун янги симплекс жадвал (I.3- жадвал) тузилган. Янги I.3- жадвалнинг базисида сунъий шарт вектори a_6 қатнашмаганлигидан, симплекс усулнинг биринчи фазаси тугалланади. Иккинчи фазага ўтиш учун, I.3- жадвалдаги c^1 векторни бошланғич (46) масаладаги қиймат вектори c билан алмаштирамиз ва иккинчи фазанинг итерациялари бошланадиган I.4 - жадвални оламиз. Бу жадвал оптималлик аломатини қаноатлантиради*. Оптимал режанинг элементларини нобазис компоненталарни ноллар билан тўлдириб b- устундан оламиз: $x^0 = \{150, 0. 50, 0\}$.

Пировардида симплекс усулнинг жадвал кўринишини 6- банддаги тескари базис матрицалардан фойдаланишга асосланган усули билан таққослаймиз. Жадвал содда** бўлиб, қўлда ҳисоблаганда тасодифий хатолар пайдо бўлиши эҳтимолини камайтиради. Лекин уни ЭҲМ да амалга оширишда m, n сонлар етарли катта бўлганда*** қутулиб бўлмайдиган муҳим.камчиликлар аниқланади. Биринчидан, жадвалли итерациялар давомида $(m+1) \times n$ матрицаларни ўзгартириш ва эсда сақлаб қолиш керак, тескари матрица усулининг итерацияларида эса фақат $m \times m$ матрицалардан фойдаланилган эди. Иккинчидан, мазкур банднинг итерациялари жараёнида янги жадвалнинг элементлари фақат эски жадвал элементлари бўйича ҳисобланади. Шунинг учун бошланғич жадвал *кучсиз тўлдирилган бўлиши* (кам фоизда ноль бўлмаган элементларни ўзида сақлаши****) мумкин бўлса ҳам, жадваллар *кучли тўлдирилган* бўлиб қоладилар. Равшанки, кўрсатилган ҳол ЭҲМ даги амаллар сонини орттиради ва яхлитлаш хатоларининг тез кўпайишига олиб келади. 6- банднинг усулида ҳар бир итерацияда бошланғич информациядан фой-

---

*I. 4- жадвалдан сунъий a_6 устунни чиқариб ташлаш мумкин, чунки у (46) масалага алоқадор эмас. Лекин у келажакда (2,3- § лар) сезгирликни таҳлил қилишда керак бўлади. Шунинг учун a_6 устун сақланади, лекин унинг Δ_6 баҳоси иккинчи фазанинг итерацияларида ҳеч вақт ҳисобга олинмайди.

**Уни, муайян базиснинг элементларини ўзида сақловчи устунларни чиқариб ташлаш ҳисобига янада соддароқ қилиш мумкин. Лекин, тўла жадвал сезгирликнинг таҳлили нуқтаи назаридан қулайдир (кейинроқ, 3- § га қ.).

***Амалда, $m > 10000$, $n > 100000$ бўлган масалалар ҳам учрайди.

****Кўп амалий масалаларнинг шарт матрицалари 3 — 5 % дан кўп бўлмаган ноль бўлмаган элементларга эга бўлади.

даланилади, бу эса нолга кўпайтириш операцияларини чиқариб ташлаш ҳисобига A матрицанинг кучсиз тўлдирилганлигини самарали ҳисобга олиш имконини беради. Масаланинг ўлчамлари ортиши билан 6- банднинг бу банд усулига нисбатан афзаллиги ортади.

13. Минимакс масаласи. Чизиқли программалаш масаласига келтириладиган масалалар ичида (4) каноник масаладан мақсад функциясининг (махсус) чизиқсизлиги билан фарқ қиладиган, *минимакс масаласи**

$$\max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x_j - d_s\right)\to \min_x,\quad Ax=b,\quad x\geqslant 0 \tag{49}$$

алоҳида ўрин тутади. Бу масаланинг қуйидаги чизиқли программалаш масаласига

$$x_{n+1}\to \min_{x,\,x_{n+1}},\quad \sum_{j=1}^{n} c_{sj}x_j - d_s\leqslant x_{n+1},\quad s=\overline{1,k},$$

$$Ax=b,\quad x\geqslant 0 \tag{50}$$

эквивалентлигини исботлаймиз. Агар x° ечим (49) масаланинг ечими бўлса,

$$\left\{x^\circ,\ x^\circ_{n+1}=\max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x^\circ_j - d_s\right)\right\} \tag{51}$$

(50) масаланинг ечимидир. Ҳақиқатан ҳам, агар (50) масаланинг $x^*_{n+1}<x^\circ_{n+1}$ шартни қаноатлантирувчи $\{x^*,\ x^*_{n+1}\}$ режани мавжуд деб фараз қилсак, (49) масаланинг мақсад функцияси учун x° ечим (49) масаланинг ечимидир, деган фикрга зид бўлган фикрга олиб келувчи

$$\max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x^\circ_j - d_s\right)=x^\circ_{n+1}>x^*_{n+1}\geqslant \max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x^*_j - d_s\right),$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди $\{x^*,\ x^*_{n+1}\}$ ечим (50) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда x^* ечим (49) нинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, агар (49) нинг ечими бошқа x^0 вектордан иборат бўлса ва

$$\max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x^0_j - d_s\right)<\max_{1\leqslant s\leqslant k}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x^*_j - d_s\right) \tag{52}$$

бажарилса, равшанки (51) вектор (50) масаланинг чекланишларини қаноатлантиради ва унинг охирги компонентаси x^0_{n+1} учун

---

* Л. В. Қантаровичнинг дастлабки ишларидаги изланишлари шу синфга мансубдир.

(52) га асосан $x^{\circ}_{n+1} < x^{*}_{n+1}$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\{x^*, x^*_{n+1}\}$ режанинг оптималлик шартига зиддир.

14. Бўлакли-чизиқли масала. Мақсад функцияси бўлакли-чизиқли функциядан иборат бўлган

$$\sum_{s=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x_j - d_s \right| \to \min_x, \quad Ax = b, \ x \geqslant 0, \tag{53}$$

масала *бўлакли-чизиқли масалалар* синфига киради. Бу масала қуйидаги чизиқли программалаш масаласи

$$\sum_{s=1}^{k} (v_s + w_s) \to \min_{x, v, w}, \ \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x_j - d_s = v_s - w_s, \ s = \overline{1, k}, \tag{54}$$

$$Ax = b, \ x \geqslant 0, \ v \geqslant 0, \ w \geqslant 0, \ v = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\},$$

$$w = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$$

га эквивалент эканлигини исботлаймиз.

x° ечим (53) нинг ечими бўлсин. У ҳолда компоненталари

$$v^{\circ}_s = \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^{\circ}_j - d_s, \ w^{\circ}_s = 0, \text{ агар } \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^{\circ}_j - d_s \geqslant 0 \text{ бўлса},$$

$$v^{\circ}_s = 0, \ w^{\circ}_s = -\sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^{\circ}_j + d_s, \text{ агар } \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^{\circ}_j - d_s < 0,$$

$$s = \overline{1, k} \text{ бўлса}, \tag{55}$$

кабилардан иборат $\{x^0, v^0, w^0\}$ вектор (54) масаланинг ечими бўлади. Бундай бўлмасин дейлик, яъни (54) масаланинг шундай $\{x^*, v^*, w^*\}$ режаси топиладики, унда

$$\sum_{s=1}^{k} (v^*_s + w^*_s) < \sum_{s=1}^{k} (v^{\circ}_s + w^{\circ}_s) \tag{56}$$

тенгсизлик бажарилади. У ҳолда α_s, $s = \overline{1, k}$ нинг манфий бўлмаган компоненталарининг йиғиндисини $\sum\limits_{s=1}^{k}{}^{+} \alpha_s$ билан, манфий компоненталар йиғидисини эса $\sum\limits_{s=1}^{k}{}^{-} \alpha_s$ билан белгилаб, (54) — (56) ларни ҳисобга олсак,

$$\sum_{s=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^*_j - d_s \right| = \sum_{s=1}^{k}{}^{+} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^*_j - d_s \right) - \sum_{s=1}^{k}{}^{-} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj} x^*_j - \right.$$

$$-d_s\Big) = \sum_{s=1}^{k}{}^{+}(v_s^*-w_s^*) - \sum_{s=1}^{k}{}^{-}(v_s^*-w_s^*) \leqslant \sum_{s=1}^k v_s^* + \sum_{s=1}^k w_s^* <$$

$$< \sum_{s=1}^k (v_s^\circ + w_s^\circ) = \sum_{s=1}^{k}{}^{+}\Big(\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^\circ - d_s\Big) - \sum_{s=1}^{k}{}^{-}\Big(\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^\circ - d_s\Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^k \Big|\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^\circ - d_s\Big| \qquad (57)$$

тенгсизликни оламиз, яъни (57) да биринчи ифода охирги ифодадан катъий кичикдир, бу эса x^0 ечим (53) нинг ечими бўлган ҳолда бажарилмайди.

Агар $\{x^*, v^*, w^*\}$ ечим (54) масаланинг ечими бўлса, x^* ечим (53) масаланинг ечими бўлади. Тескарисини фараз қиламиз: x^0 вектор (53) масаланинг ечими бўлсин ва

$$\sum_{s=1}^k \Big|\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^\circ - d_s\Big| < \sum_{s=1}^k \Big|\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^* - d_s\Big|. \qquad (58)$$

x^0 вектор бўйича компоненталари (55) дан иборат v^0, w^0 векторларни тузамиз. У ҳолда $\{x^0, v^0, w^0\}$ вектор (54) масаланинг режаси бўлади ва (54), (58) лардан келиб чиқадиган

$$\sum_{s=1}^k (v_s^\circ + w_s^\circ) = \sum_{s=1}^k \Big|\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^\circ - d_s\Big| < \sum_{s=1}^k \Big|\sum_{j=1}^n c_{sj}x_j^* - d_s\Big| =$$

$$= \sum_{s=1}^{k}{}^{+}(v_s^*-w_s^*) - \sum_{s=1}^{k}{}^{-}(v_s^*-w_s^*) \leqslant \sum_{s=1}^k (v_s^* + w_s^*)$$

муносабатга асосан, у $\{x^*, v^*, w^*\}$ оптимал режадан яхшироқдир. Олинган зиддлик (53), (54) масалаларнинг эквивалентлигини исботлайди.

2-§. ИККИЛАНМАЛИК НАЗАРИЯСИ

Иккиланмалик назарияси деб чизиқли программалашнинг шундай бўлимига айтиладики, бу бўлимда чизиқли программалаш масалалари ёрдамчи, улар билан узвий боғлиқ бўлган *иккиланма масалалар* ёрдамида ўрганилади.

1. Иккиланма масала. Ушбу каноник

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0 \qquad (1)$$

масалани қараймиз ва бундан буён уни чизиқли программалашнинг *тўғри каноник масаласи* деб атаймиз.

Симплекс усулга мувофиқ, $A_Б$ базис матрицали ҳар бир x^0 оптимал базис режага

$$u' A_{\text{Б}} = c'_{\text{Б}}, \quad u' A_{\text{Н}} \geqslant c'_{\text{Н}} \tag{2}$$

муносабатларни қаноатлантирувчи потенциалларнинг m-вектори $u = u(I)$ мос келади (1-§ даги (12), (15) ларга қ.). Чизиқли функция $b'y$ нинг бу вектордаги қийматини ҳисоблайлик:

$$b'u = u'b = c'_{\text{Б}} A_{\text{Б}}^{-1} b = c'_{\text{Б}} x^0_{\text{Б}} = c' x^0 \tag{3}$$

Фараз қилайлик, y (2) муносабатларнинг умумий ҳоли бўлган

$$A' y \geqslant c$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёри m-вектор бўлсин. Бу вектор учун

$$b'y = y'b = y' A x^{\circ} \geqslant c' x^{\circ}. \tag{4}$$

Бу ҳолда (3), (4) лардан u вектор

$$b'y \to \min, \quad A'y \geqslant c. \tag{5}$$

масаланинг ечими эканлиги келиб чиқади. (5) масала чизиқли программалаштиришнинг *иккиланма (каноник) масаласи* деб аталади. Бу масала (1) каноник масаланинг параметрларидан тузилган бўлиб, m та y_i, $i \in I$ ((1) даги n ўрнига) ўзгарувчиларни ҳамда n та асосий чеклашларни ((1) даги m ўрнига) $a'_j y_j \geqslant c_j$, $j \in J$, ўз ичига олади ва унинг ўзгарувчиларига тўғри чеклашлар қўйилган бўлмайди. Шундай қилиб, (1), (5) масалаларнинг ўлчамлари m, n ларнинг ўринлари «алмаштирилган». (1) тўғри масаладан (5) иккиланма масалага ўтиш қоидасини осонгина эсда сақлаб қолиш мумкин:

$$x \to y, \; c \to b, \; \max \to \min, \; A \to A' = \to \geqslant,$$
$$x \geqslant 0 \to y \in R_m. \tag{6}$$

Кўпинча иккиланма масалаларни тузишнинг бошқа усули қулайроқдир. (1) масала учун

$$F(x, y) = c'x + y'(b - Ax). \tag{7}$$

Лагранж функциясини тузамиз ва бу функция ёрдамида тўғри $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$ ва иккиланма $\psi(y)$, $y \in R_m$ функцияларни киритамиз:

$$\varphi(x) = \inf F(x, y), \; y \in R_m; \quad \psi(y) = \sup F(x, y), \; x \geqslant 0. \tag{8}$$

Ушбу

$$\{x \geqslant 0, \quad \varphi(x) > -\infty\} \tag{9}$$

тўпламни қараймиз. Бу тўплам фақат ва фақат $Ax = b$ $(x \geqslant 0)$

муносабатларни қаноатлантирувчи x, n векторлардан иборатлиги (7) ва (8) дан кўринади. Шундай қилиб, тўғри масаланинг режалари ((1) масаланинг тўғри режалари) тўплами X (9) билан устма-уст тушади. Шунга ўхшаш,

$$\{y : \psi(y) < \infty\}$$

тўплам (5) масаланинг режалари ((1) масаланинг иккиланма режалари) тўплами $Y = \{y : A'y \geqslant c\}$ билан устма-уст тушади.

Ҳолбуки,

$$\max_{x \geqslant 0} \varphi(x) = \begin{cases} \max c'x, & \text{агар } x \in X \text{ бўлса,} \\ -\infty, & \text{агар } x \bar{\in} X \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$\min_{y \in R_m} \psi(y) = \begin{cases} \min b'y, & \text{агар } y \in Y \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } y \bar{\in} Y \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бўлганлигидан, тўғри (1) ва иккиланма (5) каноник масалаларни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\varphi(x) \to \max, \ x \geqslant 0; \ \psi(y) \to \min, \ y \in R_m. \tag{10}$$

Агар (5) масалани каноник кўринишга келтириб, сўнгра юқоридаги қоида бўйича ҳосил қилинган масала учун иккиланма масалани тузсак, (1) масалага келамиз. Шундай қилиб, (1) ва (5) масалалар *ўзаро иккиланма масалалар* жуфтини ташкил қилади.

Энди

$$c'x \to \max, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \tag{11}$$

нормал масала учун иккиланма масала тузамиз. Бу масала (1-§ га қ.) қуйидаги

$$c'x \to \max, \ Ax + x_э = b, \ x \geqslant 0, \ x_э \geqslant 0 \tag{12}$$

масалага эквивалент бўлганлигидан, (6) қоидаларни (12) масалага қўллаш қуйидаги

$$b'y \to \min, \quad A'y \geqslant c, \quad y \geqslant 0 \tag{13}$$

иккиланма нормал масалага олиб келади.

Бу масалада y_i, $i \in I$ иккиланма ўзгарувчилар тўғри чеклашлар $y \geqslant 0$ ни қаноатлантиради. (1), (5) ва (11), (13) масалалардан иборат жуфтларни таққослаб, қуйидаги хулосага келамиз: 1) жуфтдан олинган битта масаланинг ҳар бир i-асосий чеклашига шу жуфтдаги бошқа масаланинг i-ўзгарувчиси мос келади; 2) агар асосий чеклаш тенглик кўринишида бўлса, иккиланма масаланинг унга мос ўзгарувчиси учун ишора белгиси бўлмайди; 3) агар асосий чеклаш тенгсизлик кўринишида бўлса, иккиланма ўзгарувчи манфий бўлмайди; 4) агар ўзгарувчи ишора белгисига эга бўлмаса, иккиланма масаланинг унга мос асосий чеклашлари тенглик кўринишида бўлади; 5) агар ўзгарувчи манфий бўлмаса, иккиланма масаланинг унга мос асосий чеклаши тенгсизлик кўринишида бўлади.

Мустақил равишда (7) Лагранж функцияси терминларида (11), (13) масалаларни қуйидаги

$$\varphi(x) \to \max, \ x \geqslant 0; \quad \psi(y) \to \min, \ y \geqslant 0$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатинг ((10) билан таққосланг), бу ерда тўғри $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$ ва иккиланма $\psi(y)$, $y \geqslant 0$ функциялар (8) дан фарқли ўлароқ,

$$\varphi(x) = \inf F(x, y), \ y \geqslant 0: \quad \psi(y) = \sup F(x, y), \ x \geqslant 0$$

муносабатлар ёрдамида аниқланган.

2. Иккиланмалик назарияси. Иккиланмалик назарияси асосини *мавжудлик теоремаси* ва *иккиланмалик теоремаси* ҳамда улардан келиб чиқадиган тўғри ва иккиланма масалалар ечимлари орасидаги *иккиланмалик муносабатлари* ташкил қилади.

1-теорема (мавжудлик теоремаси). Чизиқли программалаштириш масаласининг ечими мавжуд бўлиши учун унинг тўғри ва иккиланма режалари тўпламларининг бўш бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Каноник масала умумийроқ бўлганлигидан, (1) масалани қараш етарлидир. Агар (1) масала ечимга эга бўлса, 1-§ да кўрсатилганидек, шундай оптимал базис режа x^0 топиладики, унга 1-бандга асосан, оптимал иккиланма режадан иборат u потенциаллар вектори мос келади.

Етарлилиги. Фараз қилайлик, тўғри ва иккиланма режалар тўпламлари X, Y бўш бўлмасин. У ҳолда ихтиёрий $x \in X$, $y \in Y$ лар учун (1-банддаги (4) тенгсизликнинг келиб чиқишига қ.),

$$c'x \leqslant b'y$$

тенгсизлик бажарилади, яъни (1) масаланинг мақсад функцияси X тўпламда юқоридан чегараланган. Бу эса 1-§ нинг 10-бандидаги натижага кўра, оптимал базис режа x нинг мавжуд бўлиши учун етарлидир. Теорема исботланди.

2-теорема (иккиланмалик теоремаси). Чизиқли программалаштириш тўғри масаласининг x^0 ечими мавжуд бўлиши учун унга иккиланма масаланинг y^0 ечими мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир. Тўғри ва иккиланма мақсад функцияларининг* x^0, y^0 ечимлардаги қийматлари ўзаро тенг:

$$c'x^0 = b'y^0. \qquad (14)$$

Зарурийликнинг исботи 1-теоремадаги зарурийликнинг исботи билан бир хил.

Етарлилиги. y^0 ечим (5) иккиланма масаланинг ечими бўлсин. Агар бу масалани тўғри масала сифатида олсак, (1) масала (5) масалага нисбатан иккиланма бўлади ва юқоридагига кўра, теореманинг исботи келиб чиқади.

1-натижа. Тўғри x ва иккиланма y режалардан тузилган ҳар бир жуфт учун

$$c'x \leqslant b'y \qquad (15)$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исботи 1-бандда келтирилган ((4) га қ.).

2-натижа (чеклашларнинг биргаликда бўлмаслигининг етарлилик шарти). Агар иккиланма режаларнинг бирор y^k, $k = 1, 2, \ldots$, кетма-кетлигида иккиланма мақсад функцияси чексиз камайиб борса:

$$b'y^k \to -\infty, \quad k \to \infty, \qquad (16)$$

(1) тўғри масала режаларга эга бўлмайди.

Исботи. Агар x режа мавжуд деб фараз қилсак, (16) га асосан шундай k_0 сон топиладики, (15) га зид $c'x > b'y^{k_0}$ тенгсизликка эга бўламиз. Натижа исботланди.

3-натижа (оптималликнинг етарлилик шарти). Агар бирор тўғри x^* ва иккиланма y^* режалар учун

$$c'x^* = b'y^* \qquad (17)$$

тенглик бажарилса, x^*, y^* лар (1), (5) масалаларнинг ечимлари бўлади.

Исботи. (15) га кўра $c'x$ функциянинг x тўпламдаги қийматлари $b'y^*$ дан катта бўла олмаслигидан ва x^* учун (17) бажарилганлигидан, x^* оптимал режа эканлиги келиб чиқади. y^* нинг оптимал иккиланма режа эканлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади. Натижа исботланди.

4-натижа (нормал масалада қатъиймасликни тўлдирувчи шартлар). x^0, y^0 лар (11), (13) масалаларнинг ечимлари бўлсин. Агар x^0 да тўғри масаланинг

---

*Қисқалик учун: $c'x$ — *тўғри мақсад функцияси;* $b'y$ — *иккиланма мақсад функцияси.*

i-асосий чеклаши *пассив* бўлса ($A(i, J)x^0 < b_i$), у холда y^0 векторнинг i-компонентаси нолга тенг бўлади. Аксинча, агар $y_i^0 > 0$ бўлса, i-асосий чеклаш x^0 да *актив* бўлади ($A(i, J)x^0 = b_i$).

Исботи. (11) масаланинг асосий чеклашини (12) тенгликка келтирамиз; (12) тенгликни x^0 нуқтада y^0 га скаляр кўпайтирамиз:

$$y^{0'} Ax^0 + y^{0'} x_э^0 = b^0 y'. \tag{18}$$

(13) иккиланма масаланинг y^0 нуқтадаги асосий чеклашларини x^0 га скаляр кўпайтирамиз:

$$y^{0'} Ax^0 \geqslant c' x^0 \tag{19}$$

(18) ва (19) лардан $c'x^0 \leqslant b'y^0 - y^{0'} x_э^0$ тенгсизликни оламиз, бу эса (14) га асосан, $y^{0'} x_э \leqslant 0$ тенгсизликка келтирилади. Иккинчи томондан, $x_э^0 \geqslant 0$, $y^0 \geqslant 0$ бўлганлигидан, $y^{0'} x_э^0 \geqslant 0$ бўлади. Демак, (11) нормал масаладаги қатъиймасликни тўлдирувчи шартларни ихчам шаклда ифодаловчи

$$y^{0'} x_э^0 = y^{0'} [b - Ax^0] = \sum_{i=0}^{m} y_i^0 (b_i - A(i, J)x^0) = 0$$

тенглик ўринлидир. Натижа исботланди.

Иккиланмалик назариясидаги бошқа фактлар II бобда исботланади.

3. Иккиланма ўзгарувчиларнинг физик маъноси. Ҳар бир амалий масалада тўғри масаланинг элементлари аниқ физик маънога эга бўлади. Иккиланма масалани қуриш қонуний характерга эгадир. Тўғри масалани текширишда иккиланма масалада берилганлардан самарали ва ишончлироқ фойдаланиш учун иккиланма ўзгарувчиларнинг физик маъносини тушуниб олиш муҳим аҳамиятга эга*. Аввало қуйидаги ёрдамчи леммани исбот қиламиз.

Лемма. Агар x^0 — каноник масаланинг бузилмаган оптимал базис режаси бўлса, унга мос иккиланма масала x^0 режанинг потенциаллар вектори билан устма-уст тушувчи ягона y^0 ечимга эга:

$$y^{0'} = u' = C'_Б A_Б^{-1}.$$

---

*Кўпгина муайян масалалар учун иккиланма масалаларга ҳам, иккиланма муносабатларга ҳам физик маъно бериш мумкин бўлади, бу эса тўғри масаланинг ечимлари ҳақида қўшимча маълумот олиш имконини беради.

Исботи. u ва ихтиёрий y иккиланма режа учун қуйидаги айирмани ҳисоблаймиз:

$$b'y - b'u = (y - u)'\, b = (y' A_Б - C'_Б)\, x^0_Б.$$

Бу айирма $x^0_Б > 0$, $y' A_Б - C'_Б \neq 0$ бўлганда мусбатдир. Демак, ихтиёрий иккиланма оптимал режа u билан устма-уст тушиши керак. Лемма исботланди.

3-теорема. Фараз қилайлик, $x^0 = x^0_b$ режа (1) каноник масаланинг b векторга мос бузилмаган оптимал базис режаси бўлсин. У ҳолда оптимал иккиланма y^0 режанинг компоненталари

$$y^0_i = \frac{\partial c' x^*_b}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i} \max_{Ax=b, x \geq 0} c'x, \quad i = \overline{1,m}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

Исботи. $A_Б$ матрица x^0 режанинг базис матрицаси бўлсин. Унда $x^0_Б = A^{-1}_Б b > 0$ тенгсизликдан етарли кичик $\|\Delta b\|$ лар учун $A^{-1}_Б (b + \Delta b) > 0$ тенгсизлик келиб чиқади, яъни $x^0_{b+\Delta b} = \{A^{-1}_Б (b + \Delta b),\ x^0 (J_н) = 0\}$ вектор (1) масаланинг b векторни $b + \Delta b$ векторга алмаштиргандаги бузилмаган оптимал базис режасидан иборат бўлади. x^0_b, $x^0_{b+\Delta b}$ режалар учун базис матрицалар умумий бўлганлигидан, уларга битта ва фақат битта y^0 оптимал иккиланма режа мос келади. Шундай қилиб, (14) иккиланмалик муносабатидан фойдаланиб (20) тенгликнинг бошқача кўринишини ифодаловчи

$$c' x^0_{b+\Delta b} - c' x^0_b = y^{0'} (b + \Delta b) - y^{0'} b = y^{0'} \Delta b$$

тенгликларни оламиз. Теорема исботланди.

Ишлаб чиқариш масаласи терминларида (1-§ нинг 12-бандига қ.) (20) тенгликлар қуйидагиларни ифодалайди: y^0_i — максимал фойданинг i-ресурс ҳажмининг ўзгаришини *сезувчанлик ўлчами (даражаси)*. Агар $y^0_i > 0$ бўлса, i-ресурс ҳажмининг ортиши максимал фойданинг ортишига олиб келади ва y^0_i қанча кўп бўлса, ортиш шунча самарали бўлади. $y^0_i < 0$ бўлганда i-ресурс ҳажмининг камайиши максимал фойданинг ортишига олиб келади.

Мисол. 1-§ нинг 12-бандида ишлаб чиқариш типидаги масала ечилган. 1.4-жадвалда x^0 оптимал режа ёзилган. Жадвалдан иккиланма оптимал режа y^0 нинг компоненталарини ҳам келтириб чиқариш мумкин. (2) формула ва баҳолар учун $\Delta_j = u' a_j - c_j$ формулага асосан, y_{i0} векторнинг i-компонентаси бирлик шарт вектори e_j билан бир устунда ётувчи Δ_j баҳога қийматни ифодаловчи c_j коэффициентни қўшиш ёрдамида ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $y_1^0 = 10$, $y_2^0 = 1$, $y_3^0 = 0$. Бу топилган қийматларга қараб (20) формулага асосан хулоса қилиш мумкинки, мисолнинг шартларида 1-ресурс ҳажмининг ортиши 2-ресурс ҳажми ортгандагига қараганда 10 марта самарали бўлади. Қатъий бўлмаган ҳолда айтиш мумкинки, 1-ресурс 2-ресурсдан 10 марта қимматлироқдир. Ўша ресурс бошқа шартларда (бошқа масалаларда, параметрларнинг бошқа қийматларида) бошқача қимматга эга бўлади. Шунинг учун иккиланма режа y^0 нинг компоненталарининг физик ўлчами қийматларни ифодаловчи векторларнинг ўлчами билан устма-уст тушганлиги, юқоридагига асосан, оддий тушунишда қимматли эмас. Кўп ҳолларда y_i^0 баҳо i-ресурснинг *объектив шартланган баҳоси* деб аталади.

4. Иккиланмалик назариясининг тенгсизликлар назариясига татбиқи. Иккиланмалик назарияси математиканинг ҳар хил бўлимларида татбиқларга эга. Бу бандда чизиқли тенгсизликлар назариясининг кейинроқ керак бўладиган бир неча натижаларини оламиз.

4-теорема (Фаркашнинг тенгсизлик-натижалар ҳақидаги теоремаси).

$$a_i x \leqslant 0, \ i = \overline{1,m}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳар бир n-вектор x да

$$a_0' x \leqslant 0 \tag{22}$$

тенгсизликнинг бажарилиши учун шундай манфий бўлмаган $\mu_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$a_0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Агар (21) тенгсизликлардан (22) тенгсизлик келиб чиқса, $x = 0$ вектор

$$a_0' x \to \max, \ a_i' x \leqslant 0, \ i = \overline{1, m} \tag{24}$$

масаланинг ечими бўлади. Иккиланмалик теоремасига асосан (24) масалага иккиланма бўлган

$$0' y \to \min, \ \sum_{i=1}^{m} a_i y_i = a_0, \ y \geqslant 0, \ (y = \{y_1, \ldots, y_m\}) \tag{25}$$

масаланинг y^0 ечими мавжуд бўлади. (25) масала чеклашларининг биргаликда бўлиш шарти (23) тенгликни исботланди.

Етарлилиги. Агар (21), (22) тенгсизликларнинг параметрлари учун $\mu_i \geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$ бўлган (23) тенглик ўринли бўлса, (23) тенгликни (21) тизимни қаноатлантирувчи ихтиёрий x векторга кўпайтирсак (22) тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди. Қуйидаги теорема юқоридагидек исботланади.

5-теорема (тенгликларнинг натижаси бўлган тенгсизлик ҳақида). (22) тенгсизлик фақат ва фақат шу ҳолда

$$a_i'x=0,\ i=\overline{1,m}$$

тенгликларнинг натижаси бўлади, агар қандайдир μ_i, $i=\overline{1,m}$ лар учун (23) тенгсизлик бажарилса.

Изоҳ. Агар (21) тенгсизликларни $a_i'x<0$, $i=\overline{1,m}$, қатъий тенгсизликларга алмаштирсак Фаркаш теоремаси ўзгармайди. Буни исботлаш учун мос

$$a_0'x \to \max,\quad a_i'x \leqslant \varepsilon_i.\ i=\overline{1,m}$$

масаланинг ихтиёрий $\varepsilon_i>0$, $i=\overline{1.m}$ лар учун ечими борлигини кўрсатиш етарлидир, чунки (22) га асосан унинг мақсад функцияси режалар тўпламида юқоридан чегараланган.

6-теорема (тенгсизликлар тизимининг биргаликда бўлмаслиги). Ушбу

$$a_i'x<0,\ i=\overline{1,m} \tag{26}$$

тенгсизликлар биргаликда бўлмайди, фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\mu_i \geqslant 0$ $i=\overline{1,m}$ номанфий сонлар мавжуд бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i a_i=0 \tag{27}$$

бажарилса.

Исботи. *Етарлилиги.* Қандайдир $\{\mu_i \geqslant 0,\ i=\overline{1,m}\}$ лар учун (27) тенглик бажарилсин, бироқ шундай n-вектор x^* мавжуд бўлсинки, у (26) тизимни қаноатлантирсин, яъни

$$a_i'x^*=\alpha_i,\ \alpha_i<0,\ \ i=\overline{1,m} \tag{28}$$

i-тенгликни $\mu_i \geqslant 0$ га кўпайтириб, натижаларни қўшамиз. Чап томонда (27) га асосан ноль оламиз, ўнг томонда эса $\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i>0$ бўлганлигидан, $\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\alpha_i$ манфий сонни оламиз. Бу эса зиддият.

Зарурийлиги. (26) тизимнинг биргаликда бўлмаслиги шуни билдирадики, $a_i'x$, $i=\overline{1,m}$ сонлар ичида ҳар бир n-вектор x учун манфий бўлмаган сон топилади, яъни $\max\limits_{1\le i\le m} a_i x_i \geqslant 0$. Демак, $x=0$ вектор

$$\max_{1\le i\le m} a_i'x \to \min_x$$

масаланинг ечими бўлади.

1-§ нинг 13-бандига асосан, (29) масала ечими $\{x=0, \xi=0\}$ вектор бўлган

$$\xi \to \min_{x,\xi}, \; a_i'x \leqslant \xi, \; i=\overline{1,m} \tag{30}$$

масалага эквивалентдир. Иккиланмалик теоремасига асосан (30) га иккиланма бўлган

$$0'y \to \min, \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = 0, \; \sum_{i=1}^{m} y_i = 1, \; y \geqslant 0 \tag{31}$$

масаланинг ечими ҳам мавжуд. (31) масала чеклашларининг биргаликда бўлиши теореманинг исботланганини билдиради.

5. Чизиқли программалашнинг матрицали ўйинлар билан богланиши. Минимакс ҳақидаги теорема. Ж. фон Нейманнинг иккиланмалик назариясининг асосларини яратишга олиб келган натижалардан бири унинг матрицали ўйинлар назариясидаги *минимакс ҳақидаги теоремасидир.*

Матрицали ўйин деб (нормал кўринишдаги) шундай $\{I, J, A\}$ учликка айтиладики, бунда $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ — *биринчи ўйинчининг соф стратегиялари* тўпламини, $J=\{1, 2, \ldots, n\}$ — *иккинчи ўйинчининг соф стратегиялари* тўпламини, $A=\{a_{ij}, i\in I, j\in J\}$, $m\times n$ *ўлчовли тўлов матрицасини* билдиради. Ўйинчилар бир вақтнинг ўзида $i\in I$, $j\in J$ соф стратегияларини (A тўлов матрицасининг сатр ва устунлари номерларини) танлайдилар ва a_{ij} элементнинг қийматига қараб ҳисоблашадилар: 1) агар $a_{ij}>0$ бўлса, биринчи ўйинчи иккинчи ўйинчидан a_{ij} тўловни олади; 2) агар $a_{ij}<0$ бўлса, иккинчи ўйинчи биринчи ўйинчидан $|a_{ij}|$ тўловни олади.

Масала ўйинчиларга максимал ютуқларни таъминловчи $i_0\in I$, $j_0\in J$ оптимал стратегияларни кўрсатишдан иборат.

Агар тўловлар матрицаси $\{i_0, j_0\}$ *эгар нуқтага* эга бўлса, яъни барча $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ учун

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j} \qquad (32)$$

тенгсизликлар бажарилса, i_0, j_0 лар қуйидаги маънода ўйинчиларнинг *оптимал стратегияларидир.* Биринчи ўйинчи томонидан соф стратегиянинг танланиши унга $a_{i_0j_0}$ ютуқни таъминлайди (иккинчи ўйинчи қандай $j \in J$ стратегияни танласа ҳам, у биринчи ўйинчига $a_{i_0j_0}$ ютуқни олишга халақит бера олмайди). Лекин, агар биринчи ўйинчи i_0 ни рад қилса, иккинчи ўйинчида — $a_{i_0j_0}$ дан ортиқроқ ютуқга эга бўлиш имконияти пайдо бўлади.

Умумий ҳолда A матрица эгар нуқтага эга бўлмайди, шунинг учун оптимал стратегияларни аниқлашнинг ўзи ҳам муаммо бўлиб қолади. Келтирилган турдаги реал ўйинларда қатнашувчиларнинг қандай маълумотга эга бўлиши катта роль ўйнайди ва ютуқ, одатда, кўп партиялар (қатнашувчиларнинг ўз стратегияларини танлаш актлари) натижаси сифатида ҳисобланади. Шунинг учун *аралаш стратегияларга (соф стратегияларни рандолаштиришга)* ўтиш табиийдир (бу биринчи марта Э. Борель томонидан амалга оширилган бўлиб, оптималлаштириш масалаларида стратегияларни кенгайтириш бўйича салмоқли қадам ҳисобланади). Қатнашувчилар энди конкрет соф стратегияларини кўрсатмасдан, соф стратегиялар тўпламлари I, J ларда эҳтимоллар тақсимотини танлашади, холос. Ушбу $x = \left\{x : x_i \geqslant 0,\ i \in I;\ \sum\limits_{i \in I} x_i = 1\right\}$ тўпламга биринчи ўйинчининг аралаш стратегияси деб аталади. Шунга ўхшаш, $y = \left\{y : y_j \geqslant 0,\ j \in J;\ \sum\limits_{j \in J} y_j = 1\right\}$ иккинчи ўйинчининг аралаш стратегияси бўлади. Шундай қилиб, кўп партиялардан иборат ўйинда қатнашувчилар ўзларининг ҳар бир соф стратегияларини танлаш эҳтимоллигини кўрсатадилар. Лекин ўйиннинг ҳар бир партиясидаги танлаш тасодифий механизмлар ёрдамида амалга оширилиб, бу механизмлардан бири I тўпламдан олинган ва тақсимотлари x га тенг бўлган тасодифий сонлар билан, иккинчиси эса J тўпламдан олинган ва тақсимотлари y бўлган тасодифий сонлар билан иш кўради. Энг содда механизм қуйидагича тузилган. Горизонтал доиранинг айланаси x_i, $i = \overline{1,m}$ сонларга пропорционал қисмларга бўлинган. Доиранинг марказига вертикал ўқ атрофида айланиши мумкин бўлган мосланган стрелка ўрнатилган. Агар стрелкани қуйиб юборсак, ҳар бир қуйишдан кейин стрелка тўхтаган ёйларнинг номерлари кетма-кетлиги партияларда танланадиган соф стратегиялар кетма-кетлигидан иборат бўлади. Аралаш стратегияларни амалга ошириш учун ЭҲМ ларнинг математик таъминотидан олинган тасодифий (псевдотасодифий) сонлар датчикларидан фойдаланиш мумкин. Ўйиннинг янги усулида қатнашувчилар рақибининг қандай стратегия танлашини аниқлай олмайди. Бу эса эски усул учун жуда муҳим бўлган соф стратегияларни сир сақлаш масаласини чиқариб ташлайди.

Агар партияда $i \in I$, $j \in J$ стратегиялар амалга оширилса, a_{ij} — биринчи ўйинчининг $x_i y_j$ эҳтимолли ютуғини ифодалайди.

Биринчи ўйинчининг ўйин давомидаги ўртача ютуғи (ютуқнинг математик кутилмаси)

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{33}$$

га тенгдир. Биринчи ўйинчи x ни танлаш йўли билан (33) ни максималлаштиришга, иккинчи ўйинчи эса y ни танлаш йўли билан уни минималлаштиришга интилади.

Маълум бўлишича, (33) функция $\{x^0, y^0\}$ эгар нуқтага эга (банднинг бу асосий натижаси қуйида исботланади), яъни барча x, y аралаш стратегиялар учун

$$f(x, y^0) \leqslant f(x^0, y^0) \leqslant f(x^0, y) \tag{34}$$

тенгсизлик бажарилади.

Юқорида тушунтирилган сабабларга кўра, x^0, y^0 аралаш стратегияларни ўйинчиларнинг *оптимал аралаш стратегиялари* (матрицали ўйиннинг ечими) сифатида қараш мумкин.

Оптимал стратегияларни қуриш мақсадида иккита масала қарайлик:

$$\min_{y \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \to \max, \quad x \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{35}$$

$$\max_{x \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \to \min, \quad y \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{36}$$

Ҳолбуки,

$$\min_{y \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i,$$

$$\max_{x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

бўлганлигидан, 1- § даги 13- бандни ҳисобга олсак, (35), (36) масалалар қуйидаги

$$\xi \to \max_{x,\ \xi}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \xi, \ j = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x \geq 0, \quad (37)$$

$$\eta \to \min_{y,\ \eta}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \eta, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y \geq 0, \quad (38)$$

иккиланма масалалар жуфтига эквивалент деган хулосага келамиз. Иккиланмалик теоремасига асосан $\xi^0 = \eta^0$, шунинг учун

$$\max_{x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1} \ \min_{y\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j=1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j =$$

$$= \max_{x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1} \ \min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \max_{x,\ \xi} \xi = \xi^0 = \eta^0 =$$

$$= \min_{y,\ \eta} \eta = \min_{y\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j=1} \ \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j =$$

$$= \min_{y\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j=1} \ \max_{x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (39)$$

га эга бўламиз. Иккинчи томондан, x^0, y^0 лар (37), (38) масалалар ечимларининг компоненталари бўлганлигидан,

$$\xi^0 = \min_{y\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j=1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j; \quad \eta^0 = \max_{x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^0,$$

$$\xi^0 = \eta^0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \ x_i^0 y_j^0,$$

яъни x^0, y^0 векторлар

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j \geqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^0 \qquad (40)$$

тенгсизликларни қаноатлантириши келиб чиқади. (40) ни (34) ва (39) даги четки ифодалар билан таққослаб, қуйидагини оламиз.

7- теорема (матрицали ўйинлар назариясининг минимакси ҳақида). Ҳар бир матрицали ўйин (37), (38) чизиқли масалаларнинг оптимал режалари компоненталари билан устма-уст тушувчи аралаш стратегиялар синфида $\{x^0, y^0\}$ ечимга эга ҳамда

$$\max_{x\geqslant 0,\, e'x=1} \min_{y\geqslant 0,\, e'y=1} x'Ay, \qquad \min_{y\geqslant 0,\, e'y=1} \max_{x\geqslant 0,\, e'x=1} x'Ay$$

қийматлар ҳамиша мавжуд ва ўзаро тенг:

$$\max_{x\geqslant 0,\, e'x=1} \min_{y\geqslant 0,\, e'y=1} x'Ay = \min_{y\geqslant 0,\, e'y=1} \max_{x\geqslant 0,\, e'x=1} x'Ay.$$

Изоҳ. x^0Ay^0 сон ўйиннинг баҳоси деб аталади.

Шундай қилиб, ихтиёрий матрицали ўйиннинг ечимини чизиқли программалашнинг маълум бир масаласининг ечими бўйича топиш мумкин. Аксинча: чизиқли программалашнинг ҳар бир масаласига ечими шу масаланинг оптимал режасини берадиган матрицали ўйин мос келади.

3- §. ИККИЛАНМА СИМПЛЕКС УСУЛ

Каноник масалани 1- § да баён қилинган ечиш усулини бундан буён *тўғри симплекс усул* деб атаймиз. Иккиланма симплекс усул бу тўғри каноник масаланинг оптимал режаларини иккиланма каноник масалада тўғри симплекс усулни амалга ошириш ёрдамида қуриш усулидан иборатдир. Энди симплекс усул деганда *тўғри* ва *иккиланма симплекс усуллар мажмуи (жуфти)* тушунилади. Чизиқли программалаштиришнинг амалий масалаларини чуқур текширишда симплекс-усулнинг иккала компонентаси муҳим роль ўйнайди ва бири иккинчисини тўлдиради.

1. Базис иккиланма режа. Корежа. Псевдорежа. Орттирма формуласи. Иккиланма симплекс усул

$$c'x \to \max, \ Ax = b, \ x \geqslant 0 \qquad (1)$$

каноник масалани унга иккиланма бўлган ушбу

$$b'y \to \min, \ A'y \geqslant c \qquad (2)$$

масаланинг режаларини алмаштириш ёрдамида ечишнинг махсус усулидан иборатдир.

2-§ да иккиланма масала (2) ни ҳосил қилишда кўрсатилган эдики, $A_Б = A\ (I,\ J_Б)$ базис матрицали x^0 оптимал базис режага иккиланма масаланинг

$$y^{0'} A_Б = c'_Б, \quad y^{0'} A_Н \geqslant c'_Н \tag{3}$$

шартларни қаноатлантирувчи махсус $y^0 = u$ ечими мос келади. Агар (3) муносабатларни қаноатлантирувчи y^0 иккиланма режа берилса ва $A_Б^{-1}b \geqslant 0$ бўлса, (1) масаланинг $x^0 = \{A_Б^{-1}b,\ x_Н = 0\}$ оптимал базис режасини қуриш мумкин.

Бу таҳлил кўрсатадики, (1) масаланинг оптимал режасини қуриш имконини берадиган (2) иккиланма масаланинг ечимини *базис иккиланма режалар* деб аталадиган махсус иккиланма режалар орасидан излаш етарлидир.

1-таъриф. Агар $\det A_Б \neq 0$ бўлиб, y векторда иккиланма масаланинг чеклашлари

$$A'_Б y = c_Б, \quad A'_Н y \geqslant c, \tag{4}$$

$$(c_Б = c\ (J_Б),\ A_Н = A\ (I,\ J_Н),\ J_Н = J \setminus J_Б,\ c_Н = c\ (J_Н))$$

кўринишда бўлса, иккиланма y режа *иккиланма базис* $A_Б =$ $= A\ (I,\ J_Б)$ *матрицали базис режа* дейилади.

Иккиланма базис матрицанинг $\{a_j,\ j \in J_Б\}$ устунлари мажмуи *иккиланма базис* деб аталади. (1) тўғри масаланинг базиси ва базис режасининг базис матрицасини (1-§ га қ.) *тўғри базис* ва *тўғри базис матрица* деб атаймиз.

2-таъриф. Агар базис иккиланма режада (4) даги тенгсизлик қатъий бўлса, у *бузилмаган режа* деб аталади.

Кейинги ҳисоблашларда базис иккиланма режа билан боғланган иккита вектордан кўп фойдаланилади.

3-таъриф. Иккиланма режа y да ҳисобланган $\delta = \delta\ (J)$

$$\delta = A'y - c \tag{5}$$

вектор (яъни $\delta \geqslant 0$ бўлганда) (1) масаланинг *корежаси* деб аталади. *Базис корежа* — иккиланма базис режага мос корежадир. У

$$\delta\ (J_Б) = 0, \quad \det A\ (I,\ J_Б) \neq 0$$

муносабатларни қаноатлантиради.

4-таъриф. Иккиланма базис матрица $A_Б$ бўйича (базис иккиланма режа бўйича) ҳисобланган, компоненталари

$$\varkappa\,(J_{\text{Б}}) = A_{\text{Б}}^{-1}b, \ \ \varkappa\,(J_{\text{Н}}) = 0$$

бўлган $\varkappa = \varkappa\,(J)$ вектор (1) масаланинг *базис псевдорежаси* деб аталади.

Фараз қилайлик, y иккиланма базис режа бўлиб, $A_{\text{Б}} = A\,(I,\ J_{\text{Б}})$ унинг иккиланма базис матрицаси бўлсин. Бошқа $\overline{y} = y + \Delta y$ (базис бўлиши шарт эмас) иккиланма режани қараймиз. Иккиланма мақсад функциясининг орттирмаси

$$b'\overline{y} - b'y = b'\Delta y$$

учун формула келтириб чиқарамиз.

Корежа ва иккиланма базис режаларнинг таърифидан қуйидагига эгамиз:

$$\Delta\delta'\ (J_{\text{Б}}) = \overline{\delta}'\,(J_{\text{Б}}) - \delta'\,(J_{\text{Б}}) = \overline{y}A_{\text{Б}} - c'\,(J_{\text{Б}}) - \delta'\,(J_{\text{Б}}) =$$
$$= y'A_{\text{Б}} + \Delta y'A_{\text{Б}} - c'_{\text{Б}} - \delta'_{\text{Б}} = \Delta y'A_{\text{Б}}.$$

Буни ҳисобга олсак, псевдорежа таърифидан иккиланма мақсад функцияси орттирмаси учун изланган

$$b'\Delta y = \Delta y'A_{\text{Б}}\varkappa_{\text{Б}} = \varkappa'_{\text{Б}}\Delta\delta\,(J_{\text{Б}}) = \sum_{j\in J_{\text{Б}}} \varkappa_j\,\Delta\delta_j \qquad (6)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Бу формуладан псевдорежа компонентасининг физик маъноси келиб чиқади: $\varkappa_j$ — иккиланма мақсад функциясининг y нуқтада (мос δ корежада) δ корежанинг j-компонентаси ортгандаги ўзгариш тезлигидир.

2. Оптималлик критерийси. Тўғри режалар бўлмаслигининг етарлилик шарти. Итерация. Фараз қилайлик, y — иккиланма базис режа бўлиб, $A_{\text{Б}} = A\,(I,\ J_{\text{Б}})$ унинг иккиланма базис матрицаси, $\varkappa = \{\varkappa_{\text{Б}} = A_{\text{Б}}^{-1}b,\ \ \varkappa_{\text{Н}} = 0\}$ — мос базис псевдорежа бўлсин.

1-теорема (оптималлик критерийси). Иккиланма базис режа y нинг оптимал бўлиши учун

$$\varkappa_{\text{Б}} \geqslant 0 \qquad (7)$$

тенгсизликнинг бажарилиши етарли, бузилмаган базис режа бўлган ҳолда зарур ҳамдир. Шу y га мос базис псевдорежа эса тўғри оптимал режадан иборатдир.

Исботи. *Етарлилиги.* Ихтиёрий иккиланма режа $\overline{y} = y + \Delta y$ ва мос корежа $\delta = \delta + \Delta\delta$ учун

$$\Delta\delta\ (J_Б) = \bar{\delta}\ (J_Б) - \delta\ (J_Б) \geqslant 0 \tag{8}$$

тенгсизликни оламиз.

Иккиланма мақсад функциясининг (7), (8) векторлардаги орттирмаси (6) га асосан манфий бўлмайди. Бу эса иккиланма режа y нинг оптималлигини исботлайди.

Ҳар бир базис псевдорежа, таърифга кўра, (1) тўғри масаланинг асосий чекланишларини қаноатлантиради. Агар (7) бажарилса, бу режада (1) масаланинг тўғри чеклашлари ҳам ўринли бўлади, яъни $\varkappa$ = тўғри режадир. Шунингдек,

$$c'\varkappa = c'_Б \varkappa_Б = c'_Б A_Б^{-1} b = b'y$$

бўлганлигидан, иккиланмалик назариясига асосан (2-§ даги 2-натижа), $\varkappa$ (1) масаланинг оптимал режаси бўлади.

Зарурийлиги. Фараз қилайлик, y режа (7) тенгсизлик бажарилмайдиган бузилмаган иккиланма базис режа бўлсин, яъни

$$\delta_Н > 0 \tag{9}$$

бўлиб, бирор $i_0 \in J_Б$ учун $\varkappa_{i_0}$ компонента манфий бўлсин:

$$\varkappa_{i_0} < 0 \tag{10}$$

$\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$ корежани қуйидагича қурайлик:

$$\Delta\delta_j = \begin{cases} \sigma, & \text{агар } j = i_0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } j \neq i_0,\ j \in J_Б \text{ бўлса.} \end{cases} \tag{11}$$

(5) га асосан $\Delta\delta' = \Delta y' A$ тенглик бажарилади. Базис қисм $\Delta\delta'_Б = \Delta y' A_Б$ дан компоненталари (11) ёрдамида берилган маълум $\Delta\delta_Б$ вектор бўйича $\Delta y' = \Delta\delta'_Б A_Б^{-1}$ векторни топамиз. У ҳолда, $\Delta\delta_Н = \Delta\delta(J_Н)$ компонента учун

$$\Delta\delta'_Н = \Delta y' A_Н = \Delta\delta'_Б A_Б^{-1} A_Н \tag{12}$$

формулани оламиз.

Агар тўғри симплекс усулдагидек, $A_Б^{-1} a_j$ векторнинг i-компонентасини x_{ij}, $i \in J_Б$, $j \in J_Н$ билан белгиласак, (11) ни ҳисобга олганда, (12) формуланинг компоненталар бўйича ёзилиши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\Delta\delta_j = \delta x_{i_0 j},\ j \in J_Н. \tag{13}$$

(11), (13) лардан кўринадики, (9) га мувофиқ шундай етарли кичик мусбат $\delta > 0$ сон топиладики, унда $\bar{\delta}_j = \delta_j +$

$+\Delta\delta_j \geqslant 0$, $j \in J$, тенгсизлик бажарилади, яъни $\bar{\delta}$ режа (1) масаланинг $\bar{y} = y + \Delta y$ иккиланма режага мос режасидир. Бу режа учун орттирма формуласи (6) дан (10), (11) ларга мувофиқ иккиланма режа y нинг оптималлигига қарама-қарши бўлган

$$b'\bar{y} - b'y = \varkappa_{i_0} \Delta\delta_{i_0} = \sigma\varkappa_0 < 0 \tag{14}$$

тенгсизликка келамиз. Теорема исботланди.

Оптималлик критерийси (7) бажарилмаган ва псевдорежанинг бирор манфий компонентаси (10) га манфий бўлмаган

$$x_{i_0 j} \geqslant 0, \quad j \in J_{\text{Н}} \tag{15}$$

сонлар мос келган ҳолни қараймиз. У ҳолда (11), (13), (15) ларга мувофиқ, $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$ вектор ихтиёрий $\sigma \geqslant 0$ лар учун (1) масаланинг корежаси бўлади. (14) дан σ нинг ортиши билан иккиланма масаланинг мақсад функцияси чексиз камайиши келиб чиқади ($\sigma \to \infty$ да $b'y \to -\infty$). Бу эса 2-§ даги 2-натижага асосан қуйидаги теореманинг исботланганлигини билдиради.

2-теорема (тўғри режалар бўлмаслигининг етарлилик шарти). Агар бирор $i_0 \in J_{\text{Б}}$ учун (10), (15) тенгсизликлар бажарилса, (1) масаланинг чеклашлари ўзаро қарама-қарши бўлади.

Энди псевдорежанинг ҳар бир манфий (10) компонентаси учун (15) тенгсизликлар бажарилмаган, яъни бирор $j \in J_{\text{Н}}$ учун $x_{i_0 j} < 0$ бўлган ҳолни қараб чиқиш қолади. Бу ҳолда σ ортиши билан

$$\sigma_j = -\delta_j / x_{i_0 j} \tag{16}$$

бўлганда $\bar{\delta} = \delta_j + \sigma x_{i_0 j}$ компонента нолга айланади, $\sigma > \sigma_j$ бўлганда эса манфий бўлиб қолади. Бундан $\bar{\delta}$ корежа бўлиб қолиши учун максимал мумкин бўлган σ^0 қиймат

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = -\delta_{j_0} / x_{i_0 j_0} = \min_{x_{i_0 j} < 0,\ j \in J_{\text{Н}}} (-\delta_j / x_{i_0 j}) \tag{17}$$

га тенг бўлиши келиб чиқади. σ нинг бу қиймати учун (14) га асосан иккиланма мақсад функцияси $y \to \bar{y}$ алмаштиришда y бузилмаган иккиланма базис режа бўлганда мусбат бўладиган максимал $|\sigma^0 \varkappa_{i_0}|$ қийматга камаяди.

Қурилган $\bar{\delta}$ корежага мос келувчи $\bar{y} = y + \Delta y$ иккиланма режанинг базис режа бўлишини исботлаймиз. (11) га мувофиқ, $\bar{\delta}$ корежанинг $\bar{\delta}_j$, $j \in J_Б$ компоненталаридан фақат битаси, яъни $\bar{\delta}_{i_0}$ ($\sigma^0 > 0$ бўлганда) ноль бўлмаслиги мумкин. Лекин унинг ўрнига $\bar{\delta}_j$, $j \in J_Н$ лар ичида албатта нолга тенг бўлган

$$\bar{\delta}_{j_0} = \delta_{j_0} + \sigma^0 x_{i_0 j_0} = \delta_{j_0} - \delta_{j_0} \cdot x_{i_0 j_0} / x_{i_0 j_0} = 0$$

компонента пайдо бўлади.

Демак, $\bar{\delta}$ векторнинг ҳам δ вектордагидек m та нолга тенг компоненталари бўлади: $\bar{\delta}(\bar{J}_Б) = 0$, $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus i_0) \cup j_0$, $\bar{\delta}(\bar{J}_Н) \geqslant 0$, $\bar{J}_Н = (J_Н \setminus j_0) \cup i_0$.

$A(I, \bar{J}_Б)$ матрица $A_Б$ матрицанинг a_{i_0}-устунини a_{j_0}-устунга алмаштириш натижасида ҳосил қилинади, бу ерда (17) га мувофиқ $x_{i_0 j_0} \neq 0$ муносабат бажарилади. 1-§ да $A(I, \bar{J}_Б)$ махсусмас матрица эканлиги исбот қилинган. Шундай қилиб, $\bar{\delta}$ вектор $\bar{A}_Б = A(I, \bar{J}_Б)$ иккиланма базис матрицали базис корежадан иборатдир. $\bar{A}_Б$ матрицага тескари матрицанинг элементларини топиш формулалари 1-§ да келтирилган. Эски базис корежа δ дан янги базис корежа $\bar{\delta}$ га ўтиш, аниқланишига кўра, кетма-кет амалга оширилган итерациялар тўпламидан иборат бўлиб, иккиланма симплекс усулнинг итерацияси деб аталади.

Изоҳлар. 1. Юқоридаги i_0 индекс псевдорежанинг ихтиёрий манфий компонентасига тегишли бўлиши мумкин. Кўпинча қуйидаги қоида қўлланилади:

$$\varkappa_{i_0} = \min \varkappa_j, \ j \in J_Б.$$

Иккиланма симплекс усул 1-§ нинг техникаси ёрдамида олинди. Бошқа усул эса каноник кўринишга келтирилган (2) иккиланма масала учун тўғри симплекс усулнинг амалга оширилишидан иборатдир. Агар ҳосил қилинадиган шарт матрицасининг махсус структурасини ҳисобга олсак, юқорида баён қилинган усулга келамиз. Бу усулларнинг иккаласи ҳам қандайдир бириккан ҳолда 4-§ да нақлиёт масалаларини текширишда қўлланилади.

3. **Алгоритм.** Иккиланма симплекс усул алгоритмини тескари иккиланма базис матрица $A_Б^{-1}$ терминларида баён қиламиз.

1-итерация. Биринчи итерацияда $J_Б^1$ тўплам бошланғич иккиланма базис матрица $(A_Б)_1 = A(I, J_Б^1)$ га тескари бўлган $(A_Б^{-1})_1$ матрица ва бошланғич базис корежанинг нобазис

$\delta^{1\prime}(J^1_{\text{Н}}) = c'(J^1_{\text{Б}})(A^{-1}_{\text{Б}})_1\, A(I,\, J^1_{\text{Н}}) - c'(J^1_{\text{Н}}),\ J^1_{\text{Н}} = J \setminus J^1_{\text{Б}}$ компоненталари маълум.

k-итерация. Фараз қилайлик, k-итерацияда $J^k_{\text{Б}}$ тўплам, $A(I,\ J^k_{\text{Б}})$ иккиланма базис матрицага тескари $(A^{-1}_{\text{Б}})_k$ матрица ва мос базис корежанинг нобазис $\delta^k(J^k_{\text{Н}}),\ J^k_{\text{Н}} = J \setminus J^k_{\text{Б}}$ компоненталари маълум бўлсин.

1) $\varkappa(J^k_{\text{Б}}) = (A^{-1}_{\text{Б}})_k b$ векторни ҳисоблаймиз.

2) Агар $\varkappa_j,\ j \in J^k_{\text{Б}}$ сонлар ичида манфийлари бўлмаса, (1) масалани ечиш жараёни

$$x^0 = \{x^0(J^k_{\text{Б}}) = \varkappa(J^k_{\text{Б}}),\quad x^0(J^k_{\text{Н}}) = 0\}$$

оптимал режада тугалланади.

3) Агар $\varkappa_j,\ \ j \in J^k_{\text{Б}}$ сонлар ичида манфийлари бўлса, улар ичида $\varkappa_{i_0} < 0,\ i_0 = i_0(k)$ ни танлаймиз.

4) $[A^{-1}_{\text{Б}}(i_0,\ I)]_k\, A(I,\ J^k_{\text{Н}})$ векторнинг $x_{i_0j},\ \ j \in J^k_{\text{Н}}$ компоненталарини ҳисоблаймиз, бунда $[A^{-1}_{\text{Б}}(i_0,\ I)]_k$ орқали $(A^{-1}_{\text{Б}})_k$ матрицанинг i_0-қатори белгиланган.

5) Агар $x_{i_0j},\ \ j \in J^k_{\text{Н}}$ сонлар ичида манфийлари бўлмаса, ечиш жараёни тугалланади; (1) масала тўғри режаларга эга бўлмайди.

6) Агар $x_{i_0j},\ \ j \in J^k_{\text{Н}}$ сонлар ичида манфийлари бўлса, ҳар бир $x_{i_0j} < 0,\ j \in J^k_{\text{Н}}$ учун $\sigma_j = -\delta_j / x_{i_0j}$ сонларни ҳисоблаймиз ва улар ичида энг кичигини топамиз: $\sigma^0 = \sigma_{j_0},\ j_0 = j_0(k)$.

7) $J^k_{\text{Б}},\ J^k_{\text{Н}}$ тўпламларни янгиларига алмаштирамиз:

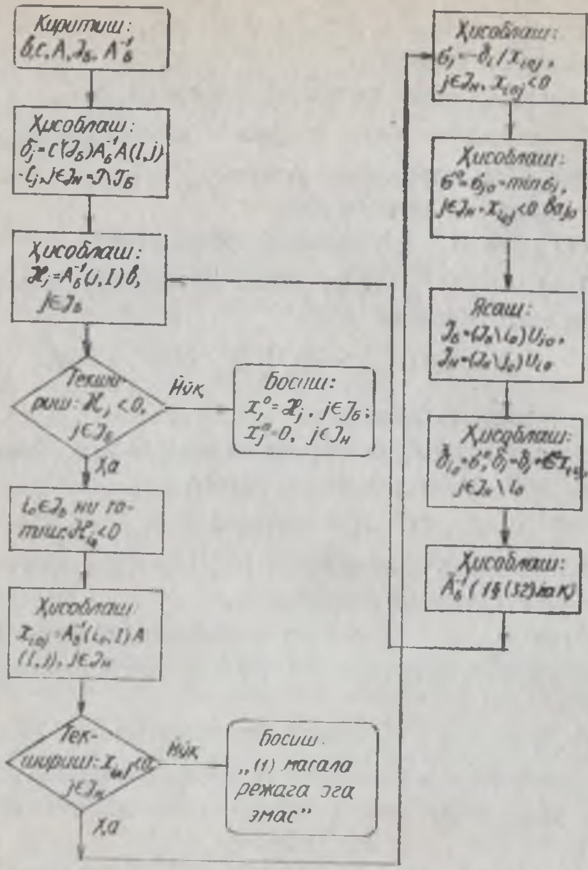
$$J^{k+1}_{\text{Б}} = (J^k_{\text{Б}} \setminus i_0) \cup j_0,\quad J^{k+1}_{\text{Н}} = (J^k_{\text{Н}} \setminus j_0) \cup i_0.$$

8) Янги базис корежанинг нобазис элементларини ҳисоблаймиз:

$$\delta^{k+1}_j = \delta^k_j + \sigma^0 x_{i_0j},\quad j \in J^{k+1}_{\text{Н}} \setminus j_0,\ \delta^{k+1}_{i_0} = \sigma^0.$$

9) 1-§ нинг (32) формулаларида $J_{\text{Б}} = J^k_{\text{Б}},\ u_{ij},\ \ i \in \bar{J}_{\text{Б}},$ $j \in I$ ларни $(A^{-1}_{\text{Б}})_k$ матрицанинг элементлари деб ҳисоблаб, ўша формулаларга асосан, $(A^{-1}_{\text{Б}})_{k+1}$ матрицанинг $\bar{u}_{ij},\ i \in \bar{J}_{\text{Б}},$ $j \in I$ элементларини ҳисоблаймиз.

10) $(k+1)$-итерацияга ўтамиз.



1.4- чизма.

Алгоритмнинг блок- схемаси I.4- чизмада келтирилган.

4. Мисол (пархез ҳақидаги масала). Иккиланма симплекс усулни жадвалда амалга ошириш. Таркибида m та тўйимли моддаларни b_1, b_2, . . . , b_m дан кам бўлмаган миқдорда сақловчи энг арзон таом тайёрлаш талаб қилинади. Тўйимли моддалар сотиб олиниши керак бўлган озиқ- овқат маҳсулотларида ҳар хил нисбатда бўлади. Бирлик (оғирлик, ҳажм ва ш. ў.) j маҳсулотдаги i тўйимли модданинг миқдори a_{ij} га тенг бўлсин. Бирлик j маҳсулотнинг баҳоси c_j га тенг бўлсин.

Пархез ҳақидаги (ва шунга ўхшаш аралашмалар ҳақидаги ҳар хил масалалар) ҳар бир масаланинг ўзига хослиги шундан иборатки, унинг учун бошланғич иккиланма базис режа осон қурилади. Бу эса масалани иккиланма симплекс усул билан самарали ечиш имкониятини беради.

Иккиланма симплекс усулни кўрсатиш учун парҳез масаласини катталиклари I.5- жадвалдаги кўринишда бўлган ҳолда ечамиз.

I.5- жадвал

Махсулот № / Модда №	1	2	3	Моддалар миқдорининг қуйи чегаралари
1	2	3	1	2
2	1	1	0	3
3	3	0	1	1
4	0	1	2	2
Махсулот бирлигининг баҳоси	1	3	1	

Сотиб олиниши керак бўлган j махсулот миқдори $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$ бўлсин. У ҳолда, $c_j x_j$ — унинг баҳоси ва $x_1 + 3x_2 + x_3$ (I.5-жадвалга кўра) таомнинг баҳоси бўлади. Сотиб олинган j маҳсулотдаги i модданинг миқдори a_{ij} x_j га тенг. Шунинг учун $2x_1 + 3x_2 + x_3$ I.5-жадвал) таомдаги биринчи модданинг миқдори бўлади.

Бошқа моддаларнинг миқдори ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Бу ҳисоблашларни тўйимли моддаларнинг таомда бўлиши керак бўлган қуйи чегаралари билан солиштириб, *парҳез ҳақидаги масаланинг* (қаралаётган мисолнинг шартларида) қуйидаги математик моделини оламиз:

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,\\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 2,\\
&x_1 + x_2 \geqslant 3,\\
&3x_1 + x_3 \geqslant 1,\\
&x_2 + 2x_3 \geqslant 2,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Бу масалани каноник кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2,\\
&x_1 + x_2 - x_5 = 3,\\
&3x_1 + x_3 - x_6 = 1,\\
&x_2 + 2x_3 - x_7 = 2,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,7}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Бу масалага иккиланма бўлган масала

$$\begin{aligned}
&2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 \to \min\\
&2y_1 + y_2 + 3y_3 \geqslant -1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3y_1 + y_2 \qquad\quad + y_4 &\geqslant -3,\\
y_1 \qquad\quad + y_3 + 2y_4 &\geqslant -1,\\
-y_1 \qquad\qquad\qquad &\geqslant 0,\\
-y_2 \qquad\quad &\geqslant 0,\\
-y_3 \quad &\geqslant 0,\\
-y_4 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

кўринишда бўлади.

$\{0, 0, 0, 0\}$ вектор (18) масаланинг манфий бирлик диагонал

$$A_Б = \{a_4, a_5, a_6, a_7\} = -E$$

иккиланма базис матрицали иккиланма базис режасидан иборат бўлади. Бошланғич базис корежа δ нинг компоненталарини ҳисоблаймиз: $\delta = \{1, 3, 1, 0, 0, 0, 0\}$.

Иккиланма симплекс усулнинг итерациясини амалга ошириш мақсадида иккиланма масала учун янги жадвал тузиш зарурати йўқ. Бу вазифани тўғри масаланинг бир оз ўзгартирилган эски симплекс жадвали ўтайди (1.2- жадвал). Бу жадвалда θ- устун олиб ташланиб, Δ- қатор δ- қаторга алмаштирилган ва σ- қатор қўшимча киритилган. 1.6- жадвалнинг асосий қисми 1.2- жадвалдек тўлдирилади. Бошланғич $A_Б$ матрица E дан иборат бўлмасдан $-E$ дан иборат бўлганлигидан, (18) масаланинг параметрлари 1.6- жадвалга тескари ишоралар билан киритилган. δ- қатор мазкур корежанинг компоненталари билан тўлдирилади.

1.6- жадвал

б, а / базис	б	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_4	2	-2	-3	1	1	0	0	0
a_5	-3	$\boxed{-1}$	1	0	0	1	0	0
a_6	1	3	0	-1	0	0	1	0
a_7	2	0	-1	-2	0	0	0	1
δ		1	3	1	0	0	0	0
σ		1	3					

1.6- жадвалнинг таҳлили псевдорежанинг компоненталарини ўзида сақловчи b- устундан бошланади. Бирорта ҳам қатор учун 2- теореманинг шартлари бажарилмаганлигидан ($\varkappa_j < 0$ бўлган ҳар бир қаторда манфий элементлар мавжуд), итерацияни ёзишга киришамиз. Аввало, b- устуннинг минимал элементини топамиз: $\varkappa_{i_0} = \varkappa_5 = -3$. У манфий бўлганлигидан бошланғич базис корежа оптимал эмас. $\varkappa_{i_0}$ ни ўзида сақловчи *қатор етакчи қатор* деб аталади. Етакчи қаторнинг ҳар бир манфий $x_{i_0 j}$ элементи учун $-\delta_j / x_{i_0 j}$ нисбатларни ҳисоблаймиз ((16) га қ.) ва натижаларни σ- қаторга ёзамиз. Минимал элемент $\sigma^0 = \sigma_1 = 1$

(17) сонга мос келади. σ_{j_0} ни ўзида сақловчи *устун етакчидир.* $x_{i_0 j_0}$ элемент тўғри симплекс усулдагидек *етакчи элемент* деб аталади. Иккиланма базисдаги a_{i_0} векторни a_{j_0} га алмаштириб, чиқариб ташлаймиз. Бу амал I.6-жадвалнинг сатрларига (σ сатрдан бошқа) қўлланилган тўғри тўртбурчак қоидаси бўйича амалга оширилади. Янги I.7-жадвални тузиш билан иккиланма симплекс усулнинг битта итерацияси

I.7-жадвал

Базис \ b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_4	4	0	1	-1	1	2	0	0
a_1	3	1	1	0	0	-1	0	0
a_6	8	0	3	-1	0	-3	1	0
a_7	[illegible]	0	-1	$\boxed{-2}$	0	0	0	1
δ		0	2	1	0	1	0	0
σ			2	1/2				

тугалланади. Навбатдаги итерациянинг натижалари оптималлик критерийсини қаноатлантирувчи I.8-жадвалда келтирилган. Бу жадвалдан (18) масаланинг оптимал режаси компоненталарини ёзамиз: $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 1$, $x_4^0 = 5$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 9$, $x_7^0 = 0$.

I.8-жадвал

Базис \ b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_4	5	0	—1/2	0	1	—2	0	—1/2
a_1	3	1	1	0	0	—1	0	0
a_6	9	0	7/2	0	0	—3	1	—1/2
a_3	1	0	1/2	1	0	0	0	—1/2
δ		0	3/2	0	0	1	0	1/2

5. Сезгирликнинг таҳлили. Амалий масалаларни ечишда кўп ҳолларда масала параметрларининг қандайдир қийматлари учун эмас, балки уларнинг бирор тўплами учун оптимал режа қизиқарли ҳисобланади. A, b, c параметрлар вариацияларининг масала ечимига таъсирини текшириш сезгирликнинг таҳлили деб аталади. Бу муаммони ўрганишда икkиланма симплекс усул муҳим роль ўйнайди. Сезгирлик таҳлилининг намойиши учун ишлаб чиқариш масаласида ресурслар ҳажми (b-векторнинг) вариациясида оптимал режаларнинг коррекцияси усулини қараймиз ва баён қиламиз.

1-§ даги мисолга мурожаат қилайлик. У ерда қуйидаги учта ресурслар ҳажми $b=\{200,\ 500,\ 700\}$ учун ишлаб чиқаришнинг оптимал базис режаси x^0 олинган (1.4-жадвал). 1.4-жадвалдан x^0 режанинг тўғри базис матрицасига тескари $A_Б^{-1}$ матрицани ҳисоблаш мумкин. Унинг устунлари, аниқланишига кўра, 1.4-жадвалнинг бирлик шарт вектор устунларидаги элементлардан иборат.

$$A_Б^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1/10 & 0\\ 0 & 1/10 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Фараз қилайлик 2-ресурс ҳажми 500 дан 800 га ўзгарсин, яъни $\overline{b}=\{200,\ 800,\ 700\}$ бўлсин. Унинг мақсад функциясига таъсирини x^0 режанинг оптимал потенциаллари ёрдамида биринчи яқинлашишда баҳолаш мумкин (2-§ нинг 3б бандига қ.). Мазкур бандда янги шартлар учун аниқ жавоб бериш имкониятини берадиган оптимал режани топамиз. Масалани ечишни симплекс усулнинг биринчи фазасидан бошлаш кўпинча вақтнинг кўп сарф бўлиши туфайли мақсадга мувофиқ эмас. Бу ҳолларда иккиланма симплекс усул анча самаралидир. 1.4-жадвалда Δ-қаторнинг элементлари $A_Б$ ик-

1.9-жадвал

в, а / Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_1	120	1	7/2	0	7/2	0	
a_3	80	0	1/2	1	1/2	0	
a_5	−100	0	$\boxed{-5}$	0	5	1	→
δ		0	15	0	30	0	
σ			3				
			↑				

киланма базис матрицали $\delta = \{0,15,\ 0,\ 30,0\}$ базис корежани ташкил қилади. Шунинг учун b- устунининг элементларини

$$A_Б^{-1}\,\bar{b}' = \{120,\ 80,\ -100\}$$

векторнинг компоненталари билан алмаштиргандан сўнг иккиланма симплекс усулни қўллаш учун бошланғич жадвални (I.9- жадвал) оламиз.

Изоҳ. Агар $A_Б^{-1}\,\bar{b}$ вектор манфий бўлмаса, $\bar{x}^0 = x_Б^0 = \{A_Б^{-1}\,\bar{b},\ x_Н = 0\}$ янги шартлар учун оптимал режа бўлади ва ҳеч қандай итерация талаб қилинмайди.

Иккиланма симплекс усулнинг 1.9- жадвалга қўлланилган битта итерацияси оптимал режаси $\bar{x}^* = \{50,\ 20,\ 70,\ 0,\ 0\}$ бўлган I.10- жадвалга олиб келади.

6. Масала ўлчамларининг ўзгариши. Чизиқли программалаш масаласининг ўлчами ўзгарувчилар сони n ва асосий чеклашлар сони m билан характерланади. Амалда кўпинча ўлчамлари оптимал режаси маълум бўлган масалалар ўлчамларидан кам фарқ қиладиган масалаларни ечиш зарурати пайдо бўлади. Тўғри ва иккиланма симплекс усулларнинг моҳирлик билан қўлланилиши аввалги маълумотлардан самарали фойдаланиш имкониятини беради.

I.10- жадвал

Базис \ $b,\ a_j$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	50	1	0	0	7	7/10
a_3	70	0	0	1	1	1/10
a_2	20	0	1	0	—1	—1/5
δ		0	0	0	45	3

Ишлаб чиқариш масаласи (1- §) тилида ўзгарувчилар сонининг ошиши—корхонанинг ишлаб чиқариш режасига янги маҳсулот қўшишни, ўзгарувчилар сонининг камайиши эса режадан қандайдир маҳсулотни чиқариб ташлашни билдиради. Агар корхонанинг маҳсулоти қўшимча қайта ишлашни талаб қилса математик модель учун асосий чеклашлар сони ортади. Агар маҳсулотни қайта ишлашнинг бирор тури чиқариб ташланса асосий чеклашлар сони камаяди.

риацияларининг масала ечимига таъсирини текшириш сезгирликнинг таҳлили деб аталади. Бу муаммони ўрганишда икқиланма симплекс усул муҳим роль ўйнайди. Сезгирлик таҳлилининг намойиши учун ишлаб чиқариш масаласида ресурслар ҳажми (b-векторнинг) вариациясида оптимал режаларнинг коррекцияси усулини қараймиз ва баён қиламиз.

1-§ даги мисолга мурожаат қилайлик. У ерда қуйидаги учта ресурслар ҳажми $b=\{200,\ 500,\ 700\}$ учун ишлаб чиқаришнинг оптимал базис режаси x^0 олинган (1.4-жадвал). 1.4-жадвалдан x^0 режанинг тўғри базис матрицасига тескари $A_Б^{-1}$ матрицани ҳисоблаш мумкин. Унинг устунлари, аниқланишига кўра, 1.4-жадвалнинг бирлик шарт вектор устунларидаги элементлардан иборат.

$$A_Б^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1/10 & 0\\ 0 & 1/10 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Фараз қилайлик 2-ресурс ҳажми 500 дан 800 га ўзгарсин, яъни $\overline{b}=\{200,\ 800,\ 700\}$ бўлсин. Унинг мақсад функциясига таъсирини x^0 режанинг оптимал потенциаллари ёрдамида биринчи яқинлашишда баҳолаш мумкин (2-§ нинг 3б бандига қ.). Мазкур бандда янги шартлар учун аниқ жавоб бериш имкониятини берадиган оптимал режани топамиз. Масалани ечишни симплекс усулнинг биринчи фазасидан бошлаш кўпинча вақтнинг кўп сарф бўлиши туфайли мақсадга мувофиқ эмас. Бу ҳолларда иккиланма симплекс усул анча самаралидир. 1.4-жадвалда Δ-қаторнинг элементлари $A_Б$ ик-

1.9-ж а д в а л

Базис \ $в$, a	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	120	1	7/2	0	7/2	0
a_3	80	0	1/2	1	1/2	0
a_5	−100	0	$\boxed{-5}$	0	5	1
δ		0	15	0	30	0
σ			3			

киланма базис матрицали $\delta = \{0,15,\ 0,\ 30,0\}$ базис корежани ташкил қилади. Шунинг учун b- устунининг элементларини

$$A_Б^{-1}\,\bar{b}' = \{120,\ 80,\ -100\}$$

векторнинг компоненталари билан алмаштиргандан сўнг иккиланма симплекс усулни қўллаш учун бошланғич жадвални (I.9- жадвал) оламиз.

Изоҳ. Агар $A_Б^{-1}\,\bar{b}$ вектор манфий бўлмаса, $\bar{x}^0 = x_Б^0 = \{A_Б^{-1}\,\bar{b},\ x_Н = 0\}$ янги шартлар учун оптимал режа бўлади ва ҳеч қандай итерация талаб қилинмайди.

Иккиланма симплекс усулнинг I.9- жадвалга қўлланилган битта итерацияси оптимал режаси $\bar{x}^0 = \{50,\ 20,\ 70,\ 0,\ 0\}$ бўлган I.10- жадвалга олиб келади.

6. Масала ўлчамларининг ўзгариши. Чизиқли программалаш масаласининг ўлчами ўзгарувчилар сони n ва асосий чеклашлар сони m билан характерланади. Амалда кўпинча ўлчамлари оптимал режаси маълум бўлган масалалар ўлчамларидан кам фарқ қиладиган масалаларни ечиш зарурати пайдо бўлади. Тўғри ва иккиланма симплекс усулларнинг моҳирлик билан қўлланилиши аввалги маълумотлардан самарали фойдаланиш имкониятини беради.

I.10- жадвал

Базис \ b, a_j	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	50	1	0	0	7	7/10
a_3	70	0	0	1	1	1/10
a_2	20	0	1	0	—1	—1/5
δ		0	0	0	45	3

Ишлаб чиқариш масаласи (1- §) тилида ўзгарувчилар сонининг ошиши—корхонанинг ишлаб чиқариш режасига янги маҳсулот қўшишни, ўзгарувчилар сонининг камайиши эса режадан қандайдир маҳсулотни чиқариб ташлашни билдиради. Агар корхонанинг маҳсулоти қўшимча қайта ишлашни талаб қилса математик модель учун асосий чеклашлар сони ортади. Агар маҳсулотни қайта ишлашнинг бирор тури чиқариб ташланса асосий чеклашлар сони камаяди.

Асосий чеклашларнинг сони ортган ҳолга батафсил тўхталамиз. Фараз қилайлик, x° режа (1) масаланинг оптимал режаси $A_Б = A(I, I_Б)$, $u = u(I)$ унинг базис матрицаси ва потенциаллар вектори бўлсин. Асосий чеклашларга қўшимча

$$a'x \leqslant \beta, \ \beta \geqslant 0 \tag{19}$$

қўшилган бўлсин. Агар $a'x^0 \leqslant \beta$ бўлса, равшанки, x^0 вектор (1), (19) масалада ҳам оптимал режа бўлиб қолади. $a'x^0 > \beta$ бўлсин. У ҳолда (1), (19) масалани каноник кўринишга келтиргандан кейин унинг $(m+1)\times(n+1)$ шарт матрицаси

$$\tilde{A} = \begin{Bmatrix} A & 0 \\ a' & 1 \end{Bmatrix} = \{\tilde{a}_j, \ J \in \tilde{J} = J \cup (n+1)\}$$

кўринишни олади. Агар

$$\tilde{A}_Б = \begin{Bmatrix} A_Б & 0 \\ a'_Б & 1 \end{Bmatrix}, \quad a_Б = a(J_Б) \tag{20}$$

деб олсак,

$$\tilde{A}_Б^{-1} = \begin{Bmatrix} A_Б^{-1} & 0 \\ -a'_Б A_Б^{-1} & 1 \end{Bmatrix}$$

эканлигини текшириш осон. Ушбу $(m+1)$- векторни топайлик: $\tilde{u}'\{c(J_Б), 0\}\tilde{A}_Б^{-1} = \{u(I), 0\}'$. Бундан

$$\tilde{\Delta}_j = \tilde{u}'\tilde{a}_j - \tilde{c}_j = \begin{cases} \Delta_j, & j \in J, \\ 0, & j = n+1, \end{cases} \quad \tilde{c}_j = c_j, \ j \in J, \ \tilde{c}_{n+1} = 0;$$

$$\Delta_j = u'a_j - c_j.$$

x^0 режанинг оптималлиги сабабли Δ_j, $j \in J$ баҳолар манфий бўлмайди. Демак, $\tilde{\Delta}_j \geqslant 0$, $j \in \tilde{J}$ ва $\tilde{\Delta}_j = 0$, $j' \in \tilde{J}_Б = J_Б \cup \cup (n+1)$, яъни $\tilde{u}$ (1), (19) масаланинг (20) базис матрицали иккиланма базис режасидан иборат. Унга мос базис псевдорежа $\tilde{\varkappa} = \{\tilde{\varkappa}_Б, \ \varkappa_Н = 0\}$ ни қурамиз:

$$\tilde{x}_Б = \tilde{A}_Б^{-1}\tilde{b} = \begin{Bmatrix} A_Б^{-1} & 0 \\ -a'_Б A_Б^{-1} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_Б^{-1} b \\ -a'_Б A_Б^{-1} b + \beta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x_Б^\circ \\ -a'x^\circ + \beta \end{Bmatrix}.$$

$(m+1)$- векторнинг $\tilde{\varkappa}_Б$- компонентаси $\tilde{\varkappa}_{m+1} = -a'x^0 + \beta < 0$ манфий, яъни u оптимал бўлмаган иккиланма базис режадир. Иккиланма симплекс усулга асосан (1), (19) масаланинг оптимал иккиланма режасини қуриш учун ҳисоблашларни давом эттирамиз.

Машқ тариқасида баён қилинган усул билан 1-§ даги мисолда маҳсулотларнинг барча турларини қўшимча қайта ишлаш шарт бўлиб, унга 400 бирлик ҳажмдаги тўртинчи тур ресурс жалб қилинганда оптимал режа қуриш тавсия қилинади. Маълумки, биринчи ва тўртинчи турдаги бирлик маҳсулотларнинг қайта ишланиши учун бир бирлик тўртинчи тур ресурс сарфланади, иккинчи ва учинчи турлар учун эса икки бирлик сарфланади.

4-§. НАҚЛИЁТ МАСАЛАЛАРИ

Чизиқли программалашнинг *нақлиёт масалалари* деб маҳсулотлар ташишни оптималлаштириш бўйича турли амалий масалаларнинг математик моделларига айтилади. Бошқа физик табиатга эга бўлган кўпгина масалалар ҳам шунга келтирилади. Нақлиёт туридаги масалаларнинг амалда кенг тарқалганлиги уларни ечишнинг янги усулларини яратиш бўйича тинимсиз, зўр бериб қилинаётган ҳаракатларни оқлайди. Мазкур параграфда *тўр* ва *матрица шаклида* берилган нақлиёт масалаларини ечиш учун янги масалаларнинг махсуслигини ҳисобга олган тўғри симплекс усулнинг реализацияси сифатида *потенциаллар усули* қурилади.

1. Тўр. Оқим. Тўрли нақлиёт масаласи. *Тугунлар* деб аталган $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ элементлар тўпламини қарайлик. Кўргазмали бўлиши учун уни аҳоли яшайдиган пунктларнинг $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ тўплами деб тасаввур қиламиз. Фараз қилайлик, баъзи $i, j \in I$ тугунлар жуфти тартибланган. Бундай ҳар бир жуфтни (i, j) билан белгилаймиз ва уни *бошланиши* i *ва охири* j *бўлган ёй* деб атаймиз. Физик таҳлилда (i, j) ёй A_i пунктдан A_j пунктгача йўлни ифодалайди. $I \times I$ да аниқланган ёйлар тўпламини U билан белгилаймиз.

1-таъриф. $S = \{I, U\}$ тўплам (*йўналтирилган*) *тўр* деб аталади. Чизмаларда тугунлар нуқталар билан, (i, j) ёйлар i дан j га стрелкали чизиқлар билан белгиланади. Физик тилда тўр—йўл тармоқлари билан бирга олинган аҳоли яшайдиган пунктлар мажмуидир.

Ҳар бир $i \in I$ тугунга *тугуннинг жадаллигини* ифодаловчи a_i сонни мос қилиб қўямиз. $a_i > 0$ бўлганда i тугун *манба* (A_i —қандайдир маҳсулот *ишлаб чиқариш пункти*,

a_i — ундаги *ишлаб чиқариш ҳажми*), $a_i < 0$ бўлганда оқиш (A_i — *истеъмол қилиш пункти*, $|a_i|$ — *истеъмол ҳажми*) деб аталади. $a_i = 0$ бўлган i тугунлар *нейтрал* (*транзит*, *оралиқ*) тугунлар деб аталади. Чизмаларда манбалар ва оқимлар манба-тугунга кирувчи ёки оқим-тугундан чиқувчи стрелкалар билан белгиланади. Стрелкалар олдига интенсивликнинг абсолют қийматлари ёзилади. Нейтрал тугунлар чизмаларда белгиланмайди.

Ҳар бир $(i, j) \in U$ ёйга манфий бўлмаган x_{ij} сонни, яъни қабул қилинган тасаввурда A_i дан A_j га ташиладиган маҳсулот миқдорини ифодаловчи *ёйли оқимни* ((i, j) *ёй бўйича оқимни*) мос қилиб қўямиз.

Фараз қилайлик, $I_i^+ = I_i^+(U) = \{j : (i, j) \in U\}$, $I_i^- = I_i^-(U) = \{j : (j, i) \in U\}$ — тўпламлар i (I_i^+) дан бошланувчи ёки i (I_i^-) да тугалланувчи i тугунли U нинг ёйларини туташтирувчи тугунлар тўплами бўлсин. Агар

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i \qquad (1)$$

бўлса, яъни A_i пунктда ишлаб чиқариладиган ва унга келиб тушадиган маҳсулот миқдори A_i дан ташиб кетиладиган ва унда истеъмол қилинадиган маҳсулот миқдорига тенг бўлса, i тугунда *баланс шарти* бажарилган дейилади.

2-таъриф. Агар $x = \{x_{ij} : (i, j) \in U\}$ ёйли оқимлар ҳар бир $i \in I$ тугунда баланс шарти (1) ни қаноатлантирса, у $S = \{I, U\}$ *тўрдаги оқим* (*тўрли оқим*) деб аталади.

$(i, j) \in U$ ёйларга яна битта характеристикани, яъни *бирлик* ($x_{ij} = 1$) *ёйли оқимнинг қиймати* c_{ij} ни мос қилиб қўямиз. $\sum\limits_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij}$ сонни x оқимнинг қиймати деб атаймиз. Оқим қийматининг физик маъноси берилган йўллар тармоғи бўйича амалга ошириладиган ташишларнинг $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ режадаги нақлиёт харажатларининг (сарфларининг) миқдоридир.

Тўрли нақлиёт масаласи (*тўр шаклидаги нақлиёт масаласи*) *ёки минимал қийматли оқим ҳақидаги масала* деб ҳам юритиладиган масала

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I \qquad (2)$$

масаланинг ечими бўладиган x^0 *оптимал оқимни (минимал қиймат оқимини)* топишдан иборатдир.

(2) масаланинг мақсад функцияси ва чекланишлари (тенгликлар ва тенгсизликлар типидаги) функциялари x_{ij}, $(i, j) \in U$, ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлидирлар, яъни (2) чизиқли программалаш масаласидир. Лекин (2) чизиқли программалашнинг махсус масаласидир, уни каноник кўринишга келтирганда махсус структурали, фақат бирлар (мусбат-манфий) ва кўп ноллардан иборат катта шарт матрицаси ҳосил бўлади. Шунинг учун (2) масалани каноник кўринишга келтириш ва уни симплекс усул билан ечиш мақсадга мувофиқ эмас. Мазкур параграфда нақлиёт масалаларини ечишнинг бошқа, самарали *потенциаллар усули* деб аталадиган ва тўғри симплекс усул амалий ғоясини бевосита (2) моделда амалга оширадиган усул баён қилинади.

2. **Базис оқим.** Дастлаб тўрга доир зарур тушунчаларни киритамиз. Йўналтиришдан холи (i, j) ёйни i, j чегара тугунли $\{i, j\}$ *қирра* деб атаймиз. Агар тўрнинг тугуни ягона (осиғлик) қирра учун чегаравий бўлса, тугун *осма* деб аталади. Қўшни қирралари умумий чегаравий тугунларга эга бўлган ҳар хил қирраларнинг $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}$, . . . , $\{i_{k-1}, i_k\}$ кетма-кетлиги i_1, i_2 тугунларни туташтирувчи *(оддий) занжир* деб аталади. Агар бу занжирнинг $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ тугунлар кетма-кетлигида бир хиллари бўлмаса, занжирни *элементар* деб ҳисоблаймиз. Занжир бўйлаб ҳаракат йўналишини танлаб оламиз. Агар бу йўналиш занжирнинг (i, j) қиррасига мос (i, j) ёйнинг $i \to j$ йўналиши билан устма-уст тушса, (i, j) — *тўғри ёй* бўлади. Қарама-қарши йўналишли ёй *тескари* деб аталади. Агар тўрнинг ихтиёрий иккита тугунини занжир билан туташтириш мумкин бўлса, тўр *боғламли* дейилади. Бундан буён, асосан, фақат содда элементар занжирлар ва боғламли тўрлар қаралади.

Устма-уст тушадиган i_1, i_k тугунли $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ занжир *цикл* деб аталади.

1-лемма. Циклсиз тўр осма қиррани ўзида сақлайди.

Ҳақиқатан, i_1 — тўрнинг ихтиёрий тугуни бўлсин. Агар у осма бўлмаса, тўрнинг боғламлилигидан $\{i_1, i_2\}$ қирранинг мавжуд бўлиши келиб чиқади. Агар i_2 тугун ҳам осма бўлмаса, шундай $\{i_2, i_3\}$ қирра топиладики, $i_3 \neq i_1$ бўлади, чунки тўрда цикллар йўқ. Бу жараённи давом эттириб, чекли сондаги қадамдан сўнг осма тугун ва унга мос осма қиррани оламиз. Лемма исботланди.

2-лемма. Циклдан қиррани ёки осма қиррани (осма тугун билан) чиқариб ташлаш турнинг боғламлилигини бузмайди.

Исботи ўқувчига қолдирилади.

Агар $|I| = |U| + 1$ бўлса, $S = \{I, U\}$ тўр *шажара* деб аталади.

3- лемма. Тўр циклларга эга бўлмаганда ва фақат шунда шажара бўлади.

Исботи. *Етарлилиги.* 1- леммага асосан тўрда осма қирра топилади. Уни мос осма тугун билан чиқариб ташлаймиз. Қолган тўр 2- леммага асосан, яна боғламли ва равшанки, циклсиз бўлади. Ундан осма қирра ва осма тугунни чиқариб ташлаймиз. $|I| - 2$ қадамдан сўнг ягона қирра учун чегаравий бўлган иккита тугун қолади. Шундай қилиб, $|I| = |U| + 1$.

Зарурийлиги. Шажарада цикл мавжуд деб фараз қилайлик. Бу цикл тўла шажара қилиши мумкин эмас, чунки унинг қирралари сони тугунлари сонига тенгдир. Қаралаётган циклга кирмайдиган тугунлар ва қирралар ичида барча осма тугунлар ҳамда уларга мос осма қирраларни чиқариб ташлаймиз. Агар қолган қирралар яна битта цикл ташкил қилса, унда қаралаётган циклга кирмайдиган қиррани чиқариб ташлаймиз. Бунда тугунлар сони ўзгармасдан қолади, қирралар сони эса биттага камаяди. Бу жараённи давом эттириб, чекли сондаги қадамдан сўнг бошланғич тўрдан қаралаётган циклни ажратамиз. Унда тугунлар сони қирралар сонига тенг. Демак, бошланғич тўр-шажарада қирралар сони тугунлар сонидан кам эмас экан: $|U| \geqslant |I|$. Зиддият леммани исботлайди.

4- лемма. Шажара тугунларининг ҳар бир жуфти ягона занжир билан боғланган.

$S = \{I, U\}$ тўр учун $S^* = \{I, U^*\}$ тўр қисмий тўр деб аталади, бунда $U^* \subset U$. Шажарадан иборат бўлган қисмий тўр S тўрнинг шажараси деб аталади.

5- лемма. S^* — тўрнинг шажараси бўлсин. Ихтиёрий $((i, j) \in U, (i, j) \bar{\in} U^*$ ёйда $S_1 = \{I, U_1\}$, $U_1 = U^* \cup (i, j)$ қисмий тўр фақат битта циклни ўзида сақлайди.

Исботи. S_1 да циклларнинг мавжудлиги 3- леммадан келиб чиқади. Агар улар биттадан кўп бўлса, танлаб олинган битта циклдан қолганларининг ҳеч бўлмаганда биттасига кирмайдиган қиррани чиқариб ташлаймиз. Қолган $S_2 = \{I, U_2\}$ қисмий тўр учун $|I| = |U_2| + 1$, яъни S_2 — цикллари бўлган шажара эканлигини оламиз. Зиддият леммани исботлайди.

Банднинг асосий масаласига ўтамиз. Симплекс усулда чизиқли боғланмаган векторларнинг *тўла тизимидан* фойдаланилади. Каноник масаланинг a_j, $j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$ шарт векторлари ичида $\{a_j, j \in J_Б\}$, $J_Б \in J$ векторлар тўла (чизиқли эркли) векторлар тизимини ташкил этади дейилади, агар $\sum_{j \in J_Б} a_j x_j = 0$ тенглама фақат ноль $x_j = 0$, $j \in J_Б$ ечимга эга бўлиб, $j \in J_Б$ ихтиёрий $j_* \in J$, $j_* \bar{\in} J_Б$ да $\sum_{j \in J_Б} a_j x_j + a_{j_*} x_{j_*} = 0$ тенглама ноль бўлмаган $x_j \neq 0$, $j \in J_Б \cup J_0$ ечимга эга бўлса.

Бунга мувофиқ, (2) масала учун қуйидаги таърифни киритамиз.

3- *таъриф*. Агар

$$\sum_{j \in I_i^+(U_Б)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_Б)} x_{ji} = 0, \ i \in I,$$

тизим фақат ноль $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_Б$ ечимга, лекин ихтиёрий $(i_*, j_*) \in U$, $(i_*, j_*) \bar{\in} U_Б$ ёй учун

$$\sum_{j \in I_i^+(U_Б \cup (i_*, j_*))} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_Б \cup (i_*, j_*))} x_{ji} = 0, \ i \in I$$

тизими нолдан фарқли $x_{ij} \not\equiv 0$, $(i, j) \in U_Б \cup (i_*, j_*)$ ечимга эга бўлса, $S = \{I, U\}$ тўрнинг $U_Б \subset U$ ёйлар тўплами *тўла* деб аталади.

Ёйлар тўпламининг тўлалиги критерийсини ифодалашдан олдин қўшимча тушунчаларни киритамиз. Ҳар бир $i \in I$ тугунда (1) тенглик бажариладиган $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ тўпламни *псевдооқим* деб атаймиз.

6- лемма. Тугунларнинг интенсивлиги ноль ($a_i = 0$, $i \in I$) бўлган тўрда цикл бўлса бундай тўр чексиз сондаги псевдооқимларга эга бўлади.

Исботи. Циклга кирмаган барча $\{i, j\}$ қирралар учун $x_{ij} = 0$ деб оламиз. Циклнинг $\{i_0, j_0\}$ қиррасига мос (i_0, j_0) ёйнинг $i_0 \to j_0$ йўналиши бўйича циклнинг айланиб ўтиш йўналишини танлаймиз. Циклнинг (i, j) қирраси учун агар (i, j) — тўғри ёй бўлса, $x_{ij} = \theta$ деб, агар (i, j) — тескари ёй бўлса, $x_{ij} = -\theta$ деб оламиз. Ихтиёрий θ учун қурилган $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ тўплам (1), $i \in I$ тенгликларини қаноатлантиради. Лемма исботланди.

6- лемманинг исботида топилган псевдооқим θ *қийматли* (i_0, i_0) *циркуляция* деб аталади.

1- теорема (ёйлар тўпламининг тўлалик критерийси). $S=\{I, U\}$ тўрда $S_Б=\{I, U_Б\}$ тўрнинг дарахти бўлган ва фақат шундай бўлган ҳолдагина $U_Б \subset U$ тўплам тўла бўлади.

Исботи. *Етарлилиги.* $S_Б$ да осма тугунни топамиз. Бу тугундаги баланс шартидан псевдооқимнинг унга мос осма қирра бўйлаб нолга тенг бўлиши келиб чиқади. Осма тугун ҳамда қиррани чиқариб ташлаймиз ва операцияларни такрорлаймиз. $|I|-1$ қадамдан сўнг $S_Б$ да ноль псевдооқим оламиз. Агар $S_Б$ га ихтиёрий $(i, j)\in U$, $(i, j)\bar{\in} U_Б$ ёйни қўшсак, 5- леммага мувофиқ, цикл ҳосил бўлади, унинг натижасида (6- лемма) θ- циркуляция $(\theta>0)$ пайдо бўлади. Шундай қилиб, $U_Б$ — ёйларнинг тўла тўпламидир.

Зарурийлиги. $U_Б$ — ёйларнинг тўла тўплами бўлсин. $S_Б=\{I, U_Б\}$ тўплам циклларга эга бўла олмайди, чунки 6- леммага мувофиқ ҳар бир циклда ноль бўлмаган псевдооқим мавжуд. $S_Б$ тўр боғламлидир, чунки акс ҳолда $U_Б$ га $(i_0, j_0)\in U$ ёйни цикл ҳосил қилмасдан қўшиш (боғламли бўлмаган тўрда у ҳамиша мумкин) i_0 тугунда баланс шартидан келиб чиқадиган $x_{i_0j_0}=\theta$ тенгликка олиб келади. Шундай қилиб, 3- леммага асосан, $S_Б$—тўрнинг шажарасидир. Теорема исботланди.

4- таъриф. Агар $x_{ij}=0$, $(i, j)\in U_Н$, $U_Н=U\setminus U_Б$, $U_Б$ — ёйларнинг тўла тўплами бўлса, $x=\{x_{ij}, (i, j)\in U_Б\}$ оқим ***базис оқим*** деб аталади.

x_{ij}, $(i, j)\in U_Б$ базис ёйли оқимлар; x_{ij}, $(i, j)\in U_Н$ нобазис ёйли оқимлар бўлади.

5- *таъриф.* Агар базис оқимнинг барча базис ёйли оқимлари мусбат бўлса, у *бузилмаган* (айнимаган) деб аталади.

4- таърифнинг шартларини қаноатлантирадиган $U_Б$ ёйлар тўплами базис тўплам деб аталади.

Изоҳ. $U_Б$ базис тўпламни (симплекс усулдаги базис матрица каби) базис оқимнинг таърифига асос қилиб олиш мумкин. $S=\{I, U\}$ тўрда тўла $U_Б$ тўплам ажратилган бўлсин. У ҳолда $S_Б=\{I, U_Б\}$ — тўрнинг шажарасидир (3- лемма). $x_{ij}=0, (i, j)\in U_Н, U_Н=U\setminus U_Б$ деб олайлик. $S_Б$ да n_1 осма тугунни ва осма $\{i_1, i_2\}$ қиррага мос $\{i_1, i_2\}$ ёйни топамиз. a_{i_1} интенсивлик бўйича i даги баланс шарти ёрдамида $x_{i_1i_2}=a_{i_1}$ ёйли оқимни топамиз. $U_Б$ тўпламдан (i_1, i_2) ёйни чиқариб ташлаймиз. $S_Б^1=\{I\setminus i_1, U_Б\setminus(i_1, i_2)\}$ тўплам яна шажара ҳосил қилади (2- лемма). Унинг элементларининг характеристикаларини фақат i_2 тугуннинг жадаллигини a_{i_2} дан $\overline{a}_{i_2}$ га ўзгартириб, олдингидек сақлаймиз:

$$\overline{a}_{i_2}=\begin{cases} a_{i_2}+x_{i_1i_2}, \text{ агар } \{i_1,\ i_2\} \text{ қиррага } (i_1,\ i_2) \text{ ёй мос келса,}\\ a_{i_2}-x_{i_2i_1}, \text{ агар } \{i_1,\ i_2\} \text{ қиррага } (i_2, i_1) \text{ ёй мос келса.}\end{cases}$$

$S^1_Б$ шажара билан ҳам $S_Б$ каби иш қурамиз. $n-1$ қадамдан сўнг, ёйларнинг тўла $U_Б$ тўпламидан олинган барча ёйлар бўйича, x_{ij}, $(i,\ j)\in U_Б$ ёйли оқимлар қурилади. Равшанки, улар $x_{ij}=0$, $(i,j)\in U_Н$ лар билан биргаликда S тўрда псевдооқим ташкил қилади. Агар қурилган псевдооқим оқимдан иборат бўлса, яъни $x_{ij}\geqslant 0$, $(i,j)\in U_Б$ бўлса, тўла $U_Б$ тўплам базис тўплам деб аталади. Равшанки, бу оқим $U_Б$ базис тўпламга мос базис оқим (4- таъриф) бўлади.

3. Оқим қиймати орттирмасининг формуласи. Фараз қилайлик, (2) масалада $U_Б$ — ёйларнинг базис тўплами ва x — унга мос базис оқим бўлсин. Бошқа (базис бўлиши шарт бўлмаган) $\overline{x}=x+\Delta x$ оқимни қараймиз. Оқим қийматининг

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\overline{x}_{ij}-\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\Delta_{ij}$$

орттирмаси учун формула топамиз.

$S=\{I,U\}$ тўрнинг ҳар бир $i\in I$ тугуни учун u_i сонни (*тугунларнинг потенциали*) шундай мос қилиб қўяйликки, $\{u_i,\ i\in I\}$ тўплам

$$0=u_i-u_j-c_{ij},\ (i,j)\in U_Б \tag{3}$$

тенгламалар (потенциаллар) тизимини қаноатлантирсин. Изланаётган u_i, $i\in I$ сонлар мавжудлигини кўрсатамиз Ихтиёрий $i_1\in I$ тугуни танлаймиз ва $u_{i_1}=0$ деб оламиз. 4-леммага мувофиқ ҳар бир $i\in I$ тугунни i_1 билан $S_Б=\{I,U_Б\}$ шажаранинг ягона $\{i_1,\ i_2,\ .\ .\ .\ ,i_k,\ i\}$ занжири ёрдамида туташтириш мумкин. (3) тенгламаларни бу занжирнинг ёйлари (i_1 дан i гача) бўйлаб қараб, i тугуннинг u_i потенциалини аниқлаймиз. Масалан,

$$u_{i_2}=\begin{cases} u_{i_1}-c_{i_1i_2}, \text{ агар } (i_1,\ i_2) \text{ — тўғри ёй бўлса,}\\ u_{i_1}+c_{i_1i_2}, \text{ агар } (i_1,\ i_2) \text{ — тескари ёй бўлса.}\end{cases}$$

Шунга ўхшаш, u_{i_2} га кўра u_{i_3} ҳисобланади ва ҳ. к.

Тугунлар потенциалларига эга бўлган ҳолда базис бўлмаган ёйларнинг баҳоларини топамиз:

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}} \tag{4}$$

x ва $\bar{x} = x + \Delta x$ оқимларда (1) баланс шартлари бажарилганлигидан, ёйли оқимларнинг Δx_{ij}, $(i, j) \in U$ орттирмалари

$$\sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} = \sum_{j \in I_i^-} \Delta x_{ji} = 0, \ i \in I \tag{5}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(3), (4) тенгликларнинг иккала томонини Δx_{ij} га кўпайтириб, $(i, j) \in U$ лар бўйича йиғамиз:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{(i,j)\in U} (u_i - u_j) \Delta x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{i \in I} u_i \Big(\sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \Delta x_{ji} \Big).$$

Энди (5) ни ҳисобга олиб, оқимнинг қиймати орттирмаси учун изланган формулани оламиз:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij} \Delta x_{ij}. \tag{6}$$

(6) дан Δ_{ij} баҳоларнинг физик маъноси келиб чиқади: $\Delta_i{}^j$ баҳо x нуқтада нобазис ёйли x_{ij} оқим ортганда тескари ишора билан олинган оқим қийматининг ўзгариш тезлигидан иборатдир.

4. Базис оқимнинг оптималлик критерийси. Фараз қилайлик, x— ёйларининг базис тўплами $U_{\text{Б}}$ бўлган базис оқим, Δ_{ij}, $(i, j) \in U_{\text{н}}$ (4) формула бўйича ҳисобланган унга мос баҳолар бўлсин.

2- теорема (оптималлик критерийси). Базис оқим x нинг оптимал бўлиши учун

$$\Delta_{ij} \leqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}} \tag{7}$$

тенгсизликлар етарли, бузилмаган (айнимаган) ҳолда эса зарур ҳамдир.

Исботи. *Етарлилиги.* $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$ ва ихтиёрий $\bar{x} = x + \Delta x$ оқим учун $\bar{x}_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$ бўлганлигидан

$$\Delta x_{ij} = \bar{x}_{ij} - x_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}. \tag{8}$$

(7), (8) ларни (6) га келтириб қўйиб, $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}\,\Delta x_{ij} \geqslant 0$ га, яъни x оқимнинг қиймати унинг ихтиёрий ўзгаришида камаймаслигига ишонч ҳосил қиламиз, бу эса x нинг оптималлигига тенг кучлидир.

Зарурийлиги. Дейлик, x — бузилмаган оптимал базис оқим, яъни,

$$x_{ij} > 0,\ (i, j) \in U_Б \tag{9}$$

бўлсин. Фараз қилайлик, (7) тенгсизликлар $(i_0, j_0) \in U_Н$ бўлганда

$$\Delta_{i_0j_0} > 0 \tag{10}$$

баҳода бузилсин. Махсус $\Delta x = \{\Delta x_{ij},\ (i, j) \in U\}$ орттирма қурамиз. Дастлаб,

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} \theta \geqslant 0, \text{ агар } (i, j) = (i_0, j_0) \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } (i, j) \neq (i_0, j_0),\ (i, j) \in U_Н \text{ бўлса}, \end{cases} \tag{11}$$

деб оламиз. Қолган Δx_{ij}, $(i, j) \in U_Б$ компоненталарни (11) ни ҳисобга олганда қуйидаги

$$\sum_{j\in I_i^+(U_Б)} \Delta x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U_Б)} \Delta x_{ji} = \begin{cases} -\theta, \text{ агар } i = i_0 \text{ бўлса}, \\ +\theta, \text{ агар } i = j_0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } i \neq i_0,\ j_0,\ i \in I, \text{ бўлса}, \end{cases} \tag{12}$$

кўринишни оладиган (5) тенгламадан топамиз.

(12) тизимнинг $S_Б = \{I, U_Б\}$ шажара ва (i_0, j_0) ёйда аниқланган Δx_{ij}, $(i, j) \in U_Б$ ечимини топамиз $S_Б$ га (i_0, j_0) ёйни қўшиш ягона $\{i_0, j_0, i_1, \ldots, i_k\}$ циклнинг пайдо бўлишига олиб келади (5- лемма). (i_0, j_0) ёйда Δx_{ij} нинг қиймати берилган ((11) га қ.): $\Delta x_{i_0j_0} = \theta$. У ҳолда (12) тенгликларнинг цикл бўйлаб бажарилиши учун: 1) агар $\{i, j\}$ — циклнинг қирраси ва (i, j) ёй—циклни $i_0 \to j_0$ йўналишда айланиб ўтишда тўғри ёй бўлса, $\Delta x_{ij} = \theta$ бўлиши; 2) агар қаралаётган (i, j) ёй тескари бўлса, $\Delta x_{ij} = -\theta$ бўлиши зарур ва етарлидир. Циклга кирмайдиган қирраларга мос барча $(i, j) \in U_Б$ ёйлар учун $\Delta x_{ij} = 0$ деб олиб, (12) тизимнинг θ қийматли (i_0, j_0)- циркуляцияни ифодаловчи ечимини оламиз.

Қурилган циркуляцияни базис оқимнинг устига қўямиз. У ҳолда (11) га мувофиқ $x_{i_0j_0} = 0$ ёйли оқим $\bar{x}_{i_0j_0} = x_{i_0j_0} + \Delta x_{i_0j_0} = \theta \geqslant 0$ оқимгача ортади. x_{ij}, $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, $(i, j) \in U_Н$

ёйли оқимлар ўзгармайди. x_{ij} ёйли оқимлар цикл бўйлаб $|\Delta x_{ij}|$ ($|\Delta x_{ij}| \leqslant \theta$) га ўзгарадилар. Шунингдек, (i_0, j_0) дан ташқари цикл базис ёйларнинг қирраларидан иборат бўлганлигидан, у бўйлаб (9) тенгликлар бажарилади ва Δx_{ij} ларнинг етарли кичик ўзгаришлари уларни буза олмайди: $\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} > 0$, $(i, j) \in U_Б$. Шундай қилиб, $\bar{x} = x + \Delta x$ вектор етарли кичик $\theta > 0$ учун S турда оқимни аниқлайди. Орттирма формуласи (6) дан (10) (11) ларни ҳисобга олганда, $\bar{x}$ оқимнинг қиймати оптимал x оқимнинг қийматларидан кичик бўлади;

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\bar{x}_{ij} = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} - \theta\Delta_{i_0j_0} < \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \qquad (13)$$

Зиддият теоремани исботлайди.

Оптималлик критерийси (7) ни текшириш қуйидаги операцияларга келтирилади: 3- бандда баён қилинган қоидалар бўйича тугунларнинг потенциалларини ҳисоблаймиз, улар бўйича нобазис ёйларнинг баҳоларини топамиз, уларнинг ишорасини текширамиз.

5. Қуйидан чегараланмаган қийматли оқим мавжудлигининг етарлилик шарти. Фараз қилайлик, 4- бандда қаралаётган базис оқим учун (10) тенгсизлик бажарилсин ва циклнинг қирраларига мос барча ёйлар циклни $i_0 \to j_0$ йўналишда айланиб ўтишда тўғри бўлсин. Бу ҳолда оптималлик критерийси зарурийлигининг исботидан кўринадики, барча Δx_{ij} сонлар цикл бўйлаб мусбат бўладилар. Шунинг учун x га ихтиёрий $\theta > 0$ қийматли циркуляцияни қўйганда $\bar{x}$ оқим ҳосил бўлади. (13) дан келиб чиқадики, θ ортиши билан $\bar{x}$ оқимнинг қиймати чексиз камаяди.

3- теорема. Банднинг бошида келтирилган шартларда (2) масалада исталган даражада кичик қийматли оқим мавжуд (яъни (2) масала ечимга эга эмас).

6. Итерация. 4- банддаги базис оқимнинг таҳлилини давом эттирамиз. (10) манфий баҳо билан бирга, 5- банддан фарқли ўлароқ, цикл бўйлаб ҳамма ёйлар ҳам тўғри бўлавермайдиган охирги ҳолни қараймиз. Равшанки, бу ҳолда x оқимга фақат чекли θ қийматли (i_0, j_0) циркуляцияни қўйиш мумкин. θ ортиши билан янги оқимнинг қиймати камайганлиги учун (2) масалани ечиш нуқтаи назаридан максимал жоиз θ^0 қийматни топиш керак бўлади. Циклнинг қирраларига мос тескари ёйлар учун ўринли бўлган

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} = x_{ij} - 0$$

формуладан

$$\theta^0 = \theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij} \tag{14}$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда минимум нобазис (i_0, j_0) ёй бўйича қурилган циклнинг барча тескари ёйлари бўйича ҳисобланади.

x оқимни $\bar{x}$ оқимга алмаштирамиз, бу баён қилинган амалларга мувофиқ қуйидагига келтирилади: циклнинг тўғри ёйларидаги (жумладан, (i_0, j_0) ёйдаги) оқимларини θ^0 га орттирамиз, тескари ёйлардаги оқимларини θ^0 га камайтирамиз, қолган ёйли оқимларни ўзгартирмасдан қолдирамиз. Бунда (13) га кўра оқимнинг қиймати $\theta_0 \Delta_{i_0 j_0}$ қадар камаяди ва бу катталик бузилмаган x оқим учун (10) (14), (9) ларга кўра мусбат бўлади, чунки $\theta^0 > 0$. (i_*, j_*) ёйни $U_Б$ тўпламдан чиқариб ташлаймиз, лекин унга (i_0, j_0) ёйни қўшамиз. $x_{i_* j_*} = 0$ бўлган (i_*, j_*) ёйни чиқариб ташлаш $\{I, U_Б \cup (I_0, j_0)\}$ турдаги ягона циклни бузади. Демак, қисмий $S_Б = \{I, U_Б\}$ тур $\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_* j_*) \cup (i_0, j_0))$ билан бирга шажара бўлиб, $\bar{U}_Б$ — базис оқим бўлиб қолган янги $\bar{x}$ оқимга мос базис тўпламдан иборатдир.

$x \to \bar{x}$ ўтиш аниқланишига кўра бошланғич базис оқим учун кетма-кет бажарилган баён қилинган турдаги итерацияларнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, *потенциаллар усулининг итерацияси* деб аталади.

Бузилмаган турли нақлиёт масалалари (барча базис оқимлари бузилмаган) учун потенциаллар усули чеклидир. Бу итерациялар жараёнида ёйларнинг базис тўпламлари оқим қийматининг қатъий камайиши натижасида икки марта учраши мумкин эмаслигидан, базис тўпламларнинг эса ёйларнинг барча тўпламида фақат чекли сонда эканлигидан келиб чиқади.

Изоҳ. Баён қилинган итерацияда (i_0, j_0) ёй ихтиёрий мусбат (10) баҳо бўйича танлаб олинган эди. Кўп ҳолларда уни

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, \ (i, j) \in U_Н$$

шартдан танлаб оладилар.

7. Потенциаллар усулининг биринчи фазаси. (2) масала учун ёйларнинг бошланғич $U_Б$ базис тўпламини қуриш потенциаллар усулининг *биринчи фазаси* деб аталади. Кўпинча $U_Б$ синаб кўриш усули ёрдамида оддий қурилади. Умумий усул қуйидагича. $S=\{I, U\}$ турга $a_{n+1}=\sum_{i\in I} a_i=0$ жадалликка* эга бўлган $n+1$ *сунъий тугунни* ва агар i-манба ёки нейтрал тугун бўлса, $(i, n+1)$ кўринишдаги сунъий ёйлардан иборат U_c тўпламни; агар i — оқиш (куйилиш) бўлса, $(n+1, i)$ кўринишдаги сунъий ёйлардан иборат U_c тўпламни қўшамиз.

