2 ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КИСКА КУРСИ

В. Е. ШНЕЙДЕР, А. И. СЛУЦКИЙ,
А. С. ШУМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА ҚИСҚА КУРСИ

(икки томлик)

II том

ИККИНЧИ ҚАЙТА ИШЛАНГАН ВА ТЎЛДИРИЛГАН
РУСЧА НАШРИДАН ТАРЖИМА

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1987

Китоб олий техника ўқув юртлари олий математика курси программасига мувофиқ ёзилган. Материал қисқа баён этилишига қарамасдан имкони борича қатъий ва тушунарли қилиб берилган. Курснинг ҳар бир бўлимида асосий назарий материални намойиш этадиган кўплаб мисоллар келтирилган.

Китобнинг мазкур иккинчи томи бир неча ўзгарувчи функциясининг дифференциал ҳисоби, каррали ва эгри чизиқли интеграллар, дифференциал тенгламалар, эҳтимоллар назарияси элементлари ва операцион ҳисоб элементлари бўлимларини ўз ичига олади.

Олий техника ўқув юртлари студентлари учун мўлжалланган.

На узбекском языке

Владимир Евгеньевич Шнейдер
Александр Исахарович Слуцкий
Александр Сергеевич Шумов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

том II

Учебное пособие для втузов

Перевод со второго переработанного и дополненного издания изд-ва «Высшая школа», М. , 1978 г.

Ташкент «Ўқитувчи» 1987

Таржимонлар: *Н. Рахимова* (IX, X боблар), *Д. Азимова* (IX боб)
Н. Шохайдарова (XII, XIII боблар), *Е. Соатов* (XIV боб)

Редакторлар: *М. Пўлатов, Х. Алимов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Е. Картаева*
Корректор *Х. Ахмедова*

ИБ №3240

Теришга берилди 17.10.87. Босишга рухсат этилди 20.10.87. Формати 60×90/16. Тип. қоғози № 2. Кегль 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 21,0. Шартли кр-отт. 21,18. Нашр. л. 21,47. Тиражи 7000. Зак. 2950. Баҳоси 90 т.

«Ўқитувчи» нашриёти, 700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-260-86.

ЎзССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонаси. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1987.

Головное предприятие ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Навои, 30.

Ш $\frac{1702000000-256}{353\ (04)-87}$ 45 — 87

IX БОБ

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ

1. Икки ўзгарувчининг функцияси ва унинг аниқланиш соҳаси. I боб, 4-§, 2-пунктда функциянинг таърифи берилган эди. Агар бу таърифда M тўплам дейилганда $(x;\ y)$ ҳақиқий сонлар жуфтларининг бирор тўпламини, L тўплам дейилганда эса ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламини тушунадиган бўлсак, биз икки ўзгарувчининг функцияси тушунчасига келамиз.

Шундай қилиб, *икки ўзгарувчининг функцияси деб шундай қоидага айтиладики, бунда сонларнинг ҳар бир* $(x;\ y)\in M$ *жуфтига ягона* $z\in L$ *сон мос келади* ва бунда ҳар бир $z\in L$ сон камида битта $(x;\ y)\in M$ жуфтга мос келади.

Бунда *x ва y-эркли ўзгарувчилар* (ёки *аргументлар*), *z-боғлиқ ўзгарувчи*, M тўплам-функциянинг *аниқланиш соҳаси*, L тўплам эса функциянинг *қийматлар тўплами* деб аталади. Бир ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолдаги каби, боғлиқ ўзгарувчини (мослик қоидасининг ўзини ҳам) функция деб ҳам аталади.

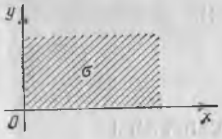
Икки ўзгарувчи функциясининг белгиланишлари бир ўзгарувчи функциясининг белгиланишларига ўхшашдир: $z=f(x,\ y)$, $z=\varphi(x,\ y)$, $z=z(x,\ y)$ ва ҳоказо.

1-мисол. Томонлари x ва y бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи $z=x\cdot y$ формула бўйича ҳисобланади. Бу формула икки ўзгарувчининг функциясини, яъни ҳақиқий сонларнинг ҳар бир $(x;\ y)$ жуфтига ягона мусбат z сонни мос келтирадиган қоидани аниқлайди. Бу функциянинг M аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонларнинг барча мусбат $(x;\ y)$ жуфтлари тўпламидан, L қийматлар тўплами эса барча мусбат сонлар тўпламидан иборат.

$z=f(x,\ y)$ функциянинг аргументларнинг берилган $x=x_0$ ва $y=y_0$ сон қийматларида қабул қиладиган z_0 хусусий қийматини топишда бундай ёзилади: $z_0=z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ ёки $z_0=f(x_0,\ y_0)$. Масалан, агар $z=f(x,\ y)=xy$ бўлса, у ҳолда $z\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}}=f(1,\ 2)=1\cdot 2=2$.

Маълумки, сонларнинг ҳар бир $(x,\ y)$ жуфтига Oxy текисликнинг ягона $P(x;\ y)$ нуқтаси мос келади ва аксинча, ҳар бир $P(x;\ y)$ нуқтага сонларнинг ягона $(x,\ y)$ жуфти мос келади, шу сабабли икки ўзгарувчининг функциясини $P(x;\ y)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин. Шунинг учун $f(x;\ y)$ ёзуви ўрнига $f(P)$ ёзуви ишлатилади. Бу ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси Oxy текислик нуқталарининг бирор G тўплами бўлади.

Жумладан, юқорида келтирилган мисолда асоси x ва баландлиги y бўлган тўғри тўртбурчак юзини ифодаловчи $z=xy$ функциянинг аниқланиш соҳаси I чорак нуқталари тўпламидан иборат бўлади, чунки фақат шу нуқталар учунгина иккала координата мусбатдир (1-расм).



1- расм

Бир ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолдаги каби икки ўзгарувчи функциясининг берилиш усуллари жуда хилма-хил бўлиши мумкин. Функция жадвал ёрдамида берилиши мумкин (функцияни жадвал усулида берилиши). $z = f(x, y)$ учун бундай жадвал (икки йўлли жадвал), масалан, ушбу кўринишда бўлиши мумкин:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	100	81	63	45	28
1	100	83	65	48	32
2	100	84	68	51	35
3	100	84	69	54	39
4	100	85	70	56	42

Бу жадвалнинг чап устуни катакларида x аргументнинг қийматлари, юқори сатри катакларида эса y аргументнинг қийматлари берилган. Жадвалнинг қолган катакларида z функциянинг қийматлари жойлашган. Агар бунда x нинг қиймати i-сатр катагида, y нинг қиймати эса k-устун катагида танланадиган бўлса, у ҳолда z нинг мос қиймати i-сатр ва k-устун кесишмасида ётувчи катакда жойлашган бўлади. Масалан, $x = 3$ ва $y = 2$ бўлганда $z = 69$ га эгамиз.

Юқоридаги жадвал z нисбий намлик қийматларининг (процент ҳисобида) қуруқ термометрнинг x температураси (Цельсий градуси ҳисобида) ҳамда қуруқ ва нам термометр температураси айирмаси y га боғлиқлигига мос келади.

Бизнинг курсда энг муҳими функциянинг аналитик усулда берилиши бўлиб, бунда функция аналитик ифода ёрдамида (формула ёрдамида) берилади. 1-мисолда функция аналитик усулда берилган эди, шу билан бирга унинг аниқланиш соҳаси геометрик мулоҳазалар ёрдамида топилган эди. Бироқ икки ўзгарувчининг функцияси кўпинча фақат формула ёрдамида берилади ва бунда унинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмайди.

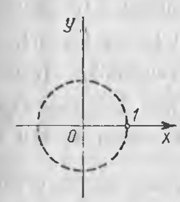
Агар икки ўзгарувчининг функцияси аналитик ифода ёрдамида ҳеч қандай қўшимча шартларсиз берилган бўлса, у ҳолда унинг аниқланиш соҳаси деб Oxy текисликнинг бу ифода маънога эга бўладиган ва функциянинг ҳақиқий қийматини берадиган барча нуқталари тўпламини ҳисоблаш қабул қилинган.

Масалан, $z = ax + by + c$ биринчи даражали кўпҳад, $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ иккинчи даражали кўпҳад ва ҳоказолар сонларнинг барча (x, y) жуфтлари учун, яъни бутун Oxy текисликда аниқланган.

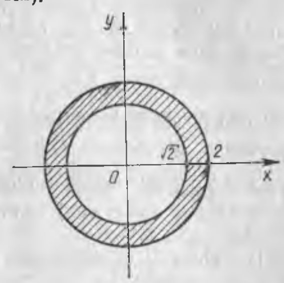
Икки ўзгарувчининг рационал функцияси, яъни x ва y га нисбатан икки кўпҳаднинг нисбати Oxy текисликнинг махраж нолга айланадиган нуқталаридан бошқа барча нуқталарида аниқланган. Масалан, $z = \frac{x^2 + 3y^2}{x - y}$ рационал функция Oxy текисликнинг $x - y = 0$ тўғри чизиқдан бошқа ҳамма ерида аниқланган.

2- мисол. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Функция фақат формула ёрдамида берилган. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $\ln(1 - x^2 - y^2)$ ифода маънога эга бўлган барча нуқталар тўплами, яъни $1 - x^2 - y^2 > 0$ ёки $x^2 + y^2 < 1$ бўладиган барча нуқталар тўпламидир, $x^2 + y^2$ ифода $P(x; y)$ нуқтанинг координаталар бошигача бўлган масофасининг квадратидан иборат бўлгани учун, мазкур функциянинг аниқланиш соҳасига координаталар бошигача бўлган масофалари бирдан кичик бўлган нуқталаргина киради. Бундай барча нуқталар тўплами маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг доиранинг ичини ташкил қилади (2- расм).



2- расм



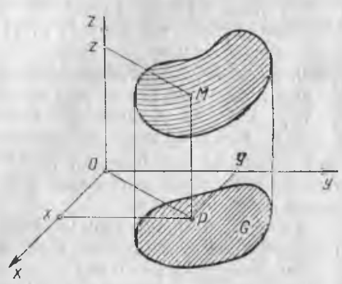
3- расм

3- мисол. $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Функция $-1 \leqslant x^2 + y^2 - 3 \leqslant 1$ шартда аниқланган, бу эса $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ шартга тенг кучли. Функция аниқланиш соҳасининг чегаравий чизиқлари $x^2 + y^2 = 2$ ва $x^2 + y^2 = 4$ айланалар бўлиб, уларнинг ўзлари ҳам бу соҳага тегишли.

Шундай қилиб, функциянинг аниқланиш соҳаси $x^2 + y^2 = 2$ ва $x^2 + y^2 = 4$ айланалар орасида ётувчи барча нуқталардан ҳамда шу айланаларда ётувчи нуқталардан иборат (3- расм).

2. Икки ўзгарувчи функциясининг графиги. Бир ўзгарувчи $y = f(x)$ функциясининг графиги текисликдаги тўғри бурчакли декарт координаталар системасида, умуман айтганда, чизиқдир. Икки ўзгарувчи $z = f(x, y)$ функциясининг графиги фазодаги тўғри бурчакли декарт координаталар системасида умумий ҳолда сирт бўлади.



4- расм

Ҳақиқатан ҳам, $z = f(x, y)$ функция G соҳада аниқланган бўлсин (4- расм). Бу соҳанинг ҳар бир $P(x, y)$ нуқтасига функциянинг тайин $z = f(P)$ қиймати мос келади. Бу z қийматни $Oxyz$ координаталар системасидаги бирор M нуқтанинг аппликатаси деб оламиз. Бу нуқтанинг абсциссаси ва ординатаси учун P нуқтанинг абсциссаси ва ординатасини оламиз. (Бу P нуқта M нуқтанинг Oxy текисликка проекцияси бўлади деган сўздир.)

Шундай қилиб, G соҳанинг ҳар бири P нуқтасига фазода тўла аниқланган M нуқта, бутун соҳанинг ўзига эса M нуқталарнинг бирор тўплами, умуман айтганда, сирт мос келади.

Бу сирт $z = f(x, y)$ функциянинг *графиги* деб аталади.

Агар сирт икки ўзгарувчининг бирор функциясининг графиги бўлса, у ҳолда бу функцияни берувчи тенглама тегишли сиртнинг тенгламаси деб аталади.

Аналитик геометрия курсида икки ўзгарувчи функцияларининг графикларидан иборат бўлган, баъзи сиртлар ўрганилган эди. Уларнинг баъзиларини эслатиб ўтамиз.

Эллиптик параболоид $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ функциянинг графигидир (p ва q бир хил ишорали ўзгармаслар: I том, 101-расмга қаранг).

Гиперболик параболоид $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ функциянинг графигидир (бу ерда p ва q бир хил ишорали ўзгармаслар; I том, 102-расмга қаранг).

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг юқори бўлаги $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ функциянинг графиги, унинг пастки бўлаги эса $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ функциянинг графигидир (I том, 97-расмга қаранг).

3. Уч ва ундан ортиқ сондаги ўзгарувчиларнинг функциялари. Биз икки ўзгарувчининг функцияси ва унинг аниқланиш соҳаси тушунчаларини батафсил кўриб чиқдик. Бироқ практикада уч ва ундан ортиқ сондаги ўзгарувчининг функциялари ҳам учрайди. Масалан, тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми учта катталикка — параллелепипед асосининг бўйи a, эни b ва параллелепипед баландлиги h га боғлиқ, яъни $V = abh$.

Уч ўзгарувчининг функцияси тушунчасига таъриф берамиз.

M — ҳақиқий сонлар (x, y, z) учликларининг бирор тўплами, L эса ҳақиқий сонларнинг бирор тўплами бўлсин. Уч *ўзгарувчининг функцияси деб, шундай қоидага айтиладики,* бунда ҳар бир $(x, y, z) \in M$ *учликка ягона $u \in L$ сон мос келади* ва ҳар бир $u \in L$ сон камида битта $(x, y, z) \in M$ учликка мос келади.

Бунда x, y ва z *эркли ўзгарувчилар* (ёки *аргументлар*), u — *боғлиқ ўзгарувчи* ёки *функция* (мослик қоидасининг ўзини ҳам), M тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси*, L эса функциянинг *қийматлар тўплами* деб аталади.

Уч ўзгарувчининг функциялари бир ёки икки ўзгарувчининг функциялари каби белгиланади: $u = f(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ ва ҳоказо.

Уч ўзгарувчининг $u = f(x, y, z)$ функциясини $Oxyz$ фазовий координаталар системасида x, y, z координаталарга эга бўлган $P(x, y, z)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин.

Икки ўзгарувчининг функцияси учун қабул қилинган геометрик терминологияга ўхшаш терминологиядан фойдаланиб, бундай айта оламиз: $u = f(x, y, z)$ функциянинг аниқланиш соҳаси фазодаги нуқталарнинг бирор тўпламидир.

Уч ўзгарувчи $u = f(x, y, z)$ функциясининг берилиш усуллари жуда хилма-хилдир, лекин бизнинг курсда аналитик усул энг муҳим бўлиб, бунда функция аналитик ифода (формула) ёрдамида берилади. Бунда кўпинча функциянинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмайди. Бу ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси фазонинг бу ифода маънога эга бўладиган ва u функциянинг ҳақиқий қийматини берадиган барча $P(x, y, z)$ нуқталар тўпламидан иборат деб ҳисоблаш қабул қилинган.

4-мисол. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Бу ифода $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$ ёки шунинг ўзи, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ бўлганда ва фақат шундагина u нинг ҳақиқий қийматларини беради.

Шундай қилиб, функциянинг аниқланиш соҳаси маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг шардир. Чегаравий шар сирти нуқталари функциянинг аниқланиш соҳасига тегишлидир.

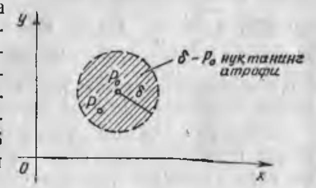
Шунга ўхшаш, тўрт, беш ва умуман n та ўзгарувчининг функциялари тушунчаларини киритиш мумкин.

n та ўзгарувчи функциясининг аниқланиш соҳаси $M(x_1; x_2; \ldots x_n)$ ҳақиқий сонлар системаларидан иборат бирор тўпламдир. n та ўзгарувчи функциясининг белгиланишлари икки ва уч ўзгарувчи функцияларнинг белгиланишларига ўхшашдир: $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ва ҳоказо. Қулай геометрик терминологияни сақлаб қолиш мақсадида $n \geqslant 3$ бўлганда n та ўзгарувчи функциясини ҳам кўпинча n ўлчовли фазо (II боб, 7-§, 5-пунктга қаранг) нуқтасининг функцияси сифатида қаралади ва бундай ёзилади: $u = f(P)$.

2-§. БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ЛИМИТИ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ. УЗИЛИШ НУҚТАЛАРИ

1. Асосий таърифлар. Бир ўзгарувчи $y = f(x)$ функциясининг лимитини текширишда нуқтанинг атрофи тушунчаси киритилган эди. У ерда нуқтанинг атрофи дейилганда бу нуқтани ўз ичига олувчи интервал тушунилган эди. Икки ўзгарувчи $z = f(x, y) = f(P)$ функциясининг лимити тушунчасини киритишда биз Oxy текисликда нуқтанинг атрофини қараймиз.

$P_0(x_0; y_0)$ *нуқтанинг атрофи* деб, маркази шу нуқтада бўлган доиранинг ички нуқталари тўпламига айтилади. Агар бу доиранинг радиуси δ га тенг бўлса, у ҳолда у нуқтанинг δ-атрофи тўғрисида гапирилади (5-расм). Равшанки, $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг δ-атрофига тегишли бўлган исталган $P(x; y)$ нуқта бу нуқтадан δ дан кичик масофада ётади, яъни $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.



5-расм

Агар исталган ε сон учун $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг шундай δ-атрофи топилсаки, бу атрофнинг исталган $P(x, y)$ нуқтаси (P_0 нуқта бундан истисно бўлиши мумкин) учун

$$|f(P) - b| < \varepsilon \text{ ёки } |f(x, y) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда b сон икки ўзгарувчи $z = f(x, y) = f(P)$ функциясининг $P \to P_0$ даги лимити деб аталади.

Бунда қуйидагича ёзилади: $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = b$ ёки $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$, чунки $P(x; y) \to P_0(x_0; y_0)$ да, равшанки, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Агар P_0 нуқтанинг δ-атрофи $u(P_0, \delta)$ орқали белгиланадиган бўлса, у ҳолда $z = f(x, y) = f(P)$ функциянинг $P \to P_0$ даги лимитини бундай ёзиш мумкин:

$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \underset{\delta}{\exists}(\delta > 0) \underset{P}{\forall} \{P \in u(P_0, \delta)\}$ (P_0 нуқта бундан истисно бўлиши мумкин) $\Rightarrow |f(P) - b| < \varepsilon$.

Икки ўзгарувчи функциясининг лимити нолга тенг бўлса, у ҳолда уни *чексиз кичик функция* деб аталади.

Агар b сон $z = f(P)$ функциянинг лимити бўлса, у ҳолда лимитнинг таърифига кўра P нуқта P_0 нуқтага чегараланмаган ҳолда ихтиёрий равишда яқинлашганда $f(P) - b$ айирма чексиз кичик функция бўлади.

1- мисол. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ ни топинг.

Ечилиши. Функциянинг лимити $P(x; y) \to P_0(0; 0)$ да, яъни $\rho \to 0$ да топилади, бу ерда $\rho = P_0P$ — шу P_0 ва P нуқталар орасидаги масофа. Мазкур ҳолда P_0 нуқта координаталар бошидир. Демак, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Шундай қилиб,

$$\lim_{P \to P_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0}(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1) = 2.$$

Бу ерда эътибор берайлик: мисолда: $\dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ функция $P_0(0; 0)$ нуқтада аниқланмаган, лекин $P \to P_0$ да лимитга эга.

2- мисол. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ функция координаталар бошидан ташқари бутун текисликда аниқланган. $P(x; y)$ нуқта координаталар бошига яқинлашганда функция лимитга эга эмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, координаталар бошига Ox ўқ бўйлаб яқинлашиладиган бўлса (бу ерда $y = 0$) $\lim\limits_{x \to 0} z = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$. Агар координаталар бошига Oy ўқ бўйича яқинлашиладиган бўлса (бу ерда $x = 0$), $\lim\limits_{y \to 0} z = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$. Шундай қилиб, $P(x; y)$ нуқта координаталар бошига турли йўналишлар бўйича яқинлашганда функция турли лимит қийматларга эга бўлади ва, демак, $x \to 0$, $y \to 0$ да лимитга эга эмас.

n ўлчовли фазода нуқтанинг δ-атрофи тушунчаси киритиладиган бўлса, $n > 2$ бўлганда n та ўзгарувчи функцияси лимитининг таърифи икки ўзгарувчи функциясининг лимити таърифи билан айнан бир хилдир.

n ўлчовли фазода $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ нуқтанинг δ-*атрофи* деб, P_0 нуқтагача бўлган масофалари δ дан кичик, яъни $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta$ бўлган барча $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ нуқталар тўпламига айтилади (II боб, 7-§, 5-пунктга қаранг).

Равшанки, уч ўлчовли $Oxyz\,(n = 3)$ фазода $P_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтанинг δ-атрофи маркази P_0 нуқтада ва радиуси δ бўлган шарнинг барча ички нуқталари тўпламидир.

Бир ўзгарувчининг функциялари учун исботланган лимитга ўтиш қоидалари (V боб, 1-§, 6-пунктга қаранг) бир неча ўзгарувчининг функциялари учун ҳам ўринлидир.

2. Бир неча ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги. Бир неча ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги тушунчаси лимит тушунчаси ёрдамида киритилади.

Бир неча ўзгарувчининг $u = f(P)$ функцияси учун $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ бўлса, у ҳолда $f(P)$ функция P_0 нуқтада *узлуксиз* деб аталади.

Шуни эслатиб ўтамизки, P_0 нуқтада узлуксиз бўлган $f(P)$ функция бу нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган бўлиши лозим (акс ҳолда лимитга ўтиб бўлмас эди). Бир неча ўзгарувчининг $u = f(P)$ функцияси узлуксиз бўлган P_0 нуқта бу функциянинг *узлуксизлик нуқтаси* деб аталади.

Узлуксиз функциялар учун ушбу теорема ўринли.

Теорема. *Агар n та ўзгарувчининг $f_1(P)$ ва $f_2(P)$ функциялари P_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда уларнинг $f_1(P) + f_2(P)$ йиғиндиси, $f_1(P) - f_2(P)$ айирмаси ва $f_1(P) \cdot f_2(P)$ кўпайтмаси ҳам шу нуқтада узлуксиздир, агар бундан ташқари $f_2(P_0) \neq 0$ бўлса, $f_1(P)/f_2(P)$ бўлинма ҳам P_0 нуқтада узлуксиздир.*

Бу теореманинг исботи бир ўзгарувчининг функциялари учун хос бўлган теорема исботига ўхшаш (V боб, 2-§, 2-пунктга қаранг) бўлгани сабабли, биз уни келтирмаймиз.

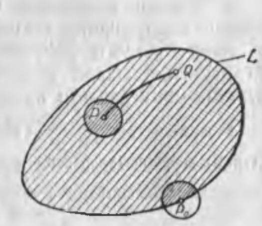
Бу теоремага асосан кўпгина функцияларнинг узлуксизлигини, масалан, икки ўзгарувчига нисбатан кўпҳаднинг Oxy текисликнинг исталган нуқтасида узлуксизлигини, рационал функциянинг текисликнинг махраж нолга айланмайдиган нуқталаридан ташқари барча нуқталарида узлуксизлигини исботлаш осон.

3. Соҳа тушунчаси. Келгусида керак бўладиган бир неча таърифларни келтирамиз.

Соҳа (очиқ соҳа) деб текисликнинг ушбу иккита хоссага эга бўлган нуқталари тўпламига айтилади:

1. Соҳанинг ҳар бир нуқтаси унга бу нуқтанинг бирор атрофи билан биргаликда тегишлидир (очиқлик хоссаси);

2. Соҳанинг ҳар қандай иккита нуқтасини бутунлай шу соҳага тегишли узлуксиз чизиқ билан туташтириш мумкин (боғлиқлик хоссаси).



6- расм

Текисликнинг ёпиқ L контур ичида ётган қисми (6-расм) соҳа бўлади, чунки: 1) L ичида ётган исталган P нуқта учун L ичида ётувчи атрсф мавжуд; 2) L ичида ётувчи исталган P ва Q нуқталарни L ичида ётувчи узлуксиз чизиқ билан туташтириш мумкин.

1-§ нинг 1 ва 2-мисолларида келтирилган функцияларнинг аниқланиш соҳалари очиқ соҳалардир (1 ва 2-расмларга қаранг). Бутун текислик ҳам, равшанки, очиқ соҳадир.

Агар P_0 нуқтанинг исталган атрофи G соҳанинг нуқталарини ҳам, бу соҳага тегишли бўлмаган нуқталарни ҳам ўз ичига олса, у ҳолда P_0 нуқта G соҳанинг *чегаравий нуқтаси* деб аталади.

Соҳанинг барча чегаравий нуқталари тўплами унинг *чегараси* деб аталади.

6-расмда L контурнинг исталган P_0 нуқтаси чегаравий нуқтадир.

1-расмдаги соҳанинг чегарасини Ox ва Oy ўқларнинг манфиймас қисмлари ташкил қилади.

Очиқ соҳага унинг чегарасини қўшишдан ҳосил бўлган нуқталар тўплами *ёпиқ соҳа* деб аталади.

1-§ даги 3-мисолдаги функциянинг аниқланиш соҳаси ёпиқ соҳадир (3-расмга қаранг).

Агар берилган соҳани тўла қоплайдиган, яъни соҳанинг барча нуқталарини ўз ичига оладиган доирани танлаш мумкин бўлса, у ҳолда бундай соҳа *чегараланган* соҳа деб аталади.

Агар соҳани тўла қоплайдиган доирани топиш мумкин бўлмаса, у ҳолда соҳани *чегараланмаган* соҳа деб аталади. 1-§ даги 2 ва 3-мисолларда қаралган функцияларнинг аниқланиш соҳалари чегараланган соҳалардир (2 ва 3-расмларга қаранг). Аксинча, 1-§ нинг 1-мисолидаги функциянинг аниқланиш соҳаси чегараланмаган соҳадир. G соҳада (очиқ ёки ёпиқ) ётувчи исталган ёпиқ контур билан чегараланган текисликнинг қисми бутунлай G соҳага тегишли бўлса, G соҳа *бир боғламли* соҳа деб аталади. 1 ва 2-расмларда тасвирланган соҳалар равшанки, бир боғламли соҳалардир. Аксинча, $x^2+y^2=2$ ва $x^2+y^2=4$ айланалар орасида ётувчи соҳа (3-расмга қаранг) бир боғламли соҳа эмас, чунки, масалан, бу соҳада ётувчи $x^2+y^2=3$ айлана ўз ичига бу соҳага тегишли бўлмаган нуқталарни (масалан, координаталар бошини) ўз ичига олади.

Изоҳ. Бу пунктда киритилган барча тушунчалар уч ва ундан ортиқ ўлчовли фазолар учун ҳам деярли ўзгаришсиз киритилади.

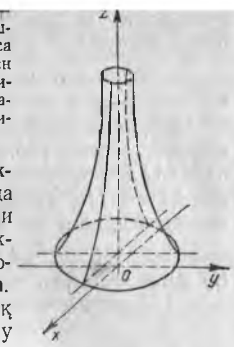
4. Узилиш нуқталари. Функцияларни ўрганишда баъзан уларнинг узилиш нуқталарини текширишга тўғри келади.

Агар P_0 нуқта $f(P)$ функциянинг аниқланиш соҳасига ёки унинг чегарасига тегишли бўлса ва узлуксизлик нуқтаси бўлмаса, P_0 бу функциянинг *узилиш нуқтаси* деб аталади.

1-мисол. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ функция ягона узилиш нуқтасига ўзи аниқланмаган $O(0;\ 0)$ координаталар бошига эга. $P(x;\ y)$ нуқта координаталар бошига чекланмаган ҳолда яқинлашганида $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ функция чексизликка интилади (7-расм).

2-мисол. $z=\dfrac{1}{2x+y+1}$ функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Бу функция координаталари $2x+y+1=0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталардан ташқари хамма ерда аникланган ва узлуксиз. Бу тенглама эса функция аниқланиш соҳасининг чегарасидан иборат бўлган тўғри чизиқдир. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси — узилиш нуқтасидан иборат. Шундай қилиб, узилиш нуқталари бутун бир тўғри чизиқни — берилган функциянинг узилиш чизиғини ҳосил қилади.