Кенгайтирилган турда сунъий ёйлар тўплами базис бўлади (текширинг!) ва базис (сунъий) ёйлар бўйлаб оқимлар бошланғич турнинг бу ёйлар можароли бўлган $i\in I$ тугунлари интенсивликларининг абсолют қийматига тенгдир.

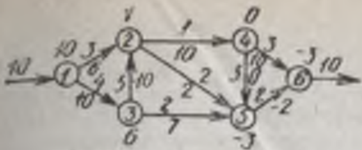
Изоҳ. Агар муайян масалада бошланғич базис тўпламни бирдан қуриш мумкин бўлмаса кўп ҳолларда $|I|$ та сунъий ёйларни эмас, балки фақат уларнинг унча кўп бўлмаган қисмини киритиш етарлидир.

Кенгайтирилган турда потенциаллар усули билан сунъий ёйли оқимлар йиғиндиси $\sum_{(i,j)\in U_c} x_{ij}$ ни минималлаштирамиз (*биринчи фаза масаласи*). 1-§ нинг тарҳи (схемаси) бўйича биринчи фаза масаласининг $\{x^*_{ij}, (i, j)\in U, x^*_{ij}, (i, j)\in U_c\}$ ечимини таҳлил қиламиз: 1) агар $x^*_{ij}\neq 0$, $(i, j)\in U_c$, бўлса, бошланғич тур оқимга эга эмас; 2) фараз қилайлик, $x^*_{ij}=0$, $(i, j)\in U_c$ ва ёйларнинг базис тўплами $U^*_Б$ ягона сунъий ёйга эга бўлсин. Бу ёйни $U^*_Б$ дан чиқариб ташлаб бошланғич масаланинг базис тўпламига ва бошланғич $\{x^*_{ij}, (i, j)\in U_Б\}$ базис оқимга эга бўламиз. (2) масалани 6-бандда баён қилинган, базис оқим қуришдан бошланадиган усул билан ечиш жараёни *потенциаллар усулининг иккинчи фазаси* деб аталади; 3) $x^*_{ij}=0$, $(i, j)\in U_c$ ва $U^*_Б$ базис тўплам биттадан ортиқ сунъий ёйга эга бўлсин. У ҳолда, нобазис $(i, j)\in U\setminus U^*_Б$ ёйлар ичида доимо шундай (i_*, j_*) ёй топиладики, $U^*_Б$ базис ёйлардан ва (i_*, j_*) ёйдан қурилган цикл иккита сунъий ёйга эга бўлади ($S=\{I, U\}$ тур боғламли деб фараз қилинади). Бу сунъий ёйлардан биттасини базис тўпламдан чиқарамиз ва унинг ўрнига $(i_*, j_*)\in U$ ёйни киритамиз. Чекли сондаги қадамдан сўнг ягона сунъий ёйга эга бўлган базис тўпламни оламиз, яъни 2) ҳолга келамиз.

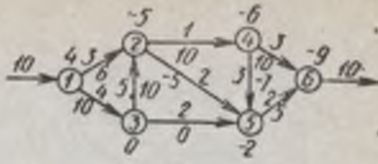
Минимал қийматли оқим ҳақидаги масалани ечишнинг

---

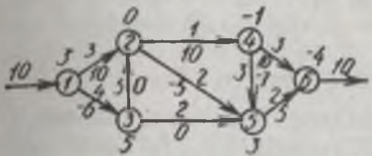
* (2) дан, S турда оқимнинг мавжуд бўлиши учун $\sum_{i\in I} a_i=0$ тенгликнинг зарурлиги келиб чиқади.



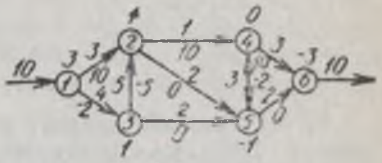
I.5- чизма



I.6- чизма



I.7 - чизма



I. 8- чизма

потенциаллар усули н а қ л и ё т м а с а л а л а р и н и н г қуйидаги м у ҳ и м х о с с а с и г а ишонч ҳосил қилиш имконини беради: агар тўрнинг оқимга эга бўлган тугунларининг жадаллиги бутун сонлардан иборат ва оқимларнинг қиймати чегараланган бўлса, оптимал оқимлар ичида бутун сонли оқим мавжуд (унинг барча ёйли оқимлари бутун сонларга тенг) бўлади.

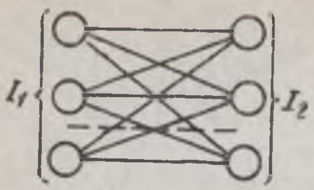
Ҳақиқатан, биринчи фазанинг бошланғич базис оқими бутун сонли бўлади (7- бандга қ.), ҳар бир итерацияда эса бутун сонли оқим яна бутун сонлига алмашади.

8- мисол. I.5- чизмада тасвирлангав 6 тугундан иборат тўрда оптимал оқимни топамиз. 1 тугун-манба, 6 тугун-оқиш бўлсин, $|a_1| = |a_6| = 10$. Қолган тугунлар нейтрал бўлсин. c_{ij} характеристикалар мос ёйлар устига жойлаштирилган.

Қаралаётган тўр учун элементлари I.5- чизмада йўғон чизиқлар билан ифодаланган ёйларнинг бошланғич базис тўплами осон қурилади. Бошланғич базис ёйли оқимларнинг қийматлари ёйларнинг тагига жойлаштирилган (нобазис ёйли оқимлар нолга тенг ва улар белгиланмайди).

Масалани ечишни тугунлар потенциалларини қуришдан бошлаймиз. $u_4 = 0$ деб оламиз (4 тугунга энг кўп сондаги базис ёйлар можароли бўлади) ва бу сонни тугун ташқарисига ёзамиз (I.5- чизма). Қолган потенциаллар (3) формула бўйича осон топилади. Сўнгра (4) формула бўйича нобазис ёйларнинг баҳоларини ҳисоблаймиз ва натижаларни ёйлар тагига жойлаштирамиз.

Нобазис баҳоларнинг максимали $\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{35} = 7$ га тенг. (3.5) ёйни ёйларнинг базис тўпламига қўшамиз, у $\{3, 5, 4, 2, 3\}$ циклга олиб келади. Циклнинг тескари ёйларида минимал ёйли оқим $\theta^0 = x_{i_* j_*} = x_{45} = 0$, $\theta_0 = 0$ бўлганлигидан, итерация (4.5) базис ёйни (3.5) ёйга алмаштиришга келтирилади (I.6- чизма). Янги тўрда потенциаллар ва



I.9- чизма.

баҳоларни ҳисоблагандан сўнг максимал нобазис $\Delta_{12}=6$ баҳони топамиз. Кейинги операцияларнинг натижалари 1.7- чизмада жойлаштирилган. Тўрдаги оқим (1.8- чизма) оптималлик критерийсини қаноатлантиради. 1.8- чизма бўйича, минимал қийматли оқимнинг компонентларини топамиз:

$$x_{12}^0=10,\ x_{13}^0=0,\ x_{32}^0=0,\ x_{24}^0=0,\ x_{25}^0=0,\ x_{35}^0=0,$$

$$x_{45}^0=0,\ x_{46}^0=10,\ x_{56}^0=0.$$

9. Матрицавий нақлиёт масаласи. Тугунлар тўплами I иккита ўзаро кесишмайдиган I_1 (манбалар), I_2 (оқишлар) қисм тўпламлардан ($I_1\cup I_2=I,\ I_1\cap I_2=\varnothing$) ёйлар тўплами U—ихтиёрий (i,j), $i\in I_1$, $j\in I_2$ кўринишдаги ёйлардан иборат бўлган *оддий* $S=\{I,U\}$ *тўрда* (1.9- чизма) минимал қийматли оқим ҳақидаги масалани қараймиз $|I_1|$, $|I_2|$ лар катта бўлганда тўрнинг тугунлари сони $|I_1|\cdot|I_2|$ катта бўлади ва қўлда ҳисобланганда потенциаллар усулининг турли операцияларини қийинлаштиради. Бундай шароитда нақлиёт масалаларининг бошқа (*жадвал*) *матрица* модели анча қулайдир. *Нақлиёт* $m\times n$ *жадвалини* киритамиз (I. 11- жадвал). $i\in I_1=$

I. 11- жадвал

	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

$\{1, 2, \ldots, m\}$ сатрни A_i ишлаб чиқариш пунктига мос қилиб қўямиз, $j\in I_2=\{1, 2, \ldots, n\}$ устунни B_j истеъмол қилиш пунктига мос қилиб қўямиз. Жадвалнинг (i, j) катаги A_i дан B_j гача бўлган йўлга мос келади. (i, j) катакнинг юқори ўнг бурчагига унинг характеристикаси $c_{ij} \geqslant 0$ ни, яъни A_i дан B_j га бирлик маҳсулотни ташиб ўтишнинг қийматини жойлаштирамиз. A_i да ишлаб чиқариш ҳажми $a_i \geqslant 0$ ни қатордан ўнг томонда, B_j да истеъмол қилиш ҳажми $b_j \geqslant 0$ ни устуннинг пастига жойлаштирамиз. Ҳар бир катакнинг пастки чап бурчагига x_{ij} ташишларни жойлаштирамиз. I тугунлардаги баланс шарти i- сатр ва j- устун эламентларидан ҳосил қилинадиган ва ҳамма маҳсулот ишлаб чиқариш пунктларидан олиб чиқиб кетилишини ҳамда барча истеъмол пунктларининг талаблари қондирилиши кераклигини ифодалайдиган

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1, n} \tag{15}$$

тенгликларга келтирилади. (15) тенгликларни ва

$$x_{ij} \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n} \tag{16}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ташиш режалари $x = \{x_{ij},$ $i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}\}$ да нақлиёт ҳаражатлари

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{17}$$

га тенгдир. (17) функциянинг (15), (16) чеклашлардаги минималлаштириш масаласи *матрицавий нақлиёт масаласи* деб аталади.

Ушбу банднинг мақсади—потенциаллар усулининг турли операцияларини нақлиёт жадвалларига кўчиришдан иборат. Аввало *ташишлар режасининг мавжудлик критерийсини* исботлаймиз.

3- теорема. Матрицавий нақлиёт масаласининг ташишлар режаси мавжуд бўлиши учун *умумий баланс шарти*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i \tag{18}$$

нинг бажарилиши, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг умумий ҳажми умумий истеъмол ҳажмига тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Агар $\{x_{ij}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}\}$ — ташишлар режаси бўлса, (15) дан

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

келиб чиқади.

Етарлилиги. (18) тенглик бажарилсин. $x_{ij} = a_i b_j/\alpha$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ деб оламиз. Равшанки, $x = \{x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$ ларда (16) тенгсизликлар бажарилади. x_{ij} ларда (15) тенгликлар ҳам бажарилади:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a \sum_{j=1}^{n} b_j/\alpha = a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \sum_{i=1}^{m} a_i/\alpha = b_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Шундай қилиб, x — ташишлар режасидир. Теорема исботланди.

Ҳар қандай x ташишлар режаси учун

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j < \infty, \quad i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}$$

муносабатлар бажарилганлигидан, ташишлар режалари тўплами компакт бўлади ва умумий баланс шарти (18) *оптимал ташишлар режаси x^0 — матрицавий нақлиёт масаласининг ечими сифатида мавжудлиги критерийси бўлади.*

Ташишлар базис режаси ва *катакларнинг базис тўпламларини* киритишга ўтамиз. Ушбу $\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$ ёки $\{(i_1, j_1), (i_2 j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$ кўринишдаги иккита қўшни катак битта сатр ёки битта устунда ётган, лекин бирорта сатрда ҳам ва бирорта устунда ҳам учта кетма-кет катаклар бўлмаган ҳар хил катаклар кетма-кетлигига (i_1, j_1) катакни (i_k, j_k) катак билан боғловчи занжир (оддий, элементар) деб аталади. *Цикл* — четки катаклари битта қаторда ёки битта устунда ётган занжирдир. Агар нақлиёт жадвалида занжирнинг қўшни катакларини тўғри чизиқлар (занжирнинг бўғинлари) билан туташтирсак, занжирнинг қўшни бўғинлари ҳамиша ўзаро тик бўлади.

Агар $|U_Б| = n + m - 1$ бўлиб, унинг элементларидан бирорта ҳам цикл тузиш мумкин бўлмаса, $U_Б \subset U$ катаклар тўплами *тўла* дейилади.

6-*таъриф.* Агар ташишлар режаси $x=\{x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$ да $n+m-1$ тадан бошқа ташишлар нолга тенг

$$x_{ij}=0,\ (i,j)\in U_{\text{Н}},\ U_{\text{Н}}=U\setminus U_{\text{Б}}$$

бўлиб, қолган $n+m-1$ та ташишлар $U_{\text{Б}}$ тўла тўплам ташкил қилувчи катакларда жойлашган бўлса, бу ташишлар режаси *базис* режа деб аталади.

x_{ij}, $(i,j)\in U_{\text{Б}}$ ташишларни *базис* деб, x_{ij}, $(i,j)\in U_{\text{Н}}$ ларни эса *нобазис* деб атаймиз. $U_{\text{Б}}$ тўплам — *катакларнинг* (ташишларнинг базис режаси x га мос) *базис тўплами* деб аталади.

7-*таъриф.* Агар $x_{ij}>0$, $(i,j)\in U_{\text{Б}}$ бўлса, ташишлар базис режаси *бузилмаган* деб аталади.

2-банддан катакларнинг базис тўплами хоссалари келиб чиқади: 1) ҳар бир қатор ва ҳар бир устунда базис катак ($U_{\text{Б}}$ дан олинган катак) топилади: 2) битта базис катак ётган сатр ёки устун мавжуд бўлади; 3) сатрда (устунда) ягона бўлган базис катакни сатр (усгун) билан биргаликда чиқариб ташлаш кичрайтирилган базис тўплам базис бўлган, кичрайтирилган нақлиёт жадвалга олиб келади; 4) сатр ва устунлардан олинган ихтиёрий жуфтни катакларнинг базис тўплами $U_{\text{Б}}$ нинг элементларидан иборат ягона занжир билан туташтириш мумкин; 5) катакни $U_{\text{Б}}$ базис тўпламга қўшиш ягона циклни ҳосил қилади; 6) агар $U_{\text{Б}}$ катакларнинг базис тўплами бўлса, базис оқим қуйидагича тикланади: а) $x_{ij}=0$, $(i,j)\in U_{\text{Н}}$, деб оламиз; б) i_1 қаторда (j_1 устунда) ягона бўлган базис (i_1, j_1) катакни ахтарамиз: в) $x_{i_1j_1}=a_{i_1}$ ($x_{i_1j_1}=b_{j_1}$) деб оламиз; г) b_{j_1} ҳажмни $b_{j_1}-x_{i_1j_1}$ га (a_{i_1} ни $a_{i_1}-x_{i_1j_1}$ га) алмаштирамиз ва i_1 сатрни (j_1 устунни) қарамаймиз; д) кичрайтирилган жадвалда а) — г) операцияларни такрорлаймиз. $n+m-1$ қадамдан сўнг $U_{\text{Б}}$ базис тўпламга мос базис режа қурилади.

Матрицавий нақлиёт масалалари учун ташишларнинг бошланғич базис режасини қуришнинг бир неча усуллари мавжуд. Кенг ёйилган иккита усулни баён қиламиз.

Минимал элемент усули. c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ элементлар ичида минимал бўлган $c_{i_1j_1}$ ни топамиз. $x_{i_1j_1}=\min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$ деб оламиз. Агар $x_{i_1j_1}=a_{i_1}$ ($x_{i_1j_1}=b_{j_1}$) бўлса, i_1 қаторни (j_1 устунни) қарамаймиз, b_{j_1} (a_{i_1}) сонни эса $b_{j_1}-x_{i_1j_1}$ ($a_{i_1}-x_{i_1j_1}$) га алмаштирамиз. Келтирилган операцияларни кичрайтирилган жадвал учун такрорлаймиз. $n+m-1$ қадамдан сўнг $n+m-1$ та x_{ij} сон топилади. Агар қолган катаклар учун $x_{ij}=0$ деб олсак, ҳосил бўлган $\{x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$ тўплам ташишлар режасини ташкил этиши келиб чиқади. Ҳар бир сатрда (ҳар бир устунда) $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \ldots$, сонлар ҳисобланган ҳеч бўлмаганда битта катак бўлганлигидан, ташишларнинг олинган режаси базис бўлади.

Шимоли-ғарбий бурчак усули. Наклиёт жадвалининг «шимоли-ғарбий бурчак» да ётувчи (1,1) катаги учун $x_{11}=\min\{a_1, b_1\}$ деб оламиз. Агар $x_{11}=a_1\,(x_{11}=b_1)$ бўлса, 1 сатр (1 устун) ни қарамаймиз, $b_1\,(a_1)$ сонни эса $b_1-x_{11}(a_1-x_{11})$ га алмаштирамиз. Кичрайтирилган жадвалда шимоли-ғарбий бурчакни танлаб оламиз ва барча операцияларни такрорлаймиз. $n+m-1$ қадамдан сўнг ташишлар бошланғич режасининг базис ташишлари қурилади. Базислик бундан олдинги усулдагидек исботланади.

Матрицавий наклиёт масалаларини ечиш учун 4- банднинг наклиёт жадваллари тилида ифодаланган усулидан иборат потенциаллар усулини баён қилишга ўтамиз. Фараз қилайлик, x — катаклар базис тўплами $U_Б$ бўлган ташишлар базис режаси бўлсин. Қандайдир (ихтиёрий) i_1 сатрга (j_1 устунга) u_{i_1} (v_{j_1}) сонни *(потенциални)* мос қўямиз. (3) тенглама келтириладиган

$$u_{i_1}+v_{j_1}=c_{i_1j_1}$$

тенгламадан $(i_1,\ j_1)$ базис катак бўйича v_{j_1}, (u_{i_1}) ни топамиз.

Базис тўпламнинг юқорида кўрсатилган (4) хоссасига асосан,

$$u_i+v_j=c_{ij},\ (i,j)\in U_Б \tag{19}$$

потенциаллар тенгламалари барча қатор ва устунларнинг потенциалларини бир қийматли топиш имконини беради. u_i, v_j, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, потенциалларни билган ҳолда (4) формулани қўллаб, нобазис катакларнинг Δ_{ij} *баҳоларини*

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij},\ (i,j)\in U_Н \tag{20}$$

формула бўйича топамиз.

Ташишлар базис режасининг оптимал бўлиши учун

$$\Delta_{ij}\leqslant 0,\ (i,j)\in U_Н \tag{21}$$

тенгсизликлар етарли, бузилмаган ҳолда эса зарур ҳамдир.

Агар (21) *оптималлик критерийси* бажарилмаса, шундай (i_0, j_0) катакни топамизки,

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{Н}} \tag{22}$$

бўлади.

Матрицавий нақлиёт масаласида мақсад функцияси ташишлар режалари тўпламида қуйидан чегараланган бўлганлигидан, масала ечилмаслигини текшириш босқичи тушиб қолади

(i_0, j_0) катак ва $U_{\text{Б}}$ дан олинган катаклар ёрдамида цикл (у ягонадир) қурамиз. Биринчи бўлиб (i_0, j_0) дан горизонтал бўғинни ҳисоблаймиз. Горизонтал бўғинлар (2-банддаги тескари ёйларнинг ўхшашлари) охирларида ётувчи ташишлар ичида энг кичигини танлаб оламиз;

$$\theta^0 = \theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij} \tag{23}$$

Ташишларнинг бузилмаган базис режаси учун ҳамиша $\theta^0 > 0$. Циклнинг вертикал бўғинларининг охирларида (шу жумладан (i_0, j_0) катакда ҳам) ётувчи x_{ij} ташишларга θ^0 ни қўшамиз, циклнинг горизонтал бўғинларининг охирларидаги ташишлардан θ^0 ни айирамиз ((i_*, j_*) катакдаги ташиш йўқолади). Қолган ташишларни ўзгартирмаймиз. Итерация катакларнинг базис тўплами $\overline{U}_{\text{Б}} = (U_{\text{Б}} \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0)$ бўлган ташишларнинг янги $\overline{x}$ режасини қуриш билан тугалланади. Итерацияда нақлиёт ҳаражатлари $\theta^0 \Delta_{i_0 j_0}$ га қисқаради.

Параграфни берилганлари I.12- жадвалдагидек бўлганда минимал элемент усули билан ташишларнинг бошланғич базис режаси топилган (қулайлик учун базис режалар доира ичига олинган) кўргазмали мисолни ечиш билан тугатамиз. 5 устунга (энг кўп сонли базис катакли) $v_s = 0$ ноль потенциални мос қўямиз (у c_{is} сонлар устунининг устига ёзилган). (19) тенгламадан (1,5) базис катак бўйича 1- қаторнинг потенциалини топамиз (у биринчи қаторда — c_{1j} сонлар билан бир қаторда ёзилган): $u_1 = 5$. (19) тенгламадан фойдаланиб, қолган қатор ва устунларнинг потенциалларини топамиз. Сўнгра (20) формула бўйича нобазис катакларнинг баҳоларини ҳисоблаймиз ва уларни катакларнинг ўнг пастки бурчакларига жойлаштирамиз. Максимал $\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{13} = 3$ ((22) га қ.) баҳо мусбатдир, яъни ташишларнинг бошлангич режаси оптимал эмас ((21) тенгсизликлар бузилади). (1.3) катак ва базис катаклар ёрдамида{(1,3), (1,5), (3,5), (3,3) (1,3)} циклни қурамиз. Циклнинг горизонтал бўғинлари охирларидаги минимал ташиш $\theta^0 = x_{i_* j_*} = x_{15} = 35$ бўлади ((23) га қ.). 35 сонини (1,3), (3,5) катаклардаги ташишларга қўшамиз ва (1,5), (3, 3) катаклардаги ташишлардан айириб ташлаймиз. Қолган ташишларни ўзгармас қолдирамиз. Базис тўпламдан (1,5) катакни чиқариб ташлаймиз, (1, 3) катакни унга қўшамиз. Янги итерация I.13- жадвалдан бошланади. Навбатдаги итерацияларнинг натижалари I.14, I.15- жадвалларда жойлаштирилган. I.15- жадвал оптималлик кри-

I.12- жадвал

		B_1 −4	B_2 −1	B_3 0	B_4 −2	B_5 0	
5	A_1	1; (15)	3; 1	2; 3	4; −7	5; (35)	50
2	A_2	3; −5	1; (25)	5; −3	3; −3	2; (15)	40
1	A_3	4; −7	2; −2	1; (x)	5; −6	1; (60)	60
4	A_4	2; −2	3; 0	1; 3	2; (10)	4; (11)	21
		15	25	36	10	85	

I.13- жадвал

		B_1 −1	B_2 −1	B_3 0	B_4 −2	B_5 0	
2	A_1	1; (15)	3; −2	2; (35)	4; −4	5; −1	50
2	A_2	3; −2	1; (25)	5; −3	3; −1	2; (15)	40
1	A_3	4; −4	2; −2	1; (1)	5; −6	1; (59)	60
4	A_4	2; 1	3; 0	1; 3	2; (10)	4; (11)	21
		15	25	36	10	85	

I.14- жадвал

		B_1 −4	B_2 −1	B_3 −3	B_4 −2	B_5 0	
5	A_1	1; (15)	3; 1	2; (35)	4; 1	5; 0	50
2	A_2	3; −5	1; (25)	5; −6	3; −3	2; (15)	40
1	A_3	4; −7	2; −2	1; −3	5; −6	1; (60)	60
4	A_4	2; −2	3; 0	1; (1)	2; (10)	4; (10)	21
		15	25	36	10	85	

I.15- жадвал

		B_1 1	B_2 3	B_3 2	B_4 3	B_5 4	
0	A_1	1; (15)	3; (10)	2; (25)	4; −1	5; −1	50
−2	A_2	3; −4	1; (15)	5; −5	3; −2	2; (25)	40
−3	A_3	4; −6	2; −2	1; −2	5; −5	1; (60)	60
−1	A_4	2; −2	3; −1	1; (11)	2; (10)	4; −1	21
		15	25	36	10	85	

терийси (21) ни қаноатлантиради. I.15- жадвалдан ёзиб олинган $x_{11}^0 = 15$, $x_{12}^0 = 10$, $x_{13}^0 = 25$, $x_{22}^0 = 15$, $x_{25}^0 = 25$, $x_{35}^0 = 60$, $x_{43}^0 = 11$, $x_{44}^0 = 10$, $x_{14}^0 = x_{21}^0 = x_{23}^0 = x_{24}^0 = x_{31}^0 = x_{32}^0 = x_{33}^0 = x_{54}^0 = x_{41}^0 = x_{42}^0 = x_{45}^0 = 0$ сонлар қаралаётган масалада ташишларнинг оптимал режасини ташкил этади.

АДАБИЁТ

1. *Булавский В. А., Звягина Р. А.. Яковлева М. А.* Численные методы линейного программирования.—М: Наука, 1977.
2. *Габасов Р.. Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования. I—III ч. — Минск: БГУ, 1977, 1978, 1980.
3. *Данциг Ж.* Линейное программирование, его обобщения и приложения. — М: Прогресс, 1966.
4. *Романовский И. В* Алгоритмы решения экстремальных задач. — М: Наука, 1977.
5. *Ху. Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях.—М: Мир, 1974.
6. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. — — М: Физматгиз, 1963.

II боб. ҚАВАРИҚ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Қавариқ программалаштириш деб математиканинг чекли ўлчовли R_n фазонинг *қавариқ X тўпламларида қавариқ f (x) функцияларнинг* минимумини топиш ҳақидаги

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \qquad (1)$$

масалалар ўрганиладиган бўлимига айтилади. Қавариқ программалаштириш чизиқли программалаштиришнинг (1 боб) бевосита умумлашмасидан иборат бўлиб, унинг вужудга келиши ва ривожланишига чизиқли программалаштиришнинг усул ва ғоялари катта таъсир кўрсатди. Қавариқ программалаштириш масалаларини текшириш қавариқ функциялар ва тўпламларнинг хоссалари батафсил ўрганиладиган *қавариқ таҳлилнинг* яратилишига олиб келди.

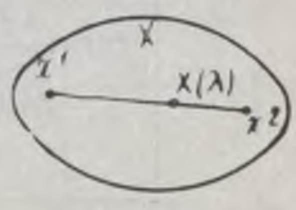
Қавариқ программалаштиришнинг асосий масаласи бўлган (1) ни ифодалашда X тўпламни $X = \{x : g(x) \leqslant 0,\ x \in Q\}$ кўринишда бериш қабул қилинган бўлиб, бу ерда Q тўплам ва m- вектор-функция $g(x)$ нинг компоненталари қавариқ тўплам ва функциялардан иборатдир.

1-§. Қавариқ тўпламлар ва функциялар

Қавариқ тўпламлар ва функциялар экстремал масалаларнинг ҳозирги замон назариясида катта роль ўйнайди. Улар қавариқ таҳлилда ўрганилади, мазкур параграфга эса ундан бошланғич маълумотлар келтирилган.

1. Таърифлар. Агар n ўлчовли R_n Евклид фазосидан олинган *X тўплам* ўзининг ихтиёрий иккита нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесмани ҳам ўз ичига олса (11.1-чизма), бундай тўплам *қавариқ тўплам* деб аталади. Бошқача қилиб айтганда, агар $x^1,\ x^2 \in X$ бўлса, барча $\lambda \in [0,\ 1]$ лар учун $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)\, x^2 \in X$ бўлади.

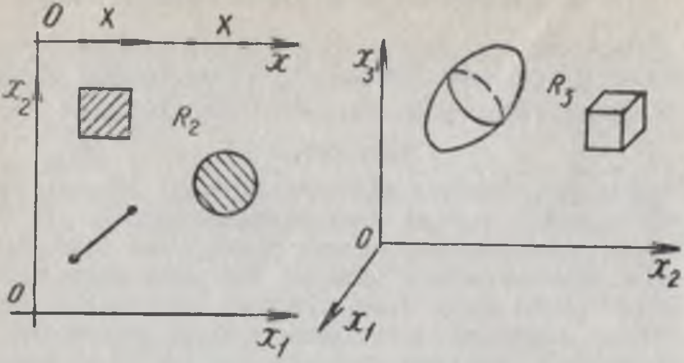
Қавариқ тўпламларга R_n фазо ва 11.2-чизмада кўрсатилган тўпламлар мисол бўла олади. 11.3-чизмада қавариқ бўлмаган тўпламларга мисоллар келтирилган.



11.1- чизма

Агар ихтиёрий $x^1,\ x^2 \in X$ ва барча $\lambda \in [0,\ 1]$ лар учун

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)\, x^2) \leqslant \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)\, f(x^2)$$



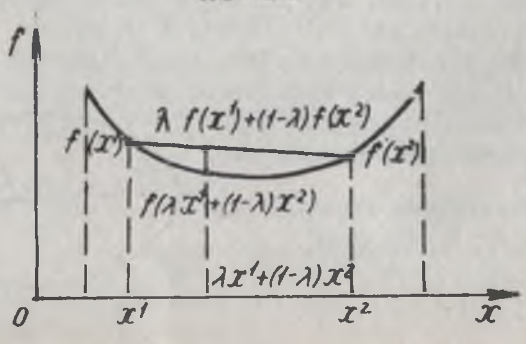
II.2- чизма

тенгсизлик бажарилса, қавариқ X тўпламда аниқланган ва чекли бўлган $f(x)$ функция *қавариқ* дейилади (II.4- чизма).

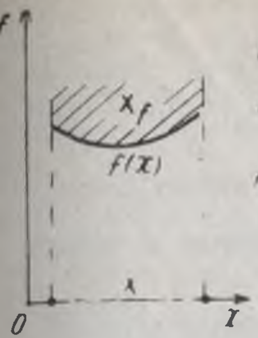
Масалан, силлиқ бўлмаган $f(x) = |x|$, $x \in R_1$, функция қавариқдир, чунки барча x^1, $x^2 \in R_1$, $\lambda \in [0, 1]$ лар учун $|\lambda x^1 - (1-\lambda) x^2| \leqslant \lambda |x^1| + (1-\lambda) |x^2|$ ўринли.

Қавариқ функциянинг таърифи сифатида қуйидаги критерийни олиш мумкин: X тўпламда $f(x)$ функциянинг қавариқ бўлиши учун унинг устграфиги (II.5- чизма)

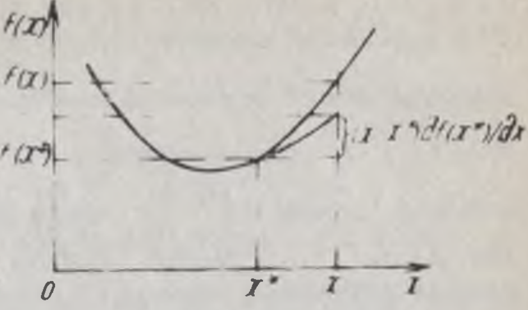
II.3- чизма



II.4- чизма



II.5- чизма



II.6- чизма

$$X_f = \{(x, y) : x \in X,\ y \geqslant f\ (x)\}$$

қавариқ тўплам бўлиши зарур ва етарлидир.

Скаляр таъриф. Агар ихтиёрий $x,\ l \in R_n$ лар учун скаляр $t \in R_1$ аргументли $\varphi\ (t) = f\ (x + lt)$ функция қавариқ бўлса ва фақат шунда $f\ (x),\ x \in R_n$ функция қавариқ бўлади. Силлиқ $f\ (x) \in C^{(1)}$ функциялар учун қуйидаги критерий қўлланилади. Агар барча $x,\ x^* \in R_n$ лар учун

$$f\ (x) - f\ (x^*) \geqslant (x - x^*)\ \partial f\ (x^*)/\partial x$$

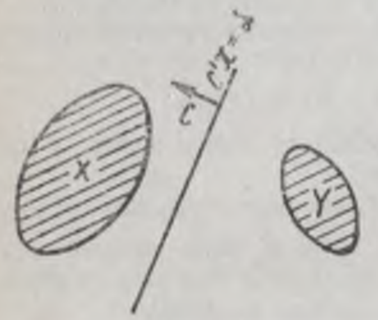
тенгсизлик бажарилса (II.6- чизма) ва фақат шунда $f\ (x)$ $x \in R_n$, функция қавариқ бўлади.

Агар $f\ (x),\ x \in R_n$, функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи, яъни $f\ (x) \in C^{(2)}$ бўлиб, унинг иккинчи тартибли ҳосилалари матрицаси $\partial^2 f(x)/dx^2 \geqslant 0,\ x \in R_n$, манфий бўлмаса ва фақат шунда функция қавариқ бўлади.

Эслатиб ўтамизки, агар $x'Ax$ квадратик шакл барча $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in R_n$ учун мусбат ишорали, яъни $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geqslant 0$ $\left(\text{аниқ мусбат, яъни } \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0,\ \ x \neq 0\right)$ бўлса, симметрик $n \times n$ матрица $A = \{a_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\}$ *манфиймас (мусбат)* дейилади ва $A \geqslant 0$ $(A > 0)$ белги орқали белгиланади. *Сильвестр критерийлари* маълум: 1) A матрицанинг мусбат бўлиши учун унинг барча кетма-кет бош минорлари D_s мусбат бўлиши, яъни $D_s=\det\{a_{ij}$ $i=\overline{1,s}, j=\overline{1,s}\}>0$, $s=\overline{1,n}$ бўлиши зарур ва етарлидир; 2) A матрицанинг манфиймас бўлиши учун унинг барча бош минорлари манфий бўлмаслиги, яъни $\det A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_s \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_s\end{pmatrix}\geqslant$ $\geqslant 0$, $1\leqslant i_1, i_2<\ldots<i_s\leqslant n$; $s=\overline{1,n}$, бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ерда $A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_s \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_s\end{pmatrix}$ орқали A матрицанинг $i_1, i_2, \ldots, i_s$ рақамли сатрлари ва $j_1, j_2, \ldots, j_s$ рақамли устунларидан тузилган $s\times s$ матрица белгиланган.

2. Қавариқ тўпламларнинг хоссалари. Ихтиёрий сондаги қавариқ тўпламларнинг кесишмаси қавариқ тўпламдир.

Қавариқ тўпламнинг ихтиёрий x^i, $i=\overline{1,k}$ элементларининг *қавариқ комбинацияси* $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right)$ шу тўпламга тегишли бўлади.



II.7- чизма

Фараз қилайлик, X, Y — қавариқ тўпламлар бўлиб, улардан бири чегараланган бўлсин. Агар уларнинг ёйилмалари $\overline{X}$, $\overline{Y}$ ўзаро кесишмаса, улар *қатъий ажралувчан* (II.7-чизма) бўлади, яъни қандайдир n-вектор $c\neq 0$ ва α сонларда барча $x\in X$, $y\in Y$ лар учун $c'x<\alpha<c'y$ тенгсизлик бажарилади (қатъий ажралувчанлик ҳақидаги теорема; $c'x=\alpha$ — *ажратувчи гипертекисликдир*).

Ўзаро кесишмайдиган қавариқ X, Y тўпламлар ажралувчан бўлади, яъни шундай $c\neq 0$ вектор мавжудки, барча $x\in X$, $b\in Y$ ларда $c'x\leqslant c'y$ бўлади (ажралувчанлик ҳақидаги теорема).

Агар x^* қавариқ X тўпламнинг чегаравий нуқтаси бўлса, бу нуқтада X тўпламга *таянч текислик* мавжуд бўлади, яъни қандайдир $c\neq 0$ да барча $x\in X$ лар учун $c'x\leqslant$

$\leqslant c'x^*$ тенгсизлик бажарилади (таянч текисликнинг мавжудлиги ҳақидаги теорема).

3. Қавариқ функцияларнинг хоссалари. Қавариқ $f(x)$, $x \in R_n$ функциянинг *сатҳ тўплами* $\{x : f(x) \leqslant c\}$ ё бўш, ё қавариқ тўплам бўлади.

Агар $f_i(x)$, $x \in R_n$, $i = \overline{1,k}$ — қавариқ функциялар бўлса, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, $\alpha_i \geqslant 0$ ва $f(x) = \max f_i(x)$, $i = \overline{1,k}$ функциялар ҳам қавариқ бўлади.

Қавариқ $f(x)$, $x \in R_n$ функциялар ҳар бир x нуқтада узлуксиздир.

Қавариқ $f(x)$ функция ҳар бир $x \in R_n$ нуқтада ихтиёрий $l \in R_n$ йўналиш бўйича ҳосилага эга:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + lt) - f(x)}{t}.$$

Масалан, $\partial |x|/\partial l|_{x=0} = |l|$, $\partial |x|/\partial l|_{x>0} = l$, $\partial |x|/\partial l|_{x<0} = -l$. Агар барча $x \in R_n$ лар учун

$$f(x) - f(x^*) \geqslant c'(x - x^*)$$

тенгсизлик бажарилса, $c \in R_n$ вектор қавариқ $f(x)$, $x \in R_n$ функциянинг x^* нуқтадаги *субградиенти* деб аталади. x^* нуқтадаги субградиентлар тўплами $\partial f(x^*)$ *субдифференциал* деб аталади. Субдифференциал ҳар бир нуқтада бўш бўлмаган қавариқ компактдан иборат бўлиб, агар $f(x)$ функция x да дифференциалланувчи бўлса, ягона $\partial f(x)/\partial x$ элементдан иборатдир. Масалан,

$$\partial |x| = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ [-1, 1], & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Шунингдек,

$$\partial f(x^*)/\partial l = \max c'l, \; c \in \partial f(x^*)$$

формула ўринлидир.

Агар $-f(x)$ функция қавариқ бўлса, $f(x)$ функция *ботиқ* деб аталади.

Фараз қилайлик $f(x, y)$ функция қавариқ компакт $x \in X \subset R_n$, $y \in Y \subset R_m$ тўпламларда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция ҳар бир $y \in Y$ да $x \in X$ бўйича қавариқ, ҳар бир $x \in X$ да эса $y \in Y$ бўйича ботиқ бўлса, у $\{x^0, y^0\}$, $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$ эгар нуқтага эга бўлади:

$$f(x^0, y) \leqslant f(x^0, y^0) \leqslant f(x, y^0).$$

ва унинг учун *минимакс ҳақидаги теорема* ўринлидир:

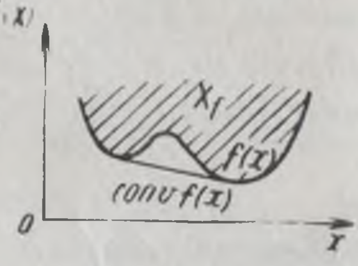
$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

4. Тўпламлар ва функцияларнинг қавариқ қобиқлари.

$$\operatorname{conv} X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n+1}; \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}$$

тўплам $X \subset R_n$ *тўпламнинг қавариқ қобиғи* деб

II.8- чизма



II.9- чизма

аталади* (II.8- чизма). conv X тўплам X тўпламни ўз ичига олувчи барча қавариқ тўпламларнинг кесишмаси билан устма-уст тушади.

$f(x)$, $x \in X$ *функциянинг қавариқ қобиғи* conv $f(x)$ деб (II.9- чизма)

$$\operatorname{conv} f(x) = \inf \{y \in R_1 : \{x, y\} \in \operatorname{conv} X_f\}$$

функцияга айтилади.

Тўпламлар ва функцияларнинг қавариқ қобиқлари қавариқдир.

5. Кучайтирилган қавариқлик. Агар ихтиёрий $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\lambda \in]0,1[$ ларда $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$ нуқта $X \subset R_n$ тўпламнинг (нисбатан) ички нуқтаси ($x(\lambda) \in \operatorname{int} X$) бўлса, X тўплам, *қатъий қавариқ* деб аталади. Масалан, доира қатъий қавариқ тўпламдир, квадрат эса ундай эмас.

Агар ихтиёрий $x^1, x^2 \in R_n$, $x^1 \neq x^2$, $\lambda \in]0,1[$ лар учун

---

* Агар X — боғламли бўлса, $n+1$ ўрнига n олинади.

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

қатъий тенгсизлик бажарилса, $f(x)$, $x \in R_n$ *функция қатъий қавариқ* деб аталади. Масалан, $c'x$, $x \in R_n$ функция қавариқ, лекин қатъий қавариқ эмас.

Ихтиёрий x, $x^* \in R_n$, $x \neq x^*$ ларда

$$f(x) - f(x^*) > (x - x^*)' \, \partial f(x^*)/\partial x$$

тенгсизлик бажарилганда ва фақат шу ҳолдагина силлиқ $f(x)$, $x \in R_n$ функция қатъий қавариқ бўлади.

Агар $f(x) \in C^{(2)}$, $x \in R_n$ бўлса, $f(x)$ функция қатъий қавариқ бўлиши учун $\partial^2 f(x)/\partial x^2 > 0$ тенгсизликнинг бажарилиши етарлидир.

Қатъий қавариқ функциянинг сатҳ тўплами ё бўш, ё қатъий қавариқ бўлади.

Агар ихтиёрий x^1, $x^2 \in R_n$, $x^1 \neq x^2$ ва бирор $\mu > 0$ учун $f(x^1/2 + x^2/2) < f(x^1)/2 + f(x^2)/2 - \mu \, \|x^1 - x^2\|$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$, $x \in R_n$ функция кучли қавариқ деб аталади.

Агар барча x, $l \in R_n$ лар ва бирор $\nu > 0$ учун $l' [\partial^2 f(x)/\partial x^2] \, l \geqslant \nu \|l\|^2$ тенгсизлик бажарилса ва фақат шу ҳолдагина $f(x) \in C^{(2)}$, $x \in R_n$ функция кучли қавариқ бўлади. Масалан, $f(x) = x^4$ функция қатъий, лекин у кучли қавариқ эмас, чунки $\partial^2 f(0)/\partial x^2 = 0$. $x'Ax$ квадратик шакл $A > 0$ бўлганда ҳам кучли, ҳам қатъий қавариқдир.

2-§. КУН — ТАККЕР ТЕОРЕМАСИ

Қавариқ программалашда *Кун — Таккер теоремаси* деб асосий натижа Лагранж функциясининг эгар нуқтаси терминида ифодаланган оптималлик критерийсига айтилади.

1. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси ва қавариқ программалашнинг асосий масаласини ечиш. Қавариқ программалашда асосий масала деб Q — қавариқ тўплам, $f(x)$ ва m вектор функция $g(x)$ нинг $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ компонентлари қавариқ функциялар бўлган

$$f(x) \to \min, \; g(x) \leqslant 0, \; x \in Q \qquad (1)$$

масалага айтилади.

(1) масаланинг чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар бир n-вектор x чизиқли программалашдагидек *режа* (жоиз нуқта, *вектор*, *ечим*) деб аталади. (1) масаланинг x^0 ечими $f(x^0) = \min f(x)$, $g(x) \leqslant 0$, $x \in Q$ *оптимал режадир.*

Қавариқ тўпламлар ва функцияларнинг хоссаларига асосан (1-§), режалар тўплами

$$X = \{x : g\ (x) \leqslant 0,\ x \in Q\}$$

ва оптимал режалар тўплами

$$X^0 = \{x : f\ (x) \leqslant f\ (x^0),\ x \in X\}$$

қавариқ бўлади, чунки улар қавариқ Q, $\{x : g_i\ (x) \leqslant 0\}$, $i = \overline{1,m}$ (X бўлганда) ва X, $\{x : f\ (x) \leqslant f\ (x^0)\}$ (X^0 бўлганда) тўпламларнинг кесишмасидан иборатдир.

Шундай қилиб, агар (1) масалада иккита оптимал режа бўлса, бу режалар орасидаги кесмада ётувчи барча режалар (уларнинг сони континуум) оптимал бўлади.

Агар мақсад функцияси $f\ (x)$ — қатъий қавариқ бўлса, (1) масаланинг оптимал режаси ягона бўлади. Ҳақиқатан, агар x^* — бошқа оптимал режа бўлса ($f\ (x^0) = f\ (x^*)$), у ҳолда $\mu \in]0, 1[$ бўлганда зиддиятга келамиз:

$$f\ (x^0) \leqslant f\ (\mu\, x^0 + (1 - \mu)\ x^*) < \mu\, f\ (x^0) + (1 - \mu)\ f\ (x^*) = f\ (x^0).$$

(1) масаланинг $f\ (x)$, $g\ (x)$ элементлари бўйича

$$F\ (x, \lambda) = f\ (x) + \lambda'\ g\ (x) \tag{2}$$

Лагранж функциясини тузамиз ва уни $x \in Q$, $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \in R_m$ бўлганда қараймиз.

1-таъриф. Агар барча $X \in Q$, $\lambda \geqslant 0$ лар учун

$$F\ (x^*, \lambda) \leqslant F\ (x^*, \lambda^*) \leqslant F\ (x, \lambda^*) \tag{3}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^*, \lambda^*\}$, $x^* \in Q$, $\lambda^* \geqslant 0$ (2) Лангранж функциясининг *эгар нуқтаси* деб аталади.

1-теорема. Агар $\{x^*, \lambda^*\}$, $x^* \in Q$, $\lambda^* \geqslant 0$ (2) Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлса, у ҳолда x^* (1) масаланинг оптимал режаси бўлади ва

$$g'\ (x\ )\ \lambda^* = 0 \tag{4}$$

қаттиқмасликни тўлдирувчи шарт бажарилади.

Исботи. (3) тенгсизликларни берилган функциялар ёрдамида ёзамиз:

$$f\ (x^*) + g'\ (x^*)\ \lambda \leqslant f\ (x^*) + g'\ (x^*)\ \lambda^* \leqslant f\ (x) + g'\ (x)\ \lambda^*,$$
$$x \in Q,\ \lambda \geqslant 0 \tag{5}$$

(5) даги чап тенгсизликдан

$$g'\ (x^*)\ \lambda \leqslant g'\ (x^*)\ \lambda^* \tag{6}$$

келиб чиқади. (6) нинг бажарилиши учун $g\ (x^*) \leqslant 0$ бўлиши зарур, чунки, агар бирор i, $i=\overline{1,m}$ учун $g_i(x^*)>0$ бўлса, $\lambda_j=0$, $j\neq i$, $j=\overline{1,m}$ деб олиб ва λ_i ни етарлича катта танлаб, (6) нинг чап томонида етарли катта мусбат сонга эга бўламиз. Шундай қилиб, x^* режа (1) масаланинг режасидир.

(6) дан (4) қаттиқмасликни тўлдирувчи шарт келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар $g'(x^*)\lambda^0=\alpha<0$ деб фараз қилиб, $\lambda=\frac{\lambda^*}{2}$ деб олсак, (6) дан $\alpha/2\leqslant\alpha<0$ зиддиятга келамиз.

(4) ни ҳисобга олсак, (5) даги ўнг тенгсизлик $f(x^*)\leqslant$ $\leqslant f(x)+g'(x)\lambda^*$ тенгсизликка ўтади, ундан $\lambda^*\geqslant0$ бўлганлигидан, $g(x)\leqslant0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x\in Q$ лар учун $f(x^*)\leqslant f(x)$ тенгсизлик бажарилади.

Шундай қилиб, x^* режа (1) масаланинг оптимал режасидир ва теорема исботланди.

Изоҳ. Теоремани исботлашда Q тўплам ва $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функцияларнинг қавариқлигидан фойдаланилмади. Шундай қилиб, 1-теорема ихтиёрий $f(x)$, $g(x)$, Q лар учун ўринлидир.

1-теоремага мувофиқ, (1) масаланинг оптимал режасини қуриш учун (2) Лагранж функциясининг эгар нуқтасини топиш етарлидир. Лекин ҳар қандай (1) масала учун Лагранж функцияси эгар нуқтага эга бўлавермайди. Масалан, $x\to\min$, $x^2\leqslant0$, $x\in R_1$ масаланинг оптимал режаси $x^\circ=0$ учун $\{0,\lambda^\circ\}$ нуқта $F(x,\lambda)=x+\lambda x^2$ Лангранж функциясининг эгар нуқтаси бўладиган $\lambda^0\geqslant0$ сонни топиб бўлмайди, чунки $\partial F(0,\lambda)/\partial x=1$ бўлганлигидан, эгар нуқтада бажариладиган $\partial F(0,\lambda^0)/\partial x=0$ тенгликнинг бажарилишига эришиш мумкин эмас.

Силлиқ масалалар учун Лагранж функцияси эгар нуқтасининг мавжудлик теоремаларига эквивалент бўлган дастлабки натижалар Г. В. Кун ва А. В. Таккер томонидан олинган.

2. Силлиқ масалалар. Қавариқ программалашнинг *силлиқ масаласини*, яъни $f(y)$, $g(x)$ функциялар силлиқ, қавариқ ҳамда Q тўплам

$$Q=\{x:x\geqslant0\}$$

кўринишга эга бўлган (1) масалани қараймиз.

Таъриф. Агар бирор x^* режада

$$g(x^*)<0 \tag{7}$$

шарт бажарилса, қавариқ программалаш асосий масаласининг режалар тўплами (чеклашлари) *равон (Слейтер шартини қаноатлантиради)* дейилади.

Фараз қилайлик, $I_0(x^0)=\{t: g_i(x^0)=0\}$, x^0 режада *актив бўлган чекланишларнинг* индекслари тўплами $J_0(x^0)=\{j: x_j^0=0\}$, $I_+(x^0)=\{j: x_j^0>0\}$, x^0 режанинг ноль ва мусбат компоненталари индекслари тўпламлари бўлсин.

1-лемма. Фараз қилайлик (1) силлиқ масаланинг режалар тўплами X равон бўлсин. У ҳолда ихтиёрий x^*, $x^0\in X$, $x^0\neq x^*$ режалар ҳамда (7) ва ушбу

$$l'\partial g_i(x^0)/\partial x\leqslant 0,\ i\in I_0(x^0);\ l_j\geqslant 0,\ j\in I_0(x^0) \tag{8}$$

тизимни қаноатлантирувчи $l_* \in R_n$ вектор учун шундай $\alpha_0>0$, $t_0>0$ сонлар топиладики, барча $\alpha\in[0,\alpha_0]$, $t\in[0,t_0]$ лар учун

$$x(t)=x^0+l_*t+\alpha(x^*-x^0)t \tag{9}$$

вектор (1) масаланинг режаси бўлади.

Исботи. Етарлича кичик α, t параметрли (9) векторда (1) масаланинг ҳар бир чекланиши бажарилишини кўрсатамиз. Агар $x_j^0>0$ бўлса, (9) дан етарлича кичик $t>0$ ларда $x_j(t)>0$ эканлиги кўриниб турибди. $x_j^0=0$, $l_{*j}>0$ бўлсин. У ҳолда, агар $t>0$ ва $\alpha>0$ сонлар етарлича кичик бўлганда $x_j(t)=l_{*j}t+\alpha x_j^*t>0$ бўлади. Фараз қилайлик, $x_j^*=0$, $l_{*j}=0$ бўлсин. Бу ҳолда $\alpha\geqslant 0$ бўлганда $x_j(t)=\alpha x_j^*t\geqslant 0$ бўлади. Шундай қилиб, $x(t)\in Q$, $t\in[0,t_0]$. $g_i(x^0)<0$ бўлсин. У ҳолда,

$$g_i(x(t))=g_i(x^0)+t(l_*+\alpha(x^*-x^0))'\,\partial g_i(x^0)/\partial x+0(t) \tag{10}$$

ёйилмадан, агар t етарлича кичик сон бўлса, $g_i(x(t))<0$ тенгсизлик келиб чиқади.

$g_i(x^0)=0$, $l_*'\,\partial g_i(x^0)/\partial x<0$ деб фараз қилайлик; (10) дан кўринадики, етарлича кичик α да $g_i(x(t))<0$, $t\in[0,t_0]$, тенгсизлик бажарилади. Ниҳоят, $g_i(x^0)=0$, $l_*'\,\partial g_i(x^0)/\partial x=0$ бўлсин. Силлиқ қавариқ функциянинг таърифи

$$g_i(x^*)-g_i(x^0)\geqslant(x^*-x^0)'\,\partial g_i(x^0)/\partial x$$

дан ва (7) тенгсизликдан $(x^*-x^0)'\,\partial g_i(x^0)/\partial x<0$ тенгсизлик келиб чиқади. (10) ёйилмадан, охирги тенгсизликдан фойдаланган ҳолда, $g_i(x(t))\leqslant 0$, $t\in[0,t_0]$ тенгсизликни оламиз. Лемма исботланди.

2-теорема. Фараз қилайлик, x^0 режалар тўплами равон бўлган силлиқ (1) масаланинг оптимал режаси бўлсин. У ҳолда (8) тизимни қаноатлантирувчи ҳар бир l вектор учун

$$l' \partial f (x^0)/\partial x \geqslant 0 \qquad (11)$$

тенгсизлик бажарилади.

Исботи. Фараз қилайлик, l_* вектор (8) тизимни қаноатлантирсин, бироқ

$$l'_* \partial f (x^0)/\partial x < 0 \qquad (12)$$

бўлсин. 1-леммага асосан (9) функция $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ учун (1) масаланинг чеклашларини қаноатлантиради. Етарлича кичик $\alpha > 0$ ларда (12) га мувофиқ

$$df (x (t))/dt/_{t=0} = [\partial f (x (t))/\partial x]' \, dx/dt/_{t=0} =$$

$$= (l_* + \alpha (x^* - x^0)' \partial f (x^0)/\partial x < 0,$$

тенгсизлик бажарилади, ундан эса етарли кичик $t > 0$ ларда x^0 режанинг оптималлигига зид бўлган $f (x (t)) < f (x^0)$ тенгсизлик келиб чиқади. Теорема исботланди.

2-теорема x^0 режа оптимал бўлмаганда, уни «яхшилаш» имконини бериш, яъни $f (\bar{x}) < f (x^\circ)$ ни қаноатлантирувчи шундай $\bar{x}$ векторни қуриш маъносида оптималликнинг тўғри зарурий шартини ифодалайди. 2-теорема шартларини текшириш

$$l'\partial f (x^0)/\partial x \to \min, \ l'\partial g_i (x^0)/\partial x \leqslant 0, \ i \in I_0 (x^0);$$

$$l_j \geqslant 0, \ j \in J_0 (x^0),$$

чизиқли программалаш масаласини чегараланмаган l_* ечимларни чиқариб ташлаш учун бирор *нормаловчи шарт* (масалан, $\alpha_j \leqslant l_j \leqslant \beta_j$, $j \in J_+ (x^0)$) билан қарашга келтирилади. Агар $l'_* \partial f (x^0)/\partial x < 0$ бўлса, (9) формула бўйича янги $\bar{x} = x (t)$, $f (\bar{x}) < f (x^0)$ режа қурилади.

2-теоремага Фаркаш теоремасини (1-боб, 2-§) қўллаб, *оптималликнинг иккиланма зарурий шартини* оламиз.

3-теорема. Режалари тўплами равон бўлган (1) силлиқ масаланинг x^0 режаси оптимал бўлиши учун шундай манфий бўлмаган m вектор $\lambda^0 \geqslant 0$ ва n вектор $\mu^0 \geqslant 0$ мавжуд бўлиши зарурки, улар учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) *стационарлик шарти:*

$$\partial f (x^0)/\partial x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \partial g_i (x^0)/\partial x = \mu^0; \qquad (13)$$

2) *қаттиқмасликни тўлдирувчилик шарти:*

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0,\ x^{0'}\mu^0 = 0. \tag{14}$$

(2) Лагранж функцияси терминида (13) тенглик

$$\partial F(x^0,\ \lambda^0)/\partial x = \mu_0 \tag{15}$$

кўринишни олади. Қавариқ функцияларнинг хоссаларидан Лагранж функциясининг $\lambda \geqslant 0$ бўлганда x бўйича қавариқлиги, яъни $F(x,\ \lambda^0) - F(x^0,\ \lambda^0) \geqslant (x - x^0)'\ \partial F(x^0,\ \lambda^0)/\partial x$ келиб чиқади. Бу ердан (14), (15) ларни ҳисобга олиб, $F(x,\ \lambda^0) \geqslant F(x^0,\ \lambda^0) + x'\mu^0$ тенгсизликни оламиз, яъни барча $x \geqslant 0$ ларда

$$F(x^0,\ \lambda^0) \leqslant F(x,\ \lambda^0) \tag{16}$$

тенгсизлик бажарилади.

Иккинчи томондан, барча $\lambda \geqslant 0$ лар учун $\lambda' g(x) \leqslant 0$ тенгсизлик бажарилганлигидан, (14) га мувофиқ эса $g'(x^0)\lambda^0 = 0$ тенглик бажарилганлигидан, барча $\lambda \geqslant 0$ лар учун

$$F(x^0,\ \lambda) = f(x^0) + \lambda' g(x^0) \leqslant f(x^0) + g'(x^0)\lambda^0 = $$
$$= F(x^0,\ \lambda^0) \tag{17}$$

тенгсизликни оламиз.

(16), (17) тенгсизликлар $\{x^0,\ \lambda^0\}$ нуқта Лагранж функциясининг эгар нуқтаси эканлигини англатади. Охирги натижани тўла ифодалаш учун бу тасдиқни 1-теорема билан бирлаштирамиз.

4-теорема (Кун-Таккер теоремаси). Режалари тўплами равон бўлган қавариқ программалашнинг асосий масаласининг x^0 оптимал режаси мавжуд бўлиши учун шундай манфий бўлмаган $\lambda^0 \geqslant 0$ вектор мавжуд бўлиб, $\{x^0,\ \lambda^0\}$ жуфтлик Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлиши зарур ва етарлидир. Шу билан бирга қаттиқмасликни тўлдирувчи шарт

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0 \tag{18}$$

бажарилади.

Изоҳ. λ^0 вектор x^0 оптимал режага мос Лагранж вектори деб аталади.

Юқорида 4-теорема (зарурийлик қисми) қавариқ программалашнинг силлиқ масаласи учун исботланган, лекин у ифодаланган ҳол учун ҳам ўринлидир. Умумий ҳол учун исбот 3-бандда келтирилади.

3. Умумий ҳол. 4-теореманинг ифодаланишида $f(x)$, $g(x)$ элементларнинг ҳосилаларидан ҳамда Q тўпламнинг махсус кўринишда бўлишидан фойдаланилмаган. Агар қавариқ таҳлил техникасидан фойдаланилса, теореманинг исботида ҳам улардан қутилиш мумкинлигини кўрсатамиз.

$(m+1)$ ўлчовли фазода

$$A = \{\bar{y} = \{y_0, y\} : y_0 \geqslant f(x),\ y \geqslant g(x),\ \text{бирор } x \in Q \text{ да}\},$$

$$B = \{\bar{y} = \{y_0, y\} : y_0 = f(x),\ y = g(x),\ x \in Q\},$$

$$C = \{\bar{z} = \{z_0, z\} : z_0 < f(x^0),\ z < 0\}$$

тўпламларни қурайлик. A ва C тўпламлар қавариқдир. Ҳақиқатан, $\{\bar{y}_0, \bar{y}\} \in A$ ва $\{\check{y}_0, \check{y}\} \in A$ бўлсин. У ҳолда A тўпламнинг аниқланишига кўра, шундай $\bar{x} \in Q$ ва $\check{x} \in Q$ векторлар топиладики,

$$\bar{y}_0 \geqslant f(\bar{x}),\ \bar{y} \geqslant g(\bar{x}); \tag{19}$$

$$\check{y}_0 \geqslant f(\check{x}),\ \check{y} \geqslant g(\check{x}) \tag{20}$$

бўлади.

$$\{\lambda \bar{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0,\ \lambda \bar{y} + (1-\lambda)\check{y}\},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

нуқтани қурамиз. Бу нуқтанинг компоненталари учун (19), (20) ларга ва $f(x)$, $g(x)$ функцияларнинг қавариқлигига мувофиқ,

$$\lambda \bar{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0 \geqslant \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\check{x}) \geqslant f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\check{x})$$

$$\lambda \bar{y} + (1-\lambda)\check{y} \geqslant \lambda g(\bar{x}) + (1-\lambda) g(\check{x}) \geqslant g(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\check{x})$$

тенгсизликлар бажарилади.

$\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\check{x} \in Q$ бўлганлигидан, олинган тенгсизликлар $\{\lambda \bar{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0,\ \lambda \bar{y} + (1-\lambda)\check{y}\} \in A$ эканлигини билдиради, яъни A — қавариқ тўплам. C тўплам ярим фазоларнинг кесишмасидан иборат бўлганлигидан қавариқдир.

A ва C тўпламлар умумий нуқталарга эга эмас. Ҳақиқатан, агар $\bar{y} = \bar{z}$, $\bar{y} \in A$, $\bar{z} \in C$ бўлса, бирор $\bar{x} \in Q$ да x^0 режанинг оптималлигига зид бўлган $f(\bar{x}) \leqslant y_0 = z_0 < f(x^0)$, $g(\bar{x}) \leqslant y = z \leqslant 0$ тенгсизликлар бажарилади.

A ва C тўпламларни қавариқ тўпламларнинг хоссасига асосан ажратиш мумкин, яъни шундай $(m+1)$-вектор $\bar{c} = \{c_0, c\}$, $\|\bar{c}\| = 1$ топиладики, барча $\bar{y} \in A$, $\bar{z} \in C$ лар учун

$$\bar{c}'\bar{y} \geqslant \bar{c}'\bar{z} \qquad (21)$$

тенгсизлик бажарилади. (21) дан ва C тўпламнинг аниқланишидан $\bar{c}$ векторнинг манфий бўлмаслиги келиб чиқади: $\bar{c} \geqslant 0$. Агар манфий $\bar{c}_i < 0$ компонента мавжуд деб фараз қилсак, i — ўринда $\beta^2 \varepsilon$ элементли $\bar{z} = \{f(x^0) + \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \beta^2 \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\}$ вектор учун белгиланган $\varepsilon < 0$ ва етарлича катта β да (21) тенгсизликка зид бўлган исталганча катта $\bar{c}'\bar{z}$ миқдорни топамиз. B тўплам A тўпламга тегишлидир, шунинг учун (21) тенгсизлик $\bar{y} \in B$ бўлганда ҳам бажарилади, яъни барча $x \in Q$ лар учун

$$c_0 f(x) + c' g(x) \geqslant \bar{c}'\bar{z} \qquad (22)$$

бўлади. (22) тенгсизлик C тўпламнинг барча нуқталари учун ўринлидир. У C тўпламнинг лимит нуқталари учун ҳам, хусусий ҳолда $\{f(x^0), 0\}$ нуқта учун ҳам бажарилади:

$$c_0 f(x) + c' g(x) \geqslant c_0 f(x^0), \quad x \in Q. \qquad (23)$$

Энди $c_0 > 0$ эканлигини исботлаймиз. Агар $c_0 = 0$ бўлса, $\bar{c} \geqslant 0$, $\bar{c} \neq 0$ дан $c \geqslant 0$, $c \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. (23) тенгсизлик барча $x \in Q$ лар учун $c'g(x) \geqslant 0$ кўринишни олади.

Иккинчи томондан, (7) дан $c'g(x^*) < 0$ тенгсизлик келиб чиқади. Зиддият $c_0 > 0$ эканлигини исботлайди. (18) ни исботлаш учун $\lambda^0 = c/c_0$ деб оламиз. $c_0 > 0$ бўлганлигидан (23) дан барча $x \in Q$ лар учун

$$f(x) + g'(x)\lambda^0 \geqslant f(x^0) \qquad (24)$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан $x = x^0$ бўлганда $g'(x^0)$, $\lambda^0 \geqslant 0$ тенгсизликни оламиз. Лекин, иккинчи томондан $\lambda^0 \geqslant 0$, $g(x^0) \leqslant 0$ лардан, $[\lambda^0]'\ g(x^0) \leqslant 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб, (18) тенглик исботланди.

(24) тенгсизлик (18) ни ҳисобга олганда, барча $x \in Q$ лар учун

$$f(x^0) + g'(x^0)\lambda^0 \leqslant f(x) + g'(x)\lambda^0$$

кўринишни олади, яъни (16) тенгсизлик умумий ҳол учун ($f(x)$, $g(x)$ ларнинг ҳосилаларидан ва Q тўпламнинг махсус кўринишидан фойдаланилмаганда) тўғридир. Кун — Таккер теоремаси исботланди.

4. Чизиқли чеклашлар. Чизиқли чеклашли қавариқ программалаш масаласини қарайлик:

$$f(x) \to \min, \quad Ax - b \leqslant 0, \quad x \geqslant 0, \qquad (25)$$

бу ерда $f(x) \in C^{(1)}$, $A = A\ (I,\ J)$ $m \times n$-матрица, $b = b\ (J)$ m-вектор, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(25) масала учун 1-лемма кучайтирилиши мумкин.

2-лемма.

$$A(I_0(x^0),\ J)\, l_* \leqslant 0, \quad l_*(J_0(x^0)) \geqslant 0 \tag{26}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳар бир x^0 режа ва $l_* = l_*(J)$ вектор учун $x_t = x^0 + l_* t$, $t \in [0, t_0]$ вектор $t_0 > 0$ етарлича кичик сон бўлганда (25) масаланинг режаси бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан етарлича кичик t лар учун $x^0(J_+) > 0$, $A(I_+, J)\, x^0 < b(I_+)$ тенгсизликлардан $x_t(J_+) \geqslant 0$, $A(I_+, J)\, x_t \leqslant b(I_+)$ $(I_+ = I_+(x^0) = I \setminus I_0,\ I_0 = I_0(x^0),\ J_+ = J \setminus J_0)$ тенгсизликлар келиб чиқади. Қолган чеклашлар (26) га мувофиқ бажарилади:

$$A(I_0,\ J)\, x_t = A(I_0,\ J)\, x^0 + A(I_0,\ J)\, l_* t \leqslant 0,$$

$$x_t(J_0) = x^0(J_0) + l_*(J_0)\, t = l_*(J_0)\, t \geqslant 0$$

Лемма исботланди.

1-леммани 2-леммага алмаштириб 2 — 4-теоремаларни режалар тўпламининг равонлигини талаб қилмасдан олиш мумкин.

Изоҳлар. 1. Бу банднинг натижасини $f(x) \in c^{(1)}$ каби талабсиз ҳам исбот қилиш мумкин.

2. $f(x) \to \min$, $Ax - b = 0$, $x \geqslant 0$ масала, агар $f(x)$ қаварик функция бўлса, қаварик программалаш масаласи бўлади. Бу масала учун (хеч бўлмаганда, $f(x) \in c^{(1)}$ бўлганда) Кун — Таккер теоремасини исботлаш тавсия этилади.

3-§. ИККИЛАНМАЛИК НАЗАРИЯСИ

Кун — Таккер теоремаси табиий равишда *икkиланма масалани* киритиш ва чизиқли программалаштиришнинг ўхшаш натижалари билан бирга *қаварик программалаштиришнинг тугалланган иккиланмалик назариясини* ташкил қилувчи *иккиланмалик муносабатларини* исботлаш имконини беради.

1. Иккиланма масала, иккиланмалик муносабатлари. Режалари тўплами X равон бўлган, яъни қандайдир x^* режа учун $g(x^*) < 0$ тенгсизлик бажарилган қаварик программалаштиришнинг

$$f(x) \to \min, \ g(x) \leqslant 0, \quad x \in Q \tag{1}$$

асосий масаласини қараймиз.

(1) масалада $f(x)$, $g(x)$ элементлар бўйича m-вектор λ ёрдамида Лагранж функциясини тузамиз.

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x)$$

ва уни $x \in Q$, $\lambda \geqslant 0$ бўлганда қараймиз.

Тўғри $\varphi(x)$, $x \in Q$ ва *иккиланма* $\psi(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$ функцияларни киритамиз:

$$\varphi(x) = \sup_{\lambda} F(x, \lambda), \ \lambda \geqslant 0; \ \psi(\lambda) = \inf_{x} F(x, \lambda), \ x \in Q. \quad (2)$$

Ушбу

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in Q \quad (3)$$

масалани қавариқ программалаштиришнинг *тўғри масаласи* деб,

$$\psi(\lambda) \to \max, \quad \lambda \geqslant 0 \quad (4)$$

масалани эса *иккиланма масаласи* деб атаймиз.

$\{x : \varphi(x) < \infty\}$ *тўплам тўғри режалар тўплами*, $\Lambda = \{\lambda : \psi(\lambda) > -\infty\}$ тўплам *иккиланма режалар тўплами* дейилади.

$x \in X$ бўлганда $\varphi(x) = f(x)$; $x \bar{\in} X$ бўлганда $\varphi(x) = \infty$ эканлигидан тўғри режалар тўплами (1) масаланинг режалар тўплами билан, (3) масала эса (1) масала билан устма-уст тушади. Шунга асосан (1) масала ҳам *қавариқ программалашнинг тўғри масаласи* деб аталади.

$f(x)$, $g(x)$ функциялар чизиқли ва $Q = \{x : x \geqslant 0\}$ бўлганда (4) масала чизиқли программалашнинг иккиланма масаласи билан устма-уст тушишини текшириш қийин эмас (1-боб, 2-§ га қ.).

(3), (4) масалаларнинг x^0, λ^0 ечимлари тўғри ва иккиланма масалалар орасидаги узвий боғлиқликни ифодаловчи қуйидаги *иккиланмалик муносабатларини* қаноатлантиради:

1) тўғри масаланинг x^0 ечими мавжуд бўлиши учун иккиланма масаланинг λ^0 ечими мавжуд бўлиши зарур;

2) (3), (4) масалаларнинг x^0, λ^0 ечимларида

$$\varphi(x^0) = \psi(\lambda^0)$$

тенглик бажарилади;

3) тўғри ва иккиланма режалардан тузилган ҳар бир $\{x, \lambda\}$ жуфтлик учун

$$\varphi(x) \geqslant \psi(\lambda)$$

тенгсизлик бажарилади;

4) агар тўғри ва иккиланма режалардан тузилган бирор $\{x^*, \lambda^*\}$ жуфтликда

$$\varphi(x^*) = \psi(\lambda^*)$$

тенглик бажарилса, x^*, λ^* (3), (4) масалаларнинг ечимлари бўлади;

5) агар иккиланма (тўғри) режаларнинг қандайдир λ^k, $k = 1, 2, \ldots$ (x^k, $k = 1, 2, \ldots$) кетма-кетлиги бўйлаб иккиланма (тўғри) масаланинг мақсад функцияси чегараланмаган бўлса, тўғри (иккиланма) режалар тўплами бўшдир;

6) (3), (4) масалаларнинг x^0, λ^0 ечимларида қаттиқмасликни тўлдирувчи

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0$$

шарт бажарилади;

7) (4) иккиланма масаланинг λ^0 ечими (1) масаланинг x^0 оптимал режасига мос Лагранж векторидан иборатдир;

8) x^0, λ^0 векторлар (3), (4) масалаларнинг ечимлари бўлиши учун уларнинг Лагранж функцияси эгар нуқтасининг компоненталари бўлиши зарур ва етарлидир;

9) минимакс ҳақидаги теорема ўринлидир;

$$\min_{x\in Q}\max_{\lambda\geqslant 0} F(x, \lambda) = \max_{\lambda\geqslant 0}\min_{x\in Q} F(x, \lambda).$$

Исботи. $\varphi(x)$ ва $\psi(\lambda)$ функцияларнинг аниқланишидан тўғри ва иккиланма масалаларнинг ихтиёрий x ва λ режалари учун ўринли бўлган

$$\varphi(x) \geqslant F(x, \lambda) \geqslant \psi(\lambda) \tag{5}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак, (3) муносабат ўринлидир. 4) ва 5) муносабатлар 3) муносабатнинг натижаларидир. x^0 тўғри масаланинг ечими бўлсин. Агар λ^0 унга мос Лагранж вектори бўлса, Кун — Таккер теоремасидан

$$\varphi(x^0) = F(x^0, \lambda^0) = \psi(\lambda^0) \tag{6}$$

эканлигини оламиз, бундан (5) га асосан, λ^0 (4) иккиланма масаланинг ечими эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, (1) ва (2) муносабатлар ўринлидир. Аксинча, агар λ^0, (4) иккиланма масаланинг ечими бўлса, (2) муносабатдан ((5) ни ҳисобга олганда) λ^0 тўғри масаланинг x^0 оптимал режасига мос Лагранж вектори эканлиги келиб чиқади ((7) муносабат). Бунда (6) шарт минимакс ҳақидаги теорема ўринли эканлигини билдиради ((9) муносабат). 6) муносабат 7) муносабатдан ва Кун — Таккер теоремасидан келиб чиқади. 8) муносабатнинг зарурийлик қисми 7) муносабатдан ва Кун — Таккер теоремасидан келиб чиқади.

Агар $\{x^0, \lambda^0\}$ Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлса, таърифга кўра $\varphi(x^0)=\psi(\lambda^0)$, бу эса 4) муносабатга асосан, x^0, λ^0 (3) ва (4) тўғри ҳамда иккиланма масалаларнинг ечимлари эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

Изоҳ. (4) иккиланма масала ечимининг мавжудлигидан (3) тўғри масаланинг ечими мавжудлиги келиб чиқмайди. Масалан, $f(x)=x_1^2+1/x_2\to\min$, $g(x)=x_1\leqslant 0$, $Q=\{x: x_2>0\}$, $x\in R_2$ тўғри масаланинг ечими мавжуд эмас. Унга иккиланма бўлган $\psi(\lambda)=-\frac{\lambda^2}{4}\to\max$, $\lambda\geqslant 0$ масала $\lambda^0=0$ ечимга эга.

Қуйидаги бандларда иккиланмалик назариясининг энг содда қўлланишлари келтирилади. Қайд қилиш керакки, иккиланмалик назариясининг ғоя ва натижалари экстремал масалалар назариясида кўп қўлланилади ва маълум маънода сонли усулларнинг ҳозирги замон даражасини характерлайди.

2. Максимал оқим ва минимал кесим ҳақидаги теорема. s манбали ва t оқишли $S=\{I,U\}$, $I=I_0UsUt$ тўрда *максимал оқим ҳақидаги*

$$v^0=\max_{x,v} v,\quad \sum_{j\in I_i^+} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-} x_{ji}=$$

$$=\begin{cases} v, & \text{агар } i=s \text{ бўлса},\\ -v, & \text{агар } i=t,\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } i\in I^0,\ (i,j)\in U \text{ бўлса},\end{cases}\tag{7}$$

масалани қараймиз. d_{ij} сон (i, j) *ёйнинг ўтказиш қобилияти* деб аталади. (7) масаланинг $x^0=\{x_{ij}^0,\ (i,j)\in U\}$ ечими *максимал оқим*, v^0 — *максимал оқим катталиги* деб аталади.

(7) масала учун Лагранж функцияси

$$F(x,\lambda)=-v+\sum_{i\in I}\lambda_i\Big[\sum_{j\in I_i^+} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-} x_{ji}\Big]-\lambda_s v+\lambda_t v=$$

$$=v(\lambda_t-\lambda_s-1)+\sum_{(i,j)\in U}(\lambda_i-\lambda_j)x_{ij}$$

кўринишда бўлади.

Иккиланма функцияни ҳисоблаймиз:

$$\psi(\lambda)=\sup_{0<x<d,\,v}F(x,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{\lambda_i-\lambda_j>0\\ (i,j)\in U}}(\lambda_i-\lambda_j)d_{ij}, & \text{агар } \lambda_t-\lambda_s=1 \text{ бўлса},\\ \infty, & \text{агар } \lambda_t-\lambda\neq 1 \text{ бўлса},\end{cases}$$

Шундай қилиб,

$$\sum_{\substack{\lambda_i-\lambda_j>0\\(i,\,j)\in U}} (\lambda_i-\lambda_j)\,d_{ij} \to \min_{\lambda}, \quad \lambda_t-\lambda_s=1 \tag{8}$$

масала (7) га иккиланма бўлади.

Иккиланмалик назариясига мувофиқ, (7), (8) масалаларнинг x^0, λ^0 ечимларида

$$v^0=\sum_{\substack{\lambda_i^0-\lambda_j^0>0\\(i,\,j)\in U}} (\lambda_i^0-\lambda_j^0)\,d_{ij} \tag{9}$$

тенглик бажарилади.

Агар S тўрга $(t,\ s)$ ёйни қўшсак ва $c_{ts}=1$, $c_{ij}=0$, $(i,\ j)\in U$ деб олсак, (7) масала минимал катталикдаги оқим ҳақидаги масаладан иборат бўлиб қолади. Унинг $\{x_{ij}^0,\ (i,\ j)\in$ $\in U^0,\ x_{ts}=v^0\}$ ечими потенциаллар усули билан олинган бўлсин.

1-боб, 2-§, 1-бандда кўрсатилгани каби, тугунларнинг u_i^0, $i\in I$ оптимал потенциаллари (8) иккиланма масаланинг ечимидан иборат бўлади, яъни

$$\lambda_i^0=u_i^0, \quad i\in I. \tag{10}$$

Потенциаллар усулига мувофиқ, тугунлардан бирортасининг потенциалини ихтиёрий танлаш мумкин. $u_s^0=1$ деб оламиз. У ҳолда $u_t^0=0$ ва қолган $i\in I^0$ тугунларнинг u_i^0 потенциаллари иккита қийматдан биттасини қабул қилади: 0 ёки 1.

$$I^1=\{i\in I: u_i^0=1\} \tag{11}$$

тўпламни қурамиз. $s\in I^1$, $t\bar{\in} I^1$ эканлиги равшан.

Тугунларнинг ихтиёрий $I^*\subset I$, $s\in I^*$, $t\bar{\in} I^*$ тўплами учун $U^*=U(I^*)=\{(i,\ j)\in U: i\in I^*,\ j\bar{\in} I^*\}$ ёйлар тўплами I^* тўпламга мос (*тўрнинг кесими*) деб аталади. $\sum\limits_{(i,\,j)\in U^*} d_{ij}$ — *кесимнинг қийматидир.* Минимал қийматли кесим — *минималдир.*

Теорема (Форд — Фалкерсон теоремаси). Максимал оқим катталиги минимал кесим қийматига тенгдир.

Исботи. (9) дан (10), (11) ларни ҳисобга олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$v^0=\sum_{(i,\,j)\in U(I^1)} d_{ij},$$

яъни максимал оқим катталиги $U(I^1)$ кесимнинг қийматига тенгдир. $U(I^1)$ кесимнинг минимал эканлигини исботлаймиз.

Ихтиёрий $I^* \subset I$, $s \in I^*$, $t \bar{\in} I^*$ тўпламни қараймиз ва у бўйича (8) масаланинг қуйидаги режасини қурамиз;

$\lambda_s = 1$, агар $i \in I^*$ бўлса; $\lambda_i = 0$ агар $i \bar{\in} I^*$ бўлса.

(8) масала мақсад функциясининг бу режадаги қиймати $\sum\limits_{(i,j) \in U(I^*)} d_{ij}$ га тенгдир. (8) масалада (10) режанинг оптималлигидан $U(I^1)$ кесим минимал эканлигини англатувчи $\sum\limits_{(i,j) \in U(I^1)} d_{ij} \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{(i,j) \in U(I^*)} d_{ij}$ тенгсизлик келиб чиқади, Теорема исботланди.

Форд — Фалкерсон теоремасининг исботи схемаси бўйича қуйидагини исботлаш ҳавола қилинади $S = \{I, U\}$:

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I; \quad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U$$

тўрда $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ оқимнинг мавжуд бўлиши учун:

1) $a(I) = 0 : I$ тугунлар тўпламининг $a(I) \left(a(I) = \sum\limits_{i \in I} a_i\right)$ интенсивлиги нолга тенг бўлиши;

2) $a(I^*) \leqslant d(I^*)$: ихтиёрий $I^* \subset I$ тўпламнинг $a(I^*)$ интенсивлиги у ҳосил қилган кесимнинг $d(I^*)$ қийматидан катта бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

3. Квадратик программалашнинг бир масаласини ечиш. Мусбат D $n \times n$ матрицали ва $\operatorname{rank} A = m < n$ бўлган A $m \times n$ матрицали

$$c'x + x'Dx/2 \to \min, \quad Ax = b \tag{12}$$

масалани қараймиз.

$F(x, \lambda) = c'x + x'Dx/2 + \lambda'(Ax - b)$ Лагранж функцияси бўйича иккиланма

$$\psi(\lambda) = \min_{x \in R_n} (c'x + x'Dx/2 + \lambda'(Ax - b)) \tag{13}$$

функцияни тузамиз.

(13) даги минималлаштирилаётган функция қатъий қавариқ бўлганлигидан $(D > 0)$ унинг минимум нуқтаси $x(\lambda)$ Лагранж функциясининг стационар нуқтаси $(\partial F(x(\lambda), \lambda)/\partial x = 0)$ билан устма-уст тушади: $c + Dx(\lambda) + A'\lambda = 0$.

Бундан

$$x(\lambda) = -D^{-1}(A'\lambda + c). \tag{14}$$

(14) ни (13) га келтириб қўйиб,

$$\psi(\lambda) = -1/2(c' + \lambda'A)D^{-1}(A'\lambda + c) - \lambda'b \tag{15}$$

эканлигини оламиз. (12) га иккиланма бўлган масала $\psi(\lambda)$, $\lambda \in R_n$ функцияни максималлаштиришдан иборатдир. $AD^{-1}A' > 0$ бўлганлигидан $\psi(\lambda)$ функция қатъий ботиқдир ($(-\psi(\lambda)$ — қатъий қавариқ функция). Унинг максимум нуқтаси λ_0 стационар нуқта билан устма-уст тушади $(\partial\psi(\lambda^0)/\partial\lambda = 0)$: $AD^{-1}(c + A'\lambda^0) + b = 0$. Бундан,

$$\lambda^0 = -[AD^{-1}A']^{-1}(b + AD^{-1}c). \tag{16}$$

(16) ни (14) га келтириб қўйиб, (12) масаланинг $x^0 = x(\lambda^0)$ оптимал режасини оламиз.

4. Геометрик программалашнинг иккиланма масаласи.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t), \quad u_i(t) = c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, \quad c_i > 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{17}$$

кўринишдаги $f(t)$, $t = \{t_1, \ldots, t_m\} \in R_m$ функция *позином* деб, $\{a_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ матрица унинг *экспоненталар матрицаси* деб аталади. *Геометрик программалаш* деб математиканинг позином тенгсизликлар ёрдамида берилган тўпламларда позиномларни минималлаштириш масалалари қараладиган бўлимига айтилади.

Геометрик программалашнинг қуйидаги масаласини қараймиз:

$$f(t) \to \min, \quad t \geqslant 0, \tag{18}$$

бу ерда $f(t)$ — (17) позиномдан иборат.

u_i функцияларни логарифмлаб ва янги $x_j = \ln t_j$, $j = \overline{1,m}$ $x_{m+i} = \ln u_i$, $b_i = -\ln c_i$, $i = \overline{1,n}$ ўзгарувчиларни киритиб, (18) масаладан унга эквивалент бўлган

$$\sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - x_{m+i} = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

чизиқли чеклашли қавариқ программалаш масаласига ўтамиз.

Лагранж функцияси

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - x_{m+i} - b_i \right)$$

ёрдамида (19) га иккиланма бўлган

$$\psi(\lambda) = \inf_x F(x, \lambda) \to \max \tag{20}$$

масалани ёзамиз.

Иккиланма режалар тўплами $\{\lambda_i : \psi(\lambda) < \infty\}$ ни баён қиламиз. $F(x, \lambda)$ функциянинг x_{m+i} бўйича қуйи чегараси

$$x_{m+i} = \ln \lambda_i \qquad (21)$$

нуқтада эришилади. Демак, иккиланма режалар

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n} \qquad (22)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. x_j $j = \overline{1,m}$ ўзгарувчилар бўйича $\inf F(x, \lambda)$ ни ҳисоблаб, иккиланма режалар

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (23)$$

тенгламаларни қаноатлантиришини топамиз.

Аксинча, (22), (23) муносабатларни қаноатлантирувчи ҳар бир $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ вектор иккиланма бўлади.

(21) ни (20) га келтириб қўйиб ва (22), (23) ларни ҳисобга олиб, (19) га иккиланма

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \ln \prod_{i=1}^{n} (c_i/\lambda_i)^{\lambda_i} \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1,m};$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n} \qquad (24)$$

масалани оламиз.

Агар экспоненталар матрицасининг сатрлари *мусбат базис* ҳосил қилса ($\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0$, $j = \overline{1,m}$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$ дан $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ келиб чиқади), (24) масала ягона $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ режага эга бўлади. Қавариқ программалашнинг иккиланмалик назариясидан бошланғич (18) масаланинг тривиал ечилиши келиб чиқади: $t_j = 0$, $j = \overline{1,m}$. Бундан буён бу ҳол қаралмайди.

(24) масала чеклашларининг бир жинслилигидан унинг ечимини

$$\lambda_i = \alpha \delta_i, \quad \delta_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1, \quad \alpha > 0$$

кўринишда излаймиз.

(24) масала янги ўзгарувчиларда қуйидагича:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, (1 + \ln c_i/\alpha \delta_i) \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1,\ \delta_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n};\ \alpha > 0. \qquad (25)$$

α ўзгарувчи фақат мақсад функциясида қатнашади. (25) да α бўйича максимумни ҳисоблаб $\left(\alpha = \prod\limits_{i=1}^{n} (c_i/\delta_i)^{\delta_i}\right.$ нуқтада эришилади), (24) масаланинг бошқа эквивалент шаклини оламиз:

$$\psi(\delta) = \prod_{i=1}^{n} (c_i/\delta_i)^{\delta_i} \to \max,\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_{ij} = 0,\ j = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1,\ \delta_i \geqslant 0,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (26)$$

Кўп ҳолларда (26) иккиланма масала бошланғич (18) масаладан содда бўлади. (26) масаланинг чеклашларини ягона $\{\delta_i,\ i = \overline{1,n}\}$ тўплам қаноатлантирадиган (18) масалалар синфи мавжуд. Бундай ҳолларда (26) даги максималлаштириш операцияси ортиқчадир.

Мисол. Дарёдан 400 м³ шағални ташиб ўтиш учун ўлчамлари $t_1 \times t_2 \times t_3$ (узунлиги, кенглиги, баландлиги) бўлган очиқ қути тайёрлаш талаб қилинади. Қутининг ён ёқлари ва таги l кв.м и 10 сўм турадиган материаллардан, олд ва орқа ёқлари 20 сўм/м² турадиган материалдан ясалади. Ҳар бир рейс 10 тийин туради. Агар қути ҳамма шағални ташиб ўтилгандан кейин ташлаб юбориладиган бўлса, t_1^0, t_2^0, t_3^0 ўлчамлар қандай бўлганда харажатлар минимал бўлади?

Қутининг ҳажми $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ м³ га тенг. 400 м³ шағални ташиб ўтиш учун $400/t_1 t_2 t_3$ та рейс талаб қилинади ва у $40 \cdot t_1^{-1} \cdot t_2^{-1} \cdot t_3^{-1}$ сўм туради. Қутини тайёрлаш учун кетган материалларнинг қиймати $40 t_2 t_3 + 20 t_1 t_3 + 10 t_1 t_2$ га тенгдир. Шундай қилиб, масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(t) = 40 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} + 40 t_2 t_3 + 20 t_1 t_3 + 10 t_1 t_2 \to \min,\ t_1,\ t_2,\ t_3 > 0,$$

яъни, $m = 3,\ n = 4,\ c_1 = 40,\ c_2 = 40,\ c_3 = 20,\ c_4 = 10,$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Бу қийматлар учун (26) масаланинг чекланишларини ёзайлик;

$$\begin{gathered} -\delta_1 + \delta_3 + \delta_4 = 0, \\ -\delta_1 + \delta_2 + \delta_4 = 0, \\ -\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0, \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1. \end{gathered}$$

Олинган тизим ягона $\delta_1^0 = 2/5$, $\delta_2^0 = 1/5$. $\delta_3^0 = 1/5$. $\delta_4^0 = 1/5$ ечимга эгадир. Демак, (26) да максималлаштириш операцияси йўқолади ва иккиланма мақсад функциясининг оптимал қиймати

$(40/[2/5])^{2/5}\cdot(40/[1/5])^{1/5}\cdot(20/[1/5])^{1/5}\cdot(10/[1/5])^{1/5} = 100$ сўмга тенг бўлади.

3- § даги (2) иккиланмалик муносабатидан 100 сўм — шағални ташиб ўтишдаги минимал харажат эканлиги келиб чиқади. t_1^0, t_2^0, t_3^0 ларни хисоблаш учун $x_{m+i} = \ln u_i$ белгилашдан, (21) формуладаги $x_{m+i}^0 = \ln\lambda_i^0$ хоссадан, $\lambda_i = \alpha\,\delta_i$ белгилашдан ва $\alpha^0 = \psi\ (\delta^0)$ фактдан фойдаланамиз. Шундай қилиб,

$$u_i\,(t^0) = \psi\,(\delta^0)\ \ \delta_i^0,\ \ i = \overline{1, n}$$

тенгликлар ўринлидир.

Қаралаётган масала учун улар қуйидаги кўринишда бўлади: $100\cdot 2/5 = 40 t_1^{-1}\, t_2^{-1}\, t_3^{-1}$, $100\cdot 1/5 = 40 t_2 t_3$, $100\cdot 1/5 = 20 t_1 t_3$. Бундан қутининг оптимал ўлчамларини топамиз: $t_1^0 = 2$м, $t_2^0 = 1$м, $t_3^0 = 0{,}5$м.

4-§. КВАДРАТИК МАСАЛАНИ ЕЧИШ АЛГОРИТМИ

Қаварик квадратик программалашнинг умумий масаласини ечишнинг симплекс усулнинг умумий ҳоли бўлган чекли усули баён қилинади.

1. Масаланинг қўйилиши. Оптималлик критерийси. Қаварик квадратик программалашнинг *каноник масаласи*

$$f\ (x) = x'D\ x/2 + c'x \to \min,\ \ Ax = b,\ \ x\ (J_+) \geqslant 0 \qquad (1)$$

кўринишга эга. Бу ерда $x = x\ (J)$, $c = c\ (J)$ лар n-векторлар; $b = y\ (I)$ эса m-вектор; $A = A\ (I,\ J)$ $m \times n$-матрица; $D = D\ (J,\ J)$ — симметрик, манфий бўлмаган $m \times n$-матрица;

$$I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\},\ \ J = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},\ \ J_+ \subset J.$$

Ихтиёрий махсус бўлмаган $A_Б = A\ (I,\ J_Б)$, $J_Б \subset J$, $m \times m$-матрицани *базис матрица* деб атаймиз. x режа ва $A_Б$ базис матрицадан ҳосил қилинган $(x,\ A_Б)$ жуфтликни (1) масаланинг *таянч режаси* деб атаймиз. Агар $x_{Б+} = x\ (J_{Б+}) > 0$, $J_{Б+} = J_Б \cap J_+$ бўлса, $(x,\ A_Б)$ таянч режа *бузилмаган* деб аталади.

Изоҳ. Агар $I = \varnothing$ бўлса (яъни, (1) масалада асосий чеклашлар қатнашмаса), $A_Б = 0$, $J_Б = \varnothing$ бўлади.

$$A_Б x_Б + A_H x_H = b,\ \ A_H = A\ (I,\ J_H),\ \ J_H = J \setminus J_Б$$

ифодадан

$$x_Б = r_0 + R x_H \qquad (2)$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда $r_0=\{r_{i0},\ i\in J_Б\}=A_Б^{-1}b$, $R=R\ (J_Б,\ J_H)=\{r_j\ (J_Б),\ \ j\in J_Н\}=-A_Б^{-1}A_Н$. Компоненталари

$$z_{ij}=\begin{cases} r_{ij},\ i\in J_Б, \\ 0,\ i\in J_Н\setminus j,\ j\in J_Н; \\ 1,\ i=j, \end{cases} \quad z_{i0}=\begin{cases} r_{i0},\ i\in J_Б \\ 0,\ i\in J_H \end{cases} \tag{3}$$

кўринишда бўлган векторни $z_j\ (J),\ j\in J_H\cup 0$ билан белгилаймиз ва

$$Z=Z\ (J,\ J_Н)=\{z_j,\ j\in J_Н\}$$

деб оламиз. (2), (3) ларга мувофиқ (1) масаланинг ҳар қандай x режаси

$$x=z_0+Zx_Н \tag{4}$$

кўринишга эга бўлади. Бундан

$$\begin{aligned} f\ (x) &= x'D\,x/2+c'x=(z_0+Zx_Н)'\,D\,(z_0+Zx_Н)/2+ \\ &+c'\,(z_0+Zx_Н)=x_Н'Z'DZx_Н/2+z_0'DZx_Н/2+ \\ &+x_Н'ZDz_0/2+z_0'Dz_0/2+c'z_0+c'Zx_Н= \\ &=\frac{1}{2}\,x_Н'Нx_Н+h_0'x_Н+h_{00}/2, \end{aligned} \tag{5}$$

бу ерда $H=H\ (J_Н,\ J_Н)=Z'DZ,\ \ h_0=h_0\ (J_Н)=Z\ (Dz_0+c)$, $h_{00}=z_0'Dz_0+2c'z_0$.

H матрицанинг симметрик ва манфий эмаслигини кўриш қийин эмас. $\{x,\ A_Б\}$ таянч режа билан бирга $\bar{x}=x+\Delta x$ режани қараймиз. Мақсад функциясининг орттирмасини ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} \Delta f\ (\bar{x},\ x) &= f\ (\bar{x})-f\ (x)=(\bar{x}_Н'H\bar{x}_Н-x_Н'\,Hx_Н)/2+ \\ &+h_0'\,(\bar{x}_Н-x_Н)=\Delta x_Н'H\,\Delta x_Н'/2+\Delta x_Н'\ (Hx_Н+h_0). \end{aligned}$$

$$\Delta_Н=\Delta\ (J_Н)=Hx_Н+h_0 \tag{6}$$

баҳолар векторини киритиб,

$$\Delta f\ (\bar{x},\ x)=\Delta\,x_Н'\,H\,\Delta\,x_Н/2+\Delta_Н'\,\Delta\,x_Н \tag{7}$$

орттирма формуласини оламиз:

1- теорема (оптималлик критерийси). $\{x,\ A_Б\}$ таянч режанинг оптимал бўлиши учун

$$\Delta_j \geqslant 0,\ x_j = 0;\ \Delta = 0,\ x_j > 0,\ j \in J_{\text{н}+};\ \Delta_j = 0,\ j \in J_{\text{н}-};$$

$$J_{\text{н}+} = J_{\text{н}} \cap J_{+},\ J_{\text{н}-} = J_{\text{н}} \setminus J_{\text{н}+} \tag{8}$$

муносабатларнинг бажарилиши етарли, бузилмаганда эса зарур ҳамдир.

Исботи. *Етарлилиги.* $\{x, A_{\text{Б}}\}$ таянч режа учун (8) шартлар бажарилсин. $x_j = 0$, $j \in J_{\text{н}+}$, бўлганда $H \geqslant 0$, $\Delta x_j \geqslant \geqslant 0$ эканлигидан, ихтиёрий $x = \Delta x$ режа учун

$$\Delta f\ (\bar{x},\ x) = \Delta x'_{\text{н}} H \Delta x_{\text{н}}/2 + \Delta x'_{\text{н}} \Delta_{\text{н}} \geqslant 0,$$

яъни, x режа (1) масаланинг оптимал режасидир.

Зарурийлиги. Бузилмаган $\{x, A_{\text{Б}}\}$ таянч режа учун (8) муносабатлар бажарилмасин ва $j_0 \in J_{\text{н}}$ улар бажарилмайдиган индекс бўлсин.

$$l = -z_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0} \tag{9}$$

деб оламиз. $\{x, A_{\text{Б}}\}$ таянч режа бузилмаганлигидан, шундай $\theta_0 > 0$ сон топиладики, θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ учун $x + \theta l$ нуқта (1) масаланинг режаси бўлади. Орттирма формуласи (7) дан, (9) ни ҳисобга олиб,

$$\Delta f\ (x + \theta l,\ x) = \theta l'_{\text{н}} \Delta_{\text{н}} - \theta^2 l'_{\text{н}} H l_{\text{н}}/2 =$$

$$= -\theta\ |\Delta_{j_0}| + \frac{1}{2} \theta^2 h_{j_0 j_0}$$

эканлигини оламиз. $|\Delta_{j_0}| > 0$ бўлганлигидан охирги ифоданинг ўнг томони етарлича кичик $\theta > 0$ лар учун манфий бўлади. Бу x режанинг оптималлигига зиддир. Теорема исботланди.

2. Итерация. Фараз қилайлик, $\{x, A_{\text{Б}}\}$ таянч режада (8) муносабатлар бажарилмасин. 1-теореманинг исботидан кўринадики, (9) йўналиш бўйлаб (1) масаланинг мақсад функцияси камаяди. Шунинг учун x режани яхшилаш мақсадида шу йўналиш бўйлаб ҳаракат қиламиз: $x(\theta) = x + \theta l$, $\theta \geqslant 0$. Бунда қуйидагиларни талаб қилиш табиийдир: 1) ҳаракат (1) масала режалари тўпламидан четга чиқмасин, яъни $\theta \leqslant \min\limits_{j \in J_+} \theta_j$, бу ерда $\theta_j = -x_j/l_j$, l_j, $l_j < 0$; 2) ҳаракат мақсад функциясининг қиймати камайиши жараёнида давом этсин, яъни $\theta \leqslant \theta_f$, бу ерда θ_f эса $\partial \Delta f\ (x + \theta_f l,\ x)/\partial \theta = 0$ тенгликка эквивалент бўлган $\Delta f\ (x + \theta_f l,\ x) = \min\limits_{\theta} \Delta f\ (x + + \theta l,\ x)$ шартдан топилади.

Шундай қилиб, l бўйлаб максимал мумкин бўлган θ^0 қадам

$$\theta^0 = \min \{\theta_{i_0}, \theta_j\} \tag{10}$$

га тенгдир. Бу ерда $\theta_{i_3} = \min\limits_{j \in J_+} \theta_j$,

$$\theta_j = \begin{cases} -x_{j_0}/l_j, & \text{агар } l_j < 0 \text{ бўлса}, \\ \infty, & \text{агар } l_j \geqslant 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

$$\theta_j = \begin{cases} |\Delta_j|/h_{j_0 j_0}, & \text{агар } h_{j_0 j_0} > 0 \text{ бўлса}, \\ \infty, & \text{агар } h_{j_0 j_0} = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

Равшанки, бузилмаган таянч режа учун θ^0 катталик мусбатдир ($\theta^0 > 0$). $\theta^0 = \infty$ тенглик l йўналиш бўйлаб ҳаракат (1) масалани хеч қачон режалар тўплами чегарасидан чиқариб юбормаслигини ва бунда мақсад функцияси ўзгармас тезликда камайишини билдиради. Бу ҳолда (1) масалани ечиш тугалланади, чунки мақсад функцияси режалар тўпламида қуйидан чегараланган эмас.

Дейлик, $\theta^0 < \infty$ бўлсин. Янги $\bar{x}$ режани

$$\bar{x} = x + \theta^0 l$$

формула бўйича қурамиз. Бу режага кўриниши қуйидагича аниқланадиган $\bar{A}_Б$ базис матрицани мос қўямиз:

а) $\theta^0 = \theta_{i_0}$, $i_0 \in J_Б$. $\bar{A}_Б = A\ (I, \bar{J}_Б)$, $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus i_0) \cup j_0$, деб оламиз. $\bar{A}_Б$ матрицанинг базис матрица эканлиги симплекс усулдагидек кўрсатилади.

б) $\theta^0 = \theta_{i_0}$, $i_0 = j_0$. $\bar{A}_Б = A_Б$ деб оламиз.

в) $\theta^0 = \theta_j$. $\bar{A}_Б = A_Б$ деб оламиз, лекин а), б) ҳоллардан фарқли ўлароқ, янги таянч режа билан $\bar{J}_0 = \{j_0\} \subset J_Н$ тўпламини боғлаймиз, яъни бундан буён $\{\bar{x}, \bar{A}_Б\}_{\bar{J}_0}$ ёзувдан фойдаланамиз. Бошланғич таянч режа учун $J^0 = \varnothing$, а), б) ҳолларда эса $\bar{J}_0 = \varnothing$ деб ҳисоблаш мумкин.

Мақсад функциясининг (5) ифодаси базис матрицага боғлиқдир. Шунинг учун а) ҳолда $\bar{H}$, $\bar{h}_0$, $\bar{h}_{00}$ элементлар янги бўлади;

$$f\ (x) = x'\ (\bar{J}_Н)\ \bar{H}\, x\,(\bar{J}_Н)/2 + \bar{h}_0'\, x\,(\bar{J}_Н) + \bar{h}_{00}/2.$$

$\bar{H}$, $\bar{h}_0$, $\bar{h}_{00}$ элементларини H, h_0, h_{00} лар билан боғловчи формулаларни оламиз. Бунинг учун (5) функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$f(x)=\frac{1}{2}x_{\text{н}}^{*\prime}H^{*}x_{\text{н}}^{*}, \tag{11}$$

бу ерда $x_{\text{н}}^{*}=x(J_{\text{н}}^{*})=\{1,\ x_{\text{н}}\}$, $J_{\text{н}}^{*}=0\cup J_{\text{н}}$, $H^{*}=H(J_{\text{н}}^{*},\ J_{\text{н}}^{*})$.
$r_{i_0j_0}\neq 0$ бўлганлигидан, (2) дан

$$x_{j_0}=-\frac{r_{i_00}}{r_{i_0j_0}}+\frac{1}{r_{i_0j_0}}x_{i_0}-\sum_{j\in J_{\text{н}}}\frac{r_{i_0j}}{r_{i_0j_0}}x_j.$$

келиб чиқади. Шунинг учун

$$x(J_{\text{н}}^{*})=M(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}}^{*})\,x(\bar{J}^{*}), \tag{12}$$

бу ерда $\bar{J}_{\text{н}}^{*}=0\cup\bar{J}_{\text{н}}$,

$$M(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}}^{*})=$$

$$=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccc}1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & & 0\\ -r_{i_00}/r_{i_0j_0} & \ldots & & 1/r_{i_0j_0} & \ldots & & -r_{i_0j_{n-m}}/r_{i_0j_0}\\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{array}\right] & \begin{array}{l}\\ \\ \\ \cdots j_0\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccc} & & \quad\quad i_0\end{array} & \end{array} \tag{13}$$

(12) га асосан

$$f(x)=x_{\text{н}}^{*\prime}H^{*}x_{\text{н}}^{*}/2=x'(J_{\text{н}}^{*})\ M'(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}}^{*})\ H^{*}M(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}}^{*})\times$$
$$\times x(\bar{J}_{\text{н}}^{*})/2=x'(\bar{J}_{\text{н}}^{*})\ \bar{H}^{*}x'(J_{\text{н}}^{*})/2,\ \bar{H}^{*}=M'(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}}^{*})\ H^{*}M(J_{\text{н}}^{*},\bar{J}_{\text{н}}^{*})$$

Охирги тенгликдан

$$\bar{H}=M'HM,\ \ M=M(J_{\text{н}},\bar{J}_{\text{н}}),$$
$$\bar{h}_0=M'(J_{\text{н}}^{*},\ \bar{J}_{\text{н}})\ H^{*}M(J_{\text{н}}^{*},\ 0),$$
$$\bar{h}_{00}=M'(J_{\text{н}}^{*},\ 0)\ H^{*}M(J_{\text{н}}^{*},0). \tag{14}$$

эканлигини оламиз.

Шунинг билан биринчи итерациянинг баёни тугалланади.

Фараз қилайлик, k-итерацияда (8) муносабатлар бажарилмайдиган $\{x^k, A^k_Б\}J^k_0$ таянч режа олинган бўлиб, лекин у шундай бўлсин: 1) $\Delta^k_j = 0$, $j \in J^k_0$, 2) агар $J^k_0 \neq \varnothing$ бўлса, $H^k_0 = H^k(J^k_0, J^k_0) > 0$. Биринчи интерациядан сўнг олинган $\{x^2, A^2_Б\}_{J^2_0} = \{\bar{x}, \bar{A}_Б\}_{\bar{J}_0}$ таянч режа $H^2_0 = \bar{H}(\bar{J}_0, \bar{J}_0)$ бўлган 1), 2) шартларни қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

x^k режанинг (8) оптималлик шартлари бузиладиган индексини $j_k \in J^k_Н$ деб белгилайлик. Ушбу

$$\Delta^k_j(\theta) = h^k_{j_*} + H^k(j, J^k_Н)(x^k_Н + \theta l^k_Н) \overset{\theta}{\equiv} 0, \; j \in J^k_0 \qquad (15)$$

айниятларга риоя қилинганда, l^k йўналиш бўйлаб x_j, $j \in J^k_0$ ўзгарувчилар бўйича оптималлик шартлари ҳамиша бажарилганлигидан, (15) муносабатларни x^k режа яхшиланадиган шу l^k йўналишни қуришга асос қилиб оламиз. l^k йўналишни

$$l^k = -z^k_{j_k} \operatorname{sign} \Delta^k_{j_k} + \sum_{j \in J^k_0} \gamma^k_j z^k_j \qquad (16)$$

кўринишда излаймиз. γ^k_j, $j \in J^k_0$ коэффициентларни ҳисоблаш учун (6), (15) лардан $\gamma^k = G^k \beta^k \operatorname{sign} \Delta^k_{j_k}$, $G^k = (H^k_0)^{-1}$ ечимга эга бўлган

$$H^k_0 \gamma^k = \beta^k \operatorname{sign} \Delta^k_{j_k}, \qquad (17)$$

$\gamma^k = \{\gamma^k_j, j \in J^k_0\}$, $\beta^k = H^k(J^k_0, j_k)$ тенглама олинади.

$\partial f(x^k)/\partial l^k < 0$ эканлигини кўриш қийин эмас, яъни мақсад функцияси l^k йўналиш бўйича камаяди.

Худди (10) га ўхшаш l^k бўйлаб максимал мумкин бўлган θ^k қадам ҳисобланади:

$$\theta^k = \{\theta^k_{i_0}, \theta^k_j\},$$

бу ерда $\theta^k_{i_0} = \min\limits_{j \in J_+} \theta^k_j$,

$$\theta^k_j = \begin{cases} -x^k_j/l^k_j, & \text{агар } l^k_j < 0 \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } l^k_j \geqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \; j \in J_+$$

$$\theta^k_j = \begin{cases} |\Delta^k_{j_k}|/\alpha^k, & \text{агар } \alpha^k > 0 \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } \alpha^k = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$\alpha^k = l_{\text{Н}}^{k\prime} H^k l_{\text{Н}}^k = l^{k\prime} (J_0^k) H_0^k l^k (J_0^k) - 2\beta^{k\prime} l^k (J_0^k) \operatorname{sign} \Delta_{jk}^k + \\ - h_{j_k j_k}^k = h_{j_k j_k}^k - \beta^{k\prime} \gamma^k \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k.$$

Агар $\theta^k = \infty$ бўлса (1) масалани ечиш тугалланади, чунки мақсад функциясининг чексиз камайиш йўналиши l^k олинган.

Дейлик, $\theta^k < \infty$ бўлсин. У ҳолда янги

$$x^{k+1} = x^k + \theta^k l^k$$

режа қурилади. Янги $A_{\text{Б}}^{k+1}$ базис матрица ва янги J_0^{k+1} тўпламни қуриш учун қуйидаги ҳолларни қараймиз:

а) $\theta^k = \theta_{i_0}^k$, $i_0 \in J_{\text{Б}}$. Унда $A_{\text{Б}}^{k+1} = A(I, J_{\text{Б}}^{k+1})$, $J_{\text{Б}}^{k+1} = (J_{\text{Б}}^k / i_0) \cup \cup j_0$, $J_0^{k+1} = J_0^k \setminus j_0$ деб оламиз. Бу ерда j_0 индекс шундайки, $r_{i_0 j_0}^k \neq 0$ бўлиб, қуйидагича танланади: агар $r_{i_0 j}^k \neq 0$, $j \in I_0^k$ бўлса, $j_0 \in I_0^k$; акс ҳода $j_0 = j_k$;

б) $\theta^k = \theta_{i_0}^k$, $i_0 \in J_0^k$. Унда $A_{\text{Б}}^{k+1} = A_{\text{Б}}^k$, $J_0^{k+1} = J_0^k \setminus i_0$ деб оламиз;

в) $\theta^k = \theta_{i_0}^k$, $i_0 = j_k$. Унда $A_{\text{Б}}^{k+1} = A_{\text{Б}}^k$, $J_0^{k+1} = J_0^k$ деб оламиз;

г) $\theta^k = \theta_j^k$. Унда $A_{\text{Б}}^{k+1} = A_{\text{Б}}^k$, $J_0^{k+1} = J_0^k \cup j_k$ деб оламиз.

Янги $\{x^{k+1}, A_{\text{Б}}^{k+1}\}$ J_0^{k+1} таянч режа б), в) ҳолларда l^k йўналишни қуришнинг (15) принципига мувофиқ, 1) шартни қаноатлантиради. а) ҳолни қараймиз. Унда

$$\Delta^{k+1} (J_0^k) = H^{k+1} (J_0^k, J_{\text{Н}}^{*k+1}) x_{\text{Н}}^{*k+1}.$$

га эга бўламиз.

$$H^{*k+1} = M^{k\prime} (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1}) H^{*k} M^k (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1})$$

бўлганлигидан, бу ерда $M^k (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1})$ матрица (13) га ўхшаш тузилади.

$$H^{k+1} (J_0^k, J_{\text{Н}}^{*k+1}) = M^{k\prime} (J_{\text{Н}}^{*k}, J_0^{k+1}) H^{*k} M^k (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1})$$

бўлади ва демак,

$$\Delta^{k+1} (J_0^k) = M^{k\prime} (J_{\text{Н}}^{*k}, J_0^{k+1}) H^{*k} M (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1}) x_{\text{Н}}^{k+1} = \\ = M^{k\prime} (J_{\text{Н}}^{*k}, J_0^k) H^{*k} x^{k+1} (J_{\text{Н}}^{*k}) = M^{k\prime} (J_{\text{Н}}^{*k}, J_0^k) \overline{\Delta}_{\text{Н}}^{*k}, \qquad (18)$$

бу ерда $\overline{\Delta}_{\text{Н}}^{*k} = \overline{\Delta}^k (J_{\text{Н}}^{*k})$ — компоненталари

$$\overline{\Delta}_j^k = \Delta_j^k (\theta^k), \ j \in J_{\text{Н}}^k, \ \overline{\Delta}_0^k = H^k (0, J_{\text{Н}}^{*k}) x^{k+1} (J_{\text{Н}}^{*k})$$

бўлган вектордир.

$M^k (J_{\text{Н}}^{*k}, J_{\text{Н}}^{*k+1})$ матрицанинг қурилишидан ва j_0 индексни танлашга асосан $M^k(J_H^{*k} \setminus J_0^k,\ J_0^{k+1}) = 0$ га эгамиз. Шунинг учун (15), (18) лардан исбот қилиниши лозим бўлган

$$\Delta^{k+1}(J_0^{k+1}) = 0$$

келиб чиқади.

г) ҳолда $\Delta^{k+1}(J_0^k) = 0$ тенглик ўз-ўзидан кўриниб турибди. Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_{jk}^{k+1} = \Delta_{jk}^k + \theta_j^k (\beta^{k'} \gamma^k - h_{jkjk}^k \operatorname{sign} \Delta_{jk}^k) = \Delta_{jk}^k -$$

$$- \theta_j^k \alpha^k \operatorname{sign} \Delta_{jk}^k = \Delta_{kj}^k - |\Delta_{jk}^k| \operatorname{sign} \Delta_{jk}^k = 0,$$

яъни, яна $\Delta^{k+1}(J_0^{k+1}) = 0$.

$\{x^{k+1}, A_Б^{k+1}\}_{J_0^{k+1}}$ таянч режа 2) хоссага эга эканлигини кўрсатамиз.

а) ҳолда $j_0 \in J_0^k$ бўлганда $\overline{J}_0^{k+1} = J_0^{k+1} \cup i_0$ деб, $j_0 = j_k$ бўлганда $\overline{J}^{k+1} = J_0^{k+1}$ деб белгилаб,

$$\overline{H}^{k+1} = H^{k+1}(\overline{J}_0^{k+1}, \overline{J}_0^{k+1}) = M^{k'}(J_H^k, \overline{J}_0^{k+1})\, H^k M^k(J_H^k, \overline{J}_0^{k+1}) =$$

$$= M^{k'}(J_0^k, \overline{J}_0^{k+1}) \cdot H_0^k \cdot M^k(J_0^k, \overline{J}_0^{k+1}) \tag{19}$$

ни оламиз.

$H_0^k > 0$, $\det M^k(J_0^k, \overline{J}_0^{k+1}) \neq 0$ бўлганлигидан $\overline{H}^{k+1} > 0$. H^{k+1} матрица $\overline{H}^{k+1} > 0$ матрицанинг диагонал минори сифатида мусбатдир.

б) ҳолда: $H_0^k > 0$ матрицанинг диагонал минори сифатида $H_0^{k+1} > 0$;

в) ҳолда: $H_0^{k+1} = H_0^k > 0$.

г) ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, H_0^{k+1} матрица мусбат бўлмасин, яъни шундай ноль бўлмаган $\xi = \xi(J_0^{k+1})$ вектор топиладики,

$$H_0^{k+1} \xi = 0 \tag{20}$$

бўлади. (20) дан

$$H_0^k \xi(J_0^k) + \beta^k \xi_{jk} = 0$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда $\xi_{jk} \neq 0$, чунки акс ҳолда H_0^k матрицанинг мусбатлигига зид хулосага келамиз. Умумийликни бузмасдан $\xi_{jk} = 1$ деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда

$$\xi(J_0^k) = -G^k \beta^k = -\gamma^k \operatorname{sign} \Delta_{jk}^k \qquad (21)$$

(20), (21) лардан

$$H^k(j_k, J_0^{k+1})\xi = \beta^{k'}\xi(J_0^k) + h_{jkjk}^k \xi_{.k} =$$

$$= h_{jkjk}^k - \beta^{k'}\gamma^k \operatorname{sign} \Delta_{ik}^k = \alpha^k = 0$$

га эга бўламиз. Лекин, $\alpha^k > 0$, чунки $\theta^k = \theta_l^k < \infty$. Олинган қарама-қаршилик $H_0^{k+1} > 0$ эканлигини исботлайди.

$|J_0^k| = 1$ бўлганда (бу ерда $|J_0^k|$ сон J_0^k тўпламнинг элементлари сони) H_0^k га тескари G^k матрицани ҳисоблаш қийинчилик туғдирмайди. $|J_0^k| > 1$ бўлганда G^k ларни реккурент ҳисоблаш учун формулалар оламиз. Уларни келтириб чиқаришда чизиқли алгебрадан маълум формулалар керак бўлади. Ушбу

$$T = \begin{pmatrix} S & q \\ q' & t \end{pmatrix}$$

кўринишдаги симметрик матрица учун, $p = t - q' S^{-1} q \neq 0$ бўлганда, тескари

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} + \dfrac{S^{-1} qq' S^{-1}}{p}, & -\dfrac{S^{-1}\cdot q}{p} \\ -\dfrac{q' S^{-1}}{p}, & \dfrac{1}{p} \end{pmatrix}$$

матрица мавжуд бўлади. Аксинча, агар

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} Q & u \\ u' & v \end{pmatrix}$$

бўлса, $v \neq 0$ бўлганда,

$$S^{-1} = Q - \frac{uu'}{v}$$

формула ўринлидир.

а) ҳолни қараймиз.

$$\overline{G}^{k+1} = \overline{G}^{k+1}(\overline{J}_0^{k+1}, \overline{J}_0^{k+1}) = (\overline{H}^{k+1})^{-1},$$

$$N^k = N^k(J_{\text{н}}^{k+1}, J_{\text{н}}^k) = [M^k(J_{\text{н}}^k, J_{\text{н}}^{k+1})]^{-1}$$

бўлсин. (19) дан

$$\overline{G}^{k+1} = N^k G^k N^k$$

келиб чиқади. $N^k(J_н^{k+1}, J_н^k)$ матрица

$$
\begin{array}{c}
N^k(J_н^{k+1}, J_н^k) = \left|\begin{matrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\
r^k_{i_0j_1} & \dots & \dots & r^k_{i_0j_0} & \dots & r_{i_0j_{n-m}} \\
0 & \dots & 0 & 0 \; 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \\
0 & \dots & 0 & 0 \; 0 & \dots & 1
\end{matrix}\right| \dots i_0 \\
\vdots \\
j_0
\end{array}
$$

кўринишда бўлади. Шунинг учун $\overline{G}^{k+1}$ матрица G^{k+1} дан, агар $j_0 \in J_0^k$ бўлса, фақат i_0 индексга мос келган қатор ва устунлари билан фарқ қилади; $j_0 = j_k$ бўлганда $\overline{G}^{k+1} = G^k$. Бундан, $j_0 \overline{\in} J_0^k$ бўлганда $G^{k+1} = G^k$ ва $j_0 \in J_0^k$ бўлганда

$$
G^{k+1} = G^k(J_0^{k+1}, J_0^{k+1}) - \frac{\overline{G}^{k+1}(J_0^{k+1}, j_0)\overline{G}^{k+1}(j_0, J_0^{k+1})}{\overline{G}^{k+1}(j_0, j_0)} \tag{22}
$$

эканлиги келиб чиқади;

б) ҳолда (22) га ўхшаш,

$$
G^{k+1} = G^k(J_0^{k+1}, J_0^{k+1}) - \frac{G^k(J_0^{k+1}, i_0)G^k(i_0, J_0^{k+1})}{G^k(i_0, i_0)}
$$

га эга бўламиз;

в) ҳолда $G^{k+1} = G^k$ эканлиги ўз-ўзидан равшан;

г) ҳолда ҳамиша $\alpha^k > 0$ ва шунинг учун

$$
G^{k+1} = \begin{pmatrix} G^k + \dfrac{\gamma^k \gamma^{k'}}{\alpha^k}, & -\dfrac{\gamma^k \operatorname{sign} \Delta^k_{jk}}{\alpha^k} \\ -\dfrac{\gamma^{k'} \operatorname{sign} \Delta^k_{jk}}{\alpha^k}, & \dfrac{1}{\alpha^k} \end{pmatrix}.
$$

3. Усулнинг чеклилиги. 2-бандда баён қилинган усул, умуман айтганда, чекли бўлмайди. Лекин соддагина қўшимча қоида бу муҳим хоссани таъминлаши мумкин.

$$J^k_{kp} = \{ j : j \in J^k_{\text{Н}+},\ x^k_j = 0 \},\ J^k_\Delta = \{ j : j \in J^k_\text{Н} \setminus J^k_{kp},\ \Delta^k_j \neq 0 \}$$

деб олайлик. Режанинг x^k_j, $j \in J^k_{kp}$ компоненталарини *критик* деб атаймиз.

Қўшимча қоида. Ҳар бир итерацияда $J^k_\Delta \neq \varnothing$ бўлганда j_k элемент J^k_Δ дан танлаб олинади, яъни таянч режанинг яхшиланиши, агар мумкин бўлса, унинг критик компоненталарини ўзгартирмасдан амалга оширилади.

2-теорема. Агар баён қилинган усулнинг ишлаш жараёнида қўшимча қоидага риоя қилинган ҳолда, чекли сондаги бузилмаган таянч режалар дуч келса, баён қилинган усул ихтиёрий бошланғич таянч режа учун чеклидир.

Исботи. Агар $\{x^k,\ A^k_\text{Б}\}_{J^k_0}$ — бузилмаган ва оптимал бўлмаган таянч режа бўлса, $\Theta^{k+p} \neq 0$, $p = 0, 1, \ldots$ бўлади. Ҳақиқатан, $|J^k_0| \leqslant n - m$. Агар $\Theta^{k+p} = 0$ бўлса, $\Theta^{k+p} = \Theta^{k+p}_{i_0}$, $i \in J^{k+p}_0$ ва демак, $|J^{k+p+1}_0| = |J^{k+p}_0| - 1$. Шунинг учун шундай $p_0 \leqslant n - m$ сон топиладики, $J^{k+p_0}_0 = \varnothing$ бўлади. Ушбу $\{x^{k+p_0},\ A^{k+p_0}_\text{Б}\}_{J^{k+p_0}_0} = \{x^k,\ A^k_\text{Б}\}_{J^{k+p_0}_0}$ таянч режанинг бузилмаган бўлганлигидан максимал жоиз Θ^{k+p_0} қадам мусбатдир ($\Theta^{k+p_0} > 0$).

Бузилмаган режалар сонининг чеклилиги ҳақидаги фаразга кўра $\Theta^k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ деб ҳисоблаш мумкин.

Ихтиёрий $\{x^k,\ A^k_\text{Б}\}$, $J^k_\Delta \neq \varnothing$ таянч режадан чекли сондаги p итерациялардан сўнг $J^{k+p}_\Delta = \varnothing$ бўлган $\{x^{k+p}, A^{k+p}_\text{Б}\}$ режани қуриш мумкинлигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, мана бундай бўлмасин: ихтиёрий $p > 0$ учун тўплам $J^{k+p}_\Delta \neq \neq \varnothing$. У ҳолда қўшимча қоидага асосан, $J^{k+p}_\Delta \supset J^k_\Delta$ мансублик бажарилади, яъни шундай p_0 сон мавжудки, $|J^{k+p}_{kp}| \equiv \text{const}$, $p \geqslant p_0$ бўлади. Демак, $\Theta^{k+p} = \Theta^{k+p}_j$, $p \geqslant p_0$ ва $|J^{k+p+1}_0| = |J^{k+p}_0| + 1$, $p \geqslant p_0$. Бошқача қилиб айтганда, $p \to \to \infty$ да $|J^{k+p}_0| \to \infty$, бу эса $|J^{k+p}_0| \leqslant n - m$ тенгсизликка зиддир.

Демак, чекли сондаги итерациялардан сўнг $J^k_\Delta = \varnothing$ бўлган $\{x^k,\ A^k_\text{Б}\}_{J^k_0}$ таянч режа қурилади.

Ушбу

$$x' Dx/2 + c'x \to \max, \; Ax = b, \; x(J_+) \geqslant 0, \; x(J^k_{kp}) = 0 \quad (23)$$

масалани қарайлик. $\{x, \; A^k_Б\}_{J^k_0}$ режа — (23) масаланинг оптимал режаси эканлигини кўриш қийин эмас (исботи 1-теорема етарлилигининг исботи кабидир). Агар бунда $\Delta^k(J^k_{kp}) \geqslant 0$ бўлса, у (1) масалада ҳам оптимал бўлади. Акс ҳолда чекли сондаги итерациялардан сўнг $k = k_1$ бўлганда (23) масаланинг ечими бўладиган бошқа x^{k_1} режа қурилади ва унда мақсад функцияси кичикроқ қиймат қабул қилади, чунки, $\theta^k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Шунинг учун (1) масалани ечиш жараёнини (23) турдаги ҳар хил масалалар учун оптимал бўлган режалар кетма-кетлигини қуриш сифатида қараш мумкин. Мақсад функциясининг режадан режага камайишидан (23) масалалардан бирортаси ҳам икки марта такрорланмайди. (23) типдаги ҳар хил масалаларнинг сони чекли ҳамда (1) масаланинг оптимал режаси улардан бири учун оптимал режа бўлганлигидан, (1) масала чекли сондаги итерациялардан сўнг ечилади. 2-теорема иботланди.

Изоҳлар. 1. Агар $D = 0$, x^1 — базис режа бўлса, баён қилинган усули симплекс-усул билан устма-уст тушади.

2. Усулни симметрик D матрицали $Ay = b$, $y(J_+) \geqslant 0$ бўлганда $y' Dy \geqslant 0$ шартни қаноатлантирувчи квадратик масалаларни ечиш учун қўллаш мумкин.

3. Иккинчи тартибли зарурий шартлар назариясида учрайдиган

$$y' Dy \to \min, \quad Ay = 0, \quad y(J_+) \geqslant 0$$

масалани ечиш учун баён қилинган усулни бевосита қўллаб бўлмайди. Бу ҳолда қавариқ бўлмаган квадратик программалаш усуллари қўлланилади.

4. Мисол.

$$x_1^2/2 + x_2^2 - x_1 \; x_2 - 3x_1 - 4x_2 \to \min,$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -x_1 + x_2 \leqslant 5, \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0,$$

масалани қараймиз. x_3, x_4 эркин ўзгарувчиларни киритиб,

$$\frac{1}{2}\, x_1^2 + x_2^2 - x_1 \; x_2 - 3x_1 - 4x_2 \to \min,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \; -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; x_3 \geqslant 0, \; x_4 \geqslant 0$$

каноник шаклга ўтамиз.

Бошланғич таянч режанинг элементлари сифатида $x^1 = \{0, 0, 6{,}5\}$, $A^1_Б = \{a_3, a_4\}$ ларни танлаб оламиз. У ҳолда, $J^1_H = \{1, 2\}$, $r_0 = \{6{,}5\}$,

$$R^1 = \begin{Bmatrix} -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{Bmatrix}, \; Z^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix}, \; z^1_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Бундан

$$H^1 = Z^{1\prime} D Z^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$h_0^1 = \{-3, -4\}, \quad h_{00}^1 = 0.$$

Қўлда ҳисоблаганда жадваллардан фойдаланиш қулайдир. Бошланғич маълумотни икки қисмдан иборат бўлган II.1- жадвалга киритамиз. Жадвалнинг юқори қисми соддалаштирилган симплекс жадвалга ўхшаш (ундан бирлик устунлар йўқотилган) бўлиб, $a_0 = b$ вектор ва $(-a_j)$, $j \in J_{\text{Н}}^1$ векторларнинг a_j, $j \in J_{\text{Б}}^1$ базис бўйича ёйилмаси элементлари r_{ij}^1, $i \in J_{\text{Б}}^1$, $j \in J_{\text{Н}}^{*1}$ лардан иборат. $x_{\text{Н}}$ сатрда $x_{\text{Н}}^{*1} = \{x_0^1, x_{\text{Н}}^1\} = \{1, 0, 0\}$

II.1- жадвал

$a_{\text{Б}} \backslash a_{\text{Н}}$		a_0	a_1	a_2
	$x_{\text{Б}} \backslash x_{\text{Н}}$	1	0	0
a_3	6	6	—2	—1
a_4	5	5	+1	—1
a_0		0	—3	—1
a_1		—3	1	—1
a_2		—4	—1	2 ⇐
$a_{\text{Н}} / \Delta$			—3	—4
				⇑

вектор ёзилган ((11) га қ.). Жадвалнинг пастки қисмига (11) ифодадаги H^{*1} матрицанинг бошланғич базисдаги h_{ij}^1, $i,l \in J_{\text{Н}}^{*1}$ элементлари ҳамда баҳолар вектори $\Delta_{\text{Н}}^1$ нинг Δ_j^1 компоненталари жойлаштирилган. (6) дан кўринадики, Δ_j^1, $j \in J_{\text{Н}}^1$ компонента жадвалнинг юқори қисмидаги $x_{\text{Н}}$ сатр элементларининг жадвалнинг қуйи қисмидаги a_j сатр мос элементларига кўпайтмаларини қўшишдан ҳосил бўлади.

j_k индексни танлаш учун $\Delta_{j_k}^k = \min \Delta_j^k$ қоидадан фойдаланамиз, бу ерда агар $J_\Delta^k \neq 0$ бўлса, $j \in J_\Delta^k$ бўлади. $J_\Delta^k = \varnothing$ бўлганда x_j^k, Δ_j^k сонлар (8) оптималлик шартини қаноатлантирмайдиган $j \in J_{\text{Н}}^k$ лар танланади. Бизнинг ҳолда (биринчи итерацияда $k = 1$) $j_1 = 2$.

a_2 қатор ва устунни стрелкалар билан белгилаймиз. Усулнинг қоидаларига асосан $l^1 = -\varepsilon_2^1 \operatorname{sign} \Delta_2^1 = z_2^1 = \{0, 1, r_{32}^1, r_{42}^1\} = \{0, 1, -1, -1\}$.

ε_2^1 векторнинг r_{j2}^1, $j \in J_Б^1$, компоненталарини жадвалнинг юқори қисмидаги a_2 устундан оламиз. $\theta_3^1 = -x_3^1 / e_3^1 = 6$, $\theta_4^1 = 5$ ҳамда $\theta_f^1 = |\Delta_2^2| / h_{22}^1 = 4/2 = 2$ ларни ҳисоблаймиз (h_{22}^1 — стрелка билан ажратилган қатор ва устунларнинг кесишмасида жойлашган. Демак, $\theta^1 = \theta_f^1$ ва $x^2 = x^1 + \theta^1 l^1 = \{0, 0, 6, 5\} + 2\{0, 1, -1, -1\} = \{0, 2, 4, 3\}$.

Янги таянч $\{x^2, A_Б^2\}$ режа учун $A_Б^2$ базис матрица $A_Б^1$ билан устма-уст тушади. Шунинг учун, янги II.2-жадвалда II.1-жадвалнинг асосий қисми ўзгаришсиз қолади. Фақат режанинг ва баҳолар векторининг компоненталари ўзгаради. Индекси $J_0^2 : J_0^2 = \{2\}$ тўпламга киритилган x_2 компонентага мос келган устун ва сатр II.2-жадвалда юлдузчалар билан белгиланган. Янги таянч режа учун $j_2 = 1$ ни оламиз. x^2 режани яхшилаш йўналиши $l^2 = z_1^2 \operatorname{sign} \Delta_{j_1}^2 + \gamma_2^2 z_2^2$ ни қурамиз. γ_2^2 коэффициентни (15) тенгламадан топамиз. H_0^2 матрица юлдузчалар билан белгиланган устунлар ва қаторларнинг кесишувида жойлашган элементлардан, β^2 вектор эса стрелка билан белгиланган устун ва юлдузчалар билан белгиланган қаторларнинг кесишмасида ётувчи элементлардан иборатдир. Қаралаётган ҳолда $H_0^2 = \{2\}$, $\beta = \{-1\}$ ва шунинг учун $2\gamma_2^2 = 1$ ёки $\gamma_2^2 = \frac{1}{2}$. Демак, $l^2 = z_1^2 + 1/2\ z_2^2 = \{1, 0, -2, 1\} + 1/2 \cdot \{0, 1, -1, -1\} = \{1, 1/2, -5/2, 1/2\}$, $\theta_f^2 = |\Delta_1^2| / (h_{11}^2 - \beta^{2\prime} \gamma^2 \operatorname{sign} \Delta_1^2) = 10$, $\theta_{i_0}^2 = \theta_3^2 = 8/2$, $\theta^2 = \min\{\theta_3^2, \theta_f^2\} = \theta_3^2$.

a_3 векторни базисдан чиқарамиз, унинг ўрнига эса a_2 ни киритамиз, чунки $J_0^2 = \{2\} \neq \varnothing$, $r_{32}^2 = -1 \neq 0$. r_{32}^2 элементни ҳамда кесишувида у ётган сатр ва устунни етакчи деб атаймиз. Етакчи элемент катак ичига олинган. 2-бобда

$$H^{*k+1} = M' (J_Н^{*k}, J_Н^{*k+1}) H^{*k} M (J_Н^{*k}, J_Н^{*k+1}),$$

эканлиги кўрсатилган эди, бу ерда $M (J_Н^{*k}, J_Н^{*k+1})$ матрица (13) таркибга эга. Шунга ўхшаш, кўрсатиш мумкинки, R^{*k+1} матрица

$$\overline{R}^{*k+1} = R^{*k} M (J_Н^{*k}, J_Н^{*k+1})$$

матрицадан i_0 қаторни $\{-r_{i_0}^k 0 / r_{i_0 j_0}^k, \ldots, 1 / r_{i_0 j_0}^k, \ldots, r_{i_0 j_0 n-m}^k / r_{i_0 j_0}^k\}$ қаторга алмаштириш ёрдамида олинади.

Бу формулалар II.2-жадвалда икки босқичда амалга оширилади.

I босқич. а) Етакчи устуннинг (етакчи элементдан бошқа) $r_{ij_0}^k$, $i \neq i_0$, $i \in J_Б^k$; $h_{jj_0}^k$, $j \in J_Н^{*k}$ элементларини $r_{i_0 j_0}^k$ бўламиз;

б) етакчи қаторнинг (етакчи элементдан бошқа) $r^k_{i_0 j}$, $j \in J^{*k}_{\text{Н}}$, $j \neq j_0$ элементларини $(-r^k_{i_0 j_0})$ га бўламиз;

в) қолган r^{k+1}_{ij}, $i \in J^{k+1}_{\text{Б}} \setminus i_0$, $j \in J^{*k+1}_{\text{Н}} \setminus i_0$; $\bar{h}^{k+1}_{ij}$, i, $j \in J^{*k+1}_{\text{Н}}$, $j \neq i_0$, элементларни тўғри тўртбурчак қоидаси бўйича ҳисоблаймиз;

г) етакчи элементнинг ўрнига унга тескари бўлган миқдор ёзилади.

II.2- ж а д в а л

$a_{н}$ \ $a_{б}$		a_0	a_1	a_2
	$x_{н}$ \ $x_{б}$	1	0	2
a_3	4	6	-2	$\boxed{-1}$
a_4	3	5	1	-1
a_0		0	-3	-4
a_1		-3	1	-1
a_2		-4	-1	2
$a_{н}$ / Δ			-5	0

*

II.3- ж а д в а л

$a_{н}$ \ $a_{б}$		a_0	c_1	a_3
	$x_{н}$ \ $x_{б}$	1	8/5	0
a_3	14/5	6	-2	-1
a_4	19/5	-1	3	1
a_0	6	-24	5	4
a_1	-2	-3	3	1
a_2	$\boxed{-1}$	8	-5	-2
$a_{н}$ / Δ				

I босқичдан сўнг олинган II.3- жадвал оралиқ жадвал деб аталади. Унинг юқори қисмидаги элементлар R^{*3} матрицанинг мос элементларидан иборат ва улар охиригача ҳисобланган. Пастки қисмда $\bar{H}^{*k+1} = \bar{H}^{*3} = M^{*2} H^{*3}$ матрицанинг элементлари жойлашган. $H^{*k+1} = H^{*3} = M^{*2} \bar{H}^{*3}$ матрицанинг $h^{k+1}_{ij} = h^{3}_{ij}$ элементларини ҳосил қилиш учун жадвалнинг фақат пастки қисми ўзгартириладиган иккинчи босқичга ўтамиз.

II б о с қ и ч. а) Оралиқ жадвалнинг II.1- жадвал ва II.2- жадваллярда бўш қолган устунига олдинги жадвалдаги етакчи сатрнинг $x^k_{i_0 j}$ $j \in J^{*k}_{\text{Н}}$ элементларини ёзамиз.

б) a_{i_0} сатрни (энди унда етакчи элемент $r^k_{i_0 j_0}$ ётади) $r^k_{i_0 j_0}$ га бўламиз;

в) қолган h^{k+1}_{ij}, $i \in J^{k+1}_{\text{Н}} \setminus i_0$, $j \in J^{k+1}_{\text{Н}}$ элементларни оралиқ жадвалнинг пастки қисмида $r^k_{i_0 j_0}$ етакчи элемент бўлган тўғри тўртбурчак қоидаси бўйича ҳисоблаймиз.

Иккинчи босқичдан сўнг ҳосил бўлган II.4- жадвал бўйича $\Delta^3_{\text{Н}}$ баҳолар векторини ҳисоблаб, $j_3 = 1$ ни оламиз. $J^3_0 = \varnothing$ бўлганлигидан $l^3 = \{1, -2, 0, 3\}$ ва $\theta^3 = \theta^3_j = 21/65$. Янги x^4 режага мос II.5- жад-

II.4- жадвал

$a_Б$ \ $a_{Н}$		a_0	a_1	a_3
	$x_Б$ \ $x_Н$	1	8/5	0
a_2	14/5	6	—2	—1
a_4	19/5	—1	3	1
a_0		24	—25	—8
a_1		—25	13	5 ⇐
a_3		—8	5	2
			—21/5	0

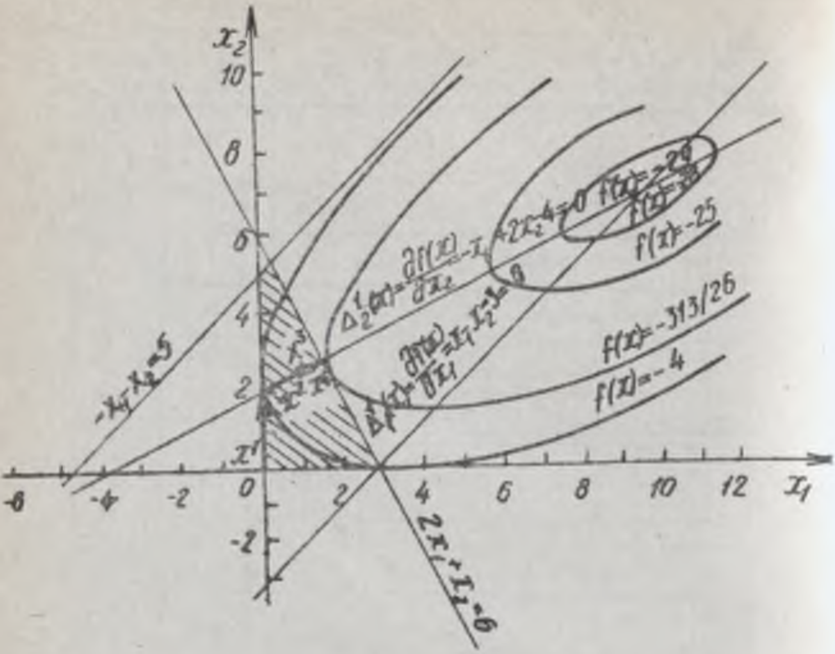
⇑

II.5- жадвал

$a_Б$ \ $a_Н$		a_0	a_1	a_3
	$x_Б$ \ $x_Н$	1	25/13	0
a_2	28/13	6	—2	—1
a_4	62/13	—1	3	1
a_0		24	—25	—8
a_1		—25	13	5 *
a_3		—8	5	2
$a_Н$ / Δ			0	21/13

*

вал II.4- жадвалдан фақат баҳолар вектори ва режанинг компонентала- ри билан фарқ қилади. У оптималлик шартларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас. Демак, $x^4 = \{25/13, 28/13, 0, 62/13\}$ оптимал ре- жадир. II.10- чизмада итерацияларнинг геометрик намойиши кўрсатил- ган.



II.10- чизма

АДАБИЁТ

1. *Кюнци Г. П.*, *Крелле В.* Нелинейное программирование. —М.; Сов. радио, 1962.

2. *Пшеничный Б. Н.*, *Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.

3. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

III боб. **ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ**

Чизиқсиз программалаштириш деб математиканинг чекли ўлчовли фазолар тўпламларида функцияларни оптималлаштириш масаласи ўрганиладиган бўлимига айтилади. Мазкур бобда чизиқсиз программалаштиришнинг назарияси баён қилинади. Чизиқсиз программалаштиришнинг *ҳисоблаш усуллари* IV бобда баён қилинади.

1-§. ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШТИРИШНИНГ УМУМИЙ МАСАЛАСИ

Чизиқсиз программалаштириш масаласи умумий ҳолда ўта содда кўринишга эга. Лекин унга доир тўлиқ натижалар маълум эмас. Мавжудлик теоремаларининг ўзи ҳам масаланинг элементларидан маълум аниқ хоссаларга эга бўлишни талаб қилади. Шу сабабли чизиқсиз программалашниг умумий масаласи фақат аниқ масалалар кўринишида текширилади.

1. Ечимнинг мавжудлик критерийси. X чекли ўлчовли R_n фазодан олинган тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг x элементларини, I бобдагидек, *режалар* (*жоиз нуқталар, векторлар*) деб атаймиз. Фараз қилайлик, режалар тўплами X да *мақсад функцияси* деб аталган $f(x)$, $x \in X$, функция*) аниқланган бўлсин. *Чизиқсиз программалаштиришнинг умумий масаласи*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X. \qquad (1)$$

режалар тўпламида мақсад функциясини минималлаштиришдан иборатдир. $f(x) \to \max$, $x \in X$, максималлаштириш масалалари $f(x)$ ни $-f(x)$ га алмаштириш ёрдамида (1) масалага келтирилади.

(1) масаланинг x° ечими:

$$f(x^\circ) = \min f(x), \quad x \in X,$$

оптимал режа деб аталади.

Ҳар қандай (1) кўринишдаги масала ҳам ечимга эга бўлавермайди.

III.1-чизмада (1) масаланинг энг содда мисоллари келтирилган бўлиб, уларда ҳар хил сабабларга кўра оптимал режалар мавжуд эмас. (1) масаланинг ечимлари мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни ифодалаш учун қуйидан ярим узлуксиз бўлган функциялардан фойдаланилади.

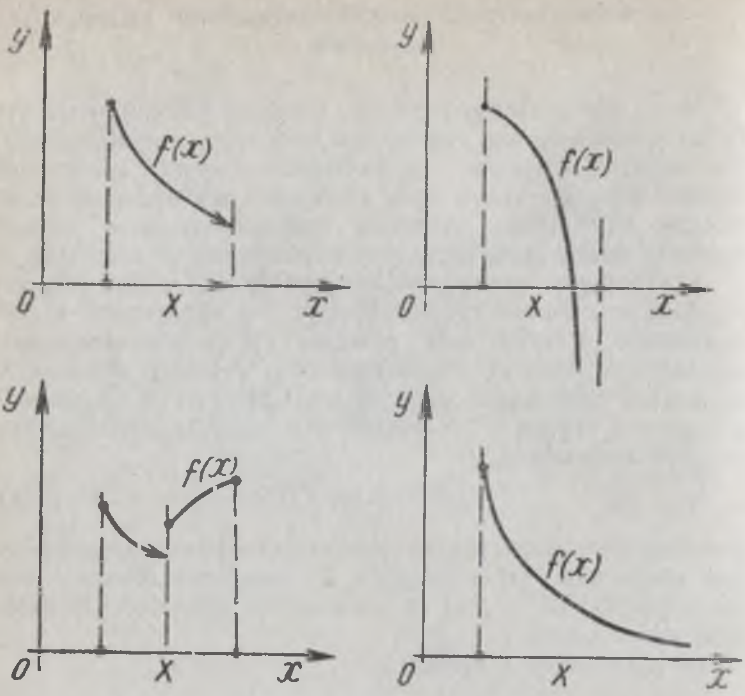
Агар X да аниқланган $f(x)$ функция учун

$$\underline{\lim}\, f(x) = f(x^*), \quad x \to x^*, \quad x \in X,$$

бажарилса, бу функция $x^* \in X$ нуқтада *қуйидан ярим узлуксиз* дейилади. Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир

---

* Ҳамма жойда $f(x)$ функция скаляр функция ҳисобланади; вектор-функция бўлган ҳол 6-§ да алоҳида қаралади.



III.1- чизма

нуқтасида ярим узлуксиз бўлса, у X тўпламда ярим узлуксиздир.

$$\{x : f(x) \leqslant c\} \qquad (2)$$

тўплам (бу ерда c скаляр) $f(x)$ функциянинг (*c қийматли*) *сатҳ тўплами* деб аталади.

R_n да аниқланган $f(x)$ функциянинг сатҳ тўплами бўш ёки ёпиқ тўплам бўлганда ва фақат шунда бу функция қуйидан ярим узлуксиз бўлади.

$\{x : f(x) \geqslant \min f(x)\}$ тўплам *минимал сатҳ тўплами* деб аталади.

1-теорема (чизиқсиз программалаштириш масалалари ечимларининг мавжудлик критерийси). (1) масаланинг ечими мавжуд бўлиши учун бирор $c\ (-\infty < c < +\infty)$ да $f(x)$ мақсад функциянинг сатҳ тўплами минимал сатҳ тўпламидан ёки бўш бўлмаган компактдан (унда $f(x)$ қуйидан ярим узлуксиз бўлган) иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурлиги.* Агар X° — оптимал режалар тўпламидан иборат бўлса, $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $c = f(x^{\circ})$, $x^{\circ} \in X^{\circ}$, сатҳ тўплами X° билан устма-уст тушади ва унда $f(x)$ функция қуйидан ярим узлуксиз бўлади: $f(x) = f(x^{\circ})$, $x \in X^{\circ}$. Зарурлиги исботланди.

Етарлилиги. Минимал сатҳ бўлган ҳол ўз-ўзидан аён. Фараз қилайлик, бирор $-\infty < c < \infty$ учун (2) сатҳ тўплами бўш бўлмасин ва компакт бўлсин. Равшанки, ҳар бир оптимал режа, агар у мавжуд бўлса, шу тўпламга қарашли бўлади. Шунинг учун (1) масалада X тўпламни қурилган сатҳ тўплами балан алмаштириш мумкин. Вейерштрасс теоремасига асосан, қуйидан ярим узлуксиз бўлган ҳар қандай узлуксиз функция компактда минимумга эришади. Демак, (1) масала x° ечимга эга. Теорема исботланди.

Кўпинча (2) тўпламнинг компактлигини текшириш учун қуйидаги фактдан фойдаланилади: қуйидан ярим узлуксиз бўлган *чексиз катта*

$$\|x\| \to \infty \text{ да } f(x) \to \infty, \tag{3}$$

функциянинг сатҳ тўплами ихтиёрий c учун компактдир.

Ҳақиқатан, агар бирор c_* да (2) тўплам компакт эмас деб олсак, у чегараланмаган бўлади ва (2) тўпламда ($c = c_*$) шундай x^k, $k \to \infty$ кетма-кетлик топиладики, $\|x^k\| \to \infty$ бўлади. (3) га асосан, бирор $k_0 < \infty$ учун $f(x^{k_0}) > c_*$ тенгсизлик бажарилади, бу эса (2) га зиддир.

Кучли қавариқ функциялар чексиз катта бўладилар: ($\|x\| \to \infty$ да $f(x) = f(0) + x' \partial f(0)/\partial x + x' [\partial^2 f(\bar{x})/\partial x^2] x/2 \geqslant f(0) + x' \partial f(0)/\partial x + \mu \|x\|^2 \to \infty$. Шунинг учун бундай мақсад функциясига эга бўлган (1) масала ихтиёрий ёпиқ режалар тўпламида ечимга эга бўлади. Қатъий қавариқ мақсад функциялари бундай хоссага эга эмас. Масалан, $f(x) = \exp(-x) \to \min$, $x \geqslant 0$, $x \in R_1$ масала $\partial^2 f(x)/\partial x^2 = \exp(-x) > 0$, $x \geqslant 0$, бўлса-да ечимга эга эмас.

Махсус масалалар учун текшириш қулай бўлган ечимларнинг мавжудлик теоремалари исботланган. Масалан, квадратик қавариқ программалаштириш масалаларида ечимларнинг мавжуд бўлиши учун мақсад фукциясининг планлар тўпламида қуйидан чегараланган бўлиши етарлидир. Келтирилган мисоллардан охиргиси кўрсатадики, квадратик бўлмаган масалалар учун ундай эмас.

2. Масалаларнинг таснифи (классификацияси). (1) *масаланинг* X, $f(x)$ *элементларига* нисбатан I бандда қабул қилинган умумий шартларда унинг оптимал режалари ҳақида бирор қизиқ ва фойдали маълумот олиб бўлмайди. Шунинг учун (1) масала амалда кенг қўлланилувчи турли хил масалалар синфларини келтириб чиқарадиган ва оптимал режанинг синфга мос хоссалари муфассал баёни учун имкон берувчи X, $f(x)$ ларга нисбатан қўшимча шартларда текширилади.

Аввал чизиқсиз программалаштиришдан I-бобда ўрганилган чизиқли программалаштириш масалалари синфи ажратилади. Ундан сўнг қавариқ программалаштириш масалалари алоҳида ўрганилади (II боб). Ҳозирги пайтда (1) дан X, $f(x)$ элементларнинг қўшимча хоссалари билан ажралиб турадиган масалалар синфларининг сони каттадир. Бу синфларнинг ҳар бирининг номида одатда, «*программалаштириш*» сўзи қатнашади.

Мазкур бобда (1) масаланинг тўртта асосий тури ўрганилади: 1) $X = R_n$ бўлган *шартсиз минимум масаласи*; 2) $X = \{x : g(x) = 0\}$, $g(x)$—m векторли функция бўлган *шартли минимум масаласи*; 3) $X = \{x : g(x) \leqslant 0\}$ бўлган *чеклашлар тенгсизликлар типидаги минималлаштириш масаласи*; 4) $f(x)$ — вектор-функция бўлган *векторли оптималлаштириш масаласи*. (1) масаланинг бешинчи типи, яъни X — режаларнинг дискрет (чекли) тўплами бўлган масала (*дискрет программалаштириш масаласи*) минималлаштиришнинг ҳисоблаш усуллари билан боғлиқ ҳолда IV, V бобларда қаралади.

2-§. ШАРТСИЗ МИНИМУМ МАСАЛАСИ

Умумий қўйилган чизиқсиз программалаштириш масаласи (1-§) учун оптимал режани излашнинг универсал усули мақсад функциясининг режалар тўпламидаги қийматларини танлашдан иборатдир. Бу усул ҳозирги замон ЭҲМ ларида ҳам жуда кам амалга оширилади. Шунинг учун экстремал масалалар, одатда, дастлабки математик тадқиқотларга жалб қилинади. Минималлаштириш масалаларини текшириш бир томондан, оптимал режаларга хос бўлган ва танлаш ҳажмини камайтириш имконини берадиган хоссаларни (*минимумнинг зарурий шартларини*), иккинчи томондан, бажарилиши режанинг оптималлигини таъминловчи муносабатларни (*минимумнинг етарли шартлари*) ҳосил қилишдан иборатдир. Минимумнинг зарурий шартини қаноатлантирадиган оптимал бўлмаган режалар сони қанча кам бўлса зарурий шарт шунча кучли ҳисобланади. Минимумнинг етарлилик шартлари эса оптимал режалари шу шартларни қаноатлантирадиган масалалар синфи қанча кенг бўлса шунча кучли ҳисобланади.

Минимумнинг зарурий шартлари ичида энг кучлиси шундан иборатки, у минимумнинг етарли шарти билан устма-уст тушиб, *минимум критерийсини* ташкил қилади. Агар умумий, текширилиши қийин бўлган натижаларни ҳисобга олмасак, минимум критерийлари чизиқсиз программалаш масаласининг нисбатан кўп бўлмаган синфлари учунгина маълум (I, II бобларга қ.). Кенг тарқалган, қандайдир маънода осон текшириладиган минимумлик шартлари мураккаб масалалар учун ё зарурий, ёки етарли бўлиб, бир томонлама характерга эга. Зарурий ва етарли шартлар бўйича тадқиқотлар уларни яқинлаштириш мақсадида ҳар иккала турдаги шартларни чуқурлаштириш йўналиши бўйлаб ривожланмоқда. Бунда агар минимумнинг шарти ифодасида масала элементларининг k — тартибгача ҳосилалари иштирок этса, минимум шартига k тартиб қўшилади.

1. Минимумнинг биринчи тартибли зарурий шарти. Стационар нуқталар. Ушбу

$$f(x) \to \min, \ x \in R_n, \tag{1}$$

шартсиз минимум масаласини $f(x)$ функция (масаланинг элементи) ҳар бир $x \in R_n$ нуқтада $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар бўйича барча хусусий ҳосилалари билан бирга аниқланган ва узлуксиз, яъни $f(x) \in c^{(1)}$ бўлган ҳолда қараймиз.

1-таъриф. Агар

$$f(x^0) = \min f(x), \ x \in R_n,$$

бўлса, x^0 нуқта *оптимал режа* ((1) масаланинг ечими *абсолют* ёки *глобал минимум нуқтаси*) деб аталади.

2-таъриф. Бирор $\varepsilon > 0$ учун

$$f(x^0) = \min f(x), \ \|x - x^0\| \leqslant \varepsilon, \ x \in R_n,$$

муносабатлар бажарилса, x_0 нуқта локал оптимал режа (*нисбий* ёки *локал* минимум *нуқтаси*) дейилади.

Ҳар бир оптимал режа ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун локал оптимал режадан иборат бўлади (лекин аксинча эмас). Бундан буён, кўп ҳолларда локал оптимал режалар ҳақида гап боради ва (1) масаланинг ечими ҳақида гап борганда уларни тушунамиз. Локал оптимал режа учун минимумнинг ҳар қандай зарурий шарти глобал оптимал режа учун ҳам минимумнинг зарурий шарти бўлади (лекин аксинча эмас).

Қавариқ программалаштириш масалаларида ҳар бир локал оптимал режа глобал оптимал режа ҳам бўлади. Ҳақиқатан, агар $x^0 \in X$ глобал оптимал режа, $x^* \in X$ локал оптимал режа ва $f(x^0) < f(x^*)$ бўлса, қавариқ функциянинг таърифидан $\lambda \in [0,1]$ бўлганда, x^* режанинг локал оптималлигига зид бўлган

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^0) \leqslant \lambda f(x^*) +$$
$$(1-\lambda)f(x^0) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^*) = f(x^*)$$

тенгсизликни оламиз, чунки кичик $(1-\lambda) > 0$ лар учун $\lambda x^* + (1-\lambda)x^0 \in X$ нуқта x^* режанинг етарли кичик атрофига тушади.

$f(x)$ функциянинг хусусий ҳосилаларидан ташкил топган $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ векторни шу функциянинг градиенти $(\mathrm{grad}\, f(x))$ деймиз ва $\frac{\partial f}{\partial x}$ орқали белгилаймиз.

1-теорема. Ҳар бир локал оптимал режа x^0 да *стационарлик шарти* бажарилади:

$$\partial f(x^0)/\partial x = 0, \tag{2}$$

яъни $\mathrm{grad}\, f(x^0) = 0$ бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик, x^0 режада (2) тенглик бажарилмасин, яъни $\partial f(x^0)/\partial x \neq 0$. x^0 нуқтадан ушбу

$$l'_* \partial f(x^0)/\partial x < 0 \tag{3}$$

шартни қаноатлантирадиган l_* йўналиш бўйича ҳаракат бошлаймиз, яъни $x(t) = x^0 + l_* t$, $t \geqslant 0$ траекторияни қараймиз. Бу ҳаракатда мақсад функциясининг $t = 0$ моментдаги ҳосиласи, (3) ни ҳисобга олсак,

$$\frac{d}{dt} f(x(t))/_{t=0} = \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l_* < 0$$

бўлади. Демак, барча етарлича кичик $t > 0$ лар учун x^0 режанинг оптималлигига зид бўлган

$$f(x(t)) < f(x^0) \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилади. Теорема исботланди.

Келтирилган исбот конструктив бўлиб, агар x^0 режа оптималликнинг биринчи тартибли зарурий шарти (2) ни қаноатлантирмаса, x_0 режани (4) маъносида яхшилашнинг содда

$x(t) = x^0 + l_*'$ қоидасини кўрсатади. Шу каби қоидалар (1) масалани ечишнинг тўғри усуллари асосида ётади (IV-боб).

Ушбу

$$\operatorname{grad} f(x) = 0 \qquad (5)$$

тенгламанинг ечимлари $f(x)$ *функциянинг стационар нуқталари* деб аталади. Шундай қилиб, 1-теоремага асосан, оптимал режалар (агар умуман мавжуд бўлсалар) мақсад функциясининг стационар нуқталари орасида ётади. Шу сабабли оптимал режаларга эга бўлган (1) масаланинг ечимини қуриш учун мақсад функциясининг стационар нуқталарини топиб, уларда $f(x)$ функциянинг қийматларини таққослаш ва энг яхшисини танлаб олиш етарлидир. Агар танлаш барча стационар нуқталар бўйича бўлса, натижада глобал оптимал режа олинади.

1-теорема (1) масалани (5) тенгламани ечишга келтиради. (5) тенгламанинг мураккаб бўлишига қарамасдан, умумий ҳолда (1) масалани ечишнинг бу (бевосита бўлмаган) усули амалиётда анча вақтдан бери ва кенг қўлланилади. Кўпгина қизиқ муҳим илмий ва амалий масалаларни назарий текшириш ва сонли ечишда у қимматли натижаларга олиб келди.

1-мисол. $f(x) = x^2 - 3x - 1$ бўлсин. $\{x : x^2 - 3x - 1 \leqslant 0\}$ тўплам бўш эмас ($x = 0$ нуқтани ўзида сақлайди), ёпиқ ва чегараланган ($|x| \to \infty$ да $f(x) \to \infty$). Оптимал режалар мавжуд ва (2) тенгликни қаноатлантиради: $\partial f/\partial x = 2x - 3 = 0$. Бу тенглама ягона $x^* = 3/2$ ечимга эга. Демак, $x^* = 3/2$ оптимал (глобал) режадир.

2-мисол. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_1$. (5) стационарлик тенгламалари

$$2x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad 2x_2 - 2x_1 = 0$$

биргаликда эмас. Бу эса (1) масала ечимга эга эмаслигини англатади. Бу ҳолда $f(x)$ ни максималлаштириш масаласи ҳам ечимга эга эмас, чунки осонгина кўриш мумкинки, максимумнинг зарурийлик шарти (2) билан устма-уст тушади.

3-мисол. $f'(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$. Стационарлик тенгламалари

$$2x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \; -2x_2 - 2x_1 = 0$$

ягона $x_1^* = -x_2^* = -1/4$ ечимга эга бўлиб, бу ечим (1) масаланинг оптимал режаси бўлмайди, чунки

$$f(-1/4,\ 1/4) = -1/8 > -1 = f(0,\ 1).$$

2,3-мисолларнинг «ғалати» натижалари уларнинг ечимга эга бўлмаслиги билан боғлиқдир.

2. **Минимумнинг иккинчи тартибли зарурий шарти.** $f(x) \in C^{(2)}$ бўлсин. $f(x)$ функциянинг стационар нуқталари ичидан умуман олганда оптимал бўлмайдиганларини чиқариб

ташлаб, танлашни қисқартиришга имкон берувчи шартларни топамиз.

2-теорема. Ҳар бир x^0 оптимал режада мақсад функциясининг иккинчи тартибли ҳосилалари матрицаси манфий бўлмайди:

$$\partial^2 f(x^0)/\partial x^2 \geqslant 0 \tag{6}$$

Исботи. Фараз қилайлик, (6) га зид шундай n вектор l^* мавжуд бўлсинки,

$$l'_* \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l_* < 0 \tag{7}$$

бажарилсин.

Ушбу $x(t) = x^0 + l_* t,\ t \geqslant 0$ траекторияни қурайлик. 1-теоремага асосан, биринчи тартибли ҳосила $df(x(t))/dt|_{t=0}$ нолга тенг. Иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз ва (7) ни ҳисобга оламиз:

$$\left.\frac{d^2 f(x(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left.\left(\frac{\partial f'(x(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right|_{t=0} = \frac{dx'(t)}{dt}\cdot\frac{\partial^2 f(x(t))}{\partial x^2}\times$$

$$\times\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} + \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x}\cdot\left.\frac{d^2 x}{dt^2}\right|_{t=0} = l'_*\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l_* < 0.$$

Шундай қилиб, барча етарли кичик $t > 0$ лар учун яна x^0 нинг оптималлигига зид бўладиган (4) тенгсизлик бажарилади. Теорема исботланди.

Изоҳлар. 1.1,2-теоремаларда тўғри чизиқ бўйлаб $x(t) = x^0 + l_* t$ содда ҳаракатдан фойдаланилди. Текшириб кўриш мумкинки. 1-теоремани исботлаш учун (лекин 2-теоремани эмас) фақат координата ўқлари бўйича ҳаракат қилишнинг ўзи етарли ($x(t) = x^0 + e_j t,\ j = \overline{1,n}$). Мураккаброқ ҳаракатлар, масалан, $x(t) = x^0 + lt + pt^2,\ t \geqslant 0$, 1,2-теоремаларни кучайтириш имконини бермайди.

2. (6) ни Сильвестр критерийси ёрдамида текшириш катта n лар учун кўп меҳнат талаб қилади. Бу ҳолда, сонли усуллар ёрдамида

$$l'\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l \to \min,\ l \in R_n$$

минимум ҳақидаги, қўшиб олинган масала ечилади.

4-мисол. $f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$. Стационарлик тенгламалари:

$$-2x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2) = 0,\quad -2x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2) = 0$$

(6) шарт бажарилмайдиган, ягона $x_1^* = x_2^* = 0$ ечимга эга бўлади; бу шартда

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0.$$

(1) масала ечимга эга эмас.

2,4-мисоллар кўрсатадики, минимумнинг зарурий шартлари ёрдамида оптимал режаларнинг йўқлигини ҳам исботлаш мумкин экан.

3. Локал минимумнинг етарлилик шарти. Минимумнинг зарурийлик шартларини юқори тартибли ($k > 2$) ҳосилаларни жалб қилган ҳолда кучайтириш $n \geqslant 2$ бўлганда қуйидаги иккита сабабга кўра ривожлана олмади: 1) шартларни текшириш кескин мураккаблашади; 2) шундай масалалар мавжудки, уларда юқори тартибли ҳосилаларни жалб қилиш ҳам стационар нуқталар тўпламидан барча оптимал бўлмаган режаларни чиқариб ташлашга имкон бермайди. Шунинг билан бирга 2-банднинг шартларида исботланган минимумнинг зарурий шартларини бироз ўзгартириш *минимумнинг етарлилик шартини* олиш имконини беради.

3-теорема. Агар x^* стационар нуқтада

$$\partial^2 f(x^*)/\partial x^2 > 0 \tag{8}$$

бўлса, бу нуқта локал оптимал режа бўлади.

Исботи. 1,2-бандлардаги ҳисоблашларга кўра x^* нуқтанинг стационарлиги ва (8) тенгсизликка асосан ҳар бир $x(t) = x^* + lt$, $\|l\| = 1$, ҳаракат бўйлаб

$$\left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{d^2 f(x(t))}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$$

муносабатлар бажарилади. Шунинг учун ҳар бир l, $\|l\| = 1$, учун шундай $t(l) > 0$ топиладики, барча $0 < t < t(l)$ лар учун

$$f(x(t)) > f(x^*) \tag{9}$$

тенгсизлик бажарилади.

$\|l\| = 1$ тўпламнинг ихчамлигидан шундай ўзгармас сон $t_* > 0$ нинг мавжуд бўлиши келиб чиқадики, (9) тенгсизлик барча t, l, $\|l\| = 1$, $0 < t < t_*$ лар учун ўринлидир. Бу эса x^* нинг локал минимум нуқтаси эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

3-теореманинг исботидан кўринадики, унинг шартларини қаноатлантирувчи x^* нуқта *қатъий локал минимум нуқтасидир*: бирор $\varepsilon > 0$ ва барча $x \in R_n$, $x \neq x_*$, $\|x - x^*\| \leqslant \varepsilon$ лар учун

$$f(x^*) < f(x). \tag{10}$$

Шунинг учун, 3-теоремадаги минимумнинг етарлилик шартидан фақат локал оптимал режалари (10) муносабатларни қаноатлантирадиган масалалар учун фойдаланиш мумкин.

4. Бир ўлчовли масалаларда минимумнинг юқори тартибли зарурий шартлари. Скаляр ҳолда ($n=1$) 2,3-теоремалар етарли самарали (текшириш учун) умумлашмага эгадирлар.

4-теорема. Агар $f(x)\in C^{(k)}$ функция учун x^* нуқтада

$$df(x^*)/dx=0,\ \ldots,\ d^{k-1}f(x^*)/dx^{k-1}=0,\ d^kf(x^*)/dx^k\neq 0,$$

муносабатлар бажарилиб, 1) k — жуфт ва $d^kf(x^*)/dx^k>0$ бўлса, x^* — (қатъий) локал минимум нуқтаси бўлади: 2) k — жуфт ва $d^kf(x^*)/dx^k<0$ бўлса, x^* — (қатъий) локал максимум нуқтаси бўлади; 3) k — тоқ сон бўлса, x^* — минимум нуқтаси ҳам, максимум нуқтаси ҳам бўлмайди.

Исботи анализ курсида берилган.

5. Кесмада ва содда чеклашлар учун минимум шартлари. 2, 3-теоремаларининг исботи

$$f(x)\to\min,\ x\in[a,b],\ x\in R_1$$

масалага осон кўчирилади.

5-теорема. a (b) нуқтанинг локал оптималлиги учун

$$df(a)/dx\geqslant 0\quad (df(b)/dx\leqslant 0)$$

тенгсизлик зарур,

$$df(a)/dx>0\quad (df(b)/dx<0)$$

тенгсизлик эса етарлидир.

Натижа. Агар $x^0=\{x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\}$ — *содда чеклашли*

$$f(x)\to\min,\ x\geqslant 0,\ x\in R_n$$

масаланинг ечими бўлса,

$$x_i^0>0,\ \text{бўлганда}\ \partial f(x^0)/\partial x_i=0,$$

$$x_i^0=0,\ \text{бўлганда}\ \partial f(x^0)/\partial x_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,n}.$$

3-§. ШАРТЛИ МИНИМУМ МАСАЛАСИ

Бу масала ҳам бундан олдинги параграфдаги масала каби анализ курсларида муфассал текширилади. Мазкур курсга материалнинг қўйилишидан асосий мақсад баён қилишнинг тўлиқлиги ва экстремал масалаларни теширишнинг бир неча ҳозирги замон усулларини кўрсатишдан иборатдир.

1. Умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидаси. Ушбу

$$f(x)\to\min,\ g(x)=0 \tag{1}$$

шартли минимум масаласини унинг элементлари ($f(x)$ функция ва $g(x)$ функциянинг $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ компонентлари $C^{(1)}$ синфга қарашли бўлган ҳолда қараймиз.

1-таъриф. Агар x^0 режа ($g(x^0) = 0$)

$$f(x^0) = \min f(x), \ g(x) = 0$$

муносабатларни каноатлантирса, у (*глобал*) *оптимал режа* (1) *масаланинг ечими, шартли глобал (абсолют) минимум нуктаси)* деб аталади.

2-таъриф. Агар бирор $\varepsilon > 0$ учун x^0 режа

$$f(x^0) = \min f(x), \ g(x) = 0, \ \|x - x^0\| \leqslant \varepsilon$$

муносабатларни қаноатлантирса, у *нисбий оптимал режа* (шартли локал *(нисбий) минимум нуқтаси*) деб аталади.

(1) масалани ечишнинг содда (ўз ғояси бўйича) усули *номаълумларни йўқотиш усули* ҳисобланади. $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ тенгламалардан m та номаълум, масалан, дастлабки, $x_1 = h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ номаълумлар йўқотилади. Бу қийматлар мақсад функциясига келтириб қўйилади. Натижада $n-m$ та $x_{m+1}, \ldots, x_n$ номаълумга нисбатан шартсиз минимум масаласи

$$\varphi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \to \min \qquad (2)$$

яъни, (1) масалага эквивалент бўлган (текширинг!) масала ҳосил бўлади: а) агар $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ (1) масаланинг ечими бўлса, $\{x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\}$ (2) масаланинг ечими бўлади; б) агар $\{x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\}$ (2) масаланинг ечими бўлса, $\{h_1(x_{m+1}^0 \ldots, x_n^0), \ldots, h_m(x_{m+1}^0, \ldots x_n^0), x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\}$ (1) масаланинг ечими бўлади.

Чизиқсиз $g(x)$ функциялар учун номаълумларни йўқотиш усули, одатда, қийин амалга оширилади, лекин кўпчилик чизиқли $g(x) = Ax - b$ функцияли масалалар учун ҳозирги замон алгоритмларида кенг қўлланилади. Хусусан, симплекс усулни (I боб) номаълумларни йўқотиш усулининг амалга оширилиши сифатида таҳлил қилиш мумкин.

Шартли минимум масалаларини тадқиқ қилишнинг иккинчи (классик) усули — *Лагранж кўпайтувчилари усулидир.* Бу усул ҳозирги замон иккиланмалик назариясини (II боб) олдиндан башорат қилиб, чизиқли программалашнинг дастлабки иккиланмалик муносабатларини (I-боб) кашф этишда катта роль ўйнади.

Юқоридаги (1) масаланинг элементларидан умумлашган (*кенгайтирилган*) $m+1$-*Лагранж вектори* $\overline{\lambda}=\{\lambda_0, \lambda\}$ (унинг компоненталари: λ_0—скаляр, $\lambda=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$—*Лагранж* m *вектори*; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$— Лагранж кўпайтувчилари) ёрдамида

$$F\ (x, \overline{\lambda}) = \lambda_0 f\ (x) + \lambda' g\ (x) \tag{3}$$

умумлашган Лангранж функциясини тузамиз.

1-теорема (умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидаси). (1) масаланинг ҳар бир x^0 нисбий оптимал режаси учун шундай н о л ь б ў л м а г а н умумлашган Лагранж вектори $\overline{\lambda}_0 \neq 0$ мавжуд бўладики, унинг учун

$$\partial F\ (x^0, \overline{\lambda}^0)/\partial x = 0 \tag{4}$$

бўлади, яъни x^0 (3) умумлашган Лагранж функциясининг $\overline{\lambda}=\overline{\lambda}^0$ бўлгандаги стационар нуқтаси бўлади.

Умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидасининг ажойиб исботи *ошкормас функция ҳақидаги теоремага* асосланган: агар m-вектор функция $g\ (x, z)$ (бунда $y \in R_m$, $z \in R_p$)-вектор функция $\{a, b\}$, $a \in R_m$, $b \in R_p$ нуқтанинг атрофида аниқланган ва у ерда y бўйича дифференциалланувчи ҳамда

$$g\ (a, b) = 0, \ \det \left\{ \frac{\partial g_1 (a, b)}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial g_m (a, b)}{\partial y} \right\} \neq 0$$

муносабатларни қаноатлантирса, шундай $\beta_0 > 0$ сон ва узлуксиз $h\ (z)$, $(\|z-b\| \leqslant \beta_0)$ m-вектор-функция топиладики,

1) $g\ (h\ (z), z) = 0$, $\|z-b\| \leqslant \beta_0$;

2) $h\ (b) = a$;

3) агар $g\ (y, z) \in C^{(k)}$ бўлса, $h\ (z) \in C^{(k)}$ бўлади.

1-т е о р е м а н и н г и с б о т и. $m \geqslant n$ учун теорема тривиал. Дейлик, $m < n$ бўлсин. (3) га асосан (4) ифода

$$\lambda_0^0 \frac{\partial f\ (x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i (x^0)}{\partial x} = 0, \ \overline{\lambda}^0 \neq 0,$$

кўринишни олади ва демак.

$$\frac{\partial f\ (x^0)}{\partial x}, \frac{\partial g_1 (x^0)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial g_m (x^0)}{\partial x} \tag{5}$$

векторлар чизиқли боғланганлигини англатади. Фараз қилайлик, теорема ўринли бўлмасин, яъни (5) векторлар чизиқли эркли бўлсин. Ушбу $n+1$ та x, β ўзгарувчиларга нисбатан

$$f(x) = f(x^0) + \beta, \ g(x) = 0 \qquad (6)$$

тизимни қараймиз. Ошкормас функция ҳақидаги теоремага асосан бу тизим $\beta = 0$ нуқтанинг атрофида аниқланган $x(\beta)$ ечимга эга бўлади. $\beta < 0$ бўлганда (6) дан x^0 режанинг оптималлигига зиддиятга олиб келадиган

$$f(x(\beta)) < f(x^0), \ g(x(\beta)) = 0$$

муносабатларни оламиз. Теорема исботланди.

x^0 нуқтада (4) тенглик бажариладиган $\bar{\lambda}^0$ вектор x^0 нуқтага мос *умумлашган Лагранж вектори* деб аталади. x^0 нуқтага бир нечта умумлашган Лагранж векторлари мос келиши мумкин.

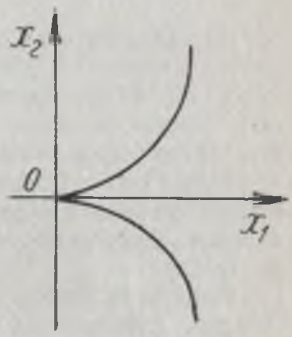
Изоҳ. (4) тенгликни $\bar{\lambda}^0$ билан бирга $-\bar{\lambda}^0$ вектор ҳам қаноатлантиргани учун λ^0 векторнинг битта компонентаси ишорасини олдиндан танлаш мумкин. Одатда $\lambda_0 \geqslant 0$ деб олинади, бу эса умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидасига аниқлик киритишдан иборатдир.

Шартли минимум масалаларини текширишда кўп вақтлардан бери (Лагранж давридан бери) (3) дан $\lambda_0 = 1$ бўлганда олинадиган

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x) \qquad (7)$$

(классик) Лагранж функциясидан фойдаланилади.

(7) Лагранж функцияси учун, умуман олганда, кўпайтувчилар қоидаси ўринли эмас.



III.2-чизма.

1-мисол. $f(x_1, x_2) = x_1$, $g(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$. Режалар $x_1^3 - x_2^2 = 0$ ярим кубик параболада ётади (III.2-чизма). Равшанки, $\{x_1^0 = 0, \ x_2^0 = 0\}$ =оптимал режа. Лагранж функциясини тузайлик:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x) = x_1 (x_1^3 - x_2^2)$$

Кўпайтувчилар қоидаси

$$\partial F/\partial x_1 = 1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \ \partial F/\partial x_2 = -2\lambda x_2 = 0$$

тенгламаларга олиб келади.

$x^0 = \{0, 0\}$ нуқта ҳеч бир λ учун бу тенгламаларни қаноатлантирмайди, яъни классик Лагранж функцияси учун кўпайтувчилар қоидаси бу масалада ўринли эмас.

2. **Классик Лагранж кўпайтувчилари қоидаси.** (1) масалани текширишда қачон (7) Лагранж функциясидан фойдаланиш мумкинлигини аниқлаймиз.

3-таъриф. Агар x^0 режага мос келган умумлашган $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ Лагранж векторлари ичида $\lambda_0 = 0$ кабилари бўлмаса, (1) масала ва унинг x^0 оптимал режаси *нормал* деб аталади.

Умумлашган Лагранж вектори (4) тенгликдан ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида аниқланганлигидан, (1) нормал масалада эса λ_0 компонента мусбат бўлганлигидан, унга $\bar{\lambda}$ векторни бўлиб, $\{1, \lambda\}$ кўринишдаги умумлашган Лагранж векторини оламиз, яъни умумлашган Лагранж функцияси (классик) Лагранж вектори ёрдамида қурилган (7) классик Лагранж функцияси бўлади.

1-лемма. Нормал оптимал режага ягона Лагранж вектори мос келади.

Исботи. Фараз қилайлик, иккита λ, μ $(\lambda \neq \mu)$ Лагранж вектор мавжуд бўлсин:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0 \qquad (8)$$

Бу тengликларнинг биринчисидан иккинчисини айириб, $(\lambda - \mu)' \partial g(x^0)/\partial x = 0$ тенгликни оламиз. Бу эса нормал x^0 режага 3-таърифга кўра зид бўлган $\{0, \lambda - \mu\} \neq 0$ — умумлашган Лагранж вектори мос келишини англатади. Лемма исботланди.

Маълум бўлишича, x^0 оптимал режанинг нормаллиги чеклашлар функцияси $g(x)$ нинг x^0 нуқтадаги ўзгариши билан узвий боғлиқ экан.

4-таъриф. Агар x^0 режада

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x} \qquad (9)$$

векторлар чизиқли боғланмаган бўлса, x^0 *оддий режа* деб аталади.

2-теорема. Оптимал режа x^0 нормал бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар у оддий жоиз режа бўлса.

Исботи. *Зарурийлиги.* x^0 нормал оптимал режа учун (9) векторлар чизиқли боғланган бўлсин: $\lambda' \partial g(x^0)/\partial x = 0$,

$\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \neq 0$. У ҳолда, x^0 режага мос умумлашган Лагранж векторн $\bar{\lambda} = \{\lambda_0 = 0, \lambda\}$ бўлади. $\lambda_0 = 0$ тенглик 3-таърифга зиддир.

Етарлилиги. x^0 оптимал режа оддий бўлсин. Агар уни нормал эмас деб олсак (бу ҳолда у анормал деб аталади), унинг учун шундай умумлашган Лагранж вектори $\{\lambda_0 = 0, \lambda\}$, $\lambda \neq 0$ топиладики, мос умумлашган кўпайтувчилар қоидаси $\lambda' \partial g(x^0)/\partial x = 0$, $\lambda \neq 0$ кўринишни олади, бу қоида (9) векторларнинг чизиқли боғланганлигини англатади. Олинган зиддият теоремани исботлайди.

Натижа. Агар (1) масала нормал бўлса, $m \leqslant n$ бўлади. Асосий натижани ифодалайлик.

3-теорема (Лагранж кўпайтувчилари қоидаси). Агар (1) масаланинг x^0 оптимал режасида (9) векторлар чизиқли эркли бўлсалар, шундай (ягона) λ^0 Лагранж вектори топиладики, $\{x^0, \lambda^0\}$ жуфтликда

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0 \tag{10}$$

тенгликлар (*Лагранж функциясининг стационарлик шарти*) бажарилади.

Исботи. Теореманинг шартларида бажарилганда (1) масала нормал масала бўлади (2-теорема). Биринчи тенглик (1) нормал масала учун (7) кўринишга келадиган (3) функцияга нисбатан (4) стационарлик шартидан иборатдир. Иккинчи тенглик ўз-ўзидан келиб чиқадиган $g(x^0) = 0$ тенглик кўринишига эга. Теорема исботланди.

5-таъриф. Агар x^* нуқта учун шундай m-вектор λ^* мавжуд бўлиб, $\{x^*, \lambda^*\}$ жуфтлик (7) Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлса, яъни

$$\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0, \ \partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0 \tag{11}$$

бўлса, x^* *шартли-стационар нуқта* деб аталади.

Шартли-стационар нуқталарни излаш $m + n$ та x, λ номаълумларга нисбатан $m + n$ та тенгламалар тизимидан иборат (11) ни ечишга келтирилади.

Шундай қилиб, Лагранж кўпайтувчилари қоидасига асосан, (1) шартли минимум масаласининг ечими (агар у мавжуд бўлса) мақсад функциясининг қийматларини *шартли-стационар* нуқталар тўпламида танлашга келтирилади.

Шуни қайд қилиш керакки, қавариқ программалаш масалаларидан фарқли равишда (II-боб) оптимал режалар умуман олганда (7) Лагранж функциясининг $\lambda = \lambda_0$ бўлгандаги минимум нуқталари бўлмайди.

2-мисол. $f(x_1, x_2) = x_2$, $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$. $x^0 = \{0, 0\}$ оддий оптимал режадир, чунки $\partial g(0)/\partial x_2 = 1 \neq 0$. (10) стационарлик шартидан $\partial F/\partial x_1 = -2\lambda x_1 = 0$, $\partial F/\partial x_2 = 1 + \lambda = 0$ дан Лагранж функцияси $F(x, -1) = x_2 + \lambda(x_2 - x_1^2)$ учун $\lambda = -1$ эканлигини топамиз. x^0 нуқтада $F(x, -1) = x_1^2$ функция минимумга эришади.

3-мисол. $f(x_1, x_2) = x_2^3$, $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$. Олдинги мисолга ўхшаш, (1) масала бу элементлар билан нормал масаладир. Лагранж функцияси $F(x, \lambda) = x_2^3 + \lambda(x_2 - x_1^2)$ учун (10) стационарлик шарти $-2\lambda x_1 = 0$, $3x_2^2 + \lambda = 0$, $x_2 - x_1^2 = 0$ тенгламаларга олиб келади. $x^0 = \{0, 0\}$ оптимал режага $\lambda = 0$ кўпайтувчи мос келади. x^0 нуқта $F(x, 0) = x_2^3$ функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади.

4-мисол. $f(x_1, x_2) = -x_2^2$, $g(x_1, x_2) = x_2$. Лагранж функцияси $F(x, \lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2$ учун стационарлик шарти $\partial F/\partial x_1 = 0$, $\partial F/\partial x_2 = -2x_2 + \lambda = 0$ тенгламаларга олиб келади, улардан $\lambda = 0$ ни оламиз. $F(x, 0) = -x_2^2$ функция $x^0 = 0$ оптимал режада минимумга эмас, максимумга эришади.

Шартли минимум масалалари ичида 2-теоремага асосан (3-банддаги киритиш ҳақидаги леммани ҳам қаранг) нормал масалаларнинг (демак, классик кўпайтувчилар қоидасининг) ўрни шу билан аниқланадики, улар масалаларнинг асосий қисмини ташкил қилади, уларнинг режалар тўплами ($n > m$ бўлганда) чекли бўлмайди. Анормал масалаларнинг режалар тўплами чекли ҳам бўлиши мумкин.

5-мисол. $f(x_1, x_2) = x_1$. $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Масала ягона $x_1^0 = x_2^0 = 0$ ечимга эга.

3. Шартли минимумнинг силлиқ масалаларида оптималликнинг биринчи тартибли зарурий шартларини олишнинг замонавий услуби. Агар (1) масалада $f(x)$, $g(x) \in C^{(1)}$ бўлса, у *силлиқ масала* дейилади. 1,2-бандларда келтирилган минимумнинг биринчи тартибли зарурий шартлари конструктив эмас. Қуйида келтирилган экстремал масалаларни текширишда замонавий ёндашишнинг асосий элементларини ўз ичига олувчи конструктивроқ исботлар назарий ва амалий нуқтаи назардан аҳамият касб этади. Унинг умумий конструкциялари 5-§ да баён қилинади.

5-таъриф. Бирор l вектор x^* нуқтада $g_i(x) = 0$ *тенглик типидаги чекланиш бўйича жоиз (уринма) йўналиш* деб аталади, агар $g_i(x^*) = 0$, $l'\partial g(x^*)/\partial x = 0$ бўлса.

6-таъриф. Агар l вектор x^* нуқтада ҳар бир $g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}$ чекланиш бўйича жоиз йўналиш бўлса, у x^* нуқтада (1) *масаланинг чекланишлари бўйича жоиз йўналиш* деб аталади.

7-таъриф. Бирор l вектор $f(x)$ функциянинг x^* нуқтадаги *мос келадиган йўналиши* (камайиш йўналиши) деб аталади, агар $l'\partial f(x^*)/dx < 0$ бўлса.

8-таъриф. Агар l вектор x^* нуқтада (1) масаланинг чекланишлари бўйича жоиз йўналиш бўлиш билан бирга, унинг мақсад функцияси учун мос келадиган йўналиш бўлса, бу вектор (1) *масаланинг* x^* режадаги *мос келадиган йўналиши* деб аталади.

4-теорема. Агар x^0 режа (1) масаланинг оддий оптимал режаси $m < n$ бўлса, x^0 нуқтада (1) масаланинг мос келадиган йўналиши мавжуд эмас, яъни

$$l'\,\partial f(x^0)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{12}$$

тенгликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий l вектор учун

$$l'\partial g_i(x^0)/\partial x \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{12'}$$

бажарилади.

Теореманинг исботи экстремал масалаларни текширишнинг классик усуллари моҳиятини ёрқин акс эттирувчи *тегишлилик ҳақидаги леммага* асосланган.

2-лемма (тегишлилик ҳақида). Фараз қилайлик, x^* режа (1) масаланинг оддий режаси бўлсин (бу ерда $m < n$). У ҳолда масаланинг чеклашлари бўйича жоиз бўлган ихтиёрий l йўналиш учун шундай β_0 сон ва β скаляр аргументнинг n вектор-функцияси $h(\beta)$, $|\beta| < \beta_0$ мавжуд бўладики, $h(0) = x^*$, $dh(0)/d\beta = l$ бўлади ва $g(h(\beta)) \equiv 0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ айният бажарилади.

Исботи. x^* оддий режа бўлганлиги учун

$$\partial g_1(x^*)/\partial x, \ \ldots, \ \partial g_m(x^*)/\partial x \tag{13}$$

векторлар чизиқли эркли. Бу векторларни R_n да қандайдир силлиқ $g_{m+1}(x), \ldots, g_n(x)$ функциялар бўйича қурилган

$$\partial g_{m+1}(x^*)/\partial x, \ \ldots, \ \partial g_n(x^*)/\partial x \tag{14}$$

векторлар ёрдамида базисгача тўлдирамиз.

Ихтиёрий n-вектор l учун (12) дан

$$\gamma_{m+1} = l'\partial g_{m+1}(x^*)/\partial x, \ \ldots, \ \gamma_n = l'\partial g_n(x^*)/\partial x \tag{15}$$

ларни ҳисоблаймиз ва $n+1$ та x, β ўзгарувчиларга нисбатан n та

$$\begin{cases} g_1(x)=0, \ \ldots, \ g_m(x)=0, \\ g_{m+1}(x)=g_{m+1}(x^*)+\beta\gamma_{m+1}, \ \ldots, \ g_n(x)=g_n(x^*)+\beta\gamma_n \end{cases} \quad (16)$$

тенгламалар тизимини қараймиз.

(13), (14) векторларнинг чизиқли эрклилигига кўра, ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан (16) тизимнинг шундай силлиқ ечими $x=h(\beta)$, $|\beta|\leqslant\beta_0$, $\beta_0>0$ мавжуд бўладики, у $\beta=0$ да x^* режа билан устма-уст тушади:

$$h(0)=x^*. \quad (17)$$

Ушбу

$$g_i(h(\beta))\equiv 0, \quad i=\overline{1,m},$$

$$g_k(h(\beta))\equiv g_k(x^*)+\beta\gamma_k, \ k=\overline{m+1,n}, \ |\beta|\leqslant\beta_0,$$

айниятлардан

$$dg_i(h(\beta))/d\beta=[\partial g_i(h(\beta))/\partial x]'\,dh(\beta)/d\beta\equiv 0, \ i=\overline{1,m},$$

$$dg_k(h(\beta))/d\beta=[\partial g_k(h(\beta))/\partial x]'\,dh(\beta)/d\beta\equiv\gamma_k, \ k=\overline{m+1,n}$$

ларни оламиз. Бундан хусусий ҳолда

$$[\partial g_i(x^*)/\partial x]'\,dh(0)/d\beta\equiv 0, \ i=\overline{1,m},$$

$$[\partial g_k(x^*)/\partial x]'\,dh(0)/d\beta=\gamma_k, \ k=\overline{m+1,n} \quad (18)$$

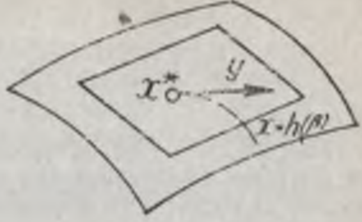
келиб чиқади.

(12), (15) тенгламаларни (18) тенгламалар билан таққослаб, шуни кўрамизки, l ва $dh(0)/d\beta$ векторлар коэффициентларидан тузилган матрицаси махсус бўлмаган чизиқли тенгламалар тизимини қаноатлантиради. Шунинг учун $dh(0)/d\beta=l$. (17) ни ҳисобга олсак бу натижа теореманинг исботини тугаллайди.

Изоҳ. Ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан $g_i(x)$ $i=\overline{1,m}$ функциялар қанча марта дифференциалланувчи бўлсалар, $h(\beta)$ функция ҳам шунча марта дифференциалланувчи бўлади.

2-лемманинг геометрик маъносини тушунтирамиз. $g_1(x)=0$, $\ldots$, $g_m(x)=0$, $m<n$, тенгламалар R_n да $(n-m)$ ўлчовли силлиқ M кўпхилликни ифодалайди. $n-m=2$ бўлганда у III.3-чизмадаги сиртни ифодалайди.

l га нисбатан қаралаётган $l'\partial g_i(x^*)/\partial x=0$, $i=\overline{1,m}$, тенгламалар M га $x = x^*$ нуқтада K уринма гипертекисликни беради. Тегишлилик ҳақидаги лемма бўйича K уринма гипертекисликдан ҳар қандай y векторни олмайлик, кўп хилликнинг устида шундай силлиқ чизиқ ўтказиш мумкинки, у $x = x^*$ нуқтадан чиқиб y векторни ўзида сақловчи уринмага эга бўлади.



III.3- чизма

2-леммага асосан нормал масаланинг оптимал режасини β, l параметрларга боғлиқ режалар оиласига юклаш мумкин. Шунинг учун (1) масаланинг режалар тўплами $(m<n)$ чекли бўлиши мумкин эмас.

4-теореманинг исботи. Фараз қилайлик (12) тенгликлар бажариладиган, лекин (12′) ўрнига $l'_* \partial f (x^0)/\partial x < 0$ тенгсизлик бажариладиган l_* вектор мавжуд бўлсин. Дейлик, $h(\beta)$ функция — тегишлилик ҳақидаги леммани исбот қилишда l_* вектор ва x^0 режа учун қурилган бўлсин. У ҳолда

$$df (h(\beta))/d\beta/_{\beta=0} = l'_* \, \partial f (x^0)/\partial x < 0,$$

яъни етарли кичик β учун $h(\beta)$ режада x^0 нинг оптималлигига зид бўлган $f(h(\beta)) < f(x^0)$ тенгсизлик бажарилади. Теорема исботланди.

(12), (12′) тизим учун қўлланилган тенгсизлик — натижалар ҳақидаги теорема (1 боб, 2-§, 4-б. га қ.) дан шундай λ_i, $i = \overline{1,m}$, сонларнинг мавжуд бўлиши келиб чиқадики,

$$\partial f (x^0)/\partial x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i (x^0)/\partial x = 0 \tag{19}$$

бўлади.

Текширилмай қолган икки ҳолни қараймиз: 1) $m = n$, (9) векторлар чизиқли эркли; 2) (9) векторлар чизиқли боғлиқ. Биринчи ҳолда (9) векторлар R_n фазонинг базасини ташкил қилади ва шунинг учун шундай λ_i, $i = \overline{1,m}$ сонлар топиладики, (19) тенгликлар бажарилади. Иккинчи ҳол эса шундай $\mu_i \not\equiv 0$, $i = \overline{1,m}$, лар топилиб, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot \partial g_i (x^0)/\partial x = 0$ бажарилишини англатади. $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i = \mu_i$, $i = \overline{1,m}$ деб олиб,

$$\lambda_0\, \partial f\,(x^0)/\partial x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \partial g_i\,(x^0)/\partial x = 0 \qquad (20)$$

ни оламиз.

Олинган (19), (20) натижалар биргаликда ҳам умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидасининг (1-теорема), ҳам классик Лагранж кўпайтувчилари қоидасининг (3-теорема) исботидан иборатдир. Бу ҳолда 3-теорема—оптималликнинг биринчи тартибли зарурий шартини ифодаловчи *«тўғри»* 4-теореманинг *«иккиланма»* вариантидан иборат экан.

Кўпайтувчилар қоидасининг умумий ҳоли ($m < n$ ва (9) векторлар чизиқли эркли бўлса) учун келтирилган исботнинг конструктивлиги қуйидагидан иборат. Агар қўшимча (нормаловчи) шартли (масалан, $\alpha_i \leqslant l_i \leqslant \beta_i$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$) ушбу чизиқли программалаш масаласи

$$l'\partial f\,(x^*)/\partial x \to \min,\ \ l\partial g_i\,(x^*)/\partial x = 0,\ \ i = \overline{1,m} \qquad (21)$$

нинг l_* ечими учун $l'_*\, \partial f\,(x^*)/\partial x < 0$ тенгсизлик бажарилса, шундай $0\,(t)$ функция топиладики, $x\,(t) = x^* + l\,t + 0\,(t)$, $t \geqslant 0$ ҳаракатда $t = 0$ нуқтанинг атрофида чеклашлар бажарилади, мақсад функцияси эса $|l'_*\, \partial f\,(x^*)/\partial x|$ тартибли тезликда камаяди.

4-теореманинг юқорида таъкидланган иккиланмалиги ва Лагранж кўпайтувчилари қоидасига асосан l_* йўналишни қуришда чизиқли программалашнинг иккиланма усулларидан фойдаланиш мумкин.

4. **Чизиқли чеклашлар.** (1) масаланинг амалда муҳим бўлган ушбу

$$f\,(x) \to \min,\ \ Ax = b \qquad (22)$$

хусусий ҳолини қараймиз, бунда A — $(m \times n)$ матрица, b—m вектор, $f\,(x) \in C^{(1)}$.

5-теорема. Агар x° режа (22) масаланинг оптимал режаси бўлса,

$$Al = 0 \qquad (23)$$

тенгликни қаноатлантирувчи ҳар бир n — вектор l учун,

$$l'\partial f(x^\circ)/\partial x \geqslant 0 \qquad (24)$$

тенгсизлик бажарилади.

Исботи. Агар l_* вектор (23) тенглик бажарилиб, (24) тенгсизлик бажарилмайдиган (яъни $l'_*\, \partial f\,(x^0)\,/\partial x < 0$ бўлган вектор бўлса, $x(t) = x^\circ + l_* t$, $t \geqslant 0$ ҳаракатда (22) масаланинг чеклашлари ҳеч вақт бузилмайди $(Ax(t) = Ax_0 + Al_* t = b)$ ва $df(x(t))/dt|_{t=0} = l'_* \partial f(x^\circ)/\partial x < 0$. Бу x° режанинг оптималлигига зиддир. Теорема исботланди.

(23), (24) ларга тенгликларнинг тенгсизлик-натижа ҳақидаги теоремани (II-боб, 3-§ га қ.) қўллаб, (22) масала учун уни нормал деб фараз қилмасдан, классик Лагранж кўпайтувчилари қоидасини оламиз.

5. Минимумнинг иккинчи тартибли зарурий шарти. (1) масалани $f(x),\ g_i(x) \in C^{(2)},\ i = \overline{1, m}$ ҳамда x^0 оптимал режада (9) векторлар чизиқли эркли бўлган ҳолда қараймиз.

6-теорема. Агар x° режа (1) нормал масаланинг нормал локал оптимал режаси бўлиб, λ° — унга мос Лагранж вектори бўлса,

$$l'\partial g_i(x^\circ)/\partial x = 0,\ i = \overline{1,\ m}, \tag{25}$$

тенгламалар билан берилган гипертекисликда

$$l' \frac{\partial^2 F(x^\circ,\ \lambda^\circ)}{\partial x^2} l \geqslant 0 \tag{26}$$

квадратик шакл манфий бўлмайди.

Исботи. Тегишлилик ҳақидаги леммага мувофиқ (25) тизимни қаноатлантирувчи ҳар бир l вектор учун шундай $\beta_0 > 0$ сон ва $h(\beta) \in C^{(2)}$ функциялар топиладики, $h(0) = x^\circ$,

$$dh(0)/d\beta = l,\quad g_i(h(\beta)) \equiv 0,\ |\beta| \leqslant \beta_0,\ i = \overline{1, m},$$

бўлади. x° режанинг оптималлигидан $\alpha(\beta) = f(h(\beta))$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ функция $\beta = 0$ да локал минимумга эришади, яъни

$$d\alpha(0)/d\beta = 0,\ d^2\alpha(0)/d\beta^2 \geqslant 0.$$

Охирги тенгсизлик батафсил ёзувда қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d^2\alpha(0)}{d\beta^2} = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{d\alpha(\beta)}{d\beta}\right)_{\beta=0} = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\partial f'(h(\beta))}{\partial x}\cdot\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right)_{\beta=0} =$$

$$= \left[\frac{dh'(\beta)}{d\beta}\cdot\frac{\partial^2 f(h(\beta))}{\partial x^2}\cdot\frac{dh(\beta)}{d\beta} + \frac{\partial f'(h(\beta))}{\partial x}\cdot\frac{d^2h(\beta)}{d\beta^2}\right]_{\beta=0} =$$

$$= l'\frac{\partial^2 f(x^\circ)}{\partial x^2} l + \frac{\partial f'(x^\circ)}{\partial x}\cdot\frac{d^2h(0)}{d\beta^2} \geqslant 0 \tag{27}$$

Шунга ўхшаш, $\lambda' g(h(\beta)) \equiv 0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ айниятдан

$$\left.\frac{d^2\lambda^{\circ\prime}(h(\beta))}{d\beta^2}\right|_{\beta=0} = l'\frac{\partial^2\lambda^{\circ\prime} g(x^\circ)}{\partial x^2} l + \frac{\partial[\lambda^{\circ\prime} g(x^\circ)]'}{\partial x}\cdot\frac{d^2h(0)}{d\beta^2} = 0 \tag{28}$$

тенглик келиб чиқади. Агар (27) тенгсизликни (28) тенглик билан қўшиб, натижани $\{x^\circ, \lambda^\circ\}$ жуфтликда стационарлик шарти (10): $\partial F(x^\circ, \lambda^\circ)/\partial x = 0$ бажарилишини ҳисобга олиб, Лагранж функцияси терминида ёзсак, (26) тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

Изоҳлар. 1. Чизиқли чеклашли ва $f(x) \in C^{(2)}$ бўлган (22) масала учун 6-теорема оптимал режанинг нормаллиги ҳақидаги фаразсиз ҳам ўринлидир. Бу 6-теореманинг исботида 2-леммани 2-§ даги 2-лемма билан алмаштириш ва 3-теореманинг нормаллик талаб қилинмаганда ҳам ўринли эканлигини ҳисобга олишдан келиб чиқади (4-бандга қ.).

2. Минимумнинг иккинчи тартибли зарурий шартлари (25), (26) ларни (6-бандда қараладиган етарли шартларни ҳам) текшириш, ўзгарувчилар сони етарли катта бўлганда, мустақил муаммодан иборатдир. Шу боисдан шартли минимум масалалари назариясида *туташ минимум масаласи* қаралади:

$$\gamma(l) = l'[\partial^2 F(x^\circ, \lambda^\circ)/\partial x^2]\, l \to \min, \quad l'\partial g_i(x^\circ)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Минимумнинг иккинчи тартибли зарурий шарти бажарилиши учун $\gamma(l) \geqslant 0$ нинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

3. (25), (26) шарт (12), (12′) каби тўғри шартдир. (12) (12′) учун Фаркаш теоремаси ёрдамида иккиланмалик шарти (Лагранж кўпатувчичилари қоидаси) олинган. Ўхшаш тарҳ (25), (26) учун қандай натижалар беради?

6. Нисбий оптималликнинг етарлилик шарти. Фараз қилайлик, $f(x)$, $g(x) \in C^{(2)}$ бўлсин.

7-теорема. (1) масалада x^* шартли-стационар нуқтанинг локал оптимал бўлиши учун унга мос Лагранж вектори λ^* да

$$l'\partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{29}$$

тенгламалар билан берилган гипертекислида

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}\, l > 0 \tag{30}$$

квадратик шакл мусбат бўлиши етарлидир.

Исботи. (30) дан келиб чиқадики, α сон мусбат:

$$\alpha = \min l'[\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2] l, \quad \| l \| = 1,$$
$$l'\partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{31}$$

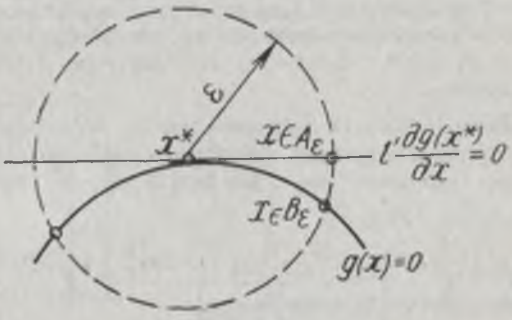
(29) гипертекисликда x^* нуқтанинг ε-атрофида ётувчи $A_\varepsilon = \{x : x = x^* + \varepsilon l, \ \| l \| = 1, \ l'\partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \ i = \overline{1, m}\}$ тўплам киритайлик. (31) га мувофиқ A_ε тўпламнинг нуқталарида $(x - x^*)'[\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2](x - x^*) \geqslant \alpha\varepsilon^2$ тенгсизлик бажарилади. Шу туфайли Тейлор формуласидан x^* нуқта-

нинг стационарлик шартини ҳисобга олганда $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $x\in A_\varepsilon$ учун

$$F(x,\lambda^*)-F(x^*,\lambda^*)=(x-x^*)'\,[\partial^2F(x^*,\lambda^*)/\partial x^2]\,(x-x^*)/2+$$
$$+0(\|x-x^*\|^2\geqslant\alpha\varepsilon^2/2+0(\varepsilon)^2=\varepsilon^2\left[\frac{\alpha}{2}+0(\varepsilon^2)/\varepsilon^2\right]\geqslant$$
$$\geqslant\alpha\varepsilon^2/4 \qquad (32)$$

келиб чиқади. Энди ушбу

$$B_\varepsilon=\{x:\|x-x^*\|=\varepsilon,\ g(x)=0\}$$



III.4- чизма.

тўпламни қараймиз (111.4-чизма). (29) гипертекислик $g(x)=$ $=0$ кўпхилликка уринма эканлигидан ҳар бир $\bar{x}\in B_\varepsilon$ нуқта учун шундай $x\in B_\varepsilon$ нуқта топиладики,

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant K\varepsilon^2 \qquad (33)$$

тенгсизлик бажарилади.

$\partial F(x,\lambda^*)/\partial x$ функция x бўйича узлуксиз ва $\partial F(x^*,\lambda^*)/\partial x=$ $=0$, шунинг учун $\|x-x^*\|\leqslant 2\varepsilon$ бўлганда

$$\|\partial F(x,\lambda^*)/\partial x\|\leqslant K_1\varepsilon \qquad (34)$$

бўлади. (33), (34) ларни ҳисобга олсак,

$$|F(\check{x},\lambda^*)-F(x,\lambda^*)|\leqslant\|\partial F(\check{x},\lambda^*)/\partial x\|\,\|\bar{x}-x\|\leqslant$$
$$\leqslant K\cdot K_1\varepsilon^3, \qquad (35)$$

бу ерда $\check{x}$ нуқта x нуқтанинг ε-атрофидан, демак, x^* нуқтанинг 2ε атрофидан олинган бирор нуқта.

Энди $\bar{x} \in B_\varepsilon$ нуқта учун (32) ва (35) лардан, агар $0 < \varepsilon < \alpha/4KK_1$ бўлса,

$$F(\bar{x}, \lambda^*) - F(x^*, \lambda^*) = F(x, \lambda^*) - F(x^*, \lambda^*) + [F(\bar{x}, \lambda^*) - F(x, \lambda^*)] \geqslant \varepsilon^2\alpha/4 - KK_1\varepsilon^3 \geqslant 0$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$g(x) = 0$ кўпхилликда $F(x, \lambda^*)$ функция $f(x)$ билан устма-уст тушганлигидан, топилган баҳодан барча $\bar{x} \in B_\varepsilon$, $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \alpha/4KK_1\}$ лар учун $f(\bar{x}) \geqslant f(x^*)$ тенгсизлик келиб чиқади. Теорема исботланди.

Изоҳ. Теореманинг исботидан келиб чиқадики, x^* — *қатъий нообий шартли минимум нуқтасидир*, яъни шундай $\varepsilon_2 > 0$ топиладики, барча x, $x \neq x^*$, $x \in B_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ нуқталар учун $f(x^*) < f(x)$ тенгсизлик бажарилади.

7. Мисоллар. 1-мисол. Сиртининг юзи S_0 берилганда максимал ҳажмга эга бўлган цистернанинг параметрлари топилсин (III.5-чизма).

Цистерна сиртининг юзи $S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2$. Цистернанинг ҳажми $V = \pi x_2^2 \cdot x_1$. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = -\pi x_2^2 x_1, \quad g(x_1, x_2) = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0$$

функцияларни киритиб, берилган масалани

$$f(x) \to \min, \ g(x) = 0 \qquad (36)$$

масалага келтирамиз.

Ҳосил қилинган масала берилган масалага эквивалент эмас, чунки ўзгарувчиларнинг физик моҳиятидан келиб чиқадиган

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \qquad (37)$$

қўшимча чекланишлар ҳисобга олинмаган.

Лекин масалани зарур бўлган вақтда (37) чекланишларни қаноатлантирмайдиган ечимларини чиқариб ташлаб, (36) кўринишида ечамиз. Агар (36) масала ечимга эга бўлса изланаётган ечим, равшанки, (36) масаланинг локал минимум нуқталари ичида бўлади. Лекин. (37) ни ҳисобга олмаганда (36) масала ечимга эга эмас, чунки $x_1 \to +\infty$, $x_2 \to -\infty$ бўлганда $f(x_1, x_2) \to -\infty$. Демак, минимумнинг исботланган зарурий шартларини қўллаш мумкин эмас.

Оптималликнинг етарлилик шартларига мурожаат қиламиз. Лагранж функциясини тузамиз): $F(x, \lambda) = -\pi x_1 \cdot x_2^2 + \lambda\left[2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2 - S_0\right]$. Шартли стационар нуқталар

$$\partial F(x, \lambda)/\partial x_1 = -\pi x_2^2 + 2\pi\lambda x_2 = 0, \ \partial F(x, \lambda)/\partial x_2 = -2\pi x_1 \cdot x_2 + 4\pi\lambda x_2 + 2\pi\lambda x_1 = 0, \ 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2 - S_0 = 0$$

тенгламаларни қаноатлантиради. Булардан

$$x_1 = 4\lambda, \ x_2 = 2\lambda, \ \lambda = \pm\sqrt{S_0/24\pi}$$

$\lambda^* = \sqrt{S_0/24\pi}$ ни танлаб, қуйидаги матрицани ҳисоблаймиз:

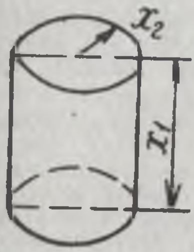
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{Bmatrix} 0 & -2\pi x^2 + 2\pi\lambda^* \\ -2\pi x_2 + 2\pi\lambda^* & -2\pi x_1 + 4\pi\lambda^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -2\pi\lambda^* \\ -2\pi\lambda^* & -4\pi\lambda^* \end{Bmatrix}$$

(29) гипертекисликнинг тенгламаси:

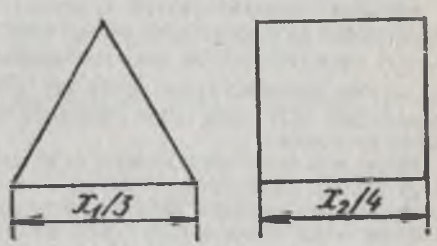
$$(\partial g(x)/\partial x_1)y_1 + (\partial g(0)/\partial x_2)y_2 = 2\pi x_2 y_1 + [4\pi x_2 + 2\pi x_1]y_2 = \\ = 4\pi\lambda^* y_1 + 16\pi\lambda^* y_2 = 0 \qquad (38)$$

Бундан $y = -4y_2$. $\partial^2 F/\partial x^2$ матрицали квадратик шакл $-4\pi\lambda^* y_1\ y_2 - -4\pi\lambda^* y_2^2$ кўринишни олади ва (38) гипертекисликда $y_2 \neq 0$ да мусбат бўлган $12\pi\lambda^* y_2^2$ ифодага ўтади. Шундай қилиб, 7-теореманинг шартлари $x_1^* = 2\sqrt{S_0/6\pi}$, $x_2^* = \sqrt{S_0/6\pi}$ нуқта учун бажарилади. Шундай параметрли цистерна ҳеч бўлмаганда параметрлари яқин бўлган цистерналар ичида энг катта ҳажмга эга бўлади.

2-мисол. Берилган L узунликдиги симдан шундай тенг томонли учбурчак ва квадрат ясаш керакки, улар юзларининг йиғиндиси максимал бўлсин.



III.5- чизма.



III.6- чизма.

Фараз қилайлик, x_1, x_2 — симнинг мос равишда учбурчак ва квадрат учун ажратилган қисмлари бўлсин. Шаклларнинг умумий юзи (III.6-чизма) $S(x_1, x_2) = \sqrt{3}/36 \cdot x_1^2 + 1/16 \cdot x_2^2$ га тенг. Ушбу $f(x_1, x_2) = -\sqrt{3}\ x_1^2/36 - x_2^2/16$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - L$ функцияларни киритиб, берилган масалани

$$f(x_1, x_2) \to \min, \ g(x_1, x_2) = 0 \qquad (39)$$

масалага келтирамиз. $\partial g/\partial x = \{\partial g/\partial x_1\ \partial g/\partial x_2\} = \{1, 1\} \neq 0$ бўлганлигидан (39) масаланинг барча режалари оддийдир.

Ҳозиргача (39) масала ечимининг мавжудлиги ҳақидаги масалани бир четга қўйиб, шартли-стационар нуқталарни топамиз. Лагранж функцияси $F(x_1, x_2, \lambda) = -\sqrt{3}\ x_1^2/36 - x_2^2/16 + \lambda(x_1 + x_2 - L)$ ёрдамида

$$\partial F/\partial x_1 = -\sqrt{3}\, x_1/18 + \lambda = 0, \ \partial F/\partial x_2 = -x_2/8 + \lambda = 0 \qquad (40)$$

тенгламаларни оламиз. Булардан, $x_1 = 6\sqrt{3}\ \lambda$, $x_2 = 8\lambda$. λ^* кўпайтувчини (39) масаланинг чекланишидан топамиз:

$$6\sqrt{3}\,\lambda+8\lambda-L=0,\ \lambda^*=L/(6\sqrt{3}+8). \qquad (41)$$

Шундай қилиб, $\{\, x_1^*=3\sqrt{3}\,L/(3\sqrt{3}+4),\ \ x_2^*=4L\,(3\sqrt{3}+4)\}$ нуқта шартли стационар нуқтадан иборатдир. Минимумнинг етарлилик шарти бажарилишини текширамиз.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/18 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{Bmatrix}$$

бўлганлигидан

$$l'\,]\partial^2 F(x^*,\lambda^*)/\partial x^2]\,l=-\sqrt{3}\ l_1^2/18-l_2^2/8 \qquad (42)$$

квадратик шакл бутун фазода ва хусусий ҳолда текисликда манфий аниқлангандир. Минимумнинг етарлилик шарти бажарилмайди. Бу ерда 1-мисолнинг тарҳи бўйича кетилса мақсадга эришилмайди. Равшанки, $g(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2)=-S(x_1, x_2)$ функциялар учун минимумнинг етарлилик шарти бажарилади. Шунинг учун топилган нуқта $\{\, x_1^*, x_2^* \}$ юзларининг йиғиндиси минимал бўлган шаклларнинг параметрларини ўз ичига олади (бу ҳолда симни $x_1^*/x_2^*=3\sqrt{3}/4\cong 1{,}3$ нисбатда бўлиш керак).

Берилган масала қандай ҳал қилинади? Ўтказилган ҳисоблашлардан даставвал кўринадики (39) масала ечимга эга эмас, акс ҳолда эса $\{\, x_1^{\circ}, x_2^{\circ} \}$ ечим (40), (41) ни қаноатлантириши ва (42) квадратик шакл унда мусбат ишорали бўлиши керак эди. Лекин $l'\partial g_i\,(x^*)/\partial x=0$ текисликда (40), (41) тизим ягона ечимга эга бўлиб, бу ечимда (42) шакл манфий аниқланган.

Физик жиҳатдан етарлича аниқ ва равшанки, минималлаштириш масаласи ўзининг дастлабки қўйилишида ечимга эга бўлмоғи лозим. Шунинг учун ҳам юқоридаги натижа кўрсатадики, қабул қилинган (39) математик модел физик масалага тенг кучли эмас. Ҳақиқатан ҳам (39) моделда масаланинг физик қўйилишидан келиб чиқувчи $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ чекланишлар ҳисобга олинмаган. Бу чекланишларни ҳисобга олган ҳолда 2-мисолни ечишни навбатдаги параграфда охирига етказамиз.

4-§. ЧЕКЛАШЛАР ТЕНГСИЗЛИКЛАР ТИПИДА БЎЛГАНДА ФУНКЦИЯЛАРНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ

Чизиқсиз программалаштириш максимум ва минимум классик масалалари назарияси ривожланишининг замонавий босқичи сифатида чизиқсиз тенгсизликлар кўринишидаги чеклашлар билан берилган экстремал масалаларни тадқиқ қилиш билан боғлиқ равишда XX асрнинг иккинчи ярмида шаклланди. Чизиқсиз программалашда классик шартли минимум масалалари *тенгликлар типидаги чекланишли минималлаштириш масалалари* деб атала бошланди.

1. **Оптималликнинг биринчи тартибли зарурий шарти.** Бу бандда чекланишлари тенгсизликлар типидаги минималлаштириш масаласи деб мақсад функцияси $f(x)$, $x\in R_n$ ва

чеклашлар функцияси $g(x)$ нинг $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ компонентлари $C^{(2)}$ синфга қарашли бўлган

$$f(x) \to \min, \; g(x) \leqslant 0 \tag{1}$$

масалани тушунамиз.

Агар x° режада

$$f(x^\circ) = \min f(x), \; g(x) \leqslant 0$$

бўлса, x° (глобал) оптимал режа ((1) масаланинг ечими) деб аталади.

Агар x° режада қандайдир $\varepsilon > 0$ учун

$$f(x^\circ) = \min f(x), \; g(x) \leqslant 0, \; \| x - x^\circ \| \leqslant \varepsilon$$

муносабатлар бажарилса, x° *нисбий оптимал режа* деб аталади.

Агар $g_i(x^*) = 0$ ($g_i(x^*) < 0$) бўлса, $g_i(x^*) \leqslant 0$ чеклаш x^* режада актив (пассив) деб аталади. Актив чеклашлар индекслари тўпламини $I_a(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ орқали белгилаймиз.

1-теорема. Агар x^* (1) масаланинг локал оптимал режаси бўлса, қуйидаги

$$l' \partial f(x^0)/\partial x < 0 \tag{2}$$

$$l' \partial g_i(x^0)/\partial x < 0, \; i \in I_a(x^0) \tag{3}$$

тенгсизликлар тизими биргаликда бўлмайди.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни l_* векторда (2), (3) тенгсизликлар бажарилсин. $x(t) = x^0 + l_* t$, $t \geqslant 0$, ҳаракатни қараймиз. Барча етарли кичик $t > 0$ ларда, ўз-ўзидан равшанки, x^0 режада пассив бўлган $g_i(x) \leqslant 0$ чекланишлар $x(t)$ векторда бажарилади. $i \in I_a(x^0)$ учун (3) га асосан,

$$g_i(x(t)) = g_i(x^0) + t l'_* \partial g_i(x^0)/\partial x + 0(t) =$$
$$= t l'_* \partial g_i(x^0)/\partial x + 0(t) \leqslant 0, \; t \in [0, t_0), \; t_0 > 0,$$

тенгсизликни оламиз. Шундай қилиб, барча $t \in [0, t_0]$ ларда $x(t)$ вектор (1) масаланинг режаси бўлади. (2) ни ҳисобга олсак, $x(t)$, $t \geqslant 0$ бўйлаб, x^0 режанинг оптималлигига зиддиятга олиб келувчи

$$df(x(t))dt/_{t=0} = dx'(t)/dt \, [\partial f(x(t))/\partial x]_{t=0} = l'_* \partial f(x^0)/\partial x < 0$$

тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

I-бобнинг 2-§ ида (2), (3) тизимнинг биргаликда бўлмаслигини текшириш, чизиқли программалаш масаласига эквивалент эканлиги кўрсатилган эди. Бу масаланинг ихтиёрий x^* режа учун тузилган l_* ечими бўйича x^* режани яхшиловчи, $x(t) = x^* + l_* t$, $t \geqslant 0$ ҳаракатни тузиш мумкин.

Агар оптималликнинг бевосита зарурий шартини ифодаловчи (2), (3) шартларга тенгсизликлар тизимларининг биргаликда бўлмаслиги ҳақидаги теоремани (I боб, 2-§) қўлласак, оптималликнинг иккиланма зарурий шартини оламиз.

2-теорема (умумлашган Лагранж кўпайтувчилари қоидаси). (1) масаланинг ҳар бир x^0 локал оптимал режаси учун шундай ноль бўлмаган умумлашган $\overline{\lambda^0} = [\lambda_0^0, \lambda^0]$ Лагранж вектори мос келадики, қуйидаги шартлар бажарилади:

(1) *манфиймаслик:* $\overline{\lambda^0} \geqslant 0$;

2) *стационарлик:* $\partial F(x^0, \overline{\lambda^0})/\partial x = 0$;

3) *қаттиқмасликни тўлдириш:* $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.

Агар

$$\partial g_i(x^*)/\partial x, \quad i \in I_a(x^*) \tag{4}$$

векторлар чизиқли боғланмаган бўлса, x^* оддий режа дейилади.

Изоҳ. Агар x^* оддий режа бўлса, $|I_a(x^*)| \leqslant n$.

Агар $g_i(x^*) = 0$ бўлганда $l' \partial g_i(x^*)/\partial x < 0$ бўлса ва $g_i(x^*) < 0$ бўлганда l ихтиёрий n-вектор бўлса, l векторни x^* нуқтада *тенгсизлик типидаги* $g_i(x) \leqslant 0$ *чекланиш бўйича жоиз йўналиш (ички йўналиш)* деб атаймиз.

l векторни x^* режада (1) *масаланинг чекланишлари бўйича жоиз йўналиш дейилади*, агар у x^* нуқтада ҳар бир $g_i(x) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ чекланиш бўйича жоиз бўлса.

Шундай қилиб, x^* режада (1) масаланинг чекланишлари бўйича жоиз йўналишлар (3) тенгсизликлар орқали ифодаланади, агар уларда x^0 векторни x^* га алмаштирилса. Агар x^* оддий режа бўлса, улар ҳамиша мавжуд бўлади.

(1) масаланинг мос келадиган йўналиши тушунчаси худди шартли минимум масаласидагидек сақланади (3-§, 3-б). Лагранж функцияси (умумлашган ва классик) нинг таърифини ҳам илгаригидек сақлаймиз.

1-теоремадан, агар x^0 режа (1) масаланинг локал оптимал режаси бўлса, x^0 нуқтада (1) масаланинг мос келадиган йўналишлари мавжуд бўлмаслиги келиб чиқади. (2), (3) тенгсизликларга Фаркашнинг тенгсизлик — натижалар ҳақидаги теоремасини тадбиқ қилиб иккиланма тасдиқни оламиз.

3-теорема (классик Лагранж кўпайтувчилари қоидаси). (1) масаланинг ҳар бир оддий локал оптимал режаси учун шундай ягона Лагранж вектори топиладики, унда қуйидаги шартлар бажарилади:

1) *манфиймаслик;* $\lambda^0 \geqslant 0$;

2) *стационарлик:* $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = 0$, $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial\lambda = 0$;

3) *қаттиқмасликни тўлдириш:* $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.

Изоҳ. x^0 оптимал режага мос λ_0 векторнинг ягоналиги режанинг оддийлиги натижасидир (3-§, 1-леммага қ.).

2. Минимумнинг иккинчи тартибли зарурий шарти. Яна (1) масалани қараймиз, лекин $f(x)$, $g(x) \in C^{(2)}$ деб ҳисоблаймиз. 3-теоремага асосан (1) масаланинг оддий оптимал режа x^0 га ягона λ^0 Лагранж вектори мос келади.

Агар $\lambda_i^0 > 0$ $(\lambda_i^0 = 0)$ бўлса, x^0 режада актив бўлган $g_i(x) \leqslant 0$ чекланиш *қаттиқ (юмшоқ)* деб аталади. x^0 режада қаттиқ (юмшоқ) чеклашлар индекслар тўпламини

$$I_a^+(x^0) = \{i : g_i(x^0) = 0,\ \lambda_i^0 > 0\},\ (I_a^0(x^0) = = \{i : g_i(x^0) = 0,\ \lambda_i^0 = 0\})$$

орқали белгилаймиз.

4-теорема. Фараз қилайлик, x^0 режа (1) масаланинг оддий оптимал режаси, λ^0 — унга мос Лагранж вектори бўлсин. У ҳолда,

$$l'\partial g_i(x^0)/\partial x = 0;\ i \in I_a^+(x^0);\ l'\partial g_i(x^0)/\partial x \leqslant 0,\ i \in I_a^0(x_0) \quad (5)$$

тизимни қаноатлантирувчи l векторлар тўпламида қуйидаги квадратик шакл манфий бўлмайди:

$$l'\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2 \cdot l \geqslant 0$$

Исботи. Фараз қилайлик, l_* векторда (5) муносабатлар бажарилсин, лекин

$$l'_*[\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2]\, l_* < 0 \quad (6)$$

бўлсин. $I_a^0 = \{i \in I_a^0 : l'_*\partial g_i(x^0)/\partial x < 0\}$, $I_a^{00} = \{i \in I_a^0 : l'_*\partial g_i(x^0)/\partial x = 0\}$ деб белгилаймиз. Тегишлилик ҳақидаги лемма (3-§) га асосан, шундай $h(\beta) \in C^{(2)}$ $|\beta| \leqslant \beta_0$ $\beta_0 > 0$ функцияни қурамизки, $h(0) = x^0$, $dh(0)/d\beta = l_*$, $g_i(h(\beta)) \equiv 0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$, $i \in I_a^+ \cup I_a^{00}$ бўлади. Қурилишига кўра $h(\beta)$ векторларда

$$g'(h(\beta))\lambda^0 \equiv 0,\ |\beta| \leqslant \beta_0 \quad (7)$$

айният ва $i \in I_a^{+}(x^0) \cup I_a^{00}$ индексли чеклашлар бажарилади. Қолган чеклашларнинг ҳам бажарилишини текширамиз. x^0 режада пассив бўлган $g_i(x) \leqslant 0$ чеклашлар учун бу равшан, чунки $g_i(x^0) < 0$. Қолган, i, $i \in I_a^{0-}$ индексли чеклашлар учун I_a^{0-} тўпламнинг аниқланишидан, агар $\beta > 0$ сон етарли кичик бўлса, $g_i(h(\beta)) = g_i(x^0) + \beta l'_* \partial g_i(x^0)/\partial x + 0(\beta) < 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб, етарли кичик $\beta_0 > 0$ учун барча $h(\beta)$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ векторлар (1) масаланинг режаларидир. Мақсад функциясининг орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$f(h(\beta)) - f(x^0) = F(h(\beta), \lambda^0) - F(x^0, \lambda^0) - g'(h(\beta))\lambda^0 +$$
$$+ g(x^0)\lambda^0 = \beta l'_* \cdot \partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x + \beta^2 l'_* [\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2] l_*/2 +$$
$$+ 0(\beta^2) \tag{8}$$

Бу ерда қаттиқмасликни тўлдириш шартидан (3-теорема) ва (7) хоссадан фойдаланилган. Агар яна стационарлик шарти (3-теорема) ва (6) тенгсизликни ҳисобга олсак, етарли кичик $\beta > 0$ да (8) дан x^0 нинг оптималлигига зид бўлган $f(h(\beta)) < f(x^0)$ тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

3. Локал оптималликнинг етарлилик шарти. Фараз қилайлик, (1) масалада $f(x)$, $g(x) \in C^{(2)}$ шарт бажарилсин. Агар x^* режа учун шундай λ^* m-вектор топилиб,

$$\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0,\ g'(x^*)\lambda^* = 0,\ \lambda^* \geqslant 0,$$

муносабатлар бажарилса, x^* — шартли — стационар режа деб аталади.

5-теорема. x^* шартли — стационар режанинг локал оптимал бўлиши учун

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l > 0 \tag{9}$$

тенгсизликнинг

$$l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0,\ i \in I_a^{+}(x^*),$$
$$l' \partial g_i(x^*)/\partial x \leqslant 0,\ i \in I_a^{0}(x^*) \tag{10}$$

тизимни қаноатлантирувчи ҳар бир $l \neq 0$ векторда бажарилиши етарлидир.

Исботи. Фараз қилайлик, теорема ўринли бўлмасин. У ҳолда, ҳар бир $\varepsilon_k > 0$ ($\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$) учун шундай $x^k \neq x^*$ режа топиладики,

$$f(x^k) < f(x^*),\ g(x^*) \leqslant 0,\ \|x^k - x^*\| \leqslant \varepsilon_k$$

бажарилади. β^k сон ва n-вектор l^k ни шундай қурамизки,

$x^k = x^* + \beta_k l^k$, $\|l^k\| = 1$, $\beta_k > 0$ бўлсин. l^k, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кетликнинг лимит векторини l_*, $\|l_*\| = 1$, деб белгилаймиз.

x^k планда

$$0 \geqslant g_i(x^k) = g_i(x^* + \beta_k l^k) = g_i(x^*) + \beta_k l^{k'} \partial g_i(x^*)/\partial x +$$
$$+ \beta_k^2 l^{k'} [\partial^2 g_i(x^*)/\partial x^2 \, l^k/2 + 0(\beta^2), \quad i \in I_a(x^*); \qquad (11)$$
$$0 > f(x^k) - f(x^*) = \beta_k l^{k'} \partial f(x^*)/\partial x + \beta_k^2 l^{k'} [\partial^2 f(x^*)/\partial x^2] \, l^k/2 +$$
$$+ 0(\beta_k^2),$$

тенгсизликлар бажарилади. (11) тенгсизликларнинг иккала томонини $\beta_k > 0$ га бўлиб, $k \to \infty$ да лимитга ўтгандан кейин

$$0 \geqslant l_*' \partial g_i(x^*)/\partial x, \quad i \in I_a(x^*); \quad 0 \geqslant l_*' \partial f(x^*)/\partial x \qquad (12)$$

ни оламиз.

Агар бирор $i_* \in I_a^+(x^*)$ да $l_*' \partial g_{i*}(x^*)/\partial x < 0$ тенгсизлик бажарилади деб фараз қилсак, у ҳолда (12) дан ва $\dfrac{\partial F(x^*, x^*)}{\partial x} = 0$ тенгликдан ҳамда $\lambda_i^* > 0$, $i \in I_a^+(x^*)$ дан фойдаланиб

$$0 \geqslant l_*' \partial f(x^*)/\partial x = -\sum_{i \in I_a^+(x^*)} \lambda_i^* l_*' \partial g_i(x^*)/\partial x > 0$$

зиддиятга келамиз. Шундай қилиб, $l_*' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0$, $i \in I_a^+(\lambda^*)$. Бу (12) билан биргаликда ноль бўлмаган l^* вектор (10) тизимни қаноатлантиришини англатади.

(11) даги i-тенгсизлик $0 \geqslant g_i(x^k)$ ни $\lambda_i^* \geqslant 0$ га кўпайтирамиз ва шундан сўнг (11) даги барча тенгсизликларни қўшамиз. Натижада стационарлик шарти $\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0$ га асосан β_k га нисбатан чизиқли барча ҳадлар йўқолади. Ҳосил қилинган тенгсизликнинг иккала томонини $\beta_k^2/2$ га бўламиз. $k \to \infty$ да лимитга ўтиб, (10) тизимни қаноатлантирувчи l^* векторда бажариладиган (9) тенгсизликка зид бўлган $0 \geqslant l_*' [\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2] \, l_*$ тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

Изоҳ. Теоремадагидан кучлироқ бўлган қуйидаги натижа ҳам исботланган: x^* — *қатъий локал оптимал режадир:* шундай $\varepsilon < 0$ мавжуд бўлиб, $g(x) \leqslant 0$, $\|x - x^*\| \leqslant \varepsilon$, $x \neq x^*$, шартларни қаноатлантирувчи барча x лар учун $f(x^*) < f(x)$ ўринлидир.

4. Чизиқли чеклашлар. Агар (1) масалада чекланишлар чизиқли бўлса, яъни $g(x) = Ax - b$, A — mxn матрица, b m-вектор бўлса, Лагранж кўпайтувчилари қоидаси (3-теорема) ва оптималликнинг иккинчи тартибли зарурий шарти (4-теорема). x^0 режанинг оддийлигини фараз қилмасдан ҳам ўринли эканлигини исботлаш машқ сифатида ҳавола қилинади.

Агар 3-, 4-§ ларнинг натижаларини қўшсак, қуйидаги *чеклашлари тенгликлар ва тенгсизликлар типида бўлган* ушбу *чизиқсиз программалаш масаласида:*

$$f(x) \to \min, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad h_j(x) \leqslant 0, \quad j = \overline{m+1, p},$$

оптималликнинг зарурий ва етарли шартларини оламиз.

5. **Мисол.** 3-§ даги 2-мисолни ечишни давом этдирамиз. Аниқланган ифодада масала қуйидагига келтирилади:

$$f(x_1, x_2) \to \min, \ g(x_1, x_2) = 0, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \tag{13}$$

бу ерда, $f(x_1, x_2) = -x_1^2\sqrt{3/36} - x_2^2/16$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l$.

Агар $g_1(x) = g(x_1, x_2)$, $g_2(x) = -x_1$, $g_3(x) = -x_2$, $x = \{x_1, x_2\}$ функцияларни киритсак, (13) масала

$$f(x) \to \min, \quad g_1(x) = 0, \quad g_2(x) \leqslant 0, \quad g_3(x) \leqslant 0 \tag{14}$$

кўринишини олади.

(13) масаланинг режалари тўплами компакт бўлиб, $f(x_1, x_2)$ функция узлуксиздир. Шунинг учун (14) масала ечимга эга. Ушбу

$$\partial g_1/\partial x = \{1, 1\}, \ \partial g_2 | \partial x = \{-1, 0\}, \ \partial g_3/\partial x = \{0, -1\}$$

векторлар жуфт-жуфт чизиқли богланмаганлиги ҳамда фақат иккита чекланишлар актив бўлиши мумкинлиги: яъни $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, ёки $g_1(x) = 0$, $g_3(x) = 0$ бўлиши туфайли ҳар бир режа оддий бўлади. Лагранж функциясини тузайлик:

$$\partial F(x, \lambda) = -\sqrt{3}\ x_1^2/36 - x_2^2/16 + \lambda_1(x_1 + x_2 - L) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2$$

Кўпайтувчилар қоидаси ушбу

$$F(x, \lambda)/\partial x_1 = -x_1\sqrt{3}/18 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \ \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_2} = -x_2/8 +$$

$$+ \lambda_1 - \lambda_3 = 0;$$

$$\lambda_2 g_2(x) = -\lambda_2 x_1 = 0; \ \lambda_3 g_3(x) = -\lambda_3 x_2 = 0,$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - l = 0; \ \lambda_2 \geqslant 0, \ \lambda_3 \geqslant 0$$

муносабатларга олиб келади. Булардан x_2, λ_2, λ_3 ўзгарувчиларни йўқотиб, учта шартли — стационар режани

1) $x_1^* = 0$, $x_2^* = l$, $\lambda_1^* = l/8$, $\lambda_2^* = l/8$, $\lambda_3^* = 0$;

2) $x_1^* = l$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = l\sqrt{3}/18$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = l\sqrt{3}/18$;

3) $x_1^* = 9l/(9 + 4\sqrt{3})$, $x_2^* = 4l\sqrt{3})/(9 + 4\sqrt{3})$,

$\lambda_1^* = l\sqrt{3}/(18 + 8\sqrt{3})$, $\lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$, берадиган иккита $(\lambda_1 - x_1\sqrt{3}/18)\,x_1 = 0,\quad (\lambda_1 - l/8 + x_1/8)(l - x_1) = 0$ тенгламага келамиз.