7-расм

5. Чегараланган ёпиқ соҳада узлуксиз функцияларнинг хоссалари. V боб, 2-§, 3-пунктда сегментда узлуксиз функцияларнинг хоссалари қаралган эди. Чегараланган ёпиқ соҳада узлуксиз икки ва ундан ортиқ сондаги ўзгарувчиларнинг функциялари ҳам айни шу хоссаларга эга.

$z=f(x,\ y)=f(P)$ функция очиқ ёки ёпиқ соҳанинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, бу функция шу соҳада *узлуксиз* деб аталади.

Бунда чегаравий P_0 нуқта учун $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ тенгликда P нуқта P_0 нуқтага мазкур соҳага тегишли исталган йўл бўйлаб интиладиган бўлса, $f(P)$ функция чегаравий P_0 нуқтада узлуксиз ҳисобланади.

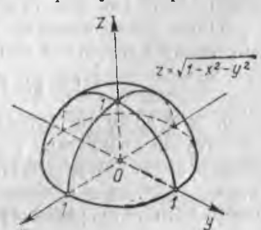
Теорема. *Агар $z=f(P)$ функция чегараланган ёпиқ соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу соҳада:*

1) чегараланган: $|f(P)|\leqslant N$;

2) энг кичик m ва энг катта M қийматларга эга;

3) соҳанинг камида битта нуқтасида m ва M орасида ётувчи исталган сон қийматни қабул қилади.

Масалан, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функция чегараланган ёпиқ $x^2+y^2\leqslant 1$ соҳада (маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг доирада) аниқланган ва узлуксиз бўлиб, у теоремадаги барча хоссаларга эга эканлиги равшан. Ҳақиқатан ҳам: 1) $|z|\leqslant 1$; 2) функция энг кичик $m=0$ қийматига аниқланиш соҳасининг чегарасида, яъни $x^2+y^2=1$ доира нуқталарида, энг катта $M=1$ қийматига эса $O(0;0)$ координаталар бошида эришади; 3) ноль ва бир орасидаги (m ва M орасидаги) исталган сон функциянинг бирор қийматидир.



8-расм

Бу функциянинг графиги, равшанки, маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг юқори ярим сфералар (8-расм).

3-§. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР

1. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар. Икки ўзгарувчининг $z=f(x,\ y)$ функциясини қараймиз. Ўзгарувчилардан бирининг, масалан, y нинг қийматини $y=y_0$ деб олиб, фиксирлаймиз (ўзгаришсиз қолдирамиз). У ҳолда $f(x, y_0)$ функция битта x ўзгарувчининг функцияси бўлади. У x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлсин:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Бу ҳосила $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0; y_0)$ нуқтада x бўйича *хусусий ҳосиласи* (ёки *биринчи тартибли хусусий ҳосиласи*) деб аталади ва $f'_x(x_0, y_0)$ символи билан белгиланади. $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ айирма $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада x бўйича *хусусий орттирмаси* деб аталади ва $\Delta_x z$ символи билан белгиланади:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \tag{2}$$

Бу белгилашларни ҳисобга олиб, бундай ёзиш мумкин:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \tag{3}$$

$z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада y бўйича хусусий орттирмаси ва y бўйича хусусий ҳосиласи шунга ўхшаш аниқланади:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{2'}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \tag{3'}$$

Шундай қилиб, *икки ўзгарувчи функциясининг унинг аргументларидан бири бўйича хусусий ҳосиласи бу функция хусусий орттирмасини шу орттирмани берган аргумент орттирмасига нисбатининг аргумент орттирмаси нолга интилгандаги лимитига тенг.*

Хусусий ҳосиланинг қиймати ўзи ҳисобланаётган $P(x; y)$ нуқтага боғлиқ. Шу сабабли икки ўзгарувчи $z = f(x, y)$ функциясининг хусусий ҳосиласи, умуман айтганда, $P(x; y)$ нуқтанинг функциясидир, яъни унинг ўзи ҳам иккита x ва y ўзгарувчининг функциясидир.

Икки ўзгарувчининг функцияси сифатида қараладиган хусусий ҳосилалар қуйидагича белгиланади*:

$$f'_x(x, y),\ f'_y(x, y) \text{ ёки } z'_x,\ z'_y \text{ ёки } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$n > 2$ да n та ўзгарувчи функциясининг хусусий орттирмалари ва хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади. Масалан, уч ўзгарувчининг $u = f(x, y, z)$ функцияси учун $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада x бўйича хусусий орттирма x аргумент Δx орттирма олиб, қолган аргументлар эса ўзгармасдан қолганида ҳосил бўлади:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

$u = f(x, y, z)$ функциянинг $P_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада x аргумент бўйича хусусий ҳосиласи қуйидагига тенг:

$$u'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

* $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ифодаларни бир ўзгарувчи функциясининг ҳосиласидан фарқли ўлароқ каср деб қараш мумкин эмас. Бу ифодалар хусусий ҳосилани белгилайдиган символлардир.

Шундай қилиб, бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосиласи бу ўзгарувчилардан бирининг функциясининг ҳосиласи сифатида топилади. Бунинг натижасида бир ўзгарувчи функциясининг ҳосилалари учун келтириб чиқарилган барча дифференциаллаш формулалари ва қоидалари бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари учун ҳам сақланади. Бу ерда фақат бирор аргумент бўйича хусусий ҳосилани топиш учун бу қоидалар ва формулаларни қўлланилаётганда қолган аргументлар ўзгармас деб ҳисобланилишини ёдда тутиш лозим.

1- мисол. $z = f(x, y) = x^2y - 3y^2 + 5x$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. $f'_x(x, y)$ хусусий ҳосилани $y = \text{const}$ деб фараз қилиб, $f(x, y)$ функциянинг x бўйича ҳосиласи сифатида топамиз. Шунинг учун

$$f'_x(x, y) = (x^2y - 3y^2 + 5x)'_x = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5.$$

Шунга ўхшаш,

$$f'_y(x, y) = (x^2y - 3y^2 + 5x)'_y = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

2- мисол. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ берилган. $f'_x(3, 4)$ ни топинг.

Ечилиши. Дастлаб $f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласини топамиз:

$$f'_x(x, y) = (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})'_x = (x + y)'_x - (\sqrt{x^2 + y^2})'_x =$$

$$= 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2)'_x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

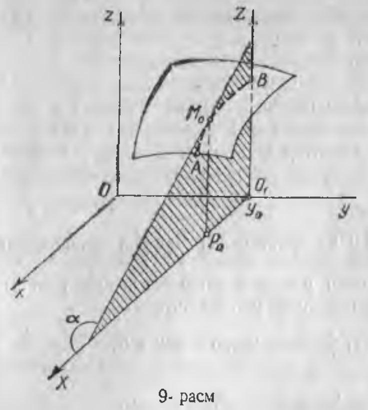
Энди топилган хусусий ҳосиланинг $x = 3$, $y = 4$ даги хусусий қийматини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(3, 4) = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]_{\substack{x=3\\ y=4}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}.$$

3- мисол. *Ox* ўқда стержень жойлашган бўлсин. Стерженнинг ихтиёрий $M(x)$ нуқтасидаги θ температура $M(x)$ нуқта x координатасининг ва t вақтнинг функциясидир: $\theta = f(x, t)$. $x = x_0$ да $\theta = f(x_0, t)$ функция стерженнинг мазкур нуқтасида температуранинг t вақтга боғлиқ равишда ўзгаришини ифодалайди. Бу нуқтадаги $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ хусусий ҳосила температуранинг вақт давомида ўзгариш тезлигини беради. Энди $t = t_0$ деб олинса, у ҳолда $\theta = f(x, t_0)$ функция вақтнинг берилган t_0 моментида температуранинг стержень бўйлаб тақсимот қонунини беради. Бу ҳолда $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ хусусий ҳосила вақтнинг берилган t_0 моментида температуранинг стержень бўйлаб ўзгариш тезлигини ифодалайди.

2. Икки ўзгарувчи хусусий ҳосилаларининг геометрик маъноси.

Икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси хусусий ҳосиласи — $\frac{\partial z}{\partial x}$ нинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Маълумки, $z = f(x, y)$ функциянинг графиги бирор сиртдир. *Oxy* текисликда $P_0(x_0; y_0)$ нуқтани ва сиртда мос $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтани қараймиз (9- расм). Янги коор-



9- расм

динаталар боши сифатида O_1 (0; y_0; 0) нуқтани олиб, ўқларни параллел кўчирамиз ва сиртнинг янги координата текислиги O_1XZ (яъни эски координаталар системасидаги $y = y_0$ текислик) билан кесишишидан ҳосил бўлган AM_0B ясси эгри чизиқни қараймиз. Бу эгри чизиқни бир ўзгарувчи $z = f(x, y_0)$ функциясининг O_1XZ текисликдаги (яъни эски системада $y = y_0$ текисликдаги) графиги деб қараш мумкин. У ҳолда бир ўзгарувчи функцияси ҳосиласининг геометрик маъносига асосан $\frac{df(x, y_0)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, бунда α — юқоридаги AM_0B эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг 0_1X ўқ билан, ёки барибир шунинг ўзи, Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчаги. Иккинчи томондан:

$$\left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}.$$

Бундан $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P0} = \operatorname{tg}\alpha$. Шундай қилиб, $\frac{\partial z}{\partial x}$ *хусусий ҳосиланинг* $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтадаги қиймати* $z = f(x, y)$ *сирт билан* $y = y_0$ *текисликнинг кесишиш чизиғига* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *нуқтада ўтказилган уринманинг* Ox *ўқ билан ташкил қилган бурчагининг тангенсига* тенг. $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосиланинг геометрик маъноси ана шундан иборат. $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосиланинг геометрик маъноси ҳам шунга ўхшаш ойдинлаштирилади.

3. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари яна ўша ўзгарувчиларнинг функциялари бўлади. Бу функциялар ўз навбатида хусусий ҳосилаларга эга бўлиши мумкин, бу хусусий ҳосилалар дастлабки функциянинг *иккинчи хусусий ҳосилалари (ёки иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари)* деб аталади.

Масалан, икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси тўртта иккинчи тартибли хусусий ҳосилага эга; улар қуйидагича аниқланади ва белгиланади:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y):$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Уч ўзгарувчининг $u = f(x, y, z)$ функцияси тўққизта иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y, z); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = f''_{xu}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x, y, z)$$

ва ҳоказо.

Бу неча ўзгарувчи функциясининг учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади: *бир неча ўзгарувчи функциясининг n- тартибли хусусий ҳосиласи деб ўша функция (n — 1)- тартибли хусусий ҳосиласининг биринчи тартибли хусусий ҳосиласига айтилади.*

Масалан, $z = f(x, y)$ функциянинг учинчи тартибли $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ хусусий ҳосиласи иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ хусусий ҳосиладан y бўйича олинган биринчи тартибли хусусий ҳосиладир:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Бир неча ўзгарувчи бўйича олинган иккинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳссила *аралаш хусусий ҳосила* деб аталади.

Масалан:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

хусусий ҳосилалар икки ўзгарувчи $z = f(x, y)$ функциясининг аралаш хусусий ҳосилаларидир.

Мисол. $z = x^2y^3$ функциянинг иккинчи тартибли аралаш хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Сўнгра иккинчи тартибли аралаш ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = (2xy^3)'_y = 6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = (3x^2y^2)'_x = 6xy^2.$$

Кўриб турибмизки, берилган функциянинг бир-биридан фақат дифференциаллаш тартиби билан, яъни турли ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаш кетма-кетлиги билан фарқ қиладиган иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ аралаш хусусий ҳосилалари айнан тенгдир. Бу натижа тасодифий эмас. Аралаш хусусий ҳосилалар учун ушбу теорема ўринли бўлиб, биз уни исботсиз қабул қиламиз.

Теорема. *Битта функциянинг фақат дифференциаллаш тартиби билан фарқ қиладиган аралаш хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса, улар ўзаро тенгдир.*

Хусусан, икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси учун:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

4- §. БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Функциянинг тўла орттирмаси. Хусусий ҳосилаларни топишда бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий орттирмалари текширилиб, у ерда аргументлардан бири ўзгарар, қолганлари эса ўзгармас бўлиб қолар эди. Энди биз функциянинг барча аргументлари ўзгарганда у оладиган тўла орттирмани қараймиз.

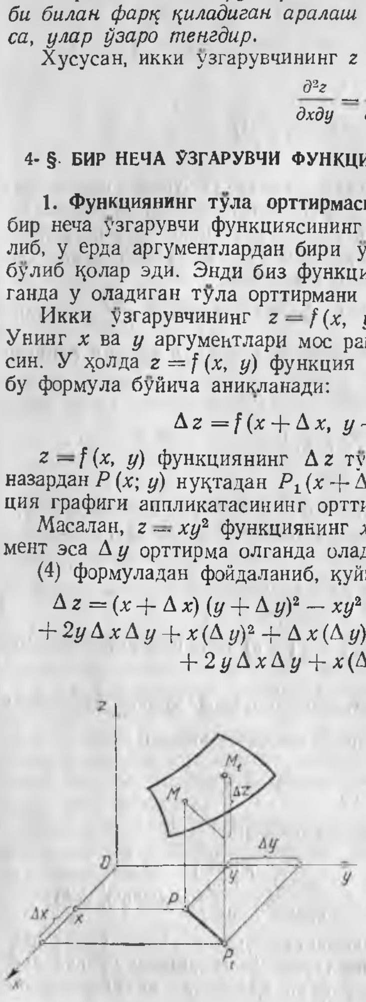
Икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси берилган бўлсин. Унинг x ва y аргументлари мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олсин. У ҳолда $z = f(x, y)$ функция Δz тўла орттирма олади ва у ушбу формула бўйича аниқланади:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y). \tag{4}$$

$z = f(x, y)$ функциянинг Δz тўла орттирмаси геометрик нуқтаи назардан $P(x; y)$ нуқтадан $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқтага ўтишда функция графиги аппликатасининг орттирмасига тенг (10- расм).

Масалан, $z = xy^2$ функциянинг x аргумент Δx орттирма, y аргумент эса Δy орттирма олганда оладиган тўла орттирмасини топамиз. (4) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 = xy^2 + y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \\ + 2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2 - xy^2 = y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \\ + 2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2.$$



10- расм

Берилган функциянинг Δz тўла орттирмасини икки қўшилувчининг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўриб турибмиз: аргументлар орттирмалари Δx ва Δy ларга нисбатан чизиқли бўлган $y^2\Delta x + 2xy\Delta y$ биринчи қўшилувчи ҳамда Δx ва Δy га нисбатан ночизиқли $2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$ иккинчи қўшилувчи. Бу иккала қўшилувчи, равшанки, $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ да нолга интилади. Бироқ бунда иккинчи қўшилувчи биринчи қўшилувчига қараганда

нолга тезроқ интилади. Бу ушбу жадвалдан яққол кўриниб турибди: унда берилган функциянинг $P_0(1; 1)$ нуқтадаги Δz тўла орттирмасининг қийматлари, шунингдек, Δx ва Δy нинг турли қийматлари учун унинг $\Delta x + 2\Delta y$ чизиқли қисмининг ва $2\Delta x\Delta y + (\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$ ночизиқли қисмининг қийматлари келтирилган:

Δx	Δy	Δz	$\Delta x + 2\Delta y$ чизиқ. қисм	$2\Delta x\Delta y + (\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$ ночизиқ. қисм
0,1	0,1	0,331	0,3	0,031
0,01	0,02	0,050804	0,05	0,000804
0,001	0,01	0,0211201	0,021	0,0001201

2. Функциянинг тўла дифференциали. Олдинги пунктда биз кўриб чиққан мисолда икки ўзгарувчи функциясининг орттирмаси икки қўшилувчи йиғиндиси, яъни Δx ва Δy га нисбатан чизиқли ва ночизиқли қўшилувчилар йиғиндиси кўринишида ифодаланган эди, шу билан бирга $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да орттирманинг ночизиқли қисми чизиқли қисмига қараганда нолга тезроқ интилган эди. Шу каби хоссага кўпчилик функциялар эга. Бу функциялар дифференциалланувчи функциялар деб аталади.

Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $P(x; y)$ нуқтадаги тўла орттирмасини

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y) \tag{5}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу функция $P(x; y)$ нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бу ерда Δx ва Δy — тегишли x ва y аргументларнинг P нуқтанинг бирор атрофидаги исталган орттирмалари; A ва B — ўзгармаслар (яъни Δx ва Δy га боғлиқ бўлмаган катталиклар); $\omega(\Delta x, \Delta y)$ *шу $P(x; y)$ ва $P_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ нуқталар орасидаги $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ масофага қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдордир.* (яъни $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$).

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функция берилган нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг бу нуқтадаги тўла орттирмаси (5) формулага асосан Δx ва Δy га нисбатан чизиқли бўлган $A\Delta x + B\Delta y$ орттирманинг бош қисмидан ва орттирманинг бош қисмига қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлган $\omega(\Delta x, \Delta y)$ ночизиқли қисмдан иборат.

$z = f(x, y)$ функциянинг Δx ва Δy га нисбатан чизиқли бўлган бош қисми бу функциянинг тўла дифференциали деб аталади.

Тўла дифференциал dz ёки $df(x, y)$ символи билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{6}$$

Дифференциалнинг $A\Delta x + B\Delta y$ ифодасида A ва B катталиклар Δx ва Δy га боғлиқ бўлмасдан, балки шу дифференциал қаралаётган $P(x; y)$ нуқтага боғлиқдир. Бошқача айтганда, A ва B катталиклар x ва y нинг функциясидир. Бу функцияларнинг кўриниши ушбу теорема орқали аниқланади.

Теорема. *Агар $z = f(x, y)$ функция $P(x; y)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса (яъни $A\Delta x + B\Delta y$ дифференциалга эга бўлса), у ҳолда у $P(x, y)$ нуқтада $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга, шу билан бирга*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Исботи. Берилган функция теорема шартига кўра $P(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун унинг бу нуқтадаги тўла орттирмаси (5) формула билан ифодаланади. Бу формула исталган етарлича кичик Δx ва Δy учун ўринли. Хусусан, $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ бўлганда ҳам тўғрилигича қолади. Бироқ у ҳолда функциянинг Δz орттирмаси $\Delta_x z$ хусусий орттирмага айланади ва (5) тенглик ушбу кўринишни олади:

$$\Delta_x z = A\,\Delta x + \omega.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини Δx га бўламиз ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega}{\Delta x}.$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\omega}{\Delta x} = 0$ бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $\Delta y = 0$ бўлгани учун $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta x|$. Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega}{\Delta x} = \pm \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\omega}{\Delta x} = \pm \lim_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ мавжуд ва A га тенг. Бироқ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ ва шунинг учун $P(x, y)$ нуқтада $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосила мавжуд ва A га тенг. Шунга ўхшаш, $P(x, y)$ нуқтада $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосила мавжуд ва B га тенг эканлигини исботлаш мумкин.

Энди (5) ва (6) формулаларда A ва B ни $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар билан алмаштириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \tag{7}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{8}$$

Тескари теорема, умуман айтганда нотўғри эканлигини исботлаш мумкин, чунончи, хусусий ҳосилаларнинг мавжудлигидан тўла дифференциалнинг мавжудлиги келиб чиқмайди. Бироқ хусусий ҳосилалар фақат мавжуд бўлиб қолмасдан, балки узлуксиз ҳам деб фараз қилинса, у ҳолда функция дифференциалланувчи бўлади. Бошқача айтганда, ушбу теорема ўринли бўлиб, биз унинг исботини келтирмаймиз.

Теорема. *Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалари $P(x; y)$ нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз бўлса,* у ҳолда бу функция $P(x; y)$ нуқтада дифференциалланувчидир.

Бир ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолдаги каби, эркли ўзгарувчиларнинг орттирмалари учун ушбу белгилашларни киритамиз: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. У ҳолда дифференциал учун ифода ушбу кўринишни олади:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{9}$$

ёки

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \tag{9'}$$

Юқорида айтилган фикр уч ва ундан ортиқ сондаги ўзгарувчиларнинг функцияси учун ҳам осон ўтказилади. Масалан, уч ўзгарувчининг дифференциалланувчи $u = f(x, y, z)$ функцияси учун Δu тўла орттирма $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ $(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2})$, шартда

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{10}$$

формула билан ифодаланади, унинг тўла дифференциали эса ушбу кўринишга эга:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{dy}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{11}$$

1-мисол. $z = xy^2$ функциянинг ихтиёрий нуқтадаги тўла дифференциалини топинг.

Ечилиши. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ тўла дифференциал $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлган ҳолдагина мавжуд. Қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2)'_x = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (xy^2)'_y = 2xy.$$

Топилган хусусий ҳосилалар бутун Oxy текисликда узлуксиз функциялар эканлигини кўриб турибмиз. Шунинг учун бу функциянинг дифференциали ҳамма ерда мавжуд, шу билан бирга $dz = y^2dx + 2xydy$.

2-мисол. $u = \frac{x+y}{z}$ функция тўла дифференциалининг $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, $\Delta z = 0{,}5$ даги қийматини топинг.

Ечилиши. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_x = \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_y = \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_z = -\frac{x+y}{z^2}.$$

Энди тўла дифференциални топамиз:

$$du = \frac{1}{z}\Delta x + \frac{1}{z}\Delta y - \frac{x+y}{z^2}\Delta z.$$

Бу тўла дифференциалнинг $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, $\Delta z = 0{,}5$ даги қийматини топамиз:

$$du = \frac{1}{-1}\cdot 0{,}1 + \frac{1}{-1}\cdot 0{,}2 - \frac{1-2}{(-1)^2}\cdot 0{,}5 = 0{,}2.$$

3. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи. Бир неча ўзгарувчи функциясининг тўла дифференциалидан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланиш мумкин. Дифференциалланувчи $z = f(x,y)$ функция берилган бўлсин. Унинг тўла орттирмаси

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)$$

формула билан ифодаланади. Бу ерда $\omega(\Delta x, \Delta y)$ $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ га нисбатан нолга тезроқ интилади. Шу сабабли кичик ρ ларда, яъни кичик $|\Delta x|$ ва $|\Delta y|$ ларда $\omega(\Delta x, \Delta y)$ қўшилувчини ҳисобга олмасдан, бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y, \tag{12}$$

яъни функциянинг орттирмасини унинг тўла дифференциали билан алмаштириш мумкин.

Сўнгра $z = f(x, y)$ бўлгани учун

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Δz учун бу ифодани (12) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

бундан

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{13}$$

Агар икки ўзгарувчи функциясининг ва унинг хусусий ҳосилаларининг $P(x; y)$ нуқтадаги қийматлари маълум бўлса, у ҳолда (13) формуладан бу функциянинг $P(x; y)$ нуқтага яқин $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$ нуқтадаги қийматини тақрибий ҳисоблашда фойдаланиш мумкин.

Шунга ўхшаш формулаларни $n > 2$ да n та ўзгарувчининг функцияси учун келтириб чиқариш мумкин. Масалан, $n = 3$ бўлганда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z. \tag{14}$$

1- мисол. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$ ни тўла дифференциал ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

Ечилиши. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ функцияни қараймиз. Бу функцияга (13) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{x + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_x \Delta x + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_y \Delta y$$

ёки

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2 + (x-y)^2}\Delta x - \frac{x}{y^2 + (x-y)^2}\Delta y.$$

Энди $x = 2$, $y = 1$ деб оламиз; у ҳолда $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$. Демак,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2 - 0{,}03}{1 + 0{,}02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1^2 + (2-1)^2}\cdot(-0{,}03) - \frac{2}{1^2 + (2-1)^2}0{,}02,$$

ёки

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}03 - 0{,}02 = \frac{\pi}{4} - 0{,}015 - 0{,}02 \approx 0{,}75.$$

2- мисол. Доиравий секторнинг 80° га тенг марказий бурчагини $15'$ га кичрайтирилмоқчи. Юзни ўзгартирмаслик учун $r = 30$ см радиусни қанча узайтириш лозим?

Ечилиши. Доиравий секторнинг S юзи $S = \frac{\pi r^2 \varphi}{360}$ формула билан ифодаланади, бу ерда r — доира радиуси, φ — градус ўлчовидаги марказий бурчак.

Агар юз ўзгариши (орттирма) ΔS ни тўла дифференциал билан (тақрибий) алмаштирилса, у ҳолда

$$\Delta S \approx \frac{\partial S}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\Delta\varphi.$$

Шартга кўра, марказий бурчак кичрайиб, радиус ортганида ΔS нолга тенг бўлиши керак. Шу сабабли

$$\frac{\partial S}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\Delta\varphi = 0$$

деб оламиз, бундан

$$\Delta r = -\frac{\frac{\partial S}{\partial \varphi}\Delta\varphi}{\frac{\partial S}{\partial r}} = -\frac{\left(\frac{\pi r^2 \varphi}{360}\right)'_\varphi \cdot \Delta\varphi}{\left(\frac{\pi r^2 \varphi}{360}\right)'_r} = -\frac{\frac{\pi r^2}{360}\cdot\Delta\varphi}{\frac{\pi r \varphi}{180}} = -\frac{r\cdot\Delta\varphi}{2\varphi}.$$

$r = 30$ см, $\varphi = 80^\circ$; $\Delta\varphi = -\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta r = -\frac{30\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{2\cdot 80}\text{ см} = \frac{3}{64}\text{ см} \approx 0{,}5\text{ мм}.$$

Изоҳ. (13) тақрибий формулани қўлланишда ҳосил бўладиган хатолик

$$\overline{\Delta}=\frac{1}{2}M(|\Delta x|+|\Delta y|)^2$$

сондан катта бўлмаслигини кўрсатиш мумкин, бу ерда M — иккинчи хусусий ҳосилалар $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yy}(x, y)$ нинг аргументлар мос равишда x дан $x+\Delta x$ гача ва y дан $y+\Delta y$ гача ўзгаргандаги абсолют қийматларининг энг катта қиймати.

Энди бир неча ўзгарувчи функцияси дифференциалининг тақрибий ҳисоблашларда абсолют ва нисбий хатоликлар чегараларини топишда қандай қўлланилишини кўрсатамиз (VI боб, 3-§, 5-пунктга қаранг).

u катталик (аниқлик учун) учта x, y ва z ўзгарувчининг дифференциалланувчи ва мусбат функцияси бўлсин:

$$u=f(x, y, z). \tag{15}$$

Унинг аргументларининг x, y, z аниқ қийматлари номаълум бўлсин, бироқ уларнинг тақрибий қийматлари x_0, y_0, z_0 ҳамда абсолют $\overline{\Delta}x$, $\overline{\Delta}_y$, $\overline{\Delta}_z$ хатоликларининг чегаралари маълум бўлсин. (15) формула билан ҳисобланадиган u функция абсолют ва нисбий хатоликлари чегараларини қандай топиш мумкин?

$x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$, $z-z_0=\Delta z$ белгилашлар киритсак, абсолют хатолик чегараси таърифига кўра қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta x|\leqslant\overline{\Delta}_x,\quad |\Delta y|\leqslant\overline{\Delta}_y,\quad |\Delta z|\leqslant\overline{\Delta}_z. \tag{16}$$

u функциянинг абсолют хатолиги, равшанки, унинг $\Delta u=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)$ орттирмасининг модулига ва u функция тўла дифференциалининг модулига тақрибан тенг:

$$|\Delta u|\approx|f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z|.$$

Абсолют қийматларнинг хоссасига кўра:

$$|f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z|\leqslant$$
$$\leqslant|f'_x(x_0, y_0, z_0)|\cdot|\Delta x|+|f'_y(x_0, y_0, z_0)|\cdot|\Delta y|+|f'_z(x_0, y_0, z_0)|\cdot|\Delta z|.$$

Шунинг учун (16) формулаларни қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\Delta u|\leqslant|f'_x(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_x+|f'_y(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_y+|f'_z(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_z.$$

Бу эса

$$\overline{\Delta}_u=|f'_x(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_x+|f'_y(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_y+|f'_z(x_0, y_0, z_0)|\overline{\Delta}_z \tag{17}$$

сонни u нинг абсолют хатолиги чегараси сифатида олиш мумкинлигини англатади.