Масалага мос квадратик шакл

$$l'\,[\,\overline{\partial^2 F}\,/\,\partial x^2]\,l = -\,l_1^2\sqrt{3}\,/\,18 - l_2^2\,/\,8 \tag{15}$$

кўринишга эга бўлади. Ҳар бир шартли-стационар нуқта учун (10) муносабатларни тузамиз. Биринчи режа учун (учинчи чеклаш пассив): $l'\partial g_1(x^*)\,/\,\partial x = l_1 + l_2 = 0,\ l'\,\partial g_2(x^*)\,/\,\partial x = -\,l_1 = 0$. Бу ердан, $l_1 = l_2 = 0$. Иккинчи режа учун (иккинчи чеклаш пассив): $l\,\partial g_1(x^*)\,/\,\partial x = l_1 + l_2 = 0,\ l'\partial g_3(x^*)\,/\,\partial x = -\,l_2 = 0$. Бу ердан $l_1 = l_2 = 0$. Учинчи режа учун (иккинчи ва учинчи чеклашлар пассив): $l'\partial g_1(x^*)\,/\,\partial x = l_1 + l_2 = 0$, бундан $l_1 = -\,l_2$.

Учинчи шартли-стационар режада (15) квадратик шакл манфий аниқланган. Шунинг учун 4-теоремага асосан бу режа масаланинг ечими бўлиши мумкин эмас. Дастлабки иккита режадан биттаси ечим бўлади. Дастлабки иккита режа 4-теоремани қаноатлантиради, лекин уларда оптималликнинг етарлилик шарти (5-теорема) бажарилмайди. Масаланинг ечимини $f(x)$ функциянинг қийматларини таққослаш натижасида топамиз. Биринчи режада $f(x^*) = -\,l^2\,/\,16$, иккинчисида $-\,f(x^*) = -\sqrt{3}\,n/36$, яъни $\{x_1^* = 0,\ x_2^* = l\}$ глобал оптимал режадир. Шундай қилиб, бутун симдан фақат квадрат ясалганда $L^2/16$ максимал юза ҳосил қилинади.

Изоҳ. Мисол фақат умумий усулларнинг намойиши учун келтирилган. Унинг ечими тенглик типидаги чекланишдан битта ўзгарувчини йўқотиш ёрдамида, мақсад функциясини кесмада таҳлил қилиш ёрдамида осон олинади.

5-§. СИЛЛИҚ БЎЛМАГАН МАСАЛАЛАР

Етарли силлиқ функциялар терминида ифодаланган чизиқсиз программалаш масалалари қудратли, яхши ривожланган классик аналитик усулларни қўллаш учун қулайдир. Кейинги йилларда чизиқсиз программалашда амалиёт талаблари асосида, элементлари мазкур параграфда баён қилинадиган *силлиқ бўлмаган оптималлаштириш масалалари назарияси* ривожлана бошлади.

1. Йўналишлар бўйича дифференциалланувчи функцияларни минималлаштириш. Агар

$$\partial f(x)\,\partial l = \lim\ [f(x + \varepsilon l) - f(x)]\,/\,\varepsilon,\quad \varepsilon \to 0+ \tag{1}$$

(чекли) лимит мавжуд бўлса, $f(x),\ x \in R_n$ функция x нуқтада $l,\ l \in R_n$ *йўналиш бўйича* $\partial f(x)\,/\,\partial l$ ҳосилага эга деб аталади. Юқоридаги лимит ихтиёрий $l \in R_n$ учун мавжуд бўлган ҳолда (ҳар бир олинган x учун) $l \to \partial f(x)\,/\,\partial l$ функция аниқланган бўлиб у $f(x)$ функциянинг *x нуқтада йўналишлар бўйича ҳосиласи* деб аталади. Охирги функция, равшанки, мусбат бир жинслидир: агар $l_1 = \alpha l_2,\ \alpha > 0$, бўлса,

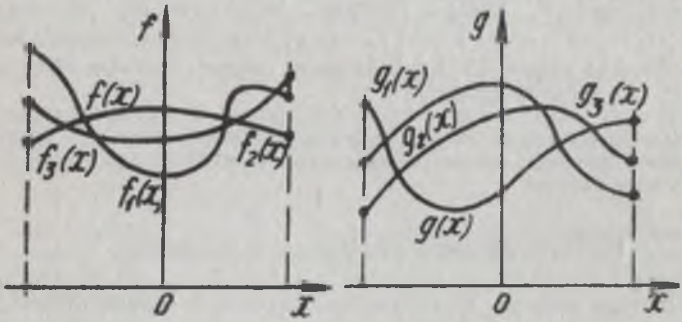
$\partial f(x)/\partial l_1 = \alpha \partial f(x)/\partial l_2$ бўлади. Шуни қайд этамизки, ҳосила йўналишлар бўйича узилишга эга бўлиши мумкин. Лекин шуни кўрсатиш мумкинки, агар $f(x)$ функция x нуқтанинг атрофида Липшиц шартини қаноатлантирса, $\partial f(x)/\partial l$, l нинг функцияси сифатида узлуксиз ҳамда Липшиц шартини қаноатлантиради. Кўрсатилган хосса, масалан, $f(x)$ қавариқ функция бўлганда ўринлидир.

Йўналишлар бўйича дифференциалланувчи функциялар синфи дифференциалланувчи функциялар синфидан анча кенгдир. У, масалан, қавариқ функциялар (II-боб) синфини ўз ичига олади.

Ушбу

$$f(x) = \max f_i(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \ (x \in R_n), \tag{2}$$

$$g(x) = \min g_i(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant m \ (x \in R_n) \tag{3}$$



III.7- чизма.

функцияларни қарайлик (III.7- чизма).

Агар $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функциялар узлуксиз бўлсалар, $f(x)$, $g(x)$ функциялар ҳам узлуксиз бўладилар. Ҳақиқатан, фараз қилайлик, $x^* - R_n$ да олинган ихтиёрий нуқта бўлсин. $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функцияларнинг узлуксизлигига асосан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ бўйича шундай $\delta_i > 0$, $\Delta_i > 0$, сонлар топиладики,

$$|f_i(x^*) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon \text{ бўлади, агар } \|x^* - x\| \leqslant \delta_i \text{ бўлса;}$$

$$|g_i(x^*) - g_i(x)| \leqslant \varepsilon \text{ бўлади, агар } \|x^* - x\| \leqslant \Delta_i \text{ бўлса,}$$

Дейлик, $\delta = \min \delta_i$, $i = \overline{1, m}$, $\Delta = \min \Delta_i$, $i = \overline{1, m}$ бўлсин.

У ҳолда,

$$\max_{1<i<m} |f_i(x^*) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon; \text{ агар } \|x^* - x\| \leqslant \delta \text{ бўлса;} \qquad (4)$$

$$\max_{1<i<m} |g_i(x^*) - g_i(x) \leqslant \varepsilon; \text{ агар } \|x^* - x\| \leqslant \Delta \text{ бўлса.} \qquad (5)$$

Ўз-ўзидан кўриниб турган

$$\max_{1<i<m} \{f_i(x^*) + f_i(x)\} \leqslant \max_{1<i<m} f_i(x^*) + \max_{1<i<m} f_i(x)$$

тенгсизликдан

$$\max_{1<i<m} f_i(x^*) = \max_{1<i<m} \{f_i(x) + (f_i(x^*) - f_i(x))\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1<i<m} f_i(x) + \max_{1<i<m} \{f_i(x^*) - f_i(x)\}$$

эканлигини оламиз.

Шунга ўхшаш,

$$\max_{1<i<m} f_i(x) \leqslant \max_{1<i<m} f_i(x^*) + \max_{1<i<m} \{f_i(x) - f_i(x^*)\}.$$

Охирги иккита тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\left|\max_{1<i<m} f_i(x^*) - \max_{1<i<m} f_i(x)\right| \leqslant \max_{1<i<m} |f_i(x^*) - f_i(x)|$$

Шунингдек, $\min\limits_{1<i<m} g_i(x) = -\max\limits_{1<i<m} (-g_i(x))$ бўлганлигидан

$$|\min_{1<i<m} g_i(x^*) - \min_{1<i<m} g_i(x)| \leqslant \max_{1<i<m} |g_i(x^*) - g_i(x)|$$

бўлади. Шундай қилиб, (4), (5) ларни ҳисобга олиб, $f(x)$, $g(x)$ функцияларнинг узлуксизлигини исботловчи

$$|f(x^*) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ агар } \|x^* - x\| \leqslant \delta \text{ бўлса;}$$
$$|g(x^*) - g(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ агар } \|x^* - x\| \leqslant \Delta \text{ бўлса,}$$

тенгсизликларни оламиз.

Ушбу $f(x) = \max\{x, -x\} = |x|$, $g(x) = \min\{x, -x\} = |x|$, $x \in R_1$, мисоллар кўрсатадики, (2), (3) функциялар $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, етарли силлиқ бўлганда ҳам дифференциалланувчи бўлмаслиги мумкин.

Фараз қилайлик, $f_i(x) \in C^{(1)}$, $g_i(x) \in C^{(1)}$, $i = \overline{1, m}$, бўлсин. У ҳолда $f(x)$, $g(x)$ функциялар йўналишлар бўйича дифференциалланувчи эканлигини кўрсатамиз.

$I(x)$ орқали $f_k(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1, m}\}$ бўлган барча k индекслар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда $\alpha = f(x) - \max\{f_i(x), i \overline{\in} I(x)\} > 0$. $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функцияларнинг узлуксизлигидан шундай мусбат ε^* сон мавжудки. x нуқтанинг ε^*-атрофидан олинган барча y лар учун:

$f_k(y) \geqslant f(x) - \alpha/2, \quad k \in I(x); \; f_i(y) \leqslant f(x) - \alpha/2, \quad i \,\overline{\in}\, I(x)$

тенгсизликлар бажарилади. Иккинчи тенгсизликни биринчисидан айириб, ихтиёрий $k \in I(x)$, $i \,\overline{\in}\, I(x)$, $\|x - y\| \leqslant \varepsilon^*$ лар учун $f_k(y) \geqslant f_i(y)$ эканлигини оламиз. Шундай қилиб, қуйидаги

$$f(y) = \max \{f_i(y),\ i = \overline{1, m}\} = \max_{\|x-y\| \leqslant \varepsilon^*} \{f_i(y),\ i \in I(x)\}, \tag{6}$$

хосса ўринлидир.

Фараз қилайлик, l — R_n даги ихтиёрий вектор бўлсин. Етарли кичик $\varepsilon > 0$ да (6) тенгликдан фойдаланиб,

$$[f(x + \varepsilon l) - f(x)]/\varepsilon = [\max \{f_i(x + \varepsilon l),\ i = \overline{1, m}\} -$$

$$- \max \{f_i(x),\ i = \overline{1, m}\}/\varepsilon = \max \{f_i(x + \varepsilon l) - f_i(x),$$

$$i \in I(x)\}/\varepsilon$$

эканлигини оламиз. Бундан

$$\partial f(x)/\partial l = \lim_{\varepsilon \to 0+} \max \{[f_i(x + \varepsilon l) - f_i(x)]/\varepsilon,\ i \in I(x)\} =$$

$$= \max \{\partial f_i(x)/\partial l,\ i \in I(x)\}.$$

Шунга ўхшаш, $\partial g(x)/\partial l$ учун формула $\min \{g_i(x).\ i = 1, m\} = -\max \{-g_i(x),\ i = \overline{1, m}\}$ ифодадан келиб чиқади.

Ушбу шартсиз минимум масаласини қараймиз:

$$f(x) \to \min, \quad x \in R_n,$$

бу ерда $f(x)$ функцияни x^0 нуқтада йўналишлар бўйича дифференциалланувчи деб ҳисоблаймиз.

1-теорема. x^0 режанинг оптимал бўлиши учун

$$\partial f(x^0)/\partial l \geqslant 0, \quad \forall\ l \in R_n$$

тенгсизлик зарур, $f(x)$ функция қавариқ бўлганда эса, етарли ҳамдир.

Исботи. Бирор $l_* \in R_n$ вектор учун $\partial f(x^0)/\partial l_* < 0$ деб фараз қилайлик. У ҳолда йўналиш бўйича ҳосиланинг (I) таърифига асосан шундай $\varepsilon_0 > 0$ сон мавжуд бўладики, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ бўлганда $[f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon < 0$ бўлади. Шундай қилиб, x^0 режанинг ихтиёрий атрофида шундай $x_\varepsilon =$

$= x^0 + \varepsilon l_*$ режа кўрсатиш мумкинки, $f(x_\varepsilon) < f(x^0)$ бўлади, яъни x^0 оптимал режа эмас.

Энди $f(x)$ қавариқ функция бўлсин. Фараз қилайлик, шундай x^0 план топилсинки, $f(x^*) < f(x^0)$ бўлсин. $l_* = x^* - x^0$ деб белгилаймиз. У ҳолда,

$$\partial f(x^0) / \partial l_* = \lim_{\varepsilon \to 0+} [f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)] / \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0+} [f(\varepsilon x^* + (1 - \varepsilon) x^0) - f(x^0)] / \varepsilon \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0+} [\varepsilon f(x^*) + (1 - \varepsilon) f(x^0) - f(x^0)] / \varepsilon = f(x^*) - f(x^0) < 0,$$

зиддият оламиз. Теорема исботланди.

2-теорема. Фараз қилайлик $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг атрофида Липшиц шартини қаноатлантирсин. Агар

$$\partial f(x^0) / \partial l > 0, \ \forall \ l, \ \| l \| = 1,$$

бўлса, x^0 — локал оптимал режадир.

Исботи. Фараз қилайлик, x^0 локал оптимал режа бўлмасин. У ҳолда, x^0 га яқинлашувчи шундай x_k, $k = 1, 2, \ldots$, кетма-кетлик мавжуд бўладики, $f(x_k) < f(x^0)$, $k = 1, 2, \ldots$, бўлади. $\varepsilon_k = \| x_k - x^0 \|$, $l_k = (x_k - x^0) / \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$, деб олайлик. l_n да бирлик сферанинг компактлигидан $\{l_k\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. Белгилашларни ўзгартирмасдан $k \to \infty$ да $l_k \to l$, $\| l \| = 1$ деб ҳисоблаймиз. Йўналиш бўйича ҳосила таърифидан, $\lim\limits_{k \to \infty} [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)] / \varepsilon_k = \partial f(x^0 / \partial l > 0$ га эга бўламиз.
Иккинчи томондан, етарли катта k учун:

$$[f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)] / \varepsilon_k = [f(x^0 + \varepsilon_k l_k) - f(x^0)] / \varepsilon_k + [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0 + \varepsilon_k l_k)] / \varepsilon_k \leqslant [f(x_k) - f(x^0)] / \varepsilon_k + C \| l - l_k \|,$$

бу ерда C — $f(x)$ функциянинг Липшиц ўзгармасидир. Бу ердан

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)] / \varepsilon_k \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} [f(x_k) - f(x^0)] / \varepsilon_k \leqslant 0.$$

Олинган зиддият теоремани исботлайди.

Энди чекланишлари тенгсизликлар типида бўлган минималлаштириш масаласини қараймиз:

$$f(x) \to \min, \quad g_i(x) \leqslant 0, \ i = \overline{1, m}, \qquad (7)$$

Бу ерда $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функцияларни x^0 нуқтада йўналишлар бўйича дифференциалланувчи деб ҳисоблаймиз. x^0 нуқтада актив, яъни $g_i(x^0)=0$ ни қаноатлантирадиган чекланишлар индекслари $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ тўпламини $I(x^0)$ деб белгилаймиз. Агар $\partial g_i(x^0)/\partial l < 0$ бўлса, $l \in R_n$ вектор x^0 нуқтада (7) масаланинг i $(i \in I(x^0))$ *чеклаши бўйича муносиб йўналиш* деб аталади. (7) масаланинг x^0 нуқтада барча актив чекланишлари бўйича муносиб йўналишлари тўпламини $K_g(x^0)$ деб белгилаймиз.

3-теорема. Фараз қилайлик, $K_g(x^0) \neq \varnothing$ бўлсин. x^0 режанинг оптимал бўлиши учун

$$\partial f(x^0)/\partial l \geqslant 0, \quad \forall\, l \in K_g(x^0), \tag{8}$$

бажарилиши зарур, $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функциялар қавариқ бўлганда етарли ҳамдир.

Исботи. Фараз қилайлик, шундай $l_* \in K_g(x^0)$ вектор топилиб, $\partial f(x^0)/\partial l_* < 0$ бўлсин. $l_* \in K_g(x^0)$ бўлганлигидан, $\partial g_i(x^0)/\partial l_* < 0$, $i \in I(x_0)$. Йўналиш бўйича ҳосиланинг таърифидан шундай $\varepsilon_0 > 0$ ни кўрсатиш мумкинки, барча $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ лар учун

$$[f(x^0+\varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon < 0; \ [g_i(x^0+\varepsilon l_*) - g_i(x^0)]/\varepsilon < 0,$$

$$i \in I(x^0),$$

бўлади. Бундан, $g_i(x^0)=0$, $i \in I(x^0)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$f(x^0+\varepsilon l_*) < f(x^0), \ g_i(x^0+\varepsilon l_*) < 0, \ i \in I(x^0), \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

ни оламиз. $g_i(x^0) < 0$, $i \,\bar{\in}\, I(x^0)$ бўлгани учун, $g_i(x)$, $i \,\bar{\in}\, I(x^0)$ функцияларнинг узлуксизлигидан шундай соннинг мавжуд бўлиши келиб чиқадики, $g_i(x^0+\varepsilon l_*) < 0$, $i \,\bar{\in}\, I(x_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ бўлади. $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ деб олиб, x^0 режанинг оптималлигига қарама-қарши,

$$f(x^0+\varepsilon l_*) < f(x^0), \ g_i(x^0+\varepsilon l_*) < 0, \ i=\overline{1,m}, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^*,$$

тенгсизликларни оламиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функциялар қавариқ бўлсин. Шундай x^* режа мавжуд бўлиб, $g_i(x^*) \leqslant 0$, $i=\overline{1,m}$, $f(x^*) < f(x^0)$ бўлсин. $l_* = x^* - x^0$ деб оламиз. У ҳолда

$$\partial f(x^0)/\partial l_* = \lim_{\varepsilon\to 0+} [f(x^0+\varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon \leqslant f(x^*) - f(x^0) < 0.$$

Шунга ўхшаш:

$$\partial g_i(x^0)/\partial l_* = \lim_{\varepsilon\to 0+} g_i(x^0+\varepsilon l_*)/\varepsilon \leqslant 0, \quad i\in I(x^0).$$

Фаразимизга кўра $K_g(x^0)\neq\varnothing$ бўлганлигидан, шундай l_0 вектор мавжуд бўладики, $\partial g_i(x^0)/\partial l_0 < 0$, $i\in I(x^0)$ бўлади. $l_\varepsilon = \varepsilon l_0 + (1-\varepsilon)l_*$ векторни киритамиз. $\partial g_i(x^0)/\partial l$ функция скаляр l ўзгарувчининг қавариқ функцияси бўлганлигидан, $0<\varepsilon\leqslant 1$ бўлганда

$$\partial g_i(x^0)/\partial l_\varepsilon \leqslant \varepsilon\partial g_i(x^0)/\partial l_0 + (1-\varepsilon)\,\partial g_i(x^0)/\partial l_* < 0, \quad i\in I(x^0),$$

эканлигини оламиз. Бундан ташқари, $\partial f(x^0)/\partial l$ нинг l аргументнинг функцияси сифатида узлуксизлигидан шундай ε_0 мусбат сонни кўрсатиш мумкинки, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ бўлганда $\partial f(x^0)/\partial l_\varepsilon < 0$ бўлади. Шундай қилиб, етарлича кичик $\varepsilon<0$ учун $l_\varepsilon\in K_g(x^0)$, $\partial f(x^0/\partial l<0$ ни оламиз. Теорема исботланди.

Изоҳлар. 1. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг атрофида Липшиц шартини қаноатлантирса, теореманинг шартларида (8) тенгсизлик $K_g(x^0)$ тўпламнинг $\overline{K_g}(x^0)$ ёпилмасида ётувчи барча l векторлар учун бажарилишини кўрсатиш қийин эмас.

2. Фараз қилайлик, $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функциялар x^0 нуқтанинг атрофида Липшиц шартини қаноатлантирсин. Агар $\partial g_i(x^0)/\partial l\leqslant 0$, $i\in I(x^0)$ ни қаноатлантирувчи барча l лар учун $\partial f(x^0)/\partial l>0$ бўлса, x^0— қатъий локал оптимал пландир (исботланг!).

2. Экстремал масалалар умумий назариясининг элементлари. Ҳозирги пайтда оптималликнинг зарурий шартини келтириб чиқаришга бағишланган адабиётда кенг тарқалган усул тўпламларнинг ҳар хил локал яқинлаштирилиши билан боғлангандир. Бу усулнинг моҳияти қуйидагичадир. Масаланинг параметрлари ва оптимал режа бўйича кесишмалари бўш бўлган қандайдир тўпламлар тизими қурилади. Зарурий шартларни келтириб чиқариш икки босқичга бўлинади. Дастлаб тўпламларнинг ҳар бири текширилаётган нуқта яқинида бошқа, соддароқ тузилишга эга бўлган тўпламга (масалан, конусга) яқинлаштириладики, яқинлаштиришлар ҳам кесишмайдиган тизим ҳосил қилсин. Сўнгра яқинлаштирувчи тўпламларга ёки (агар улар қавариқ бўлмаса) уларнинг қандайдир тўплам остиларига қавариқ тўпламларнинг ажралувчанлиги ҳақидаги теорема ёки унинг қандайдир турлангани қўлланилади. Оптималлик шартларини келтириб чиқаришдаги мавжуд тарҳлар тўпламлар тизимларини қуриш усуллари билан (*аргументлари фазосида*, *образлар фазосида*) ҳамда қўлланиладиган яқинлаштиришларнинг типлари билан фарқланади.

Тўпламларнинг локал яқинлаштиришлари ичида кенг ёйилганлари *уринма* ва *ички конуслардир*. Фараз қилайлик, $\Omega \in R_n$, $x^0 \in \bar{\Omega}$ бўлсин. Агар z нуқтанинг ихтиёрий U_z атрофи ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $z_1 \in U_z$ нуқта ва $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ сонлар топилиб, $x^0 + \varepsilon_1 z_1 \in \Omega$ бўлса, $z \in R_n$ вектор Ω *тўпламга x^0 нуқтада уринма йўналиш* дейилади. Барча уринма йўналишлар тўплами R_n да бўш бўлмаган, ёпиқ, қавариқ бўлмаслиги мумкин бўлган конусни ҳосил қилади*). У Ω тўпламга x^0 нуқтада уринма конус деб аталади ва $T(x^0 / \Omega)$ деб белгиланади.

Ω тўпламга x^0 нуқтада ички конус ($I(x^0/\Omega)$ деб белгиланади) қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $z \in R_n$ векторлар тўпламидан иборатдир: z нуқтанинг шундай U_z атрофи ва $\varepsilon_0 > 0$ сон мавжуд бўладики, барча $z_1 \in U_z$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ лар учун $x^0 + \varepsilon z_1 \in \Omega$. $I(x^0/\Omega)$ тўпламнинг элементлари ички йўналишлар деб аталади. Равшанки, $I(x^0/\Omega)$ очиқ конус бўлиб, бўш бўлиши ҳам мумкин ($I(x^0)/\Omega) \neq \varnothing$ бўлиши учун, Ω тўплам бўш бўлмаган ички қисмга эга бўлиши зарурдир). Бунда ҳамиша $I(x^0/\Omega) \subset T(x^0|\Omega)$. Агар $x^0 \overline{\in} \bar{\Omega}$ бўлса, $T(x^0|\Omega) = I(x^0|\Omega) = \varnothing$ деб ҳисоблашни шартлашамиз.

Уринма ва ички конусларнинг таърифларидан бевосита келиб чиқадиган баъзи хоссаларни келтирамиз:

1. Агар $\Omega_1 \subset \Omega_2$ бўлса, $T(x^0|\Omega_1) \subset T(x^0|\Omega_2)$, $I(x^0|\Omega_1) \subset I(x^0|\Omega_2)$.
2. $T(x^0|\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset T(x^0|\Omega_1) \cap T(x^0|\Omega_2)$.
3. $I(x^0|\Omega_1 \cap \Omega_2) = I(x^0|\Omega_1) \cap I(x^0|\Omega_2)$.
4. $T(x^0|\Omega \cap \Omega_2) \supset T(x^0|\Omega_1) \cap I(x^0|\Omega_2)$.
5. $R_n \setminus T(x^0|\Omega) = I(x^0|R_n \setminus \Omega)$.

Учинчи ва бешинчи хоссалардан хусусий ҳолда Дубовицкий — Милютиннинг биринчи теоремаси номи билан маълум бўлган қуйидаги натижа келиб чиқади. У кўпгина оптималлаштириш масалаларида экстремум шартларини келтириб чиқаришнинг асосида ётади.

---

* Шуни эслатамизки, агар ҳар қандай $\lambda > 0$, $x \in K$ бўлганда $\lambda x \in K$ бўлса, K тўплам конус дейилади.

4-теорема. Фараз қилайлик, $x^0 \in \bigcap_{i=0}^{m} \Omega_i$ бўлсин. Агар $\bigcap_{i=0}^{m} \Omega_i = \varnothing$ бўлса,

$$\bigcap_{i=0}^{m} I(x^0 \mid \Omega_i) \cap T(x^0 \mid \Omega_0) = \varnothing.$$

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$—R_n да олинган ихтиёрий функция $x^0 \in R_n$ бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай мусбат ε сон ва z нуқтанинг шундай U_z атрофини кўрсатиш мумкин бўлсаки,

$$|(\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0))/t - \partial\varphi(x^0)/\partial z| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in]\,0,\ \delta\,[,$$
$$z_1 \in U_z$$

бажарилса, $\varphi(x)$ функцияни x нуқтада z йўналиш бўйича текис дифференциалланувчи деб атаймиз. Бошқача сўз билан айтганда, агар

$$\partial\varphi(x^0)/\partial z = \lim_{t \downarrow 0,\ z_1 \to z} (\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0))/t$$

лимит мавжуд бўлса, $\varphi(x)$ функция x^0 нуқтада z йўналиш бўйича текис дифференциалланувчидир.

Навбатдаги теорема $\varphi(x)$ функциянинг сатҳ тўпламларига уринма ва ички конусларни тасаввур қилишга имкон беради.

5-теорема. Фараз қилайлик, $\Omega_1 = \{x \in R_n : \varphi(x) < \varphi(x^0\}$, $\Omega_2 = \{x \in R_n : \varphi(x) \leqslant \varphi(x^0)\}$ ҳамда $\varphi(x)$ функция x^0 нуқтада йўналишлар бўйича текис дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда,

$$I(x^0 \mid \Omega_1) \supset \{z \in R_n : \partial\varphi(x^0)/\partial z < 0\}, \tag{9}$$

$$T(x^0 \mid \Omega_2) \subset \{z \in R_n : \partial\varphi(x^0)/\partial z \leqslant 0\}. \tag{10}$$

Агар бундан ташқари $\partial\varphi(x^0)/\partial z$ функциянинг z функцияси сифатида қавариқ бўлса ва $\partial\varphi(x^0)/\partial \bar{z} < 0$ ни қаноатлантирувчи шундай $\bar{z}$ вектор мавжуд бўлса, (9), (10) ларда тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик, $\partial\varphi(x^0)/\partial z < 0$ бўлсин. У ҳолда таърифга кўра, шундай мусбат δ сон ва z нуқтанинг шундай U_z атрофини кўрсатиш мумкинки, барча $t \in]\,0,\ \delta\,[$, $z_1 \in U_\varepsilon$ лар учун $\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0) < 0$ бўлади, яъни $z \in I(x^0 \mid \Omega_1)$. (10) муносабат ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

Теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. Дейлик, $z \in I(x^0 \mid \Omega_1)$ бўлсин. У ҳолда, z нуқтанинг шундай U_z атрофи ва шундай $\varepsilon_0 < 0$ сон мавжуд бўладики, барча $t \in]0, \varepsilon_0[$, $z_1 \in U_z$ лар учун $\varphi(x^0 + tz_1) < \varphi(x^0)$ бўлади. $z_1 = z + \varepsilon(z - \bar{z})$ деб оламиз. Равшанки, $z_1 \in U_z$, агар $\varepsilon > 0$ етарли кичик бўлса; $\partial\varphi(x^0)/\partial z \leqslant 0$. Шунингдек, $z = (z_1 + \varepsilon\bar{z})/(1 + \varepsilon)$ га эга бўламиз. $\partial\varphi(x^0)/\partial z_1$ нинг z нинг функцияси сифатида қавариқлигидан

$$\partial\varphi(x^0)/\partial z \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\partial\varphi(x^0)/\partial z_1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\partial\varphi(x^0)/\partial\bar{z} < 0$$

эканлигини оламиз, яъни (9) тенглик сифатида бажарилади.

Энди (10) дан тескари тегишлиликни кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\partial\varphi(x^0)/\partial z \leqslant 0$ ҳамда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон ва z нуқтанинг ихтиёрий U_z атрофи берилган бўлсин. $z_1 = z + \bar{\delta}(\bar{z} - z)$ деб оламиз. Етарли кичик $\delta > 0$ учун $z_1 \in U_\varepsilon$ га эга бўламиз. Ундан ташқари, $\partial\varphi(x^0)/\partial z$ нинг z бўйича қавариқлигидан $\partial\varphi(x_0)/\partial z_1 < 0$ бўлади. Демак, етарли кичик $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ учун $\varphi(x^0 + \varepsilon_1 z_1) \leqslant \varphi(x^0)$ тенгсизлик бажарилади, яъни $x^0 + \varepsilon_1 z_1 \in \Omega_2$, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Исбот қилинган теорема оптималлаштириш масалаларида тенгсизликлар типидаги чекланишларни таҳлил қилишда қўлланилади. Тенгликлар ёрдамида берилган тўплам учун уринма конус нимадан иборат эканлигини аниқлаймиз (бундай тўпламга ички конус, равшанки, бўш бўлади).

6-теорема. Фараз қилайлик, $\Omega = \{x \in R_n : g_i(x) = g_i(x^0), i = \overline{1, m}\}$ бўлсин, бу ерда $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функциялар x^0 нуқтада узлуксиз дифференциалланувчидир. У ҳолда,

$$T(x^0 \mid \Omega) \subset \{z \in R_n : \text{grad } g_i'(x^0)\, z = 0, \quad i = \overline{1, m}\}. \tag{11}$$

Агар бундан ташқари градиентлар векторлари grad $g_i(x^0)$, $i = \overline{1, m}$, чизиқли боғланмаган бўлсалар, (11) формулада тенглик ўринлидир.

Исботи. Ушбу $g(x) = \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ функцияни киритайлик. У ҳолда, $\Omega = \{z \in R_n : g(x) = g(x^0)\}$. Фараз қилайлик, $z \in T(x^0 \mid \Omega)$ бўлсин, яъни мос равишда z ва нолга яқинлашувчи $\{z_k\} \in R_n$ ва $\varepsilon_k > 0$ кетма-кетликлар мавжуд бўладики, $g(x^0 + \varepsilon_k z_k) = g(x^0)$, $k = 1, 2, \dots$, бўлади. Лекин, $g(x^0 + \varepsilon_k z_k) - g(x^0) = [\partial g(x^0)/\partial x]\, z_k + 0(\varepsilon_k)$ бўлганлигидан, (11) муносабат келиб чиқади.

Энди фараз қилайлик, $\operatorname{grad} g_i(x^0)$, $i=\overline{1,m}$ векторлар чизиқли эркли бўлсин, яъни $\partial g(x^0)/\partial x - m \times n$ матрицанинг ранги m га тенг ва $[\partial g(x^0)/\partial x]z = 0$ бўлсин. $\Phi(t, u) = g(x^0 + tz + u'\partial g(x^0)/\partial x) - g(x^0)$ функцияни қараймиз. Равшанки, $\Phi(0, 0) = 0$, $\partial\Phi(0, 0)/\partial u = [\partial g(x^0)/\partial x]$ $[\partial g(x^0)/\partial x]$ — махсус бўлмаган матрицадир. Ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай мусбат δ сон ва $u(t)$, $t \in]-\delta, \delta[$, m вектор-функция мавжуд бўладики, $u(0) = 0$; $\Phi(t, u(t)) \equiv 0$, $t \in (-\delta, \delta)$; $du(0)/dt = -[\partial\Phi(0, 0)/\partial u]^{-1} \times \partial\Phi(0, 0)/\partial t = 0$ бўлади. $z(t) = z + u'(t)[\partial g(x^0)/\partial x]/t$, $t \in]0, \delta[$ деб олайлик. Унда $\lim\limits_{t\downarrow 0} z(t) = z$ га эга бўламиз. Бунда $g(x^0 + tz(t)) = g(x^0)$, яъни $z \in T(x^0 \mid \Omega)$.

Юқорида келтирилган тасдиқлар оптималлаштириш масалаларини текширишни қандайдир конуслар тизимининг кесишмаслиги шартларини олишга келтириш имконини беради. Одатда бундай шартлар қўшма конуслар деб аталган конуслар атамаларида ифода қилинади.

Фараз қилайлик, K конус R_n фазодаги (учи нолда бўлган) конус бўлсин. Барча $x \in K$ лар учун $x'x^* \leqslant 0$ ни қаноатлантирувчи $x^* \in R_n$ векторлар тўплами бўш бўлмаган қавариқ ёпиқ конусни ҳосил қилади. У K га нисбатан қутбли деб аталади ва K^* орқали белгиланади.

7-теорема. Фараз қилайлик, K_1, K_2 қавариқ конуслар бўлсин. У ҳолда,

$$(K_1 \cap K_2)^* \supset K_1^* + K_2^*. \tag{12}$$

Агар ундан ташқари, $K_1 \cap \overset{\circ}{K_2} \neq \varnothing$ бўлса, (12) да тенглик ўринли бўлади ($K^\circ - K$ конуснинг ички қисмидир).

Исботи. (12) тегишлилик ўз-ўзидан равшан. Теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $K_1 \cap \overset{\circ}{K_2} \neq \varnothing$ бўлсин. Дейлик, $x^* \in (K_1 \cap K_2)^*$ бўлсин. R_{n+1} фазада иккита $\widetilde{K}_1 = \{\{x, \mu\} : x \in \widetilde{K}_1, \mu \geqslant 0\}$, $\widetilde{K}_2 = \{\{x, \mu\} : x \in K_2, \mu \leqslant x'x^*\}$ тўпламни қараймиз. Фаразимизга кўра, $\widetilde{K}_2^0 = \{\{x, \mu\} : x \in \overset{\circ}{K_2}, \mu < x'x^*\} \neq \varnothing$. Бунда $\widetilde{K}_1 \cap \overset{\circ}{\widetilde{K}_2} = \varnothing$. Ҳақиқатан, агар $\{x, \mu_1\} \in \widetilde{K}_1 \cap \overset{\circ}{K_2}$ деб фараз қилсак, $x_1 \in K_1 \cap K_2$, $x_1'x^* > 0$ га эга бўламиз, бу $x^* \in K_1 \cap K_2)^*$ деган фаразимизга зиддир. Шундай қилиб, $\widetilde{K}_1 \cap \overset{\circ}{\widetilde{K}_2} = \varnothing$. Демак, $\widetilde{K}_1$ ва $\widetilde{K}_2$ тўпламлар ажралувчидир, яъни шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган x_1^* вектор ва γ сон мавжуд бўладики,

$$x' x_1^* + \nu\mu \leqslant 0, \ \forall \{x, \mu\} \in \overline{K}_1,$$

$$x'x_1^* + \gamma\mu \geqslant 0, \quad \forall \{x, \mu\} \in \widehat{K}_2, \tag{14}$$

(бу ерда $\{0, 0\} \in K_1 \cap K_2$ эканлиги ҳисобга олинади).

(13) дан барча $x \in K_1$ лар учун, $x'x_1^* \leqslant 0$ эканлиги келиб чиқади, яъни $x_1^* \in K_1^*$ ва $\gamma \leqslant 0$. Бунда $\gamma \neq 0$, чунки акс ҳолда (14) дан барча $x \in K_2$ лар учун $x'x_1^* \geqslant 0$ эканлиги келиб чиқар эди. Бу эса, $x_1^* \neq 0$ бўлганлигидан, K_1 ва K_2 конусларнинг ажралувчан эканлигини англатиб, $K_1 \cap \cap \overset{\circ}{K}_2 \neq \varnothing$ деган фаразимизга зиддир. Шундай қилиб, $\nu < < 0$. Умумийликни бузмасдан $\nu = -1$ деб ҳисоблаш мумкин. (14) дан барча $x \in K_2$ лар учун $x'x_1^* - x'x^* \geqslant 0$ эканлигини оламиз, яъни $x_2^* = x^* - x_1^* \in K_2^*$, теорема исботланди.

7-теоремадан фойдаланиб ажралувчанлик теоремасининг қавариқ конуслар учун қандайдир умумлашмаси ҳисобланган *Дубовицкий — Милютиннинг иккинчи теоремаси* ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

8-теорема. Фараз қилайлик, $K_1, K_2, \ldots, K_m$ конуслар R_n да очиқ қавариқ конуслар бўлиб, K_0 қавариқ конус бўлсин. $\bigcap\limits_{i=0}^{m} K_i = \varnothing$ бўлиши учун шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган. $x_i^* \in K_i^*$, $i = \overline{0, m}$, векторлар мавжуд бўлиб,

$$x_0^* + x_1^* + \ldots + x_m^* = 0 \tag{15}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

(15) тенглик *Эйлер тенгламаси* деб аталади.

Исботи. *Зарурийлиги.* l, $0 < l \leqslant m$ деб шундай индексни белгилаймизки, $\bigcap\limits_{i=0}^{l-1} K_i \neq \varnothing$, лекин $\bigcap\limits_{i=0}^{l} K_i = \varnothing$ бўлсин. У ҳолда K_l ва $K = \bigcap\limits_{i=0}^{l-1} K_i$ қавариқ конуслар ажралувчандирлар, яъни шундай ноль бўлмаган x^* вектор мавжуд бўладики, барча $x \in K$ лар учун $x'x^* \leqslant 0$ ва $x \in K_l$ лар учун $x'x^* \geqslant 0$ бўлади. 7-теоремани қўллаб $x_i^* \in K_i^*$, $i = = \overline{0, l-1}$ ларда $x^* = x_0^* + x_1^* + \ldots + x_{l-1}^*$ эканлигини оламиз. $x_l^* = -x^*$, $x_i^* = 0$, $i = \overline{l+1, m}$ деб олиб, Эйлер тенгламасига келамиз.

Аксинча, қандайдир $x_i^* \in K_i^*$, $i = \overline{0, m}$ лар учун (15) тенглик бажарилсин, шунинг билан бирга x_i^*, $i = \overline{0, m}$ векторлар ичида ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли. (15) даги нолдан фарқли векторга мос индексни i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant m$ деб белгилаймиз. У ҳолда барча $x \in K_{i_0}$ лар учун $x^1 x_{i_0}^* \leqslant 0$ ва (15) га асосан барча $x \in K = \bigcap_{i \neq i_0} K_i$ лар учун $x^1 x_{i_0}^* \geqslant 0$, яъни $x_{i_0}^*$ вектор K_{i_0} ва K тўпламларни ажратади. Бу эса $K \cap K_{i_0} = \bigcap_{i=0}^{m} K_i = \varnothing$ эканлигини англатади. Теорема исботланди.

Изоҳ. Биринчи ва иккинчи теоремалар—оптималликнинг тўғри ва иккиланма шартларидан иборатдир.

Қўшма конусларга мисоллар келтирамиз.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ — субчизиқли функционал бўлсин, яъни ихтиёрий x_1, $x_2 \in R_n$ лар учун $\varphi(x_1 + x_2) \leqslant \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ ва ихтиёрий $x \in R_n$, $\lambda \geqslant 0$ лар учун $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Ушбу $K = \{z \in R_n : \varphi(z) < 0\}$ тўпламни қараймиз. Равшанки, K очиқ қавариқ конусдир.

9-теорема. Фараз қилайлик, $K \neq \varnothing$ бўлсин. У ҳолда,

$$K^* = \{\alpha x^* : \alpha \geqslant 0,\ z'x^* \leqslant \varphi(z) \text{ барча } z \in R_n \text{ лар учун}\}. \quad (16)$$

Исботи. (16) нинг ўнг томонида турган тўпламни K_1 орқали белгилаймиз. $y^* \in K_1$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $z \in K$ учун $z'y^* = \alpha z'x^* \leqslant \alpha\varphi(z) \leqslant 0$ ни оламиз, яъни $y^* \in K^*$. Энди $y^* \in K^*$ бўлсин. Барча $z \in \overline{K} = \{z \in R_n : \varphi(z) \leqslant \leqslant 0\}$ лар учун $z'y^* \leqslant 0$ эканлиги ўз-ўзидан равшан, яъни $y^* \in \overline{K}^*$. Фараз қилайлик, $y^* \overline{\in} K_1$ бўлсин. У ҳолда y^* векторни қавариқ ёпиқ K_1 конусдан қатъий ажратиш мумкин, яъни шундай $\overline{z} \in R_n$ вектор мавжуд бўладики, барча $\alpha \geqslant 0$ лар ва $z'\ x^* \leqslant \varphi(z)$, $z \in R_n$ ни қаноатлантирувчи $x^* \in R_n$ лар учун

$$\alpha \overline{z}' x^* < \overline{z}' y^* \quad (17)$$

бўлади. $\alpha = 0$ бўлганда (17) дан, $\overline{z}' y^* \geqslant 0$ тенгсизликни оламиз. $y^* \in \overline{K}^*$ бўлганлигидан, теоремани исбот қилиш учун, $\varphi(\overline{z}) \leqslant 0$ эканлигини кўрсатиш етарли. (17) ни $\alpha > 0$ га бўлиб ва α ни ∞ га интилтириб, $z'x^* \leqslant \varphi(z)$, $z \in R_n$ ни қаноатлантирувчи барча $x^* \in R_n$ лар учун $\overline{z}'\ x^* \leqslant 0$ эканлигини оламиз. Фараз қилайлик, $\varphi(\bar{z}) > 0$ бўлсин. У ҳолда, $\{\bar{z}, 0\} \in R_{n+1}$ вектор қавариқ ёпиқ $M = \{\{z, \mu\} \in R_{n+1} : \varphi(z) \leqslant \mu\}$ конусга қарашли бўлмайди. Ажралувчанлик ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\{x_1^*, \beta\} \in R_{n+1}$ вектор топиладики, барча $\{z, \mu\} \in M$ лар учун

$$\beta\mu + z'x_1^* < \bar{z}'x_1^* \tag{18}$$

бўлади. (18) дан $z = \bar{z}$ бўлганда $\beta < 0$ эканлиги келиб чиқади. Умумийликни бузмасдан, $\beta = -1$ деб ҳисоблаймиз. Барча $z \in R_n$ лар учун

$$z'x_1^* < \varphi(z) + \bar{z}'x_1^* \tag{19}$$

эканлигини оламиз. $z = 0$ бўлганда (19) дан $\bar{z}' x_1^* > 0$ эканлиги келиб чиқади. Фараз қилайлик, $z \in R_n$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\alpha > 0$ учун

$$\alpha z'x_1^* < \varphi(\alpha z) + \bar{z}'x_1^*,$$

$\varphi(x)$ нинг субчизиқлилигини ҳисобга олганда охирги тенгсизликдан $z'x_1^* \leqslant \varphi(z)$, $z \in R_n$ эканлиги келиб чиқади ва юқорида исбот қилинганига кўра, x_1^* вектор учун $\bar{z}' x_1^* \leqslant 0$ тенгсизлик бажарилиши керак. Олинган зиддият теоремани исботлайди.

9-теореманинг исботига ўхшаш равишда қуйидаги тасдиқнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

10-теорема. Фараз қилайлик, $x_i^* \in R_n$, $i = \overline{1, m}$ бўлсин. $K = \{z \in R_n : z'x_i^* = 0,\ i = \overline{1, m}\}$ деб оламиз. У ҳолда

$$K^* = \{x^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^*,\ \alpha_i \in R,\ i = \overline{1, m}\}.$$

Қуйидаги

$$f(x) \to \min,\ g_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m}\ x \in \Omega, \tag{20}$$

масалани қараймиз. Бу ерда $\Omega \subset R_n$; $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ лар R_n да скляр функциялар. Дейлик, x° (20) масаланинг локал оптимал режаси бўлсин. $\Omega_0 = \Omega$; $\Omega_i = \{x \in R_n : g_i(x) < 0\}$, $i = \overline{1, m}$; $\Omega_{m+1} = \{x \in R_n : f(x) < f(x^\circ)\}$ деб белгилаймиз. У ҳолда ўз-ўзидан равшанки, $\bigcap_{i=0}^{m+1} \Omega_i \cap U = \varnothing$, бу ерда U x° нуқтанинг қандайдир атрофидир. Фараз қилайлик, $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ функциялар x° нуқтада йўналишлар бўйича текис дифференциалланувчи бўлсин. $I(x^\circ)$ деб, $g_i(x^\circ)=0$ бўлган $i=\{1, 2, \ldots, m\}$ индекслар тўпламини белгилаймиз. $i=\{1, 2, \ldots, m\}\setminus I(x^\circ)$ учун $I(x^\circ|\Omega)=R_n$ ва $I(x^0|U)=R_n$ бўлганлигидан, 4- ва 5- теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

$$\partial f(x^\circ)/\partial z<0;\ \partial g_i(x^\circ)/\partial z<0,\ i\in I(x^\circ);\ z\in T(x^\circ|\Omega),$$

тизим (z га нисбатан) биргаликда бўлмайди. Ифодаланган оптималликнинг зарурийлик шарти конуслар тизимининг кесишмаслик шартидан иборатдир. Қўшимча равишда йўналишлар бўйича ҳосилалар, яъни $\partial f(x^\circ)/\partial z$, $\partial g_i(x^\circ)/\partial z$, $i=\overline{1,m}$, z нинг функциялари сифатида қавариқ, $T(x^\circ|\Omega)$ эса қавариқ конус бўлсин деб фараз қиламиз.

11- теорема. Фараз қилайлик, x° элементлари юқорида санаб ўтилган шартларни қаноатлантирувчи (20) масаланинг локал оптимал режаси бўлсин. У ҳолда бир вақтда нолга тенг бўлмаган, манфиймас λ_i, $i=\overline{0,m}$ сонлар ва шундай $x_i^*\in R_n$, $i=\overline{0,m}$ векторлар мавжуд бўладики, барча $z\in R_n$ лар учун

$$z'x_0^*\leqslant \partial f(x^\circ)/\partial z,$$

$$z'x_i^*\leqslant \partial g_i(x^\circ)/\partial z,\ i=\overline{1,m}\ \text{барча}\ z\in R_n\ \text{лар учун;}\tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z'x_i^*\geqslant 0\ \text{барча}\ z\in T(x^\circ|\Omega)\ \text{лар учун;}\tag{22}$$

$$\lambda_i g_i(x^\circ)=0,\ i=\overline{1,m}\tag{23}$$

бўлади.

Агар шундай $\bar z\in T(x^\circ/\Omega)$ вектор мавжуд бўлиб, $\partial g_i(x^\circ)/\partial\bar z<0$, $i\in I(x^\circ)$ бўлса, $\lambda_0>0$ бўлади.

Исботи. Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $K_0=\{z\in R_n:\partial f(x^\circ)/\partial z<0\}$, $K_i=\{z\in R_n:\partial g_i(x^\circ)/\partial z<0\}$, $i\in I(x^\circ)$, $K_{m+1}=T(x^\circ|\Omega)$. Фараз қилайлик, $K_i\neq\varnothing$, $i\in I(x^\circ)\cup\{0\}$. Юқорида исбот қилинганига кўра, ёзилган тўпламлар бўш кесишмага эгадирлар. 8- теоремага асосан, бир вақтда ноль бўлмаган шундай $y_i^*\in K_i^*$, $i\in I(x^\circ)\cup\{0, m+1\}$ векторлар мавжуд бўладики, $\sum\limits_{i\in I(x^\circ)\cup\{0,m+1\}} y_i^*=0$ бўлади. 9- теоремага асосан $y_i^* = \lambda_i x_i^*$, бу ерда барча $z \in R_n$, $i \in I(x^\circ)$ лар учун $\lambda_i \geqslant 0$, $z'x_0^* \leqslant \partial f(x^\circ)\ /\partial z$, $z'x_i^* \leqslant \partial g_i(x^\circ)\partial z$. Қилинган фаразларни ҳисобга олиб, $x_i^* \neq 0$, $i \in I(x_0) \cup \{0\}$ га эга бўламиз. Шунинг учун, λ_i, $i \in I\ (x_0) \cup \{0\}$ сонлар ичида албатта нолдан фарқлилари бўлади. $y_{m+1}^* \in T^*(x^\circ | \Omega)$ бўлганлигидан, барча $z \in T(x^\circ | \Omega)$ лар учун $\sum\limits_{i \in I(x^\circ) \cup \{0\}} \lambda_i z'x^* \geqslant 0$ бўлади. $i = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\} \diagup I(x^\circ)$ бўлганда $\lambda_i = 0$ деб оламиз, x_i^* вектор сифатида эса барча $z \in R_n$ лар учун $z'x_i^* \leqslant \partial g^i(x^\circ)/\partial z$ ни қаноатлантирувчи R_n дан олинган ихтиёрий векторни (бундай вектор $\partial g_i(x^\circ)/\partial z$ z нинг қавариқ функцияси бўлганлигидан мавжуд бўлади) танлаймиз. Шундай қилиб, (21) — (23) шартлар бажарилади.

Агар бирор $i_0 \in I(x^0) \cup \{0\}$ учун K_{i_0} конус бўш бўлса, $\alpha_{i_0} = 1$, $x_{i_0}^* = 0$; $\alpha_i = 0$, x_i^* (21) ни қаноатлантирувчи ихтиёрий вектор, $i = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\} \diagup \{i_0\}$ деб оламиз. Бу ҳолда (21) — (23) шартлар яна бажарилган бўлади. 11-теореманинг биринчи қисми исботланди. Иккинчи қисми эса тескарисини фараз қилиш йўли билан осон исботланади.

12-теорема. Фараз қилайлик, 11-теореманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда бир вақтда нолга тенг бўлмаган λ_i, $i = \overline{0, m}$, сонлар мавжуд бўладики, барча $z \in T(x^0 | \Omega)$ лар учун

$$\lambda_0\, \partial f(x^\circ)/\partial z + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \partial g_i(x^\circ)/\partial z \geqslant 0 \tag{24}$$

ва (23) шарт ўринли бўлади.

Агар шундай $\bar{z} \in T(x^\circ | \Omega)$ вектор мавжуд бўлсаки, $\partial g_i(x^\circ)/\partial z < 0$, $i \in I(x^\circ)$ бўлса, $\lambda_0 > 0$ бўлади.

(24) шарт (21) — (23) шартларнинг ўз-ўзидан кўриниб турган натижасидир. (24) шартдан (21), (22) шартларни қаноатлантирувчи $x_i^* \in R_n$, $i = \overline{1, m}$ векторларнинг мавжудлиги ҳам келиб чиқади. Шундай қилиб, 11, 12-теоремаларнинг тасдиқлари эквивалентдир. (24) шарт (ва (22) шарт) Лагранж кўпайтувчилари қоидасининг вариантидан иборатдир. Ундан қавариқ программалашнинг классик Кун — Таккер теоремаси осон келтириб чиқарилади (II бобга қ.). Бунга ишонч ҳосил қилиш учун Ω тўплам ва φ функция қавариқ бўлганда $x \in \Omega$ бўлса, $x - x^\circ \in T(x^\circ | \Omega)$ ва ихтиёрий $z \in R_n$

учун $\partial\varphi(x^\circ)/\partial z \leqslant \varphi(x^\circ + z) - \varphi(x^\circ)$ эканлигини қайд этиш етарлидир.

11, 12-теоремалар чекланишлари тенгсизликлар типида бўлган чизиқсиз программалаш масаласида умумий зарурий шартларни ифодалайди. Улардан қандай қилиб чекланишлар тенгликлар типида бўлган масалалар учун экстремум шартларини олиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги масалани қараймиз:

$$f(x) \to \min, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = \overline{m+1, l}, \tag{25}$$

Худди аввалгидек, $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функциялар нуқтада барча йўналишлар бўйича текис дифференциалланувчи ва уларнинг йўналишлар бўйича ҳосилалари қаварик функциялар бўлсин деб фараз қиламиз. $g_i(x)$, $i = \overline{m+1, l}$ функцияларга нисбатан, улар x° нуқтада узлуксиз дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

Агар $\Omega = \{x \in R_n : g_i(x) = 0, \ i = \overline{m+1, l}\}$ деб белгиласак, (25) масала (20) кўринишини олади. Фараз қилайлик, x° (25) масаланинг локал оптимал режасидан иборат бўлиб, $\operatorname{grad} g_i(x^\circ)$, $i = \overline{m+1, l}$ градиентлар чизиқли боғланмаган бўлсин. У ҳолда, 6-теоремадан $T(x^\circ | \Omega)$ уринма конуснинг $\{z \in R_n : z' \operatorname{grad} g_i(x^0) = 0, \ i = \overline{m+1, l}\}$ фазоости билан устма-уст тушиши келиб чиқади. 11-теорема бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай манфиймас λ_i, $i = \overline{0, m}$ сонлар ва шундай $x_i^* \in R_n$, $i = \overline{0, m}$, $x^* \in T(x^\circ | \Omega)$ векторларнинг мавжудлигини тасдиқлайдики, (21), (23) шартлар бажарилади ва $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* + x^* = 0$ бўлади. Лекин, 10-теоремага асосан, $x^* = \sum_{i=m+1}^{l} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x^\circ)$, бу ерда λ_i, $i = \overline{m+1, l}$ — қандайдир ҳақиқий сонлар. Шундай қилиб,

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* + \sum_{i=m+1}^{l} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x^\circ) = 0$$

эканлигини оламиз ва демак,

$$\lambda_0 \partial f(x^\circ)/\partial z + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(x^\circ)/\partial z + \sum_{i=m+1}^{l} \lambda_i z' \operatorname{grad} g_i(x^\circ) \geqslant$$

$$\geqslant 0, \ \forall z \in R_n . \qquad (26)$$

Агар $\operatorname{grad} g_i(x^\circ)$, $i = \overline{m+1, l}$ векторлар чизиқли боғланган бўлсалар, шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган λ_i, $i = \overline{m+1, l}$ сонлар мавжуд бўладики, $\sum_{i=m+1}^{l} \lambda_i \times$ $\times \operatorname{grad} g_i(x^\circ) = 0$ бўлади. $\lambda_i = 0$, $i = \overline{0, m}$ деб олиб, бу ҳолда ҳам (26) шарт бажарилишига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, қуйидаги тасдиқ исботланди.

13-теорема. Фараз қилайлик, x° — элементлари юқорида келтирилган шартларни қаноатлантирувчи (25) масаланинг локал оптимал режаси бўлсин. У ҳолда, шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган λ_i, $i = \overline{0, l}$ сонлар мавжуд бўладики, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{0, m}$ ва (23), (26) шартлар бажарилади.

Агар $\operatorname{grad} g_i(x^\circ)$, $i = \overline{m+1, l}$ векторлар чизиқли эркли бўлсалар, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i > 0$ бўлади. Агар бундан ташқари, шундай $\bar{z} \in R_n$ вектор мавжуд бўлсаки, $\partial g_i(x^\circ)/\partial \bar{z} < 0$, $i = \overline{1, m}$, $z' \operatorname{grad} g_i(x^\circ) = 0$, $i = \overline{m+1, l}$ бўлса, $\lambda_0 < 0$ бўлади.

Экстремал масалалар назариясида юқорида келтирилганлар (*аргументлар фазосида*) билан бир қаторда *образлар* фазосида *локал яқинлаштиришлар* усули ҳам кенг қўлланилади. (20) масалага қайтамиз. Фараз қилайлик, U — x° нуқтанинг атрофи бўлсин. R_{n+1} фазода бирор $x \in \Omega \cup U$ учун, $A = \{\{y_0, y_1, \ldots, y_m\} : y_0 \geqslant f(x) - f(x^\circ),\ y_i \geqslant g_i(x),$ $i = \overline{1, m}\}$ тўпламни киритамиз. Агар x^0 — локал оптимал режа бўлса, x° нуқтанинг шундай U атрофи мавжуд бўладики, $A \cap K_- = \varnothing$ бўлади, бу ерда $K_- = \{y \in R_{m+1} : y_i < 0,\ i = \overline{0, m}\}$. Бунда $y^\circ = \{0, g_1(x^0), \ldots, g_m(x^\circ)\}$ нуқта A тўпламга ва K_- тўпламнинг ёпилмасига қарашли бўлади. 4-теоремага асосан, $T(y^\circ | A) \cap I(y^\circ | K_-) = \varnothing$.

Лемма. $y^\circ \in \overline{K}_-$ бўлсин. У ҳолда,

$$I(y^\circ \mid K_-) = \{y - \alpha y^\circ : y \in K_-,\ \alpha \geqslant 0\}$$

бўлади.

Исботи. $z \in I(y^\circ \mid K_-)$ бўлсин. У ҳолда, етарли кичик $\varepsilon > 0$ сон учун $y^\circ + \varepsilon z \in K_-$ га эга бўламиз, ёки K – конус бўлганлигидан, $y = \varepsilon^{-1} y^\circ + z \in K_-$. Бундан $z = y - \alpha y^\circ$, бу ерда $\alpha = \varepsilon^{-1} > 0$. Аксинча, $z = y - \alpha y^\circ$ бўлсин, бу ерда $y \in K_-$, $\alpha \geqslant 0$. $z \in I(y^\circ \mid K_-)$ эканлигини кўрсатамиз. K_- — очиқ конус бўлганлигидан, y нуқтанинг шундай U_1 атрофи топиладики, $U_1 \subset K_-$ бўлади. Ўз-ўзидан кўриниб турибдики, $U = U_1 - \alpha y^\circ - z$ нуқтанинг атрофидир. Шундай ε_0 мусбат сонни танлаб оламизки, $\varepsilon_0 \alpha < 0$ бўлсин. У ҳолда, агар $z_1 \in U$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ бўлса, $y^\circ + \varepsilon z_1 = y^\circ + \varepsilon y_1 - \varepsilon \alpha y^\circ = (1 - \varepsilon \alpha) y^\circ + \varepsilon y_1$, бу ерда $y_1 \in U_1$ бўлади. Лекин $\varepsilon y_1 \in K_-$, $(1 - \varepsilon \alpha)\ y^\circ \in \overline{K}_-$. Демак, агар $z_1 \in U$ бўлса, $y^0 + \varepsilon z_1 \in K_-$ бўлади, яъни $z \in I(y^\circ \mid K_-)$.

Энди, агар $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, функцияларни x^0 нуқтада йўналишлар бўйича дифференциалланувчи деб фараз қилсак, $T(y^\circ \mid A)$ конус $A_1 = \{y \in R_{m+1} : y_0 \geqslant \partial f(x^\circ)/\partial z,\ y_i \geqslant \partial g_i(x^\circ)/\partial z,\ i = \overline{1, m}$ бирор $z \in T(x^\circ \mid \Omega$ да$\}$ тўпламни ўз ичига олишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Агар $T(x^\circ \mid \Omega)$ конус қавариқ бўлиб, йўналишлар бўйича ҳосилалар қавариқ функциялардан иборат бўлса, A_1 — қавариқ конус бўлади ва ажралувчанлик ҳақидаги теоремадан фойдаланиш мумкин. Шундай ноль бўлмаган $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in R_{m+1}$ вектор мавжуд бўладики, барча $y \in A_1$ лар учун $\lambda' y \geqslant 0$ ва барча $y \in K_-$, $\alpha \geqslant 0$ лар учун $\lambda'(y - \alpha y^\circ) \leqslant 0$. Охирги шартдан $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{0, m}$, $\lambda_i g_i(x^\circ) = 0$, $i = \overline{1, m}$ эканлиги келиб чиқади. Биринчи шартдан барча $z \in T(x^\circ \mid \Omega)$ лар учун

$$\lambda_0 \partial f(x^\circ)/\partial z + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(x^\circ)/\partial z \geqslant 0$$

кўпайтувчилар қоидасини оламиз. Шундай қилиб, яна 12-теоремага келамиз.

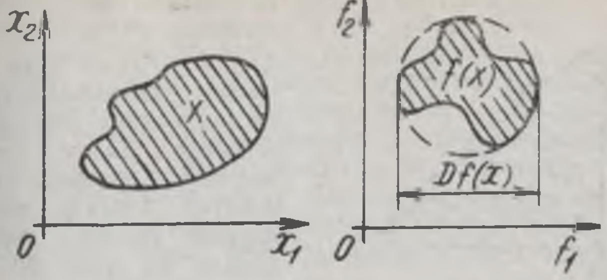
Экстремумнинг зарурий шартларини келтириб чиқаришнинг юқорида келтирилган услуби $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функциялар йўналишлар бўйича дифференциалланувчи бўлмаган ҳолда ҳам қўлланилиши мумкин. Бунда оптималлик шартлари *йўналишлар бўйича ярим ҳосилалар*, *қавариқ мажорантлар* ва ҳ. к. терминларида ифода қилинади. Лекин бу масалалар мазкур ўқув қўлланмасида қаралмайди.

6-§. ВЕКТОРЛИ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ

Экстремал масалалар назариясида бир вақтда бир неча мақсад функцияларини минималлаштириш масалалари амалда кенг ёйилган бўлиб, танланаётган ечимлар (режалар) бир нечта кўрсаткичлар бўйича баҳоланадиган вазиятлар билан боғлиқ равишда юзага келди. Мазкур параграфда оптималлаштириш усулларининг янги соҳасидан дастлабки маълумотлар келтирилади.

1. Самарали режалар. Фараз қилайлик, берилган X режалар тўпламида q та $f_1(x), \ldots, f_q(x)$ мақсад функциялари аниқланган бўлиб, улар $f(x)=\{f_1(x), \ldots, f_q(x)\}$. q — вектор — мақсад функциясини ҳосил қилсин. Бундан буён битта мақсад функциясига минимум берувчи x° режани *скаляр оптимал* режа деб атаймиз. Векторли оптималлаштириш масаласи *вектор оптимал режа* x° ни қуришдан иборат бўлиб, унинг асосида мақсад функцияларининг берилган тизимнинг минимумга эришишига интилиш ётади. Ҳар бир мақсад функцияси бўйича скаляр оптимал режа мавжуд бўлган вазият эҳтимолдан ҳоли бўлиб, амалда уни амалга ошириш мумкин эмас, назарий жиҳатдан қизиқ эмас ва бундан буён қаралмайди. Шундай вазият умумий ҳисобланадики, унда битта мақсад функцияси бўйича скаляр оптимал бўлган ҳар бир режа учун қолган функциялардан ҳеч бўлмаганда биттасининг қийматини камайтиришга келтирадиган вариация мавжуд бўлади. Бу вазиятда вектор оптимал режанинг таърифини қандай бериш керак? Векторли оптималлаштириш масалаларининг элементлари ҳақида юқорида келтирилган маълумотлар умуман олганда бу саволга жавоб бериш учун етарли эмас.

Ихтиёрий оптималлаштириш масаласи қаралаётганда тушунарлики, режалар тўплами X бўш бўлмаслиги зарур. Оптималлаштириш муаммоси $f(X)$ тўпламнинг диаметри $Df(X)$ натижага имконият борича яқинлашиш даражасини характерловчи берилган $\varepsilon \geqslant 0$ сондан катта бўлгандагина вужудга келиши ҳам тушунарлидир. Агар $Df(X) \leqslant \varepsilon$ бўлса, ихтиёрий $x \in X$ режа мақсад функцияларига қониқарли қийматларни беради ва танлаш муаммоси мавжуд бўлмайди. Оптимал режани танлаш муаммоси фақат $Df(X) > \varepsilon$ бўлганда юзага келади, чунки натижа $x \in X$ ни танлашга узвий боғлиқдир: бир хил режаларда мақсад функциялари (бир қисми ёки барчаси) минимал қийматларга яқин қийматлар қабул қилади, бошқаларида эса — бу қийматлар минималлардан узоқроқ бўлади (III. 8-чизма).



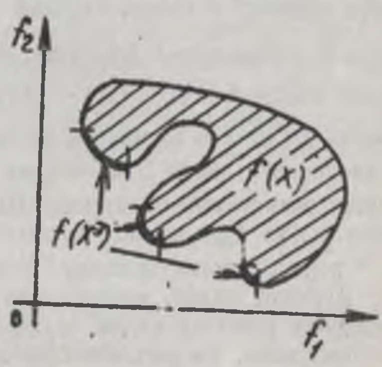
III.8- чизма.

$q=1$ бўлган скаляр ҳолда x° режа учун $f(x) \leqslant f(x^{\circ})$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x \in X$, $f(x) \neq f(x^{\circ})$ бошқа режа мавжуд бўлмаса, x° оптимал режа деб аталади. Шунга ўхшаш, векторли ҳолда *самарали режа* $x^{э}$ тушунчасини шундай киритамизки, унинг учун

$$f(x) \leqslant f(x^{0}) \tag{1}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи бирорта ҳам x, $f(x) \neq f(x^{э})$ режа мавжуд бўлмасин.

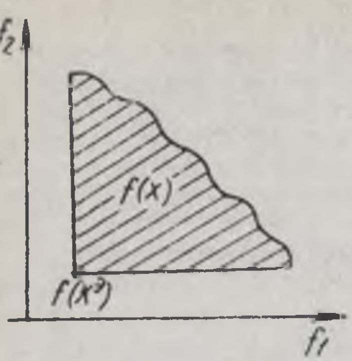
$q=2$ бўлганда сама-рали режаларнинг X тўпламдаги ўрнини III.9- чизма бўйича кўргазмали тасаввур қилиш мумкин, бу ерда самарали режалар тўплами $X^{э}$ га мос келган $f(X^{э})$ тўплам йўғон чизиқ билан ажратилган.



III.9- чизма.

Скаляр ҳолда (1) тенгсизлик X нинг ичида шундай X° тўпламости ажратадики, $Df(x^{\circ})=0$ бўлади. $q \geqslant 2$ бўлганда принципиал ўзгариш юз беради: $X^{э}$ тўпламда $Df(x^{э})$ тенгсизлик бажарилади.

Агар берилган $\varepsilon > 0$ учун $Df(X^{э}) \leqslant \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, векторли оптималлаштириш масаласи *аниқланган* дейилади. Бунда тўпламнинг элементлари *масаланинг ечи-*



III.10- чизма.

ми, яъни вектор оптимал режалар x^{v_0} деб аталади. Агар $Df(x^э) = 0$ бўлса, векторли оптималлаштириш масаласи *тўла аниқланган* дейилади. Бунга ўхшаш масалалар юқорида тилга олинган алоҳида масалаларнинг синфини ташкил қилади ва улар бу ерда қаралмайди. Уларга $q = 2$ бўлганда III.10- чизмада тасвирланган ҳолат мос келади. Векторли оптималлаштиришнинг умумий назариясида юқоридаги каби, қўйилишида *масала аниқланмаган*, яъни $Df(x^э) > \varepsilon$ бўлган ҳол умумий ҳисобланади.

Бу ҳолда X тўпламда танлашнинг бошланғич муаммоси тўпламда танлаш муаммосига ўтади, чунки қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. Векторли оптималлаштириш масаласининг ҳар бир ечими x^{v_0} аниқланишига боғлиқ бўлмасдан, самарали режадан иборатдир.

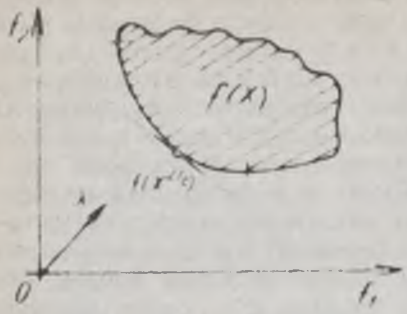
Исботи. Фараз қилайлик, ундай бўлмасин: яъни $X^э$ тўпламга қарашли бўлмаган x^{v_0} вектор оптимал режа мавжуд бўлсин, у ҳолда, шундай x^* режа ва $f_{i_*}(x)$ мақсад функцияси топиладики, $f_i(x^*) \leqslant f_i(x^{v_0})$, $i = \overline{1, q}$ бўлади. Шунинг билан бирга $f_{i_*}(x^*) < f_{i_*}(x^{v_0})$. Бу эса, x^* режанинг барча $f_i(x)$, $i \neq i_*$ мақсад функциялари бўйича x^{v_0} дан ёмон эмаслигини, лекин $f_i(x)$ мақсад функцияси бўйича эса қатъий яхши эканлигини билдиради. Шунинг учун, «векторли оптимал режа» тушунчасига қандай маъно берилса ҳам, x^* режа x^{v_0} режадан маъқулроқдир. Зиддият теоремани исботлайди.

Шундай қилиб, векторли оптималлаштириш масалаларида самарали режалар «ярим оптимал» режалар сифатида, оралиқ натижа каби, ўз роллари бўйича, скаляр шартсиз минималлаштириш масалаларидаги стационар нуқталарни эслатади. Бундай талқинда келтирилган теоремага минимумнинг зарурий шартлари ҳақидаги теоремаларни мос қўйиш мумкин. Лекин объектларнинг қаралаётган икки группаси орасида муҳим фарқ мавжуд. Стационар нуқталар ва минимумнинг бошқа зарурий шартларини қаноатлантирувчи элементлар мақсад функциясининг оптимал режа атрофида ўзгаришини текшириш натижасида олинган бўлиб, умумий ҳолда ҳар бир чуқурроқ текшириш оптималликка «шубҳали» (хусусий ҳолда, стационар) нуқталар тўпламини торайтириш (кичрайгириш) имконини беради. Самарали режалар, бунга қарама-қарши улароқ, фақат мақсад функцияларининг режалар тўпламида мослаштирилиши натижасидан иборат ва масаланинг элементлари ҳақида юқорида келтирилган маълумотга мувофиқ бирор намунанинг йўқолишига имкон бермайди. Бундан векторли оптималлаштириш масаласининг аниқланмаганлиги намоён бўлади. Аниқмасликни (ёки бошқача сўз билан айтганда $Df(X^э)$ сонни) камайтириш учун векторли оптималлаштириш масаласининг қўйилишида қўшимча маълумот киритиш зарурдир.

2. Танлаш принциплари. Векторли оптималлаштириш масаласини аниқ қилиш имконини берадиган берилган маълумот билан қўшимча маълумот тўплами *танлаш принципи* деб аталади. Ҳар бир танлаш принципи, x^{v_0} векторли оптимал режани қуришнинг маълум қоидалари (тадбирлари) билан бирга бўлади деб ҳисоблаймиз. Танлаш принципи *тўла* дейилади, агар x^{v_0} ни қуришнинг танлаш принципига мос қоидалари q та параметрларга боғлиқ бўлиб, бу боғлиқлик шундай бўлсаки, 1) параметрларнинг жоиз қийматларининг ҳар бир тўплами учун x^{v_0} режа самарали бўлса; 2) ҳар бир самарали режа параметрларининг жоиз қийматларининг қандайдир термаси сифатида олиниши мумкин бўлса. Агар танлаш принципи қандайдир скаляр функциянинг минималлаштиришга келтирилса, у скалярланувчи дейилади.

Векторли оптималлаштиришнинг қавариқ масалалари учун танлаш принципларининг бирмунча тарқалганларини қараймиз. Уларда $f_*(X) = \{y : y \geqslant f(x)\}$; барча $x \in X$ лар учун$\}$ тўплам қавариқдир.

Мақсад функцияларини ўртачалаш. Фараз қилайлик, бошланғич маълумотга қўшимча $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, q}$, $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i = 1$ сонлар берилган бўлсин. λ_i сон i — мақсад функциясининг *муҳимлик ўлчови (даражаси)* деб шарҳланади. x^{v_0} режа векторли оптимал режа деб аталади, агар $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i f(x^{v_0}) = \min \sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i f_i(x)$, $x \in X$ бўлса.



III.11- чизма.

Бу танлаш принципида $f(x)$ вектор мақсад функцияси скаляр $\lambda' f(x)$ функцияга алмаштирилган ҳамда бунга нисбатан масала аниқланган бўлиб қолади. Қаралаётган танлаш принципи скалярланувчи ва $X^э$ тўпламнинг деярли барча элементларини қуриш имконини бериш маъносида деярли тўладир. Бу III. 11-чизмада геометрик тасвирланган.

Мақсад функцияларининг табақаланишини киритиш. Мақсад функциялари муҳимлигининг камайиши бўйича тартибланган бўлсин:

$$f_{i_1}(x) \succ f_{i_2} \succ \ \dots \ \succ f_{i_q}(x)$$

ва $\alpha_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, q}$, $i \neq i_q$ сонлар берилган бўлсин.

Векторли оптимал режа x^{v_0} ушбу

$$f_{i_q}(x^{v_0}) = \min f_{i_q}(x),\ x \in X_{i_q},\ X_{i_k} = \{x \in X_{i_{k-1}}:$$

$$f_{i_{k-1}} - \alpha_{i_{k-1}} \leqslant \min f_{i_{k-1}}(x),\ x \in X_{i_{k-1}}\},\ k = q, \ \dots\ , 2;$$

$$X_{i_1} = \{x \in X: f_{i_1}(x) - \alpha_{i_1} \leqslant \min f_{i_1}(x),\ x \in X\}.$$

муносабатлар орқали аниқланади.

Бошқача сўз билан айтганда, дастлаб, энг муҳим мақсад функцияси бўйича оптимал режаларнинг $X_{i_1}\alpha_{i_1}$ тўплами ($f_i\ (x)$, $x \in X$ мақсад функциясининг минимал жоиз қиймати топилади ва α_{i_r} миқдорга ён берилади) қурилади. Сўнгра муҳимлиги бўйича иккинчи мақсад функцияси қаралади. Жараён муҳимлиги бўйича сўнгги мақсад функциясини минималлаштириш билан тугалланади. $q = 2$, $f_1(x) \succ$

III.10- чизма.

$\succ f_2(x)$ ҳол учун геометрик намойиш III. 12-чизмада келтирилган.

Кафолатли сатҳларни ўрнатиш. Фараз қилайлик, α_i, $i=\overline{1, q}$, $i=i^*$ сонлар берилган бўлиб, $f_{i*}(x)$ мақсад функцияси танланган бўлсин. *Векторли оптималлаштириш масаласининг ечими* деб шундай x^{v_0} режага айтиладики,

$$f_{i*}(x^{v_0})=\min f_{i*}(x),\ f_i(x)\leqslant\alpha_i,\ i=\overline{1,\ q,}\ ,\ i\neq i_*,\ x\in X$$

бўлади. Бошқача қилиб айтганда, бу танлаш принципида $f_i(x)$, $i\neq i_*$ мақсад функциялари бўйича фақат берилган α_i сатҳларга эришиш етарли: минималлаштириш фақат битта мақсад функциясига нисбатан муҳим деб ҳисобланади.

Скаляр оптималлаштириш масалаларининг кўп қисми векторли оптималлаштириш масалаларига шу танлаш принципининг қўлланилиши натижасида келиб чиқади.

III.13-чизма.

Идеал нуқтагача бўлган масофани минималлаштириш. Фараз қилайлик, x^{i_0} i— мақсад функцияси бўйича скаляр оптимал режа бўлсин. $f_\alpha=\{f_1(x^{10})+\alpha_1,\ \ldots,\ f_q(x^{q_0})+\alpha_q\}$, $\alpha_i\geqslant 0$ нуқтани α-идеал нуқта деб атаймиз. Қуйидаги

$$\| f(x^{v_0})-f_\alpha\|=\min\| f(x)-f_\alpha\|,\ x\in X,$$

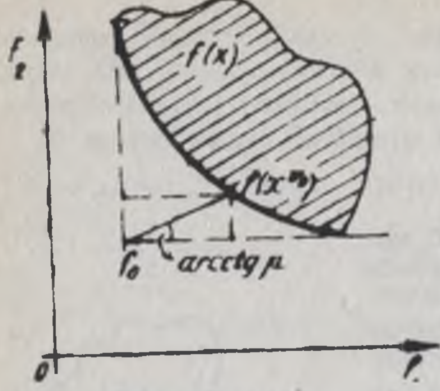
ўринли бўлган x^{v_0} режа векторли оптимал режа деб ҳисобланади (III.13-чизма).

Пропорционал чекиниш. Фараз қилайлик, f_0 — идеал нуқта бўлсин. Векторли оптимал режа сифатида шундай

$$\frac{f_1(x^{v_0})-f_1(x^{10})}{f_i(x^{v_0})-f_i(x^{i0})}=\mu_i>0,\ i=\overline{2,\ q}\ ;\ f_1(x^{v0})=\min f_1(x),$$
$$x\in X,$$

ни қаноатлантирувчи x^{v0} режа олинади (III. 14-чизма).

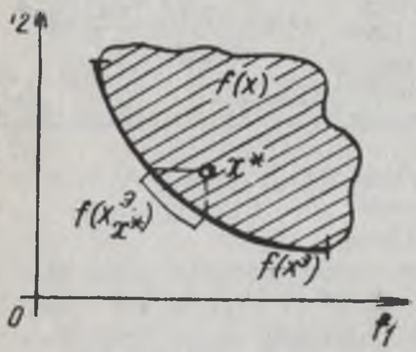
Шартли оптималлаштириш. Амалий масалаларда кўп ҳолларда минималлаштирилувчи мақсад функцияларининг барчаси бўйича етарли яхши бўлган x^* режа маълумдир Бу ҳолда векторли оптималлаштириш масалалари



III.14- чизма.

$$f_i(x^\circ) \leqslant f_i(x^*), \quad i = \overline{1, q}, \qquad (2)$$

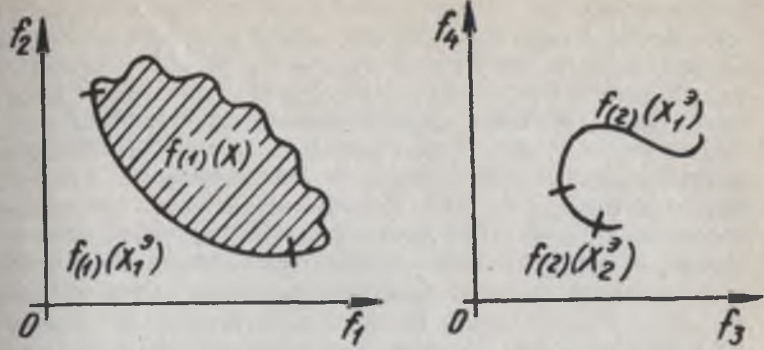
маъносида x^* дан ёмон бўлмаган, x° векторли оптимал режаларни қуришга келтирилади. (2) қўшимча чекланишларнинг борлиги самарали режалар тўпламини торайтириш ва етарли яхши x^* режаларда векторли оптималлаштириш масалаларини аниқлаш имконини беради.



III.15- чизма.

III. 15-чизмада $X^э$ тўпламнинг (2) шартлар билан ажратилган $X^э_{x^*}$ қисмига мос келган тўплам йўғон чизиқ билан кўрсатилган.

Кўп сатҳли векторли оптималлаштириш. Мақсад функциялари тўплами t та группага бўлинади. Биринчи босқичда мақсад функцияларининг биринчи гуруҳи бўйича векторли оптималлаштириш амалга оширилади, унинг натижасида биринчи сатҳ самарали режалар тўплами $X^э_1$ қурилади. $X^э_1$ тўпламда иккинчи гуруҳдаги мақсад функциялари бўлган векторли оптималлаштириш масаласи қаралади ва иккинчи сатҳ самарали режалар тўплами $X^э_2$ қурилади. Жараён юқори сатҳ самарали режалар тўплами $X^э_t$ ни қуриш билан тугалланади. Агар $Df_{(t)}(X^э_t) \leqslant \varepsilon$ бўлса (бу ерда $f_t^*(x)$ — охирги



III.16- чизма.

гуруҳ мақсад функциялари тўплами) келтирилган тадбир танлаш принципини беради. $Df_{(l)}(X_l^э) > \varepsilon$ бўлганда масала аниқланмаган бўлиб қолади. III. 16- чизмада $q = 4$, $t = 2$, $f_{(1)} = \{f_1, f_2\}$, $f_{(2)} = \{f_3, f_4\}$ ҳол намойиш қилинган.

АДАБИЁТ

1. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. — М.: Сов, радио, 1973.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1975.
3. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. — М.: Наука, 1975.
4. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. — М,: Мир, 1974.
5. *Фиакко* А.В., *Мак — Кормик Г.* П. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М,: Мир, 1972.

IV боб. ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШТИРИШНИНГ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

Чизиқсиз программалаштириш назарияси (III- боб) экстремал масалалар ечимларининг кўпгина конкрет ҳолларда охирги натижа тўғрисида етарлича тўлиқ маълумот олишга имкон берувчи муҳим характеристикаларни ўрганиш билан бир қаторда турли *ҳисоблаш усулларини* қуриш учун ҳам асос бўлиб хизмат қилади. Чизиқсиз программалаштиришнинг ҳисоблаш усуллари *бевосита** ва *билвосита* усулларга бўлина-

* Бу ерда «бевосита» сўзининг маъноси икки ёқламалик назариясида қабул қилинганидан бошқачадир, лекин кўпгина бевосита усуллар (3-, 4- § ларга қ.) бевосита оптималликнинг тўғри шартларига таянади (III боб).

ди. Билвосита усуллар шундай усулларки, уларда дастлабки масаланинг ечими шу масалани бошқа масалага келтириш орқали олинади. Масалан, функциянинг стационар нуқталарини излаш усули, яъни тенгламаларни стационарлик шартларида ечиш усуллари шартсиз минималлаштиришнинг билвосита усули бўлиб, бунда дастлабки масаладан минимумнинг зарурийлик шарти ёрдамида олинган масала ечилади. Бевосита усуллар бевосита бошланғич экстремал масалалар билан иш кўради. ЭҲМ да амалга ошириш учун мўлжалланган кўпгина бевосита усуллар *дискретдир*, яъни уларнинг ишлаш жараёнида (дискрет) векторлар кетма-кетлиги x^1, x^2, ... (x° ечимга (оптимал режага) кетма-кет яқинлашишлар) қурилади. Одатда *итерация* (x^k яқинлашишдан навбатдаги x^{k+1} га ўтиш) $x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k$ тарҳ бўйича қурилади, бу ерда l^k — *йўналиш*, $\theta_k \geqslant 0$ — *итерация қадами*. Усуллар бир-биридан l^k, θ_k ларни ҳисоблаш усуллари билан фарқ қилади. Агар муайян информация бўйича l^k, θ_k ни ҳисоблашнинг бир қийматли қоидаси кўрсатилса, бу усул *аниқланадиган* усул дейилади. *Стохастик* усулларда l^k, θ_k ларни ҳисоблаш учун тасодифий механизмлар жалб этилади. Агар қаралаётган итерацияда (l^k, θ^k ни ҳисоблашда) масала элементлари (мақсад функцияси) нинг қаралаётган x^k режадаги қиймати тўғрисидаги маълумотлардан фойдаланилса, усул *бир қадамли* дейилади. Агар итерацияда масала элементларининг аввалги (x^k, x^{k-1}, . . . , x^{k-p}) режалардаги қийматлари ҳам жалб этилса, усул *кўп қадамли (хотира теранлиги p бўлган)* усул дейилади. Агар итерацияда масаланинг бирор элементининг ҳеч бўлмаганда битта ν — тартибли ҳосиласидан фойдаланилса ва бундан юқори тартибли ҳосилалар ишлатилмаса, бу усул ν — *тартибли усул* дейилади. Нолинчи тартибли ($\nu = 0$) усулларни *излаш усуллари* деб ҳам аталади.

Усуллар *аниқ* ва *тақрибий* усулларга бўлинади. Аниқ усулларда ҳар бир итерацияда масаланинг режаси яна бошланғич масала режасига алмаштирилади. Агар усул планнинг бир яқинлашишини бошқасига алмаштиришдан иборат бўлса, у *тақрибий* усул деб аталади. Кўпинча масала ечимини чекли сондаги итерациялар ёрдамида олишга имкон берувчи аниқ усуллар ишлатилгани учун бу усулларни *чекли усуллар*, тақрибий усулларни эса *итератив* (чексиз сондаги интерацияли) *усуллар* деб аталади.

Чизиқсиз программалашнинг иккиланмалик назарияси етарлича тўлиқ ишлаб чиқилган бўлимларида усуллар тўғри ва иккиланма усулларга бўлинади. Тўғри усулларда итерациялар режалар ёки уларнинг баҳолари бўлган векторларда, иккиланма усулларда эса иккиланма масала режалари ёки уларнинг баҳолари бўлган векторларда олиб борилади.

Аниқланган ёки стохастик маънода оптимал режага яқинлашувчи векторлар кетма-кетлигини ҳосил қиладиган итератив усул яқинлашувчи усул деб аталади. Баъзан *мақсад функцияси бўйича яқинлашиш* ($f(x^k) \to f(x^0)$) ёки *шартли — стационар режага яқинлашиш* ($x^k \to x^0$) қаралади. Яқинлашувчи итератив усуллар сифат жиҳатидан кўпроқ *яқинлашиш тезлиги* бўйича баҳоланади. Агар аниқланган усулда

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leqslant q\| x^k - x^0\|, \; 0 < q < 1, \; k \geqslant K_0$$

тенгсизликлар бажарилса, *чизиқли тезлик (геометрик прогрессия тезлигида яқинлашиш)* ҳақида гапирилади. Энди

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leqslant q \, \|x^k - x^0\|^\alpha, \; k \geqslant K_0$$

бўлган ҳолда усул: $1 < \alpha < 2$ бўлса, *чизиқлидан юқори тезликка* эга дейилади; агарда $\alpha = 2$ бўлси, *квадратик* тезликка эга дейилади. Усулларнинг муҳим характеристикалари ЭҲМ нинг талаб қилинадиган оператив хотираси ҳажми, яхлитлаш хатоларига ва шунга ўхшаш хатоларга нисбатан турғунлик ва ш.ў.лардан иборат.

1-§. САРАЛАШ УСУЛЛАРИ

Узоқ замонлардан буён *саралаш усули* ечим қабул қилиш зарур бўлганда, альтернативалар орасидан танлаш керак бўлганда ёки умуман экстремал масалани ечиш талаб қилинганда кишилар биринчи бўлиб мурожаат қиладиган усул бўлиб қолмоқда. Бир томондан тажриба ва интуиция, иккинчи томондан эса дастлабки (назарий ва тажрибавий) тадқиқотлар кишига ечим изланаётган вариантлар тўпламини доимий равишда торайтиришга ёрдам беради. Бироқ ҳозирги замон ЭҲМ лари пайдо бўлгунга қадар саралаш усулларининг имкониятлари ниҳоятда чегараланган эди. ЭҲМ ларнинг ўта тезкорлиги мутахассисларнинг саралаш усулларига диққат-эътиборини жалб этди. Саралашнинг эвристик усулларини таҳлил қилиш натижасиди *баҳолардан фойдаланувчи* бир қатор *саралаш тарҳлари* яратилдики, улар узоқ вақтлардан буён олимларнинг уринишларига бўй бермай келаётган кўпгина комбинаторик характеридаги тадбиқий масалаларни ечиш имконини берди. Шу нарсани айтиш керакки, янги тарҳлар фақат умумий кўрсатмаларнигина беради ва уларнинг конкрет масалага муваффақиятли қўлланиши масаланинг ўзига хослигини ҳисобга олишга, тадқиқотчининг тажрибаси, интуициясига, масалани дастлаб назарий (аналитик) ўрганишига кўп жиҳатдан боғлиқ бўлади. Ҳозирги замон амалиёти шундай мураккаб экстремал масалаларни қўймоқдаки, фақат инсон тажрибаси, математика ва ЭҲМ нинг бирга қўшилишигина уларнинг тўғри ҳал қилинишига умид боғлашга имкон беради.

1. Вариациялар усули. Саралаш усули умумий ҳолда

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

кўринишдаги *дискрет программалаш масаласини* ечиш учун мўлжалланган бўлиб, бу масалада режалар тўплами X дискрет, яъни чекли сондаги элементлар мажмуидан ташкил топган. Айнан шу X тўпламнинг дискретлиги узлуксиз таҳлилнинг лимитли ўтишга асосланган қудратли воситаларининг (1) масалани ечиш учун қўлланилишини қийинлаштиради. Бироқ хусусий ҳолларда узлуксиз усулларнинг ўхшашлари қизиқарли натижалар олишга имкон беради. Масалан, чексиз кичик орттирмаларни ўрганишдан иборат бўлган усул узлуксиз масалаларни текширишнинг асосий усули бўлиб, уни «соф ҳолда» (1) масалага қўллаш мумкин эмас, лекин унинг X тўплам элементларининг содда вариацияларидан фойдаланишга асосланган дискрет ўхшаши муайян масаланинг ечилишига олиб келиши мумкин. *Вариациялар усулини* тасвирлаш учун ушбу *буюртмаларга хизмат қилишдаги жарималарни минималлаштириш масаласини* қараймиз.

Битта ускунада хизмат кўрсатиш лозим бўлган n та $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ буюртма берилган бўлсин. Айтайлик, T_i — i-буюртмага хизмат кўрсатилиши вақти, c_i-шу буюртманинг бир бирлик кутиш вақти учун жарима миқдори бўлсин. Буюртмаларга хизмат кўрсатишнинг шундай оптимал кетма-кетлигини топиш талаб қилинадики, бунда жаъми жарима минимал бўлсин.

Буюртмаларга хизмат кўрсатишнинг бирор $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ кетма-кетлигида s-ўринда навбатда турувчи буюртманинг номерини i_s деб белгилайлик. Шундай қилиб, ечими изланаётган масаланинг X режалар тўплами I дан олинган n та соннинг ўрин алмаштиришлари тўплами $\sum$ дан иборатдир.

σ ўрин алмаштиришда i_1 буюртмага хизмат кўрсатилаётган пайтда қолган буюртмалар T_{i_1} вақт бирлигида туриб қолади ва натижада бу кутишдан келадиган жарима $T_{i_1}\sum_{s=2}^{n} c_{i_s}$ га тенг бўлади. $i_1, i_2, \ldots, i_n$ буюртмаларга хизмат кўрсатиш вақтларини қараб чиқиб, $\sigma \in \sum$ ўрин алмаштириш учун жаъми жарима

$$f(\sigma) = T_{i_1}\sum_{s=2}^{n} c_{i_s} + T_{i_2}\sum_{s=3}^{n} c_{i_s} + \ldots + T_{i_{n-1}} c_{i_n} =$$

$$= \sum_{s=2}^{n} c_{i_s} t_{i_s} \tag{2}$$

бўлишини топамиз, бу ерда $t_{i_s} = \sum_{k=1}^{s-1} T_{i_k} - i_s$ буюртманинг кутиш вақти.

σ режанинг *энг содда вариацияси* деб унинг i_s, i_{s+1} элементларининг транспозициясига *(ўрин алмаштириш усулига)* айтилади. Янги режани $\bar{\sigma}$ деб белгилаймиз.

i_s буюртманинг кутиш вақти $T_{i_{s+1}}$ га ортганлиги, i_{s+1} буюртма учун эса T_{i_s} га камайганлиги ва қолган буюртмалар учун ўзгаришсиз қолганлиги учун (2) мақсад функциясининг орттирмаси

$$f(\bar{\sigma}) - f(\sigma) = c_{i_s} T_{i_{s+1}} - c_{i_{s+1}} T_{i_s} \tag{3}$$

бўлади.

σ режанинг оптималлиги учун $f(\bar{\sigma}) - f(\sigma) \geqslant 0$ бўлиши зарур. (3) ни эътиборга олсак,

$$\frac{c_{i_1}}{T_{i_1}} \geqslant \frac{c_{i_2}}{T_{i_2}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{c_{i_n}}{T_{i_n}} \tag{4}$$

тенгсизликларнинг бажарилиши $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ режанинг оптималлиги учун зарур эканлигини кўрамиз.

Қаралаётган масала ечимга эгадир. (4) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча σ ўрин алмаштиришлар учун (2) мақсад функцияси фақат бир хил қиймат қабул қилади. Шунинг учун (4) тенгсизликлар оптималликнинг етарлилик шарти ҳам бўлади.

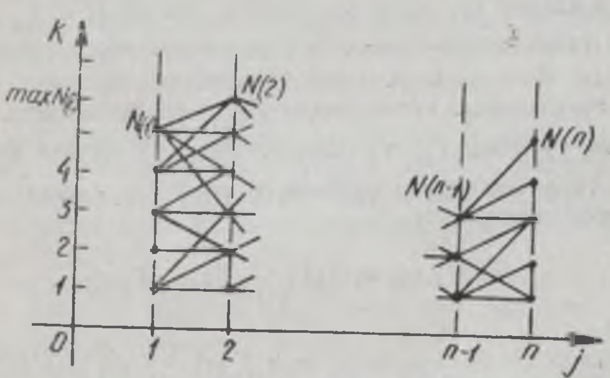
(4) га асосан биринчи навбатда энг катта нисбий жарима $\frac{c_i}{T_i}$ га эга бўлган буюртмаларга хизмат кўрсатилади.

Изоҳ. Агар буюртмаларни қабулхонага келувчи кишилар деб қарасак, T_i вақт — i-киши масаласини кўриб чиқиш учун сарфланган вақт, $c_i = 1$ эса фақат «майда» масалалар билан келган кишилар биринчи навбатда қабул қилинган тақдирдагина қабулхонада кутиш учун сарфланган вақт жаъми минимал бўлади.

2. Бутун сонли режалар тўпламини саралашнинг икки тарҳи. Компоненталари берилган натурал сонлар тўпламларидан қийматлар қабул қилувчи n-векторлардан тузилган ушбу X режалар тўпламини

$$X = \{x = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\} : x_i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ N(i)\},\ i = \overline{1,n}\}$$

қараймиз X тўпламнинг элементлари миқдори $|X| : |X| = \prod_{i=1}^{n} N(i)$ бўлишини осонгина ҳисоблаш мумкин.



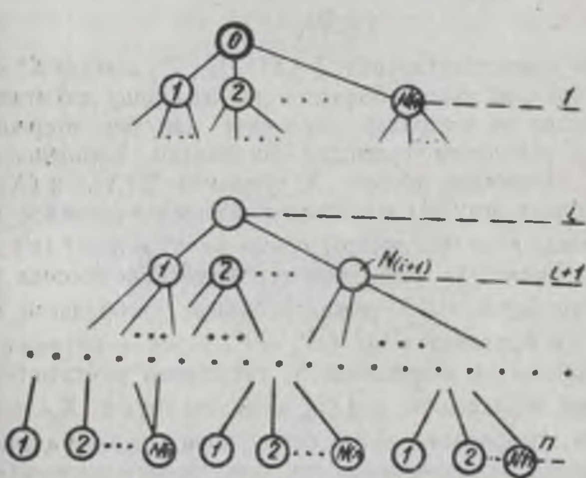
IV.1-чизма.

X тўплам ҳақида аниқ тасаввурни IV.1-чизмадан олиш мумкин. $j = 1$, $j = n$ тўғри чизиқларни туташтирувчи ҳар бир синиқ чизиқ режадир, $|X|$ белгиланган нуқталардан ўтказиш мумкин бўлган синиқ чизиқлар сонидир.

Барча режаларни ҳисоблагич принципи бўйича ҳисоблаб чиқиш мумкин. $j = n$ тўғри чизиқда нуқталар биринчи разряд элементлари, $j = n - 1$ тўғри чизиқдаги нуқталар иккинчи разряд элементлари ва ҳ. к.

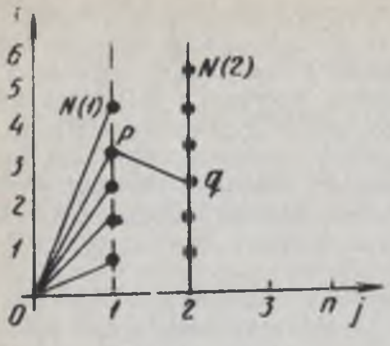
Саралаш усулларини амалга ошириш пайтида X даги элементларни саралашнинг икки тарҳи тузилади. Юқорида айтилган ҳисоблагич билан яқиндан боғлиқ бўлган *биринчи тарҳда* X тўпламга илдизи 0 тугунда бўлган шажара мос келади (IV.2- чизма). Шажаранинг i- қаватдаги ($0 \leqslant i \leqslant n-1$) ҳар бир тугунидан $i+1$- қаватга элтувчи $N\,(i+1)$ та ёй чиқади. n- қаватдаги тугунлар (ёки 0 тугундан уларга қараб йўналган ягона йўллар) ва X тўплам элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Шунинг учун ҳам 1- дан n- қаватгача жойлашган шажара тугунлари бўйича X дан элементларни саралаш ва улардан ҳар хил қисм тўпламлар тузиш мумкин.

Саралашнинг иккинчи тарҳи қуйидагичадир (IV.3- чизма). 0 нуқтадан бирор $y = p \in N$ (1) нуқтага тўғри чизиқ ўтказамиз ва уни синиқ чизиқнинг бўғини сифатида қараб, 1- хусусий режа деб атаймиз. Равшанки, 1- хусусий режалар сони N (1) га тенг. 1- хусусий режа $\{0, p\}$ га ихтиёрий $\{p, q\}$ бўғинни қўшиш 1- хусусий режанинг 2- хусусий режа $\{0, p, q\}$ га олиб келувчи ривожи деб айтилади, бу ерда $q - x_2$ компонента қийматлар тўплами бўлган $j = 2$ тўғри



IV.2- чизма.

чизиқ нуқтасидир. 2- хусусий режалар сони $N\,(1) \cdot N\,(2)$ га тенг. Хусусий режаларни ривожлантириш жараёнини давом эттириб, n- қадамдан сўнг n- хусусий режаларни оламизки, уларни (1) масала режалари билан ўзаро бир қийматли мос қўйиш мумкин.



IV.3- чизма.

3. Биринчи саралаш усули* (тармоқлар ва чегаралар усули). (1) масалани қараймиз. Айтайлик, ихтиёрий $X^* \subset X$ қисм тўплам учун иккита функция, яъни $f(x)$ функциянинг *минорантаси* $\underline{f}(x, X^*)$ ва *мажорантаси* $\overline{f}(x, X^*)$ ни қуриш мумкин бўлсин:

$$\underline{f}_*(x, X^*) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x, X^*),\ x \in X^*$$

ҳамда уларни X^* тўпламнинг бирор $\overline{X}^* \supset X^*$ кенгайтирилган тўпламида ҳам аниқлаш мумкин бўлсин.

Ушбу

$$\xi(X^*) \leqslant \min \underline{f}(x, X^*),\quad x \in \overline{X}^*;\quad \eta(X^*) \geqslant \min \overline{f}(x, X^*),$$
$$x \in \overline{X}^*,$$

шартларни қаноатлантирувчи $\xi(X^*)$, $\eta(X^*)$ сонлар X^* *тўпламнинг қуйи* ва *юқори баҳолари (чегаралари)* деб аталади.

Тармоқлар ва чегаралар усулининг ҳар бир итерацияси тўпламлар рўйхатини тузишдан бошланади. Бошланғич S_0 рўйхат X тўпламдан иборат. X тўпламга $\xi(X)$, $\eta(X)$ баҳоларни ҳамда агар (1) масаланинг бошланғич режаси маълум бўлмаса, $r^\circ = \infty$ (*рекорд*) сонни ва $r^\circ = \min f(x^l)$ сонни қўшиб ёзамиз, бу ерда минимум интерация бошида маълум бўлган барча $x^l \in X$ режалар бўйича ҳисобланган $r^\circ \leqslant \leqslant \xi(x) + \varepsilon$ бўлганда x^{k_0} ($f(x^{k_0}) = r^0$) режа ε-оптимал бўлади. Айтайлик, k-итерацияда S_k тўпламлар рўйхати берилган бўлсин. Рўйхатнинг ҳар бир элементи учун $\xi(X_k)$, $\eta(X_k)$ баҳоларни ҳисоблаймиз. Агар бунда янги режалар қурилган бўлса, мақсад функциясининг шу режалардаги минимал қиймати f_k ни топамиз. $r^k = \min\{r^{k-1}, f_k\}$ сонни рекорд деб, x^k ($r^k = f(x^k)$ ни эса k-итерациянинг рекорд режаси деб

---

* Чизиқсиз программалашда умумий икки ёқламалик назарияси мавжуд бўлмасада, ушбу параграфда баён қилинган усулларни чизиқсиз программалашда йўналган саралашнинг анъанавий тўғри усулларига нисбатан иккиёқлама масала деб қараш мумкин.

атаймиз. Агар $r^k \leqslant \min\limits_{X_k \in S_k} \xi(X_k) + \varepsilon$ бўлса, x^k ε-оптимал режадир. Агар яқинлашиш даражаси ε бизни қаноатлантирмаса, (1) масалани ечиш жараёнини давом эттирамиз. Бу ҳолда S_k рўйхатдан $\xi(X_k^*) > \min \eta(X_k)$, $X_k \in S_k$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча X_k^* тўпламларни чиқариб ташлаймиз. Сўнгра рўйхатнинг қолган элементлари орасидан X_k° тўпламни *тармоқлаш амалини* бажариш мақсадида танлаймиз, яъни X_k^0 тўпламни ўзаро кесишмайдиган қисм тўпламларга ажратамиз:

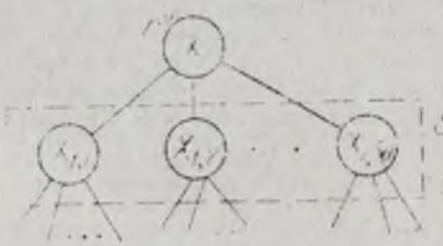
$$X_{k,1}^\circ, \; \ldots, \; X_{k,S(k)}^\circ; \; X_k^\circ = \bigcup_{t=1}^{S(k)} X_{k,t}^\circ, \; X_{k,t}^\circ \cap X_{k,t_1}^\circ = \varnothing, \qquad (5)$$

$$\text{агар } t \neq t_1 \text{ бўлса.}$$

X_k^0 ни танлашнинг классик қоидаси қуйидаги

$$\xi(X_k^\circ) = \min \xi(X_k), \; X_k \in S_k$$

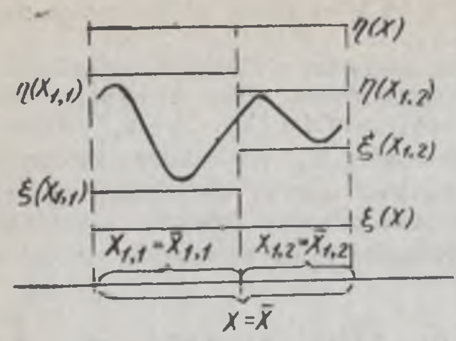
тенгликка асосланган. X_k° тўпламни S_k рўйхатдан ўчирамиз ва унинг ўрнига (5) тўпламларни киритиб, янги итерация учун S_{k+1} рўйхатга эга бўламиз.



IV.4- чизма.

Баён қилинган фикрларни дарахт тушунчаси ёрдамида яққолроқ талқин қилиш мумкин (IV.4- чизма).

X тўплам элементларининг чеклилигидан келиб чиқадики, ихтиёрий $\varepsilon \geqslant 0$ учун чекли сондаги тармоқлаш амали (итерация) бажарилгандан сўнг ε-оптимал режа топилади. Келтирилган фикрларни элементар муҳокама юритиш ёрдамида асослаш мумкин бўлгани учун уни ўқувчига ҳавола этамиз. Тармоқлар ва чегаралар усулидаги итерациялар на-



IV.5- чизма.

зорати учун IV.5- чизмада кўрсатилган геометрик талқиндан фойдаланиш қулайдир.

Тармоқлар ва чегаралар усулининг баёнидан кўриниб турибдики, бу усул фақат умумий иш юритиш тарҳини беради. Унинг аниқ масалаларда амалга оширилиши тармоқланиш стратегияларини танлаш ва баҳоларни ҳисоблаш усулларини кўрсатишдан иборатдир. Амалга оширишнинг муваффақияти масаланинг ўзига хос хусусиятини ҳисобга олиш даражасига ҳамда тадқиқотчининг тажрибаси ва интуициясига боғлиқ бўлади.

Тармоқлар ва чегаралар усулини намойиш қилиш учун қуйидаги учта аниқ масалани ечамиз.

1- мисол (юк халта ҳақидаги масала). Бизга номерланган n та буюм берилган бўлиб, уларнинг номерлари тўплами $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ бўлсин. i- буюмнинг оғирлиги p_i, баҳоси c_i га тенг. Юкнинг берилган баҳоси c бўйича буюмларни улар минимал оғирликка эга бўладиган қилиб танлаб олиш талаб қилинади. x_i (буль, бивалент) ўзгарувчиларни киритамиз: $x_i = 1$, агар i- буюм юк халтага жойлаштирилса; $x_i = 0$, агар i- буюм юк халтага жойлаштирилмаса. У ҳолда *юк халта ҳақидаги масаланинг* математик модели қуйидагича бўлади:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \Rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geqslant c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

(6) масалани IV.1- жадвалда келтирилган сонли маълумотлардан фойдаланиб ечамиз. Бу масалада мақсад функцияси содда кўринишда

IV.1- жадвал

i	1	2	3	4	5		
C_i	20	10	12	7	6	$\geqslant$	40
P_i	4	3	5	1	2		min

бўлгани учун миноранта ва мажоранталардан фойдаланилмаса ҳам бўлади, бошқача айтганда, $f(x, X) = f(x) = \bar{f}(x, \lambda)$, $x \in X$ деб олиш мумкин.

Бутун сонлардан тузилган режалар тўпламини кенгайтиришнинг кенг ёйилган усули бутун сонли бўлиш шартидан ташқари, масаланинг бошқа барча чекланишларини қаноатлантирадиган элементлар тўпламига ўтишдан (яъни «*дискрет*» масаладан «*узлуксиз*» масалага ўтишдан) иборат.

Мақсад функциясининг кенгайтирилган $\bar{X}$ тўпламдаги оптимал қиймати дастлабки тўпламнинг ξ баҳосидан иборатлиги тушунарли. (6) масаланинг режалари тўплами

$$X = \{x : 20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 40,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,5}\}$$

учун кенгайтирилган тўплам

$$\bar{X} = \{x : 20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 40,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{1,5}\}$$

бўлади. $\xi(X)$ баҳо қуйидагига тенг:

$$\xi(\lambda) = \min(4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5), \tag{7}$$

$$20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 40,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{1,5}.$$

Буюмлари бўлинадиган юк халта ҳақидаги масала деб аталувчи (7) масаланинг (*юк халта ҳақидаги узлуксиз масала* ҳам дейиш мумкин) физик маъноси қуйидагичадир: буюмлар нисбий баҳосини йўқотмаган ҳолда исталганча кичик бўлакчаларга майдаланиши мумкин; шу шартларда юк халтага берилган буюмлардан минимал оғирликка эга бўлган юкни шундай жойлаштириш керакки, бунда юкнинг баҳоси 40 дан кам бўлмасин. Кейинги масала осон ечилади. Бунинг учун дастлаб баҳо бирлигига энг кичик нисбий p_i/c_i оғирликли буюмни топамиз. IV.1-жадвалдан кўриниб турибдики, шундай буюм тўртинчи буюм ($p_4/c_4 = 1/7$ бўлади. Бу буюмни майда бўлакчаларга бўлиб, уни юкнинг белгиланган баҳосига эришилгунча ёки барча бўлаклар тугагунча юк халтага жойлайверамиз. Қаралаётган ҳолда 4 та буюм тўла жойлаштирилади, чунки уни юклашдан келадиган максимал қиймат 7 га тенг. Қолган буюмлар билан ҳам шу тартибда иш тутамиз. Нисбий баҳоси билан юкланувчи навбатдаги буюмлар 1 ($P_1/C_1 = 1/5$), 2 ($P_2/C_2 = 3/10$), 5 ($P_5/C_5 = 1/3$) бўлади. 5 буюм тўласича жойлаштирилмайди: белгиланган баҳога эришиш учун бешинчи буюмнинг ярмини жойлаштириш етарлидир. Натижада (7) масаланинг оптимал режаси $\{\mathring{x}_1 = \mathring{x}_2 = \mathring{x}_4 = 1,\ \mathring{x}_3 = 0,\ x_5 = 1/2\}$ ни ва (6) масаланинг режалари тўплами X нинг баҳоси $\xi(X) = 9$ ни оламиз. (7) масала ечимида $\mathring{x}_5$ компонента касрдан иборат. X тўпламни иккита тўпламга тармоқлаймиз:

$$X_{1,1} = \{x \in X : x_1 = 0\},\ X_{1,2} = \{x \in X : x_1 = 1\},$$

яъни

$$X_{1,1} = \{x : x_1 = 0,\ 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 40;\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{2,5}\},$$

$$X_{1,2} = \{x : x_1 = 1,\ 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 20;\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{2,5}\}.$$

Бошқача қилиб айтганда: $X_{1,1}$ тўплам (6) масаланинг шундай режалари тўпламики, улар учун биринчи ўзгарувчи x_1 нинг қиймати нолга тенг, $X_{1,2}$ эса шундай режалар тўпламики, улар учун $x_1 = 1$. $\xi\ (X_{1,1})$, $\xi\ (X_{1,2})$ баҳоларни ҳисоблаш қуйидаги масалаларни ечишга келтирилади:

$$\xi\ (X_{1,1}) = \min\ (3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5),$$

$$10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 40,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{2,5}, \tag{8}$$

$$\xi\ (X_{1,2}) = \min\ (3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5),$$

$$10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 20,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{2,5}. \tag{9}$$

(8) ва (9) масалаларни юқорида баён қилинган усулда ечамиз. (8) масалада барча $\overline{2,5}$ буюмларни юкласак ҳам кўрсатилган баҳо 40 ни олиб бўлмайди. Демак, (8) масала ечимга эга эмас. $\xi\ (X_{1,1}) = \infty$ деб олиб, $X_{1,1}$ тўпламни бундан кейин қарамаймиз. (9) дан $\xi\ (X_{1,2}) = 9$ га эга бўламиз. (9) масаланинг оптимал режаси бутун сон эмас. X ва $X_{1,1}$ тўпламлар ўчирилгандан сўнг рўйхатда фақат $X_{1,2}$ тўплам қолади. Бу тўпламни иккита $X_{2,1} = \{x \in X_{1,2} : x_2 = 0\}$, $X_{2,2} = \{x \in X_{1,2} : x_2 = 1\}$ тўпламга тармоқлаймиз, яъни

$$X_{2,1} = \{x : x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 20,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{3,5}\},$$

$$X_{2,2} = \{x : x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 10,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{2,5}\}.$$

$\xi\ (X_{2,1})$, $\xi\ (X_{2,2})$ баҳоларни ҳисоблаш қуйидаги

$$\xi\ (X_{2,1}) = 4 + \min\ (5x_3 + x_4 + 2x_5),\ 12x_2 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 20,$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 3,5,$$

$$\xi\ (X_{2,2}) = 7 + \min\ (5x_3 + x_4 + 2x_5),\ 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geqslant 10,$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{3,5}$$

масалаларни ечишга келтирилади. Булардан $\xi\ (X_{2,1}) = 9\frac{11}{22}$, $\xi\ (X_{2,2}) = 9$. S_2 рўйхатда иккита $X_{2,1}$ ва $X_{2,2}$ тўплам мавжуд. Кейинги тўпламнинг баҳоси энг кичик. Шунинг учун уни $X_{3,1}$, $X_{3,2}$ тўпламларга тармоқлаймиз:

$$X_{3,1} = \{x : x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0,\ 7x_4 + 6x_5 \geqslant 10,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{4,5}\}.$$

$$X_{3,2} = \{x : x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ 7x_4 + 6x_5 \geqslant -2,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{4,5}\}.$$

Бу тўпламларнинг баҳолари $\xi\ (X_{3,1}) = 9$, $\xi\ (X_{3,2}) = 12$ бўлиб, кейингисини ҳисоблаш пайтида дастлабки масаланинг режаси $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, бу рекорд режа бўлиб, рекорд 12 га тенг. Бу рекорднинг мумкин бўлган минимал оғирликдан фарқи $12 - 9 = 3$ бирликдан ошмайди.

Энди рўйхатга $X_{2,1}$, $X_{3,1}$, $X_{3,2}$ тўпламлар киради. $X_{3,1}$ тўпламнинг баҳоси энг кичикдир. Шунинг учун уни иккита тўпламга тармоқлаймиз:

$$X_{4,1} = \{x : x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0,\ 6x_5 \geqslant 10,\ x_5 = 0 \vee 1\},$$

$$X_{4,2} = \{x : x_1 = x_2 = x_4 = 1,\ x_3 = 0,\ 6x_5 \geqslant 3,\ x_5 = 0 \vee 1\}.$$

Бу тўпламларнинг баҳоларини ҳисоблаб чиқамиз: $\xi(X_{4,1}) = \infty$, $\xi(X_{4,2}) = 9$. Рўйхатдан $X_{3,1}$ ва $X_{4,1}$ тўпламлар ўчирилгандан сўнг энг кичик баҳога эга бўлган тўплам $X_{4,2}$ бўлади. $X_{4,2}$ тўпламни иккита тўпламга тармоқлаймиз:

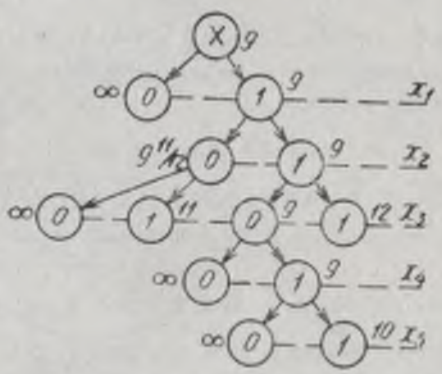
$$X_{5,1} = \{x : x_1 = x_2 = x_4 = 1,\ x_3 = x_5 = 0\},$$

$$X_{5,2} = \{x : x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 1,\ x_3 = 0\}.$$

Ҳисоблаб топамиз: $\xi(X_{5,1}) = \infty$, $\xi(X_{5,2}) = 10$. Бунда дастлабки масаланинг рекорди 10 га тенг бўлган янги рекорд режаси $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ ни оламиз. Янги рекорднинг минимал мумкин бўлган оғирликдан фарқи $10 - 9\frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ дан ошмайди (бу оптимал режа бўлади, чунки бу мисолда оптимал оғирликнинг бошқаларидан фарқи бирдан кичик). $X_{5,1}$ тўпламни рўйхатдан ўчирамиз. $X_{2,1}$ тўпламнинг баҳоси энг кичик. Уни қуйидаги тўпламларга тармоқлаймиз:

$$X_{6,1} = \{x : x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0,\ 7x_4 + 6x_5 \geqslant 10,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{4,5}\},$$

$$X_{6,2} = \{x : x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ 7x_4 + 6x_5 \geqslant 10,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{4,5}\}.$$



IV.6- чизма.

Бу тўпламларнинг баҳолари $\xi(X_{6,1}) = \infty$, $\xi(X_{6,2}) = 11$. $X_{2,1}$ тўплам рўйхатдан ўчирилгандан сўнг $X_{5,2}$ тўплам энг кичик баҳога эга бўлади. Унинг баҳоси рекордга тенг. Натижада, охирги рекорд режа $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ дастлабки масаланинг оптимал режасидир. Шундай қилиб, юк халтага 1, 2, 4, 5 номерли буюмлар юкланганда оғирлик минимал, яъни 10 га тенг бўлиб, юкнинг баҳоси 43 га тенг бўлади.