$\overline{\delta}_u$ нисбий хатолик чегараси таърифига кўра

$$\overline{\delta}_u=\frac{\overline{\Delta}_u}{|f(x_0, y_0, z_0)|}=\left|\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)}\right|\overline{\Delta}_x+\left|\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)}\right|\overline{\Delta}_y+$$
$$+\left|\frac{f'_z(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)}\right|\overline{\Delta}_z.$$

Сўнгра

$$\frac{u'_x}{u}=\frac{\partial\ln u}{\partial x};\quad \frac{u'_y}{y}=\frac{\partial\ln u}{\partial y};\quad \frac{u'_z}{u}=\frac{d\ln u}{\partial z}$$

эканлигини эътиборга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{\delta}_u=\left|\frac{\partial\ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\right|\overline{\Delta}_x+\left|\frac{\partial\ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\right|\overline{\Delta}_y+\left|\frac{\partial\ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\right|\overline{\Delta}_z$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган ифода $\ln f(x, y, z)=\ln u$ функциянинг абсолют хатолиги чегарасидир. Шунинг учун

$$\overline{\delta}_u=\overline{\Delta}_{\ln u} \tag{18}$$

яъни *бирор функция абсолют хатолигининг чегараси сифатида бу функция натурал логарифми абсолют хатолигининг чегарасини олиш мумкин.*

3-мисол. Физикадан маълумки, маятникнинг тебраниш даври T ушбу $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ тенгликдан аниқланади, бунда l — маятникнинг келтирилган узунлиги, g — оғирлик кучи тезланиши. Бу тенгликни g га нисбатан ечиб,

$$g=4\pi^2l/T^2 \tag{*}$$

ни ҳосил қиламиз.

(*) формуладан Ер сиртининг турли нуқталарида оғирлик кучи тезланишини ҳисоблаш учун фойдаланилади, бунинг учун бу нуқталарда маятникнинг келтирилган узунлиги l ва унинг тебраниш даври T ўлчанади. Ўлчашлар натижасида l ва T учун қуйидаги тақрибий қийматлар олинган бўлсин: $l_0=50{,}00$ см; $T_0=1{,}4196$ с. Шунингдек, абсолют хатоликнинг чегаралари маълум деб фараз қиламиз: $\overline{\Delta}_l=0{,}01$ ва $\overline{\Delta}_T=0{,}0001$. (*) формула бўйича g оғирлик кучи тезланишини ва g нинг топилган қийматининг абсолют ва нисбий хатоликлари чегарасини ҳисоблаш талаб қилинади.

Ечилиши. Хатоликларни аниқлашда (*) формулада π соннинг π_0 тақрибий қийматини олишга тўғри келишини ҳисобга олиш лозим. Бу сонни 0,0001 гача аниқликда оламиз, яъни $\pi\approx\pi_0=3{,}1416$, $\overline{\Delta}_\pi=0{,}0001$ деймиз. У ҳолда (18) ва (17) формулаларга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_g=\overline{\Delta}_{\ln g}=|(\ln g)'_\pi|_{\substack{\pi=\pi_0\\ l=l_0\\ T=T_0}}\cdot\overline{\Delta}_\pi+|(\ln g)'_l|_{\substack{\pi=\pi_0\\ l=l_0\\ T=T_0}}\cdot\overline{\Delta}_l+|(\ln g)'_T|_{\substack{\pi=\pi_0\\ l=l_0\\ T=T_0}}\times$$
$$\times\overline{\Delta}_T=\frac{2\overline{\Delta}_\pi}{\pi_0}+\frac{\overline{\Delta}_l}{l_0}+\frac{2\overline{\Delta}_T}{T_0}=\frac{2\cdot0{,}0001}{3{,}1416}+\frac{0{,}01}{50}+\frac{2\cdot0{,}0001}{1{,}4196}\approx0{,}00040,$$

яъни нисбий хатолик чегараси 0,040 % га тенг.

Энди (*) формула бўйича g нинг тақрибий қиймати бўлган

$$g_0 = \frac{4 \cdot (3,1416)^2 \cdot 50,00}{(1,4196)^2} = 979,5\ \text{см/с}^2$$

катталикни топамиз. Сўнгра $\overline{\Delta}_g = g_0 \overline{\delta_g} = 979,50 \cdot 0,00040 \approx 0,4\ \text{см/с}^2$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагига эгамиз: $g = 979,5 \pm 0,4\ \text{см/с}^2$.

Пировардида тақрибий ҳисоблашларнинг баъзи қоидаларини кўриб чиқамиз. Улар (17) ва (18) формулалардан натижа сифатида ҳосил бўлади.

x ва y мусбат хатоликларни ўлчаш ёки ҳисоблаш натижасида абсолют хатоликлари чегаралари мос равишда $\overline{\Delta}_x$ ва $\overline{\Delta}_y$ бўлган x_0 ва y_0 тақрибий қийматлар олинган бўлсин.

1) Агар $z = x + y$ бўлса, у ҳолда (17) формуладан фойдаланиб,

$$\overline{\Delta}_z = \overline{\Delta}_x + \overline{\Delta}_y$$

ни топамиз, чунки $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ ва $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Шундай қилиб, *йиғинди абсолют хатолигининг чегараси қўшилувчилар абсолют хатоликларининг чегаралари йиғиндисига тенг.*

2) Агар $z = x - y$ бўлса, у ҳолда

$$\overline{\Delta}_z = \overline{\Delta}_x + \overline{\Delta}_y$$

чунки $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$ ва $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = 1$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| = 1$.

Шундай қилиб, *айирма абсолют хатолигининг чегараси камаювчи ва айрилувчи абсолют хатоликларининг чегаралари йиғиндисига тенг.*

3) Агар $z = xy$ бўлса, у ҳолда $\ln z = \ln x + \ln y$, шунинг учун

$$\overline{\Delta}_{l_{nz}} = \frac{\overline{\Delta}_x}{x_0} + \frac{\overline{\Delta}_y}{y_0} = \overline{\delta}_x + \overline{\delta}_y$$

(18) формулага кўра

$$\overline{\delta}_z = \overline{\delta}_x + \overline{\delta}_y .$$

яъни *кўпайтма нисбий хатолигининг чегараси кўпайтувчилар нисбий хатоликларининг чегаралари йиғиндисига тенг.*

4) агар $z = x/y$ бўлса, у ҳолда юқоридагига ўхшаш

$$\overline{\delta}_z = \overline{\delta}_x + \overline{\delta}_y$$

ни ҳосил қилиш осон, яъни *бўлинма нисбий хатолигининг чегараси бўлинувчи ва бўлувчи нисбий хатоликларининг чегаралари йиғиндисига тенг.*

5-§. МУРАККАБ ВА ОШКОРМАС ФУНКЦИЯЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

1. Мураккаб функцияларни дифференциаллаш. Икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси берилган, шу билан бирга бу функциянинг аргументлари битта t ўзгарувчининг функциялари бўлсин: $x = x(t)$,

$y = y(t)$. У ҳолда z битта t ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлади. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни ҳамда $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ҳосилаларни билган ҳолда бу мураккаб функциянинг $\frac{dz}{dt}$ ҳосиласини топиш масаласини қўямиз. Бу масалани ечишда $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар t нуқтада ҳосилаларга эга, икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси эса мос (x, y) нуқтада дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

t эркли ўзгарувчи Δt орттирма олсин, у ҳолда x ва y ўзгарувчилар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар, z функция эса Δz орттирма олади. z функция фаразга кўра дифференциалланувчи бўлгани учун унинг Δz тўла орттирмасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \tag{19}$$

шу билан бирга $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$, бу ерда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. (19) тенгликнинг иккала қисмини Δt га бўлиб ва $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\Delta t}. \tag{20}$$

Агар бу тенгликнинг ўнг томонида турган лимитларнинг ҳар бири мавжуд бўлса, у ҳолда шу тенгликнинг чап томонида турган лимит ҳам, яъни $\frac{dz}{dt}$ ҳосила ҳам мавжуд бўлади. Бироқ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ва $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$ фаразга кўра мавжуд. Энди

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t}$$

ни топамиз. Аввал иккинчи лимитни қараймиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

$\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ҳосилалар мавжуд бўлгани учун бу лимит мавжуд. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\rho}$ ни топишдан олдин $\Delta t \to 0$ бўлганда $\rho \to 0$ бўлишини ҳам айтиб ўтамиз**. Бироқ у ҳолда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\rho} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ ва, демак,

---

* $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар Δt га боғлиқ бўлмагани учун уларни лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

** Ҳақиқатан ҳам, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. x ва y дифференциалланувчи ва, демак, узлуксиз бўлгани учун $\Delta t \to 0$ да $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ (яъни $\rho \to 0$).

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0.$$

Буни ҳисобга олиб, (20) формулани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{21}$$

1-мисол. Агар $z = x^y$, $x = \sin t$, $y = t^2$ бўлса, $\frac{dz}{dt}$ ҳосилани топинг.

Ечилиши. (21) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dz}{dt} = (x^y)'_x \frac{dx}{dt} + (x^y)'_y \frac{dy}{dt} = yx^{y-1}(\sin t)' +$$
$$+ x^y \ln x (t^2)' = yx^{y-1}\cos t + x^y \ln x \cdot 2t = t^2 (\sin t)^{t^2-1}\cos t +$$
$$+ 2t(\sin t)^{t^2} \ln \sin t = t(\sin t)^{t^2-1}(t\cos t + 2\sin t \cdot \ln \sin t).$$

Энди $y = y(x)$ бўлган шартда $z = f(x, y)$ функцияни қараймиз. Бу ерда z ўзгарувчи битта x ўзгарувчининг функцияси: $z = f(x, y(x))$. Бу ҳол юқорида кўрилган ҳолга келтирилади, шу билан бирга бу ерда t ўзгарувчи ролини x бажаради. (21) формулага кўра:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Бироқ $\frac{dx}{dx} = 1$, шу сабабли

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{22}$$

Бу формуланинг ўнг ва чап томонларида z нинг x бўйича ҳосилалари турибди. Улардан бири $\frac{\partial z}{\partial x}$ — икки ўзгарувчининг функцияси $z = f(xy)$ нинг хусусий ҳосиласи, у аргумент x га боғлиқ эмас деган фаразда топилади. Ундан фарқли ўлароқ (22) формуланинг ўнг томонида турган $\frac{dz}{dx}$ ҳосила бир ўзгарувчи $z = f(x, y(x))$ мураккаб функциясининг ҳосиласидир. Бу ҳосилани биз *тўла ҳосила* деб атаймиз.

Энди $z = f(x, y)$ функция берилган, шу билан бирга $x = x(u, v)$ ва $y = y(u, v)$ деб фараз қиламиз, у ҳолда z иккита эркли ўзгарувчи u ва v нинг мураккаб функциясидир. Бу мураккаб функциянинг $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ хусусий ҳосилаларини топамиз.

$\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ ва $\frac{\partial y}{\partial u}$ хусусий ҳосилалар z, x ва y битта u ўзгарувчининг функциялари деб қаралиб топилади. Бироқ у ҳолда (21) формулада $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ҳосилаларни мос $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ ва $\frac{\partial y}{\partial u}$ хусусий ҳосилалар билан алмаштириб, шу формуладан фойдаланиш мумкин:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{23}$$

Шунга ўхшаш ифодани $\frac{\partial z}{\partial v}$ учун ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{23'}$$

Олинган бу натижалар исталган чекли сондаги аргументларнинг мураккаб функцияси учун умумлаштирилиши мумкин. Масалан, уч ўзгарувчининг $u = F(x, y, z)$ функцияси учун:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}, \tag{24}$$

бу ерда $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

2-мисол. $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ функция

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$$

муносабатни қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилинг, бу ерда

$$x = u + v, \; y = u - v.$$

Ечилиши. $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x (u+v)'_u + \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y (u-v)'_u = \frac{(x/y)'_x}{1 + x^2/y^2}\cdot 1 +$$
$$+ \frac{(x/y)'_y}{1 + x^2/y^2}\cdot 1 = \frac{1/y}{1 + x^2/y^2} + \frac{-x/y^2}{1 + x^2y^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x (u+v)'_v + \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y (u-v)'_v = \frac{1/y}{1 + x^2/y^2} \times$$
$$\times 1 + \frac{-x/y^2}{1 + x^2/y^2}\cdot(-1) = \frac{y + x}{x^2 + y^2}.$$

Энди қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y - x}{x^2 + y^2} + \frac{y + x}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2(u - v)}{(u+v)^2 + (u-v)^2} =$$
$$= \frac{2(u - v)}{2(u^2 + v^2)} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

2. Тўла дифференциал формасининг инвариантлиги. Маълумки, бир ўзгарувчи $y = f(x)$ функциясининг дифференциали формаси инвариантдир. Бу деган сўз, дифференциал унинг $dy = f'(x)\,dx$ ифодаси x эркли ўзгарувчи ёки бирор t ўзгарувчининг $x = \varphi(t)$ функцияси бўлишидан қатъи назар тўғрилигича қолади (VI боб, 3-§, 4-пункт).

Бир неча ўзгарувчининг $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ функцияси учун шунга ўхшаш даъво ўринлидир: n та ўзгарувчи $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ функциясининг

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

тўла дифференциали $x, y, \ldots t$ эркли ўзгарувчилар ёки бошқа ўзгарувчиларнинг функциялари бўлишидан қатъи назар ўз формасини сақлайди.

Биз бу даъвони икки ўзгарувчи $z = f(x, y)$ функцияси учун исботлаш билан чекланамиз. Маълумки, x ва y эркли ўзгарувчилар бўлса, у ҳолда тўла дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

кўринишда бўлади. Дифференциалнинг бу формаси x ва y янги ўзгарувчиларнинг $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ функциялари бўлган ҳолда ҳам сақланишини кўрсатамиз. Бу ҳолда z янги u ва v ўзгарувчиларнинг мураккаб функциясига айланади. Бу мураккаб функциянинг дифференциали

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

формула билан ифодаланади. Бироқ (23) ва (23′) формулаларга кўра:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Демак,

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{dz}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{dz}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

чунки

$$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = dx, \quad \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = dy.$$

Демак, dz тўла дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ифода x ва y янги ўзгарувчиларнинг функциялари бўлган ҳолда ҳам ўз формасини ўзгартирмайди.

3. Ошкормас функциялар ва уларни дифференциаллаш. Ушбу

$$2^y - x^2 - 1 = 0 \tag{25}$$

тенглама берилган бўлсин. Унда x нинг ҳар бир ҳақиқий қийматига y нинг ягона мусбат қиймати мос келадики, агар x ва y нинг бу қийматларини (25) тенгламага қўйиладиган бўлса, y ҳолда у айниятга айланади. Масалан, $x = 0$ қийматга $y = 0$ қиймат мос келади, чунки x ва y нинг бу қийматларини (25) тенгламага қўйсак, $2^0 - 0^2 - 1 = 0$ айниятни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш, $x = 1$ қийматга $y =$

$= 1$ қиймат, $x = 2$ қийматга $y = \log_{25}$ қиймат мос келади ва ҳоказо. Бошқача айтганда, (25) тенглама орқали функция берилган, унинг аниқланиш соҳаси бутун сон ўқи, қийматлар тўплами эса барча манфиймас сонлар тўпламидир. Бу функция ошкормас функция дейилади.

Умумий ҳолда

$$F(x, y) = 0 \tag{26}$$

тенглама берилган бўлсин, бу ерда $F(x, y)$ — икки ўзгарувчининг функцияси. Агар x нинг бирор M $(x \in M)$ тўпламга тегишли ҳар бир қийматига y нинг ягона қиймати мос келиб, x билан биргаликда (26) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда бу тенглама M тўпламда $y = \varphi(x)$ ошкормас функцияни аниқлайди деб гапирилади.

Шундай қилиб, (26) тенглама билан аниқланган $y = \varphi(x)$ ошкормас функция учун бу функциянинг аниқланиш соҳаси M даги барча x лар учун тўғри бўлган

$$F[x, \varphi(x)] \equiv 0$$

айният ўринлидир.

Ошкормас функциядан фарқли ўлароқ, y га нисбатан ечиладиган тенглама билан берилган $y = f(x)$ функция *ошкор* функция деб аталади.

Юқорида кўрилган мисолга қайтайлик. (25) тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин:

$$y = \log_2(x^2 + 1). \tag{25′}$$

Бу — ошкор функциядир. Шу билан бир вақтда у юқорида илгари (25) тенглама билан берилган ошкормас функциянинг худди ўзидир. У (25) тенгламани айнан қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, (25) муносабатда y нинг ўрнига унинг (25′) формуладаги ифодасини қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2^{\log_2(x^2+1)} - x^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

Баъзи ҳолларда ҳар бир $x \in M$ қийматга y нинг бир неча қиймати мос келади ва улар шу x билан биргаликда (26) тенгламани қаноатлантиради. У ҳолда бу тенглама бир эмас, балки бир нечта ошкормас функцияни аниқлайди. Масалан, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ тенглама иккита ошкормас функцияни аниқлайди, уларни $x^2 + y^2 - 1 = 0$ тенгламани y га нисбатан ечиб, қуйидагича ошкор кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \ y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Бироқ ҳар қандай ошкормас функцияни ошкор элементар функция кўринишида ифодалаш мумкин деб ўйлаш мумкин эмас, масалан,

$$2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$$

тенглама y ошкормас функцияни аниқлайди, чунки x ва y нинг бу тенгламани қаноатлантирадиган қийматлари жуфтлари мавжуд (масалан, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ ва ҳоказо). Бироқ бу тенгламани y функция x аргументнинг элементар функциялари орқали ифодаланадиган қилиб, y га нисбатан ечиб бўлмайди.

$F(x, y) = 0$ кўринишдаги ҳар қандай тенглама ҳам ошкормас функцияни беравермайди. Масалан, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенгламани x ва y нинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматлари қаноатлантирмайди ва демак, у ҳеч қандай ошкормас функцияни аниқламайди.

$F(x, y) = 0$ тенглама ягона y ошкормас функцияни аниқлаши учун $F(x, y)$ функция қандай шартларни қаноатлантириши керак? Бу саволга ушбу **ошкормас функциянинг мавжудлик теоремаси** жавоб беради.

Агар $F(x, y)$ функция ва унинг $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалари $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз, шу билан бирга $F(x_0, y_0) = 0$ ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $F(x, y) = 0$ тенглама $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг бирор атрофида $y = y(x)$ ягона ошкормас функцияни аниқлайди ва бу функция x_0 нуқтани ўз ичига олган бирор оралиқда узлуксиз, дифференциалланувчи, шу билан бирга $y(x_0) = y_0$ бўлади.*

Бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Энди ошкормас функцияни дифференциаллаш масаласига ўтамиз. (26) тенгламанинг чап қисми теоремадаги шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда бу тенглама $y = y(x)$ ошкормас функцияни аниқлайди ва бу функция учун $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг атрофида x га нисбатан $F(x, y(x)) \equiv 0$ айният ўринли бўлади.

Айнан нолга тенг функциянинг ҳосиласи ҳам нолга тенг бўлганлиги учун тўла ҳосила ҳам нолга тенг: $\frac{dF}{dx} = 0$. Бироқ (22) муносабатга асосан $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ ва шу сабабли $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, бундан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{27}$$

Бу формула орқали ошкормас функциянинг (битта ўзгарувчи ошкормас функциясининг) ҳосиласи топилади.

Мисол. $x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$ тенглама билан берилган y ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг ва унинг $P(2; -1)$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $F(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + x$. Демак, (27) формулага асосан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{2x - 2 + y}{6y + x}.$$

Хусусан, $P(2; -1)$ нуқтада

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\ y=-1}} = -\frac{2\cdot 2 - 2 - 1}{6\cdot(-1) + 2} = \frac{1}{4}.$$

*Геометрик нуқтаи назардан бу $F(x, y) = 0$ тенглама билан аниқланган эгри чизиқ $(x_0; y_0)$ нуқтанинг атрофида узлуксиз ва дифференциалланувчи $y = y(x)$ функциянинг графиги бўлишини билдиради.

6- §. СКАЛЯР МАЙДОН

1. Скаляр майдон ва унинг геометрик тасвирланиши. Фазонинг ҳар бир P нуқтасига бирор u скаляр катталикнинг сон қиймати мос келадиган қисми (ёки бирор бутун фазонинг ўзи) *скаляр майдон* деб аталади.

Масалан, ҳар бир нуқтасига зичликнинг тайин бир қиймати мос келадиган жисмни скаляр майдон сифатида қараш мумкин. Берилган жисмда температура тақсимоти майдони, электр потенциалининг тақсимот майдони ва ҳоказолар ҳам скаляр майдонларга доир мисолдир. Барча ҳолларда ҳам u скаляр катталик вақтга боғлиқ бўлмасдан, балки P нуқтанинг фазодаги вазиятига боғлиқ деб фараз қиламиз. Бошқача айтганда u катталик P нуқтанинг функцияси, яъни $u = F(P)$ деб қаралади. Бу функция *майдон функцияси* деб аталади. Агар фазода $Oxyz$ координаталар системаси киритилса, у ҳолда P нуқта бу системада тайин x, y, z координаталарга эга бўлади ва u скаляр катталик бу координаталарнинг функциясига айланади:

$$u = F(P) = F(x, y, z).$$

Аксинча, уч ўзгарувчининг $u = F(x, y, z)$ функцияси бирор скаляр майдонни беради.

Скаляр майдонлар кўпинча геометрик нуқтаи назардан сатҳ сиртлари ёрдамида тасвирланади. Скаляр майдоннинг *сатҳ сирти* (ёки *эквипотенциал сирти*) деб, фазонинг $u = F(x, y, z)$ майдон функцияси бир хил C қийматга эга бўладиган барча нуқталари тўпламига айтилади.

Сатҳ сирти тенгламаси

$$F(x, y, z) = C$$

кўринишига эга. C га турли қийматлар берсак, сатҳ сиртлари оиласини ҳосил қиламиз.

Масалан, майдон $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция билан берилган бўлсин, у ҳолда маркази координаталар бошида бўлган $x^2 + y^2 + z^2 = C$ сфералар сатҳ сиртлари бўлади.

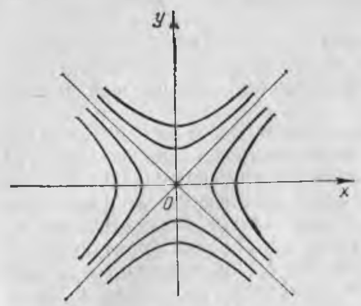
Агар скаляр майдон фазонинг бирор қисмида температуранинг тақсимот майдонидан иборат бўлса, у ҳолда бу майдоннинг сатҳ сиртлари изометрик сиртлар деб аталадиган сиртлар, яъни ҳар бирида температура доимий бўлган сиртлар бўлади.

Фазодаги скаляр майдонлар билан бир қаторда ясси скаляр майдонлар ҳам қаралади. Ясси скаляр майдон текисликнинг ҳар бир P нуқтасига z скаляр катталикнинг сон қиймати мос келадиган қисми (ёки бутун текисликнинг ўзи) сифатида аниқланади. Ясси скаляр майдон функцияси икки ўзгарувчига боғлиқ: $z = f(x, y)$.

Ясси скаляр майдонлар геометрик нуқтаи назардан *сатҳ чизиқлари* билан тасвирланади. Сатҳ чизиғи текисликнинг ясси скаляр майдон функцияси бир хил қийматга эга бўладиган барча нуқталари тўплами сифатида аниқланади. Ясси скаляр майдоннинг сатҳ чизиқлари

$$f(x, y) = C$$

кўринишда бўлади, бу ерда C — ўзгармас.



11- расм

Масалан, $z = x^2 - y^2$ функция билан берилган ясси скаляр майдон учун сатҳ чизиқлари $x^2 - y^2 = C$ тенг томонли гиперболалар бўлади (11- расм). $C = 0$ бўлганда: $x^2 - y^2 = 0$ ёки $(x - y) \times (x + y) = 0$. Бу эса гиперболаларнинг $x - y = 0$ ва $x + y = 0$ асимптоталари (координата бурчакларининг биссектрисалари) ҳам қаралаётган майдоннинг сатҳ чизиқлари қаторига киришини билдиради.

2. Йўналиш бўйича ҳосила. Скаляр майдоннинг $u = F(x, y, z)$ дифференциалланувчи функцияси берилган бўлсин. Бу майдоннинг $P(x, y, z)$ нуқтасини ва P нуқтадан

$$\mathbf{l} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$$

бирлик вектор йўналишида чиқувчи l нурни қараймиз, бу ерда α, β ва γ — шу векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари.

$P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ — бу нурнинг бошқа бирор нуқтаси бўлсин. Скаляр майдон u функциясининг P ва P_1 нуқталардаги қийматлари айирмасини бу функциянинг *l йўналиш бўйича орттирмаси* деб атаймиз ва $\Delta_l u$ билан белгилаймиз. У ҳолда $\Delta_l u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z)$. P ва P_1 нуқталар орасидаги масофани Δl орқали белгилаймиз: $\Delta l = PP_1$.

$\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ лимит $u = F(x, y, z)$ *функциянинг P нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи* деб аталади.

u функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласи $\frac{\partial u}{\partial l}$ символи билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\frac{\partial y}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \qquad (28)$$

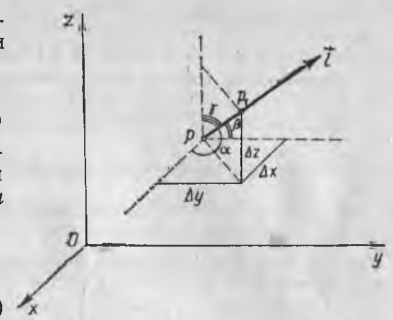
Агар u функциянинг $P(x, y, z)$ нуқтадаги берилган l йўналиш бўйича ҳосиласи мусбат бўлса, у ҳолда бу йўналишда u функция ўсишини, агар $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ бўлса, у ҳолда u функция l йўналишда камайишини айтиб ўтамиз.

Айтиш мумкинки, l йўналиш бўйича ҳосила *u функциянинг бу йўналишда ўзгариш тезлигини* беради.

Йўналиш бўйича ҳосилани ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Энг аввало P нуқта координаталарининг Δx, Δy ва Δz орттирмалари $P_1P = \Delta l$ кесма узунлиги ҳамда $\mathbf{l}$ векторнинг йўналтирувчи

косинуслари билан ушбу муносабатлар орқали боғланганлигини айтиб ўтамиз (12- расм):

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha; \ \Delta y = \Delta l \cos\beta; \quad \Delta z = \Delta l \cos\gamma. \qquad (29)$$



12- расм

u функция шартга кўра дифференциалланувчи бўлгани учун унинг $P(x; y; z)$ нуқтадаги Δu орттирмасини

$$\Delta u = F'_x(x, y, z)\,\Delta x + F'_y(x, y, z)\,\Delta y + F'_z(x, y, z)\,\Delta z + \omega \qquad (30)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, шу билан бирга ω ифода нолга $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ га қараганда тезроқ интилади, яъни $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ [(10) формулага қаранг].

Агар функциянинг $\mathbf{l}$ вектор йўналиши бўйича нур бўйлаб орттирмасини қараладиган бўлса, у ҳолда $\Delta u = \Delta_l u$, $\rho = \Delta l$, Δx, Δy ва Δz эса (29) формулалар билан ифодаланади. У ҳолда (30) тенглик ушбу кўринишни олади:

$$\Delta_l u = F'_x(x, y, z)\,\Delta l \cos\alpha + F'_y(x, y, z)\,\Delta l \cos\beta + F'_z(x, y, z)\,\Delta l \cos\gamma + \omega.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини Δl га бўлиб ва $\Delta l \to 0$ да лимитга ўтсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} [F'_x(x, y, z)\cos\alpha + F'_y(x, y, z)\cos\beta + F'_z(x, y, z)\cos\gamma] + \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\omega}{\Delta l}.$$

Бироқ $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$; $F'_z(x, y, z)$ ва йўналтирувчи косинуслар Δl га боғлиқ эмас ҳамда $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\omega}{\Delta l} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ бўлгани учун

$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z)\cos\alpha + F'_y(x, y, z)\cos\beta + F'_z(x, y, z)\cos\gamma. \qquad (31)$$

(31) формуладан кўриниб турибдики, агар $\mathbf{l}$ вектор $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ёки $\mathbf{k}$ ортлардан бири билан устма-уст тушса, у ҳолда u нинг l йўналиш бўйича ҳосиласи бу функциянинг мос хусусий ҳосиласи билан бир хил бўлади. Масалан, $\mathbf{l} = \mathbf{i}$ бўлса, у ҳолда $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$ ва, демак, $\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z)$.

1- мисол. $u = x^2 - 2xz + y^2$ функциянинг $P_1(1, 2, -1)$ нуқтадаги P_1 нуқтадан $P_2(2, 4, -3)$ нуқта томон йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $\overline{P_1P_2}$ векторни ва унга мос бирлик векторни топамиз:

$$\overline{P_1P_2} = (2 - 1)\,\mathbf{i} + (4 - 2)\,\mathbf{j} + (-3 + 1)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{l} = \frac{\overline{P_1P_2}}{|P_1P_2|} = \frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Шундай қилиб, $\mathbf{l}$ вектор ушбу йўналтирувчи косинусларга эга:

$$\cos\alpha = 1/3;\ \cos\beta = 2/3;\ \cos\gamma = -2/3.$$

Энди $u = x^2 - 2xz + y^2$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z;\ \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y;$$

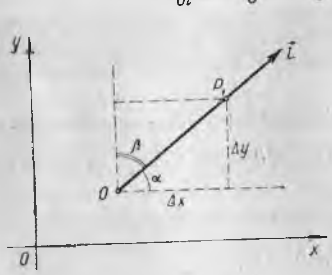
$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x.$$

Уларнинг $P_1(1;\ 2, -1)$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_1} = (2x-2z)\Big|_{\substack{x=1\\ z=-1}} = 4;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_1} = 2y\Big|_{y=2} = 4;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_1} = -2x\Big|_{x=1} = -2.$$

Хусусий ҳосилалар ва йўналтирувчи косинусларнинг топилган қийматларини (31) формулага қўйиб, изланаётган ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$



13- расм

Агар скаляр майдон ясси майдон бўлса, у ҳолда майдон функцияси юқорида айтиб ўтилганидек, икки ўзгарувчига боғлиқ: $z = f(x, y)$. $\mathbf{l}$ вектор бу ҳолда Oxy текисликда ётади (яъни $\cos\gamma = 0$) ва, демак, $\mathbf{l} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta$ ёки $\mathbf{l} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$, чунки $\cos\beta = \sin\alpha$ (13- расмга қаранг). Йўналиш бўйича ҳосила учун (31) формула ясси скаляр майдон бўлган ҳолда ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha \tag{32}$$

2- мисол. $z = \ln(x+2y)$ функциянинг $y = x^2/2$ параболага тегишли $P_1(1;\ 1/2)$ нуқтасидаги бу параболага уринма йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $f(x, y) = \ln(x+2y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x+2y};\quad f'_y(x, y) = \frac{2}{x+2y}.$$

Уларнинг $P_1(1, 1/2)$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f'_x(1; 1/2) = \frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};\quad f'_y(1; 1/2) = \frac{2}{1+2\cdot 1/2} = 1.$$

(32) формулага кирувчи $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ нинг қийматларини топиш учун $P_1(1; 1/2)$ нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = y'\Big|_{P_1} = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\Big|_{x=1} = x\Big|_{x=1} = 1.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, бу ердан бурчак α нинг иккита қийматини ҳосил қиламиз: $\alpha_1 = 45°$ ва $\alpha_2 = 225°$; булар уринманинг иккита қарама-қарши йўналишларига мос келади. $\alpha_1 = 45°$ бўлганда $\cos\alpha_1 = \cos 45° = \sqrt{2}/2$; $\sin\alpha = \sin 45° = \sqrt{2}/2$. Демак, (32) формулага асосан

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$\alpha_2 = 225°$ бўлганда, юқоридаги ўхшаш, $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ни ҳосил қиламиз.

3. Градиент. Скаляр майдонларни ўрганишда $u = F(x, y, z)$ функция билан бир қаторда бу функция билан узвий боғлиқ вектор — скаляр майдон градиенти ҳам қаралади.

$u = F(x, y, z)$ дифференциалланувчи функциянинг $P(x, y, z)$ нуқтадаги *градиенти* деб,

$$F'_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

векторга айтилади.

$u = F(x, y, z)$ функциянинг градиентини $\operatorname{grad} F(x, y, z)$, $\operatorname{grad} f(P)$, $\operatorname{grad} u$ символларидан бири билан белгилаймиз. Демак, таърифга кўра

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = F'_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\,\mathbf{k} \tag{33}$$

ёки қисқача ёзилса,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{33'}$$

Шундай қилиб, $u = F(x, y, z)$ дифференциалланувчи функция билан берилган скаляр майдоннинг ҳар бир $P(x, y, z)$ нуқтасига фақат бу функциянинг қийматигина мос келиб қолмасдан, балки тўла аниқланган $\operatorname{grad} F(P)$ вектор ҳам мос келади.

1- мисол. $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ функциянинг $P_0(2; -1; 1)$ нуқтадаги градиентини топинг.

Ечилиши. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ белгилаш киритиб, $F'_x(x, y, z) = 2x$; $F'_y(x, y, z) = 4y$; $F'_z(x, y, z) = -2z$ ни топамиз. Сўнгра (33) формулага асосан: $\operatorname{grad} u(P_0) = F'_x(2, -1, 1)\,\mathbf{i} + F'_y(2, -1, 1)\,\mathbf{j} + F'_z(2, -1, 1)\,\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$u = F(x, y, z)$ функциянинг берилган нуқтадаги градиенти ва шу нуқтадаги йўналиш бўйича $\frac{\partial u}{\partial l}$ ҳосила орасидаги боғланиш мавжуд бўлиб, у ушбу теорема орқали аниқланади.

Теорема. $\operatorname{grad} u$ *векторнинг* $\mathbf{l} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ *бирлик векторга проекцияси u функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласига тенг:*

$$\text{пр}_l \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial l}. \tag{34}$$

Исботи. $u = F(x, y, z)$ берилган бўлсин. Векторлар алгебрасидан маълумки, бирор векторнинг бирлик векторга проекцияси бу векторларнинг скаляр кўпайтмасига тенг [II боб (74') формулага қаранг]. Бироқ

$$\operatorname{grad} u = F'_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Шунинг учун

$$\text{пр}_l \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{l} = F'_x(x, y, z)\cos\alpha + F'_y(x, y, z)\cos\beta + F'_z(x, y, z)\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$$

[(31) формулага қаранг], ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Йўналиш бўйича ҳосила $\frac{\partial u}{\partial l}$ берилган $u = F(x, y, z)$ скаляр майдоннинг шу йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодалашини ҳисобга олиб, бундай айтиш мумкин: grad u *нинг* $\mathbf{l}$ *векторга проекцияси* $u = F(x, y, z)$ *майдоннинг* $\mathbf{l}$ *вектор йўналишида ўзгариш тезлигига тенг.*

$\mathbf{l}$ бирлик вектор ва grad u орасидаги бурчакни φ орқали белгилаймиз. У ҳолда $\text{пр}_e \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi$. Шунинг учун (34) формулага асосан:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi. \qquad (35)$$

Агар $\mathbf{l}$ ва grad u векторларнинг йўналишлари бир хил бўлса ($\varphi = 0$), у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial l}$ йўналиш бўйича ҳосила, равшанки, $|\operatorname{grad} u|$ га тенг энг катта қийматга эга бўлади.

14- расм

Шундай қилиб, биз ушбу хулосага келамиз: grad u *вектор майдоннинг берилган нуқтадаги энг катта ўсиш йўналишини кўрсатувчи ва модули бу ўсиш тезлигига тенг бўлган вектордир.*

Бундан келиб чиқадики, скаляр майдон $u = F(x,y,z)$ функциясининг grad u вектори майдоннинг ўзи билан аниқланади ва майдон функцияси қаралаётган координаталар системасига боғлиқ бўлмайди.

Берилган $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада grad $u = \operatorname{grad} F(x, y, z)$ нинг ва шу нуқта орқали ўтувчи сатҳ сиртининг ўзаро қандай жойлашишини аниқлаймиз. Бу сирт тенгламаси ушбу кўринишда бўлсин:

$$F(x, y, z) = C_0 \text{ ёки } F(x, y, z) - C_0 = 0. \qquad (36)$$

(36) сиртда ётувчи ва P_0 нуқта орқали ўтувчи L эгри чизиқни қараймиз (14- расм). Бу эгри чизиқ ушбу тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}\right\}$$

бу ерда $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ лар t нинг дифференциалланувчи функциялари, шу билан бирга $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. L эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси $x(t)$, $y(t)$ ва $z(t)$ координаталарга эга бўлиб, улар сатҳ сиртининг (36) тенгламасини қаноатлантириши лозим, чунки L эгри чизиқ бутунлай шу сиртда ётади. Шундай қилиб, ушбу айният бажарилиши лозим:

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)] - C_0 = 0.$$

Бу айниятнинг иккала қисмини t бўйича дифференциаллаймиз; у ҳолда (24) формуладан фойдаланиб ва $(C_0)'_t = 0$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial t} z'(t) = 0.$$

Хусусан, $t = t_0$ бўлганда:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\, x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\, y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)\, z'(t_0) = 0.$$

Бу тенгликнинг чап қисми

$$\operatorname{grad} u(P_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{k}$$

билан L эгри чизиққа уринма бўйича йўналган

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\,\mathbf{k}$$

векторнинг скаляр кўпайтмасидир (VI боб, 5- §, 3- пунктга қаранг).

Шундай қилиб,

$$\operatorname{grad} u(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \qquad (37)$$

$\operatorname{grad} u(P_0) \neq 0$ деб фараз қиламиз. У ҳолда (37) тенгликдан $\operatorname{grad} u(P_0)$ вектор L эгри чизиққа P_0 нуқтада уринма бўйлаб йўналган $\mathbf{r}'(t_0)$ векторга перпендикуляр эканлиги келиб чиқади.

Бу эгри чизиқ ихтиёрий танланганлиги учун биз ушбу хулосага келамиз. Агар скаляр майдон $u = F(x, y, z)$ дифференциалланувчи функция билан берилган бўлса, *у ҳолда сатҳ чизиғида ётувчи ва* P_0 *орқали ўтувчи эгри чизиқларга шу* P_0 *нуқтада ўтказилган барча уринмалар* $\operatorname{grad} F(P_0)$ *вектор нолга тенг бўлмаган шартда шу векторга перпендикуляр бўлган битта текисликда ётади.*

Икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ дифференциалланувчи функцияси билан берилган ясси скаляр майдонда градиент

$$\operatorname{grad} f(x, y) = f'_x(x, y)\,\mathbf{i} + f'_y(x, y)\,\mathbf{j} \qquad (38)$$

формула билан аниқланади. Унинг йўналиш бўйича $\frac{\partial z}{\partial l}$ ҳосила билан боғланиши ушбу тенглик билан аниқланади:

$$\text{пр}_e \operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial l} \text{ ёки } \frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| \cos\varphi.$$

Бу ерда φ — шу **1** бирлик вектор билан grad z орасидаги бурчак. Агар майдон $z = f(x, y)$ дифференциалланувчи функция билан берилган бўлса, у ҳолда grad $f(x_0, y_0)$ вектор сатҳ чизиғига $P_0(x_0, y_0)$ нуқтага ўтказилган уринмага перпендикуляр бўлишини кўрсатиш мумкин.

2-мисол. $z = x^2 y - 5y^3$ функциянинг $P_0(2; 1)$ нуқтадаги энг катта ўсиш тезлигини топинг.

Ечилиши. Функциянинг энг катта ўсиш тезлиги бу функция градиентининг модулига тенг. Топамиз:

$$\text{grad } z = (x^2 y - 5y^3)'_x \mathbf{i} + (x^2 y - 5y^3)'_y \mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 15y^2)\,\mathbf{j}.$$

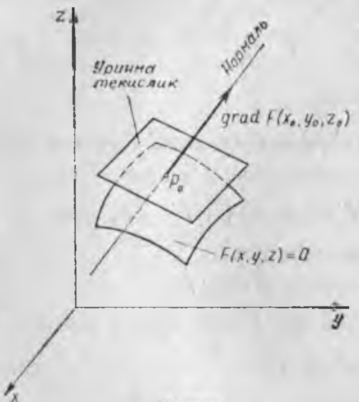
$P_0(2; 1)$ нуқтада grad $z = 4\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$ бўлади. Демак, функциянинг энг катта ўсиш тезлиги

$$|\text{grad } z|\, P_0 = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}.$$

4. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормаль. Сирт

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (39)$$

тенглама билан берилган бўлиб, унинг чап қисми бирор соҳада дифференциалланувчи функция бўлсин. Бу $u = F(x, y, z)$ функция скаляр майдонни аниқлайди ва (39) сирт бу майдон учун сатҳ сиртларидан бири бўлади.* Сиртнинг $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасида grad $F(x, y, z)$ нолга тенг бўлмасин. У ҳолда 3-пунктга асосан (39) сиртда ётувчи чизиқларга P_0 нуқтада ўтказилган барча уринмалар grad $F(P_0)$ га перпендикуляр бўлган битта текисликда ётади. Бу текислик $F(x, y, x) = 0$ сиртга $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада *уринма текислик* деб аталади (15-расм).



15- расм

Бу текислик тенгламасини тузамиз. Изланаётган текислик, равшанки, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтади, шунинг учун унинг тенгламаси

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (40)$$

кўринишда бўлади [IV боб, (3) формулага қаранг]. Шартга кўра

$$\text{grad } F(P_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{k}$$

вектор уринма текисликка перпендикуляр бўлгани учун уни бу текисликнинг нормал вектори сифатида қабул қилиш, яъни

$$A = F'_x(x_0, y_0, z_0), \quad B = F'_y(x_0, y_0, z_0), \quad C = F'_z(x_0, y_0, z_0)$$

деб олиш мумкин. У ҳолда (40) тенглама ушбу кўринишни олади.

* (39) сирт $u = F(x, y, z)$ майдон функцияси нолга тенг бўлган бир хил қийматлар қабул қиладиган барча нуқталар тўпламидан иборат.

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (41)$$

Бу (39) сиртга $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада уринма текислик тенгламасидир.

(39) сирт ўзининг бирор $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасида уринма текисликка эга бўлсин. P_0 нуқта орқали бу уринма текисликка перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқ (39) сиртга $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада *нормаль* деб аталади. grad$F(P_0)$ вектор, равшанки, нормал бўйлаб йўналган ва шу сабабли унинг йўналтирувчи вектори сифатида олиниши мумкин. Шундай қилиб, нормалнинг каноник тенгламалари ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (42)$$

1-мисол. Бир паллали $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ гиперболоидга $P_0(2; -1; 1)$ нуқтада уринма текислик ва нормалнинг тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ функциянинг $P_0(2, -1, 1)$ нуқтадаги градиенти 3-пункт, 1-мисолда топилган эди. grad $F(P_0) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Шунинг учун берилган сиртга уринма текислик тенгламаси

$$4(x - 2) - 4(y + 1) - 2(z - 1) = 0 \text{ ёки } 2x - 2y - z - 5 = 0$$

кўринишда, нормал тенгламаси эса

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z - 1}{-2} \text{ ёки } \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 1}{-1}$$

кўринишда ёзилади.

Шундай қилиб, grad $F(P_0)$ нормалнинг йўналтирувчи вектори бўлади. Шу сабабли нормалнинг $\mathbf{n}$ бирлик векторини grad $F(P_0)$ векторни унинг узунлигига бўлиб топамиз:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } F(P_0)}{|\text{grad } F(P_0)|} =$$

$$= \frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{[F'_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F'_y(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F'_z(x_0, y_0, z_0)]^2}}. \qquad (43)$$

Энди сирт

$$z = f(x, y) \qquad (44)$$

тенглама билан берилган ҳолни қараймиз. (44) тенгламани $z - f(x, y) = 0$ кўринишда ёзиб ва $z - f(x, y) = F(x, y, z)$ деб олиб, бу ҳолни юқорида кўрилган ҳолга келтириш мумкин. У ҳолда

$$F'_x(x, y, z) = -f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y, z) = -f'_y(x, y), \quad F'_z(x, y, z) = 1$$

ва, демак,

$$\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{k} = \\ = -f'_x(x, y)\,\mathbf{i} - f'_y(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}. \qquad (45)$$

Шунинг учун $P_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада уринма текислик тенгламаси ушбу кўринишда ёзилади:

$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0$$

ёки

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0), \qquad (46)$$

нормал тенгламаси эса ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{x-x_0}{-f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{-f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{1}. \qquad (47)$$

Бу ҳолда нормалнинг $\mathbf{n}$ бирлик вектори

$$\mathbf{n}=\frac{-f'_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i}-f'_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0, y_0)+f'^2_y(x_0, y_0)}} \qquad (48)$$

формула бўйича, унинг йўналтирувчи косинуслари эса

$$\cos\alpha=\frac{-f'_x(x_0, y_0)}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0, y_0)+f'^2_y(x_0, y_0)}};$$

$$\cos\beta=\frac{-f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0, y_0)+f'^2_y(x_0, y_0)}}; \qquad (49)$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0, y_0)+f'^2_y(x_0, y_0)}}$$

формулалар бўйича топилади.

2-мисол. $z=x^2+y^2/2$ эллиптик параболоидга $P_0(1;-2;3)$ нуқтада уринма текислик тенгламасини топинг.

Ечилиши. $x^2+\frac{y^2}{2}=f(x, y)$ деб топамиз:

$$f'_x(x, y)=2x; \quad f'_y(x, y)=y,$$

демак, $f'_x(1, -2)=2$; $f'_y(1, -2)=-2$. Энди (46) формуладан фойдаланиб, уринма текислик тенгламасини ёзамиз:

$$z-3=2(x-1)-2(y+2) \text{ ёки } 2x-2y-z-3=0.$$

5. Икки ўзгарувчи функцияси тўла дифференциалининг геометрик маъноси. $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада

$$dz=f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

ёки

$$dz=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) \qquad (50)$$

дифференциалга эга бўлсин. Уринма текислик тенгламаси

$$Z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) \qquad (51)$$

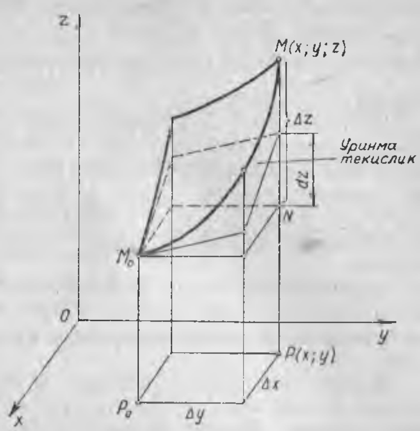
ни* қарайлик. Бу тенгламанинг ўнг қисми dz дифференциал учун

* Уринма текислик нуқтаси аппликатасини сирт нуқтасининг z аппликатасидан фарқ қилиш учун уни Z билан белгиладик.

(50) ифоданинг ўнг қисми билан бир хил эканлигини кўриб турибмиз.

Демак, бу тенгликларни чап қисмлари ҳам тенг. Бироқ (50) тенгликнинг чап қисми $z=f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги дифференциалидир, (51) тенгламанинг чап қисми эса уринма текислик аппликатасининг тегишли орттирмасини билдиради.

Биз икки ўзгарувчи функцияси дифференциалининг геометрик маъносини тушунтирувчи ушбу хулосага келамиз: *икки ўзгарувчи функциясининг дифференциали уринма текислик аппликатасининг орттирмасига тенг* (16-расм).



16- расм

7-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ЭКСТРЕМУМИ

1. Экстремум мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари. Бир неча ўзгарувчининг функцияси учун максимум ва минимум тушунчалари бир ўзгарувчининг функцияси тушунчаларига ўхшаш киритилади. Биз бу тушунчаларни фақат икки ўзгарувчининг функциясига нисбатан кўрамиз.

Икки ўзгарувчининг $z=f(x, y)$ функцияси бирор G соҳада берилган бўлсин. Ушбу таърифларни киритамиз.

G соҳа P_0 нуқтасининг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг P_0 дан фарқли барча нуқталари учун $f(P_0)>f(P)$ тенгсизлик бажарилса, икки ўзгарувчининг $z=f(x, y)=f(P)$ функцияси соҳанинг P_0 нуқтасида максимумга эга дейилади.

G соҳа P_0 нуқтасининг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг P_0 дан фарқли барча нуқталари учун $f(P_0)<f(P)$ тенгсизлик бажарилса, икки ўзгарувчининг $z=f(x, y)=f(P)$ функцияси G соҳанинг P_0 нуқтасида минимумга эга дейилади. $z=f(P)$ функция максимум (ёки минимум) га эга бўладиган P_0 нуқта *максимум* (ёки *минимум*) *нуқтаси* дейилади.

Бир ўзгарувчи функцияси бўлган ҳолдаги каби, максимум (ёки минимум) нуқтасини функция G соҳада эга бўладиган энг катта (ёки энг кичик) қиймати билан аралаштириб юбормаслик керак.

Максимум ва минимум умумий ном билан *экстремум* деб аталади.

Теорема (экстремум мавжудлигининг зарурий шарти). Агар $P_0(x_0, y_0)$ *нуқта* $z=f(x, y)$ *функциянинг экстремум нуқ-*

таси бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтадаги хусусий ҳосилалари мавжуд бўлган тақдирда

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

бўлади.

Исботи. $z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги хусусий ҳосиласи бир ўзгарувчи $\varphi(x) = f(x, y_0)$ функциясининг $x = x_0$ нуқтасидаги ҳосиласидир. Бироқ бу нуқтада $\varphi(x)$ функция экстремумга эга эканлиги равшан. Демак, $\varphi'(x_0) = 0$ (VI боб, 7- §, 2- пунктга қаранг). $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ бўлганлиги учун $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Яна $f'_y(x_0, y_0) = 0$ бўлишини ҳам шунга ўхшаш кўрсатиш мумкин. Теорема исбот қилинди.

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функциянинг P_0 нуқтада биринчи ҳосилаларининг (агар улар мавжуд бўлса) нолга айланиши, P_0 нуқтада бу функциянинг экстремуми мавжуд бўлишининг зарурий шартидир.

Бироқ шуни айтиб ўтамизки, функция хусусий ҳосилаларидан камида биттаси мавжуд бўлмаган нуқталарда ҳам экстремумга эга бўлиши мумкин. Масалан, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциянинг $O(0;0)$ нуқтада минимумга эга эканлиги равшан, бироқ бу нуқтада унинг хусусий ҳосилалари мавжуд эмас.

$z = f(x, y)$ функциянинг $f'_x(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$ биринчи хусусий ҳосилалари нолга айланадиган ёки мавжуд бўлмайдиган нуқталар бу функциянинг *критик нуқталари* деб аталади.

Юқорида баён қилинганларга асосан функциянинг экстремум нуқталарини унинг критик нуқталари орасидан излаш лозим. Бироқ экстремум нуқталари бўлмайдиган критик нуқталар ҳам мавжуд бўлади.

Масалан, $z = f(x, y) = xy$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ биринчи хусусий ҳосилалари $P_0(0, 0)$ нуқтада нолга айланади, бинобарин, бу нуқта критик нуқта бўлади. Бироқ $z = xy$ функция бу нуқтада экстремумга эга эмас.

Ҳақиқатан ҳам, $z(P_0) = 0$, бироқ $P_0(0;0)$ нуқтанинг исталган атрофида z функция ҳам мусбат (I ва III чоракларга тегишли нуқталарда), ҳам манфий (II ва IV чоракларга тегишли нуқталарда) қийматларга эга.

Бу мисол кўрсатадики, экстремум мавжудлигининг зарурий шарти етарли аломати бўла олмайди.

$P_0(x_0, y_0)$ критик нуқтада **экстремум мавжудлигининг етарли шарти**

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - [f''_{xy}(P_0)]^2 > 0$$

шартдан иборат, шу билан бирга P_0 нуқта $f''_{x^2}(P_0) < 0$ бўлган ҳолда максимум нуқтаси, $f''_{x^2}(P_0) > 0$ бўлган ҳолда эса минимум нуқтасидир. Ушбу

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - [f''_{xy}(P_0)]^2 < 0$$

шарт P_0 нуқтада **экстремум йўқлигининг етарли шартидир.**

$\Delta(P_0) = 0$ бўлган ҳолда P_0 нуқта экстремум нуқтаси бўлиши ҳам мумкин бўлмаслиги ҳам мумкин (шубҳали ҳол). Бу ҳолда қўшимча текшириш ўтказиш зарур бўлади.

Бу ерда таърифланган экстремум мавжудлигининг ёки йўқлигининг етарли аломатларини исботсиз қолдирамиз.

Мисол. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$ функциянинг экстремумларини топинг.

Ечилиши. Биринчи хусусий ҳосилаларни топамиз: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $f'_y(x, y) = 6xy - 18$. Бу ҳосилаларни нолга тенглаб, элементар алмаштиришлардан сўнг ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10, \\ 2xy &= 6. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Бу система тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшиб ва айириб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2y + y^2 &= 16, \\ x^2 - 2yx + y^2 &= 4, \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= \pm 4, \\ x - y &= \pm 2. \end{aligned}\right\}$$

Бу тенгламалар системасини ечсак (у дастлабкига тенг кучли) қуйидаги тўртта критик нуқтани ҳосил қиламиз:

$$P_1(3;1),\ P_2(1;3),\ P_3(-1;-3) \text{ ва } P_4(-3;-1).$$

Энди иккинчи хусусий ҳосилаларни топамиз: $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{y^2} = 6x$. Ушбу $\Delta(P) = f''_{x^2}(P)\, f''_{y^2}(P) - [f''_{xy}(P)]^2 = 36(x^2 - y^2)$ ифодани тузамиз. Қуйидагиларни аниқлаймиз;

1) $\Delta(P_1) > 0$, $f''_{x^2}(P_1) > 0$, $\quad P_1$ — минимум нуқтаси;
2) $\Delta(P_2) < 0$ $\quad P_2$ нуқтада экстремум йўқ;
3) $\Delta(P_3) < 0$ $\quad P_3$ нуқтада экстремум йўқ;
4) $\Delta(P_4) > 0$, $f''_{x^2}(P_4) < 0$ $\quad P_4$ — максимум нуқтаси.

Шундай қилиб, берилган функция иккита экстремумга эга: P_1 нуқтада $f(P_1) = -72$ минимум; P_4 нуқтада $f(P_4) = 72$ максимум.

2. Икки ўзгарувчи функциясининг энг катта ва энг кичик қийматлари. $z = f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ G соҳада узлуксиз ва бу соҳанинг ичида дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда функция бу соҳада энг кичик ва энг катта қийматларга эга (2- §, 5- пунктга қаранг) ҳамда уларга ё соҳанинг ичида ёки унинг чегарасида эришади. Агар $z = f(x, y)$ функция энг кичик ёки энг катта қийматини G соҳанинг ички нуқталарида қабул қилса, у ҳолда бу нуқталар функциянинг экстремум нуқталари бўлади. Шундай қилиб, функция энг кичик ёки энг катта қийматларга эга бўладиган нуқталар функциянинг ё экстремум нуқталари ёки G соҳанинг чегаравий нуқталари бўлади.

Биз **икки ўзгарувчи функциясининг энг катта ва энг кичик қийматларини топишнинг** қуйидаги **қоидасига** эга бўлдик. $z = f(x, y)$ функциянинг чегараланган ёпиқ G соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун функциянинг бу соҳанинг критик нуқталаридаги қийматларини ҳамда унинг G соҳанинг чегарасидаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш лозим. Бу барча қийматлар орасидаги

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 = \Phi\ (a, b, c)$$

ифоданинг минимумини топиш лозим. Уч ўзгарувчи $\Phi\ (a, b, c)$ функциясининг минимумини топиш биринчи даражали учта тенглама системасини ечишга келтирилади:

$$\left.\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i, \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + cn &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

бунда эса номаълум a, b, c параметрлар аниқланади.

Мисол. x эркли ўзгарувчининг турли қийматларида функциянинг тажрибада олинган қийматлари ушбу жадвалда келтирилган.