Келтирилган барча ҳисоблашларни график равишда тасвирлаш қулайдир (IV.6-чизма). Шажара тугунларида ўзгарувчиларнинг қийматлари белгиланган (ўзгарувчилар ўнг томонда ёзилган). Тугунлар сиига тўплamларнинг баҳолари ёзиб қўйилган. Ҳар бир интерацияда тармоқлаш учун энг кичик баҳога эга бўлган осма тугун танланади.

2-мисол (бутун сонли чизиқли программалаш масаласи). Тармоқлар ва чегаралар усули биринчи марта қўлланилган масалани қараймиз:

$$c'x \to \min, \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x \text{ — бутун сонли вектор.} \qquad (10)$$

x бутун сонли вектор деган талабдан воз кечиб, (10) масаланинг режалар тўплами X ни кенгайтирамиз: $\overline{X} = \{x : Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\}$. У холда ξ (X) сон

$$\xi\,(X) = c'\overline{x}^\circ = \min c'x, \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0 \qquad (11)$$

X тўпламнинг баҳоси бўлиб қолади. Агар чизиқли программалашнинг «узлуксиз» масаласи (11) нинг ечими $\overline{x}^0$ бутун сонли вектордан иборат бўлса, $\overline{x}^\circ$ дастлабки масаланинг оптимал режаси бўлади.

$\overline{x}^\circ$ векторни «яхлитлаш» (яъни унн қўшни бутун сонли векторлардан бири билан алмаштириш) ҳамма вақт ҳам қониқарли натижа бера-вермайди ва бу усул (10) масаланинг режаси бўлмаган векторга ҳам олиб келиши мумкин.

Айтайлик $\overline{x}_i^\circ$ компонента $\overline{x}^\circ$ векторнинг бутун бўлмаган компонентаси бўлсин. X тўпламни иккита $X_{1,1}$, $X_{1,2}$ тўпламларга тармоқлаймиз:

$$X_{1,1} = \{x \in X, \ x_{i_1} \leqslant [\overline{x}_{i_1}^\circ]\}, \ X_{1,2} = \{x \in X, \ x_{i_1} \geqslant [x_{i_1}^\circ] + 1\},$$

бу ерда $[a]$ сон a сонниинг бутун қисмини ифодалайди. Кенгайтирилган $\overline{X}_{1,1}$, $\overline{X}_{1,2}$ тўпламлар сифатида

$$\overline{X}_{1,1} = \{x : Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x_{i_1} \leqslant [\overline{x}_{i_1}^\circ]\},$$

$$\overline{X}_{1,2} = \{x : Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x_{i_1} \geqslant [\overline{x}_i^\circ] + 1\}$$

тўпламларни оламиз. $\xi\,(X_{1,1})$, $\xi\,(X_{1,2})$ баҳоларни ҳисоблаш учун қуйидаги

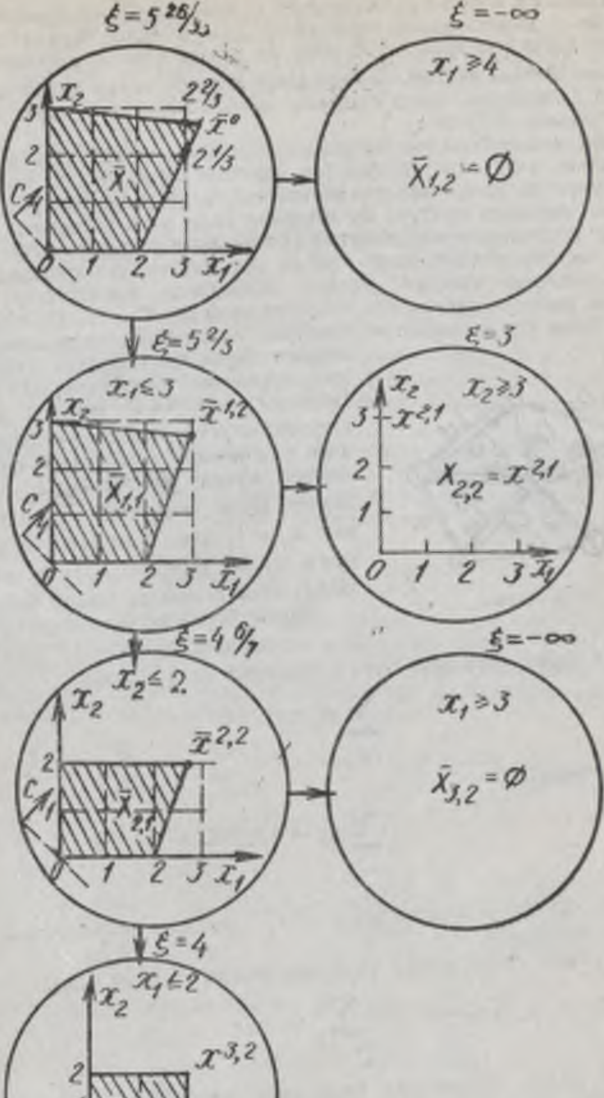
$$\xi\,(X_{1,1}) = c'x^{1,1} = \min c'x. \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x_{i_1} \leqslant [\overline{x}_{i1}^\circ].$$

$$\xi\,(X_{1,2}) = c'x^{1,2} = \min c'x, \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x_{i_1} \geqslant [\overline{x}_{i_1}^\circ] + 1,$$

чизиқли программалаш масалаларига эга бўламиз. Бу масалаларнинг ҳар бири (1) масаладан фақат битта қўшимча чекланиш билан фарқ қилади. Шунинг учун уларни икки ёқлама симплекс усул билан ечиш мақсадга мувофиқдир, бунда (11) масаланинг оптимал потенциаллари асосида қурилган режани бошланғич икки ёқлама базис режа сифатида олиш мумкин (I-боб, 3-§, 6-бандга қ.) Сўнгра бажариладиган амаллар тармоқлар ва чегаралар усули учун стандартдир.

IV.7-чизмада мисол сифатида $x_1 + x_2 \to \max$, $x_1 + 9x_2 \leqslant 27$, $7x_1 + 3x_2 \leqslant 14$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ — бутун сонлар, масалани геометрик усул билан ечиш натижалари келтирилган.

3-мисол (бир станокда деталларга ишлов беришда станокни қайта созлаш вақтини минималлаштириш

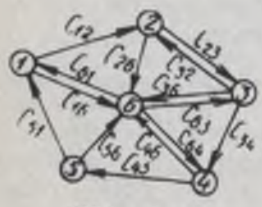


$\xi = -\infty$
$x_1 \geq 4$
$\bar{X}_{1,2} = \varnothing$
$\xi = 5\,^{2}/_{3}$
$x_1 \leq 3$
$\bar{x}^{1,2}$
$\bar{X}_{1,1}$
$\xi = 3$
$x_2 \geq 3$
$x^{2,1}$
$X_{2,2} = x^{2,1}$
$\xi = 4\,^{6}/_{7}$
$x_2 \leq 2$
$\bar{x}^{2,2}$
$\bar{X}_{2,1}$
$\xi = -\infty$
$x_1 \geq 3$
$\bar{X}_{3,2} = \varnothing$
$\xi = 4$
$x_1 \leq 2$
$x^{3,2}$
$\bar{X}_{3,1}$
$x^0 = \{2,2\}$

IV.7- чизма.

ҳ а қ и д а г и м а с а л а). Универсал станокда n хил деталга ишлов берилади. i- деталга ишлов беришдан j- деталга ишлов беришга ўтиш станокни қайта созлашни талаб этади ва бунинг учун c_{ij} вақт бирлиги сарф бўлади. Деталларга ишлов беришнинг шундай кетма- кетлигини топиш талаб қилинадики, бунда станокни қайта созлаш учун сарф бўладиган вақт минимал бўлсин.

Бу масала бошқача терминологияда *коммивояжер (сайёҳ савдогар) ҳақидаги*, яъни n та шаҳарга бир мартадан бориб, яна ўз шаҳрига қайтиш учун энг қисқа маршрутни танлаш ҳақидаги классик комбинаторик *масала* сифатида маълум. Бу масалани ечиш учун тармоқлар ва чегаралар усулининг муваффақиятли қўлланилиши бу усулга мутахассисларнинг кенг эътиборини жалб этди ва уни дискрет программалаш масаласини ечишнинг оммавий усулига айлантирди. Қаралаётган масалани график равишда қуйидагича тушуниш мумкин. $S = \{I, U\}$ тўрда шундай (ўзини ўзи кесмайдиган) контурни топиш талаб қилинадики, у тармоқнинг барча тугунларидан ўтиб, минимал узунликка эга бўлсин (IV.8-чизма).



IV.8- чизма.

Бунда c_{ij} — $(i, j) \in U$ ёйнинг узунлиги. i- тугундан j- тугунга борувчи ёйнинг йўқлиги j деталнинг i- деталдан кейин ишланиши мумкин эмаслигини ($c_{ij} = \infty$) билдиради. Буль ўзгарувчиси x_{ij} ни киритамиз: $x_{ij} = 1$, агар i- деталдан сўнг j- деталга ишлов берилса; $x_{ij} = 0$, агар i- деталдан сўнг j - деталга ишлов берилмаса.

Ишлов берилган ҳар бир $i \in I = \{1, 2, \ldots n\}$ деталдан сўнг I_i^+ даги бирор деталга ишлов берилади. Буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} = 1, \; i \in I. \tag{12}$$

Шунга ўхшаш,

$$\sum_{i \in I_j^-} x_{ij} = 1, \; j \in I, \tag{13}$$

тенглик ҳар бир j- деталга бирор $i \in I_j^-$ деталдан кейин ишлов берилишини билдиради.

Станокни қайта созлаш учун сарфланадиган жами вақт

$$\sum_{(i, \, j) \in U} c_{ij} \, x_{ij}. \tag{14}$$

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг математик модели (12), (13) тенгликлар, $x_{ij} = 0 \vee 1$, $(i, j) \in U$ шарт ва K *талаб* $((i, j) \in U$, $x_{ij} = 1$ ли ёйлар S тўрда контур ташкил этади) ёрдамида берилган X режалар тўпламида (14) функцияни минималлаштириш масаласидан иборат экан. *S тўрнинг контури* деб $S = \{I, U\}$ тўрнинг барча тугунларидан ўтувчи контурга айтилади. *Қисм контур* деб S тўрнинг барча тугунларидан ўтмайдиган контурга айтилади.

X тўпламнинг кенгайтирилган тўплами

$$\overline{X} = \left\{x : \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i \in I_i^-} x_{ij} = 1, \ i, j \in I, \ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \ (i, j) \in U\right\},$$

бўлиб, X тўпламдан K талабдан ва режаларнинг бутун сонлилиги шартидан воз кечиб ҳосил қилинади.

$\xi(X)$ баҳони ҳисоблаш учун баҳолаш масаласи

$$\underline{f}(x) = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i \in I_j^-} x_{ij} = 1, \tag{15}$$

$$i, j \in I, \ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \ (i, j) \in U$$

ни қараймиз. (15) масала нақлиёт масалаларининг хусусий ҳоли бўлиб (II боб. 4-§), *тайинлаш ҳақидаги масала* дейилади, чунки уни n нафар хизматчини n та ишга тайинлаш харажатларини минималлаштириш ҳақидаги масала деб қараш ҳам мумкин.

Тушунарлики, (15) масаланинг $\underline{f}(x)$ мақсад функцияси дастлабки масаланинг $f(x)$ минорантасидан иборат. X тўпламнинг баҳосини ҳисоблаш учун (15) масалани ечишнинг самарали усуллари (масалан, *венгр усули*) мавжуд бўлса-да, лекин уни ечиш шарт эмас. $\xi(X)$ баҳонинг таърифига кўра у

$$\xi(X) \leqslant \min \underline{f}(x), \ x \in \overline{X}$$

тенгсизликни қаноатлантириши етарли. Шунга ўхшаш тенгсизликлар илгари икки ёқламалилик назариясида учраган эди (I боб, 2-§). Эслатамизки, икки ёқлама $\psi(\lambda)$ функциянинг ихтиёрий иккиёқлама режадаги қиймати $\varphi(x)$ функциянинг ихтиёрий тўғри λ режадаги қийматидан ошмайди. (13) масалага икки ёқлама масала

$$\sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i - \sum_{(i, j) \in U} w_{ij} \to \max, \quad u_i + v_j - w_{ij} \leqslant c_{ij},$$

$$w_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U \tag{16}$$

бўлади. Ушбу

$$u_i = \min_{j \in I_i^+(U)} c_{ij}, \ i \in I, \quad v_j = \min_{i \in I_j^-(U)} (c_{ij} - u_i), \ j \in I,$$

$$w_{ij} = 0, \ (i, j) \in U \tag{17}$$

сонлар икки ёқлама режани ташкил этишини текшириш осон. Демак, $\xi(X)$ баҳо сифатида $\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)$ сонни олиш мумкин.

Айтайлик, (16) масаланинг бирор (u, v, w), $w_{ij} = 0$, $(i, j) \in U$ режаси маълум бўлсин. Шу режа бўйича кооқим $\delta = \{\delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j, \ (i, j) \in U\}$ қурамиз. Агар

$$\alpha_i = \min_{j \in I_i^+(U)} \delta_{ij} = 0, \quad \beta_j = \min_{i \in I_j^-(U)} (\delta_{ij} - \alpha_i) = 0 \tag{18}$$

бўлса, $\{u, v, w\}$ режани (δ кооқимни) $S = \{I, U\}$ тармоқда мувофиқлаштирилгап режа (кооқим) деймиз.

Агар (18) мувофиқлаштириш шарти бажарилмаса. $\{u, v, w\}$ режани яхшилаш учун уни $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$:

$$\bar{u}_i = u_i + \alpha_i,\ i \in I,\ \bar{v}_j = v_j + \beta_j,\ j \in I,\ \bar{w}_{ij} = 0,$$
$$(i, j) \in U \tag{19}$$

режа билан алмаштирамиз. Бунда (16) масаланинг мақсад функцияси

$$\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in I} \beta_j$$

миқдорга ортади. (19) мувофиқлаштирилган режага мувофиқлаштирилган

$$\bar{\delta} = \{\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_i - \beta_j,\ (i, j) \in U\} \tag{20}$$

кооқим мос келади. Осон текшириш мумкинки, (17) режа $S = \{I, U\}$ тармоқда мувофиқлаштирилган бўлади. (17) режа бўйича δ кооқимни қурамиз ва ёйлар тўплами $U_* = \{(i, j) : \delta_{ij} = 0,\ (i, j) \in U\}$ ни қараймиз. Агар U_* тўпламнинг ёйларидан S тармоқнинг K_* контурини қуриш мумкин бўлса, $\{x_{ij} = 1,\ (i, j) \in K_*,\ x_{ij} = 0,\ (i, j) \in U \setminus K_*\}$ сонлар дастлабки масаланинг ечими бўлади.

Айтайлик, U_* тўплам ёйларидан тармоқда тегишли контурлар тузиб бўлмасин. U_* дан олинган ёйлардан тузилган бирорта қисм контурга тегишли ихтиёрий $(i_0, j_0) \in U_*$ ёйни оламиз. X тўпламни қуйидаги қисм тўпламларга тармоқлаймиз:

$$X_{1,1} = X_{(i_0, j_0)_0} = \{x \in X : x_{i_0 j_0} = 0\},\ X_{1,2} = X_{(i_0, j_0)_1} =$$
$$= \{x \in X : x_{i_0 j_0} = 1\}.$$

Равшанки, $X = X_{1,1} \cup X_{1,2}$, $X_{1,1} \cap X_{1,2} = \varnothing$

$x_{i_0 j_0} = 0$ шарт j_0-деталга i_0-деталдан кейин ишлов берилмасин деган талабга эквивалентдир. Агарда тармоқдан (i_0, j_0) ёй олиб ташланса (ёки $c_{i_0 j_0} = \infty$ деб олинса), бу шарт бажарилади. Умумий ҳолда (17) режа бўйича қурилган δ кооқим $S_{1,1} = \{I, U_{1,1}\}$, $U_{1,1} = U / \{i_0, j_0\}$ тармоқ учун мувофиқлаштирилган бўлади. (20) қоидаларга кўра $S_{1,1}$ тармоқда мувофиқлаштирилган кооқимга ўтамиз. Шунда (16) масаланинг мақсад функцияси $\alpha_{i_0} + \beta_{j_0}$ миқдорга ўсади, бу ерда $\alpha_{i_0} = \min\limits_{j \in I^+_{i_0}(U_{1,1})} \delta_{i_0 j}$, $\beta_{j_0} = \min\limits_{i \in I^-_{j_0}(U_{1,1})} (\beta_{i j_0} - \alpha_i)$. Демак, $\xi(X_{1,1}) = \xi(X) + \alpha_{i_0} + \beta_{j_0}$ миқдорни $X_{1,1}$ тўпламнинг баҳоси сифатида олиш мумкин.

$X_{1,2}$ тўпламни қараймиз. $x_{i_0 j_0} = 1$ шарт i_0-деталдан сўнг j_0-деталга ишлов берилиши талабига эквивалентдир. Бундан келиб чиқадики, i_0-деталдан сўнг бирорта ҳам $j \in I^+_{i_0}(U) \setminus j_0$ деталга ишлов берилмайди. j_0-деталга ишлов беришдан олдин бирорта ҳам $i \in I^-_{j_0}(U) / i_0$ деталга ишлов берилмайди ва j_0-деталдан сўнг i_0-деталга ишлов бериш мумкин эмас, яъни $x_{i,j} = 0$,

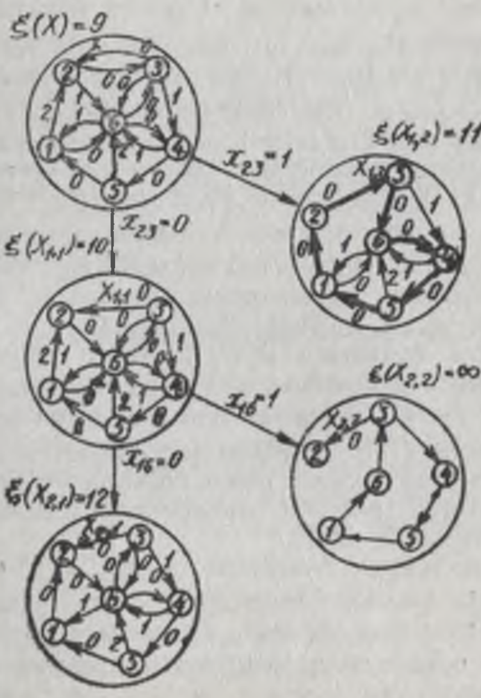
$$(i,\ j)\in U_{1,2}^{0}=\{(i_0,\ j_0),\ \ j\in I_{i_0}^{+}(U)\setminus j_0;$$
$$(i,\ j_0),\ \ i\in I_{j_0}^{-}(U)\setminus i_0;\ (j_0,\ i_0)\}.$$

S тармоқдан $(i,\ j)\in U_{1,2}^{0}$ ёйларни чиқариб ташлаб, кейинги тенгликларнинг бажарилишига эришиш мумкин. (17) режа бўйича қурилган кооқим $S_{1,2}=\{I.\ U_{1,2}\}$, $U_{1,2}=\{U\setminus U_{1,2}^{0}\}$ тармоқ учун мувофиқлаштирилмаган бўлади. (20) қоидаларга кўра $S_{1,2}$ тармоқда мувофиқлаштирилган кооқимга ўтамиз ва $X_{1,2}$ тўпламнинг $\xi\ (X_{1,2})$ баҳоси сифатида (16) масаланинг мақсад функциясининг мувофиқлаштирилган кооқимдаги (мувофиқлаштирилган иккиёқлама режадаги) қийматини оламиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\xi\ (X_{1,2})=\xi\ (X)+\sum_{i\in I\setminus i_0}\alpha_i+\sum_{j\in I\setminus j_0}\beta_j.$$

$$\alpha_i=\min_{j\in I_i^{+}(U_{1,2})}\delta_{ij},\ \beta_j=\min_{i\in I_j^{-}(U_{1,2})}(\delta_{ij}-\alpha_i).$$

$X_{1,1}$, $X_{1,2}$ тўпламлардан энг кичик баҳога эга бўлганини олиб, у билан худди дастлабки X тўпламдек иш тутамиз.



IV.9- чизма.

IV.9- чизмада IV.8- чизмада келтирилган масалани қуйидаги

$$c_{12}=2,\ c_{16}=0,\ c_{26}=3,\ c_{28}=2.\ c_{32}=1,\ c_{36}=1,\ c_{34}=2.$$

$$c_{45}=4,\ c_{46}=5,\ c_{51}=1,\ c_{56}=3,\ c_{61}=2,\ c_{63}=1,\ c_{64}=1$$

сонли қийматларда ечиш натижаси келтирилган. IV.9- чизмада кўрсатилган ёй устидаги сонлар ёй коэффициентларига тенг.

Деталларга оптимал ишлов беришда улар қуйидаги тартибда ишловга киритилади: $1\to2\to3\to6\to4\to5\to1$. Бу тартиб IV.9- чизмада йўғон чизиқ билан кўрсатилган. Минимал қайта созлаш вақти эса 11 га тенг.

4. Иккинчи саралаш усули. Қуйидаги

$$f(x)\to\min,\ g(x)\leqslant 0,\ x\in Q \tag{21}$$

масалани қараймиз, бу ерда $f(x)$, $g(x)$ скаляр функциялар; Q — n ўлчовли R_n фазонинг тўплами. Жараён 0- хусусий режадан бошланади. Агар (21) га қўшимча равишда режалар маълум бўлса, r^0 рекордни ва рекорд режани ҳисоблаймиз. Айтайлик, k- итерацияда k- хусусий режалар $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ нинг x_k тўплами ва r^k рекорд берилган бўлсин. k- хусусий режа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ нинг ривожланиши икки ҳолда маънога эга эмас: 1) уни исталган тўлиқ режа $x= =\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ гача ривожлантирганда $f(x)>r^k$ тенгсизлик бажарилса; 2) $g(x)>0$. Бу ҳолларда k- хусусий режани ривожлантириб олинадиган барча режалар сараланмайди. Масалан, рекорд $r^2=0$ бўлганда $f(x)=3x_1+2x_2- -x_3-2x_4$, $x_i=0\vee 1$, $i=\overline{1,4}$ мақсад функцияси учун 2- хусусий режа $\{1,1\}$ ни ривожлантиришнинг маъноси йўқ, чунки бу хусусий режани ривожлантиришдан олинадиган $\{1, 1, 0, 0\}$, $\{1, 1, 0, 1\}$ $\{1, 1, 1, 0\}$, $\{1, 1, 1, 1\}$ режаларда мақсад функцияси мусбат қиймат қабул қилади. Шунга ўхшаш, $g(x)\leqslant 0$, $g(x)=2x_1-3x_2+x_3+2x_4-1$, $x_i=0\vee 1$, $i=\overline{1,4}$ чекланишларга эга бўлган масала учун 2- хусусий режа $\{1,0\}$ ни ривожлантиришнинг маъноси йўқ, чунки бу хусусий режани ривожлантиришдан олинган ҳар бир x режа учун $g(x)>0$ тенгсизлик бажарилишини текшириб кўриш қийин эмас.

Баъзи масалаларда k- хусусий режани x_{k+1} нинг битта (ёки унча кўп бўлмаган сондаги) қиймати орқалигина ривожлантириш мумкин бўлади, бу ҳолда x_{k+1} нинг бошқа қийматлари орқали k- хусусий режани ривожлантиришдан олинган режалар сараланмайди. Масалан, рекорд $r^2=0$ бўлганда, $f(x)=3x_1+x_2-3x_3+x_4$, $x_i=0\vee 1$, $i=\overline{1,4}$ мақсад функцияли масалада 2-хусусий режа $\{1,0\}$ ни фақат $x_3 = 1$ орқалигина ривожлантириш мумкин, чунки $x_3 = 0$ бўлганда, бундан кейинги ихтиёрий ривожланиш $f(x) > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x режага олиб келади. Шунга ўхшаш, $g(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 0$, $x_i = 0 \vee \vee 1$, $i = \overline{1,4}$ чеклаш учун 2-хусусий режани фақат $x_3 = = 0$ орқалигина ривожлантириш мумкин, чунки $x_3 = 1$ орқали ихтиёрий ривожлантиришда чеклашлар бузилади.

Баён қилинган саралаш усули кўпинча (21) масалада $f(x)$, $g(x)$ $(f(x) = \sum\limits_i f_i(x_i))$ функциялар *сепарабел функциялар* ва Q тўплам гиперкуб типида бўлганда қўлланилади. $f(x)$, $g(x)$ мураккаб функциялар бўлган ҳолда рекордни ҳисоблаш ва хусусий режаларни ривожлантириш билан боғлиқ баҳолашларни ўтказиш учун уларнинг минорантаси ва мажорантасидан фойдаланиш мумкин. Усулнинг шунга мос турланишларини ўқувчига машқ сифатида ҳавола қиламиз.

Изоҳ. Иккинчи саралаш усули динамик программалаш усули (V боб) каби динамик (кўп босқичли) ечим қабул қилиш (бошқариш) жараёнлари учун табиий бўлиб, бобнинг бошида гапирилган *фазовий* (статистик) усуллардан фарқли ўлароқ *вақтли* (динамик) оптималлаштириш усулларидан ҳисобланади. Динамик усулларда ечимга (оптимал режага) яқинлашишлар ўлчови кичик бўлган (кам сондаги босқичлардан тузилган) ўхшаш масалалар кетма-кетлигининг ечимларига қараб тузилади. Бунда ечиш жараёни гўё вақт бўйича ёйилгандек бўлади. Статистик усулларда босқичлар сони тайин қилинган ва итерациялар тайин қилинган ўлчовли фазонинг бир элементидан иккинчи бир элементига ўтишдан иборатдир.

2-§. БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ

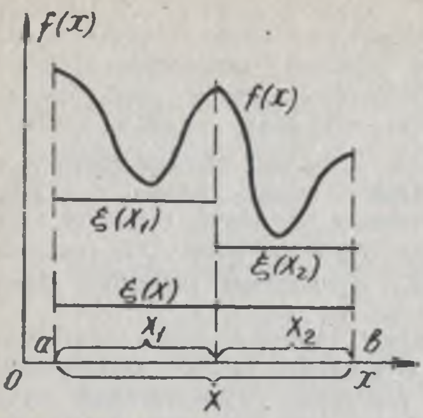
Бир ўзгарувчили функцияни минималлаштириш самарали сонли усулларининг аҳамияти шу билан белгиланадики, улар кўпгина мураккаб экстремал масалаларни ечиш усулларининг таркибий қисмини ташкил этади.

1. Силлиқ функциянинг абсолют минимум нуқтасини қуриш усули. Силлиқ функциянинг кесмада минимумини топиш ҳақидаги

$$f(x) \to \min, \quad x \in X = [a, b] \tag{1}$$

масалани қараймиз. (1) масалани ечиш учун тармоқлар ва чегаралар усулининг ғоясидан фойдаланамиз. X тўпламнинг $\xi(x)$ баҳоси

$$\xi(X) \leqslant f(x), \quad x \in X$$



IV.10- чизма.

функцияларни яқинлаштириш назарияси нуқтаи назаридан ($f(x)$ функцияни ўзгармас $y = f(x) = \xi(X)$ функция ёрдамида қуйидан яқинлаштиришдан иборат (IV. 10- чизма). Агар бирор $x^* \in X$ да $\xi(X) = f(x^*) - \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, x^* (1) масаланинг ε-оптимал режаси бўлади. X тўпламни X_1, X_2, тўпламларга тармоқлаш бўлакли ўзгармас

$$y = f^1_X(x) = \begin{cases} \xi(X_1), & x \in X_1 \\ \xi(X_2), & x \in X_2 \end{cases}$$

функциялар синфида яқинлаштиришга олиб келади. Тармоқлар ва чегаралар усули бўйича муҳокама юритишни давом эттириб, $f(x)$ функцияни бўлакли ўзгармас функциялар синфида тобора аниқроқ қуйидан яқинлаштириш мумкин.

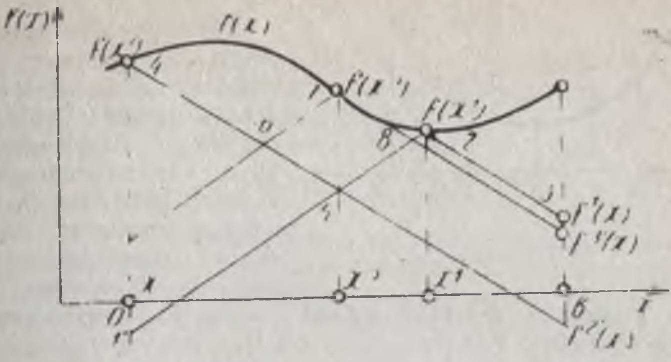
Энди ушбу банд мавзуига ўтамиз. Айтайлик, $f(x) \in C^{(1)}$, $|\partial f(x)/\partial x| \leqslant L < \infty$ бўлсин. Тармоқлар ва чегаралар усулининг баён қилинган тарҳини умумлаштириб, $f(x)$ функцияни бўлакли узлуксиз функциялар синфида қуйидан яқинлаштирамиз. Ихтиёрий $x^1 \in X$ нуқтани оламиз.

x^1 сифатида мутахассислар томонидан (1) масалада оптимал деб таклиф қилинган режани олиш мумкин. Қуйидаги

$$f^1(x) = \begin{cases} f(x^1) + L(x - x_1), & x \in [a,\ x^1], \\ f(x^1) - L(x - x^1), & x \in\ ]\ x^1,\ b] \end{cases}$$

функцияни қурамиз.

$f^1(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бўлакли-чизиқли яқин лаштиришидир: $f(x)$: $f_1(x) \leqslant f(x)$, $x \in X$. IV. 11- чизмада у $\{1, 2, 3\}$ синиқ чизиқ билан тасвирланган. x^2 нуқта $f^1(x)$ функциянинг минимум нуқтаси бўлсин: $f^1(x^2) = \min f^1(x)$, $x \in X$. Агар бирор $x^* \in X$ учун $f(x^*) \leqslant f^1(x^2) + \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, x^* (1) масаланинг ε-оптимал режаси бўлади. ε



IV.11- чизма.

нинг қониқарли бўлмаган қийматларида ечиш жараёнини давом эттирамиз. Қуйидан иккинчи яқинлашишни

$$f^2(x) = \max\ \{f^1(x),\ f^{2\prime}(x)\} \qquad (2)$$

формула бўйича аниқлаймиз, бу ерда

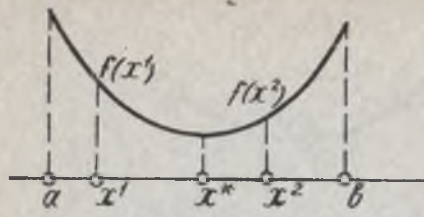
$$f^{2\prime}(x) = \begin{cases} f(x^2) + L(x - x^2), & x \in [a,\ x^2], \\ f(x^2) - L(x - x^2), & x \in]\ x^2,\ b]. \end{cases}$$

IV. 11-чизмада $f^2(x)$ функция $\{4, 5, 2, 3\}$ синиқ чизиқ билан тасвирланган. x^3 нуқтани топамиз: $f^2(x^3) = \min f^2(x)$, $x \in X$. Агар бирор $x^* \in X$ учун $f(x^*) \leqslant f^2(x^3) + \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, x^* режа ε-оптимал режа бўлади. Акс ҳолда x^3 нуқта бўйича навбатдаги яқинлашиш қурилади: бу ерда $f^3(x) = \max\ \{f^2(x),\ f^{3\prime}(x)\}$, $x \in X$;

$$f^{3\prime}(x) = \begin{cases} f(x^3) + L(x - x^3), & x \in [a,\ x^3], \\ f(x^3) - L(x - x^3), & x \in]\ x^3,\ b]. \end{cases}$$

IV. 11-чизмада $\{4, 6, 7, 8, 2, 3\}$ синиқ чизиқ $f^3(x)$ функцияни ифодалайди.

Ҳар бир s итерациядан сўнг яқинлашиш аниқлиги оша боради ва $f(x)$ нинг қийматлари бўйича (1) масаланинг глобал оптимал режасига тобора яқинлашувчи x^s режалар қурилади. Итерациядаги асосий амал (2) типдаги бўлакли-чизиқли функцияни минималлаштиришдан иборат. Шунга ўхшаш масалалар, одатда, чизиқли программалаш масаласига келтирилади (1-боб, 1-§). Аммо қаралаётган ҳолда $x^2, x^3, \ldots$ минимум нуқталари элементар ҳисоблашлар ёрдамида топилади.



IV.12- чизма.

Айтиб ўтилган тарҳни янада умумлаштириш имконияти мавжуд. $f(x)$, $\partial f(x)/\partial x| \leqslant L$, $|\partial^2 f(x)/\in x^2| \leqslant C$ функциялар учун яқинлашишларни бўлакли-квадратик функциялар (*иккинчи тартибли сплайнлар*) синфида қуриш мумкин.

2. Унимодал функцияларнинг минимум нуқталарини излаш усуллари. Узлуксиз $f(x)$, $x \in R_1$ функция учун $[a, b]$ кесмада шундай $x^* \in [a, b]$ нуқта мавжул бўлсаки, $[a, x^*]$ кесмада $f(x)$ функция камаювчн, $[x^*, b]$ кесмада эса ўсувчи бўлса (IV. 12-чизма), у $[a, b]$ кесмада *унимодал функция* дейилади. Қатъий қавариқ функция унимодал функцияга мисол бўла олади. Кўпинча $f(x) \in C^{(2)}$ функциянинг минимум нуқтаси атрофида қатъий қавариқликнинг етарлилик шарти $\partial^2 f(x)|\partial x^2 > 0$ бажарилганлиги учун унимодал функцияларни минималлаштиришнинг самарали усулларини қуриш чизиқсиз программалашда актуал муаммо ҳисобланади.

Унимодал функцияларнинг минимум нуқталарини излашда фойдаланиладиган асосий хоссаси шундан иборатки, ихтиёрий иккита $f(x^1)$, $f(x^2)$, $x^1 \neq x^2$, ${}^1x$, $x^2 \in]\,a, b\,[$ қийматларни ҳисоблаш x^* *минимум нуқтаси локалланган* $[a, b]$ *интервални* торайтиришга имкон беради. Осон текшириш мумкинки (IV. 12-чизма), $f(x^1) > f(x^2)$, $x^1 < x^2$ бўлганда албатта $x^* \in [x^1, b]$ бўлади. Агар $f(x^1) < f(x^2)$, $x^1 < x^2$ бўлса, $x^* \in [a, x^2]$ бўлади.

Дастлабки $[a, b]$ интервалнинг $x^1, x^2, \ldots, x^k$ нуқталарида $f(x)$ функциянинг қийматларини ҳисоблашдан сўнг минимум нуқтаси локаллашган интервал узунлигини $\Delta_k(f)$ деб белгилаймиз. *Оптимал қидириш* деб, $x^1, x^2, \ldots, x^k$ нуқталарни қуришнинг шундай усулига айтиладики, унда

$$\Delta_k = \sup \Delta_k(f)$$

сон минимал бўлади, бу ерда юқори чегара барча унимодал $f(x)$, $x \in [a, b]$ функциялар бўйича ҳисобланган.

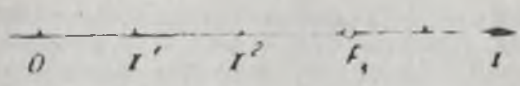
Оптимал қидириш алгоритми қуйидаги масалани ечишга асосланган.

Масала. Ҳар бир k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ учун кесманинг энг катта узунлиги F_k ни ва унда шундай k та нуқтани танлаш усулини кўрсатиш керакки, $f(x)$ функцияни бу нуқталарда ҳисоблаш ёрдамида минимум нуқтасини бирлик интервалда локаллаш мумкин бўлсин.

Теорема. *F_k Фибоначчининг k-сонидир, яъни*

$$F_0 = F_1 = 1, \; F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \; k \geqslant 2.$$

Исботи. Бирорта ҳам ҳисоблаш ўтказмасдан ёки $f(x)$ функцияни фақат бир марта ҳисоблаш билан минимум нуқтасини локаллаш интервалини торайтиришга унимодал функцияларнинг асосий хоссаси имкон бермайди. Шунинг учун $F_0 = F_1 = 1$. Айтайлик, теорема барча $k = 2, 3, \ldots, s$ учун исботланган бўлсин. Уни $s+1$ учун исботлаймиз. $[0, L]$, $L > F_s$ кесмани қараймиз. Ихтиёрий олинган x^1, $x^2 : 0 < x^1 < x^2 < L$ нуқталарда $f(x^1)$ ва $f(x^2)$ ни ҳисоблаймиз. Унимодал функцияларнинг асосий хоссасига кўра бу ҳисоблашлар бўйича минимум нуқтаси ликаллашган интервалини



IV.13- чизма.

аниқ кўрсатиш мумкин. Бундай интервал $[0, x^2]$, $[x^1, L]$ кесмаларнинг бири бўлади (IV. 13-чизма). $x^0 \in [0, x^2]$ бўлган ҳолни қараймиз. $f(x)$ функцияни x^1 нуқтада ҳисоблаш навбатдаги итерацияларда ҳам ишлатилгани учун, локаллаш интервали $[0, x^2]$ ни бир марта ҳисоблашдан сўнг олинган дейиш мумкин. Минимум нуқтасини локаллаш учун $s+1$ та ҳисоблаш ишлатамиз. $f(x^2)$ ни ҳисоблагандан сўнг s та ҳисоблаш қолади. Шунинг учун $[0, x^2]$ кесманинг узунлиги F_s дан ошмайди

$$x^2 \leqslant F_s. \tag{3}$$

x^1 нуқта $[0, x^2]$ кесма учун навбатдаги итерацияда, яъни мумкин бўлган $s+1$ та ҳисоблашдан иккитасини ўтказгандан сўнг қандай роль ўйнаса, x^2 нуқта ҳам $[0, L]$ кесма учун шундай роль ўйнайди. Шу сабабли ҳам $s-1$ та ҳисоблаш учун локаллаш интервали бўлиши мумкин бўлган $[0, x^1]$ кесманинг узунлиги F_{s-1} дан ошмайди:

$$x^1 \leqslant F_{s-1}. \tag{4}$$

Мумкин бўлган иккинчи ҳол: $x^0 \in [x^1, L]$ га ўтамиз. Олдинги ҳолдагидек фикр юритиб, (3), (4) ўрнига,

$$L - x^1 \leqslant F_s, \quad L - x^2 \leqslant F_{s-1} \tag{5}$$

тенгсизликларни оламиз.

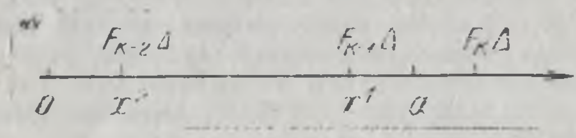
F_{s+1} соннинг аниқланишидан унинг шундай L сонларнинг юқори чегарасига тенглиги келиб чиқадики, улар учун (3) — (5) тенгсизликлар бирор $x^1, x^2 \in [0, L]$, $x^1 < x^2$ учун бажарилади.

(4), (5) га асосан

$$L \leqslant F_s + x^1 \leqslant F_s + F_{s-1}.$$

Иккинчи томондан $L = F_s + F_{s-1}$, $x^1 = F_{s-1}$ бўлганда индукция фаразига кўра $f(x)$ функцияни s марта ҳисоблаб, $[0, x^1]$ даги минимум нуқтасини бирлик интервалда локаллаш мумкин ва шунинг учун $F_{s+1} = F_s + F_{s-1}$. Теорема исботланди.

Теоремадан *оптимал қидириш усули* (*Фибоначчи усули*) келиб чиқади. Айтайлик, $f(x)$, $x \in [0, a]$ функциянинг минимум нуқтасини локаллаш интервалининг берилган узунлиги Δ бўлсин. Ёрдамчи масалада бирлик локаллаш интервали қаралди, шунинг учун Ox ўқда масштабни $t = a / \Delta$ марта ўзгартирамиз. t сон бўйича шундай F_k Фибоначчи сонини топамизки, $F_{k-1} < t < F_k$ бўлсин. Бошқача айтганда, $f(x)$ функцияни $[0, F_k \Delta]$ оралиққа унимодаллик хоссасини йўқотмаган ҳолда давом эттириш мумкин деб ҳисоблаб, $[0, a]$



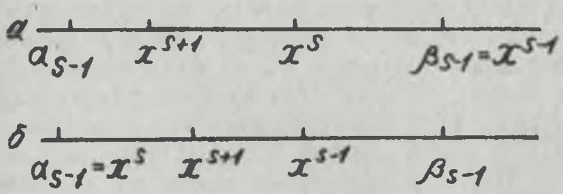
IV.14- чизма.

кесма бўйича узунлиги $\Delta_0 = F_k \Delta$ бўлган бошланғич локаллаш интервали $[\alpha_0, \beta_0] = [0, F_k \Delta]$ ни қурамиз (IV. 14- чизма). Теоремага асосан $F_{k-1} \Delta$, $F_{k-2} \Delta$ нуқталар $[0, F_k \Delta]$ кесмада шундай жойлашганки, $F_k \Delta = F_{k-1} \Delta + F_{k-2} \Delta$ (IV. 14- чизма). $f(x)$ функциянинг $x^1 = F_{k-1} \Delta$, $x^2 = F_{k-2} \Delta$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз ва биринчи локаллаш интервали $[\alpha_1, \beta_1]$ ни ажратамиз. Унимодал функцияларнинг асосий хоссасига кўра

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = x^1,\ \text{агар } f(x^1) > f(x^2) \text{ бўлса},$$
$$\alpha_1 = x^2,\ \beta_1 = \beta_0 = F_k\Delta,\ \text{агар } f(x^1) \leqslant f(x^2) \text{ бўлса}.$$

Иккала ҳолда ҳам локаллаш интервалининг узунлиги $\Delta_1 = \Delta_0 - F_{k-2}\Delta$. Айтайлик, $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$ интервал x^s, $2 \leqslant s \leqslant k$ нуқта қурилгандан сўнг олинган локаллаш интервали бўлсин. $\Delta x_{k-1} = F_{k-s-1}\Delta$ ни ҳисоблаймиз. $x^{s+1} = \alpha_{s-1} + \Delta x_{k-1}$ нуқтани қурамиз. Нуқталарнинг $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$ да жойлашиши икки типда бўлиши мумкин (IV. 15- чизма).

$f(x)$ функциянинг $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$ кесманинг ички нуқталаридаги иккита қиймати бўйича $f(x^{s+1})$ ни ҳисоблаб, янги локаллаш интервали $[\alpha_s, \beta_s]$ ни ажратамиз:



IV.15- чизма.

$$\begin{aligned}
&\alpha_s = \alpha_{s-1},\ \beta_s = x^s,\ \text{агар } \beta_{s-1} = x^{s-1},\ f(x^s) > f(x^{s+1}) \text{ бўлса},\\
&\alpha_s = \alpha_{s-1},\ \beta_s = x^{s-1},\ \text{агар } \alpha_{s-1} = x^s,\ f(x^{s-1}) > f(x^{s+1}) \text{ бўлса},\\
&\alpha_s = x^{s+1},\ \beta_s = \beta_{s-1},\ \text{агар } \beta_{s-1} = x^{s-1},\ f(x^s) \leqslant f(x^{s+1}) \text{ бўлса},\\
&\alpha_s = x^{s+1},\ \beta_s = \beta_{s-1},\ \text{агар } \alpha_{s-1} = x^s,\ f(x^{s-1}) \leqslant f(x^{s+1}) \text{ бўлса}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Янги локаллащ интервалининг узунлиги $\Delta_s = \Delta_{s-1} - F_{k-s-1}\Delta$ бўлади. Жараённи давом эттириб, x^k нуқтани ва узунлиги $\Delta_{k-1} = \Delta_{k-2} - F_1\Delta = F_0\Delta + \Delta_{k-2} - F_2\Delta = \Delta + \Delta_{k+3} - F_3\Delta = \ldots = \Delta + \Delta_0 - F_k\Delta = \Delta$ бўлган локаллаш интервали $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ ни қурамиз. Шундай қилиб, k та ҳисоблаш ёрдамида $f(x)$ функциянинг минимум нуқтаси узунлиги Δ га тенг бўлган $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ интервалда локаллаштирилди.

Мисол. $f(x) = -x + 3x^2 - 0{,}01x^3$, $x \in [0{,}1]$ функциянинг минимум нуқтасини $\Delta = 0{,}1$ аниқликда топинг. Модомики, $\partial^2 f/\partial x^2 = 6 - 0{,}06x > 0$, $x \in [0{,}1]$ экан, функция $[0{,}1]$ да унимодал бўлади. Фибоначчи усули бўйича иш юритиб, $L=\frac{1}{0,1}=10$ ни ҳисоблаймиз. Шунингдек, $8=F_5<10<F_6=13$ бўлганлиги сабабли $k=6$ бўлади, яъни $f(x)$ функцияни олтита нуқтада ҳисоблаш ёрдамида масалани ечиш мумкин ($f(x)$ функция $[0;\ 1,3]$ да унимодалдир). $F_4\Delta=8\cdot 0,1=0,8$ ни ҳисоблаймиз ва $x^1=\alpha_0+0,8=0,8$, $x^2=\beta_0-0,8=0,5$ нуқталарни ясаймиз. $f(0,8)=1,11488>f(0,5)=0,24875$ бўлганлигидан $[\alpha,\ \beta_1]=[0;\ 0,8]$, $F_3\Delta=3\cdot 0,1=0,3$ ни ҳисоблаймиз. $x^3=\alpha_1+0,3=0,3$ ни ясаб, $f(x^3)=-0,03081<f(x^2)$ ни ҳисоблаймиз. Демак, $[\alpha_2,\ \beta_2]=[0;\ 0,5]$, $F_2\Delta=0,2$, $x^4=0,2$, $f(x^4)=-0,08008<f(x^3)$ ни ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, $[\alpha_3,\ \beta_3]=[0;\ 0,3]$ $F_1\Delta=0,1$, $x^5=0,1$ $f(x^5)=-0,90708<f(x^4)$ ни ҳисоблаймиз, у ҳолда $[\alpha_4,\ \beta_4]=[0;\ 0,2]$, $F_0\Delta=0,1$, $x^6=0,1$ ни ҳисоблаймиз. Минимум нуқтаси $[0,1;\ 0,2]$ кесмада локаллаштирилди.

Унимодал функцияларнинг минимум нуқталарини излашнинг иккинчи оммавий усули — *олтин кесим усулидир.* Юқорида таъкидланганидек, минимум нуқтасини иккита $f(x^1)$, $f(x^2)$ ҳисоблаш ёрдамида локаллаш вақтида (IV. 12-чизма) янги локаллаш интервалига x^1, x^2 нуқталарнинг бирортаси тегишли бўлади. Шунинг учун навбатдаги локаллаш вақтида фақат битта $f(x^3)$ қийматни ҳисоблаш етарлидир. Ҳар бир итерацияда қўшимча нуқтани ягона усулда ясаш мақсадида x^1, x^2 нуқталарни шундай танлаймизки, $[a,\ x^1]$ кесма узунлигининг $[a,\ b]$ кесма узунлигига нисбати $[x^1,\ x^2]$ кесма узунлигининг $[a,\ x^2]$ кесма узунлигига нисбати каби бўлсин ($[a,\ b]$ кесманинг «олтин кесими»):

$$\frac{x^1-a}{b-a}=\frac{x^2-x^1}{x^2-a}. \tag{7}$$

Бу алгоритм барча унимодал функцияларга мўлжаллангани учун симметрия нуқтаи назаридан

$$x^1-a=b-x^2 \tag{8}$$

деб олиш, яъни x^1, x^2 нуқталарни $[a,\ b]$ кесма учларидан бир хил масофада олиш керак бўлади.

(7) ва (8) тенгламалардан

$$x_1=a+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)=a+0,3817\,(b-a).$$

Шундай қилиб, *олтин кесим усулининг алгоритми* қуйидагичадир. Берилган $f(x)$, $[a,\ b]$ лар буйича $\Delta x_0=0,38\,(b-a)$, $x^1=a+\Delta x_0$, $x^2=b-\Delta x_0$ ни топамиз ва $f(x^1)$, $f(x^2)$ ни ҳисоблаймиз. Агар $f(x^1)<f(x^2)$ бўлса, навбатдаги локаллаш интервали $[\alpha_1,\ \beta_1]$ нинг кўриниши $[a,\ x^2]$ бўлади. $f(x^1)\geqslant f(x^2)$ бўлганда минимум нуқтаси $[\alpha_1,\ \beta_1]=[x^1,\ b]$ кесмада ётади. Айтайлик, x^3 нуқта ясалгандан

кейин локаллаш интервали $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$ бўлсин. $\Delta x_{s-1} = 0{,}38\ (\beta_{s-1} - \alpha_{s-1})$ ни ҳисоблаймиз ва $x^{s+1} = \alpha_{s+1} + \Delta x_{s-1}$ деб оламиз. Янги локаллаш интервалининг четки нуқталарини (6) формулалардан топамиз.

Олтин кесим усули ушбу маънода *асимптотик оптимал*: оптимал қидиришда локаллаш интерваллари узунликларининг нисбати Δ_{s+1}/Δ_s олтин кесим усулида $s \to \infty$ да қўшни локаллаш интерваллари узунликларининг нисбатига тенг бўлган сонга, яъни тақрибан 0,62 га тенг сонга интилади (исботланг!).

Юқорида қаралган мисолда бошланғич локаллаш интервалини 10 марта кичрайтириш талаб қилинади. Бунинг учун етарли бўлган функцияларни ҳисоблашлар сони k олтин кесим усулида $0{,}62^{k-1} \leqslant 0{,}1$ тенгсизликни қаноатлантиради, яъни $k = 6$ Узунлиги 0,1 бўлган локаллаш интервалини ясашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Фибоначчи усули ўзининг қурилишига кўра энг «ёмон» унимодал функциялар учун ҳам минимал сондаги ҳисоблашлардан сўнг берилган узунликдаги локаллаш интервали олинишини таъминлайди. Аммо бундай «ёмон» функциялар усулнинг қўлланилишида умуман учрамаслиги мумкин. Шу сабабли кўпгина конкрет функциялар учун Фибоначчи усули билан бошқа усуллар ҳам самарадорлик бўйича рақобат қила олиши мумкин. Минималлаштирилаётган $f(x)$, $x \in [a, b]$ функциянинг *квадратик яқинлаштиришларга* асосланган қуйидаги *локаллаш усули* амалий ҳисоблашларда ўзини яхши кўрсатди.

$x^1 \in [a, b]$ бошланғич яқинлашиш, $\Delta x > 0$ — қадам узунлиги (бирор сон) бўлсин.

Алгоритмнинг итерацияси қуйидаги қадамлардан иборат.

1-қадам. $f(x)$ ни бошланғич x^1 нуқтада ҳисоблаш. Агар $f(x^1 + \Delta x) < f(x^1)$ бўлса, 2-қадамга ўтиш. $f(x^1 + \Delta x) > f(x')$ бўлганда $\Delta x = -\Delta x$ деб олиб, 2-қадамга ўтиш.

2-қадам. $x^{k+1} = x^k + \Delta x$ ни ҳисоблаш.

3-қадам. $f(x^{k+1})$ ни ҳисоблаш.

4-қадам. Агар $f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k)$ ($\Delta x = -\Delta x$ бўлганда $f(x^{k+1}) \geqslant f(x^k)$) бўлса, $\Delta x = 2\Delta x$, $k = k + 1$ деб олиб, 2-қадамга ўтиш. Агар $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ ($\Delta x = -\Delta x$ бўлганда $f(x^{k+1}) < f(x^k)$) бўлса, $\Delta x = \Delta x/2$, $k = k + 1$ деб олиб, 2-, 3-қадамларга қайтиш ва $x^{k+1} = x^m$, $x^{k+2} = x^{m-1}$, $x^k = x^{m-2}$, $x^{k-1} = x^{m-3}$ ($\Delta x = -\Delta x$ бўлганда эса, тескари тартибда) деб белгилаш. Қўшни x^{m-3}, x^{m-2}, x^{m-1}, x^m нуқталар орасидаги масофа бир хил бўлади.

5-қадам. $f(x)$ функция кўрсатилган тўртта нуқтанинг қайси бирида энг кичик қийматни қабул қилса, шу нуқтани β билан белгилаймиз: $f(\beta) = \min\{f(x^{m-3}), f(x^{m-2}), f(x^{m-1}), f(x^m)\}$. x^{m-3}, x^m нуқталардан қайси бири β дан узоқроқ жойлашган бўлса, ўша нуқтани йўқотамиз. Қолган учликни α, β, γ деб белгилаймиз; $\alpha < \beta < \gamma$.

6-қадам. $x^* = \beta + \Delta x [f(\alpha) - f(\gamma)] / 2 [f(\alpha) - 2f(\beta) + f(\gamma)]$ ни ҳисоблаш, бу ерда x^* ушбу α, $f(\alpha)$, β, $f(\beta)$ γ, $f(\gamma)$ қийматлар бўйича қурилган $y = \xi x^2 + \zeta x + \eta$ параболанинг минимум нуқтасидир.

7-қадам. Агар $|x^* - \beta| \leqslant \Delta$ ёки $|f(x^*) - f(\beta)| \leqslant \varepsilon$ бўлса, минимумни излашни тугаллаймиз, бу ерда ε — мақсад функцияси бўйича яқинлашиш аниқлиги. Акс ҳолда, $f(x^*)$ ни ҳисоблаш ва α, β, γ нуқталардан шундай бирини йўқотиш керакки, локаллаш интервали йўқотиб қўйилмасин ва $f(x)$ функциянинг йўқотилган нуқтадаги қиймати энг катта бўлсин. 6-қадамга ўтиш.

Дастлабки тўртта қадамнинг мақсади минимум нуқтасини қўпол локаллашдан иборат: x^1, x^2, ... нуқталар иккиланувчи қадам билан то функциянинг ўсиш оралиғи биринчи марта учрагунча қурилаверади. Бундан кейин унимодал функцияларнинг асосий хоссаси ёрдамида янада аниқроқ локаллаш учун сўнгги тўртта нуқта ажратиб олинади. Навбатдаги амаллар фақат $f(x)$ функцияни учта «энг яхши» α, β, γ, нуқталар бўйича квадратик яқинлаштиришлари билан боғланган (5-, 6-қадамлар),

Усулнинг моҳиятини ёритиш учун юқорида келтирилган мисолни ечамиз. $x_1 = 0{,}5$; $\Delta x = 0{,}1$ бўлсин. $f(0{,}5) = 0{,}24875 < f(0{,}6) = 0{,}47784$ бўлгани учун $x^2 = x^1 - \Delta x = 0{,}4$ ва $f(x^2) = 0{,}07936 < f(x')$ ни ҳисоблаймиз. $x^3 = x^1 - 2\Delta x = 0{,}3$ деб оламиз. Ҳисоблаб топиш мумкинки, $f(x^3) = -0{,}03081 < f(x^2)$. $x^4 = x^1 - 4\Delta x = 0{,}1$ бўлсин, у ҳолда $f(x^4) = -0{,}90708 < f(x^3)$. $x^5 = 0$ деб оламиз. $f(x^5) = 0 > f(x^4)$ ни топамиз. $x^5 = 0$; $x^4 = 0{,}1$; $x^3 = 0{,}3$; $x^2 = 0{,}4$ нуқталар бўйича $\beta = 0{,}1$ ни топамиз. $x^2 = 0{,}4$ нуқтани йўқотамиз. $\alpha = x^5$, $\beta = x^4$, $\gamma = x^3$ нуқталар ва $f(x)$ нинг шу нуқталардаги қийматлари бўйича, $x^* = 0{,}1 + 0{,}1 [0 + 0{,}03081]/2 [1{,}81416 - 0{,}03081] = 0{,}1000833$ нуқтани ясаймиз. $|x^* - \beta| < 0{,}1$ бўлганлигидан ечиш жараёнини x^x нуқтада тўхтатамиз.

3-§. ШАРТСИЗ МИНИМАЛЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

Шартсиз минималлаштириш масалаларини ечишнинг сонли усулларини мустақил (алоҳида) ўрганиш зарурати бу масалаларнинг етарлича кенг қўлланилиши ва уларни ечиш усулларининг чеклашли минималлаштириш масалаларини ечиш усулларига қараганда анча соддалигидан эмас, балки кейинги йилларда умумий экстремал масалаларни у ёки бу ҳолатда шартсиз минималлаштириш масалаларига келтирувчи усулларга (масалан, итератив усулларга 4-§) қизиқишнинг ортганлигидан ҳам келиб чиқади.

1. Функцияларни яқинлаштириш. Чизиқсиз масалалар учун кўпроқ табиий бўлган ва уларни ечишда кенг фойдаланиладиган ғоя- *масалани яқинлаштиришдан* иборат бўлиб, бу ғоя масаланинг элементларини яқинлаштиришга асосланган.

Ушбу шартсиз минималлаштириш масаласи

$$f(x) \to \min, \ x \in R_n \tag{1}$$

нинг ягона элементи мақсад функцияси $f(x)$ дан иборат.

Айтайлик, $f(x) \in C^{(1)}$, $x \in R_n$ бўлсин. Қуйидаги

$$f_1(x;\ x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \tag{2}$$

функция $x = x^*$ нуқта атрофида $f(x)$ функция билан $0(\|x - x^*\|)$ $(|f(x) - f_1(x;\ x^*)| \leqslant 0(\|x - x^*\|))$ аниқлигида устма-уст тушадики, бу ҳол уни $f(x)$ функциянинг x^* нуқтадаги *биринчи тартибли яқинлаштирилиши* (*чизиқли яқинлаштирилиши*) дейишга асос бўлади.

Агар $f(x) \in C^{(2)}$, $x \in R_n$ бўлса, у ҳолда

$$f_2(x;\ x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + (x - x^*)' \left[\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}\right] \frac{(x - x^*)}{2} \tag{3}$$

функция $f(x)$ функциянинг x^* нуқтадаги *иккинчи тартибли яқинлаштирилиши* (*квадратик яқинлаштирилиши*) дейилади, чунки

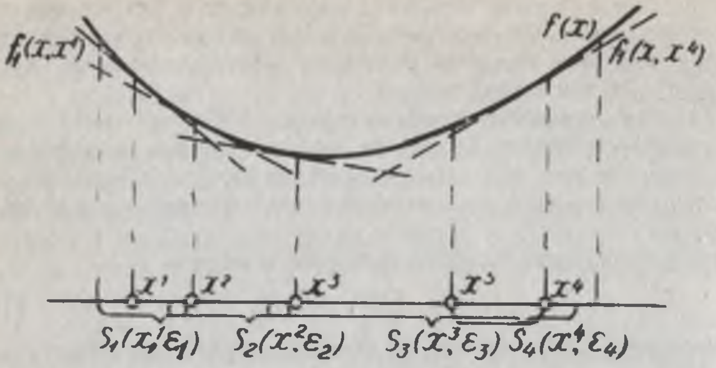
$$|f(x) - f_2(x;\ x^*)| \leqslant 0(\|x - x^*\|^2).$$

Тейлор қаторига асосланган (2), (3) функциялар мумкин бўлган ягона чизиқли ва квадратик яқинлаштиришлар эмас, аммо ушбу китобда яқинлаштиришнинг бошқа усулларини ўрганиш кўзда тутилмаган.

2. Биринчи тартибли усуллар. (1) масаланинг *чизиқли яқинлаштирилиши* деб қуйидаги

$$f_1(x^{k+1};\ x^k) = \min f_1(x;\ x^k), \ x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \ k = 1, 2 \ldots \tag{4}$$

масалалар кетма-кетлигига айтилади, бунда бошланғич x^1 вектор ва x^k векторларнинг ε_k-атрофлари $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ *яқин-*



IV.16- чизма.

лаштиришнинг параметрларидир. Яқинлаштириш параметрларининг конкрет танланиши (1) масалани ечиш усулини амалга оширишни беради. Яқинлаштириш параметрлари ечиш жараёни бошланмасдан олдин танланиши ва жараён давомида тўғрилаб борилиши мумкин.

(4) га асосан қурилган x^k, $k=1, 2, \ldots$ векторларни (1) масаланинг оптимал режаси учун кетма-кет яқинлашишлар деб қараш мумкин. IV. 16-чизмада (4) усулнинг геометрик тасвири берилган. Кўпгина конкрет амалга оширишларда $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ атрофлар қуйидагича қурилади. Кетма-кет яқинлашишлар

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k \qquad (5)$$

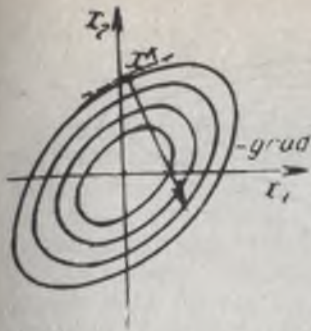
кўринишда қурилади, бу ерда h-вектор l^k ни x^k нуқтадаги йўналиш, θ_k сон эса l^k йўналиш бўйича қадам дейилади. $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ атрофни қуриш учун аввал $s_k(l, x^k) \leqslant 1$ тенгсизлик ёрдамида l векторлар учун нормалланган атроф берилади, сўнгра $\theta_k l$ ўхшашликни алмаштириш ёрдамида $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ тўплам олинади.

(4), (5) дан l^k векторларни қуриш учун қуйидаги

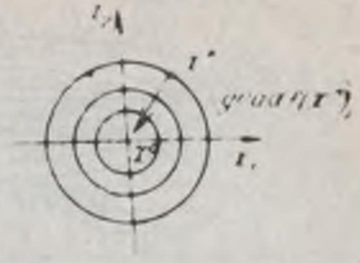
$$f_1(l^k; x^k) = \min f_1(l; x^k), \; S_k(l, x^k) \leqslant 1 \qquad (6)$$

масала олинади. Бу ерда $f_1(l; x^k) = l' \partial f(x^k) / \partial x$. Нормаловчи $S_k(l, x^k)$ функциялар шундайки (6) масала исталган x^k лар учун ечимга эга бўлади деб фараз қилинади.

Бир қадамли биринчи тартибли дискрет усуллар учун, агар $f(x)$ функция тўғрисида қўшимча маълумот бўлмаса,



IV.17- чизма.



IV.18- чизма.

бошқа усуллардан афзалроқ бўлган $S_k(l, x^k)$ функцияларни қуриш қоидасини кўрсатиш иумкин эмас. Оптимал режа x^0 дан фарқли бўлган ихтиёрий x^k нуқта учун ихтиёрий l^k йўналиш бўйичг шундай $S_k(l, x^k)$ нормаловчи функция кўрсатиш мумкинки, l^k вектор (6) масаланинг ечими бўлади.

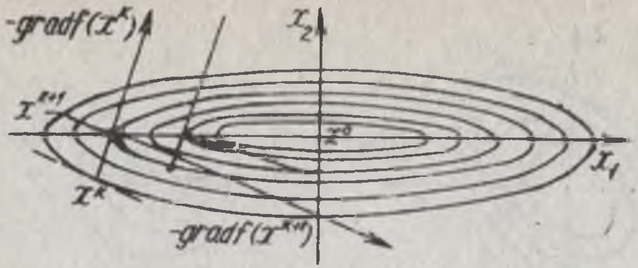
Минималлаштирилаётган $f(x)$ функция ҳақида бирор таълимот бор бўлган ҳолда (5), (6) усулни амалга оширишда махсус нормаловчи функциялардан фойдаланилади. Масалан, агар x^0 оптимал режа атрофида $\{x: f(x) \leqslant c\}$ сатҳ тўпламлари эллипсоидларга яқин деб ҳисоблашга асос бўлса (IV.17-чизма), нормаловчи функция сифатида

$$S_k(l, x^k) = l'Dl + d'l, \ D = D(x^k) > 0 \qquad (7)$$

квадратик қатъий қавариқ функцияни олиш мақсадга мувофиқдир.

Бу ҳолда $\partial f(0)/\partial x = d$, $\partial^2 f(0)/\partial x^2 = D/2$ бўлган $f(x)$ квадратик функция учун (6) масаланинг l^k ечими x^k нуқтадан $x^0 = x^k + l^k$ га олиб боради. $D = E$, $d = 0$ бўлганда (6) масалада (7) нормаловчи функциядан фойдаланиш $f(x)$ функциянинг x^k нуқтадаги антиградиенти $l^k = -\theta \operatorname{grad} f(x^k)$, $\theta > 0$ га олиб келади. Шундай йўналишларга асосланган сонли усуллар *градиентли* усуллар деб аталади (уларнинг аниқ баёни қуйида берилади).

Агар сатҳ тўпламлари сфералардан иборат бўлса, исталган x^k нуқтадан антиградиент бўйича ҳаракат қилиш минимум нуқтасига олиб боради (IV. 18-чизма). Шу сабабли шундай махсус бўлмаган $x = Cy$ алмаштириш лозим бўладики, натижада $\varphi(y) = f(Cy)$ функциянинг сатҳ тўпламлари сфералардан иборат бўлсин. Ушбу



IV.19- чизма.

$$f(x) = x'Dx + d'x + \delta, \ D > 0 \tag{8}$$

квадратик функциялар учун $C = D^{1/2}$ деб олиш етарлидир. Бироқ бу алмаштириш $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари матрицаси $2D = \partial^2 f / \partial x^2$ ни маълум деб фараз қилади, шу сабабли ундан биринчи тартибли бир қадамли минималлаштириш усулларида фойдаланиш мумкин эмас. Кўп қадамли усулларда олдинги x^{k-s}, x^{k-s+1}, ..., x^k яқинлашишлар ёрдамида C матрицани яқинлаштирувчи C_k матрицаларни ($k \to \infty$ да $C_k \to C$) қуришга эришиш мумкин. Ўзгарувчи метрикали усуллар деб аталувчи бундай усуллар градиентли усуллар характеристикасини анча яхшилашга имкон беради. Бир қадамли градиентли усулларнинг асосий камчилиги ёмон шартланган D матрицали (8) функциялар учун оқ намоён бўлади (IV. 19- чизма). Кетма- кет x^k, x^{k+1}, ..., нуқталарда бу функциянинг градиентлари катта нормаларга эга бўлиб, x^t, ..., x^{k+1} ни ҳисоблаш аниқлигига нисбатан жуда сезгир, минимум нуқтаси x_0 йўналишига деярли тикдир. Буларнинг ҳаммаси (1) масалани ечишни қийинлаштиради.

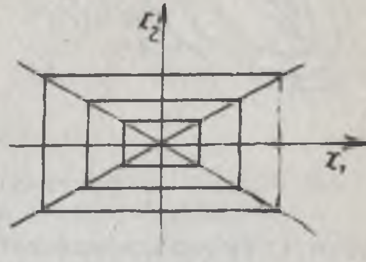
Умумий ҳолда шунга ўхшаш ҳодисалар кузатилувчи функциялар *жарлик тузилишли функциялар* деб аталади (Ox_1—«жарлик туби»—секин ҳаракат йўналиши умумий ҳолда эгри чизиқли). Усулларни жарлик тузилишининг салбий таъсиридан ҳимоялаш воситаларидан бири кетма- кет градиентларни ўрталаштиришдир.

Ҳисоблашларда кенг тарқалган, икки хил кўринишдаги нормаларга асосланувчи қуйидаги

$$S_k(l;\ x^k) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, l_j - d_j \right|, \tag{9}$$

$$S_k(l;\ x^k) = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, l_j - d_i \right| \qquad (10)$$

нормаловчи функцияларни ўрганиш машқ сифатида ҳавола этилади. (9) типидаги нормаловчи шартни $f(x)$ функциянинг сатҳ тўплами IV. 20- чизмада тасвирланганига яқин бўлган вақтда киритиш мақсадга мувофиқдир.

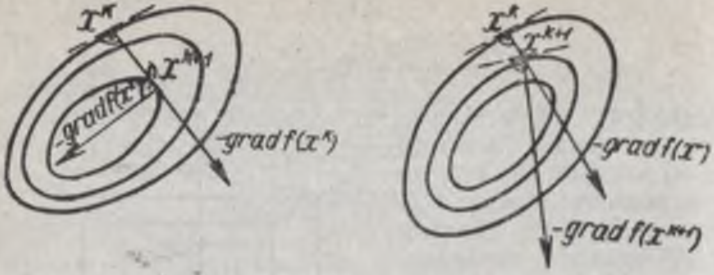


IV.20- чизма.

Нормаловчи функцияларнинг киритилиши $S_k(x_k,\ \varepsilon_k)$ атрофларни танлаш масаласини $S_k(l,\ x_k)$ нормаловчи функцияларнинг $d_{ij}(x_k)$, $d_j(x^k)$ сонли параметрларини танлаш масаласига келтириш имконини беради. $d_{ij}'(x^k)$, $d_i(x^k)$ функцияларни қуришнинг бир қатор эвристик усуллари мавжуд, аммо уларнинг барчасида биринчи тартибли бир қадамли усуллар учун мумкин бўлмаган қўшимча маълумотдан фойдаланилади.

Келтирилган таҳлил шуни кўрсатадики, мураккаб тузилишли функцияларнинг кенг синфларини минималлаштириш учун мўлжалланган биринчи тартибли бир қадамли усулларда қуйидагича иш юритган маъқул: x^k нуқта учун тасодифий l^k, $\| l^k \| = 1$ йўналиш танланади, етарлича кичик $\theta > 0$ сон учун $f(x^k + \theta l^k)$ ҳисобланади. Агар $f(x^k + \theta l^k) > f(x^k)$ бўлса, l^k йўналиш — l^k га алмаштирилади. $x^k \neq x^0$, grad $f'(x^k)\, l^k \neq 0$ бўлганда l^k вектор (ёки $-l^k$) тушиш йўналиши (муносиб йўналишни) беради.

(4) яқинлаштириш масаласида $s_k(x^k,\ \varepsilon_k)$ атрофни қуриш пайтида пайдо бўладиган иккинчи масала, яъни l^k йўналиш бўйича θ_k миқдорни танлаш масаласига ўтамиз. Бу масалани ечишда θ_k қадамни танлашнинг учта усули қўлланилади: 1) $\theta_k \equiv \theta > 0$; 2) $f(x^k + \theta_k l^k) = \min\limits_{\theta > 0} f(x^k + \theta l^k)$; 3) $f(x^k + {}$ $+ \theta_k l^k) - f(x^k) \leqslant \varepsilon \theta_k \operatorname{grad} f'(x^k)\, l^k$, ε—берилган сон, $0 < \varepsilon <$ < 1. Биринчи усул нисбатан соддадир. $l^k = -\operatorname{grad} f(x^k)$ шарт билан биргаликда $f(x)$ функцияни минималлаштиришнинг *градиентли усулини* ташкил этади. Иккинчи усули амалий жиҳатдан бажариб бўлмайди, чунки ҳатто скаляр



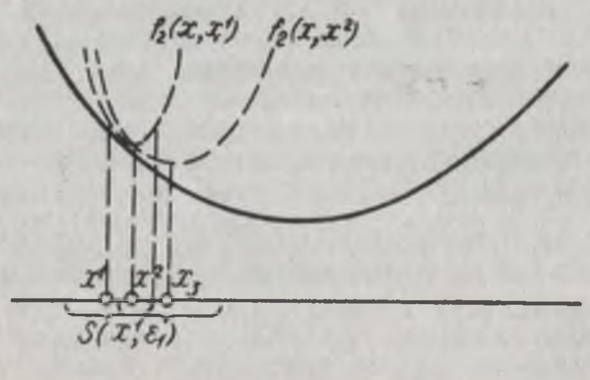
IV.21- чизма.

аргумент бўйича минималлаштириш масаласи ҳам (2- § ни қ.) ҳамиша бирор аниқликда ечилади. Агар $l^k = -\operatorname{grad} f(x^k)$ бўлса, θ_k қадамни танлашнинг иккинчи усулидан фойдаланувчи (5) усул *градиентли энг тез тушиш усули* деб аталади. IV. 21- чизмада кейинги икки усулнинг геометрик тасвири келтирилган. θ_k қадамнинг учинчи усул билан танланишига, масалан, ихтиёрий $\theta > 0$ сонни кетма-кет тақсимлаш билан эришиш мумкин.

3. Иккинчи тартибли усуллар. (1) масаланинг *квадратик яқинлаштирилиши* деб, шу масаланинг мақсад функциясини квадратик яқинлаштириш ёрдамида тузилган

$$f_2(x^{k+1}, x^k) = \min f_2(x; x^k), \quad x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

масалалар кетма-кетлигига айтилади. IV. 22- чизмада (11) усулга кўра x^k, $k = 1, 2 \ldots$ кетма-кетликни қуришнинг



IV.22- чизма.

геометрик тасвири келтирилган. (5) муносабатни қаноатлантирувчи l^k, θ_k ўзгарувчиларни киритиб, l^k йўналишни аниқлаш учун (11) дан ушбу

$$f_2(l^k;\ x^k) = \min f_2(l;\ x^k),\ S(l,\ x^k) \leqslant 1, \tag{12}$$

масалани оламиз, бу ерда $f_2(l;\ x^k) = l' \partial f(x^k)/\partial x + l' [\partial^2 f(x^k)/\partial x^2]\, l/2$. Махсус бўлмаган ҳолда, яъни оптимал режанинг атрофида

$$\partial^2 f(x) | \partial x^2 > 0 \tag{13}$$

бўлганда, (12) масала нормаловчи шартсиз ечилади. Фақат бундай ҳол кейинроқ қаралади. III бобга асосан,

$$2l' \partial f(x^k)/\partial x + l' [\partial^2 f(x^k)/\partial x^2]\, l \to \min,\ l \in R_n$$

масаланинг l^k ечими стационарлик тенгламаси

$$b_k + A_k l = 0\ (b_k = \partial f | \partial x,\ A_k = \partial f | \partial x^2) \tag{14}$$

нинг ягона ечимидан бўлиб,

$$l^k = -A_k^{-1} b_k \tag{15}$$

кўринишга эга.

(15) векторни *Ньютон йўналиши* деб атаймиз. Кўриш қийин эмаски, бу йўналиш илгари 1-бандда шу банд учун типик бўлган маълумотларга асосланган нормаловчи функция учун олинган эди. Эслатиб ўтамизки, l^k Ньютон йўналиши x^k нуқтадан $f_2(l;\ x^k) \leqslant f(x^k)$ эллипсоид (IV. 17-чизма) марказига олиб боради. (5) га кўра янги x^{k+1} яқинлашишни қуриш учун l^k йўналиш бўйича θ_k қадамни ҳисоблашда 1-банддагидек усуллардан фойдаланилади. l^k Ньютон йўналиши $\theta_k = 1$ бўлганда, (5) формула бўйича кетма-кет яқинлашишларни қуриш усули *Ньютон усули* дейилади. Усулнинг келтирилган баёнига кўра агар $f(x)$ квадратик функция бўлса, бир итерация билан (1) масаланинг оптимал режасини қуриш мумкин.

IV.23- чизма.

Градиент усули ва Ньютон усули орасидаги фарқ IV. 23-чизмадан яққол кўриниб турибди, бу ерда x^{k+1} град, x^{k+1} ньют орқали градиент усули ва Ньютон усули бўйича қурилган яқинлашишлар белгиланган, l^k — Ньютон йўналиши.

$\theta_k \neq 1$ бўлган, ёки l^k йўналиш A_k^{-1} дан фойдаланмасдан тузиладиган ёки l^k йўналиш ўрнига,

$$l^k = -\bar{A}_k^{-1} \bar{b}_k \tag{16}$$

векторлар ишлатиладиган усуллар *Ньютон типидаги усуллар* дейилади, бу ерда $\bar{A}_k$, $\bar{b}_k$ лар A_k матрица ҳамда b_k векторнинг $f(x)$, $\partial f(x)/\partial x$ ларнинг x^k нуқта кичик атрофидаги қийматларига асосланган яқинлаштиришларидир. Агар $\bar{A}_k$, $\bar{b}_k$ лар $f(x)$, $\partial f(x)/\partial x$ ларнинг фақат аввалги x^{k-s}, x'^{k-s+1}, ..., x^k яқинлашишлардаги қийматлари бўйича қурилса, (1) масалани (5), (16) формулаларга кўра ечиш усуллари *квазиньютон усуллари* дейилади. Квазиньютон усулларида $\bar{A}_k$, $\bar{b}_k$ ларнинг яқинлаштиришларини қуришнинг қуйидаги типлари тарқалган: а) $\bar{A}_k = \partial^2 f(x^1)/\partial x^2$, $\bar{b}_k = b_k$; б) $\bar{A}_k$ лар $f(x)$, $\partial f(x)/\partial x$ ларнинг қийматларидан тузилган ифодалар билан яқинлаштирилади; $\bar{b}_k = b_k$ (*биринчи тартибли квазиньютон методи*); в) $\bar{A}_k$, $\bar{b}_k$ лар фақат ва фақат $f(x)$ нинг қийматлари ёрдамида яқинлаштирилади (*нолинчи тартибли квазиньютон усули*). Квазиньютон усуллари, аниқланишига кўра, кўп қадамлидир ва моҳияти жиҳатидан *ўзгарувчан метрикали усуллар* ҳисобланади (2-бандга қ.).

4. **Қўшма градиентлар усули.** Квазиньютон усуллари орасида алоҳида танилгани *қўшма градиентлар усули* бўлиб, бу усул кўпгина ҳозирги замон қўшма йўналишли усуллари учун прототип бўлиб хизмат қилди. Қўшма градиентлар усули A_k матрица ошкор кўринишда қатнашмаган (14) тенгламани махсус усулда ечишга асосланган биринчи тартибли усулдир.

Чизиқли алгебранинг ҳисоблаш усулларида кўрсатиладики, (14) тенгламанинг l^k ечими қуйидаги рекуррент формулалар

$$m^{s+1} = m^s + \alpha_s p^s, \quad p^s = \beta_s p^{s-1} - \partial f_2(m^s, x^k)/\partial x;$$

$$p^0 = -\partial f_2(m^0; x^k)/\partial x, \quad m^0 \in R_n, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\alpha_s = \frac{-p^s \partial f_2(m^s; x^k)/\partial x}{p^{s'} [\partial f_2(m^s + p^s; x^k)/\partial x - \partial f_2(m^s; x^k)/\partial x]} \tag{17}$$

$$\beta_s = \frac{\| \partial f_2 (m^s;\ x^k) / \partial x \|^2}{\| \partial f_2 (m^{s-1};\ x^k) / \partial x \|^2}, \ \|a\|^2 = a'a$$

бўйича қуриладиган m^s вектор билан устма—уст тушади. $x = x^k$ нуқтанинг атрофида $f(x)$, $f_2(x;\ x^k)$ функциялар етарлича яқин бўлганлиги сабабли (17) формулаларда $f_2(x;\ x^k) = f(x)$ деб олинади ва $l^k = m^k$ бўлган θ_k эса 1- бандда кўрсатилган учта усулдан ихтиёрий биттаси билан ҳисобланган (5) усул қўшма градиентлар усули дейилади. Бу усулнинг номи $\partial f_2 (m^s;\ x^s)/\partial x$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ градиентларнинг асосий хоссаси $[\partial f_2 (m^s;\ x^k)/\partial x]'\ \partial f_2 (m^t;\ x^k)/\partial x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant s-1$ дан келиб чиққан бўлиб, бу хоссага асосан, p^s, $s = 0, 1, \ldots, n-1$ йўналишлар қўшмадир (A- ортогоналдир):

$$p^{s'} A\, p^t = 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant s-1.$$

Бу хосса кўплаб қўшма (иккиланма) йўналишли усулларни қуриш учун асос бўлиб хизмат қилди. Қўшма градиентлар усулининг баёнидан кўриниб турибдики, у биринчи тартибли усулдир.

4* Биринчи ва иккинчи тартибли усулларнинг яқинлашиши ва яқинлашиш тезлиги. Нолинчи ва биринчи тартибли усуллар (айниқса градиентли усуллар) осон амалга оширилади. Иккинчи тартибли усуллар учун амалий масалаларда кўпинча мумкин бўлмаган, ёки катта харажатлар талаб қиладиган иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаш талаб қилинади. Аммо бу айтилган умумий фикрлар муайян масалани ечишда усулни сифат жиҳатидан баҳолаш учун асос бўлиб хизмат қила олмайди. Ҳозирга қадар ечиш усулларини танлашнинг етарлича асосланган қоидалари йўқ.

Агар 2- бандда айтиб ўтилган биринчи тартибли усуллардаги $s_k\ (x^k; \varepsilon_k)$ атроф ($S_k (l;\ x^k)$ нормаловчи функция) шундай бўлсаки, x^k $(l = 0)$ нуқта $s_k\ (x^k;\ \varepsilon_k)$ тўпламнинг $(\{l;\ S_k(l,\ x^k) \leqslant 1\}$ тўпламнинг) ички нуқтаси бўлса, $\partial f\ (x^k)/\partial x \neq 0$ бўлганда (4) ((6)) масаланинг ечими тушишни (*релаксацияни*) таъминлайди, яъни $\varepsilon_k > 0$ $(\theta_k > 0)$ етарлича кичик бўлганда $f\ (x^{k+1}) < f(x)$ бажарилади. Иккинчи тартибли усуллардаги Ньютон йўналиши ҳам тушишни таъминлайди, чунки l^k нинг аниқланишидан $df\,(x^k + \theta\, l^k)\,/d\,\theta/_{\theta=0} = l^k \partial f\,(x^k)\,/\partial x + l^{k'} [\partial^2 f(x^k)/\partial x^2] l^k /2 < 0$ келиб чиқади. Ҳар бир $x^k \to x^{k+1}$ итерацияда тушишнинг мавжудлиги—баён қилинган усулнинг муайян масалаларда етарлича қониқарли натижалар олишга имкон берувчи муҳим характеристикасидир. Аммо умумий ҳолда x^k, $k=0, 1, 2, \ldots$ векторларнинг (1) масала ечимига яқинлашишини, яъни қаралаётган усулларнинг яқинлашишини таъминлайди.

(5) *дискрет тизимларнинг турғунлик назарияси* ҳисоблаш усуллари яқинлашиш назариясининг асоси бўлиб хизмат қилади. Бу назария доирасида кўпгина турланишларнинг (масалан, Ньютон типидаги усуллар, биринчи ва нолинчи тартибли квазиньютон усулларнинг) яқинлашишини, дискрет тизимларнинг четланишга нисбатан турғунлик хоссасининг сақланиши деб тушунтириш мумкин. Ҳисоблаш усулларининг монотон бўлмаган (5- бандга қ.) ва эҳтимолли (6- бандга қ.) яқинлашишлари турғунлик назариясида мос аналогларга эга. Бу мавзу ушбу курс доирасидан четга чиққанлиги учун фақат бу соҳадаги маълум сифат натижаларни келтирамиз. Агар $f(x)\in C^{(1)}$, $f(x)>-\infty$, $\|\partial f(x)/\partial x-\partial f(y)/\partial y\|\leqslant L\|x-y\|$ бўлса, (5) га кўра тузилган x^k, $k=1, 2, \ldots$ кетма-кетлик ($l^k=-\mathrm{grad}\, f(x^k)$) қуйидаги $\|\partial f(x^k)/\partial x\|\to 0$, $k\to\infty$ хоссага эга бўлади. Энди, айтилганларга қўшимча равишда $f(x)\in \bar{C}^{(2)}$ функция

$$m\|l\|^2\leqslant l'\partial^2 f(x)/\partial x^2 l\leqslant M\|l\|^2,\quad M\geqslant m>0 \qquad (18)$$

тенгсизликларни қаноатлантирсин. У вақтда кўрсатилган кетма-кетлик чизиқли тезлик билан оптимал режа x^0 га яқинлашади.

Ньютон йўналишли ва учинчи усул билан топилган θ_k қадамли Ньютон типидаги усуллар (18) ҳамда $\|\partial^2 f(x)/\partial x^2-$ $-\partial^2 f(y)/\partial y^2\|\leqslant L_1\|x-y\|$ шартни қаноатлантирувчи $f(x)\in C^{(3)}$ функциялар учун квадратик яқинлашишга эга бўлади.

Ниҳоят, умумий шартларда мавжуд квазиньютон усуллари чизиқлидан юқори тезликка эга бўлади.

Келтирилган натижалардан кўриниб турибдики, $f(x)$ функция ҳақидаги қўшимча маълумотдан фойдаланиш, кутилганидек, усуллар яқинлашиш тезлигини оширишга имкон беради. Муайян масалани минималлаштириш учун усул танлаш кўп сабабларга боғлиқ. Бунда умумий тавсия сифатида шуни айтиш мумкинки, дастлабки итерацияларни нолинчи ва биринчи тартибли усуллар ёрдамида қуриш, кейин, зарур бўлганда иккинчи тартибли усулларга ўтиш керак. Биринчи тартибли усул билан қўшма градиентлар усули итерациядаги амаллар ҳажми бўйича градиентли усуллардан кам фарқ қилади, лекин чизиқлидан юқори яқинлашиш тезлигига эга.

Аммо бу усулнинг яхлитлашдаги хатоларга нисбатан сезгирлиги катта эканлигини таъкидлаш керак.

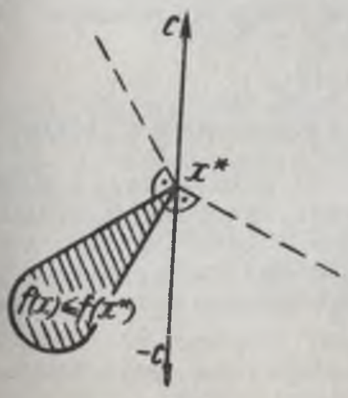
5. Субградиентли усуллар. Қавариқ программалашда (II боб) дифференциалланмайдиган $f(x)$ функциянинг минимумини топиш учун градиентнинг аналоги бўлган субдифференциалдан, яъни x^* нуқтада

$$f(x)-f(x^*)\geqslant c'(x-x^*),\quad x\in R_n$$

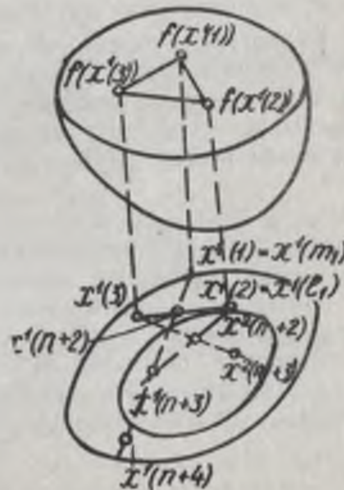
тенгсизлик билан аниқланган $\partial f(x)$ субградиентлар тўпламидан фойдаланилади. Субградиент градиентнинг асосий хоссасига эга бўлмаса ҳам, яънн x^* дан $-c$, $c\in\partial f(x^*)$ йўналиш бўйича ҳаракат қилганда $f(x)$ функция ўсиши мумкин бўлса-да, градиентни субградиентга алмаштириб, минималлаштиришнинг градиентли усулларини умумлаштириш фикрининг пайдо бўлиши табиийдир (IV.24- чизма). Шунга қарамасдан, маълум шартларда градиентли усуллардагига ўхшаб қурилган $x^{k+1}=x^k-\theta_k c^k$, $\theta_k\geqslant 0$, $k=1,2,\ldots$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши мумкин. Аниқроғи, агар

$$\|c(x)\|\leqslant L,\ \theta_k\to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\theta_k=\infty \text{ бўлса, шундай } x^{k_s},\ s=1,2\ldots$$

кетма-кетлик топиладики, $f(x^{k_s})\to f(x^0)$, $s=1,2,\ldots$ бўлади.



IV.24- чизма.



IV.25- чизма.

Градиентли усуллардан фарқли ўлароқ x^{k_s}, $s=1, 2, \ldots$ кетма-кетлик бўйлаб $f(x)$ функция ҳамма вақт ҳам монотон камаявермайди.

6. Стохастик градиентлар усули. Усулнинг ғоясини қуйидаги

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N} p_i f_i(x) \to \min, \ p_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1,$$

$$f_i(x) \in C^{(1)}, \ i=\overline{1, N}$$

масалани қараш билан тушунтириш ўнғайдир. p_i сонларни тасодифий миқдор ξ нинг $f_i(x)$ қиймат қабул қилиш эҳтимоли деб қараш мумкин. У ҳолда $f(x)$ тасодифий миқдор ξ нинг математик кутилмасини беради: $f(x)=M\xi$.

Градиентли усулда минимумлаштирувчи кетма-кетлик

$$x^{k+1}=x^k-\theta_k \sum_{i=1}^{N} p_i \operatorname{grad} f_i(x^k), \ k=1, 2, \ldots \tag{19}$$

формула бўйича қурилади.

Тасодифий векторлар кетма-кетлигини киритамиз:

$$y^{k+1}=y^k-\theta_k \eta^k, \ \theta_k \geqslant 0, \ k=1, 2, \ \ldots, \tag{20}$$

бу ерда η^k — тасодифий вектор бўлиб, у $\operatorname{grad} f_i(x^k)$ қийматни p_i эҳтимол билан қабул қилади.

Кўриш қийин эмаски, x^k, y^k, $k=1, 2, \ldots$ кетма-кетликлар $x^k=My^k$ тенглик билан боғланган. (19), (20) формулалар шу билан фарқ қиладики, тушиш йўналиши (19) да аниқланадиган $-\operatorname{grad} f(x^k)$ вектордан, (20) да эса тасодифий $-\eta^k$ вектордан иборат. Шунингдек,

$$M\eta^k = \operatorname{grad} f(x^k)$$

бўлгани учун, η^k векторга *$f(x)$ функциянинг x^k* нуқтадаги *стохастик градиенти* дейилади.

(20) кетма-кетликни қуриш (19) кетма-кетликни қуришга қараганда осонроқ бўлиб, қуйидаги тарҳ бўйича бажарилади; k- итерацияда тасодифий механизм тасодифий миқдор ξ нинг $f_{j(k)}(x)$ амалга оширилишини кўрсатади. $\operatorname{grad} f_{j(k)}(y^k)$ ни ҳисоблаймиз ва $-\eta^k$, $\eta^k=\operatorname{grad} f_{j(k)}(y^k)$ йўналиш бўйича θ_k қадам қўямиз. Шундай қилиб, ҳар бир итерацияда $f(x)$ функциянинг фақат битта компонентаси градиентидан фойдаланилади.

Умумий ҳолда *дифференциалланувчи* $f(x)$, $x \in R_n$ *функ-*

циянинг стохастик градиенти деб, $M\eta = \text{grad}\, f(x)$ шартни қаноатлантирувчи η векторга айтилади. Текширишларда маълум бўлишича, мураккаб функциялар учун стохастик градиентларни қуриш кўпинча уларнинг ҳосилаларини ҳисоблашдан кўра осонроқ бўлар экан.

(20) дан олинган y^k, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кет яқинлашишлар тасодифий векторлардан иборат бўлганлиги сабабли яқинлашиш тушунчаси ҳам мос равишда ўзгаради*. Битта натижани келтирамиз; агар $M\|y^k\| \leqslant c$, $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k = \infty$, $\theta_k \to 0$ бўлса, бирор y^{k_s} $s = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлик бўйича $f(x)$ функция $f(x^0)$ га деярли яқинлашиши эҳтимолдан ҳоли эмас.

7. Деформацияланувчи кўпёқ усули. Амалиётда, хусусан, *тажрибаларни* режалаштиришда содда физик конструкцияга асосланган қуйидаги қидириш усули кенг қўлланилади. R_n фазода $n+1$ та $x^1(1)$, $x^1(2)$, $\ldots$ $x^1(n+1)$ нуқтани танлаймиз. $\{x^1(1), f(x^1(1))\}$, $\{x^1(2), f(x^1(2))\}$, $\ldots$, $\{x^1(n+1), f(x^1(n+1))\}$ нуқталарни $(n+1)$ ўлчовли $\{x, y\}$ фазода бирор механизм—қадамловчи роботнинг $y = f(x)$ сиртдаги таянч нуқталари деб қараймиз (IV. 25- чизма). Шу нуқталар орасидан «яхшиси» $x'(l_1)$ ва «ёмони» $x^1(m_1)$ ни энг қуйи ва энг юқори таянчлар бўйича аниқлаймиз:

$$f(x^1(l_1)) = \min f(x^1(i)),\ i = \overline{1, n+1};\ f(x^1(m_1)) = \\ = \max f(x^1(i)),$$

$i = \overline{1, n+1}$. n та $x^1(i)$, $i = \overline{1, n+1}$; $i \neq m_1$, нуқталарнинг оғирлик маркази $x^1(n+2)$ ни топамиз:

$$x^1(n+2) = \sum_{i=1}^{n+2}(x^1(i) - x^1(m_1))/n.$$

$x^1(m_1)$ ёмон нуқтадан чиқиб $x^1(n+2)$ марказга йўналган нурда $x^1(n+2)$ нуқтадан $\alpha\|x^1(n+2) - x^1(m_1)\|$ масофада бўлгэн ва $x^1(m_1)$ нуқтага нисбатан қарама-қарши томонда жойлашган

$$x^1(n+3) = x^1(n+2) + \alpha(x^1(n+2) - x^1(m_1)),\ \alpha > 0$$

нуқтани ясаймиз. $\{x^1(n+3)), f(x^1(n+3))\}$ нуқта ёмон таянч ўрнига ишлатиладиган янги таянч учун номзод сифати-

---

* Қуйидагича айтиш ҳам мумкин; яқинлашишга бўлган талабни сусайтириш бу яқинлашишларни қуриш амалларини соддалаштиришга имкон беради.

да қаралади. Аммо дастлаб, $f(x^1(n+3)) \leqslant f(x^1(l_1))$ бўлганда $x^1(n+2)$ нуқтадан $x^1(n+3)$ га қараганда узоқроқда жойлашган

$$x^1(n+4) = x^1(n+2) + \gamma(x^1(n+3) - x^1(n+2)), \ \gamma > 1$$

нуқта синаб кўрилади. Агар $f(x^1(n+4)) < f(x^1(l_1))$ бўлса, у ҳолда $x^1(m)$ нуқта $x^1(n+4)$ га алмаштирилади, яъни робот ўзининг таянчини $\{x^1(m_1), f(x^1(m_1))\}$ нуқтадан $\{x^1(n+4), f(x_1(n+4))\}$ нуқтага кўчиради ва шундан кейин юқоридаги амаллар $x^2(i) = x^1(i)$, $i = \overline{1, n+1}$, $i \neq m_1$, $x^2(m_1) = x^1(n+4)$ нуқталар учун такрорланади.

Агар $f(x^1(n+4)) \geqslant f(x^1(l_1)) \geqslant f(x^1(n+3))$ бўлса, $x^1(m_1)$ нуқта $x^1(n+3)$ га алмаштирилади, яъни робот таянчни ёмон нуқтадан $\{x^1(n+3), f(x^1(n+3))\}$ нуқтага кўчиради.

Шунингдек, $f(x^1(m_1)) \geqslant f(x^1(n+3)) > f(x^1(l_1))$ бўлиши ҳам мумкин. У ҳолда таянч $\{x^1(m_1), f(x^1(m_1))\}$ дан $\{x^1(n+5), f(x^1(n+5))\}$ га жойлашади, бу ерда

$$x^1(n+5) = x^1(n+2) + \beta(x^1(m_1) - x^1(n+2)), \quad 0 < \beta < 1,$$

яъни $x^1(n+5)$ нуқта $x^1(n+2)$ ва $x^1(m_1)$ нуқталар орасидаги кесмадан олинади. Қаралмаган сўнгги имконият $f(x^1(n+3)) > f(x^1(m_1))$ қолди. Бу ҳолда барча таянч нуқталар яхши нуқтагача бўлган масофани икки баравар камайтириб унга қисиладилар, яъни янги итерация амаллари бошланадиган янги $x^2(l_1) = x^1(l_1)$, $x^2(i) = x^1(l_1) + (x^1(i) - x^1(l_1))/2$, $i \neq l_1$, $i = \overline{1, n+1}$ нуқталар тўпламига эга бўламиз. Параметрларнинг қуйидаги $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 2$ қийматларини танлаш таклиф қилинади.

Тўхтатиш критерийси

$$\sum_{i=1}^{n+1} [f(x^k(i)) - f(x^k(n+2))]^2/(n+1) \leqslant \varepsilon^2$$

бу ерда ε — мақсад функцияси қийматлари бўйича x^0 га яқинлашишнинг берилган аниқлиги; k — итерация номери.

4- §. ШАРТЛИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

Чизиқсиз программалашнинг ҳисоблаш усуллари орасида шартли минималлаштиришнинг самарали сонли усулларини қуриш муаммоси марказий ўрин тутади. *Оптимал бошқарув назариясининг* вужудга келиши ва ҳисоблаш технологиясининг жадал ривожланиши натижасида бу муаммога бўлган қизиқиш кейинги йилларда янада ошди.

1. Чизиқли чеклашли масалалар. Аниқ усуллар. Қуйидаги масалани қараймиз:

$$f(x) \to \min, \ Ax = b, \ x \in Q, \tag{1}$$

бу ерда $f(x)$ — скаляр мақсад функцияси; $A = m \times n$ = матрица; $m \leqslant n$, $\operatorname{rank} A = m$.

3- § дагидек, (1) *масаланинг чизиқли яқинлаштирилиши* деб,

$$f_1(x^{k+1}; \ x^k) = \min f(x; \ x^k), \ Ax = b, \ x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \ k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

масалалар кетма-кетлигига айтилади. x^k кетма-кет яқинлашишларни

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k, \ k = 1, 2, \ \ldots \tag{3}$$

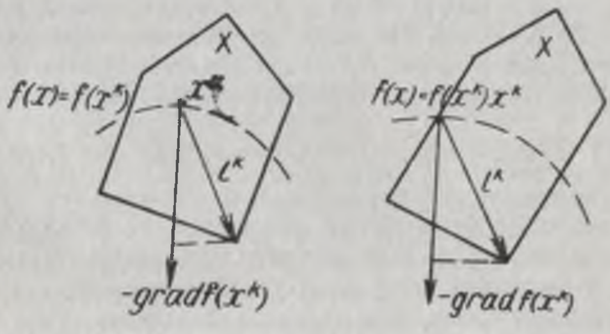
формула бўйича қуриб, l^k ни

$$f_1(l^k; \ x^k) = \min f_1(l; \ x^k), \ Al = 0, \ S_k(l; \ x^k) \leqslant 1 \tag{4}$$

масаладан аниқлаймиз.

Агар режалар тўплами $X = \{x : Ax = b; \ x \in Q\}$ компакт бўлса, (4) масала (1) масаланинг тўғри чеклашларидан олинган

$$x^k + l \in Q \tag{4}$$



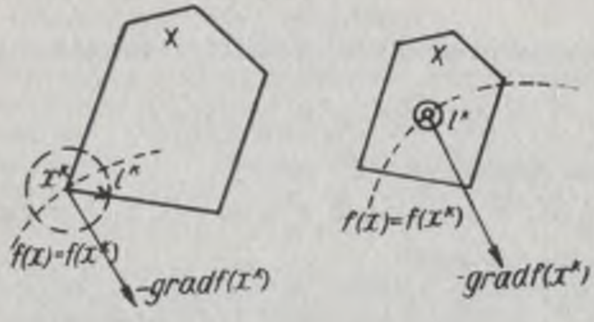
IV.26- чизма.

кўринишдаги $\{l; \ S_k(l; \ x^k) \leqslant 1\}$ тўпламли $S_k(l; x^k$ нормаловчи функция учун ечимга эга бўлади. (4), (5) масаланинг l^a ечими $f(x)$ функциянинг x^k нуқтадаги *шартли антиградиенти* деб аталади (IV.26- чизма). Шартли градиентлардан фойдаланувчи θ_k қадам эса 3- § даги усуллардан бири билан $x^{k+1}=x^k+\theta_k\ l^k\in Q$ шартни ҳисобга олган ҳолда танланувчи (3) усуллар *шартли градиент усуллари* дейилади.

Энди (4) масалани $\{l: S_k(l;\ x^k)\leqslant 1\}$ тўплам

$$l'l\leqslant\alpha,\ l_j\geqslant 0,\ \text{агар}\ x_j^k=0,\ j=\overline{1,\ n} \tag{6}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи l векторлардан иборат бўлган ҳол учун қараймиз.



IV.27- чизма.

$\alpha>0$ етарлича кичик бўлган (4), (6) масаланинг l^k ечими антиградиент $-\operatorname{grad} f(x^*)$ нинг X тўпламга проекцияси дейилади (IV.27- чизма). (4) ва (6) дан l^k вектор учун осонгина формула олиш мумкин. l^k вектор йўналиш бўйича шартсиз минималлаштириш масаласига келтирилувчи (II- бобга қ.)

$$f_1(l;\ x^k)+l'l/2\to\min,\ Al=0,\ l_j=0,\ \text{агар}\ x_j^k=0,\ \ j=\overline{1,\ n}$$

бўлса, квадратик масаланинг ечими билан устма-уст тушади.

l^k сифатида антиградиент проекциясидан фойдаланувчи, θ_k қадам эса 3- § да баён қилинган усуллардан бири билан $x^{k+1}\in Q$ шартни ҳисобга олган ҳолда танланувчи (3) усуллар *градиент проекцияси усуллари* дейилади.

Қуйидаги

$$Al=0,\ l_j=0,\ j\in J_0,\ J_0=\{j: x_j^k=0,\ j=\overline{1,\ n}\}$$

муносабатларни қараймиз. Энди $l(J_Б)=-A_Б^{-1}\,l(J_Б)$, $A_Б=A(I,\ J_Б)$, $J_Б\subset J/J_0$, $J_Б\cup J_Н=J/J_0$, $\det A_Б\neq 0$ ни топамиз ва $l(J_Н)$ векторни $l=\{l(J_0)=0,\ l_Б=A_Б^{-1}(J_Н),\ l(J_Н)\}$ шарт бажарилганда $f_1(l;\ x^k)$ функцияга қўямиз: $\varphi_1(l(J_H)) = f_1(l\ (J_H),\ x^k)$. Ушбу

$$\varphi_1(l(J_H)) \to \min,\ l'(J_H)\, l\ (J_H) \leqslant 1 \qquad (7)$$

масаланинг ечими бўлган $-l^k(I_H)$ вектор $f(x)$ *функциянинг* x^k нуқтадаги *келтирилган градиенти* деб аталади.

(3) кетма-кет яқинлашишларни (7) дан олинган $l^k(J_H)$ дан фойдаланган ҳолда қуриш усуллари *келтирилган градиентлар усуллари* дейилади. Мақсад функцияси бўйича θ_k қадамни танлаш усуллари 3- § да келтирилган. θ_k қадам учун қўшимча чеклаш, одатда, $x^{k+1} \in Q$ шартдан келиб чиқади.

Шундай қилиб, 3- § да бўлганидек, (3), (4) усулни аниқ амалга ошириш нормаловчи функция $S_k(l; x^k)$ нинг танланишига боғлиқ бўлади.

Келтирилган усулларда $\{l : S_k(l; x^k) \leqslant 1\}$ атрофни тузиш чоғида 3- § дагига ўхшаш иш юритилиб, умуман айтганда (1) масалага боғлиқ бўлмаган содда қўшимча функциялардан фойдаланилади. Шартли минималлаштириш масалаларида $S_k(l;\ x^k)$ ни асосий чеклашларни қўшимча ҳисобга олиш ёрдамида тузиш имконияти мавжуд. Аммо бу (1) масалани ечишнинг тўғри усулларини сезиларли даражада қийинлаштиради. Шунинг учун ҳам бундай ғоянинг қўшимча чеклашларни ҳисобга олиш ҳийла қулай бўлган тақрибий усуллар учун қўлланилиши табиийдир (2- бандга қ.).

(5) нормаловчи шартнинг камчилиги шундан иборатки, l^k шартли антиградиент вектори x^k нуқтадан ҳийла узоқлашган ва натижада чизиқли яқинлаштириш $f(x;\ x^k)$ мақсад функцияси $f(x)$ билан кучсиз боғланган нуқталарда X тўпламнинг таркибига муҳим равишда боғлиқ бўлади. Бу эса шартли градиент усулларининг яқинлашиш тезлигига таъсир қилади ва шу сабабли кўп ҳолларда l^k йўналишни ҳисоблаш катта қийинчилик туғдирса ҳам бошқа усуллар тавсия қилинади. (3) кўринишдаги $x^k \in X$ кетма-кет яқинлашишларни (4) масаланинг ечими ёрдамида қуришнинг барча усуллари *жоиз йўналишлар усуллари* дейилади, чунки (4) масаланинг l^k ечими $x^k \neq x^0$ бўлганда x^k нуқтада жоиз йўналишни беради. Агар x^1 режа (1) масаланинг режаси бўлса ва итерацияларда θ_k қадам (1) масаланинг чеклашлари бузилмайдиган қилиб танланса, у холда $x^k \in X,\ k \geqslant 1$ бўлади. Аниқ усулларнинг бу муҳим хоссаси ечиш жараёнини исталган итерацияларда тўхтатганда (1) масаланинг режага эга бўлишини таъминлайди.

Агар (4), (5) масалада мақсад функциясининг $f_1(l;\ x^k)$ чизиқли яқинлаштириши ўрнига $f_2(l;\ x^k)$ квадратик яқинлаштиришдан фойдаланилса, 3- § да $x^{k+1}\in Q$ чеклашни ҳисобга олганда топилувчи θ_k қадамли (3), (4) усул *Ньютон типидаги усул* деб аталади.

Агар (1) масаланинг ўрнига унга иккиланма масалани қарасак (албатта иккиланмалик назарияси ва зарур иккиланмалик муносабатлари мавжуд бўлганда), қилинадиган биринчи навбатдаги ишлар (1) масалани ечишнинг *аниқ иккиланма усулларига* олиб келади. Бу йўл чизиқли программалаштиришда (I боб), қавариқ ва геометрик программалаштиришда (II боб) ишлатилади.

Агар юқорида баён қилинган амаллар тўғри ва иккиланма масалалар жуфти учун амалга оширилса, (1) масалани ечишнинг *аралаш аниқ усулларини* оламиз. Бундай усуллар ҳозирги пайтда чизиқли программалаштириш учун ишлаб чиқилган.

2. Чизиқли чеклашли масалалар. Тақрибий усуллар. Итерацияларда кетма-кет яқинлашишларнинг (1) масала учун (тўғри ва иккиланма) режа бўлишини текшириб борилмайдиган ечиш усуллари *тақрибий* (*итератив*) ечиш усуллари дейилади. Бунда яқинлашишларни тўғри (ёки иккиланма) режаларнинг *баҳолари* деб аталади.

Энг кўп тарқалган тақрибий усуллар яқинлаштириш масалаларининг Лагранж функцияларидан фойдаланишга асосланган. Итератив усулларда ҳар бир итерацияда масаланинг чеклашларининг бажарилишини кузатиб бориш зарурати йўқолгани учун, (3) муносабат ортиқча бўлиб қолади ва ечиш жараёнини бевосита (2) кўринишида тушунтириш осонроқ бўлади.

Айтайлик, $s_k(x^k;\ \varepsilon_k)=\{x\ x\in Q\}$ Q — қавариқ компакт бўлсин. У вақтда (2) масала

$$f_1(x^{k+1};\ x^k)=\min f_1(x;\ x^k),\ Ax=b,\ x\in Q \tag{8}$$

кўринишини олади. Иккиёқламалилик назариясига кўра (II-боб шундай Лагранж вектори λ^k топиладики,

$$F_1(x^{k+1};\ \lambda^k)=\min F_1(x,\lambda^k),\ x\in Q \tag{9}$$

бўлади, бу ерда $F_1(x,\lambda)=f_1(x;\ x^k)+\lambda'(Ax-b)$ — (8) масаланинг Лагранж функциясидир.

Агар λ^k вектор маълум бўлса, x^{k+1} ни (9) дан топиш (8) масалани ечишга нисбатан ҳийла осонроқдир. λ^k векторни қуриш қуйидаги фактларга асосланган:

1) агар $x(\lambda)$, $F_1(x(\lambda), \lambda)=\min F_1(x, \lambda)$, $x\in Q$ масаланинг ечими бўлса, $f_1(x(\lambda); x^k)=\min f_1(x; x\ )$, $Ax-b=Ax(\lambda)-b$, $x\in Q$ бўлади;

2) агар $\lambda_i=\lambda_i^*$, $i\neq j$; $\lambda_i=\lambda_j^*+\theta[Ax(\lambda)-b]_j$, $\theta>0$ бўлса $|[Ax(\lambda^*)-b]_j)<|[Ax(\lambda)-b]_j|$.

Бу ердан (1) масалани ечиш усули келиб чиқади: λ^1 бошланғич яқинлашишни танлаймиз ва x^1 режанинг бошланғич баҳосини топамиз:

$$F(x^1, \lambda^1)=\min F(x, \lambda^1),\ x\in Q,$$

бу ерда $F(x, \lambda)=f(x)+\lambda'[Ax-b]$ — дастлабки (1) масаланинг Лагранж функциясидир. Энди, λ^k, x^k яқинлашишлар қурилган бўлсин. $\lambda^{k+1}=\lambda^k+\theta_k[Ax^k-b]$; $\theta_k>0$ деб оламиз ва x^{k+1} ни

$$F(x^{k+1}, \lambda^{k+1})=\min F(x, \lambda^{k+1})\ x\in Q \tag{10}$$

масаладан топамиз.

x^{k+1} ни (9) формула бўйича, ундан кейин эса (10) формула бўйича қуриш муҳим камчиликка эга: λ^k кичик бўлганда x^{k+1} ни ҳисоблаш жараёни $Ax-b=0$ кўпхилликнинг атрофида турғун бўлмайди ва x^k, λ^k ларнинг кичик четланишлари учун қатъий фарқланувчи x^{k+1} лар олинади. (9), (10) масалаларни мунтазамлаш учун (5- бандга қ.) шу масалаларнинг режалар тўпламини ўзгартирмайдиган қўшимча

$$(Ax-b)'S(Ax-b)\leqslant 1,\ s>0, \tag{11}$$

чеклашни киритамиз.

(10) масаланинг (11) чеклашни ҳисобга олиб тузилган Лагранж функцияси

$$F_\mu(x, \lambda)=f(x)+\lambda'(Ax-b)+\mu(Ax-b)'S(Ax-b) \tag{12}$$

бошланғич (1) масала учун *турланган Лагранж функцияси* деб аталади.

$F(x, \lambda)$ функцияни $\mu=1/2$ бўлган (12) функцияга алмаштирилганда ва $\lambda^{k+1}=\lambda^k+S(Ax^k-b)$ бўлганда юқорида баён қилинган (10) усул ўзини кўпгина масалаларда яхши кўрсатди. Иккала усул ҳам *икқиланма итератив усуллар* синфига тегишли, чунки уларда дастлаб λ^k баҳолар, кейин эса улар бўйича x^k баҳолар қурилади.

(8) масаладан олинган $\{x^{k+1}, \lambda^k\}$ жуфт $F_1(x,\lambda)$ Лагранж функциясининг эгар нуқтасини ташкил этади. Шунинг учун

ҳам 3- § қоидалари бўйича шу эгар нуқтага тушиш-кўтарилишни ташкил қилиши мумкин. Бундай усуллар *аралаш итератив усуллар* деб аталади.

Тўғри итератив усулларда дастлаб тўғри режаларнинг x^k баҳолари, сўнгра улар бўйича иккиланма режаларнинг λ^k баҳолари қурилади. Шундай усуллар мавжуд, аммо улар бу ерда қаралмайди.

3. Чизиқсиз чеклашлар бўлган ҳол. Ушбу

$$g(x) \leqslant 0 \tag{13}$$

тенгсизликнинг $x = x^*$, $-\alpha \leqslant g(x) \leqslant 0$, $\alpha = \alpha(x^*) \geqslant 0$ нуқтадаги *чизиқли яқинлаштирилиши* деб, $g_1(x; x^*) = g(x^*) + (x - x^*)' \partial g(x^*) / \partial x \leqslant \beta(x^*)$, $\beta(x^*) \geqslant 0$ тенгсизликка айтамиз ва бунда $g(x^*) < -\alpha(x^*)$ бўлганда $\beta(x^*)$ га нисбатан чеклашнинг йўқлигини қайд этамиз. $\alpha(x^*)$, $\beta(x^*)$ сонлар *яқинлаштириш параметрлари* дейилади.

Агар $g_1(x; x^k)$ функцияни $g_2(x; x^k)$га алмаштирсак, *тенгсизликнинг квадратик яқинлаштирилишига* эга бўламиз. Лекин бундай яқинлаштиришлар ҳисоблаш амалиётида кам учрайди.

Ушбу

$$g(x) = 0$$

тенгликнинг x^*, $\| g(x^*) \| \leqslant \alpha(x^*)$ нуқтадаги *чизиқли яқинлаштирилиши* деб иккита

$$\beta_*(x^*) \leqslant g(x^*) + (x - x^*)' \partial g(x^*)/\partial x \leqslant \beta^*(x^*)$$

тенгсизликка айтамиз, бу ерда $\alpha(x^*)$, $\beta^*(x^*)$, $-\beta_*(x^*) \geqslant 0$ — яқинлаштириш параметрларидир.

Скаляр $f(x)$, m- вектор $g(x)$ ва l- вектор $h(x)$ функциялари силлиқ бўлган

$$f(x) \to \min, \ g(x) \leqslant 0, \ h(x) = 0 \tag{14}$$

масаланинг чизиқли яқинлаштирилиши деб мақсад функцияси ва (14) масала чеклашларининг x^k нуқталардаги чизиқли яқинлаштирилишлари ёрдамида олинган

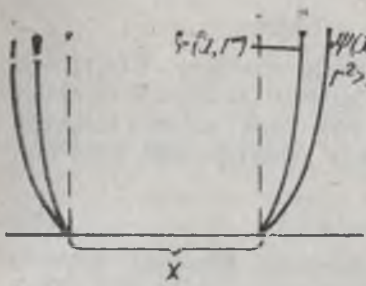
$$\begin{gathered} f_1(x; x^k) \to \min, \ g_1(x; x^k) \leqslant \beta(x^k), \\ \beta_*(x^k) \leqslant h_1(x; x^k) \leqslant \beta^*(x^k), \ x \in s_k(x^k, \varepsilon_k) \end{gathered} \tag{15}$$

масалалар кетма-кетлигига айтилади.

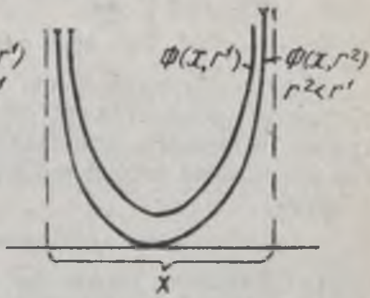
$f(x) \in c^{(2)}$ бўлганда (14) масаланинг квадратик яқинлаштирилиши учун (15) масалалар кетма-кетлигида фақат $f_1(x; x^k)$ функция $f_1(x; x^k)$ функцияга алмаштирилади. Бундан кейинги қуришлар 2- банддаги конструкцияларга ўхшашдир.

Изох. Кейинги йилларда бўлакли силлиқ, бўлакли квадратик ва ва ҳоказо функциялар ёрдамида яқинлаштириш назарияси — сплайнлар назарияси ривожланмоқда.

Масалан, етарлича зич нуқталар тўплами $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(p)} \in Q$ ни танлас ак, $f_Q(x) = \max\{f_1(x; x_i), \ i = \overline{1, p}\}$ функция қавариқ Q тўпламдаги қавариқ $f(x)$ функция учун жуда яхши бўлакли чизиқли яқинлаштириш бўлади. $f_Q(x) \Rightarrow \min$ масала ва $f_Q(x) \leqslant 0$ чеклаш осонгина чизиқли ҳолга келтирилгани учун (I- боб), 1 — 4- бандларда баён қилинган назарияни янги типдаги яқинлаштиришлар учун ўтказиш қийин эмас.