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Тегишли нуқталарни ясаб улар тахминан бир тўғри чизиқда ётишига ишонч ҳосил қиламиз. Бу эса x ва y орасидаги боғланиш $y = ax + b$ чизиқли боғланишга яқинлигини кўрсатади- Энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб, номаълум a ва b параметрларни топамиз. Ушбу жадвални тузамиз:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_ф$	Δy
1	0	2,9	0,00	0,00	2,86	0,04
2	1,0	6,3	1,00	6,30	6,28	0,02
3	1,5	7,9	2,25	11,85	7,99	0,09
4	2,1	10,0	4,41	21,00	10,04	0,04
5	3,0	13,2	9,00	39,60	13,12	0,08
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75		

Жадвалда кўрсатилган ҳисоблашлардан фойдаланиб, (53) кўринишдаги тенгламалар системасини тузамиз

$$\left.\begin{aligned} 16{,}66\,a + 7{,}6\,b &= 78{,}75, \\ 7{,}6\,a + 5\,b &= 40{,}3, \end{aligned}\right\}$$

буни ечиб, $a = 3{,}42$, $b = 2{,}86$ ни топамиз. Шундай қилиб,

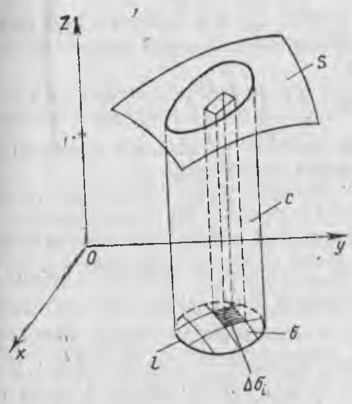
$$y = 3{,}42\,x + 2{,}86. \qquad (*)$$

Жадвалнинг олтинчи устунида y нинг (*) формула бўйича ҳисобланган қийматлари кўрсатилган, еттинчи устунда эса тажриба маълумотларининг y нинг (*) формула бўйича ҳисобланган қийматларидан четланишларининг абсолют қийматлари жой олган.

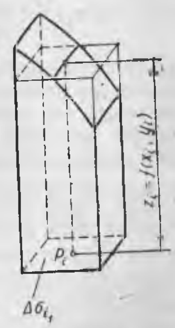
X боб
ҚАРРАЛИ ВА ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ИККИ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛ

1. Икки каррали интегралга олиб келадиган масалалар. σ — берилган Oxy текисликдаги l ёпиқ контур билан чегараланган соҳа бўлсин. σ соҳа, йўналтирувчиси l ва ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган C цилиндрик сирт ҳамда тенгламаси $z = f\,(x,\ y)$ бўлган S сиртнинг бўлаги билан чегараланган жисмни қараймиз (17- расм). Бунда $z = f\,(x,\ y)$ функция σ соҳада аниқланган, узлуксиз ва манфий эмас деб фараз қиламиз. Бундай жисмни *цилиндрик жисм* деб атаймиз. Шу цилиндрик жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш ҳақидаги масалани



17- расм



18- расм

кўрайлик. Бунинг учун σ соҳани n та кичик $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ \ldots\ \Delta\sigma_n$ юзларга бўламиз, бунда* $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \sigma$. Ҳар бир $\Delta\sigma_i$ кичик юзларнинг устида S сиртнинг $\Delta\sigma_i$ юзга проекцияланувчи бўлаги билан чегараланган кичик цилиндрик сирт («устунча») ясаймиз. Шу билан σ асосли цилиндрик жисм асослари $\Delta\sigma_i$ бўлган n та устунчага ажралади. Асоси $\Delta\sigma_i$ бўлган устун ҳажмини ΔV_i билан белгилаймиз. У ҳолда цилиндрик жисмнинг V ҳажми бу устунчалар ҳажмларининг. йиғиндисига тенг: $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$. Энди $\Delta\sigma_i$ асосли цилиндрни қараймиз. Ци-

* Бундан кейин σ ва $\Delta\sigma_i$ лар соҳаларни ҳам, уларнинг юзларини ҳам билдиради.

Цилиндрнинг баландлиги сифатида S сиртнинг $\Delta\sigma_i$ юзининг ихтиёрий $P_i(x_i\ y_i)$ нуқтасидаги z_i аппликатасини оламиз (18-расм). Бу цилиндрнинг ҳажми $\Delta\sigma_i$ асосининг юзини $z_i = f(x_i;\ y_i)$ баландликка кўпайтмасига тенг бўлиб, уни $\Delta\sigma_i$ асосли устунча ΔV_i ҳажмининг тақрибий қиймати сифатида оламиз:

$$\Delta V_i \approx f(x_i;\ y_i)\ \Delta\sigma\ .$$

Барча бундай ҳажмларнинг йиғиндисини олсак, цилиндрик жисм V ҳажмининг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

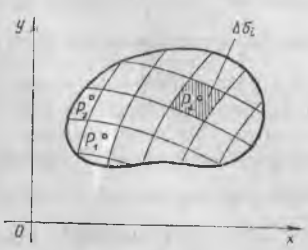
$$V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i;\ y_i)\Delta\sigma_i\ .$$

V ҳажмнинг аниқ қиймат сифатида $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\ y_i)\Delta\sigma_i$ йиғиндининг $\Delta\sigma_i$ кичик юзчалар сони чексиз ортади, ҳар бир юзча эса нуқтага айланади деган шартдаги лимитини оламиз:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\ y_i)\ \Delta\sigma_i. \tag{1}$$

Шундай қилиб, цилиндрик жисмнинг V ҳажмини ҳисоблаш ҳақидаги масала бирор лимитни топишга келтирилди.

Энди бошқа бир масалани кўрамиз. Oxy текисликда жойлашган юпқа моддий пластинка берилган бўлсин. Бу пластинканинг бирор $\Delta\sigma$ юзини ва унда $P(x,\ y)$ нуқтани танлаймиз, $\Delta\sigma$ юзча Δm массасининг бу юзчага нисбати, яъни $\frac{\Delta m}{\Delta\delta}$ нисбат $\Delta\sigma$ юзчанинг ўртача сиртий зичлиги деб аталади. Агар $\Delta\sigma$ юзча $P(x;\ y)$ нуқтага тортилади деган шартда $\frac{\Delta m}{\Delta\delta}$ нисбатнинг γ лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит P нуқтадаги сиртий зичлик деб аталади. Сиртий зичлик P нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлади ва шу сабабли унинг координаталарининг бирор функцияси бўлади: $\gamma = \gamma(x;\ y)$. $\gamma = \gamma(x;y)$ функцияни σ соҳада узлуксиз деб фараз қилиб, σ пластинканинг m массасини аниқлаймиз. Агар пластинка бир жинсли, яъни γ зичлик унинг ҳар бир нуқтасида ўзгармас $\gamma = \gamma_0$ бўлганида эди, пластинканинг массаси $m = \gamma_0\sigma$ га тенг бўлар эди. Зичлик умумий ҳолда нуқтадан нуқтага ўтишда ўзгаргани учун бу формула σ пластинканинг массасини аниқлаш учун яроқсиздир Шу сабабли қуйидагича йўл тутамиз.



19- расм

σ пластинкани n та $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\dots,\ \Delta\sigma_n$ кичик юзчаларга бўламиз, Бундай ҳар бир кичик юзчада $P(x_i;\ y_i)$ нуқтани танлаймиз (19-расм). Агар $\Delta\sigma_i$ юзчалар етарли кичик бўлса у ҳолда бундай юзчанинг ичида γ зичлик кам ўзгаради ва P_i нуқтадаги $\gamma_i = \gamma(x_i,\ y_i)$ зичликдан кам фарқ қилади. Ҳар бир кичик юзчада зичликни тақрибан ўзгармас ва танланган P_i нуқтадаги зичликка тенг деб фараз қилиб, $\Delta\sigma_i$ юзчанинг Δm_i массасини тақрибан ҳисоблаймиз:

$$\Delta m_i \approx \gamma_i\ \Delta\sigma_i = \gamma\ (x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i\ (i = 1,2,\ .\ .\ .\ ,n).$$

Бутун σ пластинканинг m массаси $m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$ га тенг бўлганлиги сабабли уни ҳисоблаш учун ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\gamma\ (x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i.$$

m массанинг аниқ қиймати сифатида $\sum_{i=1}^{n}\gamma\ (x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i$ йиғиндининг кичик юзчалар сони чексиз ортади, ҳар бир юзча эса нуқтага тортилади деган шартдаги лимитини қабул қиламиз:

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\gamma\ (x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i. \tag{2}$$

Шундай қилиб, юпқа пластинканинг массасини ҳисоблаш ҳақидаги масала бирор йиғиндининг лимитини топишга келтирилади.

Биз кўриб чиққан бу масалалар аниқ интегралнинг жуда муҳим умумлашмасига, чунончи икки каррали интегралга олиб келади. Энди шу интегрални ўрганишга киришамиз.

2. Икки каррали интеграл. Мавжудлик теоремаси. 1- пунктдаги масалалар бизни тайин кўринишдаги йиғиндиларни текширишга олиб келди. Бу йиғиндиларни тузиш (Oxy текисликдаги) бирор σ соҳа ва унда берилган узлуксиз функция билан боғлиқ бўлди. Физика ва техниканинг кўпчилик масалалари ана шундай йиғиндиларнинг лимитини топишга келтирилади. Шу сабабли бундай йиғиндиларнинг лимитларини умумий ҳолда, у ёки бу конкрет физик масалага боғламасдан ўрганиш мақсадга мувофиқдир.

Oxy текисликнинг σ соҳасида* $z = f(P) = f(x,\ y)$ функция берилган бўлсин.

Ушбу ишларни бажарамиз.

1. σ соҳани n та $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \dots,\ \Delta\sigma_n$ кичик юзчаларга шундай бўламизки (19- расм), бу кичик юзчаларнинг юзлари йиғиндиси бутун соҳанинг юзига тенг бўлсин: $\sigma = \sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$.

* Бундан кейин ҳамма вақт σ соҳа чекли юзга эга ва бир ёки бир неча чизиқ билан чегараланган деб фараз қиламиз ва буни алоҳида айтиб ўтирмаймиз.

2. Ҳар бир $\Delta\sigma_i$ кичик юзчада ихтиёрий $P_i\ (x_i; y_i)$ нуқтани танлаймиз. $z = f\ (P) = f\ (x,\ y)$ функциянинг P_i нуқтадаги қийматини $\Delta\sigma_i$ га кўпайтирамиз:

$$f\ (P_i)\ \Delta\sigma_i = f\ (x_i, y_i)\ \Delta\sigma_i.$$

3. Барча шундай кўпайтмалар йиғиндисини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(P_i)\ \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i, y_i)\ \Delta\sigma_i. \tag{3}$$

(3) йиғинди икки ўзгарувчининг $z = f\ (P) = f(x,y)$ функцияси учун тузилган *интеграл йиғинди* деб аталади.

4. (3) интеграл йиғиндининг кичик юзчалар сони n чексиз ортганда ва бу юзчаларнинг нуқтага тортилгандаги лимитини топамиз. Агар бу лимит мавжуд ва у σ соҳани $\Delta\sigma_i$ кичик юзчаларга бўлиш усулига ҳам, уларнинг ҳар бирида $P_i\,(x_i;\ y_i)$ нуқтанинг танланишига ҳам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимит $z = f\ (P) = f\,(x, y)$ функциядан σ соҳа бўйича олинган *икки каррали интеграл* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\iint_{\sigma} f\ (P)\ d\sigma \text{ ёки } \iint_{\sigma} f\ (x,\ y)\ d\sigma.$$

Шундай қилиб,

$$\iint_{\sigma} f\ (x, y)\, d\,\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\ (x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i \tag{4}$$

ёки бошқача ёзилса,

$$\iint_{\sigma} f(P)\ d\,\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(P_i)\ \Delta\,\sigma_i. \tag{4'}$$

Бу ерда $n\to\infty$ да $\Delta\sigma_i$ кичик юзчаларнинг ҳар бири нуқтага тортилади деб тушунилади; σ соҳа *интеграллаш соҳаси*, $f\,(x,\ y)$ функция *интеграл остидаги функция*, $f\,(x,\ y)\ d\sigma$ — *интеграл остидаги ифода*, $d\,\sigma$ — *юз элементи* деб аталади.

Шундай қилиб, биз ушбу таърифга келдик.

$f\,(x,\ y)$ функциядан σ соҳа бўйича олинган икки каррали интеграл деб (3) интеграл йиғиндининг $\Delta\sigma_i$ кичик юзчалар сони чексиз ортгандаги ва уларнинг ҳар бири нуқтага тортилади деган шартдаги лимитига айтилади. Шу билан бирга бу лимит σ соҳани бўлакларга бўлиш усулига ва $\Delta\,\sigma_i$ кичик юзчаларнинг ҳар бирида P_i нуқталарнинг танланишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Энди ҳажм ва масса ҳақидаги масалаларга қайтсак, қуйидагиларни кўрамиз: *цилиндрик жисмнинг ҳажми сон жиҳатдан $z = f\,(x,\ y) \geqslant 0$ аппликатадан σ соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга тенг:*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f\,(x,\ y)\ d\,\sigma.$$

Икки каррали интегралнинг геометрик маъноси ана шундан иборат.

Зичлиги $\gamma = \gamma\ (x,\ y)$ бўлган σ ясси пластинканинг массаси зичликдан олинган икки каррали интегралга тенг:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma\,(x_i, y_i)\,\Delta\,\sigma_i = \iint_{\sigma} \gamma(x, y)\ d\sigma.$$

Изоҳ. Агар интеграл остидаги функция $f\,(x,\ y) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда икки каррали интегралнинг қиймати сон жиҳатдан интеграллаш соҳасининг юзига тенг: $\iint_{\sigma} d\sigma = \sigma$.

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда исталган интеграл йиғинди

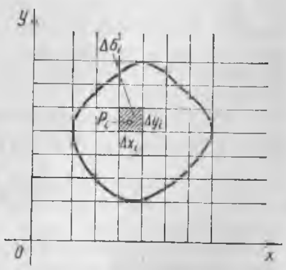
$$\sum_{i=1}^{n} f\ (x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta\,\sigma_i = \sigma$$

кўринишга эга ва у сон жиҳатдан σ соҳанинг юзига тенг. Интеграл йиғиндининг лимити ҳам σ га тенг бўлгани учун

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta\,\sigma_i = \lim_{n\to\infty} \sigma = \sigma.$$

$f\ (x,\ y) \geqslant 0$ учун икки каррали интеграл, яъни интеграл йиғиндининг лимити цилиндрик жисмнинг ҳажмини аниқлагани учун бу лимитнинг мавжудлиги равшандек туюлади. Бироқ бу фикр қатъий эмас. Тўлиқроқ курсларда бу даъво қатъий исботланади ва **икки каррали интегралнинг мавжудлик теоремаси** номи билан аталади.

σ юзга эга бўлган, чегараланган ёпиқ соҳада узлуксиз ҳар қандай $z = f\ (x,\ y)$ функция учун икки каррали интеграл мавжуд.



20- расм

Бундан буён биз интеграллаш соҳасида узлуксиз функцияларнигина қараймиз.

Мавжудлик теоремасидан, σ соҳани, масалан, координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар ёрдамида томонлари Δx_i ва $\Delta\ y_i$ бўлган $\Delta\sigma_i$ кичик тўғри тўртбурчакларга бўлиш мумкинлиги келиб чиқади (20-расм). Бунда $\Delta\sigma_i = \Delta x_i\ \Delta y_i$. Энди ҳар бир кичик тўғри тўртбурчакда $P_i\ (x_i; y_i)$ нуқтани танлаб, икки каррали интегралнинг таърифига асосан бундай ёзишимиз мумкин.

$$\iint_{\sigma} f\,(x,\ y)\ d\,\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\ (x_i,\ y_i)\ \Delta x_i\ \Delta y_i.$$

Икки каррали интегрални $\sum_{i=1}^{n} f\ (x_i\ y_i)\ \Delta x_i,\ \Delta y_i$ кўринишдаги йиғиндининг лимити сифатида топиш мумкинлигини таъкидлаш мақсадида

$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma$ белгилаш ўрнига $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy$ белгилаш ҳам ишлатилади. Шундай қилиб,

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta x_i \Delta y_i.$$

$dx\, dy$ ифода *декарт координаталарида юз элементи* деб аталади ҳамда dx ва dy томонлари координата ўқларига параллел тўғри тўрт бурчакнинг юзига тенг.

Шуни айтиб ўтамизки, интеграл йиғиндини тузишда σ соҳанинг чегарасига ёпишган $\Delta\sigma_i$ юзчалар тўғри тўртбурчак шаклида бўлмайди. Бироқ бундай юзчаларни юзлари $\Delta x_i \Delta y_i$ бўлган тўғри тўртбурчаклар билан алмаштириш натижасида йўл қўйиладиган хатолик лимитда нолга айланишини исботлаш мумкин.

3. Икки каррали интегралнинг хоссалари. Икки каррали интегралнинг

$$\iint\limits_{\sigma} f(x; y)\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta\sigma^i$$

таърифи тузилиши бўйича аниқ интегралнинг таърифига (VIII боб, 2- §, 1- пунктга қаранг) мутлақо ўхшашлигини пайқаш осон. Шу муносабат билан икки каррали интеграл аниқ интеграл эга бўлган барча хоссаларга эга. Бунинг устига, икки каррали интеграл учун бу хоссаларнинг исботи аниқ интеграл учун мос хоссаларнинг исботига мутлақо ўхшашдир. Шу сабабли икки каррали интегралнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз:*

1°. *Ўзгармас кўпайтувчини икки каррали интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни k — бирор сон бўлса, у ҳолда:*

$$\iint\limits_{\sigma} k f(x,y)\, d\sigma = k \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma.$$

2°. *Бир неча функция йиғиндисидан олинган икки каррали интеграл қўшилувчилардан олинган икки каррали интеграллар йиғиндисига тенг***

$$\iint\limits_{\sigma} [f(x, y) + \varphi(x, y)]\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

3.° *Агар σ интеграллаш соҳасида $f(x, y) \geqslant 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma \geqslant 0$ бўлади.*

Агар интеграллаш соҳасида $f(x, y) \geqslant 0$ узлуксиз функция ва соҳанинг камида битта нуқтасида $f(x, y) > 0$ бўлса, у ҳолда $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma > 0.$

* Аввал аниқ интеграл учун тегишли хоссаларни хотирада тиклаб олиб, бу хоссаларни исботлашни ўқувчига тавсия қиламиз.

** Аниқ интегралдаги каби, 1° ва 2° хоссалар биргаликда чизиқлилик хоссаси деб аталади.

4.° *Агар интеграллаш соҳасида $f(x, y)$ ва $\varphi(x, y)$ функциялар $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma \geqslant \iint\limits_{\sigma} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

5.° Аддитивлик хоссаси. *Агар интеграллаш соҳаси бир неча $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ бўлакларга бўлинган бўлса, у ҳолда*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x, y)\, d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_k} f(x, y)\, d\sigma.$$

Агар икки каррали интегрални цилиндрик сиртнинг ҳажми сифатида қараладиган бўлса, бу хосса геометрик нуқтаи назардан равшандир. У ушбу содда фактни ифодалайди: агар цилиндрик сиртнинг асоси бир неча $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ бўлакларга бўлинган бўлса, у ҳолда бутун цилиндрик жисмнинг ҳажми уни ташкил этадиган $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ асосли цилиндрик жисмларнинг ҳажмлари йиғиндисига тенг.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *$f(x, y)$ функция ёпиқ чегараланган σ соҳада узлуксиз бўлсин. У ҳолда σ соҳада шундай $P_0(x_0; y_0)$ нуқта топиладики, бунда*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = f(x_0, y_0)\, \sigma \tag{5}$$

бўлади.

Агар σ соҳада $f(x,y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда бу теорема бундай геометрик мазмунга эга.

Цилиндрик жисмнинг ҳажми асоси шу цилиндрик жисмнинг асоси σ дан иборат ва баландлиги функциянинг σ соҳанинг бирор $P_0(x_0; y_0)$ нуқтасидаги қийматига тенг бўлган цилиндрнинг ҳажмига тенг. Функциянинг (5) тенгликдан аниқланадиган $f(x_0, y_0)$ қиймати $f(x, y)$ функциянинг σ соҳадаги *ўрта қиймати* деб аталади.

4. Икки каррали интегрални декарт координаталарида ҳисоблаш. Икки каррали интегрални интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш аниқ интеграл бўлган ҳолдаги каби катта қийинчиликлар билан боғлиқ. Ана шундан қутилиш мақсадида, икки каррали интегрални ҳисоблашни иккита аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади. Бу қандай бажарилишини кўрсатамиз. Соддалик учун интеграллаш соҳасида интеграл остидаги функция $f(x, y) \geqslant 0$ бўлган ҳол билан чекланамиз. Бу фаразимиз икки каррали интегрални цилиндрик жисмнинг ҳажми сифатида қарашимизга имкон беради.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ узлуксиз функциядан олинган $\iint\limits_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблаш талаб қилинмоқда.

Аввал бундай фараз қиламиз: σ интеграллаш соҳаси иккита $y = \varphi_1(x)$ ва $y = \varphi_2(x)$ эгри чизиқ ҳамда иккита $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган, шу билан бирга x нинг a ва b орасида ётувчи барча қийматлари учун $\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўлсин (21- расм).

Ох ўқдаги $(x; 0)$ нуқта орқали *Оу* ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ соҳани чегаралаб турган эгри чизиқлар билан C_1 ва C_2 нуқталарда учрашади. C_1 нуқтани *кириш нуқтаси*, C_2 нуқ-

$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma$ белгилаш ўрнига $\iint\limits_\sigma f(x,y)\,dx\,dy$ белгилаш ҳам ишлатилади. Шундай қилиб,

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta x_i\Delta y_i.$$

$dx\,dy$ ифода *декарт координаталарида юз элементи* деб аталади ҳамда dx ва dy томонлари координата ўқларига параллел тўғри тўрт бурчакнинг юзига тенг.

Шуни айтиб ўтамизки, интеграл йиғиндини тузишда σ соҳанинг чегарасига ёпишган $\Delta\sigma_i$ юзчалар тўғри тўртбурчак шаклида бўлмайди. Бироқ бундай юзчаларни юзлари $\Delta x_i\Delta y_i$ бўлган тўғри тўртбурчаклар билан алмаштириш натижасида йўл қўйиладиган хатолик лимитда нолга айланишини исботлаш мумкин.

3. Икки каррали интегралнинг хоссалари. Икки каррали интегралнинг

$$\iint\limits_\sigma f(x;\,y)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\,y_i)\,\Delta\sigma^i$$

таърифи тузилиши бўйича аниқ интегралнинг таърифига (VIII боб, 2-§, 1-пунктга қаранг) мутлақо ўхшашлигини пайқаш осон. Шу муносабат билан икки каррали интеграл аниқ интеграл эга бўлган барча хоссаларга эга. Бунинг устига, икки каррали интеграл учун бу хоссаларнинг исботи аниқ интеграл учун мос хоссаларнинг исботига мутлақо ўхшашдир. Шу сабабли икки каррали интегралнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз:*

1°. *Ўзгармас кўпайтувчини икки каррали интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни k — бирор сон бўлса, у ҳолда:*

$$\iint\limits_\sigma kf(x,y)\,d\sigma=k\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma.$$

2°. *Бир неча функция йиғиндисидан олинган икки каррали интеграл қўшилувчилардан олинган икки каррали интеграллар йиғиндисига тенг***

$$\iint\limits_\sigma [f(x,y)+\varphi(x,y)]\,d\sigma=\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma+\iint\limits_\sigma \varphi(x,y)\,d\sigma.$$

3.° *Агар σ интеграллаш соҳасида $f(x,y)\geqslant 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma\geqslant 0$ бўлади.*

Агар интеграллаш соҳасида $f(x,y)\geqslant 0$ узлуксиз функция ва соҳанинг камида битта нуқтасида $f(x,y)>0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma>0.$$

* Аввал аниқ интеграл учун тегишли хоссаларни хотирада тиклаб олиб, бу хоссаларни исботлашни ўқувчига тавсия қиламиз.

** Аниқ интегралдаги каби, 1° ва 2° хоссалар биргаликда чизиқлилик хоссаси деб аталади.

4.° *Агар интеграллаш соҳасида $f(x,y)$ ва $\varphi(x,y)$ функциялар $f(x,y)\geqslant\varphi(x,y)$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда*

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma\geqslant\iint\limits_\sigma \varphi(x,y)\,d\sigma.$$

5.° Аддитивлик хоссаси. *Агар интеграллаш соҳаси бир неча $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_k$ бўлакларга бўлинган бўлса, у ҳолда*

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\,d\sigma+\dots+\iint\limits_{\sigma_k} f(x,y)\,d\sigma.$$

Агар икки каррали интегрални цилиндрик сиртнинг ҳажми сифатида қараладиган бўлса, бу хосса геометрик нуқтаи назардан равшандир. У ушбу содда фактни ифодалайди: агар цилиндрик сиртнинг асоси бир неча $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k$ бўлакларга бўлинган бўлса, у ҳолда бутун цилиндрик жисмнинг ҳажми уни ташкил этадиган $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k$ асосли цилиндрик жисмларнинг ҳажмлари йиғиндисига тенг.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *$f(x,y)$ функция ёпиқ чегараланган σ соҳада узлуксиз бўлсин. У ҳолда σ соҳада шундай $P_0(x_0;\,y_0)$ нуқта топиладики, бунда*

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma=f(x_0,y_0)\,\sigma \tag{5}$$

бўлади.

Агар σ соҳада $f(x,y)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда бу теорема бундай геометрик мазмунга эга.

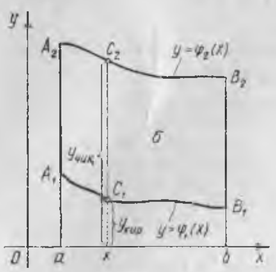
Цилиндрик жисмнинг ҳажми асоси шу цилиндрик жисмнинг асоси σ дан иборат ва баландлиги функциянинг σ соҳанинг бирор $P_0\ (x_0;\ y_0)$ нуқтасидаги қийматига тенг бўлган цилиндрнинг ҳажмига тенг. Функциянинг (5) тенгликдан аниқланадиган $f(x_0,y_0)$ қиймати $f(x,y)$ функциянинг σ соҳадаги *ўрта қиймати* деб аталади.

4. Икки каррали интегрални декарт координаталарида ҳисоблаш. Икки каррали интегрални интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш аниқ интеграл бўлган ҳолдаги каби катта қийинчиликлар билан боғлиқ. Ана шундан қутилиш мақсадида, икки каррали интегрални ҳисоблашни иккита аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади. Бу қандай бажарилишини кўрсатамиз. Соддалик учун интеграллаш соҳасида интеграл остидаги функция $f(x,y)\geqslant 0$ бўлган ҳол билан чекланамиз. Бу фаразимиз икки каррали интегрални цилиндрик жисмнинг ҳажми сифатида қарашимизга имкон беради.

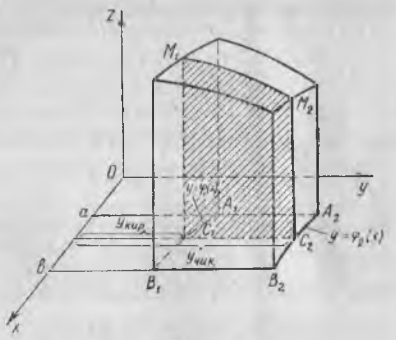
Шундай қилаб, $f(x,y)$ узлуксиз функциядан олинган $\iint\limits_\sigma f(x,y)d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблаш талаб қилинмоқда.

Аввал бундай фараз қиламиз: σ интеграллаш соҳаси иккита $y=\varphi_1(x)$ ва $y=\varphi_2(x)$ эгри чизиқ ҳамда иккита $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган, шу билан бирга x нинг a ва b орасида ётувчи барча қийматлари учун $\varphi_2(x)\geqslant\varphi_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўлсин (21-расм).

Ox ўқдаги $(x;\,0)$ нуқта орқали Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ соҳани чегаралаб турган эгри чизиқлар билан C_1 ва C_2 нуқталарда учрашади. C_1 нуқтани *кириш нуқтаси*, C_2 нуқ-



21- расм



22- расм

тани эса *чиқиш нуқтаси* деб атаймиз. Уларнинг ординаталарини мос равишда $y_{\text{кир}}$ ва $y_{\text{чиқ}}$ билан белгилаймиз. Кириш нуқтасининг ординатаси $y_{\text{кир}} = \varphi_1(x)$ ва чиқиш нуқтасининг ординатаси $y_{\text{чиқ}} = \varphi_2(x)$ бўлади. Маълумки, $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma$ икки каррали интеграл сон жиҳатдан $z = f(x, y)$ сиртнинг σ юзчага проекцияланадиган бўлаги билан чегараланган цилиндрик сиртнинг V ҳажмига тенг (17- расмга қаранг):

$$V = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma.$$

Энди цилиндрик жисмнинг V ҳажмини бошқача йўл билан, чунончи, кўндаланг кесимлар усули ёрдамида ҳисоблаймиз (VIII боб, 3- §, 3-пунктга қаранг).