IV.28- чизма.



IV.29- чизма.

4. Жарима функциялари усуллари. Айтайлик, $X \subset R_n$ бирор чизиқсиз программалаш масаласининг режалари тўплами бўлсин. Агар

$$\Psi(x, r) = \begin{cases} 0, & x \in X \text{ бўлганда}, \\ \to \infty, & x \bar{\in} X, \ r \to \infty \text{ бўлганда}, \end{cases}$$

бўлса (IV.28- чизма), $\Psi(x, r)$, $x \in R_n$, $r \in R$ функция X тўпламнинг *ташқи жарима функцияси* деб аталади.

Қуйидагилар энг содда ташқи жарима функцияларга мисол бўла олади:

$$\Psi(x, r) = r \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x), \text{ агар } X = \{x: g(x) = 0\} \text{ бўлса},$$

$$\Psi(x, r) = r \sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), 0\}, \text{ агар } X = \{x: g(x) \leqslant 0\} \text{ бўлса}.$$

X тўпламнинг *ички жарима (тўсиқ) функцияси* деб,

$$\Phi(x, r)=\begin{cases}\infty, \text{ агар } x \notin X \text{ бўлса,}\\ \to 0, \text{ агар } x \in X,\ x \notin \partial X,\ r \to 0 \text{ бўлса,}\\ \to \infty, \text{ агар } x \in X,\ x \to \partial X \text{ бўлса,}\end{cases}$$

функцияга айтилади, бу ерда ∂X ифода X тўпламнинг чегарасидир (IV.29- чизма).

$X=\{x: g(x) \leqslant 0\}$ тўпламнинг энг содда тўсиқ функцияси:

$$\Phi(x, r)=\begin{cases} r \sum_{i=1}^{m} 1/g_i(x), \text{ агар } g(x) \leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \infty, \text{ агар } g(x)>0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Жарима функцияларнинг физик маъноси: $\Psi(x, r)$ — X тўпламдан узоқлашганлик учун жарима миқдори, $\Phi(x, r)$—X тўплам чегарасига яқинлашганлик учун жарима миқдори, r — жариманинг нисбий миқдорини характерловчи параметр.

Ушбу

$$f(x) \to \min, \ x \in X \tag{16}$$

шартли минимум масаласини ечишнинг *(ташқи) жарима функциялар усули* (16) масаладан

$$f(x_{\Psi}(r))+\Psi(x_{\Psi}(r), r)=\min \{f(x)+\Psi(x, r)\}, \ x \in R_n, \ r \to 0$$

шартсиз минималлаштириш масалалари кетма-кетлигига ўтишдан иборат. Худди шунингдек, тўсиқ (ички жарима) функциялар усулида (16) шартла минимум масаласи

$$f(x_{\Phi}(r))+\Phi(x_{\Phi}(r), r)=\min \{f(x)+\Phi(x, r)\}, \ x \in R_n, \ r \to \infty$$

шартсиз минималлаштириш масалалари кетма-кетлигига алмаштирилади.

Жуда кучсиз талабларда жарима функциялар усули қуйидаги хоссаларга эга бўлади;

1) $f(x_{\Psi}(r_2)) \leqslant f(x_{\Psi}(r_1))$, агар $r_2>r_1$; $f(x_{\Phi}(r_2)) \leqslant f(x_{\Phi}(r_1))$, агар $r_2<r_1$ бўлса;

2) $f(x_{\Psi}(r)) \to f(x^0)$, агар $r \to \infty$; $f(x_{\Phi}(r)) \to f(x^0)$, агар $r \to 0$ бўлса;

3) $\Psi(x_{\Psi}(r), r) \to 0$, $r \to \infty$ бўлганда; $\Phi(x_{\Phi}(r), r) \to 0$ $r \to 0$ бўлганда.

Изоҳ. Шу хоссаларга асосан Лагранж функцияси ва Кун—Таккер назариясининг (II боб) янгича талқинини бериш мумкин бўлади.

Жарима функциялари усулларининг асосий афзаллиги шундан иборатки, бу усул ёрдамида шартли минималлаштириш масаласини ечиш учун шартсиз минималлаштириш усулларига эга бўлиш етарлидир. Бу усулларнинг камчилиги шундаки, жарима функцияларининг қўшилиши, одатда, мақсад функциясининг тузилишини ёмонлаштириб, унинг кўпинча тор тузилишли бўлишига олиб келади, бу эса шартсиз минималлаштириш усуллари характеристикасига салбий таъсир кўрсатади.

1—4- бандларда минимум нуқталарини излашда ишлатиладиган асосий усулларининг ғоя ва муҳим моментлари баён қилинди. Шуни айтиш керакки, бунда масалаларнинг тузилишидан муфассал равишда фойдаланилган эмас. Шунинг учун ҳам конкрет масалаларни ечишда ишлатиладиган усулларнинг самарадорлиги кўп даражада масала билан шуғулланувчи тадқиқотчининг тажрибаси ва ўз ишига усталигига боғлиқ бўлади. Бир неча бор таъкидланганидек, масалалар хусусиятини ҳисобга олиш усулларни муҳим даражада соддалаштириши ва уларнинг самарадорлигини ошириши мумкин. Яқинлашиш тезлигининг баҳолари асимптотик характерга эга бўлиб, улар кенг синфдаги функцияларга тааллуқлидир ва шунинг учун ҳам, 1- § дагидек, конкрет функциялар учун усулларнинг нисбатан самарадорлиги юқорида келтирилганидан бошқача бўлиши мумкин.

5. Коррект бўлмаган минималлаштириш масалаларини созлаш. Чизиқсиз программалашнинг ҳисоблаш усулларини амалга ошириш пайтида бир қанча муаммолар пайдо бўладики, ишнинг муваффақияти оқибат натижада шу муаммоларнинг ҳал этилишига боғлиқ бўлади. Ушбу бандда шу нуқтаи назардан муҳим бўлган *мунтазамлаш муаммоси* қисқача ўрганилади.

Айтайлик, $f(x) \geqslant \beta$, $x \in X \subset R_n$, $\beta > -\infty$ ва ечимлари тўплами x^0 бўш бўлмаган

$$f(x) \to \min, \ x \in X \tag{17}$$

масаланинг оптимал режаси изланаётган бўлсин.

Айтайлик, $x^k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$ *минималлаштирувчи* кетма-кетлик бўлсин: $f(x^k) \to \inf f(x) = f^\circ$, $k \to \infty$. Агар (17) масалада ҳар бир минималлаштирувчи $x^k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлик X^0 тўпламга яқинлашса:

$$\rho(x^k, X^0) \to 0, \ k \to \infty. \tag{18}$$

(17) масала X^0 тўпламга нисбатан *коррект* дейилади, бу

ерда $\rho(x^k, X^0) = \inf\|x^k - x\|,\ x \in X^0$ — x^k нуқтадан X^0 тўпламгача бўлган масофадир.

Коррект бўлмаган, яъни минималлаштирувчи кетма-кетликлари (18) хоссага эга бўлмаган масалалар мавжуд. Масалан, $f(x) = x/(1+x^2) \to \min,\ x \geqslant 0$ масала коррект эмас, чунки у ягона $x^0 = 0$ ечимга эга бўлса-да, минималлаштирувчи $x^k = k,\ k = 1, 2, \dots$ кетма-кетлик x^0 нуқтага яқинлашмайди ($f(x^k) = k/(1+k^2) \to 0 = f(x^0)$).

Минималлаштириш нуқтаи назаридан коррект масалаларнинг асосий хоссаси шундан иборатки, улар учун минималлаштирувчи кетма-кетлик элементларини (17) масаланинг тақрибий ечимлари сифатида олиш мумкин. (17) масаланинг коррект бўлишлигининг бир етарлилик шартини исботлаймиз.

1-теорема. $f(x) \in C,\ x \in X \subset R_n$ бўлсин. Агар бирор C, $-\infty < C < \infty$ учун $X^C = \{x : f(x) \leqslant C\} \cap X$ тўплам компакт бўлса, (17) масала X^0 га нисбатан коррект бўлади.

Исботи. Айтайлик, $x^k \in X^C,\ k = 1, 2, \dots$ минималлаштирувчи кетма-кетлик бўлсин. Бу кетма-кетликнинг лимит нуқталари тўпламини X^* деб белгилаймиз. X^C тўпламнинг компактлигидан X^* нинг бўш бўлмаган тўплам эканлиги келиб чиқади. $x^* \in X^*$ бўлсин. $f(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги учун $f^0 \leqslant f(x^*) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f^0$, яъни $x^* \in X^0$. Демак, (18) хосса ўринлидир. Теорема исботланди.

(17) масала билан бир қаторда

$$f(x,\ \alpha_n) = f(x) + \alpha_k \Omega(x) \to \min,\ x \in X,\ k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

мунтазамлаштирилган масалалар кетма-кетлигини қараймиз, бу ерда $\alpha_k > 0$, $\Omega(x) \geqslant 0$ — чексиз катта узлуксиз функция. Мақсад функциясининг минимал қийматини ва (19) масаланинг ε^k-ечимини, мос равишда, $f^0(\alpha_k)$, $x(\alpha_k, \varepsilon_k)$ деб белгилаймиз, яъни

$$f^0(\alpha_k) \leqslant f(x(\alpha_k,\ \varepsilon_k)) + \alpha_k \Omega(x(\alpha_k,\ \varepsilon_k)) \leqslant f^0(\alpha_k) + \varepsilon_k.$$

2-теорема. Агар $\alpha_k \to 0,\ \varepsilon_k/\alpha_k \to 0,\ k \to \infty$ бўлса, $k \to \infty$ да $\rho(x(\alpha_k,\ \varepsilon_k),\ X^0) \to 0$ бўлади.

Исботи. $x^k = x(\alpha_k,\ \varepsilon_k)$ бўлсин. Қуйидаги тенгсизликларнинг тўғрилиги равшандир:

$$f^0 \leqslant f(x^0) \leqslant f(x^k) \leqslant f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^k) \leqslant f^0(\alpha_k) + \varepsilon_k \leqslant$$
$$\leqslant f(x^0) + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k \leqslant f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k) \quad (20)$$

Бундан, $\Omega(x^k) \leqslant \Omega(x^0) + \varepsilon_k/\alpha_k$. Шартга кўра $k \to \infty$ да $\varepsilon_k/\alpha_k \to 0$. Демак, x^k, $k \geqslant k^0$, $k^0 < \infty$ кетма-кетликнинг барча элементлари $\Omega(x)$ функциянинг шартга кўра компакт бўлган бирор сатҳ тўпламига тегишли бўлади. (20) дан

$$f^0 \leqslant f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^k) \leqslant f^0 + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k$$

тенгсизликка эга бўламиз, яъни x^k, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлик минималлаштирувчидир.

Шундай қилиб, 1-теореманинг барча шартлари бажарилади. Бу теореманинг тасдиғидан эса 2-теорема келиб чиқади.

АДАБИЁТ

1. *Гилл Ф., Мюррей У.* Численные методы условной оптимизации. — М. : Мир, 1977.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979.
3. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М. : Мир, 1975.

V боб. ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Динамик программалаштириш деб математик моделлари кўп босқичли ва динамик жараёнли характерга эга бўлган чизиқсиз программалаштиришнинг махсус масалалари (I—IV боблар) ва оптимал бошқарув масалаларини ечишнинг ҳисоблаш усулига айтилади. Бу усул жараёнларнинг кетма-кет таҳлилига асосланган бўлиб*, экстремал масалаларни ечишда америкалик олим Р. Беллман томонидан XX асрнинг 50-йилларидан бошлаб дастлаб систематик ва принципиал кенг қўлланила бошланди. Мазкур бобда бу усулнинг асосий қоидалари чизиқсиз программалаштиришнинг қатор махсус масалалари учун баён қилинади. Динамик программалаштиришнинг оптимал бошқарув масалаларига баъзи татбиқлари VII бобда берилади.

1-§. РЕСУРСЛАРНИ ТАҚСИМЛАШ МАСАЛАСИ

Айтайлик, c ҳажмли хомашё ва n та технологик жараён мавжуд бўлсин. Агар хомашёнинг x миқдорини i — технологик жараёнда сарфланса, $f_i(x)$ фойда олинади.

---

* Мазкур бобдаги усулнинг олдинги боблардаги усуллардан принципиал фарқи IV бобнинг 1-§ и охиридаги изоҳда кўрсатилган.

Максимал фойда олиш учун хом ашёни жараёнлар ўртасида қандай тақсимлаш керак?

Фараз қилайлик, x_i i-жараён учун ажратилган хомашё миқдори бўлсин. У ҳолда қўйилган *ресурсларни тақсимлаш масаласининг* математик модели

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = c, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

кўринишни олади.

(1) чизиқсиз программалаш масаласининг ўзига хослиги шундан иборатки, унинг мақсад функцияси $f(x)$ ва асосий чеклаш функцияси $g(x)$ *сепарабелдир*, яъни улар бир ўзгарувчили функциялар йиғиндиси шаклида ифодаланган.

Экстремал масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг биринчи босқичи — берилган масалани унга ўхшаш масалалар оиласига *инвариант туркумлашдан* иборатдир. Бу босқич маълум маънода санъат бўлиб, ҳар бир муайян ҳолда тадқиқотчининг тажрибаси, сезгиси ва маҳоратига боғлиқдир. У (1) масала учун ихтиёрий k, $1 \leqslant k \leqslant n$ сондаги технологик жараёнларга ва y, $0 \leqslant y \leqslant c$ хомашё ғамламасига эга бўлган ресурсларни тақсимлашнинг ушбу

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = y, \; x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, k} \qquad (2)$$

масалаларини қарашдан иборатдир. $k = n$, $y = c$ бўлганда (2) масалалар оиласидан бошланғич (1) масала олинади.

(2) масалалар оиласидан олинган ихтиёрий масала мақсад функциясининг оптимал қиймати $B_k(y)$ *Беллман функцияси* дейилади:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = y, \; x_i \geqslant 0, \; i = \overline{1, k}. \qquad (3)$$

Масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг иккинчи босқичи — Беллман функцияси учун тенгламани олишдан иборатдир. Бу босқичда *Беллманнинг оптималлик принципи* умумий ҳолда қўлланилади. (1) масала учун унинг моҳияти қуйида келтириладиган мулоҳазалар орқали берилади. Бу мулоҳазалар оддий математик фактларга асосланган ва етарлича универсалдир (кейинги параграфлар материаллари ва VII бобнинг 2 — 6-§ ларига қ.). Изланаётган тенгламани тузишда инвариант жойлашнинг тўғрилиги намоён бўлади. Иккинчи томондан, жойлаштириш усули тенгламанинг кўринишида ҳам сезилади, k жараёнли ва y хомашё ғамламасига эга бўлган (2) масалада k- жараёнга z, $0 \leqslant z \leqslant y$ миқдордаги хомашё ажратамиз. Бунда k- жараёндан олинадиган фойда $f_k(z)$ га тенг бўлади. $1, 2, \ldots, k-1$ номерли жараёнлар учун эса $y-z$ миқдордаги хомашё қолади. Айтайлик, бу хомашё қолган жараёнларга оптимал тақсимланган бўлсин. (3) нинг аниқланишига кўра $k-1$ та жараёндан келадиган фойданинг максимал миқдори $B_{k-1}(y-z)$ га тенг бўлади. Шундай қилиб, k жараёнга z миқдорда хомашё ажратилганда барча k жараёнлар ва y хомашё ғамламасидан

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \tag{4}$$

фойда оламиз.

z миқдорни $0 \leqslant z \leqslant y$ чегарасида ўзгартириб, (4) умумий фойда максимал бўладиган $x_k^0(y)$ (k- жараён учун хомашёнинг оптимал миқдори) қийматни топамиз:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_{0<z<y}[f_k(z) + B_{k-1}(y-z)]. \tag{5}$$

Иккинчи томондан, (3) га асосан хомашё миқдори y бўлганда k та жараёндан олинадиган максимал фойда $B_k(y)$ га тенгдир. Бу қийматни (5) ифоданинг ўнг томонига тенглаштириб, $B_k(y)$ функция учун

$$B_k(y) = \max_{0<z<y}[f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], \quad k = \overline{1, n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant c \tag{6}$$

тенгламани оламиз. Бу *Беллман тенгламаси* деб аталади. (6) тенглама $B_k(y)$ функциянинг k аргументига нисбатан рекуренг бўлганлигидан уни ечиш учун бошланғич шарт берилиши керак. Уни (3) дан $k=1$ бўлганда топиш мумкин:

$$B_1(y) = \max f_1(x_1), \quad x_1 = y, \quad x_1 \geqslant 0.$$

Шундай қилиб, Беллман тенгламаси (6) учун бошланғич шарт

$$B_1(y) = f_1(y) \tag{7}$$

кўринишга эга бўлади.

Масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг учинчи (ва охирги) босқичи Беллман тенгламасининг ечимини излашдан ва у бўйича (1) масаланинг ечимини қуришдан иборатдир. (6) тенгламада $k=2$ деб оламиз:

$$B_2(y) = \max_{0<z<y}[f_2(z) + B_1(y-z)]. \tag{8}$$

Бу ифоданинг ўнг томонида берилган $f_2(z)$ функция ва (7) дан топилган $B_1(y)$ функция бор. Шунинг учун (8) формула маълум бир ўзгарувчили функцияни максималлаштириш билан $B_2(y)$ функцияни ҳисоблаш имконини беради. Сўнгра (6) да $k=3, 4, \ldots, n$ деб олиб, ҳар бир ҳолда бир ўзгарувчили функцияни максималлаштириш амалини бажариб, кетма-кет $B_3(y), B_4(y), \ldots, B_n(y)$ функцияларни оламиз.

(3) га асосан $B_n(c)$ сон (1) бошланғич масала учун максимал фойдадан иборатдир. Хомашёнинг технологик жараёнлар бўйича оптимал тақсимотини топиш учун (5) ифодага мурожаат қиламиз. Унда $k=n$, $y=c$ деб олиб, (5) нинг аниқланиши бўйича агар барча n та жараён учун хомашё миқдори c га тенг бўлса, охирги жараёнга (бу ҳолда n-жараёнга) ажратилган хомашёнинг оптимал миқдорига тенг бўлган $x_n^0(c)$ сонни оламиз. Шундай қилиб, бошланғич масала $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ оптимал режасининг x_n^0 компонентаси топилди: $x_n^0 = x_n^0(c)$.

Агар n-жараён учун x_n^0 миқдор ажратилса, у ҳолда қолган $n-1$ та жараён учун $c - x_n^0$ миқдордаги хомашё қолади. (5) да $k = n - 1$, $y = c - x_n^0$ деб оламиз ва $x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ ни топамиз. Равшанки, (1) масаланинг x^0 оптималнинг охиргидан олдинги компонентаси $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ га тенгдир. Ечиш жараёнини давом эттириб, (1) бошланғич масала ечимининг $x_{n-2}^0, \ldots, x_1^0$ компоненталарини топамиз.

Натижани таҳлил қиламиз. Усулнинг афзалликлари: 1) бошланғич n та ўзгарувчи бўйича максималлаштириш масаласи (1) битта ўзгарувчи бўйича $n-1$ та максималлаштириш масаласи (6) га келтирилди ҳамда натижа — глобал оптимал режадан иборат бўлди; 2) ечиш жараёнида масала элементларининг аналитик хоссаларидан фойдаланилмади; берилган функциялар жадвал, график, алгоритмик ва ҳ. к кўринишда берилиши мумкин эди; 3) $B_k(y)$ ларни ҳисоблаш натижалари бўйича c ва n нинг қийматларини вариациялаб, (1) масаланинг ечимини осон қуриш мумкин; бу (1) масала ечимининг кўрсатилган параметрларнинг ўзгаришига сезгирлигини таҳлил қилиш имконини беради.

Усулнинг асосий камчилиги Беллман томонидан *«ўлчовнинг қарғиши»* деб аталган бўлиб, у шундан иборатки, (6) Беллман тенгламасини ечишда функцияларни эсда сақлашга тўғри келади. Берилган битта хомашёни тақсимлаш масаласида улар бир ўзгарувчили функциялардан иборат. Умумий ҳолда эса аргументларнинг сони хомашёнинг хиллари сонига тенг бўлади. ЭҲМ да кўп ўзгарувчили функциялар ($n > 2$) жадвалларини тузиш оператив хотира имкониятининг чегараланганлигидан принципиал қийинчиликларга олиб келади, шунинг учун бу усулнинг муҳокама қилинаётган шу камчилиги кўп ўлчовли (c-вектор) масалаларни ечишда динамик программалашнинг юқорида баён қилинган классик тарҳини амалга ошириш имконини бермайди. «Ўлчов қарғиши» ни бартараф этишнинг турли усуллари тавсия қилинган.

Мисол. (1) масалага оид сонли мисол қараймиз, унинг катталиклари V-I- жадвалда берилган.

Беллман функциясини ҳисоблашни V. 2- жадвалда бажарамиз. Ҳар бир катакда Беллман функциясининг қиймати билан бир қаторда, қавс ичида

V.I- жадвал

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	0	1	2	4	7
$f_3(x)$	0	2	2	3	3	3

V.2- жадвал

y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	1 (0)	2 (0)	3 (0)	4(0.4)	7 (5)
$B_3(y)$	2 (1)	3 (1)	4 (1)	5 (1)	7 (0)

(6) тенгламанинг ўнг томони максимумга эришадиган $x_k^0(y)$ қиймат ҳам кўрсатилган. V.2- жадвалдан кўринадики, қаралаётган масалада максимал фойда $B_3(5)=7$ бўлади. Ресурсларни оптимал тақсимлашни топамиз. $x_3^0(5) = 0$ бўлганлигидан, учинчи технологик жараёнга ресурс ажратмаймиз: $x_3^0 = 0$. Шундай қилиб, 1, 2- жараёнларга тўлиқ 5 ҳажмдаги ресурс қолади. V.2- жадвалдан $x_2^0(5) = 5$ эканлигини топамиз. Демак, максимал фойда олиш учун ҳамма ресурсни иккинчи технологик жараёнга ажратиш керак ($x_2^0 = 5$). Шунинг учун, $x_1^0 = 0$.

Масалада битта шартни ўзгартирамиз. $C = 4$ деб оламиз. V.2- жадвалга асосан бу ҳолда максимал фойда $B_3(4)=5$ бўлади, ҳамда $x_3^0=1$. Сунгра, $B_2(3)$ бўйича V.2- жадвалдин $x_2^0=0$ ни оламиз. Демак, $x_1^0=3$.

2- §. ДЕТАЛЛАРНИ ИККИ ДАСТГОҲДА ВАҚТ БЎЙИЧА ОПТИМАЛ ҚАЙТА ИШЛАШ

Фараз қилайлик, $i=I=\{1, 2, \ldots, n\}$ номерли n та деталь ва иккита дастгоҳ берилган бўлсин. Ҳар бир деталга аввал биринчи дастгоҳда, сўнгра иккинчи дастгоҳда ишлов бериш керак. i- деталга ишлов бериш вақти биринчи дастгоҳда a_i га, иккинчисида эса b_i га тенг бўлсин. Дастгоҳлар бир вақтда, $t=0$ моментда ишга туширилади. Барча деталларга ишлов бериш умумий вақти минимал бўлиши учун деталларни ишлов беришга қандай кетма-кетликда тушириш керак?

Бу масалани ўхшаш масалалар оиласига туркумлаймиз. Оиланинг умумий элементини қуйидагича қурамиз. Бошлангич I партиядан $i_1, i_2, \ldots, i_k$ номерли k та детални ажратиб оламиз. Қолган $n-k$ та деталдан ҳар бирига аввал биринчи дастгоҳда, сўнгра иккинчисида ишлов берилсин, лекин энди биринчи дастгоҳ $t=0$ моментда ишга туширилади, иккинчиси эса биринчи дастгоҳ ишга туширилганидан y бирлик вақт ўтгандан сўнг ишга туширилади.

Ушбу

$$B_{n-k}(i_1, i_2, \ldots, i_k/y) \tag{1}$$

орқали *Беллман функциясини*, яъни қолган $n-k$ та деталга юқорида кўрсатилган шартларда ишлов беришнинг минимал вақтини белгилаймиз.

Беллман тенгламасини тузиш учун қуйидагича иш кўрамиз. Қолган $I_k=I\setminus\{i_1, \ldots, i_k\}$ номерли деталлар тўпламидан ихтиёрий i- детални оламиз ва ишлов беришга биринчи қўямиз. Биринчи дастгоҳ i- деталга ишлов беришни $t=a_i$ моментда туғаллайди. Иккинчи дастгоҳ i- деталдан

$$\begin{array}{l}\text{агар } y\leqslant a_i \text{ бўлса, } a_i+b_i \text{ моментда,}\\ \text{агар } y>a_i \text{ бўлса, } y+b_i \text{ моментда}\end{array} \tag{2}$$

бўшайди.

Айтайлик, қолган $I_k\setminus\{i\}$ номерли деталлар ишлов беришга оптимал кетма-кетликда туширилган бўлсин. Улар учун биринчи дастгоҳдан $t=a_i$ моментдан бошлаб фойдаланиш мумкин. Иккинчи дастгоҳ эса $I_k \setminus \{i\}$ дан олинган деталларга ишлов бериш учун (2) га асосан уларга ишлов бериш учун биринчи дастгоҳ ишга туширилганидан

$$t_i = b_i + \max\{0,\ y - a_i\} \tag{3}$$

вақт бирлиги ўтгандан кейин ишга туширилади. Беллман функциясининг аниқланишига кўра $I_k \setminus \{i\}$ дан олинган деталларга ишлов беришнинг минимал вақти $B_{n-k-1}(i_1, i_2, \ldots, i_k, i/t_i)$ га тенг. Шундай қилиб, I_k дан олинган $n - k$ та деталга юқорида кўрсатилган усул билан ишлов бериш вақти

$$a_i + B_{n-k-1}(i_1, \ldots, i_k, i/t_i) \tag{4}$$

га тенгдир. I_k дан ҳар бир детални биринчи навбатда ишлов бериш учун танлаб олиб, (4) сонлар ичида минималини топамиз:

$$\min_{i \in I_k} \{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \ldots, i_k, i/t_i)\}. \tag{5}$$

Равшанки, (5) сон (1) сонга тенгдир:

$$B_{n-k}(i_1, \ldots, i_k/y) = \min_{i \in I_k} \{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \ldots, i_k, i/t_i)\} \tag{6}$$

Беллман тенгламаси олинди. Агар $k = n - 1$ деб олсак, яъни 1 дан i дан бошқа барча деталларни ажратиб олсак, (6) рекуррент тенглама учун

$$B_1(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n/y) =$$

$$= \begin{cases} a_i + b_i, & \text{агар } y \leqslant a_i \text{ бўлса;} \\ y + b_i, & \text{агар } y > a_i \text{ бўлса,} \end{cases} \tag{7}$$

бошланғич шартни оламиз.

(6) тенгламани (7) бошланғич шартда ечиб, деталларга ишлов беришнинг оптимал кетма-кетлигини қуриш мумкин. Лекин бу ҳолда масаланинг ечимини (6) тенгламани таҳлил қилибгина оламиз.

Агар $B_n(y)$ орқали иккинчи дастгоҳни деталларга биринчи дастгоҳда ишлов бериш бошлангандан y вақт бирлиги ўтгандан кейин ишга туширилганда, I дан олинган барча n та деталга ишлов бериш вақтини белгиласак, (6) дан $k = 0$, $k = 1$ бўлганда

$$B_n(y) = \min_{i \in I} \{a_i + B_{n-1}(i/t_i)\}, \tag{8}$$

$$B_{n-1}(i/t_i)=\min_{j\in I\setminus\{i\}}\{a_j+B_{n-2}(i,\ j/t_{ij})\}\qquad(9)$$

эканлигини оламиз, бу ерда (3) га кўра

$$t_{ij}=b_j+\max\{0,\ t_i-a_j\}.\qquad(10)$$

(9) ни (8) га келтириб қўямиз:

$$B_n(y)=\min_{i\in I}\min_{j\in I\setminus\{i\}}\{a_i+a_j+B_{n-2}(i,\ j/t_{ij})\}\qquad(11)$$

$a_i+a_j+B_{n-2}(i,j\mid t_{ij})$ сон I дан олинган деталларга ичида аввал i-деталга, сўнгра j-деталга ишлов берилиб, қолган деталларга оптимал кетма-кетликда ишлов берилгандаги вақтга тенгдир. Агар фақат i-ва j-деталларга ишлов бериш тартибини алмаштирсак, I дан олинган барча деталларга ишлов бериш вақти $a_i+a_j+B_{n-2}(i,\ j/t_{ji})$ га тенгдир, бу ерда

$$t_{ji}=b_i+\max\{0,\ t_j-a_i\}.\qquad(12)$$

Беллман функциясининг физик маъносидан келиб чиқадики, $B_{n-2}(i,\ j/y)$ функция y бўйича камаймайдиган функциядир (иккинчи дастгоҳни ишга туширишни кечиктириш деталларга ишлов беришнинг минимал вақтини қисқартира олмайди). Шунинг учун

$B_{n-2}(i,\ j/t_{ij})\leqslant B_{n-2}(i,\ j/t_{ji})$, агар $t_{ij}\leqslant t_{ji}$ бўлса;
$B_{n-2}(i,\ j/t_{ji})\leqslant B_{n-2}(i,\ j/t_{ij})$, агар $t_{ji}\leqslant t_{ij}$ бўлса,

тенгсизликлар бажарилади. Агар (11) да бу тенгсизликларни ҳисобга олсак, деталларни ишловга қўйишнинг оптимал кетма-кетлигида, агар $t_{ij}\leqslant t_{ji}$ бўлса, i-деталга j-деталдан олдин ишлов берилади, деган хулосага келамиз. $t_{ji}\leqslant t_{ij}$ бўлганда аввал j-деталга ишлов берилиши зарур. (10) дан $y=0$ бўлганда ушбуни оламиз:

$$t_{ij}=b_j+\max\{0,b_i+\max\{0,0-a_i\}-a_j\}=b_j+\max\{0,\ b_i-a_j\}=$$

$$=\begin{cases}b_j, & \text{агар } b_i\leqslant a_j \text{ бўлса;}\\ b_j+b_i-a_j, & \text{агар } b_i>a_j \text{ бўлса.}\end{cases}\qquad(13)$$

Шунга ўхшаш

$$t_{ji}=\begin{cases}b_i, & \text{агар } b_j\leqslant a_i \text{ бўлса;}\\ b_i+b_j-a_i, & \text{агар } b_j>a_i \text{ бўлса.}\end{cases}\qquad(14)$$

(13), (14) дан деталларни ишлов беришга қўйиш оптимал кетма-кетлигини қуришнинг содда алгоритми келиб чиқади. Берилганларни V.3-жадвалга ёзамиз. a_i, b_i элементлар орасида энг кичигини топамиз, у a_{i_0} элементдан иборат бўлсин:

$$a_{i_0} = \min_{j=\overline{1,n}} a_j \leqslant \min_{j=\overline{1,n}} b_j. \qquad (15)$$

Бу ҳолда

$$t_{i_0 j} \leqslant t_{j i_0}, \quad j=\overline{1,\ n} \qquad (16)$$

тенгсизликлар бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, (14) дан $t_{ji_0} = b_{i_0} + b_j - a_{i_0}$ эканлигини оламиз. У ҳолда (15) га асосан $t_{ji_0} \geqslant b_j$, $t_{ji_0} \geqslant b_{i_0} + b_j - a_j$ тенгсизликлар ўринли бўлади, булардан, (13) ни ҳисобга олсак, (16) тенгсизликлар келиб чиқади. (16) тенгсизликлар i_0-рақамли деталга биринчи навбатда ишлов берилиши лозимлигини кўрсатади.

V. 3-жадвалнинг a_i, b_i, $i=\overline{1,\ n}$ элементлари ичида b_{j_0} элемент минимал бўлсин, яъни

$$b_{j_0} = \min_{j=\overline{1,n}} b_j \leqslant \min_{j=\overline{1,n}} a_j. \qquad (17)$$

Бу ҳолда j_0 рақамли деталга охирги навбатда ишлов берилиши керак. Ҳақиқатан, (17) шартларда қуйидаги

$$t_{j_0 i} = b_i, \; t_{j_0 i} \geqslant b_{j_0}, \; t_{j_0 i} \geqslant b_{j_0} + b_i - a_{j_0} \qquad (18)$$

муносабатлар ўринлидир. (18) дан (13) ни ҳисобга олганда тасдиғимизнинг тўғри эканлигини кўрсатувчи

$$t_{ij_0} \leqslant t_{j_0 i}, \quad i=\overline{1,\ n}$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

V.3- жадвал

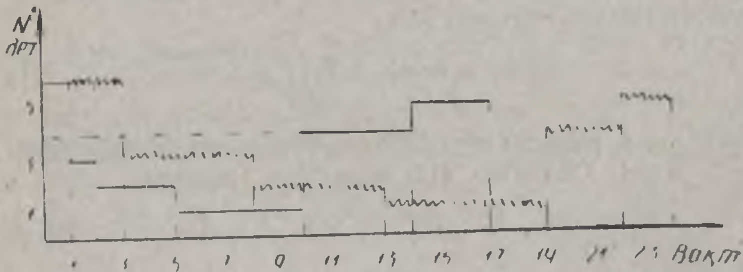
Деталлар №	1	2	...	i	...	n
№1 дастгоҳ	a_1	a_2	...	a_i	...	a_n
№2 дастгоҳ	b_1	b_2	...	b_i	...	b_n

V.4-жадвал

Деталлар №	1	2	3	4	5	6
№1 дастгоҳ	5	3	1	4	3	1
№2 дастгоҳ	6	5	5	3	2	2

Биринчи ва охирги навбатда ишлов бериладиган деталлар топилгандан кейин жадвалдан мос устун ўчирилади ва амаллар кам сонли деталлар билан давом эттирилади.

Изоҳ. Агар $a_{i_0} = b_{i_0}$ бўлса, ўчириб ташланмаган рақамли деталлар ичида i_0- деталга биринчи ёки охирги навбатда ишлов берилишининг фарқи йўқ. Унга доимо биринчи навбатда ишлов берилади деб ҳисоблаш мумкин.



V.1- чизма.

Маълумотлари V.4-жадвалда берилган сонли мисол учун оптимал кетма-кетлик қуйидагичадир: 6→3→2→1→4→5.

Деталларга ишлов бериш графиги V.1- чизмада тасвирланган бўлиб, унда абсциссалар ўқи бўйича вақт, ординаталар ўқида деталларнинг рақамлари қўйилган. Туташ кесмалар биринчи дастгоҳнинг иш интерваллари бўлиб, тўлқинсимон кесмалар иккинчи дастгоҳнинг иш интервалларидир.

3-§. ТЎРДА ЭНГ ҚИСҚА ЙЎЛНИ ҚУРИШ

Айтайлик, $S = \{I, U\}$ тўр бўлиб, унда фақат $(i, j) \in U$ ёйларнинг характеристикалари $c_{ij} \geqslant 0$, яъни i тугундан j тугунгача масофа берилган бўлсин. Белгиланган иккита s, $t \in I$ тугун учун s дан t гача минимал узунликка эга бўлган йўлни топиш талаб қилинади (s дан t га йўл деб, s дан t га бўлган шундай тўрга айтиладики, s дан t га ҳаракат қилганда унинг ёйлари тўғри чизиқлардир).

Бу масалани ўхшаш масалалар оиласига туркумлаймиз. Оиланинг умумий масаласи s тугундан ихтиёрий $j \in I$ тугунгача энг қисқа йўлни қуришдан иборатдир. B_j деб Беллман функциясини — s дан j гача энг қисқа йўл узунлигини белгилаймиз. B_j функция қаноатлантирадиган тенгламани тузишда s дан j гача йўл учун охирги ёйни ихтиёрий танлаб оламиз: $(i, j) \in U$ ва s дан $i \in I_j^-$ тугунга энг қисқа йўл топилган деб фараз қиламиз, бу ерда I_j^- — j билан $(i, j) \in U$ ёйлар ёрдамида туташтирилган $i \in I$ тугунлар тўпламидир. У ҳолда s дан j га бўлган йўлнинг узунлиги

$$B_i + c_{ij} \tag{1}$$

га тенг бўлади. $i \in I_j^-$ тугунларни саралаб, (1) сонлар ичида минималини топамиз.

$$\min_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \tag{2}$$

Равшанки, (2) s дан j га бўлган энг қисқа йўлнинг узунлигидир. Аниқланишига кўра Беллман функцияси B_j га тенг бўлганлигидан B_j учун қуйидаги Беллман тенгламаси олинади:

$$B_j = \min_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \tag{3}$$

(3) тенглама учун чегаравий шарт

$$B_s = 0 \tag{4}$$

кўринишга эга бўлади ва B_j функциянинг ўз-ўзидан равшан хоссасини ифодалайди.

Олдинги параграфлардан фарқли ўлароқ, (3) Беллман тенгламаси рекуррент эмас. I^* деб $i \in I$ тугунларнинг шундай тўпламини белгилаймизки, улар учун Беллман функциясининг B_i қиймати маълум бўлсин. $I^* \neq \varnothing$, чунки (4) га асосан $s \in I^*$. Агар $t \in I^*$ бўлса, масала ечилган бўлади: B_t — c дан t га бўлган энг қисқа йўлнинг узунлигидир.

Айтайлик, $t \overline{\in} I^*$ бўлсин. S тўрда I^*, $s \in I^*$, $t \overline{\in} I^*$ тўплам бўйича $U(I^*) = \{(i, j) \in U : i \in I^*, j \overline{\in} I^*\}$ кесим қурамиз. $U(I^*) \neq \varnothing$ деб фараз қилайлик. Равшанки, S тугундан

$k \overline{\in} I^*$ тугунгача бўлган ҳар бир йўл ҳеч бўлмаганда $U(I^*)$ дан олинган битта ёйни ўз ичига олади. Демак, $c_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U$ бўлганлигидан ҳар бир $k \overline{\in} I^*$ тугун учун,

$$B_k \geqslant \min_{(i, j) \in U(I^*)} (B_i + c_{ij}) = B_{i^*} + c_{i^* j}, \quad k \overline{\in} I^* \tag{5}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (i_*, j_*) — кесимнинг ёйи бўлганлигидан $i_* \in I^*$, $j_* \overline{\in} I^*$. (5) да $k = j_*$ деб оламиз. У ҳолда (3) га асосан

$$B_{j^*} = B_{i^*} + c_{i^* j^*}$$

эканлигини оламиз. j_* тугунни I^* тўпламга қўшамиз ва ечишни давом эттирамиз. Чекли сондаги қадамлардан сўнг B_t ни топамиз, ёки $U(I^*) = \varnothing$ бўлган I^* тўпламни қурамиз. Иккинчи ҳол S тўрда s дан t га йўллар йўқ эканлигини англатади. Беллман тенгламасини ечишниг юқорида баён қилинган тарҳини S тўрда *белгилар усули* ёрдамида амалга ошириш мумкин. I^* орқали Беллман функциясининг қийматлари маълум бўлган тугунлар тўпламини ва $\omega(I^*) = \{j \in I: (i, j) \in U(I^*)\}$ орқали I^* тўплам билан қўшни тугунлар тўпламини белгилаймиз. Агар $\omega(I^*) = \varnothing$ бўлса, S тўрда s дан t га йўл мавжуд эмас. $\omega(I^*) = \varnothing$ бўлсин. B'_j сонларни (I^* билан қўшни j *тугунларнинг вақтинча белгиларини*) ҳисоблаймиз:

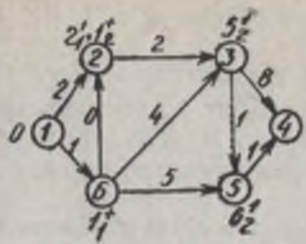
$$B'_j = \min_{i \in I^* \cap I^-(j)} (B_i + c_{ij}), \quad j \in \omega(I^*) \tag{6}$$

ва улар орасида минималини топамиз:

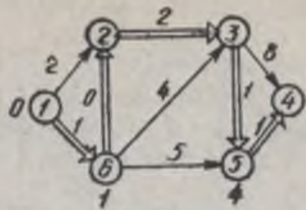
$$B'_{j^*} = \min B'_j, \quad j \in \omega(I^*).$$

$j_* \overline{\in} I^*$ тугун учун Беллман функциясининг B_{j^*} қиймати B'_{j^*} га тенгдир.

j_* тугунни I^* тўпламга қўшамиз ва амалларни такрорлаймиз. B_j, $j \in I^*$ сонлар *тугунларнинг ўзгармас белгилари* деб аталади. Ҳар бир итерацияда ўзгармас белгилар тўплами ортиб боради. Чекли сондаги итерциялардан сўнг t тугун ё ўзгармас B_t белгини олади ёки уни олмайди ва $\omega(I^*) = \varnothing$. Иккинчи ҳол s дан t га йўлнинг йўқлигини билдиради. Биринчи ҳолда B_t — s дан t гача энг қисқа йўлнинг узунлигидир. Энг қисқа йўлни (3) га асосан ўзгармас белгилар бўйича қуриш мумкин. B_t белги бўйича B_{i_1} белгини шундай



V.2- чизма.



V.3- чизма.

топамизки, $B_t = c_{i_1 t} + B_{i_1}$ бўлсин. B_{i_1} билан ҳам шунга ўхшаш иш кўрамиз: $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$ ва ҳ. к.

Усулни намойиш қилиш учун V.2- чизмада тасвирланган тўрнинг 1 тугунидан 4 тугунигача энг қисқа йўлни топамиз. Тўрнинг ёйлари устида уларнинг C'_{ij} узунликлари келтирилган. Биринчи итерацияда фақат битта 1 тугун ўзгармас 0 белгига эга бўлди, 1 тугун билан 2, 6 тугунлар қўшни бўлади. Улар учун вақтинча белгиларни (6) формула бўйича ҳисоблаймиз ва натижаларни тугунлар атрофига штрихлар ва итерациянинг (пастки) номерини кўрсатувчи «1» индекс билан таъминлаб, ёзамиз. Минимал вақтинча белги 6 тугунга тегишли бўлади. Тугуннинг белгисини ўзгармас қиламиз, яъни штрихни ўчирамиз. $I^* = \{1, 6\}$ билан қўшни $\{2, 3, 5\}$ тугунлар учун (6) формула ёрдамида вақтинча белгиларни ҳисоблаймиз (V.2- чизмада вақтинча белгилар қуйи «2» индексга эгадир). Барча вақтинча белгили тугунлар ичида минимал 1 белгига эга бўлган 2 тугунни топамиз. Бу белгини ўзгармас қиламиз. V.3- чизмада тугунларнинг ўзгармас белгилари қўйиб чиқилган ва 1 тугундан 4 тугунгача энг қисқа йўл тасвирланган.

4- §. МАКСИМАЛ ОҚИМ ҲАҚИДАГИ МАСАЛА

Максимал оқим ҳақидаги (II боб, 3- § га қ.) ушбу

$$v^0 = \max_{x,\, v} v, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ij} =$$

$$= \begin{cases} v, \text{ агар } i = s \text{ бўлса}, \\ -v, \text{ агар } i = t, \ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } i \in I^0, \ (i, j) \in U \text{ бўлса}, \end{cases}$$

масалани манбаси s ва қуйилиши t бўлган $S=\{I, U\}$, $I = I^0 \cup s \cup t$ тўрда ечамиз.

Айтайлик, $x=\{x_{ij}, (i, j)\in U\}$ тўрдаги бирор оқим бўлсин. Агар тўр бўйлаб s дан t га ҳаракат қилинганда тўғри ёй бўйлаб $x_{ij}<d_{ij}$ бўлса, тескари (i, j) ёйда эса $x_{ij}>0$ бўлса, s дан t гача занжир x *оқимни орттирувчи йўл* деб аталади.

Ушбу тасдиқ ўринли: x оқим фақат S тўрда x^0 оқимни орттирувчи йўллар мавжуд бўлмаганда ва фақат шундагина максимал бўлади.

Шундай қилиб, максимал оқимни қуришни оқимни орттирувчи йўллар қуриш ҳақидаги қатор масалаларга келтириш мумкин.

S тўрни янги $S(x)=\{I, U(x)\}$ тўр билан қуйидагича алмаштирамиз. $(i, j)\in U$ ёйни иккита ёй билан алмаштирамиз*: агар $0<x_{ij}<d_{ij}$ бўлса, $(i, j)\in U(x)$, $(j, i)\in U(x)$; агар $x_{ij}=d_{ij}$ бўлса, $(j, i)\in U(x)$ ёйга ва агар $x_{ij}=0$ бўлса, уни ўзгаришсиз қолдирамиз. Равшанки, x оқимли S тўрда шу оқимни орттирувчи йўл фақат S тўрда s дан t га йўл мавжуд бўлгандагина ва фақат шундагина мавжуд бўлади. Ҳар бир $(i, j)\in U(x)$ ёйга $c_{ij}=1$ узунликни мос қилиб қўямиз ва s дан t га бўлган йўллар ичида энг қисқасини излаймиз. Бундай масалани ечиш усули 3-§ да баён қилинган. $S(x)$ даги энг қисқа йўл минимал сондаги ёйлардан иборат бўлиши тушунарлидир. Унга S тўрда x оқимни орттирувчи йўл тўғри келади. Бу йўл бўйлаб оқимни орттиришни ё бирор тўғри ёй тўйдирилган бўлгунча $(x_{ij}=d_{ij})$ ёки бирор тескари ёй озод бўлиб қолгунча $(x_{ij}=0)$ давом эттирамиз. Янги оқим учун $S(\bar{x})$ тўрни қурамиз ва амалларни такрорлаймиз.

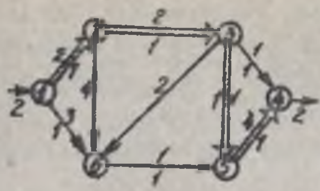
Агар x_{ij}, d_{ij}, $(i, j)\in U$ — бутун сонлар бўлса, ҳар бир итерацияда оқимнинг миқдори бутун сонга ортади ва шунинг учун чекли сондаги итерациялардан сўнг бошланғич ноль $x=0$ оқимдан S тўр орқали максимал оқим қурилади.

Изоҳлар. 1. $S(x)$ тўрда барча $(i, j)\in U(x)$ ёйлар бир хил узунликка эга бўлганлигидан s дан t га энг қисқа йўлларни қуришнинг 3-§ да баён қилинган алгоритми соддалашади: барча $j\in\omega(I^*)$ тугунларнинг вақтинча белгиларини бир йўла ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин.

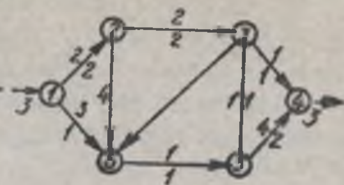
2. Келтирилган алгоритмни S тўрда $S(x)$ га ўтмасдан тўлиқ амалга ошириш машқ сифатида тавсия қилинади.

---

* Бу ёйларнинг жуфти йўналтирилмаган $[i, j]$ ёйни ҳосил қилади.



V.4- чизма.



V.5- чизма.

Усулни намойиш қилиш учун V.4-чизмада тасвирланган тўрнинг *1* тугунидан *4* тугунигача бўлган максимал оқимни тузамиз. Ҳар бир ёйнинг устида унинг ўтказиш қобилияти ёзилган. Белгилар усули билан *1* тугундан *4* тугунга энг қисқа йўлни топамиз. V.4-чизмада тасвирланган $S_{(6)}$ тўр учун иккита энг қисқа йўлни қуриш мумкин: {1, 2, 3, 4}, {1, 6, 5, 4}. Ёйларнинг биринчи йўл бўйлаб минимал ўтказиш қобилияти $d_{34} = 1$, иккинчи йўл бўйича эса $d_{65} = 1$ бўлганлигидан бошланғич ноль оқимни 2 миқдорга орттириш мумкин. V.4-чизмада биринчи итерациядан сўнг олинган оқимли бошланғич тўрдаги энг қисқа йўл иккиланган чизиқлар билан белгиланган (ёй оқимлари ёйлар тагига ёзилган). Янги йўл бўйлаб 1 миқдордаги оқимни ўтказамиз. Бундан сўнг тўрда (V.5-чизма) оқимни орттирувчи йўлларни қуриш мумкин эмас. Шундай қилиб, V.5-чизмадаги оқим қиймати 3 га тенг бўлган максимал оқимдир.

5- §. ТЎРЛИ РЕЖАЛАШТИРИШНИНГ БИР МАСАЛАСИ

Тўрли режалаштиришда маълум технологик кетма-кетликда бажарилиши керак бўлган кўп сондаги алоҳида ишлардан ташкил топган ва мураккаб лойиҳаларнинг ишлар комплексининг амалга оширилиш муаммолари текширилади. Тўрли режалаштиришнинг асосий масалаларидан бири лойиҳанинг бажарилиш вақтини ҳисоблашдир.

Масаланинг тўрли моделини тузамиз. Лойиҳанинг ишлари мажмуидан олинган бирор ишлар тўпламининг бошланиши ёки тамом бўлиши фактини *ҳодиса* деб атаймиз ва унга $i \in I$ тугунни мос қўямиз. $i \in I$ ҳодиса билан бошланадиган ва $j \in I$ ҳодиса билан тугалланадиган ишни $(i, j) \in U$ ёй билан белгилаймиз. Агар барча $(k, i) \in U$, $k \in I_{\bar{i}}$ ишлар тугалланмаган бўлса, бирорта ҳам $(i, j) \in U$ иш бошланиши мумкин эмас. $S = \{I, U\}$ тўрда иккита тугун ажратилади: S — *бошланғич ҳодиса* (лойиҳа бажарилишининг бошланиши) ва t — *охирги ҳодиса* (лойиҳанинг тугалланиши). $I_s^- = \varnothing$, $I_t^+ = \varnothing$. Ҳар бир $(i, j) \in U$ ёйга битта $c_{ij} > 0$ характеристика — (i, j) *ишнинг бажарилиш вақти* мос қўйилади. x_i, $i \in I$ — i ҳодисанинг рўй бериш вақти бўлсин: $x_s = 0$. Лойиҳада мавжуд ва тўрнинг тузилишида акс эттирилган технологик талаблардан,

$$x_i + c_{ij} \leqslant x_j, \ i, \ j \in I, \ (i, \ j) \in U \tag{1}$$

ни, яъни j ҳодиса x_i моментда бошланган барча $(i, j) \in U$ ишлар тугалланмасдан олдин рўй бермаслигини ифодаловчи тенгсизликларни оламиз. (1) тенгсизликдан S тўрда контурларнинг йўқлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, тескарисини фараз қилиб, (2) тенгсизликларни U_* контурнинг ёйлари бўйича йиғсак, $C_{ij} > 0$, $(i, j) \in U$ тенгсизликларга қарама-қарши

$$\sum_{(i, j) \in U*} c_{ij} \leqslant 0$$

тенгсизликни оламиз.

Бундан буён $i \in I \setminus (S \cup t)$ тугунлар учун $I_i^+ \neq \varnothing$, $I_i^- \neq \neq \varnothing$ шартлар бажарилган деб фараз қиламиз.

Лойиҳа бажарилишининг минимал вақти энг кичик x_t^0 сондан иборат бўлиб, у x_i, $i \in I$, $i \neq t$, $x_s = 0$ сонлар билан бирга (1) тенгсизликларни қаноатлантиради.

Лойиҳанинг тамомланиши учун барча ишлар тугалланиши зарурлигидан s дан t га бўлган ҳар бир йўлнинг узунлиги йўл бўйлаб ҳисобланган $\sum c_{ij}$ йиғиндига тенг бўлиб, x_t^0 дан кам эмас (бунга ишонч ҳосил қилиш учун (1) ни йўл бўйлаб қўшиш керак). Иккинчи томондан, равшанки S дан t га йўлни ташкил қилувчи шундай ишлар кетма-кетлиги топиладики, уларнинг умумий давом этиши x_t^0 га тенг бўлади. Шундай қилиб, x_t^0 ни ҳисоблаш масаласи максимал $\sum C_{ij}$ узунликдаги s дан t га йўлни топишга келтирилади. Бундай йўлни *критик* йўл деб аташ қабул қилинган.

$S = \{I, U\}$ тўрда критик йўлни қуриш учун динамик программалаштиришдан фойдаланамиз. Усулнинг умумий тарҳига асосан (1-§) биринчи босқичда (инвариант туркумлаш) бошланғич масалани ўхшаш масалалар оиласига киритамиз. Оиланинг умумий масаласи s тугундан ихтиёрий (белгиланган t эмас) $j \in I$ тугунга критик йўлни қуришдан иборатдир. Бу йўлнинг B_j узунлиги Беллман функцияси деб аталади.

B_j функция қаноатлантирадиган тенгламани (Беллман тенгламасини) тузиш учун 3-§ даги энг қисқа йўлни қуришдагидек мулоҳаза қиламиз. Дастлаб йўлнинг s дан j га охирги ёйни ихтиёрий танлаб оламиз: $(i, j) \in U$. S дан j га йўлнинг қолган s дан i га йўлни ташкил қилувчи ёйларини шундай танлаб оламизки, s дан i га йўлнинг узунлиги максимал бўлсин, яъни B_i га тенг бўлсин. У ҳолда s дан i га бутун йўлнинг узунлиги

$$C_{ij} + B_i \tag{2}$$

га тенг бўлади.

Тўрнинг j билан U дан олинган ёйлар ёрдамида туташтирилган барча i тугунларини саралаб (бундай тугунлар тўплами I_j^- билан белгиланади), (2) сонлар ичида максималини топамиз:

$$\max_{i \in I_j^-} (C_{ij} + B_i). \tag{3}$$

Тескарисини фараз қилиш йўли билан осонгина кўрсатиш мумкинки, (3) сон s дан j га йўлнинг максимал узунлигига тенг. Иккинчи томондан, Беллман функциясининг аниқланиши бўйича s дан j га йўлнинг максимал узунлиги B_j га тенг бўлганлигидан, қаралаётган масалада қуйидаги Беллман тенгламаси ҳосил бўлади:

$$B_j = \max_{i \in I_j^-} (C_{ij} + B_i). \tag{4}$$

Беллман функциясининг s тугун учун қиймати маълум:

$$B_s = 0. \tag{5}$$

(5) тенглик (4) тенглама учун чегаравий шартдан иборатдир. Беллман тенгламасини ечиш учун белгилар усулини ишлаб чиқамиз. I^* деб Беллман функциясининг B_i қийматлари маълум бўлган $i \in I$ тугунлар тўпламини белгилаймиз. I^* тўплам бўш эмас, чунки (5) га асосан $s \in I^*$. Агар $t \in I^*$ бўлса масала ҳал, B_t — S дан t га максимал йўлнинг узунлигидир.

V.6- чизма.

Айтайлик, $t \notin I^*$ бўлсин. S тўрда I^* билан қўшни бўлган $\omega(I^*) = \{j \in I : (i, j) \in U, j \notin I^*, i \in I^*\}$ тугунлар тўпламини ota-ona qanchalik aziz bo‘lsa, ham shunchalik mo‘tabardir. — ona tuproqdan boshlanadi. ga muhabbat shu tuproqqa — diyorimizga, uning bepoyon riga, qir-adirlariga, moviy tog‘- dasht-u sahrolariga bo‘lgan bbatdir.

lar:

an degani nima ekan?
on uchun eng aziz narsa nima?
anga muhabbat nimadan bosh-adi?

:

Bulbul chamanni sevar,
dam — Vatanni.

ytish:

omil kecha ko‘chat ko‘chirdi.

Boshqotirma

Qator katakchalarini unli qo‘yib to‘ldirsangiz, kitobi shu bo‘limiga oid gap kelib

			1		l		g‘	b		k
		2	t		g‘		l	g		n
3		z	b		k		s	t	
		4	b		y		k	l		r
			5	V		t		n	

1. Munajjim bobomiz. 2. Duny lishni bildiruvchi so‘z. 3. V nomi. 4 va 5. Ikkinchi dars m

Rebus

«Oy allasi» she’ri asosida yeching.

  ~~y~~  m ~~t~~

 + si —  .

«Qish» she'ridagi so'zlardan foydalanib katakchalarni to'ldiring.

		q		sh		
	p		y		a	
ch		n		l		r
	b		r		n	
		q		r		

Savol va topshiriqlar:

1. Buyuk ajdodlarimiz haqida nimalarni bilib oldingiz?
2. «Vatan — bu...» she'rini yoddan aytib bering.
3. Shoir «Ota rozi — Vatan rozi» deganda nimani nazarda tutgan?
4. Qishda diyorimiz tabiatida qanday o'zgarishlar bo'ladi?
5. Charxpalak qanday vazifani bajaradi?

Amir

Amir Temur bob
ga asos solgan. O
ton diyorini butun
«Kuch — adolatc
uzugida hamisha y
Bobomiz millat,
hamma narsadan
«Olamni adl va
etibmen», — dega
ilm-fan homiysi v
bo'lgan. Zukko va
Temur betakror si

yaxshiligini ayamas.

- Yaxshilikni bilmasang, yaxshilarga qo'shil.

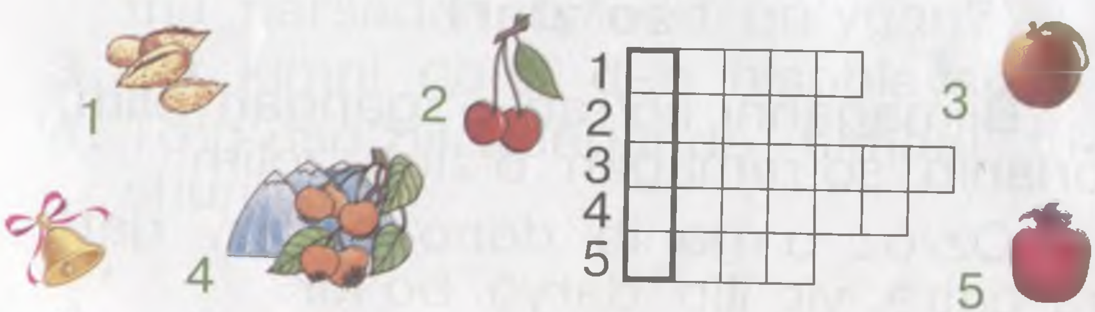
Savol va topshiriqlar:

1. Alisher Navoiy haqida nimalarni bilib oldingiz?
2. Alisher Navoiy aytgan hikmatli so'zlarni yod oling.
3. O'zingiz bilgan hikmatli so'zlarni ayting.

Boshqotirma

Quyida berilgan mevalar rasmidan foydalanib boshqotirmani yechsangiz, maqolning davomini o'qiysiz.

Aql yoshda emas — ...



Alisherning

Kiyik Alisherni h
surkaldi.

— Seni tanir ekar
o'rgatibsan o'zingga
dan biri.

— Rost, qoyilma
qulladi ikkinchi bola

— Tog'am, erm
dashtdan olib kel
mo', birpasgina jim
ni erkalab Alisher.

yaxshiligini ayamas.

• Yaxshilikni bilmasang, yaxshilarga qo'shil.

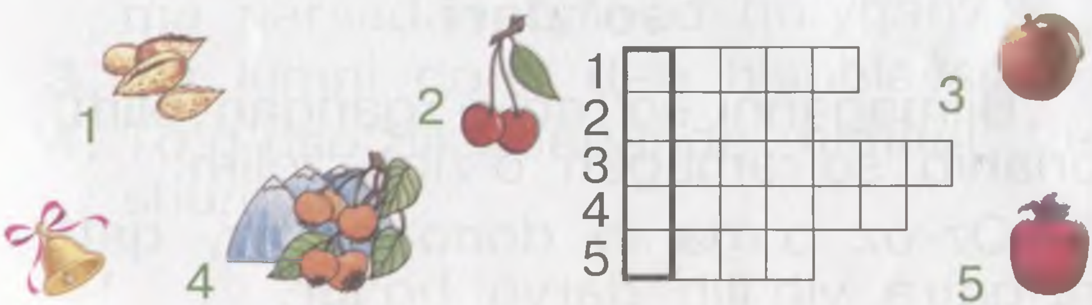
Savol va topshiriqlar:

1. Alisher Navoiy haqida nimalarni bilib oldingiz?
2. Alisher Navoiy aytgan hikmatli so'zlarni yod oling.
3. O'zingiz bilgan hikmatli so'zlarni ayting.

Boshqotirma

Quyida berilgan mevalar rasmidan foydalanib boshqotirmani yechsangiz, maqolning davomini o'qiysiz.

Aql yoshda emas — ...



Alisherning yoshligi

C

Kiyik Alisherni hidladi. Erka surkaldi.

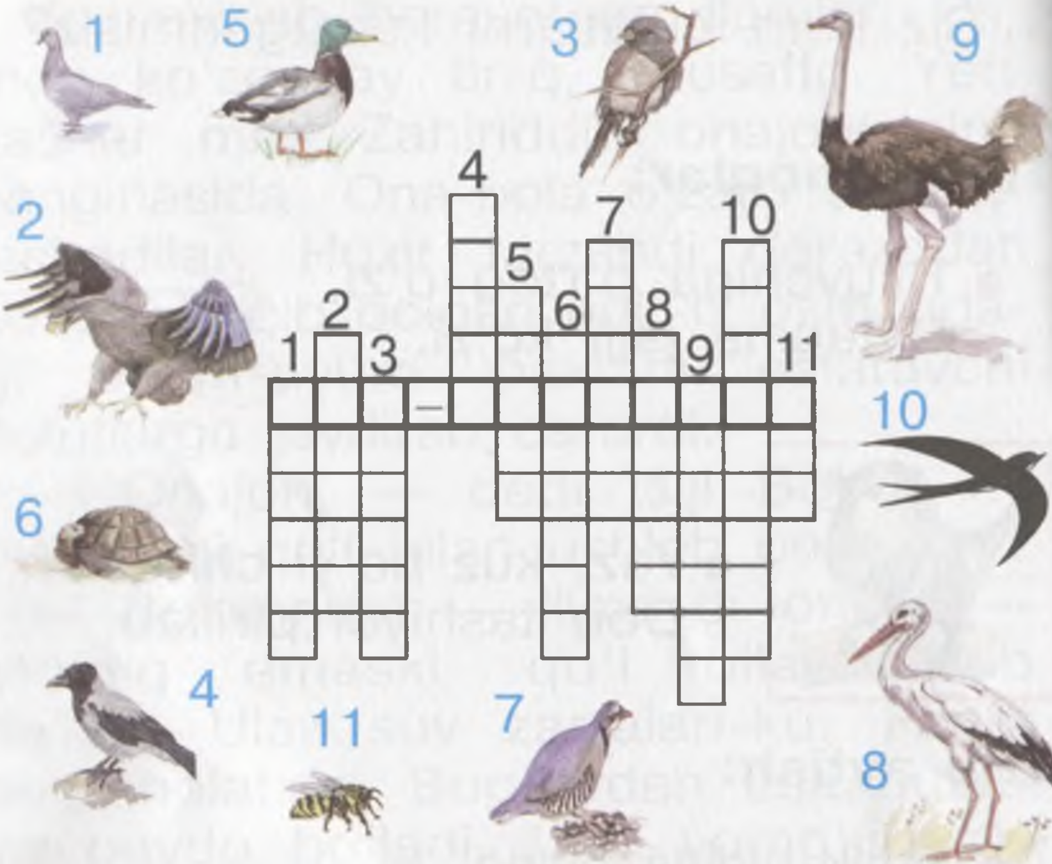
— Seni tanir ekan, qurmagur, o‘rgatibsan o‘zingga, — dedi bo dan biri.

— Rost, qoyilman! — deya qulladi ikkinchi bola.

— Tog‘am, ermak bo‘lsin, dashtdan olib kelgan edilar. mo‘, birpasgina jim tur, — dedi ni erkalab Alisher.

Boshqotirma

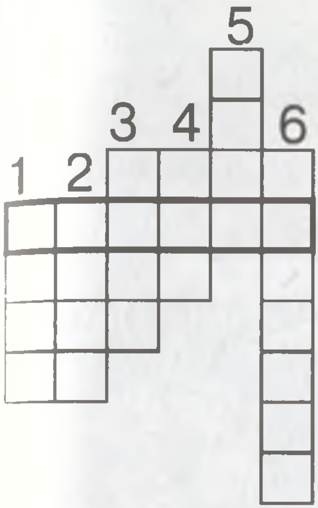
Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, Amir Temur amal qilgan hikmatli gap kelib chiqadi.



Savol:

Darslikdagi qaysi matnda yuqoridagi hikmatli gap aytilgan?

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsa...
«alloma» so‘zi kelib chiqadi.

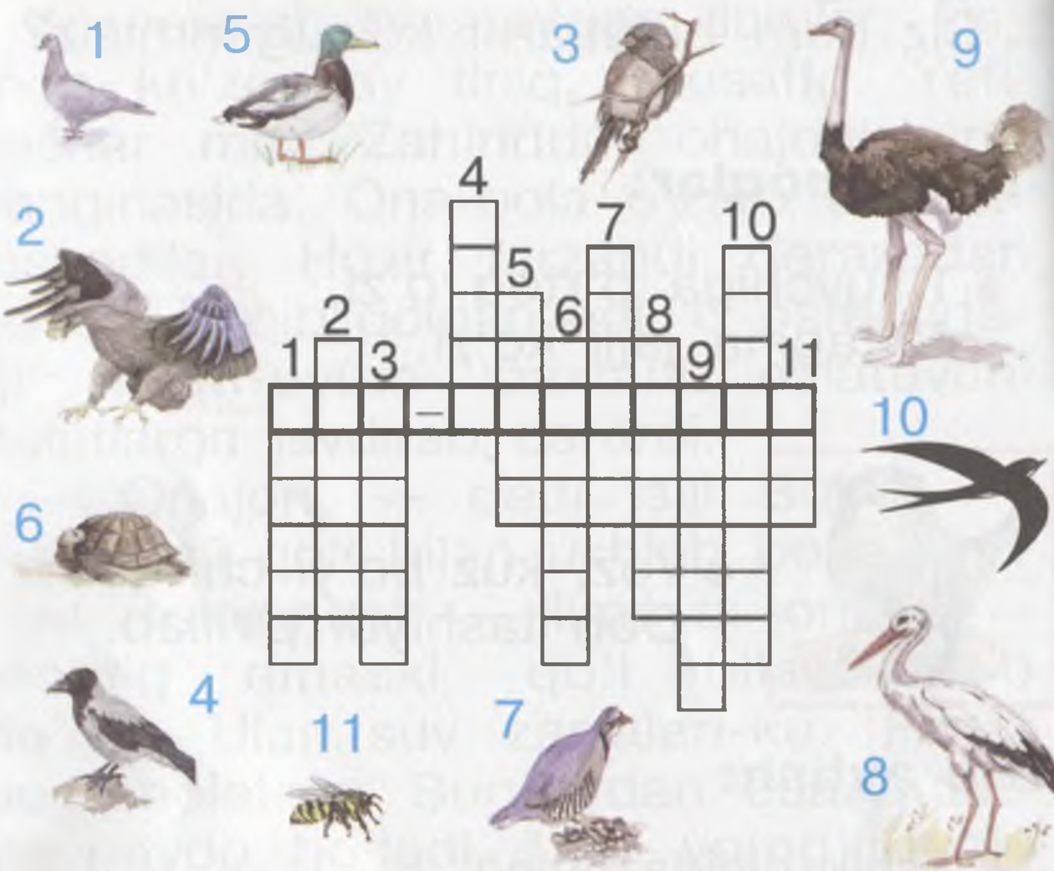


Savol va topshiriqlar:

1. Bu bo‘limda kimlar haqida o‘q
2. Amir Temur o‘gitlarini ayting.
3. Amir Temur bobomizning uzu
   qanday so‘zlar yozilgan ekan?
4. Alisher Navoiy haqida nima
   bilib oldingiz?
5. Ibn Sino nimalarga qiziqqan e
6. Ulug‘bek bobomiz kim bo‘lga
7. Bobur onasidan qanday sabo
   oldi?

Boshqotirma

Katakchalarni to'g'ri to'ldirsangiz, Amir Temur amal qilgan hikmatli gap kelib chiqadi.

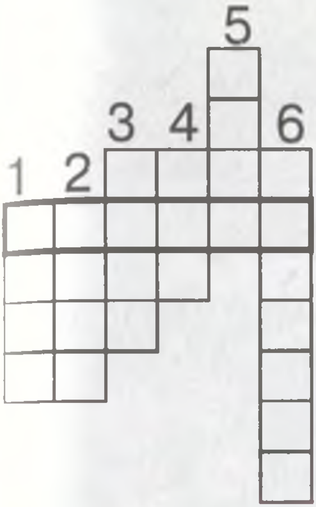


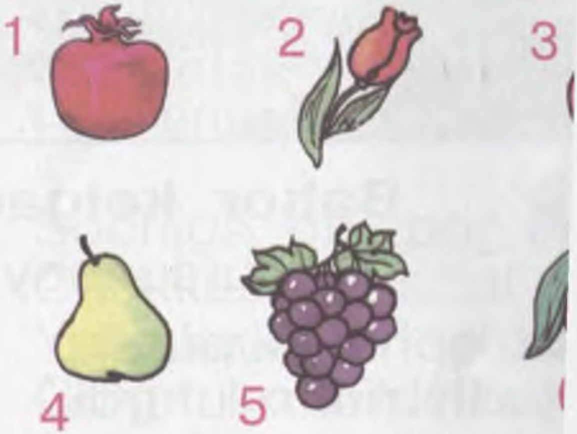
Savol:

Darslikdagi qaysi matnda yuqoridagi hikmatli gap aytilgan?

Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsar «alloma» so‘zi kelib chiqadi.





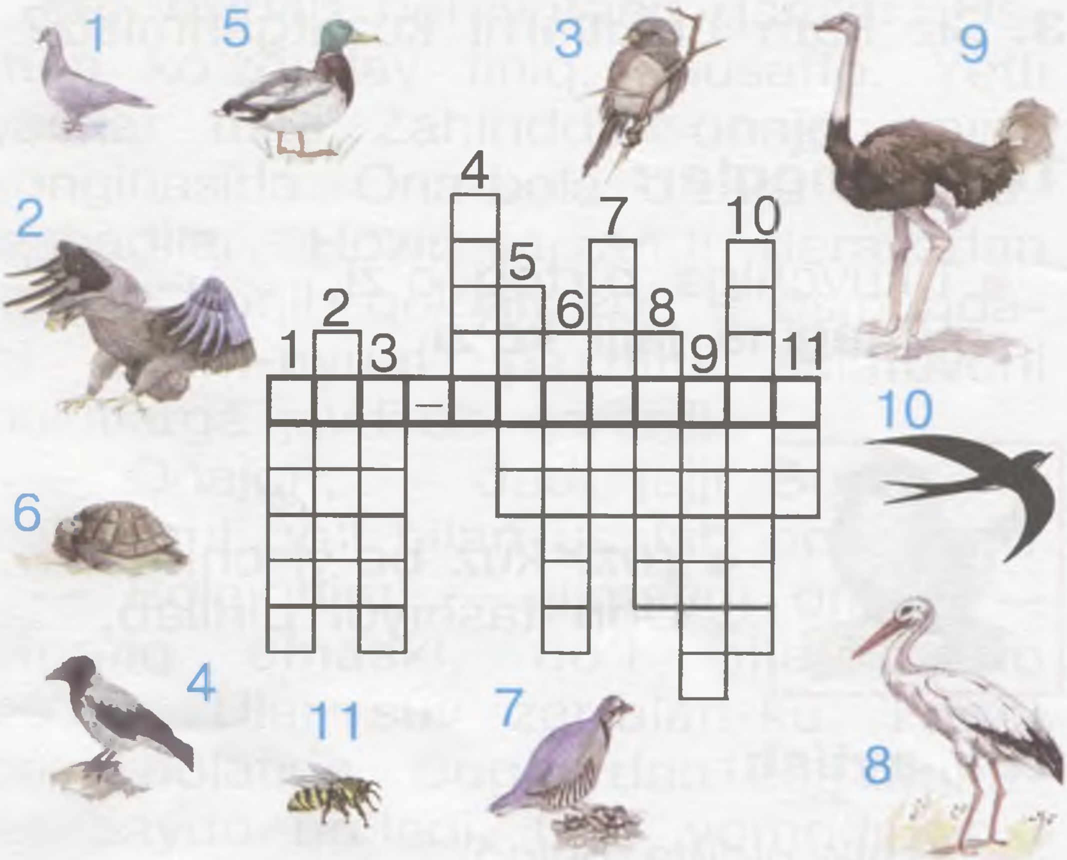
Savol va topshiriqlar:

1. Bu bo‘limda kimlar haqida o‘c
2. Amir Temur o‘gitlarini ayting.
3. Amir Temur bobomizning uzı qanday so‘zlar yozilgan ekan‘
4. Alisher Navoiy haqida nima bilib oldingiz?
5. Ibn Sino nimalarga qiziqqan e
6. Ulug‘bek bobomiz kim bo‘lga
7. Bobur onasidan qanday sabo oldi?

BO'LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

Boshqotirma

Katakchalarni to'g'ri to'ldirsangiz, Amir Temur amal qilgan hikmatli gap kelib chiqadi.



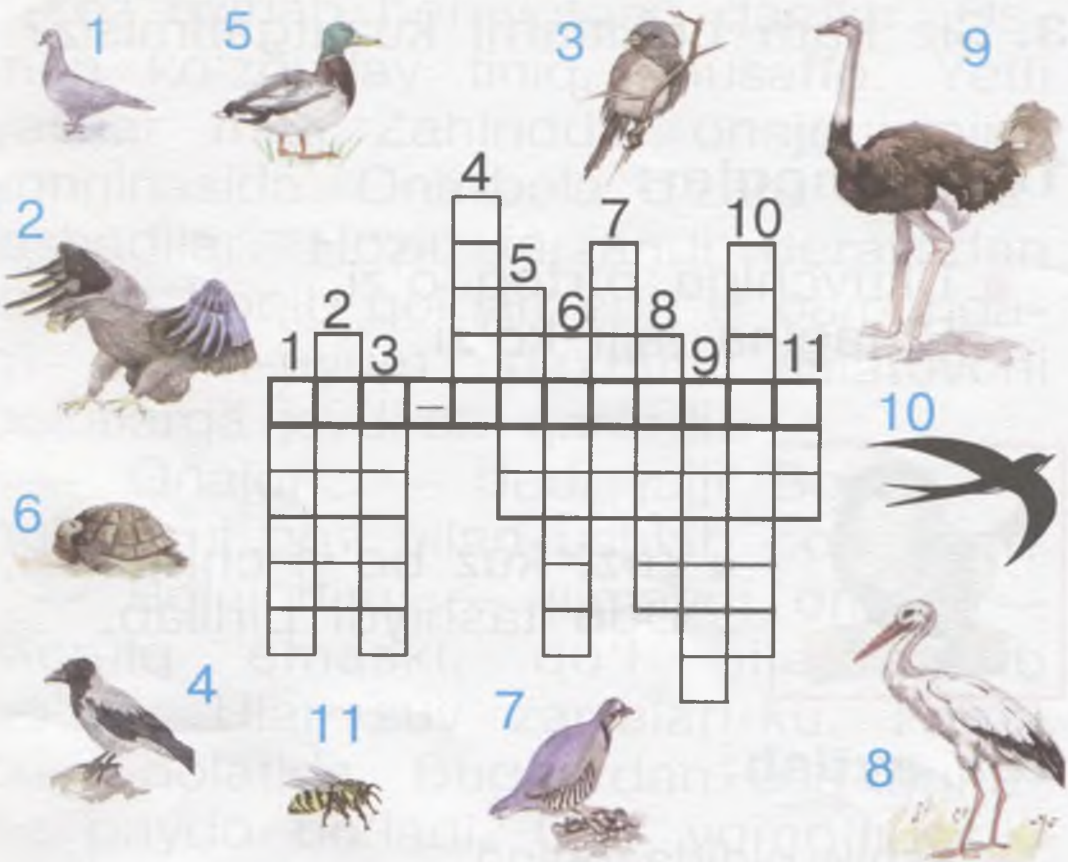
Savol:

Darslikdagi qaysi matnda yuqoridagi hikmatli gap aytilgan?

BO‘LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, Amir Temur amal qilgan hikmatli gap kelib chiqadi.

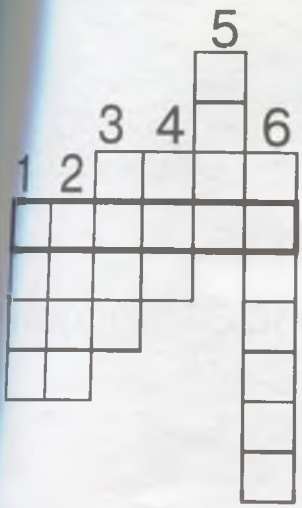


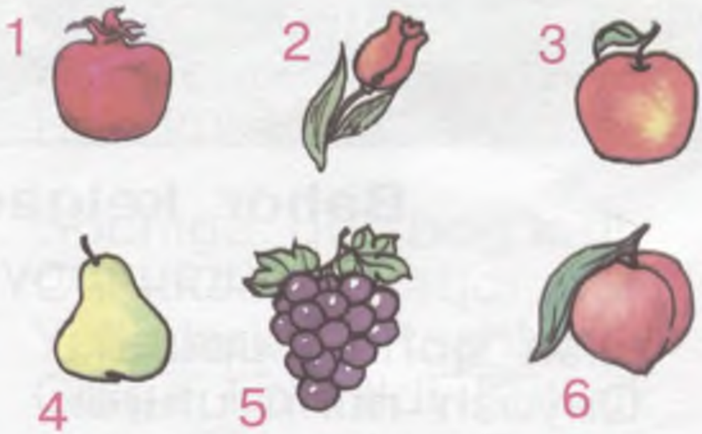
Savol:

Darslikdagi qaysi matnda yuqoridagi hikmatli gap aytilgan?

Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, «alloma» so‘zi kelib chiqadi.

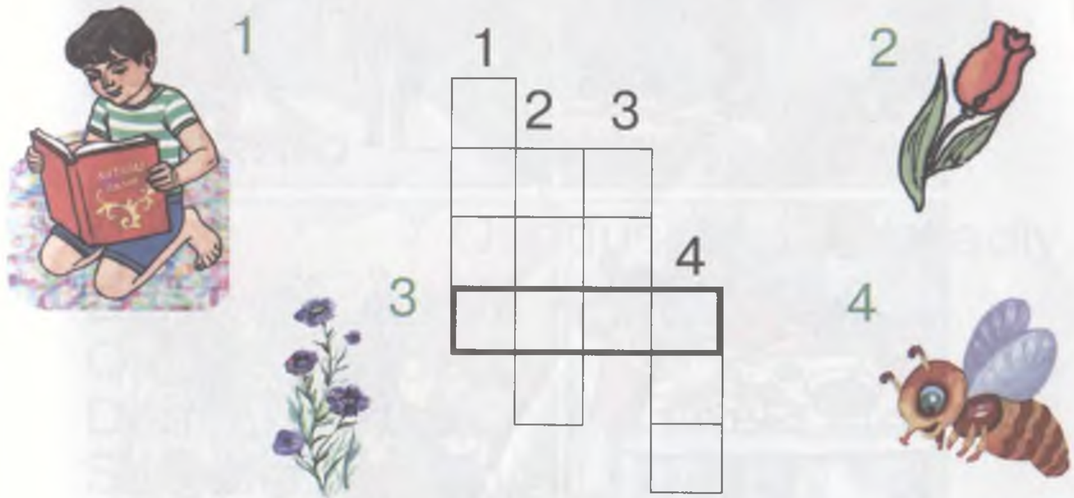




Savol va topshiriqlar:

1. Bu bo‘limda kimlar haqida o‘qidik?
2. Amir Temur o‘gitlarini ayting.
3. Amir Temur bobomizning uzugida qanday so‘zlar yozilgan ekan?
4. Alisher Navoiy haqida nimalarni bilib oldingiz?
5. Ibn Sino nimalarga qiziqqan ekan?
6. Ulug‘bek bobomiz kim bo‘lgan?
7. Bobur onasidan qanday saboq oldi?

Kataklarni to'g'ri to'ldirsangiz,
«alla» so'zi kelib chiqadi.



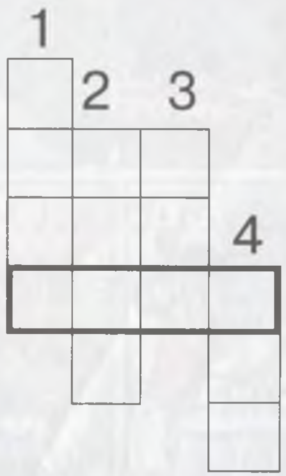
Bahor gullarining nomini ayting.

BO‘LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, «alla» so‘zi kelib chiqadi.

1

2


3


4


Bahor gullarining nomini ayting.

1



2

3



4

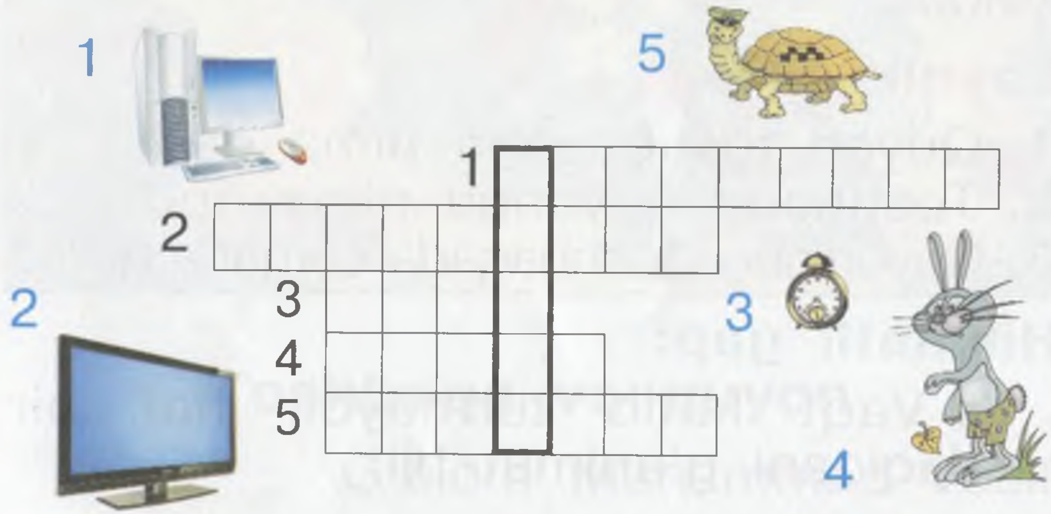

5


6

BO‘LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

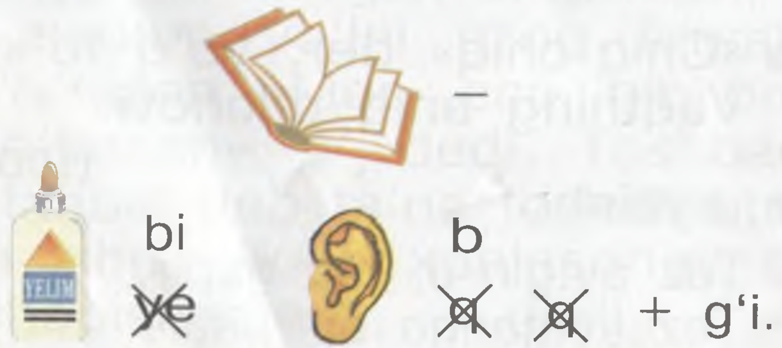
Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, ilm manbayiga oid so‘z kelib chiqadi:



Rebus

Rebusni yechsangiz, kitob haqidagi hikmatli gap kelib chiqadi:



nib ke-
U ko'-
yurgan
i.
an? —
qidirib
Afandi.
li
eshi-
di. Bir
di:
ay.
Qo'-
man.
t?

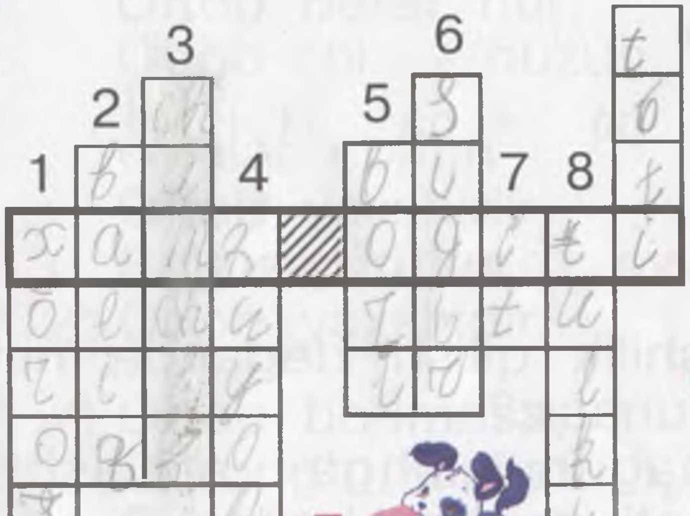
Boshqotirma

Katakchalarni to'g'ri to'ldirsangiz, quyida berilgan maqolni bilib olasiz.

1


2


3

4


9


7


5


6

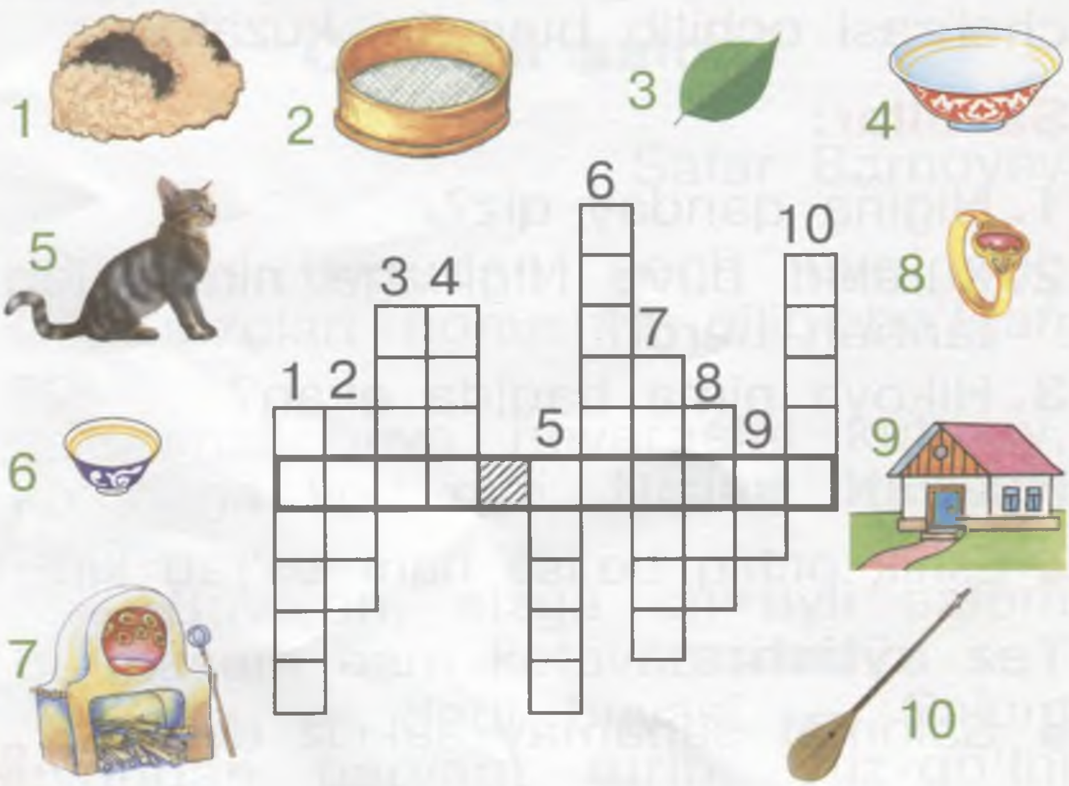

8


... — baxt kaliti.

BO‘LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

Boshqotirma

Katakchalarni to‘g‘ri to‘ldirsangiz, hikmatli gapning davomi kelib chiqadi:



Odobli bola ...

nim ishlab holdan toygan yurak dam olmoqchi bo'lib to'xtab- hu payt qo'l bo'shashib ikki ıga shalpayib tushibdi. Oyoq- biri ikkinchisiga chirmashib ıay qolibdi. Shilq etib bosh yelkaga tashlabdi.

ık: «Yo'q, bir zum to'xtashga n yo'q ekan», — debdi-da, ishlay boshlabdi. Keyin qo'l, va boshga qarab:

Ieni ehtiyot qilishlaring kerakka ıydi. Men to'xtasam, sizlarga oo'lar ekan, — debdi kamtarlik

l:

lmaganni bildim dema,
lmaganni qildim dema.

lar:

l nima dedi?
oq nega yer tepindi?
sh nega hammadan zo'rman li?
ak nima qildi?

BO'LIM YUZASIDAN TAKRORLASH

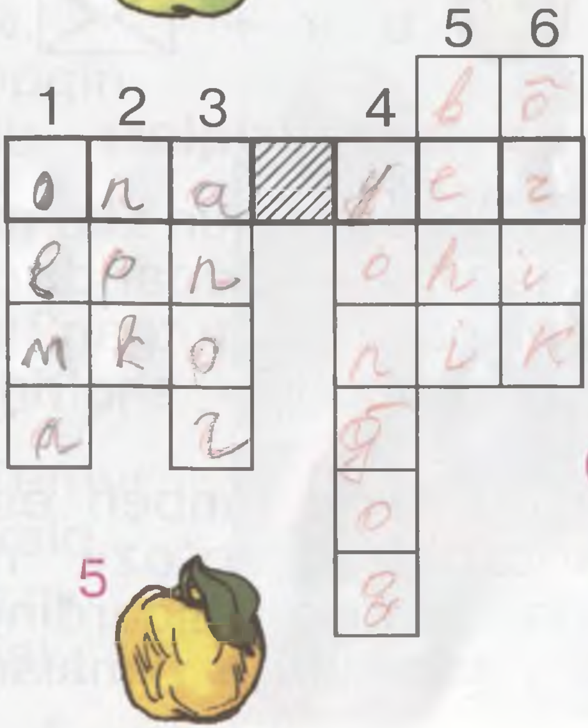
Boshqotirma

Katakchalarni to'g'ri to'ldirsangiz, «Yer nima der?» she'riga oid jumla kelib chiqadi.

1

2

3



4

5

6

қурамиз. S да контурлар бўлмаганлиги сабабли $j \in \omega(I^*)$ тугунлар ичида албатта $I_{\bar{j}_*} \subset I^*$ бўлган j_* тугун топилади. $i \in I^*$ тугунлар учун Беллман функциясининг B_i қийматлари маълум бўлганлигидан (4) тенгламадан Беллман функциясининг $i \in \bar{I} = \{j \in \omega(I^*) : I_{\bar{j}} \subset I^*\}$ тугунлар учун қийматини топиш осон. $j \in \bar{I}$ тугунларни тўпламга қўшамиз ва навбатдаги итерацияга ўтамиз. Чекли сондаги итерациялардан сўнг B_i топилади. Усулнинг сонли мисолда намойиши V.6-чизмада келтирилган.

АДАБИЁТ

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М. : ИЛ, 1960.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во БГУ 1975.

VI боб. ВАРИАЦИОН ҲИСОБ

Амалиётда учрайдиган максимум ва минимум масалаларининг ҳаммасини ҳам чизиқсиз программалаштириш масалалари шаклида ифодалаб бўлавермайди. Кўпгина амалий экстремал масалаларнинг математик моделлари функциялар тўпламида функционалларнинг оптималлаштирилиши масалаларига келтирилади. Бу типдаги дастлабки масалалар математикада XVII — XVIII асрларда қўйилган ва ечилган. Ўша пайтдан бошлаб математиканинг чексиз ўлчовли функционал фазоларда экстремал масалаларни ўрганувчи бўлими *вариацион ҳисоб* деб атала бошланди. Янги бўлимнинг номи унинг асосий усули — вариацияларни ҳисоблаш (таҳлил қилиш) дан келиб чиққан. XX асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб, ҳозирги замон фани ва техникасининг масалалари билан боғлиқ ҳолда вариацион ҳисобнинг янги тармоғи — *оптимал бошқарув назарияси* юзага келди ва жадал ривожлана бошлади. Бу ҳақда мазкур қўлланманинг VII бобида сўз юритамиз. Лекин бу бобда биз баён қилмоқчи бўлган классик вариацион ҳисобнинг асосий усуллари ва натижалари ҳозирги пайтгача ҳам ўз аҳамиятини йўқотган эмас.

1-§. ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи И. Бернулли томонидан 1696 йилда қўйилган *брахистохрона ҳақидаги масала*нинг бевосита умумий ҳоли сифатида юзага келди. Бу масала математик масалалар янги синфининг ўзига хос хусусиятларини мужассамлаштирган бўлиб, вариацион ҳисобнинг бутун тарихи давомида янги усулларни синаб кўриш объекти ҳамда жуда кўп қизиқарли ва муҳим умумлаштиришларнинг асоси бўлиб хизмат қилди.

1. Брахистохрона ҳақидаги масала. Вертикал текисликда турли сатҳларда жойлашган A, B нуқталар берилган бўлсин (VI. 1- чизма). Бу нуқталарни шундай силлиқ чизиқ билан туташтириш керакки, бошланғич тезлиги ноль бўлганда оғир моддий шар шу чизиқ бўйлаб A дан B га минимал вақтда етиб келсин.

Бу масаланинг брахистохрона ҳақидаги масала деб ном олиши юнонча «брахистос»— энг қисқа, «хромос»— вақт сўзларидандир.

Масаланинг математик моделини тузиш учун VI. 1- чизмага мурожаат қиламиз. Энергиянинг сақланиш қонунига асосан A нуқтада ва эгри чизиқда ихтиёрий $[x, y]$ нуқтада потенциал ва кинетик энергияларнинг йиғиндиси ўзаро тенгдир: $0+0=-mgy+mv^2/_2$, шунинг учун,

$$v=\sqrt{2gy}. \tag{1}$$

$y=y(x)$, $x\in[0, a]$ берилган A, B нуқталарни туташтирувчи силлиқ чизиқ бўлсин. Маълумки,

$$v=ds/dt, \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \ dy=y_x(x)\,dx,$$
$$(y_x=dy/dx). \tag{2}$$

((2) ни (1) га қўйиб, $dt=\sqrt{(1+y_x^2)/2gy}$ ни, яъни $y(x)$ чизиқ бўйича нуқтанинг A дан B га ўтиш вақти

$$T=\int_0^a \sqrt{(1+y_x^2)2gy}\ dx \tag{3}$$

эканлигини оламиз.

Брахистохрона ҳақидаги масала $[0, a]$ кесманинг четлари— $y^0(0)=0$, $y^0(a)=b$ қийматларни қабул қилувчи ва (3) функционалга минимум берадиган $y=y^0(x)$, $x\in[0, a]$ силлиқ чизиқни топишга келтирилди.

Келтирилган масаланинг олдинги бобларида қараб чиқилган масалалардан фарқи шундан иборатки, унда чекли ўлчовли векторни эмас, балки чексиз ўлчовли фазонинг элементи бўлган $y^0(x)$, $x\in[0, a]$ функцияни топиш керак.

2. **Асосий масала.** $[a, b]$ кесмада аниқланган ва ўзининг

қурамиз. S да контурлар бўлмаганлиги сабабли $j \in \omega(I^*)$ тугунлар ичида албатта $I_{j_*}^- \subset I^*$ бўлган j_* тугун топилади. $i \in I^*$ тугунлар учун Беллман функциясининг B_i қийматлари маълум бўлганлигидан (4) тенгламадан Беллман функциясининг $i \in \bar{I} = \{j \in \omega(I^*): I_j^- \subset I^*\}$ тугунлар учун қийматини топиш осон. $j \in \bar{I}$ тугунларни тўпламга қўшамиз ва навбатдаги итерацияга ўтамиз. Чекли сондаги итерациялардан сўнг B_i топилади. Усулнинг сонли мисолда намойиши V.6-чизмада келтирилган.

АДАБИЁТ

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М. : ИЛ, 1960.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во БГУ 1975.

VI боб. ВАРИАЦИОН ҲИСОБ

Амалиётда учрайдиган максимум ва минимум масалаларининг ҳаммасини ҳам чизиқсиз программалаштириш масалалари шаклида ифодалаб бўлавермайди. Кўпгина амалий экстремал масалаларнинг математик моделлари функциялар тўпламида функционалларнинг оптималлаштирилиши масалаларига келтирилади. Бу типдаги дастлабки масалалар математикада XVII — XVIII асрларда қўйилган ва ечилган. Ўша пайтдан бошлаб математиканинг чексиз ўлчовли функционал фазоларда экстремал масалаларни ўрганувчи бўлими *вариацион ҳисоб* деб атала бошланди. Янги бўлимнинг номи унинг асосий усули — вариацияларни ҳисоблаш (таҳлил қилиш) дан келиб чиққан. XX асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб, ҳозирги замон фани ва техникасининг масалалари билан боғлиқ ҳолда вариацион ҳисобнинг янги тармоғи — *оптимал бошқарув назарияси* юзага келди ва жадал ривожлана бошлади. Бу ҳақда мазкур қўлланманинг VII бобида сўз юритамиз. Лекин бу бобда биз баён қилмоқчи бўлган классик вариацион ҳисобнинг асосий усуллари ва натижалари ҳозирги пайтгача ҳам ўз аҳамиятини йўқотган эмас.

1-§. ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи И. Бернулли томонидан 1696 йилда қўйилган *брахистохрона ҳақидаги масала*нинг бевосита умумий ҳоли сифатида юзага келди. Бу масала математик масалалар янги синфининг ўзига хос хусусиятларини мужассамлаштирган бўлиб, вариацион ҳисобнинг бутун тарихи давомида янги усулларни синаб кўриш объекти ҳамда жуда кўп қизиқарли ва муҳим умумлаштиришларнинг асоси бўлиб хизмат қилди.

1. Брахистохрона ҳақидаги масала. Вертикал текисликда турли сатҳларда жойлашган A, B нуқталар берилган бўлсин (VI. 1-чизма). Бу нуқталарни шундай силлиқ чизиқ билан туташтириш керакки, бошланғич тезлиги ноль бўлганда оғир моддий шар шу чизиқ бўйлаб A дан B га минимал вақтда етиб келсин.

Бу масаланинг брахистохрона ҳақидаги масала деб ном олиши юнонча «брахистос»— энг қисқа, «хромос»— вақт сўзларидандир.

Масаланинг математик моделини тузиш учун VI. 1-чизмага мурожаат қиламиз. Энергиянинг сақланиш қонунига асосан A нуқтада ва эгри чизиқда ихтиёрий $[x, y]$ нуқтада потенциал ва кинетик энергияларнинг йиғиндиси ўзаро тенгдир: $0+0=-mgy+mv^2/_2$, шунинг учун,

$$v=\sqrt{2gy}. \tag{1}$$

$y=y(x)$, $x\in[0, a]$ берилган A, B нуқталарни туташтирувчи силлиқ чизиқ бўлсин. Маълумки,

$$v=ds/dt, \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \; dy=y_x(x)\,dx,$$
$$(y_x=dy/dx). \tag{2}$$

((2) ни (1) га қўйиб, $dt=\sqrt{(1+y_x^2)/2gy}$ ни, яъни $y(x)$ чизиқ бўйича нуқтанинг A дан B га ўтиш вақти

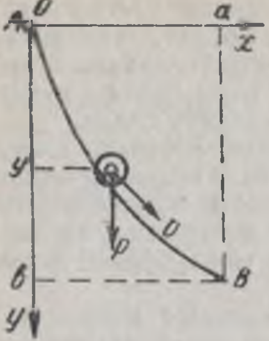
$$T=\int_0^a\sqrt{(1+y_x^2)2gy}\;dx \tag{3}$$

эканлигини оламиз.

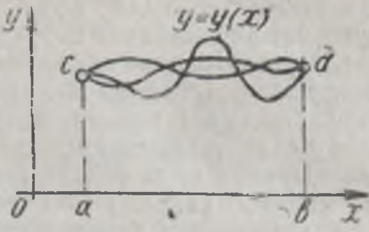
Брахистохрона ҳақидаги масала $[0, a]$ кесманинг четлари— $y^0(0)=0$, $y^0(a)=b$ қийматларни қабул қилувчи ва (3) функционалга минимум берадиган $y=y^0(x)$, $x\in[0, a]$ силлиқ чизиқни топишга келтирилди.

Келтирилган масаланинг олдинги бобларида қараб чиқилган масалалардан фарқи шундан иборатки, унда чекли ўлчовли векторни эмас, балки чексиз ўлчовли фазонинг элементи бўлган $y^0(x)$, $x\in[0, a]$ функцияни топиш керак.

2. **Асосий масала.** $[a, b]$ кесмада аниқланган ва ўзининг



VI.1- чизма.



VI.2- чизма.

биринчи тартибли ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлиб, $[a, b]$ кесманинг четларида берилган

$$y(a) = c, \quad y(b) = d \tag{4}$$

қийматларни қабул қилувчи скаляр $y = y(x)$ функциялар *жоиз эгри чизиқлар* деб аталади. Айтайлик, $F(x, y, z)$ — скаляр x, y, z аргументларнинг берилган скаляр функцияси бўлиб, ўз аргументларининг барчаси бўйича $C^{(2)}$ синфга мансуб бўлсин. $y(x)$, $x \in [a, b]$ жоиз эгри чизиқлар тўпламида

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x))\, dx \tag{5}$$

функционалининг минимумини топиш масаласи — *вариацион ҳисобнинг асосий масаласи* деб аталади*.

Агар бирор $\varepsilon > 0$ сон учун

$$|y(x) - y^0(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in [a, b] \tag{6}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи жоиз $y(x)$, $x \in [a, b]$ эгри чизиқлар ва жоиз $y^0(x)$ эгри чизиқ учун

$$I(y) \geqslant I(y^0) \tag{7}$$

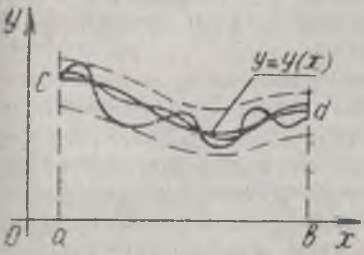
тенгсизлик бажарилса, $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ — (5) функционалнинг (асосий масаланинг) *кучли минимали* деб аталади.

Агар (7) тенгсизлик (6) дан ташқари, $|y_x(x) - y_x^0(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in [a, b]$ шартни ҳам қаноатлантирувчи $y(x)$, $x \in [a, b]$ жоиз

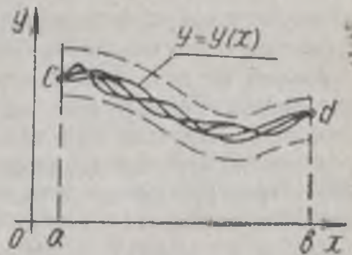
* Кўпинча асосий масала вариацион ҳисобнинг энг содда масаласи деб ҳам аталади.

эгри чизиқлар учун бажарилса, $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ — (5) *функционалнинг кучсиз минимали* деб аталади.

Шундай қилиб, кучли минимал унга ўзларининг қийматлари бўйича яқин бўлган барча жоиз эгри чизиқлар ичида энг яхшиси бўлиб (VI. 3-чизма), кучсиз минимал эса жоиз эгри чизиқларнинг ҳам ўз қийматлари ҳам ўз ҳосилаларининг қийматлари яқин бўлганлари ичида энг яхшисидир (VI.4-чизма).



VI.3- чизма.



VI.4- чизма.

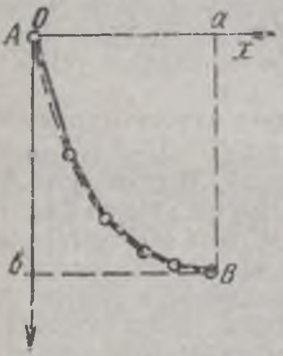
Равшанки, кучли минимал кучсиз минимал ҳам бўлади, шунинг учун кучсиз минимумнинг зарурий шартлари кучли минимумнинг ҳам зарурий шартлари бўлади. Бу бобда фақат кучсиз минималлар ўрганилади. Кучли минималлар VII бобда текширилади.

3. **Ечимнинг мавжудлиги.** Қуйидаги натижани исботсиз келтирамиз. Айтайлик: 1) $F(x, y, z) \in C^{(1)}$; 2) $F(x, y, z)$ функция z бўйича қавариқ; 3) $F(x, y, z) \geqslant \Phi(z)$ бўлсин, бу ерда $z \to \infty$ да $\Phi(z)/z \to \infty$. У ҳолда шундай $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ абсолют узлуксиз функция топиладики, унда (4) тенгликлар бажарилади ва (5) функционал кучли минимумга эришади.

Агар (5) масалада $F(x, y, z)$ функциянинг z бўйича қавариқлик шарти бажарилмаса, (5) масала қабул қилинган маънода ечимга эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу ҳолда *асосий масалани кенгайтириш* қаралиб, унда $F(x, y, z)$ функция ўрнига унинг z бўйича қавариқ қобиғи қаралади. Кенгайтирилган масаланинг ечими бўйича берилган (5) масала учун *минимумлаштирувчи кетма-кетлик* қуриш мумкин, яъни жоиз эгри чизиқларнинг шундай $y^k(x)$, $x \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлиги топиладики, $k \to \infty$ да $I(y^k) \to \inf I(y)$ бўлади. Қурилиши кўп амалий масалалар учун етарли бўлган минимумлаштирувчи кетма-кетликни (5) масаланинг *умумлашган ечими* деб қараш мумкин.

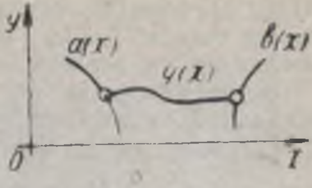
4. Муҳокама. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи *функционал фазоларда* ушбу $I(y) \to \min$, $y \in У$ (бу ерда $У$ — бирор функциялар синфи) *экстремал масалаларнинг* хусусийси ҳолидан иборатдир. Унинг ўзига хослиги ҳам $У$ тўпламнинг, ҳам I функционалнинг аниқ кўринишини (бу асосийси) танлаб олишдадир. Асосий масаланинг аҳамияти (ёки бошқача айтганда, унинг қўйилишининг ютуғи) шу билан аниқланадики, бир томондан, кўпгина амалий масалаларнинг математик модели шундай бўлиб, бошқа томондан, у мавжуд математик аппарат ёрдамида қўлланиш учун қизиқарли натижаларни олиш имконини беради.

Асосий масала чизиқсиз программалаштириш масалаларининг чекли ўлчовли фазолардан чексиз ўлчовли фазоларга ўтишдаги умумлашмасидан иборатдир. Бунда чизиқсиз программалаштириш режаларига вариацион ҳисобнинг жоиз эгри чизиқлари мос келади. Бу ерда принципиал янги элемент эгри чизиқларнинг силлиқлиги синфини киритишдан иборат бўлиб, унга масаланинг моҳияти билан бирга ечимнинг мавжудлиги ва текшириш усули ҳам боғлиқдир.



VI.5- чизма.

Вариацион ҳисоб масалаларидан чизиқсиз программалаштириш масалаларига ўтишнинг учта усули маълум. Биринчи усул вариацион масаланинг физик прототипини дискретлаштиришга асосланган. Масалан, агар брахистохрона ҳақидаги вариацион масалада моддий нуқтани A дан B га чекли сондаги бўғинлардан иборат (VI.5- чизма) занжир бўйича ҳаракат қилишга мажбур этсак, чизиқсиз программалаштириш масаласига келамиз. Иккинчи усул вариацион масала математик моделининг айирмали яқинлаштирилишига асосланган бўлиб, унда узлуксиз функциялар тўрсимон функцияларга, ҳосилалар айирмалар нисбатига, интеграллар интеграл йиғиндиларга алмаштирилади. Вариацион масалаларни ечиш усуллари ичида жоиз чизиқлар оптималлаштирилувчи чекли сондаги параметрларга боғлиқ бўлган функциялар оиласидан бўлгандаги усулларни (Ритц усули, моментлар усули, чекли элементлар усули ва б.) ҳам шу типга кириши мумкин. Вариацион масалалардан чизиқсиз программалаштириш масалаларига ўтишнинг учинчи усули вариацион масалалар учун олинган оптималлик шартларининг айирмали яқинлаштирилишидан иборатдир.



VI.6- чизма.

Машқ сифатида (биринчи ёки иккинчи усул билан) брахистохрона ҳақидаги масаланинг чекли ўлчовли ўхшашини ифода қилиш ва унинг чизиқсиз программалаштириш масаласининг содда хусусий ҳоли эканлигига ишонч ҳосил қилиш таклиф этилади. Вариацион ҳисобнинг кейинги натижаларини ҳам чизиқсиз программалаштириш масаласининг мос натижаларидан лимитга ўтиш ёрдамида келтириб чиқариш ҳам фойдали машқ бўлади. Вариацион ҳисобда бу усулни биринчи бўлиб Л. Эйлер қўлланган.

5. **Вариацион ҳисобнинг бошқа масалалари.** Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи хилма-хил умумлашмаларга эга. Уларнинг типиклари билан қисқача танишамиз.

Маҳкамланмаган $[a, b]$ *кесмали масала* асосий масаладан шу билан фарқ қиладики, унда a, b сонлар (иккаласи ҳам, ёки биттаси) олдиндан берилмаган бўлиб, (5) функционалнинг минимуми шартидан танлаб олинади.

Чегаралари қўзғалувчан масала асосий масаладан шу билан фарқ қиладики, унда (4) шартнинг ўрнига $y(x)$ эгри чизиқнинг чап охири берилган $a(x)$ чизиқда, ўнг охири эса $b(x)$ чизиқда ётиши талаб қилинади. Асосий масалада жоиз эгри чизиқ учун қўшимча чеклашларни қўшиш натижасида *чеклашли вариацион масалалар* синфи ҳосил қилинади. Агар бу чеклашлар

$$\int_a^b G(x, y, y_x)\,dx = c_i, \quad i = \overline{1, m}$$

кўринишда бўлса, масала *изопериметрик масала* деб аталади.

Кўп ҳолларда чеклашлар

$$\Phi_k(x, y, y_x) = 0, \; k = \overline{1, l} \tag{8}$$

дифференциал тенгламалар ёрдамида берилади ҳамда ушбу $\Phi_k(x, y) = 0$, $k = \overline{1, l}$ кўринишдаги чекли (дифференциал бўлмаган) ифодалар билан берилган *чекли* (*голоном*) чеклашлардан фарқли ўлароқ *дифференциал* (*голоном бўлмаган*) *чеклашлар* деб аталади.

(5) функционални (4), (8) шартларда минималлаштириш масаласи *Лагранж масаласи* деб аталади. Агар (4) ўрнига кўзғалувчан охирлар қаралиб, (5) функционал қуйидаги

$$I(y) = \varphi(y(a),\ y(b)) \to \min \tag{9}$$

функционал билан алмаштирилса, (8), (9) масала *Майер масаласи* деб аталади.

Больц масаласининг Майер масаласидан фарқи шундан иборатки, унда (9) функционал ўрнига

$$I(y) = \varphi(y(a),\ y(b)) + \int_a^b F(x,\ y,\ y_x)\,dx$$

функционал қаралади.

Юқори тартибли ҳосилали вариацион масалалар эса асосий масаладан шуниси билан фарқ қиладики, уларда мос чегаравий шартларда функциянинг юқори тартибли ҳосилалари ёрдамида берилган

$$I(y) = \int_a^b F(x,\ y,\ dy/dx,\ \ldots,\ d^s y/dx^s)\,dx$$

функционал минималлаштирилади.

Агар минималлаштириш кўп ўзгарувчили $y(x_1, \ldots, x_n)$ функциялар орасида бажарилса, бундай *вариацион масалалар кўп ўлчовли* деб аталади.

Мазкур бобда фақат вариацион ҳисоб асосий масаласини ечиш усуллари баён қилинади. Бу усуллар юқорида номлари санаб ўтилган масалалар учун мос умумлашмаларга эга. Умумлашган вариацион масалалар учун баъзи натижалар VII бобда олинган.

2-§. ВАРИАЦИЯЛАР УСУЛИ

Вариациялар усули Ж. Л. Лагранж томонидан 1760 йилда таклиф қилинган бўлиб, функционал фазолардаги экстремал масалаларни назарий текширишнинг асосий усули ҳисобланади. У функцияларни дифференциаллар ва жоиз йўналишлар ёрдамида (III бобнинг 1-§ ига қ.) максимум ва минимумга текшириш усулининг табиий умумлашмасидан иборатдир. Бу усулда ҳал қилувчи ролни фойдаланиладиган вариациянинг типи ўйнайди, чунки олинадиган натижанинг соддалиги ва кучи унга боғлиқдир.

1. **Жоиз эгри чизиқнинг вариацияси**. Айтайлик,

$$y = y(x), \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

вариацион ҳисобнинг асосий масаласида жоиз эгри чизиқ бўлсин.

Ушбу $\delta y(x)$, $x \in [a, b]$ функция (1) жоиз эгри чизиқнинг (*жоиз*) *вариацияси* дейилади, агар $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$ функция яна жоиз эгри чизиқдан иборат бўлса.

Кучсиз минималларни текширганда (1) жоиз эгри чизиқнинг вариациясини

$$\delta y(x) = \varepsilon h(x), \quad x \in [a, b] \tag{2}$$

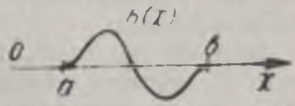
кўринишда қараш қулайдир, бу ерда ε — ҳақиқий сон, (2) ифоданинг чизиқсиз программалаштиришдаги $\Delta x = \theta l$ ифода билан ўхшашлиги сезилиб турибди, яъни (2) да $h(x)$, $x \in [a, b]$ функция функционал фазода $y(x)$, $x \in [a, b]$ чизиқдан бошланган ҳаракат йўналиши ролини ўйнаса, ε шу йўналиш бўйича қадам ролини ўйнайди.

Бундан буён $h(x)$, $x \in [a, b]$ функцияни ҳам агар у $\delta y(x)$, $x \in [a, b]$ вариацияга мос келса, (1) *эгри чизиқнинг вариацияси* деб атаймиз.

Жоиз эгри чизиқнинг таърифидан келиб чиқадики, $h(x)$, $x \in [a, b]$ функция

$$h(x) \in C^{(1)}, \quad x \in [a, b], \quad h(a) = h(b) = 0$$

бўлганда ва фақат шу ҳолда жоиз эгри чизиқнинг вариацияси бўлади (VI. 7- чизма).



VI.7- чизма.