Биз биламизки, агар жисмнинг Ox ўққа перпендикуляр ва x ($a \leqslant x \leqslant b$) абсциссали нуқта орқали ўтувчи текислик билан кесими $S(x)$ юзга эга бўлса, у ҳолда жисмнинг V ҳажми

$$V = \int_a^b S(x)\, dx \tag{6}$$

формула билан ифодаланади. Бу формулани цилиндрик жисмнинг ҳажмини ҳисоблашга татбиқ қиламиз. $(x; 0; 0)$ нуқта орқали Ox ўққа перпендикуляр текислик ўтказсак, кесимда $C_1M_1M_2C_2$ эгри чизиқли трапецияни ҳосил қиламиз (22- расм). M_1M_2 чизиқнинг $z = f(x, y)$ аппликатаси x ўзгармас бўлганда фақат y нинг функцияси бўлади, шу билан бирга, y аргумент $y_{\text{кир}} = \varphi_1(x)$ дан $y_{\text{чиқ}} = \varphi_2(x)$ гача чегараларда ўзгаради. $C_1M_1M_2C_2$ трапециянинг $S(x)$ юзи, равшанки, ушбу аниқ интегралга тенг:

$$S(x) = \int_{y_{\text{кир}}}^{y_{\text{чиқ}}} z\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{7}$$

Шундай қилиб, (7) формула цилиндрик жисм кўндаланг кесими юзини аниқлайди,

(6) тенгликка $S(x)$ нинг ифодасини қўйиб,

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$$

ни ҳосил қиламиз.

Бироқ, иккинчи томондан цилиндрик жисмнинг V ҳажми $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma$ икки каррали интегралга тенг бўлганлиги учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right\} dx$$

ёки

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy. \tag{8}$$

Бу эса изланаётган формуладир.

(8) формуланинг маъносини тушунтирайлик. $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблаш учун олдин x ни ўзгармас деб $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ аниқ интегрални (ёки, айтилишича, ички интегрални) ҳисоблаш лозим.

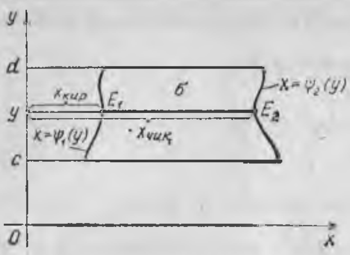
Интеграллашнинг қуйи чегараси x нинг тайинланган (фиксирланган) қийматига мос кириш нуқтасининг $y_{\text{кир}} = \varphi_1(x)$ ординатаси, юқори чегараси эса чиқиш нуқтасининг $y_{\text{чиқ}} = \varphi_2(x)$ ординатаси бўлади. Бу интегрални ҳисоблаш натижаси эса фақат x нинг функцияси бўлади. Энди бу функцияни a дан b гача бўлган чегараларда интеграллаб, икки каррали интегралнинг қийматини ҳосил қиламиз.

1-изоҳ. Агар σ соҳа иккита $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ эгри чизиқ ва иккита горизонтал $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган, шу билан бирга c ва d орасидаги барча y лар учун $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ бўлса (23-расм), ушбу тенглик ўринли бўлишини юқоридаги каби исботлаш мумкин:

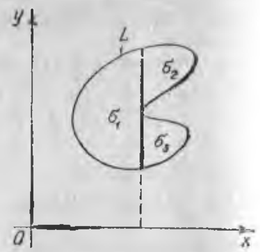
$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

ёки

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx. \tag{9}$$



23- расм



24- расм

Бу ерда ички интеграллашда y ўзгармас деб ҳисобланади. Бу интеграллашнинг натижаси y нинг функцияси бўлади ва кейин уни c дан d гача бўлган чегараларда интеграллаш лозим.

(8) ва (9) формулаларнинг ўнг томонларида турган интегралларни *такрорий* (ёки *икки каррали*) *интеграллар* деб аталади.

2-изоҳ. (8) ва (9) формулаларда *ташқи интегралнинг чегаралари доимо ўзгармас* эканлигига эътибор бериш лозим.

3-изоҳ. (8) ва (9) формулалар σ соҳа махсус кўринишга эга деган шартда келтириб чиқарилди. Агар σ соҳанинг контури мураккаброқ бўлса, у ҳолда қуйидагича йўл тутилади (24-расм). σ соҳани (8) ёки (9) формулани келтириб чиқаришда қўйилган шартлар қаноатлантириладиган қилиб, чекли сондаги бўлакларга бўлинади. Сўнгра интегрални бундай соҳаларнинг ҳар бири бўйича (8) ёки (9) формула асосида ҳисобланади. Бутун соҳа бўйича олинган интеграл эса аддитивлик хоссасига асосан бу бўлакларнинг ҳар бири бўйича олинган интегралларнинг йиғиндисига тенг бўлади. 24-расмда келтирилган ҳол учун қуйидагига эга бўламиз:

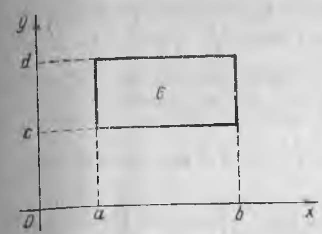
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{\sigma_3} f(x,y)\,d\sigma.$$

4-изоҳ. Агар интеграллаш соҳаси $x=a$, $x=b\,(a<b)$ ва $y=c$, $y=d\,(c<d)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак (25-расм) бўлса, (8) ва (9) формулалар бу ҳол учун ушбу кўринишда бўлади:

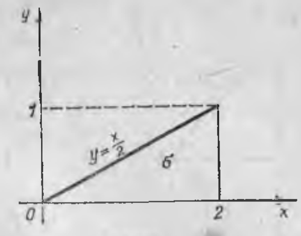
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

1-мисол. Агар $\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$ икки каррали интегралнинг σ интеграллаш соҳаси $y=0$, $x=2$, $y=x/2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчак (26-расм) бўлса, бу интегрални ҳисобланг.



25- расм



26-расм

Ечилиши. Бу икки каррали интегрални (8) формуладан фойдаланиб ҳисоблайдиган бўлсак, бу ерда $y_{кир}=\varphi_1(x)=0$, $y_{чиқ}=\varphi_2(x)=x/2$ бўлади (чунки кириш нуқталари Ox ўқда, чиқиш нуқталари эса $y=x/2$ тўғри чизиқда ётади); $a=0$ $b=2$. Шу сабабли, (8) интегрални қўлланиб,

$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^2 dx \int_0^{x/2}(x^2+y^2)\,dy$$

ни ҳосил қиламиз. Ички интегралда x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, бу интегрални топамиз:

$$\int_0^{x/2}(x^2+y^2)\,dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{x/2} = x^2\cdot\frac{x}{2} + \frac{(x/2)^3}{3} = \frac{13}{24}x^3.$$

Демак,

$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^2 \frac{13}{24}\,x^3\,dx = \frac{13\,x^4}{24\cdot 4}\Bigg|_0^2 = \frac{13}{6}.$$

$\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблаш учун (9) формуладан фойдалансак ҳам, барибир шу натижани ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $x_{кир}=\psi_1(y)=2y$, $x_{чиқ}=\psi_2(y)=2$ (чунки кириш нуқталари $y=x/2$, ёки $x=2y$ тўғри чизиқда, чиқиш нуқталари эса $x=2$ тўғри чизиқда), $c=0$, $d=1$ бўлишини (26-расм) эътиборга олсак,

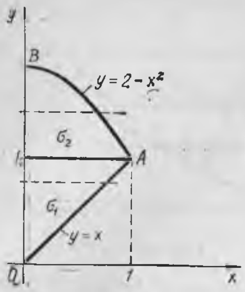
$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 (x^2+y^2)\,dx$$

ни ҳосил қиламиз. Сўнгра

$$\int_{2y}^2 (x^2+y^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{2y}^2 = \left(\frac{8}{3}+2y^2\right) - \left(\frac{8y^3}{3}+2y^3\right) = \frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{14}{3}y^3,$$

У ҳолда

$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^1\left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{14}{3}y^3\right)dy = \left[\frac{8}{3}\,y + \frac{2y^3}{3} - \frac{7\,y^4}{6}\right]_0^1 = \frac{13}{6}.$$



27- расм

Агар икки каррали интегралнинг геометрик маъносини эътиборга олсак, $\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma$ юқоридан $z = x^2 + y^2$ айланма параболоиднинг Ox у текисликда σ учбурчакка проекцияланадиган бўлаги билан чегараланган цилиндрик жисмнинг V ҳажмини беради.

2-мисол. $\iint\limits_{\sigma} xy^2\, d\sigma$ икки каррали интегралнинг σ интеграллаш соҳаси $x = 0,\ y = x,\ y = 2 - x^2$ чизиқлар билан чегараланган бўлса, бу интегрални топинг (27-расм).

Е ч и л и ш и. Бу икки каррали интегрални ҳисоблаш учун (8) формулани қўллаймиз. Бу ерда $y_{\text{кир}} = \varphi_1(x) = x$, $y_{\text{чиқ}} = \varphi_2(x) = 2 - x^2$, $a = 0$, $b = 1$. Шунинг учун

$$\iint\limits_{\sigma} xy^2\, d\sigma = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} x y^2\, dy.$$

Ички интегралда x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, бу интегрални топамиз:

$$\int\limits_x^{2-x^2} xy^2\, dy = \frac{xy^3}{3}\Bigg|_x^{2-x^2} = \frac{x(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{3},$$

Демак,

$$\iint\limits_{\sigma} x y^2\, d\sigma = \int\limits_0^1 \left[\frac{x(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{3}\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 (2-x^2)^3\, d(2-x^2) - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^4\, dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{6}\,\frac{(2-x^2)^4}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^5}{15}\right]_0^1 = -\frac{1}{24} - \frac{1}{15} + \frac{2^4}{24} = \frac{67}{120}.$$

Агар $\iint\limits_{\sigma} (xy^2)\, d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблашда (9) формуладан фойдаланиладиган бўлса, у ҳолда σ интеграллаш соҳасини иккита σ_1, σ_2 бўлакка бўлишга тўғри келади (27-расмга қаранг), чунки чиқиш нуқталари жойлашган OAB чизиқ айрим участкаларда турли тенгламалар билан берилади. Аддитивлик хоссасига асосан:

$$\iint\limits_{\sigma} xy^2\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} xy^2\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} xy^2\, d\sigma. \qquad (*)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган интегралларнинг ҳар бирига (9) формулани қўлланамиз. Аввал биринчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{\sigma_1} xy^2\, d\sigma = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y xy^2\, dx,$$

чунки

$$x_{\text{кир}} = \psi_1(y) = 0,\ x_{\text{чиқ}} = \psi_2(y) = y,\ c = 0,\ d = 1.$$

Энди y нинг ўзгармаслигини эътиборга олиб, ички интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^y xy^2\, dx = \frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^y = \frac{y^4}{2}.$$

Демак,

$$\iint\limits_{\sigma_1} xy^2\, d\sigma = \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2}\, dy = \frac{1}{10}.$$

(*) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларнинг иккинчисини ҳам шунга ўхшаш топамиз:

$$\iint\limits_{\sigma_2} xy^2\, d\sigma = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} xy^2\, dx,$$

чунки

$$x_{\text{кир}} = 0,\ x_{\text{чиқ}} = \sqrt{2-y},\quad c = 1,\quad d = 2.$$

Ички интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^{\sqrt{2-y}} xy^2\, dx = \frac{x^2\, y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2-y}} = \frac{(2-y)\, y^2}{2} = y^2 - \frac{y^3}{2}.$$

Демак,

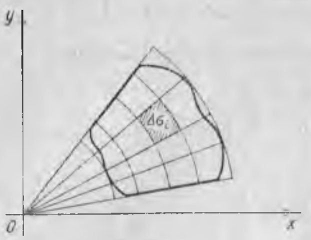
$$\iint\limits_{\sigma_2} xy^2\, d\sigma = \int\limits_1^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{2}\right) dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{11}{24}.$$

Шундай қилиб, узил-кесил ушбуни ҳосил қиламиз;

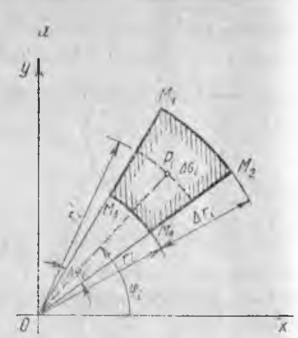
$$\iint\limits_{\sigma} xy^2\, d\sigma = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Сўнгги мисолдан кўриниб турибдики, $\iint\limits_{\sigma} xy^2\, d\sigma$ икки каррали интегрални мазкур конкрет ҳолда ҳисоблашда (8) формулани қўллаиш қулайроқдир. Икки каррали интегрални ҳисоблашда буни назарда тутиш лозим ва (8) ёки (9) формулалардан ҳисоблаш ихчамроқ бўладиганини англаш лозим.

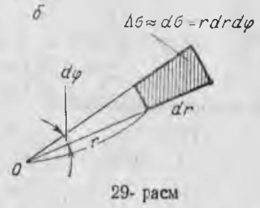
5. Икки каррали интегралларни қутб координаталарда ҳисоблаш. Аниқ интегрални ҳисоблашни соддалаштириш усулларидан бири ўзгарувчини алмаштириш усулидир. Икки каррали интегралда янги ўзгарувчиларни ана шундай киритиш кўпинча ҳисоблашларнинг тежамли бўлишига олиб келади. Биз бу ерда ўзгарувчиларни алмаштиришнинг амалий татбиқлар учун энг муҳим бўлган хусусий ҳоли, чунончи, x ва y декарт координаталарини r ва φ қутб координаталарига алмаштириш билан чекланамиз.



28- расм



б



29- расм

$z=f(x,\ y)$ узлуксиз функциядан σ соҳа бўйича олинган $\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисоблаш лозим бўлсин. Икки каррали интеграл интеграл йиғиндининг лимити эканини биламиз:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\ \Delta\sigma_i$$

шу билан бирга бу лимит σ соҳани бўлакларга бўлиш усулига ҳам, ҳар бир $\Delta\sigma_i$ кичик юзачада P_i нуқтанинг қандай танланишига ҳам боглиқ эмас. σ соҳани қутби координаталар боши билан устма-уст тушувчи, қутб ўқи эса Ox ўқдан иборат бўлган қутб координаталар системасида қараймиз. σ интеграллаш соҳасини қутбдан чиқувчи нурлар ва умумий маркази қутбда бўлган айланалар ёрдамида $\Delta\sigma_i$ кичик юзчаларга бўламиз (28- расм). Қутбдан чиққан ва ўзаро $\Delta\varphi_i$ бурчак ташкил қилган иккита нур ҳамда r_i ва $r_i+\Delta r_i$ радиусли иккита айлана билан чегараланган $\Delta\sigma_i$ юзчани қарайлик (29-*а* расм). Бу эгри чизиқли тўртбурчакнинг юзини иккита доиравий сектор юзларининг айирмаси сифатида топамиз:

$$\Delta\sigma_i=OM_1M_2-OM_3M_4=$$

$$=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i=r_i\Delta r_i\Delta\varphi_i+\frac{1}{2}(\Delta r_i)^2\Delta\varphi_i=\left(r_i+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta r_i}{2}\right)\Delta r_i\Delta\varphi_i.$$

r_i' орқали r_i ва $r_i+\Delta r_i$ орасидаги ўрта радиусни белгилаймиз, яъни $r_i'=r_i+\frac{\Delta r_i}{2}$. У ҳолда $\Delta\sigma_i=r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i$. Ҳар бир $\Delta\sigma_i$ кичик юзчада $P_i(x_i;y_i)$ нуқтани танлаймиз. Бунда P_i нуқтани r_i' радиусли айланада ётадиган қилиб танлаймиз. P_i нуқтанинг қутб бурчагини φ_i орқали белгилаймиз. P_i нуқтанинг $x_i;\ y_i$ декарт координаталари билан унинг $r_i',\ \varphi_i$ қутб координаталари $x_i=r_i'\cos\varphi_i$ ва $y_i=r_i'\sin\varphi_i$ муносабатлар орқали боғланганлигини ҳисобга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta\sigma^i=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i'\cos\varphi;\ \ r_i'\sin\varphi_i)\times r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i.$$

Шуни айтиш керакки, интеграл йиғиндини тузгётганда σ соҳанинг чегарасига ёпишган $\Delta\sigma_i$ юзчалар кесилган ва улар $r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i$ дан кичик юзларга эга бўлиши мумкин. Бироқ бундай юзчаларни биз кўраётган шаклдаги юзчалар билан алмаштирганда йўл қўйиладиган хатонинг лимитга ўтилганда нолга айланишини исботлаш мумкин.

Сўнгги тенгликнинг ўнг томонида $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ функция учун r ва φ ўзгарувчилар бўйича интеграл йиғиндининг лимити турибди. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} f(r_i'\cos\varphi_i,\ \ r_i'\sin\varphi_i)\ r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i=\iint\limits_{\sigma} f(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Шундай қилиб, ушбу формула ўринли:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma} f(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi)\,r\,d\,r\,d\varphi. \qquad (10)$$

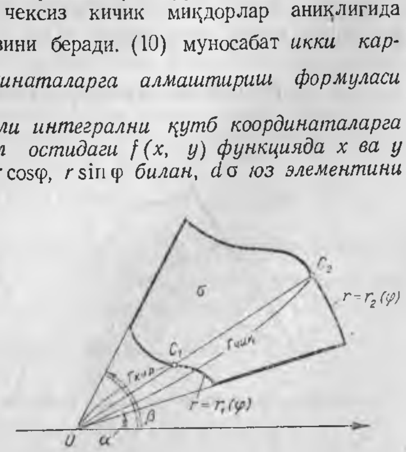
$d\sigma=r\,d\,r\,d\varphi$ ифода *қутб координаталарида юз элементи* деб аталади.

У 29-*б* расмда тасвирланган эгри чизиқли тўртбурчакнинг $r\,d\,r\,d\varphi$ га қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар аниқлигида $\Delta\sigma=r\,d\,r\ \ d\varphi+\frac{1}{2}(d\,r)^2\,d\varphi$ юзини беради. (10) муносабат *икки каррали интегрални қутб координаталарга алмаштириш формуласи* деб аталади.

Шундай қилиб, *икки каррали интегрални қутб координаталарга алмаштириш учун интеграл остидаги $f(x,\ \ y)$ функцияда x ва y ўзгарувчиларни мос равишда* $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ *билан,* $d\sigma$ *юз элементини эса унинг қутб координаталардаги* $d\sigma=r\,d\,r\,d\varphi$ *ифодаси билан алмаштириш лозим.*

$$\iint\limits_{\sigma} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

икки каррали интегрални ҳисоблашни ҳам такрорий интегрални ҳисоблашга келтирилади, бироқ бу ерда x ва y ўзгарувчилар ролини энди r ва φ бажаради. Буни қандай бажаришни кўрсатамиз. σ соҳа қутбдан α ва $\beta\,(\alpha<\beta)$ бурчак-



30- расм

лар остида чиққан иккита нур ва қутб координаталардаги тенгламалари $r = r_1(\varphi)$ ва $r = r_2(\varphi)$ $(r_1 < r_2)$ бўлган иккита эгри чизиқ билан чегараланган бўлсин. Қутбдан $\varphi\ (\alpha < \varphi < \beta)$ бурчак остида нур ўтказамиз. Бу нур $r = r_1(\varphi)$ ва $r = r_2(\varphi)$ эгри чизиқлар билан C_1 ва C_2 нуқталарда учрашади (30-расм). C_1 нуқтани кириш нуқтаси, C_2 нуқтани эса чиқиш нуқтаси деб атаймиз. Икки каррали интегрални ҳисоблаш формуласи мазкур интеграллаш соҳаси учун ушбу кўринишда бўлади:

$$\iint_\sigma f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_{\text{кир}}=r_1(\varphi)}^{r_{\text{чиқ}}=r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr. \quad (11)$$

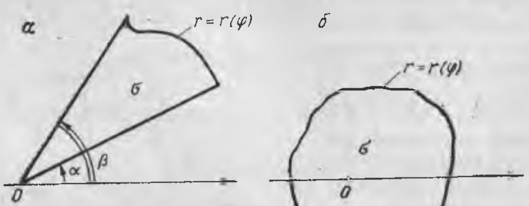
$\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr$ ички интеграл (φ ни ўзгармас деб) кириш нуқтасининг қутб радиуси $[r_{\text{кир}} = r_1(\varphi)]$ дан чиқиш нуқтасининг қутб радиуси $[r_{\text{чиқ}} = r_2(\varphi)]$ гача бўлган чегараларда олинади. Бу интеграллаш натижаси умуман айтганда, φ ўзгарувчининг бирор функцияси бўлиб, кейин уни α дан β гача (φ аргументнинг четки қийматлари) бўлган чегараларда интеграллаш лозим.

Агар σ интеграллаш соҳаси 31-*а*, расмда тасвирланган кўринишга эга (қутб соҳанинг чегарасига тегишли) бўлса, у ҳолда унинг учун кириш нуқтасининг қутб радиуси 0 га тенг: $r_{\text{чиқ}} = 0$ ва демак,

$$\iint_\sigma f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr. \quad (12)$$

Ниҳоят, σ соҳа координаталар бошини ўз ичига олган ва $r = r(\varphi)$ эгри чизиқ билан чегараланган бўлса, (31-*б* расм), у ҳолда, равшанки,

$$\iint_\sigma f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr. \quad (13)$$



31- расм

Хусусан, агар ёпиқ эгри чизиқ маркази координаталар бошида бўлган R радиусли айлана бўлса, у ҳолда

$$\iint_\sigma f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr. \quad (14)$$

1- мисол. $\iint\limits_\sigma \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, d\sigma$ икки каррали интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бўлган айлана.

Ечилиши. (10) формулага кўра:

$$\iint_\sigma \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, d\sigma = \iint_\sigma \sqrt{4 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2}\, r\,dr\,d\varphi = \iint_\sigma \sqrt{4 - r^2}\, r\,dr\,d\varphi.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун (14) муносабатдан фойдаланамиз:

$$\iint_\sigma \sqrt{4 - r^2}\, r\,dr\,\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\, r\,dr.$$

Ички интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\, r\,dr = -\left[\frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Шунинг учун

$$\iint_\sigma \sqrt{4 - r^2}\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\, d\varphi = \frac{16}{3}\pi.$$

Шундай қилиб,

$$\iint_\sigma \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, d\sigma = \frac{16}{3}\pi.$$

Шу интегралнинг ўзини декарт координаталарида ҳисоблаш кўпроқ ҳисоблашлар билан боғлиқ.

2- мисол. R радиусли шардан ясовчиси бу шарнинг маркази орқали ўтувчи ва диаметри R бўлган тўғри доиравий цилиндр билан кесилган жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Координаталар бошини шарнинг маркази билан устма-уст тушириб, Oz ўқни цилиндрнинг ясовчиси бўйлаб Ox ўқни эса цилиндр асосининг диаметри бўйлаб йўналтирамиз. Жисм Oxy ва Oxz координата текисликларига нисбатан симметрик бўлганлиги учун жисмнинг I октантда жойлашган бўлагини топиш ва олинган натижани тўртга кўпайтириш етарлидир (32- расм). Демак,

$$V = 4\iint_\sigma z\,d\sigma,$$

бу ерда z — сфера нуқтасининг аппликатаси, σ эса Oxy текисликдаги радиуси $R/2$ ва маркази $(R/2;\ 0)$ нуқтада бўлган ярим доира (33- расм).

Радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган сферанинг тенгламаси $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ кўринишида бўлганлиги учун биринчи октантда $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ва, демак,

$$V = 4\iint_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma.$$

Қутб координаталарга ўтиб, (10) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V = 4\iint_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma = 4\iint_\sigma \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr\,\varphi\,d.$$

(20) тенгликнинг ўнг томонида турган ифода $f(P)$ функция учун интеграл йиғиндидир.

(20) тақрибий тенгликнинг аниқлиги $\Delta\sigma_i$ юзчанинг ўлчамлари кичрайиши билан ортади. Кичик юзчалар сони n чексиз ортганда ва уларнинг ҳар бири нуқтага тортилганда лимитга ўтиб, изланаётган Q катталикнинг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$Q = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(P)\,d\sigma.$$

$f(P)\,d\sigma$ ифода изланаётган катталикнинг элементи деб аталади ва dQ орқали белгиланади: $dQ = f(P)d\sigma$.

Шундай қилиб, Q катталик 1° ва 2° хоссаларга эга бўлса, у ҳолда бу катталикни унинг элементидан олинган икки каррали интеграл сифатида топиш мумкин: $Q = \iint_{\sigma} dQ$.

Икки каррали интегралга олиб келадиган яна бир қатор масалаларни қараймиз:

Статик моментлар; ясси фигуранинг оғирлик маркази. Oxy текисликда ётувчи ва m массага эга бўлган $P\ (x;y)$ моддий нуқтанинг Ox ўққа нисбатан S_x статик моменти деб, бу нуқта массасининг унинг ординатасига кўпайтмасига айтилади, яъни $S_x = my$. Oy ўққа нисбатан S_y статик момент ҳам шунга ўхшаш аниқланади: $S_y = mx$.

Агар бир неча моддий нуқтадан иборат система берилган бўлса, у ҳолда системанинг координата ўқларига нисбатан статик моменти бу система нуқталарининг мос статик моментлари йиғиндиси сифатида аниқланади.

Энди Oxy текисликда σ моддий юзча берилган бўлиб, унинг исталган нуқтадаги γ сиртий зичлиги бу нуқта координаталарининг берилган функцияси бўлсин: $\gamma = \gamma(x, y)$.

Бу юзчанинг S_x ва S_y статик моментларини топиш учун қуйидагича йўл тутамиз. σ юзчани n та кичик σ_i юзчага бўламиз. Ҳар бир σ_i кичик юзчада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i)$ нуқтани танлаймиз. Ҳар бир юзчада зичликни ўзгармас ва танланган P_i нуқтадаги зичликка тенг деб ҳисоблаб, бу юзчанинг Δm_i массаси учун ушбу тақрибий ифодани ҳосил қиламиз:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{21}$$

Ҳар бир $\Delta\sigma_i$ кичик юзчани Δm_i массали $P_i\ (x_i; y_i)$ нуқта билан алмаштирамиз. Бу нуқтанинг ўқларга нисбатан статик моментлари $\Delta\sigma_i$ юзчанинг ΔS_x^i ва ΔS_y^i статик моментларининг тақрибий қийматларини беради:

$$\Delta S_x^i \approx y_i\,\Delta m_i \approx y_i\,\gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i,$$
$$\Delta S_y^i \approx x_i\,\Delta m_i \approx x_i\,\gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Бутун σ юзчанинг статик моменти $\Delta\sigma_i$ кичик юзчалар статик моментларининг йиғиндисига тенг бўлганлиги сабабли (аддитивлик хоссасига асосан) S_x ва S_y учун ушбу тақрибий тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$S_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i\,\gamma(x_i y_i)\,\Delta\sigma_i,\quad S_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i\,\gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Статик моментларнинг ҳар бирининг аниқ қиймати сифатида мос интеграл йиғиндининг барча кичик юзчалар нолга интилгандаги лимитини қабул қиламиз:

$$S_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i\,\gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} y\,\gamma(x, y)\,d\sigma,$$
$$S_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i\,\gamma(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} x\,\gamma(x, y)\,d\sigma. \tag{22}$$

Изоҳ. Шу масалани ўзини бундай ҳам ечиш мумкин: σ юзчада чексиз кичик $d\sigma$ юзчани шундай кичик қилиб танлаймизки, унинг ҳолати шу $d\sigma$ юзчага тегишли бирор $P\ (x;\ y)$ нуқта билан характерлансин. $d\sigma$ элементар юзчанинг бутун dm массаси $P(x,\ y)$ нуқтада мужассамлашган деб ҳисоблаб, $d\sigma$ юзчанинг Ox ўққа нисбатан статик моменти элементини ҳисоблаймиз: $dS_x = y\,dm$.