2. **Функционалнинг вариацияси.** Айтайлик, $I(y)$ жоиз эгри чизиқларда аниқланган функционал бўлсин. Агар у берилган жоиз $y(x)$ эгри чизиқ ва $h(x)$ вариация учун

$$I(y + \varepsilon h) - I(y) = \varepsilon \delta I(y, h) + \varepsilon^2 \delta^2 I(y, h)/2 + 0(\varepsilon^2) \tag{3}$$

ёйилмага эга бўлса, ε параметрнинг биринчи даражаси олдидаги $\delta I(y, h)$ коэффициент $I(y)$ *функционалнинг* $y(x)$ эгри чизиқ ва $h(x)$ вариациядаги *биринчи вариацияси* деб аталади, (3) ёйилмадаги $\varepsilon^2/2$ нинг олдидаги $\delta^2 I(y, h)$ коэффициент $I(y)$ *функционалнинг иккинчи вариацияси* деб аталади. (3) дан функционал вариациясини ҳисоблашнинг ушбу содда қоидалари келиб чиқади:

$$\delta I(y,\ h)=\frac{d}{d\varepsilon}I(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0},\quad \delta^2 I(y,\ h)=\frac{d^2}{d\varepsilon^2}I(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

1- § даги вариацион ҳисобнинг асосий масаласидаги (5) функционал учун

$$\delta I(y,\ h)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x,\ y+\varepsilon h,\ y_x+\varepsilon h_x)\,dx\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}h_x(x)\right]dx, \tag{4}$$

$$\delta^2 I(y,\ h)=\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\int_a^b F(x,\ y+\varepsilon h,\ y_x+\varepsilon hx)\,dx\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2}h^2(x)+2\,\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y\,\partial y_x}h(x)h_x(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2}\,h_x^2(x)\right]dx. \tag{5}$$

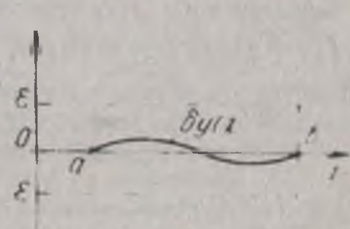
3. Функционалнинг вариацияси атамаларида кучсиз минимумнинг зарурийлик шартлари. Кучсиз минималнинг таърифидан келиб чиқадики, $y^0(x)$, $x\in[a,\ b]$ жоиз эгри чизиқ бирор $M<\infty$, $\varepsilon_0>0$ ларда барча $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $|h(x)|\leqslant M$, $|h_x(x)|\leqslant M$, $x\in[a,\ b]$ учун

$$I(y^0+\varepsilon h)\geqslant I(y^0) \tag{6}$$

тенгсизлик бажарилганда ва фақат шу ҳолатдагина кучсиз минимал бўлади.

Зарур бўлган ҳисоблашларнинг ҳажми катта бўлгани сабабли (6) критерий амалий қўлланиш учун ноқулайдир. Назарий изланишларнинг мақсади текшириш учун қулай бўлган минимум шартларини олишдан иборатдир.

Биринчи натижа етарли кичик ε параметрли, яъни $]a,\ b]$ кесмада текис кичик бўлган (2) вариациялар ёрдамида олинади (VI.8- чизма).



VI.8- чизма.

1- теорема. Ҳар бир $y^0(x)$, $x\in[a,\ b]$ кучсиз минимал ва ихтиёрий $h(x)$, $x\in[a,\ b]$ вариацияда: 1) функционалнинг биринчи вариацияси нолга тенг (стационарлик шарти):

$$\delta I(y^0, h) = 0; \tag{7}$$

2) функционалнинг иккинчи вариацияси манфий бўлмайди:

$$\delta^2 I(y^0, h) \geqslant 0. \tag{8}$$

Исботи. Агар $\delta I(y^0, h_*) = \alpha \neq 0$ деб фараз қилсак, (3) ва (6) дан етарли кичик ε, $-\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}\alpha$ лар учун

$$0 \leqslant I(y^0 + \varepsilon h_*) - I(y^0) = -|\varepsilon|\,[|\alpha| + o(\varepsilon)/\varepsilon] < 0$$

зиддиятга келамиз.

Шунга ўхшаш, (7) тенглик бажарилганда $\delta^2 \cdot I(y^0, h_*) = = \alpha < 0$ деб фараз қилсак, ε етарли кичик бўлганда $0 \leqslant \leqslant I(y^0 + \varepsilon h_*) - I(y^0) = \varepsilon^2 [\alpha/2 + o(\varepsilon)/\varepsilon^2] < 0$ зиддиятга келамиз. Теорема исботланди.

(7), (8) шартларни (4) ва (5) ларни ҳисобга олган ҳолда 1-§ даги (5) функционалга татбиқ қилиб, қуйидаги натижаларни оламиз: агар $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ вариацион ҳисоб асосий масаласида кучсиз минимал бўлса, барча $h(x)$, $x \in [a, b]$ вариациялар учун

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} h_x(x) \right] dx = 0 \tag{9}$$

тенглик ва

$$\int_a^b \left[\frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y\, \partial y_x} h h_x + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x^2} h_x^2 \right] dx \geqslant 0 \tag{10}$$

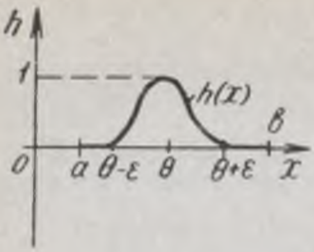
тенгсизлик бажарилади.

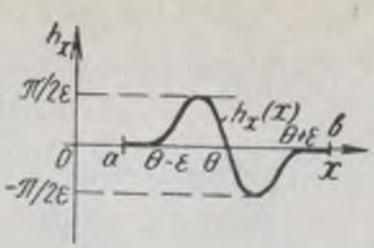
4. **Эйлер тенгламаси.** Кучсиз минимумнинг (9) зарурий шарти (6) критерийга нисбатан текшириш учун қулайдир, чунки у h га нисбатан чизиқли функционал ёрдамида ифодаланган. Бу натижани VI. 7, 9-чизмаларда кўрсатилган махсус h вариациялар ёрдамида кучайтириш мумкин.

2-теорема. Вариацион ҳисоб асосий масаласининг ҳар бир $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ кучсиз минимали ушбу

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_x} = 0, \ x \in [a, b] \tag{11}$$

Эйлер тенгламасининг ечими бўлади.





VI.9- чизма.

Исботи. (9) даги иккинчи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаб* ва вариациянинг $h(a) = h(b) = 0$ хоссасидан фойдаланиб, (9) дан

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} \right] h(x)\, dx = 0 \qquad (12)$$

тенгликка келамиз. Бундан кейин мустақил аҳамиятга эга бўлган қуйидаги натижадан фойдаланамиз.

Лемма (Лагранж).** Агар

$$\int_a^b a(x)\, h(x)\, dx = 0 \qquad (13)$$

тенглик узлуксиз $a(x)$, $x \in [a, b]$ функция ва барча $h(x)$, $x \in [a, b]$ вариациялар учун бажарилса, $a(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$ бўлади.

Исботи. Айтайлик, бирор $\theta \in [a, b]$ учун $a(\theta) = \alpha \neq 0$ бўлсин. Аниқлик учун $\alpha > 0$ деб оламиз. У ҳолда узлуксизликка кўра функция θ нуқтанинг бирор ε-атрофида $a(x) > 0$, $x \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$, яъни мусбат бўлади. Буни ҳисобга олиб, (13) ифоданинг чап томонини $h(x)$, $x \in [a, b]$ функция VI. 9-чизмада ифодаланган вариациядан иборат бўлганда ҳисоблаймиз:

$$\int_a^b a(x)\, h(x)\, dx = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} a(x)\, h(x)\, dx > 0.$$

(13) дан олинган зиддият леммани исботлайди.

---

*Бу амал, масалан, $y^0(x) \in C^{(2)}$ бўлганда қонунийдир. Бу шарт бўлмаган ҳол учун 2-теорема 5-бандда исботланади.

**Уни вариацион ҳисобнинг *асосий леммаси* деб ҳам аталади.

Лемманинг (12) ифодага қўлланилиши (11) тенгламага олиб келади ва теоремани исботлайди.

(11) Эйлер тенгламасининг батафсил ёзуви қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} y_{xx} + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y\, \partial y_x} y_x + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial x\, \partial y_x} - \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} = 0,$$

яъни $y(x) \in C^{(2)}$ бўлганда махсус бўлмаган ҳолда ($\partial^2 F/dy_x^2 \neq \neq 0$) $y(x)$, $x \in [a, b]$ функцияга нисбатан иккинчи тартибли чизиқсиз дифференциал тенгламадан иборат. Бундай тенгламаларнинг умумий ечими $y(x, C_1, C_2)$ иккита ихтиёрий C_1, C_2 ўзгармасга боғлиқ бўлади.

Шундай қилиб, ечимга эга бўлган вариацион ҳисобнинг асосий масаласи вариациялар усули ёрдамида (1) жоиз эгри чизиқнинг таърифидан келиб чиқадиган

$$y(a, C_1, C_2) = c, \quad y(b, C_1, C_2) = d$$

тенгликларни қаноатлантирувчи иккита C_1, C_2 ўзгармасни излашга келтирилди.

Асосий масаланинг Эйлер тенгламасининг ечими бўлган $y(x)$, $x \in [a, b]$ жоиз эгри чизиқлари масаланинг (Эйлер) экстремаллари деб аталади. Янги атамаларда теорема қуйидагича айтилади: *ҳар бир кучсиз минимал масаланинг экстремаллари ичида ётади.*

2-теореманинг яна битта талқини учун янги тушунча киритамиз. Аввало,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a' \Delta x + 0(\|\Delta x\|)$$

ёйилмага эга бўлган $f(x)$, $x \in R_n$ функция учун a вектор $f(x)$ функциянинг $\partial f(x)/\partial x$ ҳосиласи ёки $\mathrm{grad}\, f(x)$ градиенти деб аталишини эслайлик. Шунга ўхшаш,

$$I(y + \delta y) - I(y) = \int_a^b a(x)\, \delta y(x)\, dx + 0(\|\delta y\|)$$

ёйилмага эга бўлган $I(y)$ функционал учун $a(x)$, $x \in [a, b]$ функция $I(y)$ *функционалнинг вариацион ҳосиласи* $\delta I(y)/\delta y(x)$ ёки *градиенти* $\mathrm{grad}\; I(y)$ деб аталади.

Юқорида келтирилган ҳисоблашларга биноан (11) ифоданинг чап томони ε кўпайтувчи аниқлигида 1-§ нинг (5) асосий масаласидаги функционал ёйилмасининг δy га нисбатан чизиқли қисмини ифодалайди. Демак, 1-§ даги (5) функционалнинг вариацион ҳосиласи

$$\frac{\delta I(y)}{\delta y(x)} = \operatorname{grad} I(y) = \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}$$

кўринишни олади ва 2-теоремага асосан кучсиз минималда нолга тенг. Шундай қилиб, 2-теореманинг (11) ифодаси шартсиз минимум масалаларида оптималликнинг зарурий шарти $\partial f(x^0)/\partial x = \operatorname{grad} f(x^0) = 0$) нинг тўлиқ ўхшашидан иборатдир.

5. Эйлернинг интеграл тенгламаси. Вариацион масалаларни текширганда функционал қаралаётган функциялар фазоси муҳим роль ўйнайди. Бу бандда вариацион ҳисобниг асосий масаласи

$$I(z) = \int_a^b F(x, y(x), z(x))\,dx \to \min \tag{14}$$

функционал

$$z(x) \in C,\ y_x(x) = z(x),\ x \in [a, b], \tag{15}$$
$$y(a) = c, \quad y(b) = d$$

шартларни қаноатлантирувчи $z(x) = y_x(x)$, $x \in [a, b]$ функциялар фазосида аниқланган деб фараз қилиб, текширилади.

Худди аввалгидек, агар $\bar{z}(x) = z(x) + \delta z(x)$ функция ва унга (15) га асосан мос келадиган $\bar{y}(x)$ функция 1-§ даги шартларни қаноатлантирса, $\delta z(x) \in C$, $x \in [a, b]$ функция $z(x)$, $x \in [a, b]$ *функциянинг вариацияси* деб аталади.

Ушбу

$$\delta z(x) = \varepsilon g(x)$$

кўринишдаги вариациялар фақат

$$g(x) \in C,\ \int_a^b g(x)\,dx = 0 \tag{16}$$

хоссаларга эга бўлган $g(x)$, $x \in [a, b]$ функциялар ёрдамида пайдо бўлади (VI. 10-чизма). Юқоридаги ҳисоблашларни такрорлаб, қуйидагиларни оламиз:

$$\delta I(z, g) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(y, y + \varepsilon h, z + \varepsilon g)\,dx\Big|_{z = y_x,\ g = h_x,\ \varepsilon = 0} =$$

$$= \int_a^b \left[\left[\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\right]_{z = y_x} \int_a^x g(s)\,ds + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\Big|_{z = y_x} g(x)\right] dx.$$

Агар $z^0 = z^0(x)$, $x \in [a, b]$ ечим (14), (15) асосий масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $\delta I(z^0, g) = 0$, яъни барча $g(x)$, $x \in [a, b]$ вариациялар учун юқоридагидан биринчи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаш ёрдамида олинган

$$\int_a^b \Big[-\int_a^x \frac{\partial F(x, y^0, z^0)}{\partial y}\, ds + \frac{\partial F(x, y^0, z^0)}{\partial z} \Big|_{y^0_x = z^0} g(x)\, dx = 0 \quad (17)$$

тенгликка эквивалент

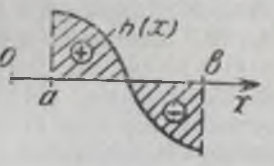
$$\int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{z=y_x} \cdot \int_a^x g(s)\, ds + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=y_x} g(x) \Big]\, dx = 0$$

тенглик бажарилади. Бу ҳолда $\partial F/\partial y$ функция жоиз эгри чизиқлар бўйлаб узлуксиз бўлгани учун бу ерда бажарилган амал қонунийлигини таъкидлаб ўтамиз.

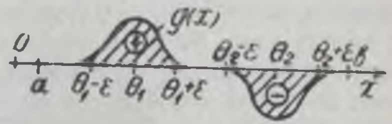
Минимумнинг (17) зарурий шартини соддалаштириш учун исботи VI. 11-чизмада (бунда штрихланган қисмлар конгруэнт) ифодаланган янги вариацияларга асосланган леммани келтирамиз.

2-лемма (Дюбуа — Раймон). Агар

$$\int_a^b h(x)\, g(x)\, dx = 0 \quad (18)$$



VI.10-чизма.



VI.11-чизма.

тенглик $h(x)$, $x \in [a, b]$ узлуксиз функция ва барча (16) вариациялар учун бажарилса, $h(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$ бўлади.

Исботи. Айтайлик, тескари натижа ўринли бўлсин, яъни θ_1, $\theta_2 \in [a, b]$ нуқталар топилиб, $h(\theta_1) \neq h(\theta_2)$ бўлсин. Аниқлик учун $h(\theta_1) > h(\theta_2)$ деб олайлик. У ҳолда $h(x)$ функциянинг узлуксизлигига биноан бирор $\varepsilon > 0$ да

$$\min_{x \in [\theta_1 - \varepsilon,\ \theta_1 + \varepsilon]} h(x) > \max_{x \in [\theta_2 - \varepsilon,\ \theta_2 + \varepsilon]} h(x) \quad (19)$$

тенгсизлик бажарилади.

VI.11-чизмада тасвирланган $g(x)$ функция (16) шартларни қаноатлантиради ва демак вариациядан иборат бўлади. Шу вариацияда (19) ни ҳисобга олсак, (18) нинг чап томони мусбат бўлади:

$$\int_a^b b(x)\,g(x)\,dx = \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} b(x)\,g(x)\,dx + \int_{\theta_2-\varepsilon}^{\theta_2+\varepsilon} b(x)\,g(x)\,dx > 0,$$

бу эса (18) га зиддир. Лемма исботланди.

2-леммани (17) тенгликка татбиқ қилиб, асосий масаланинг ҳар бир $y^0 = y^0(x)$, $x \in [a, b]$ кучсиз минимали *Эйлернинг* ушбу

$$\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} = \int_a^x \frac{\partial F(s, y, y_x)}{\partial y}\,ds + \text{const} \tag{20}$$

интеграл тенгламасини қаноатлантиради, деган хулосага келамиз. Агар (20) тенгламага $y = y^0(x)$, $x \in [a, b]$ функцияни келтириб қўйсак, ҳосил бўладиган айниятнинг ўнг қисми x бўйича дифференциалланувчи бўлади. Демак, чап қисм ҳам x бўйича узлуксиз ҳосилага эга, $y^0(x)$ бўйлаб

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} \tag{21}$$

узлуксиз ҳосила мавжуддир. Эслатиб ўтамизки, ихтиёрий жоиз эгри чизиқ $y(x)$, $x \in [a, b]$ бўйлаб (21) функция ё аниқланмаган, ёки C синфга мансуб эмас. (20) айниятдан x бўйича ҳосила олиб, *Эйлер тенгламаси* (11) ни оламиз. 2-теореманинг келтирилган қатъий исботи кўрсатадики, (14), (15) шакл вариацион ҳисоб асосий масаласининг 1-§ даги (5) шаклидан табиийроқдир. Бу ҳақда қўшимча VII-бобга қаралсин.

6. **Гильберт теоремаси.** 2-теоремани исбот қилишда (9) ифодада $\partial F(x, y^0(x), y^0_x(x))/\partial y_x \in C^{(1)}$ бўлгандагина ўринли бўлган бўлаклаб интеграллаш амали қўлланилди. Осонгина ҳисоблаш мумкинки, $\partial F/\partial y_x$ дан x бўйича ҳосила $y(x)$ функциянинг иккинчи тартибли y_{xx} ҳосиласини ўз ичига олади. Шу билан бирга, асосий масаланинг дастлабки қўйилишида $y_{xx}(x)$ нинг мавжуд бўлиши фараз қилинган эмас эди. Бундан келиб чиқадики, 4-бандда 2-теорема $C^{(2)}$ синфдан олинган кучсиз минималлар учун исботлангандир. 2-теореманинг 5-бандида келтирилган исботидан ҳам $y(x) \in C^{(2)}$ эканлиги келиб чиқмайди, чунки (21) функциянинг узлуксизлиги уни мураккаб функцияларни дифференциаллаш қоидалари бўйича ҳисоблаш мумкинлигини билдирмайди. $y^0(x) \in C^{(2)}$ бўладиган

шартни топамиз. Аввало *махсус бўлмаган* $y=y(x)$ *эгри чизиқ*, яъни у бўйлаб $\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \neq 0$ бажариладиган эгри чизиқ тушунчасини киритамиз.

3-теорема (Гильберт). Ҳар қандай махсус бўлмаган экстремал $C^{(2)}$ синфга мансубдир.

Исботи. (20) интеграл тенглама ва $y(x)$, $x \in [a, b]$ экстремал бўйича $z(x)=y_x(x)$ ечимга эга бўлган

$$\Phi(x, z) = -\int_a^x \frac{\partial F(s, y(s), y_x(s))}{\partial y} ds +$$

$$+\frac{\partial F(x, y(x), z)}{\partial y_x} - \text{const} = 0 \tag{22}$$

тенгламани тузамиз. Махсус бўлмаган экстремалнинг таърифидан $\partial\Phi(x, z)/\partial z\big|_{z=y_x(x)} = \partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан, (22) тенгламанинг $z=y_x(x)$ ечими $\Phi(x, z)$ функция x, z лар бўйича қандай тартибли ҳосилага эга бўлса, x бўйича ҳам шундай тартибли ҳосилаларга эга бўлади. $F(x, y, z) \in C^{(2)}$ бўлганлигидан $\Phi(x, z) \in C^{(1)}$. Демак, $y_x(x) \in C^{(1)}$, яъни $y(x) \in C^{(2)}$. Теорема исботланди.

7. Каноник ўзгарувчилар ва Эйлернинг каноник тенгламалари. (14), (15) масала бўйича p скаляр ўзгарувчи ёрдамида

$$H(x, y, p) = -F(x, y, z) + pz$$

Гамильтон функциясини (*гамильтонианни*) ўнг томондаги z ўзгарувчи

$$p = \partial F(x, y, z)/\partial z \tag{23}$$

тенгламадаги p орқали ифодаланган деб, тузамиз.

4-теорема. (11) Эйлер тенгламаси ушбу *дифференциал тенгламалар каноник тизимига* эквивалентдир:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{24}$$

Исботи. Айтайлик, $y=y(x)$ $(y_x(x)=z(x))$ ечим (11) тенгламанинг ечими бўлсин. $y=y(x)$, $p(x)=\partial F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x$ (24) тизимнинг ечими эканлигини кўрсатамиз. (11) ни ҳисобга олиб, (24) даги иккинчи тенглама учун

$$\frac{dp}{dx}=\frac{d}{dx}\,\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}=\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial H}{\partial y}$$

эканлигини оламиз.

Энди, аксинча, (24) тизимнинг $y(x)$, $p(x)$ ечими мавжуд бўлсин. $y(x)$ (11) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатамиз.

(24) тенгламалар (23) белгилашлардан фойдаланилганда $y_x=z$, $p_x=\partial F/\partial y$ кўринишни олади. p ўзгарувчининг аниқланишидан $p_x=\frac{d}{dx}\,\partial F/\partial z$ эканлигини оламиз. Охирги муносабатлардан p_x, z ўзгарувчиларни йўқотиб, $\partial F/\partial y-\frac{d}{dx}$ $\partial F/\partial y_x=0$ тенгламани оламиз. Теорема исботланди.

(24) каноник тизимнинг y, p ўзгарувчилари *каноник ўзгарувчилар* деб аталади. Механикада ёрдамчи p ўзгарувчини импульс деб ҳам аталади. (24) каноник тизим ўзининг соддалиги ва симметриклиги билан ажойибдир. У ёрдамида гамильтонианнинг экстремаллар бўйлаб муҳим хоссаси

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x} \tag{25}$$

осонгина исботланади. Ҳақиқатан, $dH/dx=\partial H/\partial x+y_x\partial H/\partial y+p_x\partial H/\partial p=\partial H/\partial x+\partial H/\partial p\cdot\partial H/\partial y-\partial H/\partial y\cdot\partial H/\partial p=$ $=\partial H/\partial x$.

(25) дан келиб чиқадики, $F(x,\ y,\ z)$ функция x га боғлиқ бўлмаган асосий масалада гамильтониан ҳар бир экстремал бўйлаб ўзгармасдир:

$$H(x,\ y(x),\ p(x))\equiv\text{const},\ x\in[a,\ b],$$

яъни $H(x,\ y,\ p)$ каноник тизимнинг биринчи интегралидир.

8. Гамильтон—Якоби тенгламаси. Иккита x, v параметрга боғлиқ бўлган

$$I_{x,v}(y)=\int_a^x F(t,\ y(t),\ y_x(t))\,dt\to\min,$$

$$y(t)\in C^{(1)},\ t\in[a,\ x],\ y(a)=c,\ y(x)=v \tag{26}$$

масалалар оиласини қараймиз. $y(t,\ x,\ v)$, $t\in[a,\ x]$, $S(x,\ v)$ орқали минимални ва ундаги (26) оиланинг умумий масаласи учун $I_{x,v}(y)$ функционалнинг қийматини белгилаймиз. У ҳолда

$$S(x, v)=\int_a^x F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v))\,dt=$$

$$=\int_{x-\Delta x}^{x} F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v))\,dt+$$

$$+\int_a^{x-\Delta x} F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v))=S(x-\Delta x,$$

$$y(x-\Delta x, x, v))-F(t, y(t, x, v),$$

$$y_x(t, x, v))\,\Delta x+0(|\Delta x|). \tag{27}$$

Бу ерда минималнинг хоссасидан, яъни $y(t, x, v)$, $t\in[a, x-\Delta x]$ кесма $x-\Delta x$, $y(x-\Delta x, x, v)$ параметрли (26) масаланинг минимали бўлишидан фойдаланилган. (27) айниятнинг иккала томонини Δx га бўлиб, $\Delta x\to 0$ деб олсак, лимитда

$$\frac{dS(x, y)}{dx}=F(x, y(x), y_x(x)) \tag{28}$$

ни оламиз. Айтайлик, $S(x, v)$ функция аргументлари бўйича дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$dS(x, v)/dx=\partial S(x, v)/dx+\partial S(x, y)/\partial y\cdot y_x$$

тенглик ёрдамида (28) тенгламани

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x}-F(x, y, y_x)+\frac{\partial S(x, y)}{\partial y}\cdot y_x=0 \tag{29}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар y, $z=y_x$ ўзгарувчилардан каноник y, p ўзгарувчиларга ўтсак ва (23) белгилашдан фойдалансак, (29) дан $S(x, y)$ функция учун *Гамильтон — Якоби тенгламаси* деб аталадиган

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x}+H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right)=0$$

тенгламани оламиз.

Гамильтон — Якоби тенгламаси ва Эйлернинг каноник тенгламалари орасида узвий боғланиш мавжуд бўлиб, у асосий масаланинг экстремалларини (30) тенгламанинг ечимлари ёрдамида қуриш имконини беради. Кўпгина *намунавий масалалар* (физик масалаларнинг идеал шакли) учун (24) тизимни интеграллашдан кўра (30) тенгламанинг ечимини топиш қулайдир. Бу ечимдан *тойилиш назариясининг усуллари* ёрдамида реал масаланинг тақрибий ечимини қуришда фойдаланиш мумкин. Хусусий ҳосилали биринчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси нуқтаи назаридан каноник тенгламалар Гамильтон — Якоби тенгламасининг характеристик тенгламасидан иборатдир.

5-теорема (Якоби). Айтайлик, $S = S(x, y, \alpha) \in C^{(2)}$ интеграл (30) тенгламанинг тўла интеграли ва $\partial^2 S/\partial x\partial y \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $\partial S(x, y, \alpha)/\partial\alpha = \beta$ тенгламадан топилган $y(x, \alpha, \beta) \in C^{(1)}$, $x \in [a, b]$ функция $p(x, \alpha, \beta) = = \partial S(x, y(x, \alpha, \beta))/\partial y$, $x \in [a, b]$ функция билан биргаликда каноник тизимнинг умумий ечими бўлади.

Исботи. Аввало $\partial S/\partial\alpha = \beta$ каноник тизимнинг биринчи интеграли, яъни $d(\partial S/\partial\alpha)/dx = 0$ эканлигини кўрсатамиз. Ушбу

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial\alpha}\cdot y_x \tag{31}$$

ни оламиз. (30) тенглама унга $S(x, y, \alpha)$ функцияни келтириб қўйгандан сўнг

$$\partial S(x, y, \alpha)/\partial x + H(x, y, \partial S(x, y, \alpha)/\partial y) = 0 \tag{32}$$

айниятга айланади, уни α бўйича дифференциаллаш

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial\alpha} \tag{33}$$

ни беради. Бу ифодани (31) га келтириб қўйиб, (24) ни ҳисобга олган ҳолда, талаб қилинган $\frac{d}{dx}\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \left(-\frac{\partial H}{\partial p} + y_x\right)\times$ $\times\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial\alpha}$ натижани оламиз.

$y(x, \alpha, \beta)$, $p(x, \alpha, \beta)$ функциялар (24) каноник тизимни қаноатлантиришни текширамиз. $y(x, \alpha, \beta)$ нинг аниқланишидан ва (33) тенгликдан

$$y_x = -\frac{\partial^2 S/\partial x\,\partial\alpha}{\partial^2 S/\partial y\,\partial\alpha} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

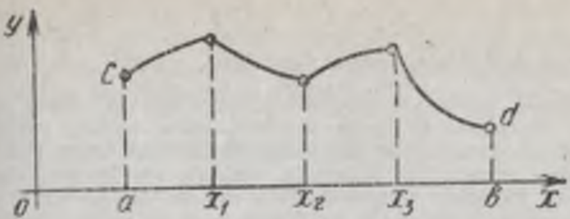
га эга бўламиз. $p(x, \alpha, \beta)$ функциянинг 5-теоремада берилган таърифидан фойдаланиб,

$$p_x = \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} + \left[\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\cdot y_x\right] = \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\,\frac{\partial H}{\partial P} \tag{34}$$

эканлигини оламиз.

(32) айниятни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\,\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0.$$



VI.12- чизма.

Агар бу натижани (34) га келтириб қўйсак, каноник тизимнинг иккинчи тенгламасини оламиз. Теорема исботланди.

9. Бўлакли-силлиқ жоиз эгри чизиқлар. Асосий масала силлиқ жоиз эгри чизиқлар синфида ечимга эга бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун жоиз эгри чизиқлар синфини бўлакли-силлиқ эгри чизиқларгача кенгайтиримиз, улар $y\ (x)$, $x \in [a,\ b]$, $y\ (a) = c$, $y\ (b) = d$ узлуксиз функциялар бўлиб, $[a,\ b]$ кесманинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа нуқталарининг барчасида узлуксиз ҳосилаларга эга ва айтилган чекли нуқталарда ҳосилалар биринчи тур узилишга эгадир (VI.12-чизма).

2-теореманинг 5-бандида келтирилган исботини таҳлил қилиб, $y_x\ (x)$ функциянинг узлуксизлиги фақат (20) Эйлер интеграл тенгламасидан (11) дифференциал тенгламага ўтишдагина ҳисобга олинганлигини пайқаш қийин эмас. Бунда ўтиш $y_x\ (x)$ функциянинг барча узлуксизлик нуқталарида қонуний бўлиб қолади, яъни синиш нуқталари орасида кучсиз минимал Эйлер тенгламасини қаноатлантиради. Узилиш нуқталарида (20) даги ўнг томондаги функция узлуксиз бўлиб қолади. Демак, (20 даги) чап томондаги функция ҳам узлуксиз бўлади;

$$\left.\frac{\partial F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))}{\partial y_x}\right|_{x=x_i-0} = \left.\frac{\partial F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))}{\partial y_x}\right|_{x=x_i+0}, \quad (35)$$

яъни p каноник ўзгарувчи кучсиз минималнинг ҳар бир x_i синиш нуқтасида узлуксиз бўлади. Бу Вейерштрасс — Эрдманнинг биринчи шартидир. Вейерштрасс — Эрдманнинг иккинчи шарти эса кучсиз минималнинг синиш нуқтасида Гамильтон функцияси $H\ (x,\ y^0\ (x),\ p^0\ (x))$ узлуксиз эканлигини таъкидлайди, яъни

$$(F\ (x,\ y^0,\ y_x^0) - y_x^0\ \partial F\ (x,\ y^0,\ y_x^0)/\partial y_x)|_{x=x_i-0} =$$

$$= (F(x, y^0, y_x^0) - y_x^0\, \partial F(x, y^0, y_x^0)/\partial y_x)|_{x=x_i+0}.$$

Бу натижа VII бобда исбот қилинади.

10. Мисол. Вариацион ҳисобнинг аҳамияти фақат унинг ёрдамида механика, физиканинг ва бошқа мураккаб масалаларнинг ечилиши билангина эмас, балки реал жараёнлар ривожланишининг кўп умумий қонуниятлари жуда содда вариацион ифодага эга бўлиши билан ҳам белгиланади. Механика ва физикада *энг кам таъсир принципи* деб аталадиган, универсал аҳамиятга эга бўлган принцип мавжуд бўлиб, унга кўра $[a, b]$ кесмада ҳаракат шундай ўтадики, у бўйлаб *таъсир интеграли* $\int_a^b L(x, y, y_x)\, dx$ *стационар қиймат* қабул қилади, яъни $\delta\int_a^b L(x, y, y_x)\, dx = 0$. Бу ерда $L = T - U$ *тизимнинг лагранжианидир* (кинетик энергия T ва потенциал энергия U лар айирмаси).

Кучсиз минимумнинг юқорида олинган зарурий шартларининг намойиши учун брахистохрона ҳақидаги масалани қараймиз.

$$F(x, y, y_x) = \sqrt{(1 + y_x^2/2gy}$$

бўлгани учун Эйлер тенгламаси

$$-g\sqrt{1+y_x^2}\,2gy\sqrt{2gy} + y_x^2/2y\sqrt{2gy\ (1+y_x^2)} -$$

$$- y_{xx}/(1 + y_x^2)\sqrt{2gy\ (1+y_x^2)} = 0,$$

яъни $2yy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0$ кўринишни олади. $y(1+y_x^2) = c$ ифода Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли бўлади:

$$d\,[y(1+y_x^2)]/dx = y_x\,(1 + y_x^2 + 2yy_{xx}) = 0.$$

Биринчи интегралнинг ифодасидан $y_x = \sqrt{(c-y)/y}$ ни оламиз. $y = c\sin^2 t/2$ алмаштириш $dx = c\sin^2 t/2 \cdot dt = \dfrac{c\,(1-\cos t)\,dt}{2}$ тенгламага олиб келади, бундан, $x = c_1 + c\,(t - \sin t)/2$, $y = c\,(1 - \cos t)/2$. C, C_1 ихтиёрий ўзгармаслар $y\,(x)$ эгри чизиқнинг координаталар боши ва B нуқтадан ўтиш шартидан топилади. Шунинг учун, $c_1 = 0$.

Ушбу $x = c\,(t - \sin t)/2$, $y = c\,(1 - \cos t)/2$ тенгламалар тизими циклоиданинг параметрик кўринишдаги тенгламасидан иборат. Демак, фақат циклоида ёйи брахистохрона бўлиши мумкин экан.

3-§. ИККИНЧИ ВАРИАЦИЯНИ ТЕКШИРИШ

Олдинги параграфда вариацион ҳисоб асосий масаласидаги функционалнинг биринчи вариациясини текширишга асосланган кучсиз минимумнинг зарурийлик шартлари вариациялар усули ёрдамида олинди. Кучсиз минимумнинг янги зарурийлик шартлари ҳамда кучсиз минимумнинг етарлилик шартлари функционалнинг иккинчи вариациясини вариациялар усули билан текширганда олинади. Мазкур параграфда кучсиз минимумнинг баъзи иккинчи тартибли классик шартлари баён қилинади.

1. **Минимум ҳақида бириктирилган масала.** Агар

$$\omega(x, h, h_x) = h^2\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y^2 + \\ + 2hh_x\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y\,\partial y_x + \\ + h_x^2\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \tag{1}$$

деб белгиласак, 2-§ даги асосий масала функционалининг иккинчи вариацияси $\delta^2 I(y, h)$ учун (5) ифода жоиз $y(x)$, $x \in [a, b]$ эгри чизиқ бўйлаб

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \omega(x, h, h_x)\,dx \tag{2}$$

кўринишни олади.

(2) иккинчи вариациянинг жоиз эгри чизиқ $y(x)$, $x \in [a, b]$ нинг $h(x)$, $x \in [a, b]$ вариацияларида минималлаштириш масаласи *минимум ҳақида бириктирилган* (жоиз $y(x)$, $x \in [a, b]$ эгри чизиққа мос) *масала* деб аталади.

Барча $h(x)$, $x \in [a, b]$ вариацияларда $\delta^2 I(y^0, h) \geqslant 0$ бўлгинлигидан (1-§ даги 1-теоремани қ.), минимум ҳақида бириктирилган масала $y^0(x)$, $x \in [a, b]$ кучсиз минимал бўйлаб ҳамиша $h^0(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$ ечимга эга бўлади ва $\delta^2 I(y^0, h^0) = 0$.

Минимум ҳақида бириктирилган масаланинг (2) функционали бўйича тузилган Эйлер тенгламаси

$$\frac{\partial\omega}{\partial h} - \frac{d}{dx}\frac{d\omega}{dh_x} = 0 \tag{3}$$

вариацион ҳисоб асосий масаласининг *Якоби тенгламаси* деб аталади. Тўлиқ ёзувда ((1) ифодани ҳисобга олганда ва $h(x) \in C^{(2)}$ бўлганди) Якоби тенгламаси иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама

$$a(x)\,h_{xx} + b(x)\,h_x + c(x)\,h = 0 \tag{4}$$

бўлиб, унинг коэффициентлари ўзгарувчан бўлади:

$$a(x) = \partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2,$$

$$b(x) = \frac{d}{dx}\,\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2,$$

$$c(x) = \frac{d}{dx}\,\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y\partial y_x - \tag{5}$$

$$-\partial^2 F\ (x,\ y\ (x),\ y_x\ (x))/\partial y^2.$$

2. **Лежандр-Клебш шарти**. Вариациялар усули ёрдамида кучсиз минимумнинг қуйидаги иккинчи тартибли зарурий шартини исботлаймиз.

1-теорема. Ҳар бир $y^0\ (x) \in C^{(1)},\ x \in [a,\ b]$ минимал бўйлаб Лежандр-Клебш шарти бажарилади:

$$\partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))/\partial y_x^2 \geqslant 0,\ x \in [a,\ b].$$

Исботи. Айтайлик, теорема ўринли бўлмасин, яъни $\theta \in]a,\ b[$ бўлганда

$$\partial^2 F\ (\theta,\ y^0\ (\theta),\ y_x^0\ (\theta))/\partial y_x^2 = \alpha < 0 \qquad (6)$$

тенгсизлик бажарилсин.

Ушбу

$$h\ (x) = \sin^2 \pi (x - \theta + \varepsilon)/2\varepsilon,\ x \in]\theta - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon[;$$
$$h\ (x) \equiv 0,\ x \bar{\in}]\theta - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon[\qquad (7)$$

вариацияни қараймиз (VI.9-чизма), у ҳолда

$$h_x\ (x) = \frac{\pi}{2\,\varepsilon} \cdot \sin \pi\ [x - \theta + \varepsilon)/\varepsilon,\ x \in]\theta - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon[;$$
$$h_x\ (x) \equiv 0,\ x \bar{\in}]\theta - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon[. \qquad (8)$$

(2) функционалнинг иккинчи вариацияси $\delta^2 I\ (y,\ h)$ (7), (8) ни ҳисобга олганда

$$\delta^2 I\ (y^0,\ h) = \int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \omega^0\ (x,\ h,\ h_x)\ dx \qquad (9)$$

бўлади, бу ерда $\omega^0\ (x,\ h,\ h_x)$ ифода $y = y^0\ (x)$ бўйлаб ҳисобланган (1) ифодадан иборат. (7), (8) дан кўринадики, етарли кичик $\varepsilon > 0$ лар учун $h_x\ (x)$ сонлар $h\ (x)$ сонлардан исталган сон марта ортиқ бўлади. Бошқа сўз билан айтганда, (1) ифодада кичик $\varepsilon > 0$ ларда (9) иккинчи вариацияларга асосий ҳисса қўшадиган охирги $h_x^2\, \partial^2 F/\partial y_x^2$ қўшилувчи энг катта бўлади. (6) га кўра ва

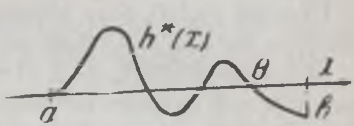
$$\partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))/\partial y_x^2,\ x \in [a,\ b]$$

функциянинг узлуксизлигига кўра шундай етарли кичик $\varepsilon > 0$ сон топиладики, $\partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))/\partial y_x^2 < 0,\ x \in]\theta - - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon[$ бўлади. Бу тенгсизликни (9) га қўйиб ва юқоридаги мулоҳазаларни ҳисобга олиб, минимумнинг зарурийлик шарти $\delta^2 I\ (y^0,\ h) \geqslant 0$ га зиддиятга олиб келувчи $\delta^2 I\ (y^0,\ h) < < 0$ тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

3. Якоби шарти. Агар (4) Якоби тенгламасининг $h(a)=0$, $h(x^*)=0$ шартларни қаноатлантирувчи, айнан ноль бўлмаган $h(x)\not\equiv 0$, $x\in[a, b]$ ечими мавжуд бўлса, $x^*\in[a, b]$ *нуқта* жоиз $y(x)$, $x\in[a, b]$ эгри чизиқ бўйлаб *а нуқта билан қўшма* дейилади.

2-теорема (Якоби). Махсус бўлмаган $y^0(x)\in C^{(1)}$, $x\in[a, b]$ минимал бўйлаб a нуқта билан қўшма $x^*\in[a, b]$ нуқталар мавжуд эмас.

Исботи. Тескарисидан мулоҳаза қиламиз: $y^0(x)$, $x\in[a, b]$ бўйлаб a га қўшма бўлган $\theta\in\,]a, b[$ нуқта мавжуд бўлсин. Айтайлик, $h^*(x)\not\equiv 0$, $x\in[a, b]$ Якоби тенгламасининг мос ечими бўлсин (VI.13-чизма). Равшанки,



VI.13- чизма.

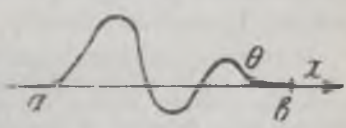
$$h^*_x(\theta-0)\neq 0, \tag{10}$$

акс ҳолда чизиқли дифференциал тенгламалар ечимларн мавжудлиги ва ягоналиги теоремаларига кўра $h^*(x)\not\equiv 0$, $x\in[a, b]$ айниятни оламиз.

Ушбу

$$h(x)=\begin{cases} h^*(x), & x\in[a, \theta], \\ 0, & x\in[\theta, b] \end{cases} \tag{11}$$

вариацияни қурайлик (VI.14-чизма). Бу вариация бўйлаб (2) иккинчи вариацияни ҳисоблаймиз. Бир жинсли (иккинчи тартибли) функциялар учун $2\omega(x, h, h_x)=h\partial\omega/\partial h+h_x\partial\omega/\partial h_x$, Эйлер формуласини, $h^*(x)$, $x\in[a, b]$ функция қаноатлантирадиган (3) Якоби тенгламасини ҳамда $h^*(a)=h^*(\theta)=0$ хоссани ҳисобга олсак,



VI.14- чизма.

$$\delta^2 I(y^0, h)=\int_a^b\omega^0(x, h, h_x)\,dx=\int_a^\theta\omega^0(x, h^*, h^*_x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^\theta(h^*\partial\omega^0/\partial h+h^*_x\,\partial\omega^0/\partial h_x)\,dx=$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^\theta \left(h^* \frac{d}{dx} \partial \omega^0/\partial h_x + h_x^* \partial \omega^0/\partial h_x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^\theta \frac{d}{dx} \left(h^* \partial \omega^0/\partial h_x \right) dx = \frac{1}{2} h^*(x) \, \partial \omega^0/\partial h_x \Big|_a^\theta = 0.$$

бўлади.

Шундай қилиб, (11) вариация минимум ҳақидаги бириктирилган масаланинг ечимидан иборатдир.

(10) муносабат $h_x\ (\theta + 0) = 0$ билан биргаликда (11) вариация $x = \theta$ нуқтада синишга эга эканлигини ифодалайди. Демак, $x = \theta$ бўлганда 2-§ даги (35) Вейерштрасс-Эрдман шарти бажарилиши керак:

$$\partial \omega^0/\partial h_{x|x=\theta-0} = \partial \omega^0/\partial h_{x\ x=\theta+0}$$

бу эса тўлиқ ёзувда

$$\begin{gathered}[2h^* \partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x)/\partial y \partial y_x + 2h_x^*\ \partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x), \\ y_x^0\ (x))/\partial y_x^2]_{x=\theta-0} = [2h^* \partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))/\partial y \partial y_x + \quad (12) \\ + 2h_x^* \partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))(\partial y_x^2]_{x=\theta+0}\end{gathered}$$

кўринишни олади. $h\ (\theta - 0) = h\ (\theta + 0) = 0$, $h_x\ (\theta + 0) = 0$. $\partial^2 F\ (x,\ y^0\ (x),\ y_x^0\ (x))/\partial y_x^2 > 0$, $x \in]a, b[$ бўлганлигидан, (12, дан, θ — (11) вариациянинг синиш нуқтаси бўлиш шартига қарама-қарши $h_x^*\ (\theta + 0) = 0$, $h_x^*\ (\theta - 0) = 0$ тенгламаларни оламиз. Теорема исботланди.

Изоҳ. (11) *вариация*, олдинги фойдаланилган вариациялардан фарқли улароқ, $]a, \theta[$ интервалда нолдан фарқлилиги маъносида *локал бўлмаган* вариациядир. Шунга мос равишда 2-теоремадаги кучсиз минимумнинг иккинчи тартибли зарурийлик шарти (*Якоби шарти*) бир-биридан чекли масофаларда жойлашган нуқталар билан боғлиқ *локал бўлмаган шартни* ифодалайди.

4. Кучсиз минимумнинг етарлилик шартлари. Содда мисоллар кўрсатадики, исботланган учта (стационарлик, Лежандр, Якоби) шартнинг бирортаси ҳам алоҳида қараганда кучсиз минимумнинг етарлилик шарти бўлмайди. Лекин улар биргаликда кучсиз минимумнинг етарлилик шартларига яқиндир.

Агар жоиз эгри чизиқ $y\ (x)$, $x \in [a, b]$ бўйлаб: 1) $\partial^2 F\ (x,\ y\ (x),\ y_x\ (x))/\partial y_x^2 > 0$, $x \in [a,\ b]$ қатъий тенгсизлик бажарилса, $y\ (x)$, $x \in [a,\ b]$ *кучайтирилган Лежандр-Клебш шартини* қаноатлантиради дейилади; 2) $[a,\ b]$ ёпиқ кесмада a нуқта билан қўшма бўлган $x^* \neq a$ нуқталар мавжуд бўлмаса, $y(x)$, $x \in [a, b]$ *кучайтирилган Якоби шартини* қаноатлантиради дейилади.

3-теорема. Агар жоиз $y(x)$, $x \in [a, b]$ эгри чизиқ: 1) экстремал бўлса; 2) кучайтирилган Лежандр-Клебш шартини қаноатлантирса; 3) кучайтирилган Якоби шартини қаноатлантирса, y вариацион ҳисоб асосий масаласининг кучсиз минималидан иборат бўлади.

Исботи. (1) функционалнинг иккинчи вариацияси (2) ни қараймиз. Унда бўлаклаб интеграллаш ёрдамида иккинчи қўшилувчини ўзгартирамиз:

$$\int_a^b 2hh_x \frac{\partial F}{\partial y\,\partial y_x}\,dx = \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}\,d/dx h^2 dx =$$

$$= \int_a^b h^2 d/dx \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_x}\,dx. \qquad (13)$$

Айтайлик,

$$u(x) \in C^{(2)},\ u(x) > 0,\ x \in [a, b] \qquad (14)$$

ихтиёрий функция бўлсин.

Иккинчи вариациядан нолга тенг бўлган

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{u}\frac{\partial^2 E}{\partial y_x^2}h^2\right)dx = \frac{u_x}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}h^2\Big|_a^b = 0 \qquad (15)$$

ифодани айирамиз.

(2) дан (13), (15) ни ҳисобга олган ҳолда

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y_x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{u}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}\right)\right]h^2 - \right.$$

$$\left. -2\left[\frac{u_x}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}\right]hh_x - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}\right]h_x^2\right\}dx \qquad (16)$$

ни оламиз.

$u(x)$, $x \in [a, b]$ функцияни шундай танлаб оламизки, (16) да интеграл остидаги катта қавс ичидаги ифода h, h_x га нисбатан тўла квадрат ҳосил қилсин. Бунинг учун

$$\left[\frac{u_x}{u}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}\right]^2 = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y_x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{u}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}\right)\right]\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \qquad (17)$$

айниятнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Шунингдек,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{u}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y_x^2}\right)=\left(\frac{u_{xx}u-u_x^2}{u^2}\right)\frac{\partial^2F}{\partial y_x^2}+\frac{u_x}{u}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y_x^2}$$

бўлганлигидан, (17) айният

$$[-u_{xx}(\partial^2F/\partial y_x^2)-u_x(d/dx\,\partial^2F/\partial y_x^2)+$$
$$+(\partial^2F/\partial y^2-d/dx\,\partial^2F/\partial y\,\partial y_x]/u\cdot\partial^2F/\partial y_x^2=0$$

кўринишни олади, яъни (5) белгилашлар ва теореманинг 2) шартини ҳисобга олсак, $u(x)$, $x\in[a, b]$ функция

$$(a(x)\,u_{xx}+b(x)\,u_x+c(x)\,u)/u=0,\ x\in[a, b].$$

тенгламани қаноатлантириши керак. Теореманинг 3) шартига асосан

$$a(x)\,u_{xx}+b(x)\,u_x+c(x)\,u=0. \qquad (18)$$

Якоби тенгламаси $u(a)=0$, $u(x^*)=0$, $x^*\in[a, b]$ бўлган айнан ноль бўлмаган $u(x)$, $x\in[a, b]$ ечимларга эга бўлмайди. $[a, b]$ тўпламнинг компактлиги ва дифференциал тенгламалар ечимларининг бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқлигидан шундай етарли кичик $\varepsilon>0$ соннинг мавжудлиги келиб чиқадики, (18) тенгламанинг $u(a-\varepsilon)=0$, $u_x(a-\varepsilon)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $[a, b]$ да мусбат бўлади. Шундай қилиб, (14), (17) шартларни қаноатлантирувчи $u(x)$ функция мавжуд. У (16) ни

$$\delta^2 I(y, h)=\int_a^b\{[\partial^2F/\partial y_x^2]^{1/2}h_x-[\partial^2F/\partial y^2-d/dx\,\partial^2F/\partial y\,\partial y_x-$$
$$-d/dx\,(u_x/u\cdot d^2F/y_x^2)]^{1/2}h\}^2\,dx. \qquad (19)$$

кўринишда ёзишга имкон беради.

(19) дан кўринадики, барча $h(x)$, $h\in[a, b]$ вариацияларда $\delta^2 I(y, h)\geqslant 0$. Агар $h^*(x)=0$, $x\in[a, b]$ да $\delta^2 I(y, h^*)=0$ бўлади деб фараз қилсак, (19) интеграл остидаги ифоданинг нолга айнан тенглигидан ҳамда $\partial^2F/\partial y_x^2>0$, $h^*(a)=0$ шартлардан $h_x^*(a)=0$ эканлиги келиб чиқади. Лекин $h^*(x)$ функция минимум ҳақида бириктирилган масаланинг ечими бўл-

ганлигидан (чунки $\delta^2 I(y, h^*) = 0$), $h^*(a) = h^*_x(a) = 0$ бўлганда ягона $h^*(x) = 0$, $x \in [a, b]$ ечимга эга бўладиган (4) Якоби тенгламасини қаноатлантириши керак. Олинган зиддият $h(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$ бўлганда $\delta^2 I(y, h) > 0$ бўлишини исботлайди.

Ушбу

$$\Phi(y, h) = \delta^2 I(y, h) - q/2 \int_a^b h_x^2(x)\, dx, \quad q > 0 \qquad (20)$$

функционални қараймиз. Унинг учун Эйлер тенгламаси

$$(a(x) - q)\, h_{xx} + b(x)\, h_x + c(x)\, h = 0 \qquad (21)$$

кўринишга эга.

$a(x) = \partial^2 F/\partial y_x^2$, $x \in]a, b]$ бўлганлигидан, шундай $q > 0$ топиладики, $a(x) - q > 0$, $x \in [a, b]$. Фаразимизга кўра (4) Якоби тенгламасининг

$$h(a) = 0, \quad h_x(a) = 1 \qquad (22)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $]a, b[$ тўпламда нолга айланмайди. Дифференциал тенгламалар ечимларининг параметрларга узлуксиз боғлиқлигига кўра етарлича кичик q лар учун (21) тенгламанинг (22) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими ҳам шу хоссага эга бўлади. (20) функционал учун юқорида (12) иккинчи вариация билан амалга оширилган алмаштиришларни такрорлаб, барча $h(x)$, $x \in [a, b]$ вариациялар учун $\Phi(y, h) \geqslant 0$ тенгсизликни оламиз. Бу (20) га асосан кўрсатадики, барча $h(x)$ вариацияларда функционалнинг иккинчи вариацияси

$$\delta^2 I(y, h) \geqslant q/2 \int_a^b h_x^2(x)\, dx \qquad (23)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Шунингдек, $h(x) = \int_a^x h_x(s)\, ds$ бўлганлигидан, Коши-Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб,

$$h^2(x) = \left(\int_a^x h_x(s)\, ds\right)^2 \leqslant (x - a) \int_a^x h_x^2(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant (b - a) \int_a^b h_x^2(x)\, dx, \quad x \in [a, b],$$

$$\int_a^b h^2(x)\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b h_x^2(x)\,dx$$

ни оламиз. Демак, (23) билан биргаликда

$$\delta^2 I\ (y,\ h) \geqslant q/2\ (b-a)\int_a^b h^2(x)\,dx \tag{24}$$

тенгсизлик бажарилади.

Таърифга кўра (2-§ га қ.) $\delta^2 I\ (y,\ h)$ иккинчи вариация

$$\Delta I\ (y) = I\ (y+\varepsilon h) - I\ (y) =$$
$$= \varepsilon\delta I\ (y,\ h) + \varepsilon^2/2\cdot\delta^2 I\ (y,\ h) + 0\ (\varepsilon^2,\ \|h\|^2)$$

муносабатни қаноатлантиради, бу ерда $\varepsilon\to 0$ да $0\ (\varepsilon^2,\ \|h\|^2)\to 0$.

Бу муносабат ва $y\ (x),\ x\in[a,\ b]$ асосий масаланинг экстремали эканлигини ($\delta I\ (y,\ h)=0$) ҳисобга олсак, (24) дан барча $\delta y\ (x) = \varepsilon h\ (x),\ x\in[a,\ b],\ \int_a^b h^2(x)\,dx \leqslant \varphi,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, агар $\alpha<\infty$ ва $\varepsilon_0>0$ етарли кичик сон бўлса, — кучсиз вариациялар учун ўринли бўлган $\Delta I\ (y)\geqslant 0$ тенгсизликни оламиз. Теорема исботланди.

5. **Мисол.** Ушбу

$$I\ (y) = \int_0^\alpha (y_x^2 - y)^2\,dx \to \min,\ y\ (0) = y\ (\alpha) = 0 \tag{25}$$

масалани қарайлик. Эйлер тенгламасини ёзамиз: $y_{xx}+y=0$. Унинг умумий ечими (экстремаллар тенгламаси): $y\ (x) = c\sin x + d\cos x$. (25) даги чегаравий шартлардан $y\ (0) = d = 0,\ y\ (\alpha) = c\sin\alpha = 0$, яъни (25) масаланинг ечими $y\ (x) = c\sin x,\ x\in[a,\ b]$. $c\sin\alpha = 0$ эгри чизиқ ичида ётади.

$\partial^2 F/\partial y_x^2 = 2>0$ бўлганлигидан, ҳар бир экстремал махсус бўлмаган силлиқ бўлиб, у бўйлаб Лежандр-Клебш шарти бажарилади.

Ихтиёрий экстремал бўйлаб Якоби тенгламаси $h_{xx}+h=0$ бўлади. Келтирилган ҳисоблашлардан кўринадики, Якоби тенгламасининг $h\ (0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ҳар бир айнан нолга тенг бўлмаган ечими $h\ (x) = \gamma\sin x,\ \gamma\neq 0$ кўринишга эга бўлади. Бинобарин, $0<\alpha\leqslant\pi$ бўлганда $]0,\ \alpha[$ тўпламда $x=0$ нуқта билан қўшма бўлган нуқталар йўқ ва экстремаллар Якоби шартини қаноатлантиради. Агар $\alpha<\pi$ бўлса, 3-теореманинг шартлари бажарилади, яъни жоиз $y\ (x)=0$. $x\in[0,\alpha]$ эгри чизиқ (25) масаланинг кучсиз минималидан иборат. $\alpha>\pi$ бўлганда $[0,\ \alpha]$ кесмада $x=0$ билан қўшма бўлган θ ($\sin\theta=0$) нуқталар мавжуд, яъни қаралаётган экстремаллар Якоби шартини қаноатлантирмайди ва (25) масаланинг ечимлари бўла олмайди. (25) масалада бошқа экстремаллар бўлмаганлигидан, $\alpha>\pi$ бўлганда (25) масала ечимга эга эмас.

АДАБИЁТ

1. *Блисс Г. А.* Лекции во вариационному исчислению, — М.: ИЛ, 1950.

2. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Госиздат. физ.— мат. литературы, 1961.

3. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления- — М.. — Л.: ГИТТЛ, 1941.

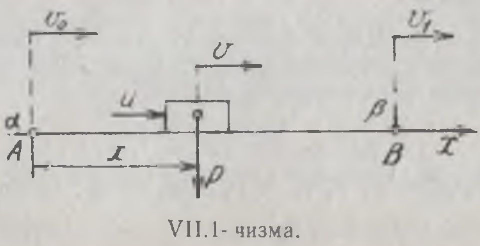
VII боб. ОПТИМАЛ БОШҚАРУВ НАЗАРИЯСИ

Вариацион ҳисоб (VI боб) ривожланишининг ҳозирги замон босқичини акс эттирувчи *оптимал бошқарув назарияси* техника ривожланишининг хилма-хил соҳаларида амалиёт томонидан қўйилган қатор масалаларни ечиш зарурати билан боғлиқ равишда, XX асрнинг 50-йилларида вужудга келди. Бу масалалар математик моҳияти жиҳатидан вариацион бўлиб, классик моделлар доирасига жойлашмади ва уларни ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқишни талаб қилди. Оптимал бошқарув назариясида 1956 йилда Л. С. Понтрягин бошчилигидаги математиклар гуруҳи томонидан очилган *Понтрягиннинг максимум принципи* асосий усул (натижа) сифатида тан олинган. Оптимал бошқарув масалаларини текширишда Р. Беллманнинг динамик программалаш усули (V боб) ҳам катта роль ўйнайди.

1-§. ОПТИМАЛ БОШҚАРУВНИНГ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

Оптимал бошқарувнинг математик назариясидаги биринчи масала тез таъсир масаласи бўлиб, у бошқарувнинг оптимал тизимларини қуриш ҳақидаги кўпгина инженерлик масалаларининг умумий ҳоли сифатида юзага келган ва унда мужассам саволлар комплексининг муваффақиятлилигига мувофиқ асосий масала бўлиб қолди.

1. Энг содда механик ҳаракатни тез таъсир бўйича оптимал бошқарув масаласи. Бирлик массали моддий нуқтани



VII.1- чизма.

модули бўйича бирдан катта бўлмаган горизонтал куч ёрдамида минимал вақт давомида горизонтал тўғри чизиқ бўйича у берилган v_0 тезликка эга бўлган бошланғич A ҳолатдан берилган v_1 тезликда охирги B ҳолатга ўтказиш талаб қилинсин (VII.1- чизма).

Масаланинг математик қўйилишини *бошқарув объектининг* ўзгаришини ифодалашдан — моддий нуқтанинг ҳаракатидан бошлаймиз. Ньютон қонунига асосан нуқтанинг Ox бўйлаб ҳаракати

$$\ddot{x} = u \tag{1}$$

тенглама билан ифодаланади, бу ерда $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$ — нуқтанинг t вақт моментидаги тезланиши; $u(t)$ — бошқарув объектига t моментда таъсир қиладиган кучнинг катталиги.

Масаланинг физик қўйилишидан $x(t)$ учун ушбу чеклашлар келиб чиқади:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0,\ x(t_1) = \beta,\ \dot{x}(t_1) = v_1, \tag{2}$$

бу ерда $\dot{x} = dx/dt$ — нуқтанинг тезлиги; $t = 0$ — бошланғич момент; $t = t_1$ — ҳаракатнинг охирги моменти.

Фаразимизга кўра нуқтага қўйиладиган u кучнинг қийматлари ҳам чегараланган:

$$|u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0, t_1]. \tag{3}$$

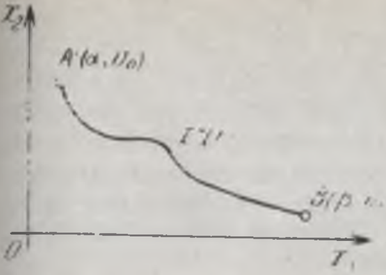
Қаралаётган масалага ўхшаш масалаларнинг дастлабки инженерлик қўйилишларида u кучнинг бўлакли-узлуксиз $u(t)$, $t \in [0, t_1]$ функциялар мос келган $u(t)$, $t \geqslant 0$ қонунлари бўлиши мумкинлиги эътироф қилинган.

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг математик модели (3) $t_1 = t_1^0$ чеклашларни қаноатлантирадиган шундай бўлакли-узлуксиз $u^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ функцияни топишдан иборатки, (1) тенгламанинг унга мос $x^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ ечими (2) чегаравий шартларни қаноатлантирсин ва охирги t_1^0 момент минимал бўлсин.

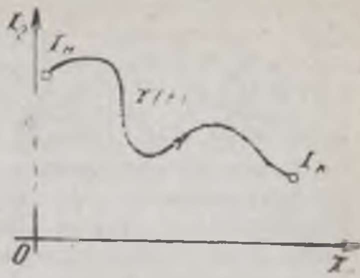
Агар $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ *фаза ўзгарувчилари* (бошқарув объектининг *ҳолат ўзгарувчилари*) га ўтсак, баён қилинган масала қуйидаги кўринишни олади:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ |u| \leqslant 1,\ x_1(0) = 0,$$
$$x_2(0) = v_0,\ x_1(t_1) = \beta,\ x_2(t_1) = v_1,\ t_1 \to \min \tag{4}$$

ва геометрик тилда $\{x_1, x_2\}$ фазалар текислигида (1) тизим-



VII.2- чизма.



VII.3- чизма.

нинг шундай $x^0(t) = \{x_1^0(t),\ x_2^0(t)\}$ траекториясини қуриш кераклигини англатадики, у энг қисқа t_1^0 вақт давомида $A = \{0, v_0\}$ нуқтадан $B = \{\beta, v_1\}$ нуқтага ўтади (VII. 2- чизма).

Берилган ҳаракатни бошқариш масаласи бу талқинда вариацион ҳисобдаги брахистохрона ҳақидаги масалага ўхшашдир (VI боб, 1- §).

Лекин қўшимча (3) чеклашлар, кўп вақт давомида, қаралаётган масала типидаги оптимал бошқарув масалаларини ечишда вариацион ҳисоб натижаларидан фойдаланиш имконини бермай келди.

2. **Оптимал бошқарув асосий масаласининг қўйилиши.** n ўлчовли фазодаги ҳаракати

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{5}$$

тенглама билан ифодаланадиган бирор объектни қараймиз, бу ерда $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — ҳолат; $\dot{x} = dx/dt$ — объектнинг тезлиги; $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — *бошқарув вектори.*

r ўлчовли R_r фазода $U \subset R_r$ тўплам берилган бўлсин. U тўпламдан қийматлар қабул қилувчи: $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, бўлакли-узлуксиз $u(t)$, $t \geqslant 0$ функцияни *мувофиқ бошқарув* деб атаймиз.

Агар (5) тизимнинг мувофиқ $u(t)$, $t \geqslant 0$ бошқарув ва унга мос узлуксиз бўлакли-силлиқ $x(t)$, $t \geqslant 0$ траекториясида берилган $x_б$, $x_{ox} \in R_n$ нуқталар учун бирор $0 < t_1 < \infty$ да

$$x(0) = x_б,\ x(t_1) = x_{ox} \tag{6}$$

тенгликлар бажарилса, улар *жоиз бошқарув* ва *траектория* деб аталади.

Тез таъсир масаласи (*оптимал бошқарувнинг асосий ма-*

саласи) қуйидагичадир: жоиз бошқарувлар ичида шундай $u^0(t)$, $t \geqslant 0$ ни топиш керакки, у $x^0(t)$, $t \geqslant 0$ траекторияни $x_б$ дан x_{ox} га мумкин бўлган минимал t_1^0 вақтда ўтказсин (VII.3- чизма). $x^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ траектория ва уни ҳосил қилувчи жоиз $u^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ — *тез таъсир вақтидир.*

Оптимал бошқарувнинг мавжудлиги теоремасини исботсиз келтирамиз: агар $f(x, u) \in C$ бўлган (5) тизимнинг жоиз траекториялари тўплами бўш бўлмаса ва чегараланган бўлса ҳамда *жоиз тезликлар тўплами*

$$f(x, U) = \{y: y = f(x: u),\ u \in U\} \tag{7}$$

қавариқ компакт бўлса, тез таъсир масаласи ўлчовли функциялар синфида ечимга эгадир.

Изоҳ. Агар муайян масалада (7) шарт бажарилмаса, бу масала қабул қилинган маънода ечимга эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу ҳолда *Гамкрелидзе кенгайтиши* деб аталган усулга ўтиш мумкин. Бунда хусусан, $f(x, U)$ тўплам қуйидаги қавариқ қобиққа алмаштирилади:

$$\{y : y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ f(x, u_i),\ u_i \in U,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\},$$

(5) ўрнига эса бошқарувлари u_i, α_i, $i = \overline{1, n+1}$ бўлган

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ f(x, u_i),\ u_i \in U,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$$ тенглама қаралади.

Кенгайтирилган масала ечимга эга ва у орқали дастлабки масала учун минималлаштирувчи жоиз бошқарувлар кетма-кетлигини қуриш мумкин.

3. Муҳокама. Оптимал бошқарув асосий масаласининг қўйилишида (5) дифференциал тенгламанинг қатнашиши уни

$$\Phi_i(y, y_x) = 0,\ \ i = \overline{1, n+r} \tag{8}$$

дифференциал чекланишли вариацион ҳисоб масалалари билан ўхшаш қилади. (5) да (8) муносабатларнинг улар dy_j/dx, $j = j_1, \ldots, j_n$ ҳосилаларнинг бир қисмига нисбатан ечилган, қолган ҳосилалар u_k, $k = \overline{1, r}$ билан белгиланган, хусусий ҳоли қаралади. Қайд қилиб ўтилганидек (VI боб), вариацион ҳисоб масалалари функционал фазолардаги экстремал масалаларнинг махсус ҳолларидан иборатдир. Тез таъсир масаласини VI бобнинг масалалари билан келтирилган таққослаш кўрсатадики, оптимал бошқарув назариясида умумий экстремал масалаларнинг янада махсусроқ ҳоллари қаралади. Қаралаётган масалаларни бундай «соддалаштириш» янги назариянинг камчилиги эмас, балки унинг муҳим афзаллигидан иборатдир, чунки: 1) вариацион ҳисобнинг асосий натижалари оптимал бошқарув назариясидан келиб чиқади; 2) оптимал бошқарув назариясида масалаларнинг махсуслигига мувофиқ классик вариацион ҳисоб усуллари ёрдамида жуда қийин олиниши мумкин бўлган ёки олинмайдиган натижалар олинган; 3) ҳозирги замон техникаси, иқтисодиёт ва инсон фаолиятининг бошқа соҳаларидаги амалий масалалар оптимал бошқарув назарияси доирасида табиий равишда моделлаштирилади.

Оптимал бошқарув масалалари асосий моделининг пайдо бўлишида ҳозирги замон техникасининг XX аср 40-йилларининг иккинчи ярмидан бошлаб ривожлана бошлаган соҳаси — *автоматик* бошқарув катта таъсир кўрсатди. Бу таъсир назариянинг асосий атамаларида ҳам ўз ифодасини топди. Ўхшаш ҳоллар бошқа математик назарияларда ҳам кузатилади. Масалан, вариацион ҳисобнинг ривожланишига механика, чизиқли программалаштиришга эса иқтисод фани сезиларли таъсир кўрсатди.

Оптимал бошқарувнинг бошқа масалаларидаги каби, юқорида қўйилган тез таъсир масаласида ҳам оптималлаштириш $x(t)$, $t \geqslant 0$ траекториялар фазосида эмас, балки танлаш, (5) тенглама орқали биринчи навбатда тизимнинг $\dot{x}$ тезлиги ўзгаришида сезиладиган бошқарувлар фазосида олиб борилади. Эслатамизки, вариацион ҳисобда (VI боб) бундай $y(x)$ дан $y_x\ (x)$ га ўтиш янги натижалар олиш имконини бериши аниқланган эди. Хусусан, мазкур бобнинг асосий факти (Понтрягиннинг максимум принципи) асосан бошқарувни оптималлаштиришнинг асосий объекти сифатида тасаввур қилишга асосланади.

Классик вариацион ҳисоб усулларини оптимал бошқарув масалаларига ўтказишнинг қийинчилиги етарлича кенг, бўлакли-узлуксиз функциялар синфини қараш (илгари қаралган силлиқ ва узлуксиз функциялар ўрнига) билан ҳамда U тўплам ёпиқ бўлиши ҳам мумкин бўлган (6) чекланишларни ҳисобга олиш (бу асосийдир) зарурати билан боғлангандир.

Шуни қайд қилиш керакки, жоиз бошқарувларнинг оптимал бошқарув назариясида қабул қилинган синфлари математикларнинг янада умумийроқ натижалар олиш истаги билан боғланмасдан, балки оптимал бошқарув назариясининг асосларини яратиш вақтида амалий масалаларнинг U дан фақат чегара қийматларни қабул қилувчи бўлакли-узлуксиз, оптимал бошқарувли, етарли мазмунли мисоллари маълумлиги билан боғлангандир.

Тез таъсир масаласининг асосий дейилишига сабаб фақатгина унинг учун *оптимал бошқарув назариясининг асосий натижаси — Понтрягиннинг максимум принципининг* биринчи марта ифодаланганлиги ва исботланганн эмас, балки унда вариацион типдаги янги масалаларнинг бош хусусиятлари аниқ намоён бўлганлигидадир. Тез таъсир масаласи бўйича оптимал бошқарув назариясининг асосий муаммоларини кўриб ўтамиз. Оптимал бошқарувнинг амалий масаласини ечишда юзага келадиган биринчи муаммо *идентификация (амалга ошириш) муаммоси* деб аталади ва у текширилаётган объектни, жараённи математик ифодалашдан (моделини тузишдан) иборатдир. Тез таъсир масаласида модель (15) кўринишда бўлади деб қабул қилинган эди. Татбиқларда моделларнинг бошқа кўп турлари ҳам учрайди. Моделларни тузишда қаралаётган масала мансуб бўлган фан ва техниканинг махсус қонунлари ҳамда физик объектлар устидаги тажрибаларнинг натижалари кенг қўлланилади. Идентификация муаммосидан кейингиси *бошқарув муаммоси* бўлиб, унда ҳеч бўлмаганда битта жоиз траекториянинг мавжудлиги масаласи қаралади.

Бошқарилиш муаммоси билан *кузатилиш муаммоси* узвий боғлиқдир. Унинг моҳияти қуйидагичадир. Амалий масалаларда ҳолат вектори x ни оптималлик муносабатларида, одатда, бевосита ўлчаб бўлмайди, лекин маълум маънода ҳолат (ёки траектория) билан боғлиқ миқдорлар (чиқишлар) ўлчаниши мумкин. Агар эришиладиган ўлчашлар бўйича тизимнинг ҳолатини тиклаш мумкин бўлса тизим кузатилувчи дейилади. Сўнгра *оптимал бошқарувнинг мавжудлик муаммоси,* яъни жоиз бошқарувлар синфида қабул қилинган сифат критерийсига оптимал қиймат берувчи энг яхши бошқарувнинг мавжудлиги ҳақидаги масала ажратилади. Бу муаммо чизиқсиз программалаштиришдаги шунга ўхшаш муаммодан анча қийиндир.

Агар оптимал бошқарув масаласи ечимга эга бўлса, жоиз бошқарувлар ичида оптимал бошқарувларни ўз ичига олувчи торроқ функциялар тўпламини ажратиш керак бўлади. Бу *оптималликнинг зарурийлик шартлари* муаммосидир. Жоиз бошқарувларда бажарилиши уларнинг оптималлигини таъминловчи муносабатларни тузиш *оптималликнинг етарлилик шартлари муаммосининг* асосий масаласидир. Оптимал бошқарув назариясининг асосий ва охирги муамоси *ҳисоблаш усуллари* муаммоси ҳисобланади. Кейинги йигирма беш йил ичида юқорида санаб ўтилган муаммоларнинг ҳар бири бўйича йирик натижалар олинган. Оптимал бошқарув назарияси классик масалаларни чуқурлаштириш йўналишида ҳам, амалда юзага чиқаётган янги масалаларни ечиш жараёнида ҳам ривожланмоқда.

2- §. ПОНТРЯГИННИНГ МАКСИМУМ ПРИНЦИПИ

Оптимал бошқарув масалаларида масаланинг гамильтонианини максималлаштириш билан боғлиқ бўлган оптималликнинг асосий зарурий шарти *максимум принципи* деб аталади. Бу маълум биринчи тартибли зарурий шартлар ичида энг кучлисидир. Мазкур параграфда максимум принципи «соф» натижа олишда жуда қулай бўлган *терминал бошқарувнинг энг содда масаласи* учун исботланади.

1. Терминал бошқарув энг содда масаласининг қўйилиши. Айтайлик, объектнинг ҳаракати

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1] \tag{1}$$

тенглама билан ифодалансин, бу ерда x — n- ҳолат вектори; u — r- бошқарув вектори; t — скаляр (вақт), t_0, x_0 — бошланғич момент ва ҳолат; t_1 — вақтнинг охирги моменти.

Мувофиқ бошқарувлар синфини 1- § нинг асосий масаласидагидек қолдирамиз: улар

$$u(t) \in U, \quad t \in T \tag{2}$$

шартни қаноатлантирувчи бўлакли-узлуксиз r- вектор-функциялардир. Тизимнинг траекторияларига қўшимча шартлар қўйилмаганлигидан, у жоиз бошқарувлар синфи билан устма-уст тушади.

Жоиз бошқарувнинг сифатини (1) тизимнинг охирги (терминал) ҳолатларида аниқланган

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min \tag{3}$$

функционал (*сифат критерийси, мақсад функционали*) билан баҳолаймиз (VII.3- чизма). (1) — (3) масала терминал бошқарувнинг энг содда масаласи деб аталади. Унинг ечими, яъни жоиз $u^0(t)$, $t\in T$ бошқарув ва унга мос $x^0(t)$, $t\in T$ траектория ((1) — (3) масалада) *оптимал бошқарув* ва *траектория* деб аталади. (1) — (3) масалани текширишда $f(x, u, t)$, $\partial f(x, u, t)/\partial x$, $\varphi(x)$, $\partial\varphi/\partial x$ функцияларни узлуксиз деб фараз қиламиз.

2. **Сифат критерийси орттирмасининг формуласи.** Иккита жоиз $u(t)$, $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t\in T$ бошқарувлар ва (1) тизимнинг уларга мос $x(t)$, $\overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t\in T$ траекторияларини қараймиз. (3) сифат критерийсининг орттирмаси

$$\Delta I(u) = I(\overline{u}) - I(u) = \varphi(\overline{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) \tag{4}$$

учун формула топамиз. Қилинган фаразларда (4) ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta I(u) = \Delta x'(t_1)\,\partial\varphi(x(t_1))/\partial x + 0(\|\Delta x(t_1)\|). \tag{5}$$

Траекториянинг орттирмаси $\Delta x(t) = \overline{x}(t) - x(t)$, $t\in T$ ушбу

$$\Delta\dot{x} = f(x + \Delta x, \overline{u}, \tau) - f(x, u, t), \ \Delta x(t_0) = 0, \ t\in T, \tag{6}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради ва уни бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta\dot{x} = \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}\Delta x + \Delta_{\tilde{u}} f(x, u, t) +$$

$$+ \frac{\partial \Delta_{\overline{u}} f(x, u, t)}{\partial x}\Delta x + o_1(\|\Delta x\|), \ \Delta x(t_0) = 0. \tag{7}$$

Бу ерда $\Delta_{\tilde{u}} f(x, u, t) = f(x, \overline{u}, t) - f(x, u, t)$, $\partial f/\partial x = \{\partial f_i/\partial x_j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}\}$ деб белгиланган. $F(t)$, $t\in T$, — $n\times n$ — матрицали функцияни ушбу

$$\dot{F} = AF, \ F(0) = E \tag{8}$$

тенгламанинг ечими сифатида киритамиз, бу ерда $A = A(t) = \partial f(x(t), u(t), t)/\partial x$; E — бирлик диагонал $n\times n$ — матрица. Дифференциал тенгламалар назариясининг тегишли мулоҳазалари орқали (7) тенглама

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(\tau)\,\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(\tau)\,[\partial\Delta_{\tilde{u}} f(x, u, \tau)/\partial x\cdot\Delta x + o_1(\|\Delta x(\tau)\|)]\,d\tau$$

интеграл тенгламага эквивалентлиги кўрсатилади.

Шунинг учун (5) нинг ўрнига

$$\Delta I(u) = [\partial\varphi(x(t_1))/\partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) \Delta_{\bar{u}} f(x, u, t)\, dt +$$

$$+ [\partial\varphi(x(t_1))/\partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) [\partial\Delta_{\bar{u}} f(x, u, t)/\partial x \cdot \Delta x +$$

$$+ o_1(\|\Delta x(t)\|)]\, dt + o(\|\Delta x(t_1)\|) \qquad (9)$$

ни ёзиш мумкин. Энди

$$\psi(t) = -[F^{-1}(t)]' F'(t_1)\, \partial\varphi(x(t_1))/\partial x,$$

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t),$$

$$\Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \bar{y}, t) - H(x, \psi, u, t)$$

деб белгилаймиз. У ҳолда (9) дан изланган орттирма формуласини оламиз:

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t)\, dt + \eta, \qquad (10)$$

бу ерда

$$\eta = \eta_1 + \eta + \eta_3, \quad \eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\eta_2 = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'\, \partial\Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t)/\partial x\, dt; \quad \eta_3 =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, o_1(\|\Delta x(t)\|)\, dt.$$

(8) га мувофиқ, $\psi(t)$ функция қўшма тизим ($u(t)$ $t \in T$ бўйлаб) деб аталадиган

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t_1) = -\partial\varphi(x(t_1))/\partial x \qquad (11)$$

тенгламани қаноатлантиради. ψ векторнинг $\psi_1, \ldots, \psi_n$, компоненталари қўшма ўзгарувчилар деб аталади. $H(x, \psi, u, t)$ функцияни *гамильтониан** деб аташ қабул қилинган. Гамильтониан (1), (11) асосий тенгламаларни ихчам (компакт) ва симметрик кўринишда ёзиш имконини беради:

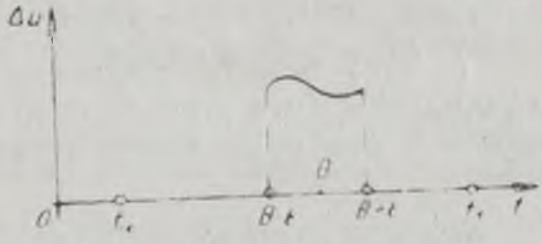
---

* Бу Л. С. Понтрягиннинг таклифидир; бошқа олимлар уни *Понтрягин функцияси* деб атайдилар, чунки у ўзининг вариацион ҳисобдаги ўхшашидан фарқ қилади (VI боб).

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi}=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

3. Игнасимон вариация. Вариацион ҳисоб каби, оптимал бошқарув назариясининг асосий усули — вариациялар усулидир. Лекин оптимал бошқарув назариясининг вариациялари VI боб вариацияларидан принципиал фарқ қилади. Янги типдаги энг содда

$$\Delta u(t)=\begin{cases}0, & t\bar{\in}[\theta-\varepsilon], \ \theta+\varepsilon], \\ v-u(t), & t\in[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon], \ v\in U, \ \theta\in]t_0, t_1[, \varepsilon\neq 0,\end{cases} \tag{12}$$



VII.4- чизма.

вариация VII.4- чизмада тасвирланган бўлиб, *игнасимон* деб аталади. VI бобдаги вариациялар $[t_0, t_1]$ да текис кичик бўлиб, игнасимон вариациянинг кичиклиги вариация нолдан фарқли бўлган кесма узунлигининг кичиклиги билан аниқланади.

Кейинги ҳисоблашлар кўрсатадики, кичик ε ларда игнасимон вариация ёрдамида ҳосил қилинган $\bar{x}(t)$ траектория $x(t)$ дан кам фарқ қилади:

$$\|\bar{x}(t)-x(t)\|\leqslant K|\varepsilon|, \quad t\in T, \tag{13}$$

лекин унинг $d\bar{x}/dt$ ҳосиласи $v\in U$ векторнинг ихтиёрий бўлганлигидан dx/dt дан катта фарқ қилиши мумкин. Шунинг учун игнасимон вариацияни *кучли вариация*, VI бобнинг вариацияларини эса *кучсиз вариация* дейилади. Кучли вариациялар оптимал бошқарув назариясида юқорида аниқланган (кучли) оптимал траекториялар мос келадиган кучли минималларни текшириш учун ишлатилади.

(13) хоссани исботлаш учун (6) тенгламани ечишни игнасимон вариацияда қараймиз. $[t_0, \theta-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ кесмада (6) тенглама

$$\Delta\dot{x}=f(x+\Delta x, \ u, t)-f(x, u, t), \ \Delta x(t_0)=0$$

кўринишда бўлади ва ягона $\Delta x(t) = 0$, $t\in[t_0, \theta-\varepsilon]$ ечимга эга бўлади. (6) тенгламани $[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]$ кесмада ёзамиз:

$$\Delta \dot{x} = f(x+\Delta x, v, t) - f(x, u, t), \ \Delta x(\theta-\varepsilon) = 0.$$

Дифференциал тенгламалар ечимларининг интеграл узлуксизлигидан шундай K_1 сонннинг мавжудлиги келиб чиқадики,

$$\|\Delta x(t)\| = \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leqslant K_1 t, \ t\in[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]$$

бўлади, яъни (13) хосса $[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]$ кесмада ўринлидир. Ниҳоят, (6) тенглама $[\theta+\varepsilon, t_1]$ кесмада

$$\Delta \dot{x} = f(x+\Delta x, u, t) - f(x, u, t), \ \Delta x(\theta+\varepsilon) \sim K_1|\varepsilon|$$

кўринишда бўлади. Дифференциал тенгламалар ечимларининг бошланғич катталикларга узлуксиз боғлиқлигидан фойдаланиб, бирор $K_2 < \infty$ да $\|x(t)\| \leqslant K_2\varepsilon$, $t\in[\theta+\varepsilon, t_2]$ тенгсизлик бажарилишини оламиз. Шундай қилиб, (13) хосса $K = \max\{K_1, K_2\}$ исботланди.

4. Максимум принципи. Агар жоиз $u(t)$, $t\in T$ бошқарув ва дастлабки (1) ҳамда қўшма (11) тизимларнинг унга мос $x(t)$, $\psi(t)$, $t\in T$ траекториялари бўйлаб тизимнинг гамильтонниани максимумга эришса:

$$H(x(t), \psi(t)\, u(t), t) = \max_{u\in U} H(x(t), \psi(t), u, t), \ t\in[t_0, t_1],$$ жоиз

$u(t)$, $t\in T$ бошқарув *максимум шартини* қаноатлантиради дейилади.

1- теорема (Понтрягиннинг максимум принципи). Ҳар бир оптимал бошқарув максимум шартини қаноатлантиради.

Исботи. Айтайлик, $u^0(t)$, $t\in T$ — оптимал бошқарув, $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t\in T$ — (1), (11) тизимларнинг унга мос ечимлари бўлсин. Фараз қилайлик теорема ўринли бўлмасин, яъни бирор $\theta\in]t_0, t_1[$, $v\in U$ ларда

$$H(x^0(\theta, \psi^0(\theta), v, \theta) - H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) =$$
$$= \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) = \alpha > 0$$

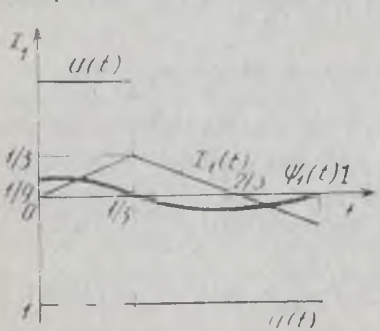
тенгсизлик бажарилсин. $u^0(t)$, $t\in T$ бошқарувни (12) игнасимон вариация билан вариациялаймиз ва (10) бўйича сифат критерийсининг орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta I(u^0) = I(u^0+\Delta u) - I(u^0) = -\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^0, \psi^0, u^0, t))dt + \eta. \tag{15}$$

(12), (13) ни ҳисобга олиб, $\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^0,\varphi^0,u^0,t)dt = 2\varepsilon\Delta_v H(x^0(\theta),$ $\psi^0(\theta),\ u^0(\theta),\ \theta) + o_2(\varepsilon) = 2\varepsilon\alpha + o_2(\varepsilon),\ \ o_2(\varepsilon) \leqslant K_2\varepsilon^2;\ \ \eta_1 \leqslant$ $\leqslant K_3\varepsilon^2,\ \eta_2 \leqslant K_4\varepsilon^2,\ \eta_3 \leqslant K_5\varepsilon^2$ эканлигини топамиз. Бу баҳоларни (15) га қўйиб, оптималликнинг таърифи $\Delta I(u^0) \geqslant 0$ га зид бўлган етарлича кичик $\varepsilon > 0$ ларда $\Delta I(u^0) < 0$ кўринишни оладиган $\Delta I(u^0) \leqslant -2\varepsilon\alpha + K_6\varepsilon^2$ тенгсизликка келамиз. Теорема исботланди.

5. Муҳокама. 1-теоремадан кўринадики, максимум принципи оптималликнинг биринчи тартибли зарурий шартидан иборатдир (унинг ифодасида масала элементларининг биринчи тартиблидан юқори бўлмаган ҳосилаларидан фойдаланилади). Кўп текширишлар кўрсатадики, у оптималликнинг барча маълум биринчи тартибли зарурий шартлари ичида энг кучлисидир ва ундан оптимал бошқарув назарияси ва вариацион ҳисобнинг бошқа кўп натижалари келиб чиқади (4- § га қ.). Аммо умумий ҳолда максимум принципи оптималликнинг етарли шарти эмас, яъни максимум принципини қаноатлантирувчи жоиз бошқарувларнинг (Понтрягин экстремалларининг) ҳаммаси ҳам оптимал бўлавермайди.

Мисол. $\dot{x}_1 = x,\ \ \dot{x}_2 = -x_1^2,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ T = [0, 1],\ |u| \leqslant 1$ $I(u) = \varphi(x(1)) = x_2(1) \to \min$. Гамильтониан: $H = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2$, қўшма тизим $\dot\psi_1 = -\partial H/\partial x_1 = 2\psi_2 x_1,\ \dot\psi_2 = -\partial H/\partial x_2 = 0,\ \psi_1(1) = \partial\varphi(x(1)/\partial x_1 = 0,\ \ \psi_2(1) = -1$. Бу ердан $\psi_2(t) = -1,\ \ t \in [0,\ 1],\ \ \psi_1(t) = -2\int\limits_1^t x_1(\tau)\,d\tau$. Ушбу $u(t) = 1,\ t \in [0,\ 1/3[\ u(t) = -1,\ t \in [1/3,\ 1[$ кўринишдаги жоиз $u(t),\ t \in [0, 1]$ бошқарувни қараймиз (VII.5- чизма). Жоиз траекториянинг биринчи $x_1(t)$ компонентаси $x_1(t) = t,\ t \in [0, 1/3]$; $x_1(t) = -t + 2/3,\ \ t \in [1/3,]$ кўринишда бўлади. VII.5-чизмада $\psi_1(t),\ t \in [0, 1]$ функция ҳам тасвирланган. $u(t) = \operatorname{sign}\psi_1(t)$ бўлганлигидан, қаралаётган бошқарув максимум принципини қаноатлантиради, лекин у оптимал бўлмайди, чунки $I(u) = -1/27$, жоиз $\bar{u}(t) = 1,\ t \in [0, 1]$ бошқарувда эса $I(\bar{u}) = -1/3$.



VII.5- чизма.

6. Терминал бошқарув масаласини динамик программалаштириш усули билан ечиш. (1) — (3) масалаларни скаляр τ ва n вектор x параметрларга боғлиқ бўлган

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(\tau) = x,\ u(t) \in U,\ t \in T_\tau = [\tau, t],$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min \tag{16}$$

масалалар оиласига туркумлаймиз.

Оиланинг умумий масаласида сифат критерийси $I(u)$ нинг минимал қийматини $B(x, \tau)$ деб белгилаймиз (Беллман функцияси). $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, $\Delta\tau > 0$ кесмада Беллман тенгламасини олиш учун $u(t) = v(t)$, $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ бошқарувни танлаймиз. Бу бошқарув таъсири остида (16) тизим $x(\tau) = x$ ҳолатдан

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \Delta\tau f(x(\tau), v(\tau), \tau) + 0(\Delta\tau) \tag{17}$$

ҳолатга ўтади. Айтайлик, (16) тизим $t = \tau + \Delta\tau$ моментдан бошлаб, $x(\tau + \Delta\tau)$ ҳолатдан $u(t) = u(t \mid x(\tau + \Delta\tau),\ \tau + \Delta\tau$, $t \in [\tau + \Delta\tau, t_1]$ бошқарув ёрдамида оптимал бошқарилсин. Бунда Беллман функциясининг аниқланишига асосан сифат критерийси $B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ қийматга эришади. Шундай қилиб, $u(t) = v(t)$, $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau[$, $u(t) = u(t \mid x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$, $t \in [t + \Delta\tau, t_1]$ бошқарувда сифат критерийси

$$B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leqslant B(x, \tau) \tag{18}$$

қийматга эришади.

Агар $v(t)$, $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau[$ сифатида (16) масалада $u(t \mid x, \tau)$ оптимал бошқарувнинг қисмини олсак, равшанки,

$$B(x^0(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) = B(x, \tau) \tag{19}$$

бўлади. Айтайлик, $B(\tau, x) \in C^{(1)}$ бўлсин. У ҳолда (18), (19) дан

$$B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, v(\tau), \tau) \Delta\tau + $$
$$+ o(\tau) \leqslant B(x, \tau),$$

$$B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, u^0(\tau), \tau) \Delta\tau +$$
$$+ o(\tau) = B(x, \tau) \tag{20}$$

эканлигини оламиз.

$B(x, \tau)$ га қисқартириб ва сўнгра (20) нинг иккала томонини $\Delta\tau$ га бўлиб, $\Delta\tau \to 0$ дан кейин минималлаштириш амали билан мураккаблашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламадан ушбу Беллман тенгламасига* келамиз:

$$-\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial\tau}=\min_{v\in U}\frac{\partial B'(x,\tau)}{\partial x}f(x,v,\tau). \qquad (21)$$

(21) тенглама учун Беллман функциясининг таърифидан қуйидаги

$$B(x,t_1)=\varphi(x) \qquad (22)$$

чегаравий шартни оламиз.

Понтрягиннинг максимум принципи ва Беллман тенгламаси орасида узвий боғланиш мавжуд: агар $u^0(t)$, $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t\in T$ — оптимал бошқарув ва бошланғич ҳамда қўшма тизимларнинг унга мос ечимлари бўлиб, $B(x,t)\in C^{(2)}$ эса (21), (22) Беллман тенгламасининг ечими бўлса,

$$\psi^0(t)=-\frac{\partial B(x^0(t),t)}{\partial x},\ t\in T \qquad (23)$$

бўлади. Ҳақиқатан, (21) дан

$$\frac{\partial B'(x^0(t)\,t)}{\partial x}f(x^0(t),u^0(t),t\equiv-\frac{\partial B(x^0(t),t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B'(x,t)}{\partial x}f(x^0,\ u(t),t)\geqslant-\frac{\partial B(x,t)}{\partial t},\ x=x^0(t)$$

келиб чиқади, яъни $f'(x,\ u^0(t),\ t)\,\partial B(x,\ t)/\partial x+\partial B(x,\ t)/\partial t$ функция ҳар бир $t\in T$ моментда x аргумент бўйича $x=x^0(t)$ нуқтада максимумга эришади. Унинг учун стационарлик шартини ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 B(x_0(t),t}{\partial x^2}f\,x^0(t)\,u^0(t),t)+\frac{\partial B'(x^0(t),t)}{\partial x}\times$$

$$\frac{\partial f(x^0(t),u^0(t),t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 B(x^0(t),t)}{\partial x\,\partial t}=0. \qquad (24)$$

Иккинчи томондан, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t\in T$ бўйлаб

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial B(x^0(t),t)}{\partial x}=\frac{\partial^2 B(x^0(t),t)}{\partial x^2}f(x^0(t),u^0(t),t)+$$

$$+\frac{\partial^2 B(x^0(t),t)}{\partial x dt} \qquad (25)$$

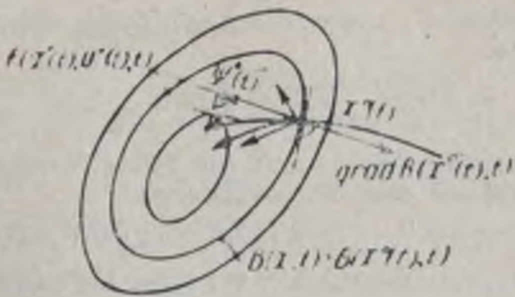
га эгамиз. (24) ни (25) билан таққослаб, $\partial B(x^0(t),t)/\partial x$ функция қўшма (11) тизимни қаноатлантиради, деган хулосага

---

* Беллман тенгламаси Гамильтон-Якоби тенгламасининг ҳозирги замон ўхшашидан иборатдир (VI боб, 2- §, 8- банд).

келамиз. Лекин (21) га мувофиқ $\partial B(x^0(t_1),t_1)/\partial x=\partial\varphi(x^0(t_1))/\partial x$ тенглик ўринли, у ҳолда (11) тизим ечимининг ягоналигига асосан (23) формула бажарилади.

(23) формула максимум принципини кўргазмали геометрик талқин қилиш имконини беради. $u^0(t)$ оптимал бошқарув ҳар бир t моментда тизимга Беллман функцияси $B(x,t)$ нинг $x^0(t)$ нуқтадаги антиградиенти $\psi^0(t)$ йўналишида максимал проекцияга эга бўлган $f(x^0(t),u^0(t),t)$ тезлик беради (VII.6 - чизма).



VII.6- чизма.

7. Оптималликнинг етарлилик шарти. 6- бандда (21) тенгламадан Понтрягиннинг максимум принципи анча кучли талабларда олинди. Ҳозирги ишларда (21) тенгламадан, одатда, оптималликнинг зарурийлик шартларини эмас, балки етарлилик шартларини ифодалаш учун фойдаланилади.

2- теорема. Айтайлик, $B(x,t)$ — (21) Беллман тенгламасининг

$$B(x,t_1)=\varphi(x)+\lambda' g(x)\ (\lambda\geqslant 0) \qquad (26)$$

чегаравий шартли силлиқ ечими $u(x,t)$ қуйидаги

$$\frac{\partial B'(x,t)}{\partial x}\, f(x,y(x,t),t)=\min_{u\in U}\frac{\partial B'(x,t)}{\partial x}\, f(x,u,t) \qquad (27)$$

шартни қаноатлантирувчи бошқарув қонуни бўлсин.

Агар тенглама шундай $x(t)$, $t\in T$ ечимга эга бўлсаки, у ечим бўйлаб $u(t)=u(x(t),t)$ бўлакли-узлуксиз ва

$$g(x(t_1))\leqslant 0,\ \ \lambda' g(x(t_1))=0 \qquad (28)$$

бўлса, $u(t)$, $t\in T$ бошқарув

$$I(u)=\varphi(x(t_1))\to\min,\ \ \dot{x}=f(x,u,t), \qquad (29)$$

$$x(t_0)=x_0,\ u(t)\in U,\ t\in T,\ g(x(t_1))\leqslant 0$$

масалада оптимал бўлади.

Исботи. $\overline{u}(t)$, $\overline{x}(t)$, $t\in T$ (29) масаланинг чеклашларини қаноатлантирадиган бошқа жоиз бошқарув ва унга мос траектория бўлсин. (21), (27) дан,

$$-\frac{\partial B(x(t),t)}{\partial t}=\frac{\partial B'(x(t),t)}{\partial x}f\, x(t),\ u(t),\ t),$$

$$-\frac{\partial B(x(t),t)}{\partial t}\leqslant\frac{\partial B'(x(t),t)}{\partial x}f(\overline{x}(t),\overline{u}(t),t)$$

га эга бўламиз. Бу муносабатлар вақт бўйича тўлиқ ҳосила атамаларида

$$\frac{d}{dt}B(x,t)\Big|_{u(t)}=0,\ \frac{d}{dt}B(x,t)\Big|_{\overline{u}(t)}\geqslant 0 \qquad (30)$$

кўринишни олади. (30) ни $u(t)$, $\overline{u}(t)$ бўйлаб интеграллаймиз ва (26) чегаравий шартдан фойдаланамиз:

$$B(x(t_1),t_1)-B(x(t_0),t_0)=\varphi(x(t_1))+\lambda' g(x(t_1))-B(x_0,t_0)=0,$$

$$B(\overline{x}(t_1),\ t_1)-B(\overline{x}(t_0),t_0)=\varphi(\overline{x}(t_1))+\lambda' g(\overline{x}(t_1))-$$
$$-B(x_0,t_0)=0.$$

Бу ердан (28) ни ҳисобга олсак,

$$I(u)=\varphi(x(t_1))\leqslant\varphi(\overline{x}(t_1))+\lambda' g(\overline{x}(t_1))\leqslant\varphi(\overline{x}(t_1))=I(\overline{u}).$$

яъни, $u(t)$, $t\in T$ — оптимал бошқарув экан. Теорема исботланди.

3- §. ТРАНСВЕРСАЛЛИК ШАРТЛАРИ

Максимум принципи бошқарувлар учун оптималликнинг зарурийлик шартларини ўз ичига олади. Жоиз траекторияларнинг чегаравий қийматлари учун оптималлик шартлари *трансверсаллик шартлари* деб аталади. Мазкур параграфда траекториянинг ўнг четида тенглик ва тенгсизликлар типидаги чеклашлар бўлган оптимал бошқарув масалаларида оптималликнинг зарурийлик шартларини ва трансверсаллик шартларини чиқариш усули баён қилинади.

1. Терминал бошқарувнинг умумий масаласи. Ушбу

$$\dot{x}=f(x,u,t),\ x(t_0)=x_0,\ t\in T=[t_0,t_1] \qquad (1)$$

бошқарув тизимини қараймиз. Оптимал бошқарувнинг асосий масаласидагидек (1- §), мувофиқ бошқарувлар сифатида

$$u(t) \in U, \ t \in T \qquad (2)$$

чеклашни қаноатлантирувчи r-ўлчовли бўлакли-узлуксиз $u(t)$, $t \in T$ функцияларни қараймиз, бу ерда $U - R_r$ да берилган тўплам.

Айтайлик, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0, q}$ лар R_n да аниқланган ҳақиқий функциялар бўлсин.

Мувофиқ $(u(t)$, $t \in T$ бошқарув ва (1) тизимнинг унга мос $x(t)$, $t \in T$ траекториясини, агар улар

$$I_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) \leqslant 0, \ \ i = \overline{1, p} \qquad (3)$$

тенгсизликлар типидаги ва

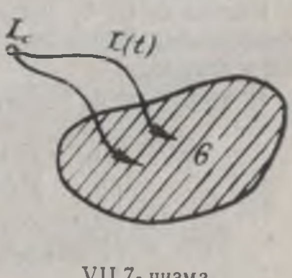
$$I_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) = 0 \ \ i = \overline{p+1, q}. \qquad (4)$$

тенгликлар типидаги чеклашларни қаноатлантирса, жоиз деб атаймиз.

Айтайлик, R_n да $G = \{x \in R_n : \varphi_i(x) \leqslant 0, i = \overline{1, p}, \ \varphi_i(x) = 0, i = \overline{p+1, q}\}$ тўплам берилган бўлсин. Юқорида берилган таърифга кўра, жоиз бошқарувлар шундай $u(t)$, $t \in T$ функциялардан иборатки, улар r-ўлчовли фазонинг берилган тўпламидан қийматлар қабул қилиб, (1) тизимнинг уларга мос $x(t)$, $t \in T$, траекториялари $t = t_1$ моментда G тўпламга тушади (VII.7-чизма). Жоиз бошқарувлар сифатини

$$I_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) \qquad (5)$$

функционал билан баҳолаймиз.



VII.7-чизма.

(5) функционални (1) — (4) тизимнинг жоиз бошқарувларида минималлаштириш масаласи *терминал бошқарувнинг умумий (ажратилган чегаравий шартли) масаласи* деб аталади.

Оптимал бошқарувнинг юқорида баён қилинган масаласи етарлича умумийдир; унга кўпгина бошқа масалалар келтирилади. Масалан, жараённинг сифати (5) нинг ўрнига

$$I_0(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt \to \min \qquad (6)$$

функционал билан баҳолансин. Ушбу

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u, t), \ \ x_0(t_0) = 0 \qquad (7)$$

тенгламани қаноатлантирадиган қўшимча $x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0\,(x\,(\tau),$ $u\,(\tau),\ \tau)\,d\tau$ ўзгарувчини киритамиз. Янги ўзгарувчи ёрдамида (6) сифат критерийсини

$$I\,(u) = \varphi_0\,(x\,(t_1)) + x_0\,(t_1) \tag{8}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шундай қилиб, агар (1) тизимга (7) тенгламани қўшсак, (6) критерийли масала (8) критерийли терминал бошқарув масаласига келтирилади.

2. Бошқаришлар, траекториялар ва функционаллар вариацияси. Терминал бошқарувнинг умумий масаласида оптималликнинг зарурийлик шартларини келтириб чиқариш учун бошқарувнинг игнасимон типдаги вариациясидан фойдаланамиз. $\theta \in\ ]\,t_0,\ t_1\,[$, $v \in U$ ва $\rho\,(\varepsilon)$ — нолнинг ўнг томонидаги бирор атрофида аниқланган скаляр аргументнинг ҳақиқий манфий бўлмаган функцияси ҳамда $\rho\,(0) = 0$ бўлсин. Ушбу

$$\delta u\,(t,\ \theta,\ v,\ \rho\,(\varepsilon)) = \begin{cases} v - u^0\,(t), & t \in [\theta,\ \theta + \rho\,(\varepsilon)\,[, \\ 0, & t \,\bar{\in}\, [\theta,\ \theta + \rho\,(\varepsilon)\,[. \end{cases} \tag{9}$$

кўринишдаги функция мувофиқ $u^0\,(t)$, $t \in T$ бошқарувнинг *игнасимон вариацияси* деб аталади.

Мувофиқ $u^0\,(t)$, $t \in T$ бошқарувнинг игнасимон вариациялари тўпламида қўшиш амалини киритамиз.

Иккита $\delta u\,(t;\ \theta_1,\ v_1\,\rho_1\,(\varepsilon))$ ва $\delta u\,(t;\ \theta_2,\ v_2,\ \rho_2\,(\varepsilon))$ игнасимон вариациянинг *йиғиндиси* деб қуйидаги кўринишдаги функцияга айтилади:

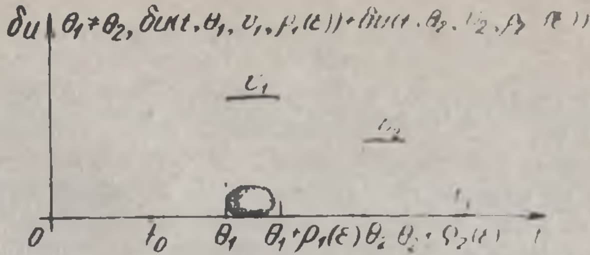
1) агар $\theta_1 \neq \theta_2$ бўлса, у ҳолда (VII. 8- чизма)

$$\delta u\,(t;\ \theta_1,\ v_1,\ \rho_1\,(\varepsilon)) + \delta u\,(t;\ \theta_2,\ v_2,\ \rho_2\,(\varepsilon)) =$$
$$= \begin{cases} v_1 - u^0\,(t), & t \in [\theta_1,\ \theta_1 + \rho_1\,(\varepsilon)\,[, \\ v_2 - u^0\,(t), & t \in [\theta_2,\ \theta_2 + \rho_2\,(\varepsilon)\,[, \\ 0 \text{ — акс ҳолда}; \end{cases}$$

2) агар $\theta_1 = \theta_2$ бўлса, у ҳолда (VII. 9- чизма)

$$\delta u\,(t;\ \theta_1,\ v_1,\ \rho_1\,(\varepsilon)) + \delta u\,(t,\ \theta_2,\ v_2,\ \rho_2\,(\varepsilon)) =$$
$$= \begin{cases} v_1 - u^0\,(t), & t \in [\theta_1,\ \theta_1 + \rho_1\,(\varepsilon)], \\ v_2 - u^0\,(t), & t \in [\theta_1 + \rho_1\,(\varepsilon),\ \theta_1 + \rho_1\,(\varepsilon) + \rho_2\,(\varepsilon)\,[, \\ 0 \text{ — акс ҳолда}. \end{cases}$$

VII. 9 ва VII. 10- чизмалардан кўринадики, $\theta_1 = \theta_2$ ҳолда, киритилган қўшиш амали коммутатив эмас. Игнасимон ва-

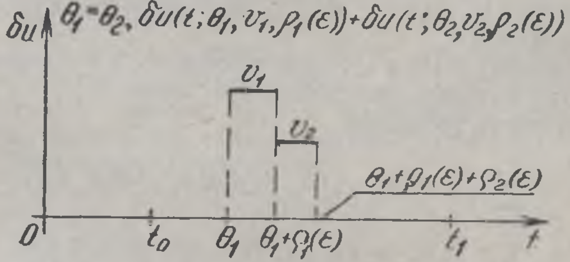


VII.8- чизма.

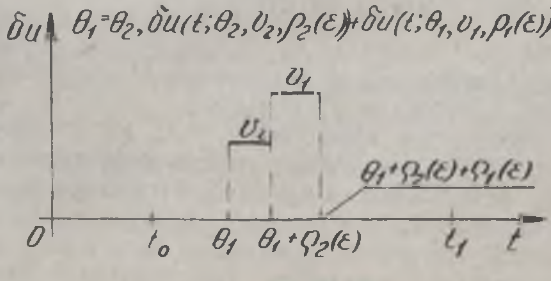
рнациялар йиг индиси тушунчаси ихтиёрий чекли сондаги қў-шилувчилар учун ҳам осон ёйилади.

Киритилган йиғинди тушунчасининг $\theta_1 \neq \theta_2$ бўлганда коррект бўлиши учун $[\theta_1, \theta_1 + \rho_1(\varepsilon)[\cap [\theta_2, \theta_2 + \rho_2(\varepsilon)[= \varnothing$ шартнинг бажарилиши зарурлигини қайд қиламиз.

Тойдирилган бошқарувларнинг



VII.9- чизма.



VII.10- чизма.

$$u(\varepsilon): u(t, \varepsilon) = u^0(t) + \sum_{i=1}^{\mu} \delta u(t; \theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)), \ t \in T$$

оиласини қараймиз, бу ерда μ — бирор натурал сон. Қўшимча $\rho_1(\varepsilon), \ldots, \rho_\mu(\varepsilon)$ функцияларни $\varepsilon = 0$ нуқтада ўнгдан узлуксиз деб фараз қиламиз. У ҳолда етарли кичик $\varepsilon \geqslant 0$ учун тойдирилган $u(t, \varepsilon)$, $t \in T$ бошқарув мувофиқ бўлади ва демак, унга (1) тизимнинг ягона $x(t, \varepsilon)$, $t \in T$ ечими мос келади. Дифференциал тенгламалар тизими ечимларининг параметр ва бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқлигидан

$$\lim_{\varepsilon \to +0} x(t_1, \varepsilon) = x^0(t_1)$$

эканлиги келиб чиқади. Бунинг устига, агар $\rho_1(\varepsilon), \ldots, \rho_\mu(\varepsilon)$ функциялар $\varepsilon = 0$ нуқтада ўнгдан дифференциалланувчи бўлса,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{x(t_1, \varepsilon) - x^0(t_1)}{\varepsilon} \stackrel{\Delta}{=} \delta x(t_1) \qquad (10)$$

лимит мавжуд бўлади ($\stackrel{\Delta}{=}$ белги, «аниқланишига кўра тенг»ликни англатади).

$\delta x(t_1)$ вектор $x^0(t)$, $t \in T$ траекториянинг $t = t_1$ моментда ҳисобланган *биринчи вариацияси* деб аталади.

(10) лимитни ҳисоблаб,

$$\delta x(t_1) = \sum_{i=1}^{\mu} \dot{\rho}_i(0) F(t_1, \theta_i) \Delta_{v_i} f(x^0(\theta_i), u^0(\theta_i), \theta_i) \qquad (11)$$

ни оламиз. Бу ерда $\Delta_v f(x, u, t) = f(x, v, t) - f(x, u, t)$; $\dot{\rho}_i(0)$ — функциянинг $\varepsilon = 0$ нуқтадаги ўнг томонлама ҳосиласидир. $F(t, \tau)$, $t_0 \leqslant t$, $\tau \leqslant t$ матрицавий функция

$$\frac{dF(t, \tau)}{dt} = \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial t} F(t, \tau), \ F(\tau, \tau) = E,$$

матрицавий дифференциал тенгламанинг ечими сифатида аниқланади. E — бирлик $n \times n$-матрица.

(11) муносабатдан кўринадики, $x^0(t)$, $t \in T$ траекториянинг $u^0(t)$, $t \in T$ бошқарувнинг игнасимон вариацияси йиғиндисига мос келган биринчи вариацияси траекториянинг игнасимон вариацияларига мос биринчи вариациялари йиғиндисидан иборатдир. Игнасимон вариациялар йиғиндиси амалининг нокоммутативлигига қарамасдан, траекториянинг (9) тойдирилган бошқарувга мос ((11) га қ.) биринчи вариацияси иг-

насимон вариациялар йиғиндисидаги қўшилувчилар тартибига боғлиқ бўлмаслигини таъкидлаш лозим.

Элементлари $x^0(t)$, $t \in T$ траекториянинг $t = t_1$ моментда ҳисобланган ва (9) кўринишдаги тойдирилган бошқарувларнинг барча жоиз оилаларига мос $\delta x(t_1)$ биринчи вариациялардан иборат бўлган $R(t_1)$ тўпламни қараймиз. Агар $\rho_1(0) = \rho_2(0)$ бўлса, $\delta u(t;\ \theta,\ v,\ \rho_1(\varepsilon))$ ва $\delta u(t;\ \theta,\ v,\ \rho_2(\varepsilon))$ игнасимон вариацияларга (аниқроғи, тойдирилган

$$u_1(t,\ \varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t;\ \theta,\ v,\ \rho_1(\varepsilon)) \text{ ва } u_2(t,\ \varepsilon) = u^0(t) + \\ + \delta u(t;\ \theta,\ v,\ \rho_2(\varepsilon))$$

бошқарувлар оилаларига) траекториянинг битта ва фақат битта вариацияси мос келади. Демак, $R(t_1)$ тўпламни ҳосил қилиш учун $\rho(\varepsilon)$ функциялар сифатида чизиқли, $\rho(\varepsilon) = l\varepsilon$, $l \geqslant 0$ функцияларни қараш етарлидир.

Юқорида айтилганлардан $R(t_1)$ тўплам R_n да қавариқ конус* бўлади, деб хулоса қилиш қийин эмас, бу ерда элементлари тойдирилган $u(\varepsilon) : u(t,\ \varepsilon) = u^0 + \delta u(t;\ \theta,\ v,\ l\varepsilon)$ кўринишдаги бошқаришларнинг барча жоиз оилаларига мос келувчи $\delta x(t_1)$ биринчи вариациялардан иборат $Q(t_1)$ тўплам $R(t_1)$ учун *ясовчи* бўлади, яъни $R(t_1) = \operatorname{conv} Q(t_1)$. Қавариқ қобиқнинг (II боб) таърифидан $R(t_1)$ конуснинг ихтиёрий элементи бошқарувнинг n та игнасимон вариациялари йиғиндисидан иборат вариация ёрдамида олиниши мумкинлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$R(t_1) = \{\delta x(t_1) : \delta x(t_1) = \\ = \sum_{i=1}^{n} l_i F(t_1,\ \theta_i)\Delta_{v_i} f(x^0(\theta_i),\ u^0(\theta_i),\ \theta_i), \\ \theta_i \in [t_0,\ t_1[,\quad v_i \in U,\ l_i \geqslant 0\} \tag{12}$$

деган хулосага келамиз.

Энди функционалларнинг вариациясини қарашга ўтамиз. Агар $\varphi_i : R_n \to R_1$, $i = \overline{0, q}$ функциялар $x^0(t_1)$ нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, $I_i(u(\varepsilon))$, $i = \overline{0, q}$ лар ε параметрнинг функцияси сифатида $\varepsilon = 0$ нуқтада $I_i(u)$, $i = \overline{0, q}$ *функционалнинг* $u^0(t)$ жоиз бошқариш бўйлаб *биринчи вариацияси* деб аталадиган ўнг томонлама

*) 158-бетдаги изоҳга қаранг.

1) *қаттиқмасликни тўлдирувчи шарт*

$$\lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{0, p}, \quad \lambda_i \varphi_i (x^0 (t_1)) = 0, \ i = \overline{0, p};$$

2) *трансверсаллик шарти*

$$\psi^0 (t_1) = - \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i (x^0 (t_1))}{\partial x};$$

3) *максимум шарти*

$$H (x^0 (t), \ \psi^0 (t), \ u^0 (t), \ t) = \max_{u \in U} H (x^0 (t), \ \psi^0 (t), \ u, \ t)$$

бажарилади.

Исботи. Тенгсизликлар типидаги актив чекланишларга мос келган индекслар тўплами I_0, $I_0 \stackrel{\Delta}{=} \{i \in \{1, 2, \ldots, p\} : \varphi_i (x^0 (t_1)) = 0\}$ ни қараймиз ва у $I = \{0\} \cup I_0$ бўлсин.

$x^0 (t)$ траекториянинг биринчи вариациялари конуси $R (t_1)$ да

$$\frac{\partial \varphi_i' (x^0 (t_1))}{\partial x} z < 0, \ i \in I; \ \frac{\partial \varphi_i' (x^0 (t_1))}{\partial x} z = 0, \ i = \overline{p + 1, q} \tag{20}$$

тенгсизликлар тизимини қараймиз. Икки ҳол бўлиши мумкин.

I. (20) тизим $R (t_1)$ конусда биргаликда эмас. У ҳолда 1-леммага мувофиқ, ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳамда барча $z \in R (t_1)$ лар учун

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i' (x^0 (t_1))}{\partial x} z \geqslant 0 \tag{21}$$

бўладиган λ_i, $i \in I_i \stackrel{\Delta}{=} I \cup \{p + 1, \ \ldots, q\}$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$ сонлар топилади.

I_1 тўпламдан олинган индексли компонентлари юқорида олинган мос индексли сонлар билан устма-уст тушадиган, қолганлари эса нолга тенг бўлган $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ \ldots, \lambda_q\} \in R_{q+1}$ векторни қараймиз. Равшанки, бундай танлаб олинган векторлар нолдан фарқли бўлади ва қаттиқмасликни тўлдирувчи шартларни қаноатлантиради. Бундан ташқари, (21) ва (12) дан барча $\theta \in [t_0, \ t_1[$ ва $v \in U$ лар учун,

$$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i' (x^0 (t_1))}{\partial x} F (t_1, \ \theta) \Delta_v f (x^0 (\theta), \ u^0 (\theta), \ \theta) \geqslant 0 \tag{22}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ушбу

$$\psi^0(t) = -\sum_{i=0}^{q} \lambda_i F'(t_1, t) \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad t \in T,$$

функция (14) қўшма тизимни ва трансверсаллик шартини қаноатлантиришини текшириш қийин эмас. $\psi^0(t)$, $t \in T$ функциядан фойдаланиб (22) шартни максимум шартига эквивалент бўлган

$$\psi^{0\prime}(\theta)\, \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \geqslant 0, \ \theta \in]t_0, t_1[, \ v \in U$$

кўринишда ёзамиз.

Демак, I ҳолда теорема ўринли экан.

II. Энди шундай $z \in R(t_1)$ элемент мавжуд бўлсинки,

$$\frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x} \bar{z} < 0, \ i \in I; \quad \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x} \bar{z} = 0, \ i = \overline{p+1, q}, \quad (23)$$

бўлсин. Қуйидаги қавариқ конусни қараймиз:

$$P(t_1) = \{y = \{y_1, \ldots, y_{q-p}\} \in R_{q-p} : y_i =$$
$$= \frac{\partial \varphi_{p+i}(x^0(t_1))}{\partial x} z, \ z \in R(t_1), \ i = \overline{1, q-p}\}$$

ва $P(t_1) \neq R_{q-p}$ эканлигини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик: $P(t_1) = R_{q-p}$. У ҳолда $P(t_1)$ да аффин-боғланмаган $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(q-p)}$ нуқталарга тортилган ва координата бошини ички нуқта сифатида ўз ичига олган $(q-p)$ ўлчовли S симплекс мавжуд бўлади.