Сўнгра $dm = \gamma(x,y)\,d\sigma$ бўлганлиги учун $dS_x = y\,\gamma(x, y)\,d\sigma$. Энди dS_x дан σ юзча бўйича икки каррали интеграл олиб, қуйидагини топамиз:

$$S_x = \iint_{\sigma} dS_x = \iint_{\sigma} y\,\gamma(x, y)\,d\sigma.$$

Шунга ўхшаш, $dS_y = x\,\gamma(x, y)\,d\sigma$ ва

$$S_y = \iint_{\sigma} x\,\gamma(x, y)\,d\sigma.$$

Механикадан маълумки, ясси моддий система оғирлик марказининг $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ координаталари

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m},\qquad \bar{y} = \frac{S_x}{m} \tag{23}$$

тенгликлар билан аниқланади, бу ерда m—системанинг массаси, S_x ва S_y системанинг статик моментлари. σ ясси юзчанинг массаси $\iint_{\sigma}\gamma(x,y)\,d\sigma$ га тенг (1- §, 2- пунктга қаранг) бўлганлиги сабабли ясси пластинка оғирлик марказининг координаталари учун (22) ва (23) формулаларга кўра ушбу ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x\,\gamma(x,y)\,d\sigma}{\iint_{\sigma}\gamma(x,y)\,d\sigma},\qquad \bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y\,\gamma(xy)\,d\sigma}{\iint_{\sigma}\gamma(x,y)\,d\sigma}.$$

Хусусан, пластинка бир жинсли ($\gamma = \gamma_0$) бўлса, у ҳолда

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x\gamma_0\, d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} \gamma_0\, d\sigma} = \frac{\gamma_0 \iint\limits_{\sigma} x d\sigma}{\gamma_0 \iint\limits_{\sigma} d\sigma} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}.$$

Шунга ўхшаш,

$$\overline{y} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}.$$

$\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \sigma$ бўлганлиги учун (1-§, 2-пункт, изоҳга қаранг)

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x d\sigma}{\sigma}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y d\sigma}{\sigma}. \tag{24}$$

1- мисол. $y = 4 - x^2$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган юзча оғирлик марказининг координаталарини топинг (34- расм).

Ечилиши. Фигура Oy ўққа нисбатан симметрик бўлганлиги учун ҳисобламасдан туриб ҳам $\overline{x} = 0$ деб айта оламиз. Оғирлик марказининг $\overline{y}$ ординатасини (24) формула бўйича ҳисоблаймиз. Бунинг учун S_x статик моментни топамиз:

$$S_x = \iint\limits_{\sigma} y d\sigma = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} y dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx = 256/15.$$

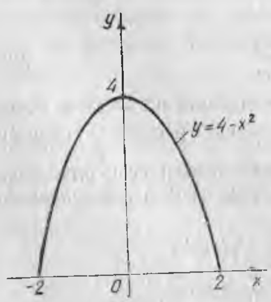
σ юзни топамиз:

$$\sigma = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} dy = \int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = 32/3.$$

Демак, (24) формулага асосан:

$$\overline{y} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma} = \frac{256/15}{32/3} = 8/5.$$

Демак, оғирлик марказининг координаталари: $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 8/5$.



34- расм

Инерция моменти. m массали моддий нуқтанинг ўққа нисбатан *инерция моменти* деб, бу нуқтанинг массасини ундан ўққача бўлган масофанинг квадратига кўпайтмасига айтилади. Моддий нуқталар системасининг инерция моменти деб бу нуқталарнинг инерция моментлари йиғиндисига айтилади.

Энди σ ясси моддий юзча берилган бўлиб, унинг γ зичлиги координаталарнинг берилган функцияси бўлсин: $\gamma = \gamma(x,y)$. Бу юзчанинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментларини топамиз. $d\sigma$ кичик юзчани ажратиб, унинг коор-

дината ўқларига нисбатан инерция моментлари* элементларини топамиз:

$$dI_x = y^2\, dm = y^2 \gamma(x,y) d\sigma, \qquad dI_y = x^2\, dm = x^2 \gamma(x,y)\, d\sigma.$$

dI_x ва dI_y дан σ юзча бўйича икки каррали интеграл олиб, изланаётган инерция моментларини топамиз:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} y^2 \gamma(x,y) d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_{\sigma} x^2 \gamma(x,y) d\sigma, \tag{25}$$

2- мисол. 1- мисолдаги бир жинсли юзчанинг зичлиги $\gamma = 1$ деб ҳисоблаб, унинг Oy ўққа нисбатан инерция моментини топинг.

Ечилиши. (25) формулага кўра:

$$I_y = \iint\limits_{\sigma} x^2 \gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} x^2 d\sigma = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} x^2 dy = \int\limits_{-2}^{2} x^2(4 - x^2) dx = \frac{128}{15}.$$

Сиртнинг юзи. VIII бобда айланиш сиртининг юзини ҳисоблаш ҳақидаги масала ечилган эди. Энди умумийроқ масалани: $z = f(x,y)$ тенглама билан берилган сирт бўлагининг юзини ҳисоблаш масаласини ечамиз.

Аввал ушбу леммани исботлаймиз.

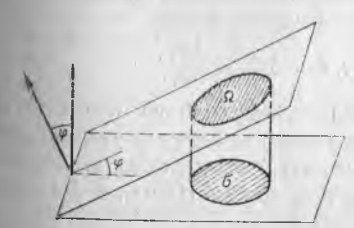
Лемма. σ — юзи Ω *бўлган ясси фигуранинг бирор текисликка проекциясининг юзи бўлсин. У ҳолда*

$$\sigma = \Omega \cos\varphi, \tag{26}$$

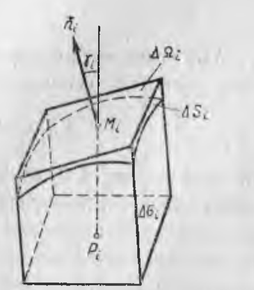
бу ерда φ — *проекция текислиги ва фигура текислиги орасидаги ўткир бурчак* (35- расм).

(26) формула учбурчаклар учун тўғрилиги бизга маълум. Исталган ясси кўпбурчакни бир неча учбурчакларга бўлиш мумкин бўлгани учун (26) формула ясси кўпбурчаклар учун ҳам тўғридир.

Энди бирор эгри чизиқ билан чегараланган Ω юзли ясси фигура берилган бўлсин. Бу фигуранинг юзини унга ички чизилган кўпбурчаклар юзларининг лимитлари сифатида қараш мумкинлиги сабабли



35- расм



36- расм

* Инерция моменти аддитив катталик эканлиги равшан.

$$S=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4r^2}\;r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\sqrt{1+4r^2}\;r\,dr.$$

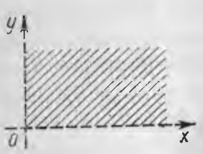
Ички интегрални топамиз:

$$\int\limits_0^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr=\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^2=\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1).$$

Демак,

$$S=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)\;d\varphi=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)\approx 36{,}20 \text{ кв. бирл.}$$

7. Пуассон интеграли. Эҳтимоллар назариясида Пуассон* интеграли деб аталадиган $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\,dx$ интеграл муҳим аҳамиятга эга. Уни ҳисоблаш учун $K=\iint\limits_{\sigma}e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\sigma$ хосмас икки каррали интегрални ҳисоблаймиз, бу ерда σ интеграллаш соҳаси чексиз соҳа—координата текислигининг I чорагидан иборат (38- расм). Бу интегралга декарт координаталар системасида ҳам, қутб координаталар системасида ҳам такрорий интегралга ўтиш формулаларини қўлланиб бўлишини исботлаш мумкин. Бу интегрални (8) формуладан фойдаланиб, декарт координаталарида такрорий интеграл орқали ҳисоблаймиз. Бу ерда



38- расм

$$y_{\text{кир}}=0,\ y_{\text{чиқ}}=+\infty,\ a=0,\ b=+\infty.$$

Шунинг учун

$$K=\iint\limits_{\sigma}e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\sigma=\int\limits_0^{\infty}dx\int\limits_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)/2}\,dy.$$

Бироқ

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)/2}\,dy=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}\,dy=e^{-x^2/2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2/2}\,dy=e^{-x^2/2}\cdot I,$$

чунки $\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2/2}\,dy=I$ (интеграл интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишига боғлиқ эмас). Шундай қилиб,

$$K=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\,I\,dx=I\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\,dx=I^2. \tag{30}$$

Иккинчи томондан $\iint\limits_{\sigma}e^{-(x^2+y^2)/2}d\sigma$ интегралда қутб координаталарига ўтсак,

$$K=\iint\limits_{\sigma}e^{-(x^2+y^2)/2}\;d\sigma=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\infty}e^{-r^2/2}\,r\,dr$$

* С. Пуассон (1781 — 1840) — француз механиги, физиги ва математиги.

ни ҳосил қиламиз. Бироқ

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-r^2/2}\;r\,dr=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}e^{-r^2/2}r\,dr=\lim_{b\to+\infty}(1+e^{-b^2/2})=1.$$

Демак,

$$K=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2}. \tag{31}$$

(30) ва (31) формулалардан $I^2=\frac{\pi}{2}$ бўлиши келиб чиқади, яъни $I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Шундай қилиб, узил- кесил қуйидагига эгамиз:

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{32}$$

2- §. УЧ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛ

1. Масса ҳақидаги масала. $Oxyz$ фазода бирор V моддий жисм берилган бўлсин. Унинг бирор қисмини — $P\ (x,\ y,\ z)$ нуқтани ўз ичига олган ΔV кичик жисмни қараймиз. Бу кичик жисм Δm массасининг унинг ΔV ҳажмига нисбати, яъни $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ нисбат ΔV жисмнинг ўртача зичлиги деб аталади. Агар $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ нисбатнинг ΔV кичик жисм $P(x,\ y,\ z)$ нуқтага тортилади деган шартдаги γ лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит P нуқтадаги зичлик деб аталади. У $P(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлади ва шу сабабли унинг координаталарининг бирор функцияси бўлади: $\gamma=\gamma(x,\ y,\ z)$. V ҳажмли жисмнинг ҳар бир $P(x,\ y,\ z)$ нуқтадаги зичлиги бу нуқта координаталарининг берилган узлуксиз функцияси, яъни $\gamma=\gamma(x,\ y,\ z)$ деб ҳисоблаб, шу жисмнинг m массасини ҳисоблаймиз. Агар V бир жинсли, яъни γ зичлик унинг ҳар бир нуқтасида бир хил ва γ_0 га тенг бўлганида эди, у ҳолда унинг m массаси $m=\gamma_0 V$ га тенг бўлар эди, бу ерда V — жисмнинг ҳажми. Умумий ҳолда зичлик нуқтадан нуқтага ўтганида ўзгариши туфайли бу формула жисмнинг массасини аниқлаш учун яроқсиздир. Шу сабабли қуйидагича йўл тутамиз:

V жисмни n та $\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \ldots,\ \Delta V_n$ бўлакларга $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$ бўладиган қилиб бўламиз. Ҳар бир кичик ΔV_i жисмда $P_i\ (x_i,\ y_i,\ z_i)$ нуқтани танлаймиз. Агар ΔV_i жисмни етарлича кичик қилиб олсак, у ҳолда бу жисм ичида зичлик кам ўзгаради ва P_i нуқтадаги $\gamma_i=\gamma(P_i)=\gamma(x_i,\ y_i,\ z_i)$ зичликдан кам фарқ қилади. ΔV_i кичик жисмнинг ҳар бир нуқтасидан зичликни ўзгармас ва P_i нуқтадаги зичликка тенг деб ҳисоблаб, унинг Δm_i массасини тақрибий ҳисоблаймиз:

$$\Delta m_i\approx\gamma_i\,\Delta V_i=\gamma(x_i,\ y_i,\ z_i)\ \Delta V_i\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Бутун жисмнинг m массаси $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$ га тенг бўлгани сабабли уни ҳисоблаш учун ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma (x_i, y_i, z_i) \Delta V_i .$$

m массанинг аниқ қиймати сифатида бу йиғиндининг ΔV_i кичик жисмларнинг ҳар бири нуқтага тортилгандаги лимитини қабул қиламиз:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma (x_i, y_i, z_i) \Delta V_i . \tag{33}$$

Жисмнинг массаси ҳақидаги масалани ҳал этиш тайин кўринишдаги йиғиндининг лимитини текширишга олиб келди. Геометрия, физика ва бошқа фанларнинг кўпчилик масалалари шу кўринишдаги йиғиндиларнинг лимитини топишга келтирилиши сабабли, бундай йиғиндилар лимитининг хоссаларини умумий кўринишда, у ёки бу масалага боғламасдан ўрганиш табиий бир ҳол бўлиб, у бизни уч каррали интеграл тушунчасига олиб келади.

Уч каррали интеграл ва унинг хоссалари. Фазода ҳажми V га тенг бўлган жисм берилган бўлсин. Бу жисмнинг ҳар бир P нуқтасида $u = f(P) = f(x, y, z)$ функция аниқланган бўлсин. Энди ушбу ишларни бажарамиз.

1. Жисмни n та $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ кичик жисмларга* бўламиз, бунда $\sum_{i=i}^{n} \Delta V_i = V$.

2. ΔV_i кичик жисмларнинг ҳар бирида ихтиёрий $P_i (x_i, y_i, z_i)$ нуқтани танлаймиз. $u = f(P)$ функциянинг P_i нуқтадаги қийматини шу P_i нуқта тегишли бўлган кичик жисмнинг ΔV_i ҳажмига кўпайтирамиз:

$$f(P_i) \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i .$$

3. Барча бундай кўпайтмаларнинг йиғиндисини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i , \tag{34}$$

у *интеграл йиғинди* деб аталади.

4. (34) интеграл йиғиндининг ΔV_i кичик жисмлар сони n нинг чексиз ортгандаги ва уларнинг ҳар бири нуқтага тортилгандаги лимитини қараймиз.

Агар бу лимит мавжуд ва у V ҳажмни ΔV_i кичик жисмларга бўлиш усулига ҳам, уларнинг ҳар бирида $P_i (x_i, y_i, z_i)$ нуқталарнинг танланишига ҳам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимитни $u = f(P) =$

---

* Бундан буён V ва ΔV_i жисмларни ҳам, уларнинг ҳажмларини ҳам билдиравериди.

$= f(x, y, z)$ функциядан V соҳа бўйича олинган *уч каррали интеграл* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\iiint_V f(P)\, dV \text{ ёки } \iiint_V f(x, y, z)\, dV .$$

Шундай қилиб,

$$\iiint_V f(P)\, dV = \iiint_V f(x,y,z)\, dV = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \tag{35}$$

1- пунктга қайтиб, бундай хулсса қиламиз: *V жисмнинг m массаси $\gamma = \gamma(x, y, z)$ зичликдан олинган уч каррали интегралга тенг*, яъни

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z)\, dV .$$

Уч каррали интеграл икки каррали интегрални интеграллаш соҳаси уч ўлчовли жисм бўлган ҳолга умумлашмаси эканини кўриб турибмиз. Икки каррали интеграл бўлган ҳолдаги каби ушбу **уч каррали интегралнинг мавжудлик теоремаси** ўринли бўлиб, биз уни исботламасдан қабул қиламиз.

Фазонинг V ҳажмли чегараланган ёпиқ соҳасида узлуксиз бўлган ҳар қандай $u = f(x, y, z)$ функция учун уч каррали интеграл мавжуд.

Уч каррали интеграл ҳам икки каррали интеграл эга бўлган хоссаларга эга.

1°. *Ўзгармас кўпайтувчини уч каррали интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни*

$$\iiint_V k f(x, y, z)\, dV = k \iiint_V f(x, y, z)\, dV .$$

2°. *Бир неча функциялар йиғиндисидан олинган уч каррали интеграл қўшилувчилардан олинган уч каррали интеграллар йиғиндисига тенг, яъни*

$$\iiint_V [f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)]\, dV = \iiint_V \varphi(x, y, z)\, dV + \iiint_V \varphi(x, y, z)\, dV .$$

3°. *Агар интеграллаш соҳасида $f(x, y, z) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV \geqslant 0 .$$

4° *Агар интеграллаш соҳасида $f(x, y, z) \geqslant \varphi(x, y, z)$* бўлса, у ҳолда

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV \geqslant \iiint_V \varphi(x, y, z)\, dV .$$

5° Аддитивлик хоссаси. Агар V *интеграллаш соҳаси k* та *$V_1, V_2, \ldots, V_k$ бўлакка бўлинган бўлса, у ҳолда*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dV + \ldots + \iiint_{V_k} f(x, y, z)\, dV .$$

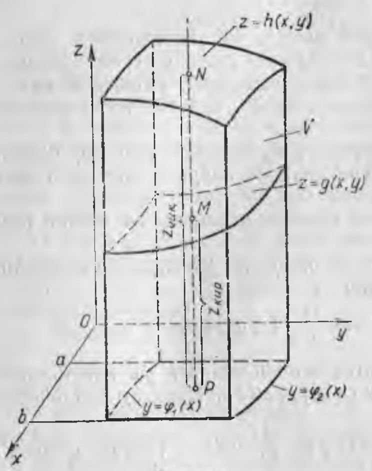
Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ чегараланган V соҳада узлуксиз бўлса,* у *ҳолда бу соҳада шундай $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ нуқта мавжудки,*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = f(x_0, y_0, z_0)\,V$$

бўлади, бу ерда V — соҳанинг ҳажми.

Бу пунктни якунлаб, қуйидагини қайд этамиз: агар V соҳада интеграл остидаги функция $f(x, y, z) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда уч каррали интеграл сон жиҳатдан соҳанинг ҳажмига тенг, яъни $\iiint\limits_V dV = V$. Бу тенглик мазкур ҳолда исталган интеграл йиғинди $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta V_i = V$ кўринишда ва сон жиҳатдан жисмнинг ҳажмига тенглигидан келиб чиқади.

3. Уч каррали интегрални декарт координаталарида ҳисоблаш. Уч каррали интегрални ҳисоблаш учта аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади. V интеграллаш соҳаси пастдан $z = g(x, y)$ сирт билан, юқоридан эса $z = h(x, y)$ сирт билан чегараланган жисм деб фараз қиламиз. Бу жисм Oxy текисликда $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)]$ эгри чизиқлар ва $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган σ юзчага проекциялансин (39- расм). σ юзчанинг $P(x; y; 0)$ нуқтаси орқали Oz ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ пастки $z = g(x, y)$ сирт билан бирор M нуқтада ва устки $z = h(x, y)$ сирт билан бирор N нуқтада учрашади. M нуқтани кириш нуқтаси, N нуқтани эса чиқиш нуқтаси деб атаймиз, уларнинг аппликаталарини эса мос равишда $z_{\text{кир}}$ ва $z_{\text{чиқ}}$ билан белгилаймиз.



39- расм

Бунда, агар $f(x, y, z)$ қаралаётган V соҳада узлуксиз функция бўлса, у ҳолда $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV$ уч каррали интегралнинг қиймати

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iint\limits_\sigma \left\{ \int\limits_{z_{\text{кир}} = g(x, y)}^{z_{\text{чиқ}} = h(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right\} d\sigma \tag{36}$$

формула бўйича ҳисобланишини исботлаш мумкин. (36) формуланинг маъноси қуйидагича:

$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV$ уч каррали интегрални ҳисоблаш учун аввал x ва y ўзгармас деб $\int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz$ аниқ интегрални ҳисоблаш лозим. Бу интегралнинг қуйи чегараси M кириш нуқтасининг аппликатаси $z_{\text{кир}} = g(x, y)$, юқори чегараси эса N чиқиш нуқтасининг $z_{\text{чиқ}} = h(x, y)$ аппликатаси бўлади. Бу интегрални ҳисоблаш натижаси икки x ва y ўзгарувчининг функциясидир. Сўнгра бу функцияни V соҳанинг Oxy текисликка проекциясидан иборат бўлган σ юзча бўйича интеграллаб, уч каррали интегралнинг қийматини ҳосил қиламиз.

$\int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz$ функциядан σ юзча бўйича олинган икки каррали интегрални декарт координаталарида ҳисоблаб ((8) формулага қаранг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint\limits_\sigma \left\{ \int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right\} d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right\} dy.$$

Шундай қилиб,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right\} dy. \tag{37}$$

(36) ва (37) формулаларни одатда қавсларни ташлаб юбориб бундай ёзилади:

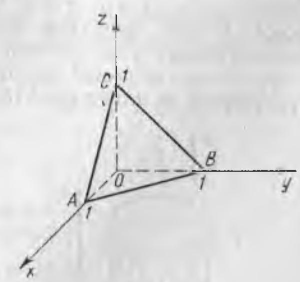
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iint\limits_\sigma d\sigma \int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz \tag{38}$$

ёки

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{39}$$

Агар V мураккаброқ соҳа бўлса, у ҳолда уни кўрсатилган кўринишдаги чекли сондаги $V_1, V_2, \ldots, V_k$ соҳаларга бўлинади ва бу соҳаларнинг ҳар бирига (39) формулани қўлланилади. Бутун соҳа бўйича интеграл эса аддитивлик хоссасига асосан V_i соҳаларнинг ҳар бири бўйича олинган интеграллар йиғиндисига тенг.

Мисол. Агар V интеграллаш соҳаси $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ текисликлар билан чегараланган пирамида бўлса, $\iiint\limits_V z\,dV$ уч каррали интегрални ҳисобланг (40- расм).



40- расм

Ечилиши. Пирамида проекцияланадиган σ юзча Oxy текисликда $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакдир. $z_{\text{кир}} = 0$, $z_{\text{чиқ}} = 1 - x - y$ бўлгани учун (38) формулага асосан

$$\iiint\limits_V z\,dV = \iint\limits_\sigma d\sigma \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz.$$

Бу ердаги интегралларни кетма- кет ҳисоблаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} = \frac{(1-x-y)^2}{2}, \quad \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy =$$

$$= -\frac{(1-x-y)^3}{6}\Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^3}{6}, \quad \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = -\frac{(1-x)^4}{24}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Шундай қилиб,

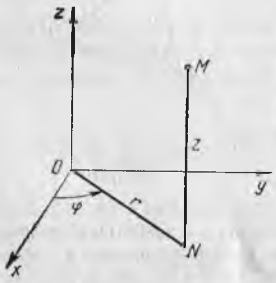
$$\iiint_V z\,dV = \frac{1}{24}$$

4. Уч каррали интегрални цилиндрик координаталарда ҳисоблаш. Декарт координаталари билан бир қаторда кўпинча цилиндрик координаталар ҳам қўлланилади. Oxy координаталар системасида M нуқтанинг Oxy текисликка проекцияси N бўлсин. M нуқтанинг фазодаги вазиятини Oxy текисликдаги N нуқтанинг r ва φ қутб координаталарини ҳамда M нуқтанинг z аппликатасини бериш билан аниқлаш мумкин (41-расм).

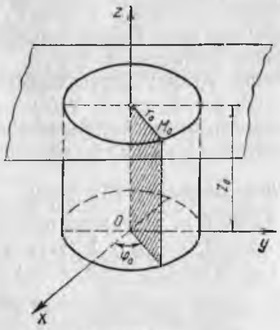
Бу учта r, φ ва z сон M нуқтанинг *цилиндрик координаталари* деб аталади. Нуқтанинг цилиндрик координаталари ўзининг x, y, z декарт координаталари билан ушбу муносабатлар орқали боғланган:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (40)$$

Декарт координаталар системасида (x_0, y_0, z_0) координатали M_0 нуқта $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ текисликларнинг кесишиш нуқтасидан иборат бўлади. Цилиндрик координаталар системасида $M_0(x_0, \varphi_0, z_0)$ нуқта қуйидаги учта сиртнинг кесишиш нуқтаси бўлади: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (42-расм). Биринчи $r = r_0$ тенгламага, равшанки, фазода r_0 радиусли ва ясовчилари Oz ўққа (цилиндр ўқи) параллел бўлган



41- расм



42- расм

тўғри доиравий цилиндр мос келиши равшан. $r_0 = 0$ бўлганда цилиндр Oz ўққа айланишини қайд қиламиз. $\varphi = \varphi_0$ тенгламага Oz ўқ орқали ўтувчи ва Oxz текислик билан φ_0 бурчак ташкил қиладиган ярим текислик мос келади. $z = z_0$ тенгламага Oxy текисликка параллел ва Oz ўқни z_0 аппликатали нуқтада кесиб ўтувчи текислик мос келади. Шундай қилиб, биз *координата сиртлари* деб аталадиган уч оила сиртлари $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$ га эга бўлдик.

$z = f(x, y)$ тенгламага фазода бирор сирт мос келади. Агар x, y ва z нинг ўрнига уларнинг цилиндрик координаталар орқали ифодаларини (40) формулалар бўйича қўйилса, у ҳолда сиртнинг цилиндрик координаталардаги тенгламаси $z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ни ҳосил қиламиз.

Уч каррали интегрални ҳисоблаш декарт координаталаридан цилиндрик координаталарга ўтилганда кўпинча жуда осонлашади. $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV$ уч каррали интегрални $Oxyz$ фазонинг V соҳаси бўйича ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин.

Ушбу (38) формула ўринли эканлигини биз биламиз:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \iint_\sigma d\sigma \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

бу ерда σ интеграллаш соҳаси V жисмнинг Oxy текисликдаги проекцияси, $g(x, y)$ ва $h(x, y)$ — кириш ва чиқиш нуқталарининг аппликаталари. σ соҳа шундай бўлсинки, бу соҳа бўйича икки каррали интегрални қутб координаталарида ҳисоблаш осонроқ бўлсин. У ҳолда (38) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \iint_\sigma d\sigma \int_{g(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган икки каррали интегрални ҳисоблаш учун икки каррали интегрални қутб координаталарида ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int_{g(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz \qquad (41)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $r_1(\varphi) = r_{\text{кир}}$, $r_2(\varphi) = r_{\text{чиқ}}$.

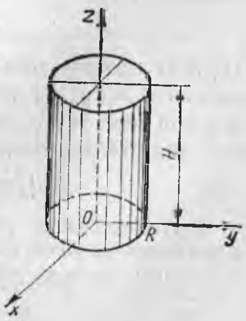
Бу эса *уч каррали интегрални цилиндрик координаталарда ҳисоблаш формуласидир.*

Мисол. Баландлиги H ва асосининг радиуси R бўлган тўғри доиравий цилиндрнинг исталган нуқтасидаги γ зичлиги бу нуқтадан цилиндр ўқигача бўлган r масофага тенг, яъни $\gamma = r$ бўлса, бу цилиндрнинг m массасини топинг.

Ечилиши. Координаталар системасини 43-расмда кўрсатилганидек танлаймиз.

V цилиндрнинг m массаси γ зичликдан олинган уч каррали интегралга тенг:

$$m = \iiint_V \gamma\,dV = \iiint_V r\,dV,$$



43- расм

бу ерда интеграллаш соҳаси V — цилиндрдир. Бу интегрални цилиндрик координаталарда ҳисоблаймиз. Цилиндрнинг Oxy текисликка проекцияси радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган доирадир: $z_{\text{кир}} = 0$; $z_{\text{чиқ}} = H$. (41) муносабатдан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$m = \iiint\limits_V r\,dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\,dr \int\limits_0^{H} z\,dz = H \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r^2\,dr = \frac{2\pi R^3 H}{3}.$$

Шундай қилиб, изланаётган масса $m = 2\pi R^3 H/3$.

5. Уч каррали интегралнинг татбиқлари. Уч каррали интегрални физика масалаларини ечишга қўлланилишининг асосида ётадиган принциплар 1-§, 6-пунктда баён қилинган икки каррали интегралнинг қўлланилиши асосида ётадиган принципларга ўхшашдир.

Масалан, массанинг фазода тақсимотига доир масалалар уч каррали интегралларга олиб келади. Бу масалалардан баъзиларини кўриб чиқамиз.

Статик моментлар, оғирлик маркази. m массали нуқтанинг Oxy текисликка нисбатан S_{xy} *статик моменти* деб, нуқтанинг массасини унинг аппликатасига кўпайтмаси $S_{xy} = mz$ аталиши маълум. Oyz ва Oxz текисликларга нисбатан мос равишда S_{yz} ва S_{xz} статик моментлар ҳам шунга ўхшаш таърифланади. Агар бир неча моддий нуқтадан иборат система берилган бўлса, у ҳолда унинг статик моменти бу системанинг ташкил этувчи моддий нуқталарнинг статик моментлари йиғиндиси сифатида аниқланади.

Энди фазода V жисм берилган ва унинг исталган нуқтадаги зичлиги бу нуқта координаталарининг функцияси бўлсин: $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Бу жисмнинг S_{xy} статик моментини ҳисоблаймиз.