Эслатиб ўтамизки, агар

$$\sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i y^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{q-p} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geqslant 0, \ i = 0, \overline{q-p},$$

муносабатлардан $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{q-p} = 0$ эканлиги келиб чиқса, $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(q-p)}$ нуқталар *аффин-боғланмаган* деб аталади. *Симплекс* аффин-боғланмаган нуқталарнинг қавариқ қобиғидан иборатдир. Демак, $S = \mathrm{conv}\, \{y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(q-p)}\}$, бу ерда ихтиёрий $y \in S$ вектор ягона

$$y = \sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i(y)\, y^{(i)}, \ \lambda_i(y) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{q-p} \lambda_i(y) = 1$$

кўринишда тасвирланади. $\lambda_0(y), \lambda_1(y), \ldots, \lambda_{q-p}(y)$ сонлар y векторнинг S симплексдаги *барицентрик координаталари* деб аталади.

Фараз қилайлик, $z^{(i)}$, $i=0,\ q-p$ лар $R(t_1)$ дан олинган

$$y_l^{(i)}=\frac{\partial\varphi'_{p+l}(x^0(t_1))}{\partial x}z^{(i)},\ i=\overline{0,\ q-p},\ l=\overline{1,\ q-p},$$

ни қаноатлантирувчи векторлар бўлсин. Бундан ташқари, $z^{(i)}$, $i=\overline{0,\ q-p}$, лар бошқарув вариацияларининг қуйидаги

$$\delta u_i(\varepsilon):\delta u_i(t,\ \varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\delta u(t;\ \theta_{ij},\ v_{ij},\ l_{ij},\ \varepsilon),\ t\in T,\ i=\overline{0,\ q-p},$$

оилалари ёрдамида ҳосил қилинган деб ҳисоблаймиз.

Бошқарув вариациясининг қуйидаги кўринишдаги оиласини тузамиз:

$$\delta u(y,\ \varepsilon):\delta u(t,\ y,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=1}^{n}\delta u(t,\ \theta_{ij},\ v_{ij},\ \lambda_i(y)\ l_{ij}\ \varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\delta\bar{u}(t,\ \bar{\theta}_s,\ \bar{v}_s,\ \bar{l}_s\varepsilon) \tag{24}$$

бу ерда бошқарувнинг $\sum_{s=1}^{n}\delta\bar{u}(t,\ \bar{\theta}_s,\ \bar{v}_s,\ \bar{l}_s\varepsilon)$ вариацияси $\bar{z}$ ни ҳосил қилади.

Айтайлик, $x(t,\ y,\ \varepsilon)$, $t\in T$ (1) тизимнинг $u^0(t)+\delta u(t,\ y,\ \varepsilon)$, $t\in T$ бошқарувга мос траекторияси бўлсин.

S симплексни R_{q-p} га

$$G(\varepsilon):G_i(y,\ \varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_{p+i}(x(t_1,\ y,\ \varepsilon))-\varphi_{p+i}(x^0(t_1))}{\varepsilon}, & \varepsilon>0 \text{ бўлганда},\\ y_i, & \varepsilon=0 \text{ бўлганда},\end{cases}$$

муносабатлар билан аниқланган $G(\varepsilon)$ акслантиришлар оиласини қараймиз. $G(y,\ \varepsilon)$ акслантириш ҳар бир ўзгарувчи бўйича $S\times[0,\ \varepsilon^0]$ да (ε^0 — етарлича кичик мусбат сон) узлуксиздир.

S симплексга қарашли ёпиқ $R^{\gamma}=\{y\in R_{q-p}:\|y\|\geqslant\gamma\}$ шарни олиб,

$$N(\varepsilon)=\max_{y\in R^{\gamma}}\|G(y,\ 0)-G(y,\ \varepsilon)\|$$

функцияни аниқлаймиз. $N(\varepsilon)$ функция нолнинг бирор ўнг томонлама атрофида узлуксиз ва $N(0)=0$, $N(\varepsilon)$ нинг узлуксизлигидан шундай $\bar{\varepsilon}>0$ сон мавжуд бўладики, барча $0\leqslant\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$ лар учун $N(\varepsilon)\leqslant\gamma$ бўлади.

$R^{\nu}\times[0,\bar{\varepsilon}]$ да

$$\Gamma(y,\varepsilon)=G(y,0)-G(y,\varepsilon)$$

акслантиришни қараймиз. $\Gamma(y,\varepsilon)$ акслантириш ҳар бир $\varepsilon\in\in[0,\bar{\varepsilon}]$ да $R^{N(\varepsilon)}=\{y\in R_{q-p}:||y(\varepsilon)||\geqslant N(\varepsilon)\}$ шарни ўзини ўзига акслантиришини текшириш қийин эмас. Брауэр теоремасига мувофиқ, $\Gamma(y,\varepsilon)$ ҳар қандай $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}]$ учун $R^{N(\varepsilon)}$ да қўзғалмас нуқтага эга бўлади, яъни исталган $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}]$ учун шундай $y(\varepsilon)\in R^{N(\varepsilon)}$ вектор топиладики, $\Gamma(y(\varepsilon),\varepsilon)=-y(\varepsilon)$ бўлади. Бу эса исталган $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}]$ учун

$$G(y(\varepsilon),\varepsilon)=0 \text{ ва } ||y(\varepsilon)||\leqslant N^{(\varepsilon)} \tag{25}$$

бўладиган $y(\varepsilon)$ нинг мавжудлигини билдиради. $\varepsilon\to+0$ бўлганда $N(\varepsilon)\to 0$ бўлганлигидан, $\varepsilon\to+0$ да $y(\varepsilon)\to 0$ бўлади. $\rho_{ij}(\varepsilon)=\lambda_i(y(\varepsilon))\,l_{ij}\,\varepsilon$ функциялар нолда ўнг томонлама $\rho_{ij}(0)=\lambda_i(0)\,l_{ij}$ ҳосилага эга бўлишини эътироф этамиз.

Бошқарув вариациялари оиласи

$$\delta u(\varepsilon):\delta u(t,\varepsilon)=\delta u(t,y(\varepsilon),\varepsilon),\ t\in T,$$

ни қараймиз, бу ерда $\delta u(t,y,\varepsilon)$, $t\in T$ ифода (24) муносабат билан аниқланади.

Айтайлик, $x(t,y(\varepsilon),\varepsilon)$, $t\in T$ (1) тизимнинг мувофиқ $u(t,\varepsilon)=u^0(t)+\delta u(t,y(\varepsilon),\varepsilon)$, $t\in T$ бошқарувга мос траекторияси бўлсин. (25) дан ва $G(y,\varepsilon)$ акслантиришнинг аниқланишидан барча $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}]$ лар учун

$$\varphi_i(x(t_1,y(\varepsilon),\varepsilon))=\varphi_i(x^0(t_1))=0,\ i=\overline{p+1,q}, \tag{26}$$

ни оламиз.

Бундан ташқари, $I_i(u)$, $i=\overline{0,p}$ функционалларнинг $\delta u(t,y(\varepsilon),\varepsilon)$, $t\in T$ га мос биринчи вариацияси

$$\delta^1 I_i(u^0)=\frac{\partial\varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x}\bar{z},\ i=\overline{0,p}$$

бўлганлиги сабабли (23) га асосан етарлича кичик мусбат ε лар учун

$$\varphi_i(x(t_1,y(\varepsilon),\varepsilon))<\varphi_i(x^0(t_1)),\ i\in I \tag{27}$$

ни оламиз, ε параметрга узлуксиз боғлиқликка мувофиқ ε нинг етарлича кичик қийматларида

$$\varphi_i(x(t_1,\ y(\varepsilon),\ \varepsilon)) < 0 \qquad (28)$$

тенгсизлик барча $i \overline{\in} I_1$ лар учун, яъни $\varphi_i(x^0(t_i)) > 0$ ни қаноатлантирувчи i лар учун ўринлидир.

(26) — (28) муносабатлардан етарлича кичик ε лар учун (1) — (4) масалада $u^0(t)$, $t \in T$, бошқарувнинг оптималлигига зид бўлган

$$\varphi_0(x(t_1,\ y(\varepsilon),\ \varepsilon)) < \varphi_0(x^0(t_1));\ \varphi_i(x(t_1,\ y(\varepsilon),\ \varepsilon) < 0,\ i = \overline{1, p};$$

$$\varphi_i(x(t_i,\ y(\varepsilon),\ \varepsilon)) = 0,\ i = \overline{p+1, q},$$

муносабатларни оламиз.

Демак, $P(t_1) \neq R_{q-p}$. Бу $P(t_1)$ конусга таянч бўлган, ноль бўлмаган $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_{q-p}\} \in R_{q-p}$, яъни барча $y \in \in P(t_1)$ лар учун $\mu' y \geqslant 0$ бўлган векторнинг мавжудлигига олиб келади. Энди $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ векторни қуйидагича оламиз:

$$\lambda_i = 0,\ i = \overline{0, p},\ \lambda_i = \mu_{i-p}\ \ i = \overline{p+1, q}.$$

Равшанки, λ вектор нолдан фарқли, қаттиқмасликни тўлдирувчи шартларни қаноатлантиради ва бундан ташқари, барча $z \in R(t_1)$ лар учун

$$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} z \geqslant 0$$

бўлади. Энди I ҳолдагидек мулоҳазаларни давом эттириб, теореманинг исботини якунлаймиз.

5. Тез таъсир масаласида Понтрягиннинг максимум принципи. Маълумки, (1) — (5) масалада бошқарув жараёнининг давом этиш вақти олдиндан берилган деб фараз қилинган эди. Энди агар $t_1 \geqslant t_0$ моментни танлаш ва масала элементларининг $t_1 \geqslant 0$ да аниқланиш имконияти мавжуд деб олсак, 2 — 4 бандлардагига ўхшаш вақтнинг t_1^0 оптимал моменти учун 1-теореманинг шартларига қўшимча (бу ерда t_1 ўрнига t_1^0 қўйиш лозим) t_1^0 бўйича *стационарлик шарти* (4):

$$H(x^0(t_1^0),\ \psi^0(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0) = 0$$

бажарилади.

Агар (5) нинг ўрнига (6) сифат критерийсини қарасак $\varphi_0 = 0$, $f_0(x, u, t) = 1$, у ҳолда олдиндан берилган t_1 да (1)—(5) масала 1-§ да ифодаланган тез таъсир масаласига айланади. Мазкур параграфнинг натижаларидан қуйидагини оламиз.

2-теорема (тез таъсир масаласида Понтрягиннинг максимум принципи). Айтайлик, $u^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$, $\dot{x} = f(x, u)$ тизимнинг $x^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$, траекториясини $x(0) = x_\delta \in R_n$ ҳолатдан $x(t_1^0) = x_{0x} \in R_n$ ҳолатга энг қисқа t_1^0 вақтда ўтказувчи оптимал бошқарув бўлсин. У ҳолда $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in$ $\in [0, t_1^0]$ бўйлаб,

$$\dot{\psi} = -\partial H(x, \psi, u)/\partial x, \quad H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$$

қўшма тизимнинг айнан ноль бўлмаган шундай $\psi^0(t)$, $t \in$ $\in [0, t_1^0]$ ечими мавжуд бўладики, қуйидаги шартлар бажарилади:

1) *бошқарув бўйича максимум шарти:*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u), \quad t \in [0, t_1^0];$$

2) *тез таъсир вақти t_1^0 бўйича стационарлик шарти:*

$$H(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0)) \geqslant 0.$$

4-§. МАКСИМУМ ПРИНЦИПИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Дастлаб оддий тизимлардаги оптимал жараёнлар учун исботланган максимум принципи мураккаб тизимларда ҳам ўхшаш натижалар олиш учун асос бўлиб хизмат қилди (масалан, 6—7-§ ларга қ.). Ундан вариацион ҳисобнинг кўп классик натижалари олиниши мумкин. Амалий масалаларда максимум принципи оптималлаштиришнинг ҳар хил сонли алгоритмларини қуриш учун қўлланилади. Ушбу параграфда максимум принципининг энг содда қўлланишларини келтирамиз.

1. Максимум принципининг чегаравий масаласи. Ушбу оптимал бошқарув масаласини қарайлик:

$$I(u) = \varphi_0(x(t_1)) \to \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\varphi_i(x(t_1)) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, p}; \quad \varphi_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{p+1, q}; \quad u(t) \in U,$$

$$t \in T = [t_0, t_1]. \qquad (1)$$

Гамильтон функциясини тузамиз:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$$

ҳамда $u = u(x, \psi, t)$ бошқарувни

$$H(x,\ \psi,\ u(x,\ \psi,\ t)),\ t) = \max H(x,\ \psi,\ u,\ t),\ u \in U$$

шартдан топамиз* . Ушбу

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,\ \psi,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t)}{\partial \psi},\quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(x,\ \psi,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t)}{\partial x},$$

$$x(t_0) = x_0,\quad \psi(t_1) = -\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \partial \varphi_i(x(t_1))/\partial x,$$

$$\lambda_i \geqslant 0,\ i = \overline{0,\ p};\ \sum_{i=0}^{q} |\lambda_i| > 0,$$

$$\lambda_i \varphi_i(x(t_1)) = 0,\quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

масала *максимум принципининг чегаравий масаласи* деб аталади.

2—3-§ ларга мувофиқ, (1) масаланинг ҳар бир $u^0(t)$, $t \in T$ оптимал бошқаруви (2) чегаравий масаланинг бирор $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$ ечимидан олинади: $u^0(t) = u(x(t),\ \psi(t)(t)$, $t \in T$. Шунинг учун, агар (1) масалада $u^0(t)$, $t \in T$ оптимал бошқарув мавжуд бўлиб, (2) чегаравий масала ягона ечимга эга бўлса, $u^0(t)$, $t \in T$ ни қуриш учун (2) масалани ечиш етарлидир.

2. Оптимал бошқарувнинг сифат характеристикаларини олиш. Амалий масалаларда максимум принципи кўп ҳолларда оптимал бошқарувнинг шундай характеристикаларини олиш имконини берадики, улар бошланғич мураккаб масалани бошқа соддароқ масалага алмаштириш ёки мураккаб бўлмаган таҳлил ёрдамида бошқарувларнинг у ёки бу синфлари оптимал бошқарувни ўз ичига олмаслигини исботлаш имконини беради. Масалан, кўп амалий масалаларда (хусусий ҳолда, ракетадинамика масалаларида) бошқарув тизимининг математик модели

$$\dot{x} = f_{(0)}(x,\ t) + u f_{(1)}(x,\ t),\ |u| \leqslant 1 \tag{3}$$

кўринишга эга бўлади.

Максимум принципи ва $H(x,\ \psi,\ u,\ t) = \psi' f_{(0)}(x,\ t) + u\psi' f_{(1)}(x,\ t)$ гамильтонианнинг тузилишидан $u^0(t)$ оптимал бошқарувнинг таркиби келиб чиқади:

---

* $H(x,\ \psi,\ t) = H(x,\ \psi,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t)$ функция вариацион ҳисобнинг классик гамильтонианига мос келади (VI боб).

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) > 0 \text{ бўлса;} \\ -1, & \text{агар} \quad \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) < 0 \text{ бўлса;} \\ \in [-1,1], & \text{агар} \quad \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) = 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (4)$$

(3) объект ҳақида қўшимча маълумот берилганда, кўп ҳолларда, $u^0(t)$ бошқарув чекли сондаги ўтишларга ($+1$ қийматдан -1 қийматга ва аксинча) эга бўлишини исботлаш ёки $\psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) \equiv 0$ бўлган оралиқда *махсус бошқарувни* топиш мумкин бўлади. Бу фактлар (3) тизимнинг динамикаси ҳақидаги аниқ тасаввурлар билан бирга мутахассисларга оптимал бошқарувга етарли яқин яқинлашиш топиш ёки уни аниқ айтиш имконини беради.

Ушбу чизиқли

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leqslant 1$$

тизим учун *бошқарилувчанлик критерийси*

$$\operatorname{rank} \{b, Ab, \ldots, A^{n-1} b\} = n$$

бажарилганда оптимал бошқарув (4) га асосан, фақат ± 1 қийматларни қабул қилади ва чекли сондаги сакрашларга эга бўлади (релели бошқарув). Шунинг учун оптимал бошқарувнинг чексиз ўлчовли масаласи сакраш нуқталари τ_1, τ_2, ..., τ_k ларни ва биринчи интервалда бошқарувнинг ишорасини аниқлашга келтирилади, бу чекли ўлчовли масаладир.

Оптимал бошқарувнинг муҳим характеристикаси у бўйлаб тизим гамильтониани $H(x, \psi, u, t)$ нинг ўзгаришидан иборат. Мувофиқ бошқарувлар $u(t)$, $t \in T$ бўлакли-узлуксиз бўлганлигидан $H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ функция улар бўйлаб, умуман айтганда, бўлакли-узлуксиздир Шу факт ажойибки, U — компакт бўлганда гамильтониан $u^0(t)$, $t \in T$ оптимал бошқарув бўйлаб (ҳар бир $u(t)$, $t \in T$ Понтрягин экстремали бўйлаб) узлуксиздир. Бунга қўшимча равишда, агар $\partial f / \partial t \in C$ бўлса, $u^0(t)$, $t \in T$ бошқарувнинг узлуксизлик нуқталарида вақт бўйича тўла ҳосила dH / dt мавжуд бўлиб, у $\partial H / \partial t$ хусусий ҳосилага тенгдир.

Ҳақиқатан, максимум шартидан $t \in T$ ва $t^* = t + \Delta t \in T$ моментлар учун ушбуларни оламиз:

$$H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t) \geqslant H(x(t), \psi(t), u(t^*), t),$$

$$H(t^*) = H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) \geqslant$$

$$\geqslant H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*).$$

Биринчи тенгсизликни иккинчисидан айириб,

$$H(x(t^*),\ \psi(t^*),\ u(t),\ t^*) - H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t) \leqslant$$
$$\leqslant H(t^*) - H(t) \leqslant H(x(t^*),\ \psi(t^*),\ u(t^*),\ t^*) -$$
$$- H(x(t),\ \psi(t),\ u(t^*),\ t) \qquad (5)$$

ни оламиз. $x(t)$, $\psi(t)$ функцияларнинг узлуксизлигидан (5) даги чап четки ифода нолга интилади. Фараз қилайлик, $t^* = t_k \to t$, $k = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлик бўйлаб

$$H(x(t^*),\ \psi(t^*),\ u(t^*),\ t^*) - H(x(t),\ \psi(t),\ u(t^*),\ t) \geqslant \alpha > 0$$

бўлсин. U тўпламнинг компактлигидан $u(t_k) \in U$, $k=1, 2, \ldots$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин, уни ёзувда соддалик учун бошланғич $u(t_k) \to u^*$, $k \to \infty$ кетма-кетлик сифатида оламиз. $f(x, u, t)$ функциянинг u бўйича узлуксизлигига асосан (5) дан $0 < \alpha \leqslant$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} [H(x(t_k),\ \psi(t_k),\ u(t_k),\ t_k) - H(x(t),\ \psi(t),\ u(t_k),\ t)] = 0$$

зиддиятни оламиз. Шундай қилиб, (5) даги ўнг четки ифода $t^* \to t$ да нолга интилади, яъни $H(t^*) \to H(t)$ ва $H(t)$ функция узлуксиздир.

(5) тенгсизликларни $\Delta t > 0$ га бўламиз. $\Delta t \to 0$ деб олиб, амалларни аввало (5) даги чап тенгсизлик учун амалга оширамиз:

$$\frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*)}{\Delta t} +$$
$$+ \frac{H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t^*)}{\Delta t} +$$
$$+ \frac{H(x(t), \psi(t), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} \leqslant \frac{H(t^*) - H(t)}{\Delta t}.$$

Бунда $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтсак,

$$\dot{x}'(t)\,\partial H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)/\partial x + \dot{\psi}'(t)\,\partial H(x(t),\ \psi(t),$$
$$u(t),\ t)/\partial\psi + \partial H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)/\partial t \leqslant dH(t)/dt \qquad (6)$$

бўлади. Шунингдек,

$$\dot{x} = \partial H/\partial\psi, \quad \dot{\psi} = -\partial H/\partial x$$

бўлганлигидан, (6) тенгсизлик соддалашади:

$$\partial H(x(t),\ \psi(t),\ u(t), t)/\partial t \leqslant dH(t)/dt. \qquad (7)$$

Шунга ўхшаш, $u(t)$ функциянинг t нуқтада узлуксизлигини ҳисобга олсак, (5) даги ўнг тенгсизлик учун

$$\partial H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)/\partial t \geqslant dH(t)/dt \tag{8}$$

бўлади.

(7), (8) дан исбот қилинадиган хосса

$$\frac{dH(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)}{dt} = \frac{\partial H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)}{\partial t}$$

келиб чиқади.

(1) тизимлар стационар ($f(x,\ u,\ t) = f(x,\ u)$) бўлганда хусусий ҳосила нолга тенг бўлиши тушунарли ва шунинг учун тизимнинг гамильтониани Понтрягин экстремали бўйлаб ўзгармасдир.

Оптимал тизимни аниқ амалга ошириш, бошқарув қонунларининг мураккаблигидан, кўп харажатлар билан боғлиқдир. Бу эса кўп ҳолларда оптимал тизимлардан воз кечиш учун далил қилиб кўрсатилади. Аслида эса оптимал тизимлар уларда оптимал тизимларга яқинлашиш аниқлиги амалга ошириш харажатлари билан мослаштирилган субоптимал тизимларни қуришда эталон сифатида фойдаланилади.

3. Жоиз бошқарувларни яхшилаш. Амалий масалаларни текширишда оптимал бошқарув масаласини ечиш ўрнига кўпинча мавжуд (яхши бўлиши ҳам мумкин бўлган) бошқарувларни янада яхши сифатлироқлари билан алмаштириш ҳақидаги чегараланган масалани ечиш етарлидир. Тизим кўрсаткичларини 10 — 15 % га яхшилашга имкон берувчи самарали *яхшилаш алгоритмлари* катта аҳамиятга эгадир.

Оптималликнинг ҳар бир зарурийлик шарти билан бу шартни қаноатлантирмайдиган жоиз бошқарувни яхшилаш алгоритмини боғлаш мумкин. Мазкур бандда максимум принципи ва унинг натижалари билан боғлиқ алгоритмлар баён қилинади.

Айтайлик, $u(t)$, $t \in T$ терминал бошқарувнинг энг содда масаласи (2- §):

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min,\ \dot{x} = f(x,\ u,\ t),$$
$$x(t_0) = x_0,\ u(t) \in U,\ t \in T = [t_0,\ t_1] \tag{9}$$

да жоиз бошқарув бўлсин, (9) тизимнинг $u(t)$, $t \in T$ бошқарувга мос траекториясини $x(t)$, $t \in T$ деб белгилаймиз. Ушбу

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t),\ \psi,\ u(t),\ t)}{\partial x},\ \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}$$

қўшма тизимни $x(t)$, $u(t)$, $t \in T$ лар бўйлаб ўнгдан чапга интеграллаш натижасида $\psi(t)$, $t\in T$ функцияни топамиз. Гамильтонианга максимум берувчи функцияни $u^*(t)$ орқали белгилаймиз:

$$u^*(t)\in \operatorname{Arg}\max_{u\in U} H(x(t),\ \psi(t),\ u,\ t).$$

Агар $u(t)=u^*(t)$, $t\in T$ бўлса, бошланғич бошқарув (9) масалада максимум принципини қаноатлантиради ва уни оптималликнинг бу зарурийлик шарти ёрдамида яхшилаш мумкин эмас.

Айтайлик, $\theta-]t_0,\ t_1[$ тўпламнинг шундай нуқтаси бўлсинки, унда $u(\theta)\neq u^*(\theta)$ ва $u(t)$ функция узлуксиз бўлсин. Мувофиқ бўлган кичик соҳада $u^*(t)$ бошқарувнинг парчаси киритилган ушбу

$$\bar{u}(t)=\begin{cases} u^*(t), & t\in]\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon[,\\ u(t), & t\bar{\in}]\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon[,\ \varepsilon>0\end{cases}$$

бошқарувни қурамиз.

Сифат критерийси орттирмасини таҳлил дилиб (2-§ га қ.), шундай $\varepsilon_0>0$ сон мавжуд бўлишини ва барча ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ учун $\bar{u}(t)$, $t\in T$ бошқарув $u(t)$, $t\in T$ дан яхши эканлигини кўрамиз: $I(\bar{u})<I(u)$.

(9) масалада жоиз бошқарувни яхшилашнинг иккинчи усулини баён қилиш учун аввало максимум принципидан 2-§ да қилинган фаразларга қўшимча $f(x,\ u,\ t)$ функция u бўйича дифференциалланувчи, U тўплам эса қаварик деб олганда келиб чиқадиган натижани оламиз: ҳар бир $u^0(t)$ оптимал бошқарув ва (9) масаланинг бошланғич ҳамда қўшма тизимларининг унга мос $x^0(t)$, $\psi^0(t)$ ечимлари учун

$$\frac{\partial H'(x^0(t),\ \psi^0(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial u}\,u^0(t)=$$

$$=\max_{u\in U}\frac{\partial H'(x^0(t),\ \psi^0(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial u}\,u,\quad t\in]t_0,\ t_1[\qquad (10)$$

шарт бажарилади. Ҳақиқатан, агар шундай $\theta\in]t_0,\ t_1[$ момент ва $v\in U$ элемент мавжуд бўлсаки, $\partial H'(x^0(\theta),\ \psi^0(\theta),\ u^0(\theta),\ \theta)/\partial u\cdot u^0(\theta)=\partial H'(x^0(\theta),\ \psi^0(\theta),\ u^0(\theta),\ \theta/\partial u\cdot v-\alpha$, $\alpha>0$ бўлса, етарли кичик $\varepsilon>0$ лар учун максимум шартига зиддият олинади:

$$H(x^0(\theta),\ \psi^0(\theta),\ u^0(\theta)+\varepsilon(v-u^0(\theta)),\ \theta)-$$

$$-H(x^0(\theta),\ \psi^0(\theta),\ u^0(\theta),\ 0)=$$

$$= \varepsilon \partial H' (x^0 (\theta), \psi^0 (\theta), u^0 (\theta), \theta)/\partial u \cdot (v - u^0 (\theta)) + 0 (\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \alpha + 0 (\varepsilon) > 0.$$

(10) шартни текшириш чизиқли функцияни максималлаштириш билан боғлиқдир. У максимум шартини текширишдан соддароқдир. Оптималликнинг (10) муносабатга асосланган зарурийлик шартини *чизиқлилаштирилган максимум принципи* деб аташ қабул қилинган.

Айтайлик, $u (t)$, $t \in T$ (10) муносабат бажарилмайдиган жоиз бошқарув бўлсин. Ушбу

$$\bar{u} (t) = u (t) + \varepsilon (u^* (t) - u (t)), \ \varepsilon > 0, \ t \in T \tag{11}$$

жоиз бошқарувни қурамиз, бу ерда $u^* (t) \in \operatorname{Argmax} u' \partial H (x (t), \psi (t), u (t), t)/\partial u, u \in U$. (11) бошқарувни 2-§ нинг орттирма формуласи (10) га келтириб қўйсак, $u^* (t) \not\equiv u (t)$, $t \in T$ бўлганда шундай $\varepsilon_0 > 0$ топиладики, барча ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ учун $I (\bar{u}) < I (u)$ тенгсизлик бажарилади, яъни (11) бошқарув бошланғич бошқарувдан яхшироқдир.

(9) масала учун максимум принципининг бошқа натижаси олдинги натижадагидек, $f (x, u, t)$ функция u бўйича дифференциалланувчи, U тўплам эса очиқ бўлганда олинади. Бу ҳолда, $u^0 (t)$ оптимал бошқарув бўйлаб *гамильтонианнинг стационарлик шарти* бажарилади:

$$\partial H (x^0 (t), \psi^0 (t), u^0 (t), t)/\partial u = 0, \ t \in]t_0, t_1[. \tag{12}$$

Ҳақиқатан, агар бирор $\theta \in]t_0, t_1[$ да $\partial H (x^0 (\theta), \psi^0 (\theta), u^0 (\theta), \theta)/\partial u = \alpha \neq 0$ бўлса, максимум шартига зиддиятга келамиз: агар $\varepsilon > 0$ етарли кичик сон бўлса, у ҳолда

$$H (x^0 (\theta), \psi^0 (\theta), u^0 (\theta) + \varepsilon \alpha, \theta) - H (x^0 (\theta), \psi^0 (\theta), u^0 (\theta), \theta) =$$
$$= \varepsilon \alpha' \partial H (x^0 (\theta), \psi^0 (\theta), u^0 (\theta), \theta)/\partial u + 0 (\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \alpha' \alpha + 0 (\varepsilon) > 0.$$

(12) шартнинг келтирилган исботи 2-§ нинг орттирма формуласи (10) билан бирга етарлича кичик $\varepsilon > 0$ ларда $u (t)$, $t \in T$ бошқарувдан яхши бўлган

$$\bar{u} (t) = u (t) + \varepsilon \partial H (x (t), \psi (t), u (t), t)/\partial u,$$
$$t \in T, \ \varepsilon > 0,$$

бошқарувни кўрсатиш имконини беради, яъни $I (\bar{u}) < I (u)$.

2-§ нинг орттирма формуласи (10) дан

$$\Delta I (u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta u' (t) \, \partial H (x (t), \psi (t), u (t), t)/\partial u \, dt +$$

$$+ 0\,(\|\Delta u\,(\cdot)\|)$$

формула келиб чиққанлигидан, $\Delta f\,(x) = -\Delta x' \mathrm{grad} f\,(x) + 0\,(\|\Delta x\|)$ формулага ўхшаш,

$$\frac{\delta I}{\delta u\,(t)} = \mathrm{grad}\; I\,(u) = -\frac{\partial H\,(x\,(t),\, \psi\,(t),\, u\,(t),\, t)}{\partial u}$$

ифода $I\,(u)$ *функционалнинг* $u\,(t)$, $t \in T$ бошқарувдаги *вариацион ҳосиласи (градиенти)* деб аталади.

Оптимал бошқарувнинг баъзи масалаларида бошқарувлар учун чеклашлар ҳар бир $t \in T$ моментда эмас, балки бутун $\{u\,(t),\ t \in T\}$ функция учун қўйилади. Мисол учун, шундай типдаги битта чеклашни қараймиз:

$$\int_{t_0}^{t_1} u'\,(t)\;R\,(t)\;u\,(t)\,dt \leqslant L\quad (R\,(t) > 0,\ t \in T), \tag{13}$$

бунда $u\,(t) \in R_r$ функциялар T да квадрати билан жамланувчи деб ҳисобланади.

2-§ нинг орттирма формуласи (10) дан фойдаланиб мувофиқ бошқарувлар синфи (13) га алмаштирилган (9) масалада оптимал бошқарув *максимум (интеграл) шарти*

$$\int_{t_0}^{t_1} u^{0\prime}\,(t)\;\partial H\,(x^0\,(t), \psi^0\,(t),\, u^0\,(t),\, t)/\partial u dt =$$

$$= \max \int_{t_0}^{t_1} u'\,(t)\;\partial H\,(x^0\,(t),\, \psi^0\,(t),\, u^0\,(t),\, t)/\partial u\, dt \tag{14}$$

ни қаноатлантиришини исботлаш машқ сифатида ҳавола қилинади, бу ерда ўнг томондаги максимум (13) чеклашларни қаноатлантирувчи барча $u\,(t)$, $t \in T$ функциялар бўйича олинади.

(14) шартни қаноатлантирмайдиган ва $u\,(t)$, $t \in T$ бошқарувни яхшиловчи бошқарув (11) формула бўйича қурилади, бу ерда $u^*\,(t)$ ушбу

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg}\max_{(13)} \int_{t_0}^{t_1} u'\,(t)\;\partial H\,(x\,(t),\ \psi\,(t),\ u\,(t),\ t)/\partial u\, dt$$

кўринишга эга.

Пировардида амалда муҳим қўлланишга эга бўлган *динамик тизимларни параметрлар бўйича оптималлаштириш масалалари* синфини қараймиз:

$$I\,(w) = \varphi\,(x\,(t_1)) \to \min,\quad \dot{x} = f\,(x,\, w,\, t),$$

$$x(t^0)=x_0,\ t\in T,\ w\in W. \qquad (15)$$

(15) масалада, (9) масаладан фарқли ўлароқ, w вектор бошланғич $t=t_0$ моментда танлаб олинадиган ва жараён давомида ўзгармайдиган бошқарув параметридир. Кўп ҳолларда бундай параметрлар ролини конструкцион параметрлар ўйнайди. (15) масалаларнинг бошқа манбаи (9) масаладаги оптимал бошқарувлар баъзи сабабларга кўра берилган чекли сондаги параметрларга боғлиқ бўлган $u(t)=u(t, w)$ функциялар синфидан ахтариладиган кенг тарқалган усулдан (Ритц усулининг ўхшаши) иборатдир. Максимум принципининг исботи билан боғлиқ ҳисоблашларни такрорлаб, (15) масала учун қуйидаги натижаларни оламиз. Агар W қавариқ тўплам, $\varphi(x)$, $\partial\varphi(x)/\partial x$, $f(x, w, t)$, $\partial f(x, w, t)/\partial x$ $\partial f(x, w, t)/\partial w\in C$, $w^0\in W$ — (15) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда

$$\int_{t_0}^{t_1} w^{0'}\,\partial H(x^0(t), \psi^0(t), w^0, t)/\partial w\, dt=$$

$$=\max_{w\in W}\int_{t_0}^{t_1} w'\partial H(x^0(t), \psi^0(t), w, t)/\partial w\, dt,$$

$$\frac{\partial I(w)}{\partial w}=\operatorname{grad} I(w)=-\int_{t_0}^{t_1}\partial H(x(t), \psi(t), w, t)/\partial w\, dt, \qquad (16)$$

бу ерда $x(t)$, $\psi(t)$, $t\in T$ бошланғич ва қўшма

$$\dot{x}=f(x, w, t),\ x(t_0)=x_0,\quad \dot{\psi}=-\partial H(x(t), \psi, w, t)/\partial x,$$

$$\psi(t_1)=-\partial\varphi(x(t_1))/\partial x,\ H(x, \psi, w, t)=\psi' f(x, w, t)$$

тизимларнинг $w\in W$ параметрга мос ечимларидир.

(16) формула (15) масалани ечиш учун IV бобда баён қилинган ҳар хил градиентли усуллардан фойдаланиш имконини беради.

4. Вариацион ҳисобнинг асосий натижаларини олиш. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи

$$\int_a^b F(x, y, y_x)\,dx\to\min,\ y(a)=c,\ y(b)=d \qquad (17)$$

оптимал бошқарув назарияси атамаларида, яъни

$$x\to t,\ y(x)\to x(t),\ y_x(x)\to\dot{x}(t)=u,\ a\to t_0,\ b\to t_1$$

бўлганда қуйидаги кўринишни олади:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\,dt \to \min, \ \dot{x} = u, \ x(t_0) = c, \ x(t_1) = d. \quad (18)$$

Агар 3-§ дагидек қўшимча $x_0(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau, x, u)\,d\tau$ ўзгарувчини киритсак, (18) дан жоиз бошқарувлар учун чеклашларсиз ($U = R_r$) терминал бошқарув масаласи

$$I(u) = x_0(t_1) \to \min, \ \dot{x} = u, \ \dot{x}_0 = F(t, x, u),$$
$$x(t_0) = c, \ x_0(t_0) = 0, \ x(t_1) = d \quad (19)$$

ни оламиз.

(19) масала учун гамильтониан ва қўшма тизимни ёзамиз:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi u + \psi_0 F(t, x, u),$$
$$\dot{\psi} = -\psi_0 \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial x}, \ \dot{\psi}_0 = 0,$$

яъни

$$\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0, \ \psi(t) = c - \psi_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau, x, u)}{\partial x}\,d\tau. \quad (20)$$

Максимум шартидан

$$\psi^0(t)\,u^0(t) + \psi_0^0 F(t, x^0(t), u^0(t)) =$$
$$= \max\,[\psi^0(t)\,u + \psi_0^0 F(t, x^0(t), u)], \ u \in R$$

ушбу

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} = \psi^0(t) + \psi_0^0 \frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0 \quad (21)$$

муносабат келиб чиқади ва у (20) билан биргаликда

$$\psi_0^0\left[-\frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau, x, u^0)}{\partial x}\,d\tau\right] = \text{const} \quad (22)$$

тенгламага олиб келади. Ўзгармас миқдор ψ_0^0 нолдан фарқли, чунки $\psi_0^0 = 0$ лигидан (21) га мувофиқ максимум принципининг айнан ноль бўлмаслигига зид $\psi^0(t) \equiv 0$ айният келиб чиқади. (22) тенгликни $\psi_0^0 \neq 0$ га бўлиб, (17) масаланинг бошланғич белгилашларида Эйлернинг интеграл тенгламаси билан мос тушишини кўрсатиш қийин бўлмаган

$$\frac{\partial F(t, x^0, u^0)}{\partial u} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau, x^0, u^0)}{\partial x} d\tau = \text{const}$$

тенгламани оламиз.

Вейерштрасс-Эрдман шартлари (VI боб) қўшма тизим $\psi^0(t)$ ечимининг узлуксизлиги ва Гамильтон функциясининг 2-бандда исботланган $u^0(t)$, $x^0(t)$, $\psi^0(t)$ бўйича узлуксизлигига келтирилади.

Гамильтонианнинг максимуми шартидан Эйлер тенгламасига олиб келадиган $\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)/\partial u = 0$ тенгликдан ташқари, Лежандр-Клебш шарти

$$\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)/\partial y_x^2 \leqslant 0$$

га эквивалент

$$\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)/\partial u^2 \geqslant 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Ушбу

$$E(x, y, y_x, z) = F(x, y, z) - F(x, y, y_x) -$$
$$-(z - y_x) \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}$$

функция (17) масала учун *Вейерштрасс функцияси* деб аталади. Унинг учун (17) масала атамаларида (21) гамильтонианнинг белгилашларидан ҳамда $\psi_0 < 0$ тенгсизликдан фойдаланган ҳолда

$$E(t, x^0(t), u^0(t), v) = F(t, x^0(t), v) - F(t, x^0(t), u^0(t)) -$$
$$-(v - u^0(t)) \frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = \frac{1}{\psi_0} (\Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t),$$
$$u^0(t), t) - \psi^0(v - u^0(t)) + (v - u^0(t)) \frac{1}{\psi^0} \psi^0(t) =$$
$$= \frac{1}{\psi^0} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \geqslant 0$$

муносабатни ола миз.

Исботланган

$$E(x, y^0(x), y_x^0(x), z) \geqslant 0, \ \forall z \in R$$

тенгсизлик вариацион ҳисобда *кучли минимумнинг Вейерштрасс зарурийлик шарти* деб аталади.

5-§. ЧИЗИҚЛИ ТИЗИМЛАРНИ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ

Оптимал бошқарув назариясида чизиқли тизимларни оптималлаштиришда мукаммал натижалар олинган. Мазкур параграфда учта маълум усулнинг татбиқлари баён қилинади.

1. Чизиқли тез таъсир масаласи. Тез таъсир масаласини (1-§) чизиқли тизим ва бошқариш учун махсус чеклаш берилганда қараймиз:

$$\dot{x} = Ax + bu, \ |u(t)| \leqslant 1, \ t \in [0, t_1]$$
$$x(0) = x_0, \ x(t_1) = 0, \ t_1 \to \min \tag{1}$$

Бу ерда x — чизиқли тизимнинг ҳолат n-вектори; u — скаляр бошқарув; A — бошқарув объектининг динамик хоссаларини характерловчи $n \times n$ — матрица; b — бошқарувнинг объектга таъсирини характерловчи n-вектор.

(1) *тизим бошқарилувчан* деб ҳисоблаймиз, яъни

$$\operatorname{rank} \{b, Ab, \ldots, A^{n-1} b\} = n. \tag{2}$$

Бошқарув назариясида кўрсатиладики, бу ҳолда координата бошининг шундай атрофи топиладики, унинг нуқталари учун (1) масаланинг жоиз траекториялари мавжуд бўлади. У ҳолда оптимал бошқарувларнинг мавжудлик теоремасига мувофиқ (1-§), x_0 кўрсатилган атрофдан олинган (1) масалада оптимал бошқарувлар ҳам топилади.

(1) масаланинг Гамильтон функциясини тузамиз:

$$H(x, \psi, u) = \psi'(Ax + bu) \tag{3}$$

ва қўшма тизим тенгламасини ёзамиз:

$$\dot{\psi} = -A'\psi. \tag{4}$$

(2) шарт бажарилганда, қўшма тизимнинг ихтиёрий ноль бўлмаган ечимидан тузилган $\psi'(t)\,b$, $t \geqslant 0$ функция чекли кесмада қуюқланиш нуқтасига эга бўлмайди ва агар A матрицанинг хос қийматлари ҳақиқий бўлса, $n-1$ дан кўп бўлмаган моментларда нолга айланади (исботланг!).

(3) функциянинг бошқарув ўзгарувчиси u бўйича $|u| \leqslant 1$ чекланиш бўлгандаги максимуми

$$u^\circ = \operatorname{sign} \psi^{0\prime} b$$

бўлганда эришилади. Демак, (1) масалада $u^0(t)$, $t \geqslant 0$ оптимал бошқарув фақат релели бўлиши мумкин:

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \psi^{0\prime}(t)\, b > 0 \text{ бўлса;} \\ -1, & \text{агар } \psi^{0\prime}(t)\, b < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

яъни ҳар бир вақт моментида чегара қийматлардан бирини қабул қилади ва чекли сондаги сакраш нуқталарига эга бўлади.

1-теорема. Агар (1) чизиқли тез таъсир масаласида мувофиқ $u^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ бошқарув максимум шартини қаноатлантирса ва унга мос $x^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ траектория $t = t_1^*$ моментда координата бошига келиб тушса, t_1^* — оптимал тез таъсир вақти, $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ — оптимал бошқарув ва траектория бўлади.

Исботи. (1), (4) тенгламаларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$, $t \geqslant 0$ функциялар учун $u(t)$ функциянинг узлуксизлик нуқталарида

$$\frac{d}{dt}\psi'(t)\,x(t) = \dot{\psi}'(t)\,x(t) + \psi'(t)\,\dot{x}(t) =$$
$$= -\psi'(t)\,Ax(t) + \psi'(t)\,Ax(t) + \psi'(t)\,bu(t) =$$
$$= \psi'(t)\,bu(t)$$

тенглик бажарилади. Уни σ дан τ гача интеграллаб,

$$\psi'(\tau)\,x(\tau) - \psi'(\sigma)\,x(\sigma) = \int_{\sigma}^{\tau} \psi'(t)\,bu(t)\,dt \qquad (5)$$

ни оламиз.

Айтайлик, $u^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ бошқарув оптимал бўлмасин, яъни шундай бошқа жоиз $u^0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ бошқарув мавжудки, у (1) тизимнинг $x^0(t)$ траекториясини $x_0 = x^0(0)$ дан $x = 0$ га $t_1^0 < t_1^*$ вақтда ўтказади. (4) қўшма тизимнинг максимум принципига мувофиқ $u^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ бошқарувга мос ечимини $\psi_*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ орқали белгилаймиз. У ҳолда, (5) дан

$$\psi'_*(t_1^0)\,x^*(t_1^0) = [\psi'_*(t_1^0)\,x^*(t_1^0) - \psi'_*(0)\,x^*(0)] -$$
$$- [\psi'_*(t_1^0)\,x^0(t_1^0) - \psi'_*(0)\,x^0(0)] =$$
$$= \int_0^{t_1^0} [\psi'_*(t)\,bu^*(t) - \psi'_*(t)\,bu^0(t)]\,dt \qquad (6)$$

келиб чиқади.

1-теореманинг шартига кўра $u^*(t)$, $t \in [0, t_1^*]$ бошқарув максимум принципини қаноатлантиради, яъни $\psi'_*(t)\,bu^*(t) \geqslant$ $\geqslant \psi'_*(t)\,bu^0(t)$, $t \in [0, t_1^*] \supset [0, t_1^0]$. Шунинг учун, (6) дан $\psi'_*(t_1^0)\,x^*(t_1^0) \geqslant 0$ тенгсизлик келиб чиқади.

Иккинчи томондан, $u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_*'(t) b$, $\psi_*'(t) b \neq 0$, $t \in [0, t_1^*]$, $t_1^0 < t_1^*$ эканлигини ҳисобга олиб, (5) дан

$$\psi_*'(t_1^0) x^*(t_1^0) = \psi_*'(t_1^0) x^*(t_1^0) - \psi_*'(t_1^*) x^*(t_1^*) =$$

$$= -\int_{t_1^0}^{t_1^*} \psi_*'(t) b u^*(t)\, dt = -\int_{t_1^0}^{t_1^*} |\psi_*'(t) b|\, dt < 0$$

эканлигини аниқлаймиз.

Зиддият теоремани исботлайди.

Бу теорема (1) *оптимал тизимнинг синтезини* амалга ошириш, яъни *тескари алоқа типидаги оптимал бошқарув* қуриш имконини беради:

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in S_+ \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \in S_- \text{ бўлса,} \end{cases} \quad S_+ \cup S_- = R_n \tag{7}$$

Бу масала (1) тизимлар икки ўлчовли, яъни $n = 2$ бўлганда содда ечилади. Синтез усулининг намойиши учун 1-§ даги (4) масалани $\beta = 0$, $v_1 = 0$ бўлган ҳолда, яъни (1) масаланинг

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ v_0 \end{pmatrix}$$

бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат масалани қараймиз. Бунда

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

векторлар чизиқли эркли бўлганлигидан, қаралаётган тизим бошқарилувчидир.

(4) қўшма тизим $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = -\psi_1$ кўринишга эга. Гамильтон функциясини тузамиз: $H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Бу ердан оптимал бошқарувларнинг шаклини оламиз: $u^0(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t$, яъни $|u^0(t)| \equiv 1$.

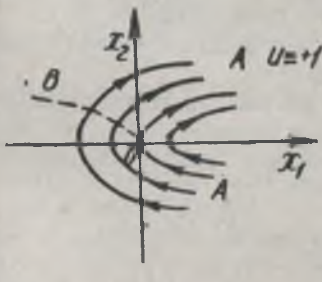
A матрицанинг хос қийматлари ($\det(A - \mu E) = \det \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} = \mu^2$ кўпҳаднинг илдизлари) ҳақиқий ($\mu_1 = \mu_2 = 0$). Демак, $\psi'(t) b = \psi_2(t)$ функция $t \geqslant 0$ тўпламда биттадан ортиқ нолга эга бўла олмайди. Демак, $u^0(t)$ оптимал бошқарув иккитадан ортиқ бўлмаган ўзгармаслик интервалига (бошқача айтганда, биттадан ортиқ бўлмаган сакраш нуқтасига) эга бўлади.

Бу маълумотлар (7) бошқарувнинг синтези учун етарлидир. $x^0(t)$ оптимал траектория

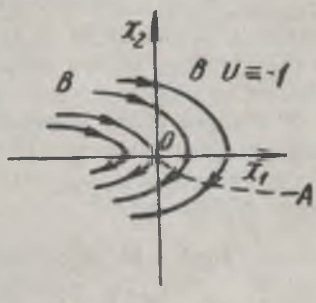
$$A \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 1; \end{aligned} \qquad\qquad B \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -1 \end{aligned}$$

тизимларнинг траекторияларидан тузилган бўлиб, иккитадан ортиқ бўлмаган қисмдан иборат. Бу тизимларнинг фазо портретлари VII.12 ва VII.13-чизмаларда тасвирланган бўлиб, $x_1 = x_2^2/2 + c$ (A), $x_1 = -x_2^2/2 + c$ (B) эгри чизиқлар тизимларидан иборатдир.

Фаза нуқтасининг эгри чизиқлар бўйлаб ҳаракат йўналишини $x_2 = 1$ (A), $x_2 = -1$ (B) шартдан топамиз. AO траектория (VII.12-чизма) ва BO траектория (VII.13-чизма) координата бошига олиб келади. 1-теоремэга асосан улар оптималдир. AOB чизиқнинг пастида ётувчи ихтиёрий $x = \{x_1, x_2\}$ нуқтадан A) тизимнинг траекторияси бўйлаб BO траекторияга, у бўйлаб эса $x = 0$ нуқтага тушиш мумкинлигини аниқлаш (VII.14-чизма) қийин эмас. Бунда биринчи соҳада $u = 1$

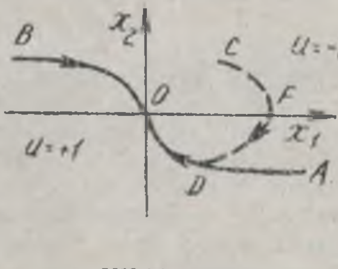


VII.12-чизма.



VII.13-чизма.

бошқарувдан, иккинчида эса $u = -1$ дан фойдаланилганлигидан, 1-теоремага мувофиқ, олинган траекториялар оптималдир. Шунга ўхшаш, AOB чизиқдан юқорида жойлашган нуқталар учун оптимал бошқарув $u = -1$ соҳадан (траекториянинг AO эгри чизиққа



VII.14-чизма.

тушишигача) ва $u=1$ соҳадан (AO траектория бўйлаб ҳаракат қилинганда) иборатдир. Шундай қилиб,

$$u^0(x)=\begin{cases} 1, \text{ агар } x\in AO \text{ ёки } AOB \text{ эгри чизиқдан пастда жойлашган бўлса,} \\ -1, \text{ агар } x\in BO \text{ ёки } AOB \text{ эгри чизиқдан юқорида жойлашган бўлса.} \end{cases} \quad (8)$$

AOB эгри чизиқ (VII.14-чизма) ўтиш чизиғи деб аталади.

Фараз қилайлик, 1-§ даги (4) тизимнинг бошланғич ҳолати $x_1=x_0>0$, $x_2=x_0>0$ кўринишга эга бўлсин. Унга VII.14-чизмада C нуқта мос келади. C нуқта ўтиш чизиғидан юқорида ётганлигидан, бошланғич соҳада (CD эгри чизиқ) оптимал бошқарув $u=-1$ қийматни қабул қилади, яъни объектга координата бошига йўналган максимал куч қўйилади. CF соҳада объект ҳаракатни сусайтириб, ўнгга харакат қилади, сўнгра тезликни орттира бориб, чапга ҳаракат қилади (FD соҳада). D нуқтадан бошлаб максимал кучнинг йўналиши тескарисига ўзгаради. Бунда объект камайиб борадиган тезлик билан чапга ҳаракат қилишни давом эттиради. Координата бошига тушиш содир бўлгандан кейин бошқарув тўхтатиладн ва объект тинч қўйилади.

(8) қонунни билиш автоматик режимда ишловчи оптимал тизимни қуриш имконини беради.

2. Охирги ҳолат нормасини минималлаштириш масаласи. Бошқарилувчан чизиқли тизимнинг охирги ҳолатидан берилган x^* векторгача бўлган масофани минималлаштиришдан иборат бўлган ушбу

$$I(u)=\|x(t_1)-x^*\|^2\to\min,\ \dot{x}=Ax+bu, \quad (9)$$
$$x(0)=0,\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in[0,\ t_1]$$

оптимал бошқарув масаласини қараймиз.

(9) масала учун максимум принципи ушбу

$$u^0(t)=\operatorname{sign}\psi'(t)\,b,\ t\in T$$

кўринишга эга, бу ерда $\psi(t)$ — (4) қўшма тизимнинг $\psi(t_1)=-2(x(t_1)-x^*)$ чегаравий шартлаги ечимидир. $\varphi(x)=\|x-x^*\|^2$ функциянинг қавариқлигидан 2-§ нинг (10) орттирма формуласидаги қолдиқ ҳад η нинг η_1 қўшилувчиси манфий бўлмайди. (9) тизимнинг x га нисбатан чизиқлилигига ва x, u ўзгарувчиларнинг ажралганлигига асосан η_2, η_3 қўшилувчилар нолга тенгдир. Шунинг учун максимум принципини қаноатлантирувчи $u(t)$, $t\in T$ бошқарув бўйлаб сифат критерийсининг орттирмаси ихтиёрий жоиз $u^*(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ бошқарув учун манфий бўлмайди. Бу эса, (9) масалада максимум принципи оптималликнинг етарлилик шартидан иборат эканлигини англатади.

Лекин терминал бошқарув масаласининг қаралаётган хусусий ҳоли учун максимум принципининг ушбу

$$\dot{x} = Ax + b\,\mathrm{sign}\,\psi' b,\ x(0) = 0,\ \dot{\psi} = -A'\psi,$$
$$\psi(t_1) = -2(x(t_1) - x^*)$$

чегаравий масаласини ечиш жиддий қийинчилик билан боғлиқ. Мазкур банднинг мақсади—(9) масалани ечишнинг бошқа, қаварик таҳлил фактларига асосланган ва (9) масалани қаварик программалаш масаласига келтириш (редукция қилиш) имконини берадиган усулни баён қилишдап иборатдир.

(9) тизимнинг мувофиқ $u(\cdot) = \{u(t),\ t \in [0, t_1]\}$ бошқарувлар таъсирида $t = t_1$ моментда бўладиган ҳолатлари тўплами $Q = Q(t_1) = \{x : x = x(t_1, u(\cdot)),\ |u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0, t_1]\}$ *мувофиқлик тўплами* деб аталади. Бу тўплам атамаларида қаралаётган масала x^* вектордан энг кам узоқлашган $x^0(t_1) \in Q$ нуқтани излашдан иборатдир (VII.15-чизма).

VII.15- чизма.

Дифференциал тенгламалар назариясида ўзгармасларни вариациялаш усули ёрдамида (9) чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ечимини тасвирлаш учун ушбу Коши формуласи исботланади:

$$x(t) = \int_0^t \exp A(t-\tau)\, bu(\tau)\, d\tau,\ t \in [0, t_1]. \tag{10}$$

(10) формуланинг ўринли эканлигига уни (9) га бевосита келтириб қўйиш натижасида ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Фараз қилайлик, $x^1 = x(t_1, u^1(\cdot))$, $x^2 = x(t_1, u^2(\cdot))$ — мувофиқлик тўпламининг ихтиёрий иккита нуқтаси бўлсин. (9) тизимнинг чизиқлилигига асосан, $u^\lambda(t) = \lambda u^1(t) + (1-\lambda) u^2(t)$ бошқарувга мос $x^\lambda(t) = x(t, u^\lambda(\cdot))$ траектория $x^\lambda(t) = \lambda x^1(t) + (1-\lambda) x^2(t)$, $t \in [0, t_1]$ тенгликни қаноатлантиради. Ихтиёрий $\lambda \in [0, 1]$ учун $u^\lambda(t)$, $t \in [0, t_1]$

функция бўлакли-узлуксиз ва $|u^{\lambda}(t)| \leqslant \lambda |u^1(t)| + (1 - \lambda)|u^2(t)| \leqslant 1$ бўлганлигидан $x^{\lambda}(t_1) \in Q$, яъни Q — қавариқ тўпламдир. Унинг чегараланган ва ёпиқлигини кўрсатиш қийин эмас. Маълумки, хар бир $\|x\|$ норма

$$\|x\| = \max_{\|g\| \leqslant 1} g'x \tag{11}$$

тасвирга эга, бу ерда $\|g\|$ — R_n га қўшма бўлган R'_n фазодан олинган g элементнинг нормасидир.

(11) дан фойдаланиб,

$$I(u^0) = \|x^0(t_1) - x^*\| = \min_{x \in Q} \|x - x^*\| =$$

$$= \min_{x \in Q} \max_{\|g\| \leqslant 1} g'(x - x^*) \tag{12}$$

ни ёзамиз.

Минимакс ҳақидаги теоремадан (11 бобга қ.) ва (10) ифодадан фойдаланамиз:

$$I(u^0) = \min_{x \in Q} \max_{\|g\| \leqslant 1} g'(x - x^*) = \max_{\|g\| \leqslant 1} \min_{x \in Q} g'(x - x^*) =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant 1} \min_{|u(t)| \leqslant 1} \left\{ -g'x^* + \int_0^{t_1} g' \exp A(t_1 - t)\, bu(t)\, dt \right\} =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant 1} \left\{ -g'x^* - \int_0^{t_1} |g' \exp A(t_1 - t)\, b|\, dt \right\} =$$

$$= -g_0' x^* - \int_0^{t_1} |g_0' \exp A(t_1 - t)\, b|\, dt.$$

Охирги иккита тенгликка оптимал бўлган

$$u^0(t) = -\operatorname{sing} g_0' \exp A(t_1 - t)\, b, \quad t \in [0, t_1] \tag{13}$$

бошқарувда эришилинади.

(9) масала

$$\lambda(g) = -g'x^* - \int_0^{t_1} |g' \exp A(t_1 - t)\, b|\, dt \to \min, \quad \|g\| \leqslant 1 \tag{14}$$

масаланинг ечимидан иборат бўлган g_0 векторни излашга келтирилди. $\lambda(g)$ функция қавариқ ва унинг g, $\lambda(g) \neq 0$ нуқтадаги градиенти

$$\operatorname{grad} \lambda(g) = -x^* - \int_0^{t_1} \exp A(t_1 - t)\, bu(t, g)\, dt, \tag{15}$$

бу ерда $u(t, g) = \mathrm{sign} g' \exp A(t_1 - t) b$, $t \in [0, t_1]$.

(14), (15) дан градиентнинг геометрик маъноси равшан (VII.16-чизма). (15) формула (9) қавариқ программалаштириш масаласини (IV боб) ечишнинг самарали усулларини ҳосил қилиш имкониятини беради.

(9) масала билан ўнг чети қўзғалувчан тез таъсир масаласи

$$\dot{x} = Ax + bu,\ |u(t)| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ \|x(t_1) - x^*\| \leqslant \delta,$$
$$t_1 \to \min$$

узвий боғлиқдир. Ҳақиқатан, тез таъсир вақти t_1^0 (9) масаланинг сифат критерийси $I(u) \leqslant \delta$ тенгсизликни қаноатлантирган минимал t_1 га тенгдир. (14) дан

$$t_1^0 = \min_{\|g\|=1} \{t(g) : -g'x^* -$$
$$- \int_0^{t(g)} |g' \exp A(t(g) - t)\, b|\, dt = \delta\} = t(g_0) \qquad (16)$$

деган хулосага келамиз. Бунда агар

$$-g_0' x^* - \int_0^{t_1^0} |g_0' \exp A(t_1^0 - t)\, b|\, dt = \delta$$

бўлса, оптимал бошқарув (13) кўринишда бўлади.

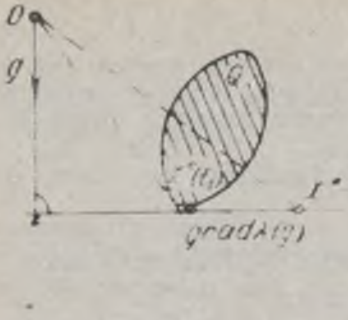
Ушбу $\psi'(t) = -g_0^* \exp A(t_1^0 - t) b$ белгилашни киритиб, $\psi(t)$ (4) қўшма тизимнинг $\psi(t_1^0) = -g_0$ бошланғич шартдаги ечимидан иборат эканлигини оламиз.

(13) тенглик максимум принципига эквивалентдир. Барча $\|x - x^*\| \leqslant \delta$ лар учун $g_0' (x^0(t_1^0) - x^*) \leqslant g_0' (x - x^*)$ бўлганлигидан $\psi(t_1^0)$ вектор учун трансверсаллик шарти деб аталган (3-§) ушбу

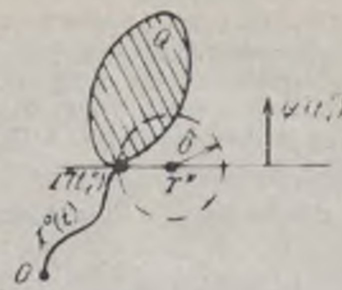
$$\psi^{0\prime}(t_1^0)(x^0(t_1^0) - x^*) = \min_{\|x - x^*\| \leqslant \delta} \psi^{0\prime}(t_1^0)(x - x^*)$$

шарт бажарилади.

Бу шарт геометрик тилда траекториянинг ўнг четида қуйидагиларни англатади: $x^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1^0$ оптимал траектория $\|x - x^*\| \leqslant \delta$ тўпламга таянч текислик $\psi^0(t_1^0)$ векторга тик бўлган ($\psi^0(t_1^0)$ вектор эслатилган тўплам томонига йўналган) (VII.17-чизма) $x^0(t_1^0)$ нуқтада тугалланади.



VII.16- чизма.



VII.17- чизма.

Барча $x \in Q$ лар учун ўринли бўлган $g_0'(x - x^*) \geqslant \geqslant g_0'(x^0(t_1^0) - x^*)$ тенгсизликдан оптимал тез таъсир вақти t_1^0 (3- § га қ.) учун стационарлик шарти келиб чиқади.

Баён қилинган усул фақат максимум принципини исботлаш учун эмас, балки қўшма тизим учун бошланғич шартни кўрсатиш имконини ҳам беради.

Усулнинг намойиши учун объектни тинч $(x = 0)$ ҳолатдан $\{x_1 = \alpha > 0,\ x_2 = 0\}$ нуқтага энг тез вақтда ўтказиш масаласини (1- §) ечамиз. Баён қилинганига кўра тез таъсир вақти $\delta = 0$ да (16) га тенгдир. Сўнгра $\exp At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлганлиги учун (16) дан

$$t_1^0 = \min\left\{t_1 : -g_1\alpha + \int_0^{t_1} [g_1(t_1 - t) + g_2]\, dt = 0\right\}$$

эканлигини оламиз.

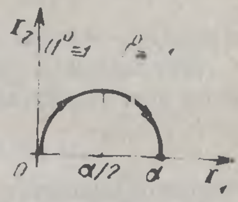
Бошқарувнинг ўтиши рўй берадиган вақт моменти t^* ни топамиз:

$$g_1(t_1 - t^*) + g_2 = 0,\ t^* = t_1 + g_2/g_1,\ g_2 \cdot g_1 < 0.$$

Шунингдек, $g_1 > 0$ деб ҳисоблаймиз (акс ҳолда, $t_1^0 = 0$ эканлигини олар эдик). У ҳолда, $-g_1\alpha + \int_0^{t^*}[g_1(t_1 - t) + g_2]\,dt - \int_{t^*}^{t}[g_1(t_1 - t) + g_2]\,dt = 0$. Бундан $g_1/2\, t_1^2 + g_2 t_1 + g_2^2/g_1 - g_1\alpha = 0$. Демак, $t_1 = -g_2/g_1 \pm \sqrt{-g_2^2/g_1^2 + 2\alpha}$. Оптимал тез таъсир вақти $t_1^0 = 2\sqrt{\alpha}$ эканлигини ҳисоблаш қийин эмас. Бунда $g_1^0 = 1/\sqrt{\alpha+1}$, $g_2^0 = -\sqrt{\alpha}/\sqrt{\alpha+1}$. Максимум принципига асосан

$$u^0(t) = \operatorname{sign}\,[g_1^0(t_1^0 - t) + g_2^0] = \operatorname{sign}\,[\sqrt{\alpha} - t].$$

Масалада оптимал бошқарув $u \equiv 1$ соҳа ва $u \equiv -1$ соҳадан иборатдир (VII-18- чизма).



VII.18- чизма.

3. Квадратик сифат критерийсини минималлаштириш. Бўлакли- узлуксиз функциялар синфида

$$I(u) = \int_0^{t_1} [x'(t)\, Lx(t) + u^2(t)]\, dt \to \min \quad (L > 0) \tag{17}$$

функционални бошқарилувчан

$$\dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = x^0, \ t \in T = [0, t_1] \tag{18}$$

тизим траекторияларида минималлаштириш масаласини қараймиз.

(17), (18) масала учун Гамильтон функцияси (2- § га қ.)

$$H(x, \psi, u) = -x'Lx - u^2 + \psi'(Ax + bu)$$

кўринишга эга. Қўшма тизим

$$\dot{\psi} = -A'\psi + 2Lx, \ \psi(t_1) = 0$$

ни беради. Максимум шарти: $u^0(t) = 1/2\, \psi'(t)\, b$.

Агар (17), (18) масаладан терминал бошқарув масаласига ўтсак ва 2- § нинг (10) орттирма формуласидан фойдалансак, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 \geqslant 0$ бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, 2- банднинг масаласидаги каби (17), (18) масала учун максимум принципи оптималликнинг етарлилик шартини ташкил қилади. Лекин яна максимум принципининг чегаравий масаласи

$$\dot{x} = Ax + b/2 \cdot \psi'(t)\, b, \ x(0) = x_0,$$

$$\dot{\psi} = -A'\psi + 2Lx, \ \psi(t_1) = 0$$

чизиқли бўлиб, уни масалан, ҳайдаш усуллари билан самарали ечиш мумкин бўлса- да, динамик программалаш усули билан қуйида олинадиганларга қараганда жуда мураккаб ва амалга ошириш учун унча қулай бўлмаган амаллар ва натижаларга олиб келади.

V бобнинг 2- § ига асосан (17), (18) масала учун *Беллман тенгламаси*

$$-\partial B(x, \tau)/\partial\tau = \min_u \{(Ax + bu)' \partial B(x, \tau)/\partial x + x'Lx + u^2\}, \quad (19)$$

$$B(x, t_1) = 0 \quad (20)$$

кўринишга эга бўлади.

Тенгламанинг ўнг томонида минимум u бўйича ҳосилани нолга тенглаштиргандан сўнг олинадиган

$$u(x, \tau) = -1/2 \cdot b' \partial B(\lambda, \tau)/\partial x \quad (21)$$

нуқтада эришилади.

(21) ни (19) га келтириб қўйиб, Беллман тенгламасини

$$-\partial B(x, \tau)/\partial\tau = x'A'\partial B(x, \tau)/\partial x + x'Lx - \frac{1}{4} \cdot [b'\partial B(x, \tau)/\partial x]^2 \quad (22)$$

кўринишга келтирамиз. (22) тенгламанинг (20) чегаравий шартдаги ечимини

$$B(x, \tau) = x'M(\tau)x \quad (23)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда, $M(\tau) = M'(\tau)$ — $n \times n$-матрицавий функциядир.

(23) ни (22), (20) га қўямиз ва x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\dot{M} = -L - 2MA + Mbb'M, \quad M(t_1) = 0. \quad (24)$$

(24) тенглама *матрицавий Риккати тенгламаси* деб аталади. У қилинган фаразларда T кесмада аниқланган силлиқ ечимга эга.

Шундай қилиб, (19), (20) Беллман тенгламасининг (23) силлиқ ечими қурилди. Шу туфайли (2- § га қ.) (21) бошқарув (17), (18) масалада оптимал бўлади.

Агар (23) функцияни (21) га қўйсак,

$$u(x, \tau) = -b' M(\tau) x$$

ни оламиз, яъни (17), (18) масалада оптимал бошқарув x ҳолатга нисбатан чизиқлидир.

(24) дан фойдаланиб сифат критерийсининг минимал қийматини ҳисоблаш мумкин:

$$I(u^0) = B(x_0, 0) = x_0' M(0) x_0.$$

Айтайлик, (17), (18) масалада $t_1 = \infty$ бўлсин. Бу масалани ечиш учун $t_1 \to \infty$ бўлган (17), (18) масалалар кетма-кетлигини қараймиз. (24) тенгламанинг танлаб олинган t_1 даги ечимини $M_{t_1}(\tau)$ деб белгилаймиз.

2-теорема. $t_1 \to \infty$ бўлган (17), (18) масалада бошқарувнинг чизиқли оптимал қонуни мавжуд бўлиши учун чекли

$$\lim_{t_1 \to \infty} M_{t_1}(0) = M \qquad (25)$$

лимит мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Айтайлик, $I_\infty(u)$, $I_\infty(u) = \int\limits_0^\infty (x'Lx + u^2)\,dt$ функционал минимал қиймат қабул қиладиган u^0 бошқарув қонуни топилган бўлсин. Мусбат сонлар кетма-кетлиги $t^1 < t^2 < \ldots < t^n < \ldots$ ни ва квадратик шакллар кетма-кетлиги

$$\int\limits_0^{t^1} (x'Lx + (u^1)^2)\,dt, \quad \int\limits_0^{t^2} (x'Lx + (u^2)^2)\,dt, \ \ldots,$$

$$\int\limits_0^{t^n} (x'Lx + (u^n)^2)\,dt, \ \ldots$$

ни тузамиз, бу ерда u^i — ушбу $I_{t^i}(u^i) = \int\limits_0^{t^i} (x'Lx + (u^i)^2)\,dt$ функционалга минимал қиймат берувчи бошқарувнинг оптимал қонунидир. Бу кетма-кетлик монотон ўсувчидир:

$$\int\limits_0^{t^i} (x'Lx + (u^i)^2)\,dt \leqslant \int\limits_0^{t^i} (x'Lx + (u^{i+1})^2)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t^{i+1}} (x'Lx + (u^{i+1})^2)\,dt.$$

Бундан ташқари, у ҳар бир x_0 учун чегараланган, чунки исталган t^i учун

$$\int\limits_0^{t^i} (x'Lx + (u^i)^2)\,dt \leqslant \int\limits_0^{t^i} (x'Lx + (u^0)^2)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty (x'Lx + (u^0)^2)\ dt.$$

Демак,

$$x_0' M_{t^1}(0)\, x^0,\ x_0' M_{t^2}(0)\, x_0,\ \ldots,\ x_0' M_{t^n}(0)\, x_0,\ \ldots$$

квадратик шакллар кетма-кетлиги ихтиёрий x_0 ларда ўзгармас коэффициентли бирор $x_0' M x_0$ квадратик шаклга яқинлашади. Зарурийлик исботланди.

Етарлилиги. Айтайлик, (25) шарт бажарилган бўлсин. Демак,

$$\lim_{t^n \to \infty} \int\limits_0^{t^n} (x'Lx + (u^n)^2)\ dt = \lim_{t^n \to \infty} x_0' M_{t^n}(0)\, x_0 =$$

$$= x_0' M x_0 < +\infty$$

Шунингдек,

$$u^0(x) = -\lim_{t^1 \to \infty} b' M_{t^1}(0)\, x = -b'Mx \qquad (26)$$

бошқарув (17), (18) масалада $t_1 \to \infty$ бўлганда оптимал бўлиши тасдиқланмоқда. Масаланинг стационарлигидан

$$\lim_{t^n \to \infty} \int\limits_0^{t^n} (x'Lx + (u^n)^2)\, dt = \int\limits_0^\infty (x'Lx + (u^0)^2) dt \qquad (27)$$

муносабат бажарилади.

Ҳақиқатан, ҳар бир тайинланган $\bar{t}$, $\bar{t} < t^n$ учун:

$$\int\limits_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2)\, dt \geqslant \int\limits_0^{\bar{t}} (x' Lx + (u^0)^2)\ dt.$$

Бунда

$$\lim_{t^n \to \infty} \int\limits_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2)\, dt \geqslant \int\limits_0^{\bar{t}} (x'L x + (u^0)^2) dt.$$

$\bar{t} \to +\infty$ да лимит ўтиб,

$$\lim_{t^n \to \infty} \int\limits_0^{t^n} (x' Lx + (u^n)^2)\, dt \geqslant \int\limits_0^\infty (x' Lx + (u^0).^2)\, dt \qquad (28)$$

ни оламиз. Иккинчи томондан,

$$\int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2)\, dt \leqslant \int_0^{t^n} (x' Lx + u^0)^2)\, dt$$

яъни

$$\lim_{t^n \to \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2)\, dt \leqslant \int_0^{\infty} (x' Lx + (u^0)^2)\, dt$$

бундан ва (28) дан (27) келиб чиқади.

Айтайлик, кўрсатилган (26) бошқарув оптимал бўлмасин. У ҳолда шундай $\bar{u}$ бошқарув мавжуд бўладики,

$$\int_0^{\infty} (x' Lx + \bar{u}^2)\, dt < \int_0^{\infty} (x' Lx + (u^0)^2\, dt \qquad (29)$$

муносабат бажарилади, бироқ

$$\int_0^{t^n} (x'Lx + \bar{u^2})\, dt \geqslant \int_0^{t^n} (x'Lx + (u^0)^2)\, dt.$$

Демак,

$$\int_0^{\infty} (x' Lx + \bar{u}^2)\, dt \geqslant \int_0^{\infty} (x'Lx + (u^0)^2)\, dt,$$

бу эса (29) га зиддир. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, (26) бошқарув

$$\int_0^{\infty} (x' Lx + u^2)\, dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0$$

масалада оптимал бўлади.

(26) бошқарув $\dot{x} = Ax + bu$ тизимни стабиллаштирар экан, яъни тизимни (26) тескари боғланиш билан бирлаштирсак,

$$\dot{x} = (A - b\, b'M)\, x$$

асимптотик турғун тизим ҳосил бўлади. (17), (18) масаланинг $t_1 = \infty$ бўлгандаги ечимининг бу хоссаси бошқарувнинг амалий масалаларида турғун бўлмаган объектларни стабиллаштиришда кенг қўлланилади.

6- §. ДИСКРЕТ ЖАРАЁНЛАРНИ ОПТИМАЛ БОШҚАРУВ

Ҳолати фақат дискрет вақт моментларида ўзгарадиган ёки ўлчаш мумкин бўлган жараёнлар (тизимлар) *дискрет* (*кўп қадамли, кўп босқичли*) деб аталади. Улар кўп амалий масалалар-лари битта қадам чегарасида ўрин алмаштириши мумкин. Шунинг учун

$$I(p^0, q^0) = \max_{q(x(t_0))} \min_{p(x(t_0))} \min_{p(xt_0+1))} \max_{q(xt_0+1))} \ldots$$

$$\ldots \min_{p(x(t_1-1))} \max_{q(x(t_1-1))} \underset{p,q}{M} \varphi(x(t_1)). \qquad (35)$$

(29) жараённи жараёнлар оиласига туркумлаб ва (34); (35) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидаги

$$B(x, t) = \min_{\substack{0<p_i<1 \\ \Sigma p_i = 1}} \max_{\substack{0<q_j<1 \\ \Sigma q_j = 1}} \left[\sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j B(f(x, u^i, w^j, t), t+1) \right] =$$

$$= \max_{\substack{0<q_j<1 \\ \Sigma q_j = 1}} \min_{\substack{0<p_i<1 \\ \Sigma p_i = 1}} \left[\sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j B(f(x, u^i, w^j, t), t+1) \right] \qquad (36)$$

Беллман тенгламаси ва

$$B(x, t_1 - 1) = \max_{\substack{0<q_j<1 \\ \Sigma q_j = 1}} \min_{\substack{0<p_i<1 \\ \Sigma p_i = 1}} \left[\sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j \varphi(f(x, u^i, w^j, t_1 - 1)) \right] \qquad (37)$$

бошланғич шартга келамиз, (36), (37) тенгламаларни ечиш бу банднинг олдинги масалаларидаги Беллман тенгламаларини ечишга ўхшашдир.

7-§. ТАҚСИМЛАНГАН ПАРАМЕТРЛИ ТИЗИМЛАРНИ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ

Ҳозиргача эркинлик даражаси сони чекли бўлган тизимларга хос оптималлаштириш масалалари қаралган эди. Бундай тизимлар *мужассамланган параметрли тизимлар* деб аталади. Кўпчилик реал объект ва жараёнлар чексиз сонли эркинлик даражасига эга бўлади ва улар *тақсимланган параметрли тизимлар* деб аталади. Бундай тизимларнинг математик ифодаланишида ҳар хил хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, интегро-дифференциал тенгламалар, четланган аргументли дифференциал тенгламалар ва ҳ. к. қўлланилади. Тақсимланган параметрли тизимларни оптималлаштиришга асос қилиб олинган принциплар мужассамланган параметрли тизимлардаги каби бўлиб, лекин уларнинг амалга оширилиши, янги объектларнинг мураккаблиги даражасига қараб, кўп техник қийинчиликларга олиб келади. Мазкур параграфда вариацион ҳисоб ва оптимал бошқарувнинг олдин кўриб чиқилган масалаларига ўхшаш иккита содда масала қаралади.

1. Вариацион ҳисобнинг тақсимланган параметрли энг содда масаласи. Жоиз функциялар деб, R_2 фазонинг G соҳасида аниқланган ва у ерда ўзининг иккинчи тартибли ҳосиласи билан бирга узлуксиз ҳамда соҳанинг чегараси L да берилган

$$v(s) = c(s), \quad s \in L$$

қийматларни қабул қилувчи $z = \{x, y\}$ икки аргументнинг скаляр $v = v(x, y)$ функцияларни атаймиз.

Жоиз функциялар ичида шундайини топиш керакки (*минимал*), унда

$$I(v) = \iint\limits_G F(x, y, v, v_x, v_y)\, dx\, dy \qquad (1)$$

функционал минимал қиймат қабул қилсин.

F функция $C^{(2)}$ синфга қарашли деб фараз қиламиз.

Кучсиз минимум, жоиз функциянинг вариацияси, функционалларнинг вариациялари тушунчалари VI бобнинг 2-§ идагига ўхшаш киритилади. Кучсиз минимумнинг зарурий шарти вариациялар атамаларида

$$\delta I(v, h) = 0 \qquad (2)$$

кўринишга эга, бу ерда

$$\delta I(v, h) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial F}{\partial v} h + \frac{\partial F}{\partial v_x} h_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} h_y \right) dx\, dy \qquad (3)$$

(1) функционалнинг биринчи вариациясидир.

(2) шартни соддалаштириш учун Лагранж леммасининг ўхшашидан фойдаланилади: агар узлуксиз $a(x, y)$, $\{x, y\} \in G$ функция учун ва барча $h(x, y) = 0$, $\{x, y\} \in Z$ бўлган $h(x, y) \in C^{(1)}$ функциялар учун

$$\iint\limits_G a(x, y)\, h(x, y)\, dx\, dy = 0$$

бўлса, у ҳолда $a(x, y) \equiv 0$, $\{x, y\} \in G$ бўлади.

Шунингдек,

$$\frac{\partial}{\partial x} hF_{v_x} = h_x F_{v_x} + h \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} hF_{v_y} = h_y F_{v_y} + h \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y}$$

бўлганлигидан, (3) га мувофиқ,

$$\delta I(v,\ h) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_x}\right) h\, dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_G \left(\frac{\partial}{\partial x} hF_{v_x} + \frac{\partial}{\partial y} hF_{v_y}\right) dx\, dy$$

деб ёзиш мумкин. Охирги интегралга ушбу Грин формуласини қўллаймиз:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_L P\, dx + Q\, dy$$

(бўлаклаб интеграллаш формуласининг ўхшаши):

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial}{\partial x} hF_{v_x} + \frac{\partial}{\partial y} hF_{v_y}\right) dx\, dy = \int\limits_L hF_{v_x} dx - hF_{v_y} dy$$

$h(x,\ y) \equiv 0,\ \{x,\ y\} \in L$ бўлганлигидан, охирги интеграл нолга тенг ва функционалнинг биринчи вариацияси

$$\delta I(v,\ h) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y}\right) h\, dx\, dy$$

кўринишни олади. Бу ердан Лагранж леммасининг ўхшашига асосан тақсимланган параметрли энг содда масалаларда ҳар бир кучсиз минимал қаноатлантириши зарур бўлган

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y} = 0$$

Эйлер-Остроградский тенгламасини оламиз.

Мисол. Берилган

$$\{x,\ y,\ v:\ x = x(s),\ y = y(s),\ v = c(x(s),\ y(s)),\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$$

контурга тортилган ва минимал юзга эга бўлган сиртни топиш ушбу

$$I(v) = \iint\limits_G \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\ dx\, dy \to \min$$

масалага келтирилади, бу ерда $G - \{x,\ y:\ x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ чизиқ билан чегараланган соҳадир. Бу ҳолда Эйлер-Остроградский тенгламаси

$$v_{xx}(1 + v_y^2) - 2\, v_{xy}\, v_x\ v_y + v_{yy}(1 + v_x^2) = 0$$

кўринишга эга бўлади. Тенгламанинг чап томонидаги ифода мусбат кўпайтувчи аниқлигида сиртнинг *ўртача эгрилиги* билан устма-уст тушади. Демак, изланаётган сирт албатта ноль эгриликка эга бўлиши керак, яъни уни *минимал* сиртлар ичида излаш керак.

2. Тақсимланган параметрли бир тизимни оптимал бош-

қариш масаласи. l узунликдаги, чап охири иссиқлик ўтказмайдиган қилинган, ўнг охири эса ҳароратини ўзгартириши мумкин бўлган муҳитга жойлашган стерженни қараймиз.

$v(x, t)$ орқали стерженнинг x нуқтада t моментдаги ҳароратини белгилаймиз. Ҳароратнинг стерженда тарқалиши иссиқлик ўтказиш тенгламаси

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

билан ифодаланади. Стерженнинг чап четидаги шарт

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0,$$

ўнг четидаги шарт

$$\lambda\frac{\partial v(l, t)}{dx} = \alpha(u(t) - v(l, t)),$$

бошланғич шарт

$$v(x, 0) = 0$$

бўлади. Бу ерда, a — ҳарорат ўтказувчанлик коэффициенти λ — иссиқлик ўтказиш коэффициенти; α — иссиқлик алмашиш коэффициенти; $u(t)$ — стерженнинг ўнг охиридаги муҳитнинг ҳарорати бўлиб, уни бошқариш сифатида қабул қиламиз.

Жоиз бошқарув деб

$$|u(t)| \leqslant L, \quad t \geqslant 0$$

чеклашни қаноатлантирувчи ўлчовли $u(t)$, $t \geqslant 0$ функцияни атаймиз.

Жоиз бошқарувлар ичида шундай $u^0(t)$ ни излаймизки, унда

$$I(u) = \int_0^l (v(x, T) - v^*(x))^2\,dx$$

сифат критерийси минимал қиймат қабул қилсин, бу ерда, T — берилган вақт моменти; v_x^* — стерженда ҳароратнинг берилган тарқалиши.

Айтайлик, $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ оптимал бошқарув, $v^0(x, T)$ — стерженда $t = T$ моментда ҳароратнинг оптимал тарқалиши, $u(t)$, $t \in [0, T]$, $v(x, T)$ бошқа жоиз жуфт бўлсин.

$$u_\varepsilon(t) = u^0(t) + \varepsilon[u(t) - u^0(t)]$$

бошқарув исталган $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ учун жоиз бўлади.

$u^0(t)$ бошқарувнинг оптималлигидан

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \geqslant 0$$

эканлиги келиб чиқади. Грин функцияси ёрдамида

$$v_\varepsilon(x, T) = \int_0^T K(x, T, t)\, u_\varepsilon(t)\, dt$$

деб ёзиш мумкин бўлганлигидан

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 2\int_0^l (v^0(x, T) -$$

$$- v^*(x)) \int_0^T K(x, T, t)(u(t) - u^0(t))\, dt\, dx \geqslant 0 \qquad (4)$$

бўлади.

$u(t)$ бошқарувни игнасимон вариация (2-§ га қ.) ёрдамида қуриб, (4) дан барча $|u| \leqslant L$ лар учун

$$u^0(t) = -\operatorname{sign} \int_0^l (v^0(x, T) - v^*(x))\, K(x, T, t)\, dx$$

шартга эквивалент бўлган

$$\int_0^l (v^0(x, T) - v^*(x))\, K(x, T, \theta)\, (u - u^0(\theta))\, dx \geqslant 0$$

тенгсизликни оламиз.

Агар бу ерда $v^0(x, T)$ нинг $u^0(t)$ орқали Грин функцияси ёрдамидаги ифодасини қўйсак, ечими $u^0(t)$ оптимал бошқарувдан иборат интеграл тенглама олинади.

8-§. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЎЙИНЛАР

Манфаатлари ўзаро устма-уст тушмайдиган томонлар иштирок этадиган конфликтли (ихтилофли, низоли) зиддиятли ҳолатларнинг математик модели *ўйин* деб аталади. Агар ўйинни тавсифлашда дифференциал тенгламалардан фойдаланилса, у *дифференциал ўйин* деб аталади. Дифференциал ўйинларнинг кенг тарқалган моделлари оптимал бошқарувнинг турли мақсадни кўзлаган кишилар томонидан танланиши мумкин бўлган бошқарувнинг икки ёки бир неча гуруҳини ўз ичига олган мос моделларининг умумлашмасидан иборат.

1. Масаланинг қўйилиши. Ушбу

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \qquad (1)$$

тенглама билан ифодаланган жараёнга таъсир кўрсатувчи P_1 ва P_2 ўйинчилар ўйиннинг иштирокчилари бўлсин (бу ерда A, B, C мос равишда $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(n \times s)$ матрицалар). P_1 ва P_2 ўйинчиларнинг ихтиёрида, мос равишда, u ва v бошқарувлар бўлиб, ўйинчилар ҳар бир вақт моментида ўз бошқарувини танлашда

$$u \in U, \quad v \in V \qquad (2)$$

чеклашларга итоат қилишади, бу ерда U ва V лар, мос равишда, R_r ва R_s нинг қавариқ компакт қисм тўпламларидир. $u = u(t)$ ва $v = v(t)$ функциялар t вақтнинг функцияси сифатида ўлчовлидир.

Бундан ташқари, қавариқ ёпиқ M тўплам — *ўйиннинг терминал тўплами* берилган.

Ўйин шундан иборатки, P_1 ўйинчи x фаза нуқтасини терминал тўплам M га келтиришга ҳаракат қилади, бунда айни пайтда P_2 ўйинчи x нуқтани M-га тушишга тўсқинлик қилади. x нуқта M га тушгандан бошлаб ўйин тугаган деб ҳисобланади.

P_1 ва P_2 ўйинчиларнинг *жоиз стратегиялари* сифатида моҳияти қуйидагидан иборат *ε-стратегияларни* қараймиз. Бошланғич $t = 0$ моментда P_2 ўйинчи P_1 рақибига ўзининг ноль бўлмаган $\varepsilon_1 > 0$ вақт оралиғидаги бошқарувини билдиради, бунда $\varepsilon_1 > 0$ миқдорни P_2 ўйинчи ўз ихтиёри билан танлаши мумкин. Шу маълумот бўйича P_1 ўйинчи кўрсатилган вақт оралиғида ўз бошқарувини қуради. ε_1 вақт ўтгандан кейин P_2 ўйинчи яна ε_2 вақт оралиғини ва ўз бошқарувини билдиради ва ҳ. к.

Агар P_2 ўйинчининг ҳар бир ε стратегиясига P_1 ўйинчи ўзининг шундай ε-стратегиясини қарама-қарши қўйсаки, (1) тизимнинг бу бошқарувларга мос траекторияси T дан кеч бўлмаган вақтда M тўпламга тушса, x_0 нуқтадан бошланган ўйин T вақтда тамомланиши мумкин дейилади.

2. Тўпламларнинг геометрик айирмаси. Мазкур бандда дифференциал ўйинларни қарашда қўлланиладиган қавариқ тўпламлар билан боғлиқ бир неча қурилмалар баён қилинади.

Айтайлик, A ва B тўпламлар R_n фазонинг иккита қавариқ қисм тўплами бўлсин. $A \overset{*}{-} B$ *геометрик айирма* деб, шундай $z \in R_n$ нуқталар тўпламига айтиладики, улар учун $z + B \subset A$ бўлади, яъни

$$A \overset{*}{-} B = \{z \in R_n : z + B \subset A\}. \tag{3}$$

Таърифдан $(A \overset{*}{-} B) + B \subset A$ эканлиги келиб чиқади, бу ерда $A \overset{*}{-} B$ шартни қаноатлантирувчи максимал тўпламдир, яъни $D + B \subset A$ муносабатдан $D \subset A \overset{*}{-} B$ эканлиги келиб чиқади.

Геометрик айирманинг хоссалари:

а) A ва B қавариқ тўпламларнинг $A \overset{*}{-} B$ геометрик айирмаси қавариқ бўлади.

Исботи. $z_1, z_2 \in A \overset{*}{-} B$ ва α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ҳақиқий сон бўлсин. $\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$ нуқтани қараймиз. $\alpha B + (1 - \alpha) B = B$ бўлганлигидан

$$\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 + B = \alpha (z_1 + B) + (1 - \alpha)(z_2 + B) \subset \alpha A + (1 - \alpha) A = A,$$

бу эса $\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 \in A \overset{*}{-} B$ эканлигини билдиради.

б) A, B, A_1, B_1 қавариқ тўпламлар бўлиб, $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ бўлсин. У ҳолда

$$A \overset{*}{-} B \subset A \overset{*}{-} B_1, \tag{4}$$

$$A_1 \overset{*}{-} B \subset A \overset{*}{-} B. \tag{5}$$

(4) мансубликни исботлаймиз. Таърифга кўра $(A \overset{*}{-} B) + B \subset A$ га эга бўламиз. $B_1 \subset B$ бўлганлигидан $(A \overset{*}{-} B) + B_1 \subset A$ ва демак, $(A \overset{*}{-} B) \subset A \overset{*}{-} B_1$. (5) мансублик шунга ўхшаш исботланади.

в) Айтайлик, A, B лар R_n да қавариқ қисм тўпламлар бўлиб, A — ёпиқ бўлсин. У ҳолда $A \overset{*}{-} B$ ёпиқ тўплам бўлади.

Исботи. $A \overset{*}{-} B$ дан ихтиёрий $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни қараймиз ва $z = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$ бўлсин. Ихтиёрий n ва $b \in B$ элемент учун $z_n + b \in A$ бўлганлигидан A нинг ёпиқлигига асосан B дан олинган ихтиёрий b учун $z_0 + b \in A$ бўлади, яъни $z_0 \in A \overset{*}{-} B$. Демак, $A \overset{*}{-} B$ тўплам ёпиқдир.

г) Айтайлик, A ва B лар R_n дан олинган ёпиқ қавариқ қисм тўпламлар бўлиб, B компакт бўлсин. У ҳолда

$$\delta^* (\lambda, A \overset{*}{-} B) \leqslant \delta^* (\lambda, A) - \delta^* (\lambda, B), \ \lambda \in R_n. \tag{6}$$

Бу ерда $\delta^* (\lambda, C) = \sup\limits_{x \in C} \lambda' x$ — қавариқ C тўпламнинг *таянч функциясидир*.

Исботи. $(A \overset{*}{-} B) + B \subset A$ бўлганлигидан барча $\lambda \in R_n$ лар учун $\delta^* (\lambda, (A \overset{*}{-} B) + B) \leqslant \delta^* (\lambda, A)$ бўлади. Бундан ташқари, $\delta^*(\lambda, (A \overset{*}{-} B) + B) = \delta^*(\lambda, A \overset{*}{-} B) + \delta^*(\lambda, B)$. Бу муносабатни олдинги тенгсизликка қўйиш (6) га олиб келади.

д) A ёпиқ қавариқ тўплам, B эса қавариқ компакт бўлсин. У ҳолда

$$(A + B) \overset{*}{-} B = A. \tag{7}$$

Исботи. $A + B \subset A + B$ бўлганлигидан $A \subset (A + B) \overset{*}{-} B$. Энди тескари мансубликни исботлаймиз. $F \triangleq (A + B) \overset{*}{-} B$ деб белгилаймиз.

г) хоссага асосан

$$\delta^*(\lambda, F) \leqslant \delta^*(\lambda, A + B) - \delta^*(\lambda, B) = \delta^*(\lambda, A),\ \lambda \in R_n$$

га эга бўламиз, бу ердан $F \subset A$ эканлиги келиб чиқади.

е) A, B ва C лар R_n дан олинган қавариқ қисм тўпламлар бўлсин. У ҳолда

$$(A \overset{*}{-} B) + C \subset (A + C) \overset{*}{-} B. \tag{8}$$

Исботи. Айтайлик, $z \in (A \overset{*}{-} B) + C$ бўлсин. У ҳолда $z = x + y$, бу ерда

$$x \in A \overset{*}{-} B, \tag{9}$$

$$y \in C. \tag{10}$$

(9) дан геометрик айирма таърифига асосан

$$x + B \subset A \tag{11}$$

келиб чиқади.

(10) ва (11) ни қўшиб,

$$z \in (A + C) \overset{*}{-} B$$

ни англатувчи

$$z + B \subset A + C$$

ни оламиз. Демак, (8) мансублик исботланди.

Фараз қилайлик, $\Omega(R_n) - R_n$ фазонинг барча бўш бўлмаган компакт қисм тўпламларининг S тўплами R_n да бирлик шардан иборат бўлсин. Ихтиёрий X, $У \subset \Omega(R_n)$ лар учун

$$\rho(X, У) = \inf\{t \geqslant 0 : X \subset У + tS,\ У \subset X + tS\} \tag{12}$$

деб оламиз. Унда

$$\rho(X, У) = \max\{\max_{x \in X} \rho(x, У), \max_{y \in У} \rho(y, X)\}$$

бўлишини текшириш қийин эмас. $\Omega(R_n)\times\Omega(R_n)$ да (12) муносабатлар билан аниқланган ρ функция метрика аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатамиз:

1) Барча $X, У\in\Omega(R_n)$ лар учун $\rho(X, У)\geqslant 0$ бўлиши таърифдан келиб чиқади. $\rho(X, У)=0$ деб фараз қиламиз. Бу $X\subset У$, $У\subset X$ мансубликларнинг ўринли эканлигига эквивалент бўлиб, $X=У$ ни англатади. Аксинча, агар $X=У$ бўлса, $\rho(X, У)=0$ тенглик ўз-ўзидан равшандир.

2) ρ функциянинг симметриклиги, яъни $\rho(X, У)=\rho(У, X)$ муносабатнинг ўринлилиги ўз-ўзидан равшан.

3) Учбурчак хоссасини исботлаймиз: $\rho(X, У)\leqslant\rho(X, Z)+$ $+\rho(Z, У)$. $a=\rho(X, Z)$ $b=\rho(Z, У)$ деб белгилаймиз. (12) аниқланишга кўра

$$X\subset Z+aS,\ Z\subset X+aS,\ Z\subset У+bS,\ У\subset Z+bS$$

бўлади. Булардан

$$X\subset У+(a+b)S \text{ ва } У\subset X+(a+b)S.$$

Демак,

$$\rho(X, У)\leqslant a+b=\rho(X, Z)+\rho(Z, У).$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Шундай қилиб, ρ функция $\Omega(R_n)$ тўпламда метрикани беради. Одатда у *Хаусдорф метрикаси* деб аталади.

Қуйидаги натижани исботсиз келтирамиз.

Бляшке теоремаси. Фараз қилайлик, $G - R_n$ даги компакт бўлсин. У ҳолда $\Omega(G)=\{X\in\Omega(R_n)|X\subset G\}$ тўплам $\Omega(R_n)$ метрик фазонинг компакт қисм тўплами бўлади.

Энди ҳақиқий ўқни $\Omega(R_n)$ метрик фазога $X(t)$ узлуксиз акслантиришни қараймиз. p ва q — ҳақиқий сонлар бўлсин, $p\leqslant q$:

$$Q=\{t_0=p,\ t_1,\ \dots,\ t_k=q\},\ t_0<t_1<\dots<t_k.$$

Ушбу

$$\sum(Q)=\sum_{i=1}^{k}X(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

йиғиндини аниқлаймиз, бу ерда $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$.

Сўнгра, $X(t)$ ни ҳар қандай $t\in[p, q]$ да қавариқ тўплам бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда, $\sum(Q)$ қавариқ компакт тўплам бўлади. Шу билан бирга $\sum(Q)$, $[p, q]$ кесмани Q бўлишга боғлиқдир. $\delta(Q)=\max\limits_{1<i<k}|t_i-t_{i-1}|$ деб белгилаймиз. Шундай $Y(p, q)$ қавариқ компакт тўплам мавжуд бўлар

эканки, $\rho(Y(p, q), \sum(Q))$ масофа $\delta(Q)$ билан бирга нолга интилади. Бу лимит $У(p, q)$ тўплам $X(t)$ *акслантиришнинг интеграли* деб аталади ва

$$У(p, q) = \int_p^q X(t)\,dt$$

белги билан белгиланади. Бунда $У(p, q) \in \Omega(R_n)$ интеграллаш чегаралари p ва q нинг узлуксиз функцияси бўлади.

Интегралнинг хоссалари (исботсиз):

А. Агар r, $p \leqslant r \leqslant q$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_p^r X(t)\,dt + \int_r^q X(t)\,dt = \int_p^q X(t)\,dt.$$

Б. $\int_p^q X(t)\,dt$ интеграл $y = \int_p^q x(t)\,dt$ кўринишдаги барча y нуқталар тўплами билан устма-уст тушади, бу ерда $x(t)$— ўзгарувчи t нинг қийматлари R_n да ётувчи ўлчовли функцияси бўлиб, $x(t) \in X(t)$, $t \in [p, q]$.

3. Дифференциал ўйинни ечиш. 1-бандда таърифланган дифференциал ўйинга қайтамиз. Ўйиннинг терминал M тўплами R_n фазонинг вектор қисм фазоси бўлсин, деб фараз қиламиз. L деб M қисм фазонинг R_n га ортогонал тўлдирувчисини, π деб эса R_n фазонинг L қисм фазога ортогонал проекциялаш амалини белгилаймиз. Энди

$$U(t) = -\pi e^{tA} BU, \quad V(t) = \pi e^{tA} CV$$

деб белгилаймиз ва $S(t) = U(t) \stackrel{*}{-} V(t)$ тўплам барча $t \geqslant 0$ ларда L нинг ўлчовига тенг ўлчовга эга бўлсин, деб фараз қиламиз.

(1) тенгламанинг бошланғич шартдаги ечимини ёзамиз:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{sA}\,[Bu(t-s) + Cv(t-s)]\,ds.$$

Сўнгра

$$W(t) = \int_0^t S(\tau)\,d\tau \tag{13}$$

деб оламиз.

$T(x)$, $t \geqslant 0$ нинг

$$\pi e^{tA} x \in W(t)$$

мансублик ўринли бўлган минимал қийматини белгилаймиз. Агар бундай t мавжуд бўлмаса, $T(x) = +\infty$ деб оламиз. Фақат $x \in M$ лар учун $T(x) = 0$ бўлишини айтиб ўтамиз.

Қуйидаги теорема $T(x)$ таърифининг моҳиятини очиб беради.

1-теорема. Агар $T(x_0) < +\infty$ бўлса, P_2 ўйинчи ҳар қандай ўлчовли $v(t) \in V$, $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$ бошқарувни қўлламасин, P_1 да шундай ўлчовли $u(t) \in U$ бошқарув топиладики, $x(T(x_0)) \in M$ бўлади, бу ерда $x(t)$, $t \geqslant 0$ ечим (1) тизимнинг, $u(t)$ ва $v(t)$ га мос ечимидир.

Исботи. $T(x_0) < +\infty$ бўлганлигидан,

$$\pi e^{T(x_0)} x_0 \in W(T(x_0))$$

бўлади. Демак, шундай ўлчовли $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$ функция топиладики,

$$\pi e^{T(x_0) A} x_0 = \int_0^{T(x_0)} w(t)\, dt, \tag{14}$$

бу ерда $w(t) \in S(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$.

Геометрик айирманинг таърифидан охирги мансублик

$$w(t) + \pi e^{tA} CV \subset -\pi e^{tA} BU, \ 0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$$

эканлигини англатади. Бу ердан, ҳар қандай ўлчовли $v(t) \in$ $\in V$, $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$ функция учун шундай ўлчовли $u(t) \in U$ $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$ функция мавжудлиги ва

$$w(t) = -\pi e^{tA} Bu(T(x_0 - t) - \pi e^{tA} Cv(T(x_0) - t),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, (14) дан

$$x(T(x_0)) \in M$$

мансубликка эквивалент бўлган

$$\pi e^{T(x_0) \cdot A} x_0 + \int_0^{T(x_0)} \pi e^{tA} (Bu(T(x_0) - t) + Cv(T(x_0) - t))\, dt = 0$$

муносабатни оламиз (бу ерда $x(t)$, $t \geqslant 0$ (1) тизимнинг $u(t)$, $v(t)$ бошқарувларга мос ечимидир). Теорема исботланди.

1-теоремадан агар P_2 ўйинчининг ε-стратегияси шундай бўлсаки, $\varepsilon_1 \geqslant T(x_0)$ бўлса, P_1 ўйинчи ҳамиша ўйинни $T(x_0)$ дан кеч бўлмаган вақтда тамом қилиши мумкинлиги келиб чиқади.

Энди P_2 ўйинчининг ε-стратегияси учун $\varepsilon_1 < T(x_0)$ бўлган ҳолни қараймиз.

2-теорема. Айтайлик, $T(x_0) < +\infty$ бўлсин. P_2 ўйинчи

$[0, \varepsilon_1]$ вақт оралиғида қандай ўлчовли $v(t) \in V$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ бошқарувни қўлламасин, P_1 ўйинчида шундай ўлчовли $u(t) \in U$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ бошқарув топиладики, $T(x(\varepsilon_1)) < T(x_0) - \varepsilon_1$ бўлади, бу ерда $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ (1) тизимнинг $u(t)$, $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ бошқарувларга мос ечимидир.

Исботи. $T(x_0) < +\infty$ бўлганлигидан

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1 + \varepsilon_1) \tag{15}$$

мансублик ўринли бўлган $t_1 \geqslant 0$ қийматли тўплам бўш бўлмайди. ((15) мансублик $t_1 = T(x_0) - \varepsilon_1$ бўлганда ўринлидир).

(15) ни унга эквивалент бўлган ушбу

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} S(t)\,dt \tag{16}$$

шаклда ёзамиз. Барча t лар учун $S(t) + V(t) \subset U(t)$ бўлганлигидан

$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} S(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t)\,dt \subset \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)\,dt.$$

(16) нинг иккала томонига $\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t)\,dt)$ интегрални қўшиб ва охирги мансубликдан фойдаланиб,

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t)\,dt \subset W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)\,dt$$

ни оламиз. Энди бу мансубликда чап томондаги иккинчи ҳад ўрнига унинг элементларидан бирини, чунончи,

$$\pi e^{t_1A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} Cv(\varepsilon_1 - s)\,ds$$

ни қўямиз, бу ерда $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ P_2 ўйинчининг $[0, \varepsilon_1]$ оралиқдаги бошқарувдан иборат. У ҳолда

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 + \pi e^{t_1A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} Cv(\varepsilon_1 - s)\,ds \in W(t_1) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)\,dt.$$

t_1 нинг (17) ўринли бўлган минимал қийматини танлаб оламиз ва уни яна t_1 билан белгилаймиз, $t_1 \leqslant T(x_0) - \varepsilon_1$ эканлиги равшандир. Бундан ташқари, $\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)\,dt$ тўпламнинг

(17) мансублик сақланадиган аниқ элементи мавжуд. Бу элементни ушбу

$$-\pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} Bu(\varepsilon_1 - s)\, ds$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ $-u(t) \in U$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ шартни қаноатлантирувчи ўлчовли функция бўлиб, уни P_1 ўйинчининг $[0, \varepsilon_1]$ кесмадаги бошқаруви сифатида танлаб оламиз. У ҳолда (17] дан

$$\pi e^{t_1 A} \left(e^{\varepsilon_1 A} x_0 + \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} \left(Bu(\varepsilon_1 - s) + Cv(\varepsilon_1 - s)\right) ds\right) \in W(t_1)$$

муносабатни, яъни

$$\pi e^{t_1 A} x(\varepsilon_1) \in W(t_1)$$

ни оламиз (бу ерда $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ (1) тизимнинг $u(t)$, $v(t_1)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$ бошқарувларга мос келган ечимидир).

Охирги мансубликдан

$$T(x(\varepsilon_1)) \leqslant t_1 \leqslant T(x_0) - \varepsilon_1$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

1-ва 2-теоремаларнинг тасдиқлари P_2 ўйинчининг ҳар ҳар қандай ε-стратегияси ва ўйиннинг $T(x_0) < +\infty$ бўлган ҳар қандай бошланғич x_0 нуқтаси бўйича P_1 ўйинчининг x нуқтани M қисм фазога $T(x_0)$ вақтдан кеч бўлмаган вақтда келтирувчи бошқарувини кетма-кет қуриш имконини беради. Ҳақиқатан, P_2 ўйинчининг $[0, \varepsilon_1]$ кесмада берилган $v(t)$ бошқарув бўйича P_1 ўйинчи 2-теоремага асосан x нуқтани ε_1 моментда $T(x(\varepsilon_1)) \leqslant T(x_0) - \varepsilon_1$ ни қаноатлантирувчи, $x(\varepsilon_1)$ ҳолатга ўтказувчи $u(t)$ бошқарувни қуриш мумкин. Сўнгра P_2 ўйинчининг $]\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ кесмадаги $v(t)$ бошқаруви маълум бўлади. Яна аввалгидагидек мулоҳазалар юритиб, P_1 ўйинчининг $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ кесмада шундай $u(t)$ бошқарувини топамизки, $x(t)$ траекториянинг $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ моментдаги, унга мос $x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ нуқтаси

$$T(x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \leqslant T(x(\varepsilon_1)) - \varepsilon_1 \leqslant T(x_0) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Бу жараённи кетма-кет давом эттириб, бирор $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$ моментда, $T(x(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)) \leqslant T(x_0) - (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)$, $T(x(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)) \leqslant \varepsilon_{k+1}$ бўлган $x(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)$ ҳолатга келамиз.

1-теоремага асосан энди P_1 ўйинчи ўйинни бирор $t^* \leqslant T(x_0)$ моментда тамомлаши мумкин.

Демак, P_1 ўйинчи ε стратегиялар синфида $T(x_0) < +\infty$ ни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_0 нуқтада бошланган ўйинни $T(x_0)$ дан ошмайдиган t^* вақтда тамомлаши мумкин.

АДАБИЁТ

1. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. — М: Изд-во МГУ, 1974.

2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. — М: Наука, 1971.

3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением, —М.: Наука, 1968.

4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры — М.: Наука, 1974.

5. *Лионс Ж.* — Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.

6. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

7. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры, преследования. — Мат. сб. 1980, т. 112 (154), № 3 (7), с. 307 — 330.

8. *Пшеничный Б. Н*, Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1969, № 1, с. 65 — 78.

9. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.

МУНДАРИЖА

РАФАИЛ ГАБАСОВ
ФАИНА МИХАЙЛОВНА КИРИЛЛОВА

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие для студентов университетов

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1995, 700129, Ташкент, Навои, 30

Кичик муҳаррир Ш. Соибназарова
Бадиий муҳаррирлар: Н. Сучкова, Ж. Гурова
Техмуҳаррирлар Н. Сорокина, А. Горшкова
Мусаҳҳиҳ Э. Ашурова

Теришга берилди. 24.01.95. Босишга рухсат этилди. 10.07.95. Бичими $84 \times 108^1/_{32}$. № 2 босма қоғозига «Литературная» гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли бос. 18,9. Нашр т. 18,33. 3000 нусха. Буюртма № 612.

«Ўзбекистон» нашриёти. 700129. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Нашр № 116—94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Габасов Р., Кириллова Ф. М.

Г 12 Оптималлаштириш усуллари / (Таржимонлар: Х. Н. Жумаев, И. И Исроилов). —2- русча нашридан таржима.— Т.: Ўзбекистон, 1995.— 356 б.

ISBN 5-640-01326—5

I. Автордош.

Мазкур ўқув қўлланмаси университетлар математика факултетлари «Оптималлаштириш усуллари» курсининг амалдаги дастурига мувофиқ ёзилган. Унда оптималлаштириш масалаларини ҳал этиш учун назарий ва амалий ишларда қўлланиладиган турли-туман усуллар: чизиқли ва қавариқ программалаштириш, чизиқсиз программалаштириш ва унинг ҳисоблаш усуллари, динамик программалаштириш, вариацион ҳисоб, оптимал бошқарув назарияси қамраб олинган.

32.97я73

№ 407—95
Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

$$\text{Г}\ \frac{1602070000 - 102}{\text{У}\ 353\ (04)\ 95}\ 95$$

МУҲТАРАМ ҚИТОБХОН!

«ЎЗБЕКИСТОН» НАШРИЁТИ ҚУЙИДАГИ ҚИТОБЛАРНИ НАШРДАН ЧИҚАРДИ

1. *Қосимов А. Ҳ., Жўрақулов Ҳ., Сафаров А.* **Физика курси, I қисм,** Ҳажми 15,0 н. т. 5000 нусха.

Қўлланма амалдаги ўқув дастури ва муаллифнинг А. Беруний номидаги Тошкент политехника олийгоҳида кўп йиллар давомида ўқилган лекциялари асосида ёзилган. Мазкур қўлланмада анъанавий мавзулар билан бир қаторда эркинлик даражалари, умумлашган координаталар, инерция маркази билан боғланган саноқ тизимлари, ҳар хил саноқ тизмларида моддий нуқта кинетик энергияси, сақланиш қонунларининг фазо ва вақт симметрияси билан боғлиқлиги, муглақ нисбий тезлик ва тезланишлар, релятивистик зарра ҳаракат тенгламасининг Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантлиги, бўсағавий энергия ва бошқа мавзулар акс эттирилган. Механик тебранма ҳаракат ҳақидаги мавзулар ҳам мазкур қисмга киритилди.

Қўлланма муҳандислик-техника олийгоҳлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан педагогика олийгоҳлари талабалари ҳамда шу соҳада шуғулланаётган ўқитувчилар кенг фойдаланишлари мумкин.

2. *Акромов Ҳ. Т., Зайнобиддинов С., Тешабоев А.* **Яримўтказгичларда фотоэлектрик ҳодисалар.** Ҳажми 15,0 н. т. 3000 нусха.

Қўлланмада университетларнинг «Яримўтказгичлар ва диэлектриклар физикаси» ихтисослиги дастурига мувофиқ равишда, яримўтказгичлар физикасининг асосий тушунчалари, яримўтказгичларда ёруғлик ютилиши билан боғлиқ бўлган муҳим ҳодисалар баён қилинган. Шунингдек, бу ҳодисалар асосида тайёрланадиган, фан ва техникада кенг равишда қўлланиладиган яримўтказгичли асбобларнинг тузилиши ва ишлаши тўғрисида етарли маълумот берилган.

Мазкур ўқув қўлланмасидан университетларнинг, техника олий билимгоҳларининг, илмий тадқиқот муассасаларининг яримўтказгичлар физикаси бўйича ихтисослашаётган талабалари, шогирдлари ва аспирантлари фойдаланишлари мумкин.

3. *А. Чертов ва бошқ.* **Физикадан масалалар тўплами.** Ҳажми 33,0 н. т. 3000 нусха.

Масалалар тўплами техник ихтисосли олий билимгоҳларда амал қилинаётган физика курсини ўқитиш режасига мослаб тузилган. Ҳар бир бўлимга қийинлиги, тартиб рақами ортиши билан ортиб борадиган етарли сондаги масалалар киритилган. Ҳар бир параграфнинг бошланишида асосий қонунлар ва формулалар ҳамда масалалар ечишга намуналар келтирилган. Физик катталиклар халқаро бирликлар тизимида ёки уларга каррали ва улушли бирликларда берилган.

4. *Саъдуллаев А., Мансуров Х., Худойберганов Г ва бошқ.* **Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. I қисм.** Ҳажми 20,0 н. т. 3000 нусха.

[illegible]шбу китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика чуқур дас[illegible]тур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжал[illegible]н. Уни ёзишда муаллифлар Тошкент Давлат университетининг [illegible]атик таҳлил кафедрасидаги бир неча йиллик иш тажрибаларидан фойдаланганлар.

Китоб математик анализга кириш, дифференциал ва интеграл ҳисоб мавзуларини ўз ичига олади.

Қўлланмада 1500 дан зиёд мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим билан таъминланган.

5. *А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. К. Ворисов, Р. Ғуломов.* **Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. II қисм.** Ҳажми 15,0 н. т. 5000 нусха.

Мазкур китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек олий техника ўқув юртларининг олий математика чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган. Уни ёзишда муаллифлар Тошкент Давлат Университетининг математик анализ кафедрасидаги бир неча йиллик иш тажрибаларидан фойдаланганлар.

Китоб кўп ўзгарувчили функцияларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоби, функционал кетма-кетликлар ва қаторлар, Фурье қаторлари мавзуларини ўз ичига олади. Унда 2000 дан зиёд мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг кўпчилиги батафсил ечим билан таъминланган.

6. *Т. Азларов, Х. Мансуров.* **Математик анализ. II қисм.** Ҳажми 22,0 н. т. 5000 нусха.

Мазкур дарслик университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг математика чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган.

Дарслик анализ курсининг 2- қисми бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функциялар, дифференциал ва интеграл ҳисоб, функционал қаторлар назарияси ва Фурье қаторлари назарияси батафсил баён қилинган.

7. *Т. Шодиев ва бошқ.* **Қишлоқ хўжалигини режалаштиришда ва бошқаришда математик усуллар.** Ҳажми 9,0 [illegible] 5000 нусха.

Қўлланмада қишлоқ хўжалигининг бозор иқтисодиётига ўтиш даврдаги мақбул хўжалик ечимларини топиш аҳамияти, услублари, бошқаришни такомиллаштиришнинг математик ва ахборотли негизлари кенг ёритилган.

Қўлланма иқтисодий олийгоҳ талабаларига, иқтисодчиларга ва [illegible] ходимларга мўлжалланган.

8. *Мишченко Ю. ва бошқ.* **Физик химиядан амалий ашғулотлар.** Ҳажми 20,0 н. т. 5000 нусха.

Китоб фақат амалий машғулотларгагина бағишланмай, уни» р бир бобида физик химиянинг турли йўналишлари бўйича й асослар қисқа ва тушунарли қилиб ёритилган.

Қўлланма химик ва химиявий технология мутахассисликлари б› ча ўқувчи талабаларга мўлжалланган.

9. *Тўрақулов Ё.* **Биохимия.** Ҳажми 33,0 н. т. 500

Китоб педагогика институтларининг, университетларнинг биоло- ı факультетлари дастурига мослаб умумий биохимиядан дарслик ратида ёзилган.

Китобдан педагогика институтларининг биология факультетлари, бнёт, фармацевтика, қишлоқ хўжалик институтлари талабалари, нингдек, турли соҳаларда ишлаб турган биохимик мутахассислар ı умумий биохимиядан дарслик ва қўлланма сифатида фойдала- плари мумкин.

10. *Юнусов Р.* **Органик кимё.** Ҳажми 20,0 н. т. 5000 :ха.

Дарсликда енгил саноатда фойдаланиладиган табиий ва синтетик икмалар ҳақида муфассал баён қилинган.

Дарслик техника олий ўқув юртларининг кимёгар бўлмаган мута- сислари учун, айниқса муҳандис-технологлар учун фойдали бў- и.

11. *Убайдуллаев Р., Абдуллаев Ш.* **Умумий кимёдан лий ишлар.** Ҳажми 10,0 н. т. 3000 нусха.

Ўқув қўлланмаси техника олий ўқув юртларининг мутахассисли- кимёгар бўлмаган талабалари учун мўлжалланган. Унда курснинг им мавзулари бўйича лаборатория ишлари қисқа назарий мате- ı билан бирга тавсифланган.

12. *Мансуров Х.* **Автоматика ва технологик жараёнлар- автоматлаштириш.** Ҳажми 13,0 н. т. 5000 нусха.

Дарслик шу курсга оид барча мавзуларни ўз ичига олади. Унда матика ва технологик жараёнларни автоматлаштириш, локал матик тизимлар, ўлчаш ва ўзгартириш қурилмалари, объектлар- хоссалари ва уларнинг асосий параметрларини аниқлаш, пахта- астлабки ишлов беришдаги технологик жараёнларни мантиқий қариш тизимлари қараб чиқилади.

Дарслик техника олий ўқув юртлари талабаларига мўлжаллан-