V жисмни n та ΔV_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ кичик жисмларга бўламиз. Ҳар бир ΔV_i кичик жисмда ихтиёрий $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқтани танлаймиз. ΔV_i кичик жисмнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик ўзгармас ва танланган P_i нуқтадаги зичликка тенг деб ҳисоблаб, бу кичик жисмнинг Δm_i массаси учун

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$$

тақрибий ифодани ҳосил қиламиз. Ҳар бир кичик ΔV_i жисмни Δm_i массали $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқтага алмаштирамиз. Бу нуқтанинг Oxy координата текислигига нисбатан статик моменти ΔS_{xy}^i статик моментнинг тақрибий қийматини беради:

$$\Delta S_{xy}^i \approx z_i\,\Delta m_i \approx z_i\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

Бутун жисмнинг статик моменти аддитивлик хоссасига асосан жисмларнинг статик моментлари йиғиндисига тенг. Шу сабабли S_{xy} учун ушбу тақрибий тенгликни топамиз:

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^{n} z_i\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

ΔV_i кичик жисмлар нуқтага тортилади деган шартда лимитга ўтиб, статик моментнинг аниқ қийматини топамиз:

$$S_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint\limits_V z\cdot\gamma(x, y, z)\,dV.$$

Шундай қилиб,

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\,\gamma(x, y, z)\,dV. \tag{42}$$

Шунга ўхшаш, V жисмнинг Oyz ва Oxz текисликларга нисбатан статик моментлари учун қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\,\gamma(x, y, z)\,dV, \qquad S_{xz} = \iiint\limits_V y\,\gamma(x, y, z)\,dV. \tag{42'}$$

V жисм оғирлик марказининг $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ координаталари (23) тенгликларга ўхшаш ушбу тенгликлар билан аниқланади:

$$\bar{x} = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{S_{xy}}{m}, \tag{43}$$

бу ерда m — берилган V жисмнинг массаси. Масса $m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dV$ формула бўйича аниқлангани учун (42), (42′) ва (43) муносабатлардан қуйидагиларни топамиз:

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\,\gamma(x, y, z)\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\,\gamma(x, y, z)\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\,\gamma(x, y, z)\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dV} \tag{44}$$

Бир жинсли жисм учун $\gamma = \text{const}$ ва (44) формулалар ушбу кўринишни олади:

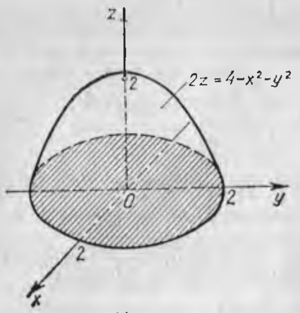
$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\,dV}{\iiint\limits_V dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\,dV}{\iiint\limits_V dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{\iiint\limits_V dV};$$

ёки $\iiint\limits_V dV = V$ бўлгани учун

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\,dV}{dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\,dV}{dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{dV}. \tag{45}$$

1-мисол. $2z = 4 - x^2 - y^2$ айланиш параболоиди ва $z = 0$ текислик билан чегараланган жисмнинг оғирлик марказини топинг (44-расм).

Ечилиши. Жисмнинг Oxz ва Oyz координата текисликларига нисбатан симметриклигига асосланиб, унинг оғирлик маркази Oz ўқда ётади деган хулосага келамиз, яъни $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. Энди оғирлик марказининг z аппликатасини топиш керак, уни (45) формула бўйича аниқлаймиз:



44- расм

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{V}.$$

Жисмнинг ҳажми $V = \iiint\limits_V dV$ ни ва статик моменти $S_{xy} = \iiint\limits_V z\,dV$ ни аниқлаймиз. Ҳисоблашларни цилиндрик координаталарда бажарамиз: $z_{\text{кир}} = 0$, $z_{\text{чиқ}} = (4 - x^2 - y^2)/2 = (4 - r^2)/2$. Oxy текисликдаги σ юзча радиуси $r = 2$ ва маркази координаталар бошида бўлган доирадир. Шу сабабли

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\,dV = \iint\limits_\sigma d\sigma \int\limits_0^{(4-r^2)/2} z\,dz = \iint\limits_\sigma \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{(4-r^2)/2} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{8}\iint\limits_\sigma (4 - r^2)^2\, d\sigma = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4 - r^2)^2\, r\,dr = \frac{8}{3}\pi;$$

$$V = \iiint\limits_V dV = \iint\limits_\sigma d\sigma \int\limits_0^{(4-r^2)/2} dz = \iint\limits_\sigma \frac{4 - r^2}{2}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4 - r^2)\, r\,dr = 4\pi.$$

Шундай қилиб,

$$\bar{z} = \frac{8\pi/3}{4\pi} = \frac{2}{3}.$$

Демак, оғирлик марказининг координаталари:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 2/3.$$

Инерция моменти. m массали моддий нуқтанинг Ox ўққа нисбатан I_x *инерция моменти* бу нуқта массасини ундан Ox ўққача бўлган масофа квадратига кўпайтмасига тенг.

$P(x, y, z)$ нуқтадан Ox ўққача бўлган масофанинг квадрати $y^2 + z^2$ га тенг, шунинг учун

$$I_x = (y^2 + z^2)\, m.$$

Oy ва Oz ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳам шунга ўхшаш аниқланади:

$$I_y = (x^2 + z^2)\, m, \quad I_z = (x^2 + y^2)\, m.$$

V жисм берилган бўлиб, унинг исталган нуқтасидаги зичлиги бу нуқта координаталарининг функцияси бўлсин: $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Бу жисмнинг координата ўқларига нисбатан инерция моментларини топамиз.

ΔV_i кичик жисмни ажратиб, унинг Ox ўққа нисбатан ΔI_x^i инерция моментини тақрибан топамиз:

$$\Delta I_x^i \approx (y_i^2 + z_i^2)\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

Инерция моментининг аддитивлик хоссасидан фойдаланиб, V жисмнинг инерция моментини тақрибий ҳисоблаймиз:

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

ΔV_i кичик жисмларнинг ҳар бири нуқтага тортилади деган шартда лимитга ўтиб, инерция моментининг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$I_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)\,\gamma(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dV.$$

Шундай қилиб,

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dV. \tag{46}$$

I_y ва I_z инерция моментлари учун шунга ўхшаш ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dV, \qquad I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dV \tag{46'}$$

2- мисол. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ текисликлар билан чегараланган ва зичлиги $\gamma = 3$ бўлган бир жинсли V пирамиданинг Oz ўққа нисбатан инерция моментини топинг (40- расм).

Ечилиши. (46′) формулаларнинг иккинчисига асосан:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x^2 + y^2)\,3\,dz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,(1 - x - y)\,dy.$$

Бироқ,

$$\int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,(1 - x - y)\,dy = \int\limits_0^{1-x} [x^2(1 - x) - x^2 y + y^2(1 - x) - y^3]\,dy =$$

$$= \left[x^2(1 - x)\,y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3(1 - x)}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} = \frac{x^2(1 - x)^2}{2} + \frac{(1 - x)^4}{12}.$$

Шунинг учун

$$I_z = 3\int\limits_0^1 \left[\frac{x^2(1 - x)^2}{2} + \frac{(1 - x)^4}{12}\right] dx = \frac{1}{10}.$$

13-§. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛ

1. Вектор майдон. IX боб, 6-§ да скаляр майдон тушунчаси киритилди ва унинг асосий хоссалари ўрганилди. Бироқ кўпчилик масалаларда вектор майдонлар билан иш кўришга тўғри келади.

Вектор майдон деб, фазонинг ёки текисликнинг ҳар бир M нуқтасига $\mathbf{\Phi}$ вектор мос қўйилган соҳасига айтилади.

$\mathbf{\Phi}$ векторнинг координата ўқларига P, Q, R проекциялари M нуқта координаталарининг функциялари бўлади:

$$P = P(x,\ y,\ z), \qquad Q = Q(x,\ y,\ z), \qquad R = R(x,\ y,\ z).$$

Шундай қилиб,

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(M) = P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}.$$

Хусусан, агар майдон текисликда берилган бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{\Phi} = P(x,\ y)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y)\,\mathbf{j}.$$

Вектор майдонга мисол сифатида тортишиш кучлари майдонини қарайлик. Агар координаталар бошига m масса жойлаштирилган бўлса, у ҳолда бу масса тортишиш кучлари майдонини ҳосил қилади, чунки фазонинг ҳар бир M нуқтасида унга жойлаштирилган бирлик массага Ньютон қонунига асосан, катталиги $\frac{\varkappa m}{|r|^2}$ га тенг ва координаталар бошига йўналган куч таъсир этади. Бу ерда $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\varkappa$ — тортишиш доимийси.

Демак,*

$$\mathbf{F} = -\frac{\varkappa m}{|\mathbf{r}|^2}\, r^0,$$

бу ерда $\mathbf{r}^0 = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|}$ — бирлик вектор (45-расм). M нуқтанинг координаталари x, y, z бўлсин. У ҳолда

$$\mathbf{r} = OM = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad |OM| = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \mathbf{r}^0 = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Демак,

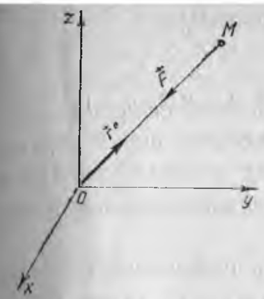
$$\mathbf{F} = \frac{-\varkappa m(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Бу ерда

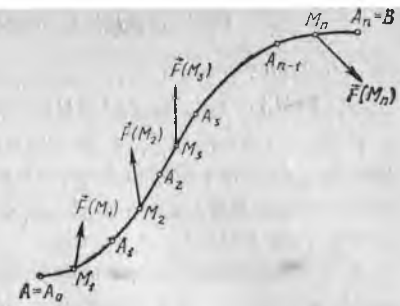
$$P = -\frac{\varkappa m x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},\ Q = -\frac{\varkappa m y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},\ R = -\frac{\varkappa m z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}.$$

---

* $\mathbf{F}$ куч $\mathbf{r}^0$ вектор йўналишига қарама-қарши йўналишга эга бўлганлиги учун бу формулада «минус» ишораси турибди.



45- расм



46- расм

2. Иш ҳақидаги масала. Эгри чизиқли интеграл. Физиканинг кўпчилик масалалари аниқ интегралнинг жуда муҳим умумлашмасига—эгри чизиқли интегралга олиб келади.

Масалан, ушбу масалани қарайлик. $\mathbf{F} = P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$ кучлар майдонида жойлашган бирор L эгри чизиқ бўйлаб бирор масса (моддий нуқта) ҳаракатланади. Бу масса A нуқтадан B нуқтага кўчганда майдон кучлари бажарган ишни аниқлаш талаб этилади.

Физикадан маълумки, агар моддий нуқта $\mathbf{F}$ ўзгармас куч таъсирида $\mathbf{l}$ вектор билан ифодаланадиган тўғри чизиқли кўчган бўлса, у ҳолда бу кучнинг бажарган E иши $\mathbf{F}$ векторнинг $\mathbf{l}$ га скаляр кўпайтмасига тенг (II боб, 5-§, 1-пунктга қаранг):

$$\dot{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}. \tag{47}$$

Умумий ҳолда $\mathbf{F}$ куч катталиги бўйича ҳам, йўналиши бўйича ҳам ўзгаради, L эгри чизиқ бўйлаб кўчиш эса тўғри чизиқли эмас, шу сабабли (47) формулани бевосита қўллаб бўлмайди. Шунинг учун бундай йўл тутамиз. L эгри чизиқни A нуқтадан B нуқтага томон йўналишда $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ бўлиш нуқталари ёрдамида n та «кичик» ёйга бўламиз. L эгри чизиқнинг A бош нуқтасини A_0 билан, B охирги нуқтасини A_n билан белгилаймиз (46-расм). $A_i\ (i=0,1,2,\ldots,n)$ нуқтанинг координаталари x_1, y_i, z_i бўлсин. Қўшни бўлиш нуқталарини тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, L эгри чизиққа ички синиқ чизиқ чизамиз. Ҳар бир $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйда ξ_i, η_i, ζ_i координатали ихтиёрий M_i нуқтани танлаймиз.

L эгри чизиқни $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ синиқ чизиқ билан алмаштирамиз, умуман айтганда, нуқтадан нуқтага ўтганида йўналиши бўйича ҳам, катталиги бўйича ҳам, ўзгарадиган $\mathbf{F}$ кучни синиқ чизиқнинг ҳар бир $A_{i-1}A_i$ бўғинида ўзгармас ва берилган $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг M_i нуқтасидаги берилган кучга тенг деб ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{F}(M_i) = P(M_i)\mathbf{i} + Q(M_i)\mathbf{j} + R(M_i)\mathbf{k}$$

ёки батафсилроқ ёзсак,

$$\mathbf{F}(M_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{k}.$$

У ҳолда кучнинг $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёй бўйлаб бажарган иши $\mathbf{F}(M_i)$ кучнинг $A_{i-1}A_i$ бўғин бўйлаб бажарган ишига тенг, бу иш эса (47) формулага асосан $\mathbf{F}(M_i)$ кучнинг $\overline{A_{i-1}A_i}$ кўчиш векторига скаляр кўпайтмасига, яъни $\mathbf{F}(M_i)\overline{A_{i-1}A_i}$ га тенг.

$\overline{A_{i-1}A_i}$ векторнинг координата ўқларига проекциялари мос равишда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ га тенг. $\mathbf{F}(M_i) \times \overline{A_{i-1}A_i}$ скаляр кўпайтмани координаталар орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{F}(M_i)\overline{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

Бу ифодаларни синиқ чизиқнинг барча бўғинлари бўйича жамлаб L эгри чизиқ бўйлаб бажарилган $\hat{E}$ ишнинг тақрибий ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\hat{E} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i)\overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i].$$

$\hat{E}$ ишнинг аниқ қиймати сифатида бу йиғиндининг $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйларнинг узунликлари нолга интилгандаги лимитини оламиз:

$$\hat{E} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i]. \quad (48)$$

Шундай қилиб, ишни ҳиссблаш маълум кўринишдаги йиғиндининг лимитини топишга олиб келади. Бу каби йиғиндиларнинг лимитларини топиш ишни ҳисоблаш билан боғлиқ бўлмаган бошқа масалаларда ҳам учрайди. Бундай йиғиндиларнинг лимитларини умумий кўринишда, у ёки бу физик масалага боғламасдан ўрганамиз.

Уч ўлчовли фазонинг бирор соҳасида L узлуксиз эгри чизиқ ($\overset{\frown}{AB}$ ёй) ва шу L эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида аниқланган

$$\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

вектор-функция берилган бўлсин,

Ушбу ишларни бажарамиз.

1. $\overset{\frown}{AB}$ ёйни A нуқтадан B нуқтага томон $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ нуқталар билан n та $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$ . . ., $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ ёйга бўламиз. Биз ёйнинг A бошини A_0 билан, B охирини эса A_n билан белгиладик. A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) нуқтанинг координаталари x_i. y_i, z_i бўлсин.

2. Ҳар бир $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйда ξ_i, η_i, ζ_i координатали ихтиёрий M_i нуқтани танлаймиз. M_i нуқтада олинган $\mathbf{\Phi} = (P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ векторнинг $\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j} + \Delta z_i\mathbf{k}$ векторга скаляр кўпайтмасини топамиз:

$$\mathbf{\Phi}(M_i)\overline{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

3. Барча бундай кўпайтмаларнинг йиғиндисини топамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i]. \quad (49)$$

Бу *интеграл йиғинди* деб аталади.

4. Агар (49) интеграл йиғиндини барча $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйларнинг узунликлари нолга интилади деган шартда лимити мавжуд бўлиб, у $\overset{\frown}{AB}$ ёйни $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйларга бўлиш усулига ҳам, уларнинг ҳар бирида M_i нуқтанинг танланишига ҳам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимит $\mathbf{\Phi} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ вектор-функциядан L эгри чизиқ бўйлаб (ёки AB ёй бўйлаб) A дан B га йўналишда олинган *эгри чизиқли интеграл* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

ёки*

$$\int_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

$Pdx + Qdy + Rdz$ интеграл остидаги ифода $\mathbf{\Phi} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ вектор билан L эгри чизиқдаги ўзгарувчи нуқта $\mathbf{r}$ радиус-вектори дифференциали $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ нинг скаляр кўпайтмасидан иборат бўлгани учун $\mathbf{\Phi} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ вектор-функциядан олинган эгри чизиқли интегрални ушбу вектор формада ёзиш мумкин:

$$\int_{L} \mathbf{\Phi}\cdot d\mathbf{r}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i]. \quad (50)$$

Бу ерда $n \to \infty$ да $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйларнинг ҳар бири нуқтага тортилади деб тушунилади.

Сўнгра

*Вектор-функциядан олинган эгри чизиқли интеграл кўпинча *координаталар бўйича эгри чизиқли интеграл* деб аталади.

$$\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$$

бўлгани учун бу тенгликнинг ўнг томонида турган йиғиндиларнинг лимити мавжуд деб фараз қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i. \tag{51}$$

Тенгликнинг ўнг томонида турган лимитларни мос равишда $P(x, y, z)\mathbf{i}$, $Q(x, y, z)\mathbf{j}$, $R(x, y, z)\mathbf{k}$ вектор-функциялардан $\breve{AB}$ ёй бўйлаб олинган эгри чизиқли интеграллар деб қараш мумкин. Шу сабабли (51) тенгликни бундай қайта ёзиш мумкин:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \int_{AB} P(x, y, z)dx + \int_{AB} Q(x, y, z)dy + \int_{AB} R(x, y, z)dz. \tag{51'}$$

Эгри чизиқли интегралнинг таърифидан кўриниб турибдики, **F** кучнинг L ёй бўйлаб бажарган иши **F** кучдан бу ёй бўйлаб олинган эгри чизиқли интегралга тенг, яъни

$$\dot{E} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz,$$

бу ерда P, Q, R — кучнинг координата ўқларига проекциялари.

Аниқ интеграл учун бўлган ҳолдаги каби **эгри чизиқли интеграл учун ҳам мавжудлик теоремаси** ўринли бўлиб, биз уни исботсиз қабул қиламиз.

L эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ тенгламалар орқали параметрик кўринишда берилган бўлсин, бу ерда $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ да узлуксиз биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлган функциялар бўлсин. У ҳолда бу эгри чизиқ бўйлаб узлуксиз бўлган ҳар қандай $\mathbf{\Phi} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ вектор-функция учун интеграл йиғиндининг L эгри чизиқ бўлинган ёйлар сони чексиз ортганда ва уларнинг ҳар бирининг узунлиги нолга интилганда лимити мавжуд бўлади.* Бу лимит L ёйни бўлиш усулига ва M_i оралиқ нуқталарнинг танланишига боғлиқ эмас.

3. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилишини кўрсатамиз.

* $\mathbf{\Phi} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ вектор функциянинг P, Q ва R проекциялари узлуксиз бўлса, бу функция узлуксиз деб аталади.

$L(\breve{AB})$ ёй $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган, шу билан бирга $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар узлуксиз ва узлуксиз биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. $\breve{AB}$ ёйнинг A бошланғич нуқтасига параметрнинг $t = \alpha$ қиймати, B охирги нуқтасига эса $t = \beta$ қиймати мос келсин ҳамда t параметр α дан β гача ўзгарганида ўзгарувчи $M(x, y, z)$ нуқта ёйни A дан B га томон чизсин.

Сўнгра $P(x, y, z)$ шу L ёй бўйлаб берилган узлуксиз функция бўлсин. $P(x, y, z)$ функция x, y, z ўзгарувчиларнинг, x, y, z эса t нинг узлуксиз функцияси бўлгани учун $P[x(t), y(t), z(t)]$ мураккаб функция $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ сегментда t нинг узлуксиз функцияси бўлади. L эгри чизиқ ва $P(x, y, z)$ функция эгри чизиқли интегралнинг мавжудлик теоремаси шартларини қаноатлантирганлиги сабабли $\int_L P(x, y, z)dx$ эгри чизиқли интеграл мавжуд ва демак, $\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$ интеграл йиғиндининг лимити ва у L ёйни бўлакларга бўлиш усулига ҳам, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ оралиқ нуқталарнинг танланишига ҳам боғлиқ эмас. $[\alpha, \beta]$ сегментни $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ нуқталар билан n та бўлакка бўламиз; бундан ташқари $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$ деб белгилаймиз. t параметрнинг бу қийматларига ёйнинг $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ нуқталари мос келади ва бу нуқталар ушбу координаталарга эгадир:

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0),$$
$$x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1), \quad z_1 = z(t_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = x(t_{n-1}), \quad y_{n-1} = y(t_{n-1}), \quad z_{n-1} = z(t_{n-1}),$$
$$x_n = x(t_n), \quad y_n = y(t_n), \quad z_n = z(t_n).$$

Бунда ёйни бўлувчи $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ нуқталар A нуқтадан B нуқтага томон йўналишда кетма-кет жойлашган.

A_{i-1} нуқтадан A_i нуқтага ўтишда x абсцисса $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$ орттирма олади. $x(t_i) - x(t_{i-1})$ айирмага чекли орттирма ҳақидаги Лагранж теоремасини татбиқ қиламиз:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i, \text{ бунда } \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \text{ ва } t_{i-1} < \tau_i < t_i.$$

Параметрнинг $t = \tau_i$ қийматига $\breve{A_{i-1}A_i}$ ёйда ётувчи $\xi_i = x(\tau_i), \tau_i = y(\tau_i)$, $\zeta_i = z(\tau_i)$ координатали M_i нуқта мос келади. L ёйни юқоридагича бўлакларга бўлиш учун ва юқорида танланган M_i нуқталар учун

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]\, x'(\tau_i)\Delta t_i$$

интеграл йиғиндини тузамиз ва $[\alpha, \beta]$ сегментнинг бўлиниш қадами λ нолга интилади деган шартда лимитга ўтамиз. Бунда $\breve{A_{i-1}A_i}$ ёйларнинг узунликлари нолга интилишини исботлаш мумкин ва эгри чизиқли интегралнинг таърифига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_L P(x, y, z)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P\,[x(\tau_i),\ y(\tau_i), z(\tau_i)\,]\, x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонида турган йиғинди $[\alpha, \beta]$ сегментда берилган битта t ўзгарувчининг $P\,[x(t), y(t), z(t)\,]\,x'(t)$ узлуксиз функцияси учун интеграл йиғиндидир. Унинг лимити ушбу аниқ интегралга тенг:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P\,[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\,]\, x'(\tau_i)\, \Delta t_i = \int_\alpha^\beta P\,[\,x(t), y(t), z(t)\,]\, x'(t) dt.$$

Шундай қилиб,

$$\int_L P(x, y, z)\, dx = \int_\alpha^\beta P\,[x(t), y(t), z(t)\,]\, x'(t)\, dt \tag{52}$$

Бу изланаётган формула бўлиб, у эгри чизиқли интегрални ҳисоблашни аниқ интегрални ҳисоблашга олиб келиш имконини беради.* Шундай қилиб, $\int_L P(x, y, z)\, dx$ эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш учун L эгри чизиқни $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ параметрик тенгламалар билан бериш ва $P(x, y, z)dx$ интеграл остидаги ифодада x, y ва z ўзгарувчиларни уларнинг t параметр орқали ифодалари билан, dx ни эса $x = x(t)$ функциянинг дифференциали билан (яъни $dx = x'(t)\, dt$ деб олиш) алмаштириш лозим. Ҳосил бўлган аниқ интегралда қуйи чегара сифатида параметрнинг ёй бошига мос қийматини, юқори чегара сифатида эса параметрнинг ёй охирига мос қийматини олиш керак.

Шунга ўхшаш ушбуларни топамиз:

$$\int_L Q(x, y, z)\, dy = \int_\alpha^\beta Q\,[\,(x(t), y(t), z(t)\,]\, y'(t)\, dt, \tag{52'}$$

$$\int_L R(x, y, z)\, dz = \int_\alpha^\beta R\,[x(t), y(t), z(t)\,]\, z'(t)\, dt. \tag{52''}$$

(52), (52′) ва (52″) ни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_L P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P\,[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t) + Q\,[x(t), y(t), z(t)\,]\, y'(t) +$$

$$+ R\,[x(t), y(t), z(t)\,]\, z'(t)\,\}\, dt. \tag{53}$$

*Биз L эгри чизиқдаги берилган йўналишга t параметрнинг α дан β (бу ерда $\alpha<\beta$) гача ўзгариши мос келади деб ҳисобладик. (52) формула $\alpha>\beta$ бўлган ҳолда ҳам тўғридир.

Агар хусусан L ёй $x = x(t)$, $y = y(t)$. $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ параметрик тенгламалар билан берилган ясси эгри чизиқ, $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ эса L эгри чизиқда аниқланган узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда $\mathbf{\Phi} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ вектор-функциядан бу ясси эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\int_L P(x, y)\, dy + Q(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta \{P\,[x(t), y(t)]\, x'(t) +$$

$$+ Q\,[x(t), y(t)]\, y'(t)\}\, dt. \tag{54}$$

Ясси эгри чизиқ $y = \varphi(x)$ тенглама билан берилган ҳолда эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш формуласини (54) формуладан ҳосил қилиш осон. Нуқта L эгри чизиқ бўйлаб A нуқтадан B нуқтага кўчганида x катталик a дан b гача ўзгарсин. Бу ҳолда x ни параметр сифатида олиб, L эгри чизиқнинг ушбу параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз: $x = x$, $y = \varphi(x)$, бунда x параметр a дан b гача ўзгаради. (54) формулани қўлланиб, $x' = \frac{dx}{dx} = 1$ эканини ҳисобга олсак,

$$\int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)\,]\, dx. \tag{55}$$

Хусусан

$$\int_L P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, \varphi(x))\, dx. \tag{56}$$

Пировардида эгри чизиқли интегралнинг деярли равшан ушбу иккита хоссасини келтирамиз.

1°. *Эгри чизиқли интегралнинг қиймати L эгри чизиқни босиб ўтиладиган йўналишга боғлиқ. Агар шу эгри чизиқни A нуқтадан B нуқтага томон эмас, балки тескари йўналишда, B дан A томон ўтилса, интегралнинг ишораси қарама-қаршисига алмашинади, яъни**

$$\int_{AB} = -\int_{BA}.$$

Бу хосса эгри чизиқ бўйлаб юриш йўналиши ўзгарганида интеграл йиғиндига кирувчи Δx_i, Δy_i, Δz_i орттирмаларнинг ишоралари қарама-қарши ишораларга алмашиниши билан тушунтирилади.

2°. Аддитивлик хоссаси. *Агар L эгри чизиқ бир неча L_1, $L_2, \ldots, L_s$ эгри чизиқлардан иборат ва бу эгри чизиқларнинг ҳар бирида эгри чизиқли интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда бутун L эгри чизиқ бўйлаб ҳам интеграл мавжуд ва у бу бўлакларнинг ҳар бири бўйлаб интеграллар йиғиндисига тенг, яъни*

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \ldots + \int_{L_s}.$$

* Ёзув қисқароқ бўлиши учун баъзан интеграл остидаги ифодани ёзиб ўтирмаймиз.

Бунда барча эгри чизиқлар бир йўналишда ўтилади деб фараз қилинади.

1- мисол. $\int\limits_{AB} 2\,xydx + y^2\,dy + z^2\,dz$ эгри чизиқли интегрални ҳисобланг, бу ерда AB ушбу $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$ винт чизиқнинг $A(1, 0, 0)$ нуқтадан $B(1, 0, 4\pi)$ нуқтагача бўлган бир ўрами.

Ечилиши. $\overset{\frown}{AB}$ ёй бўйлаб t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради. (53) формуладан фойдаланиб ва $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = 2$ ни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_{AB} 2\,xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz = \int\limits_0^{2\pi} [2\cos t\ \sin t\,(-\sin t) + \sin^2 t\cos t + 4\,t^2\cdot 2]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t\cos t + 8\,t^2)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{8\,t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi^3.$$

2- мисол. $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\,dx + 2\,xy\,dy$ эгри чизиқли интегрални $y = x^3$ куб параболанинг $A(1;1)$ нуқтадан $B(2;8)$ нуқтагача бўлган ёйи бўйлаб ҳисобланг.

Ечилиши. (55) формулага асосан:

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\,dx + 2\,xy\,dy = \int\limits_1^2 \{[x^2 + (x^3)^2] + 2\,x\cdot x^3\cdot 3\,x^2\}\,dx = \int\limits_1^2 (x^2 + 7\,x^6)\,dx =$$

$$= 129\,\frac{1}{3}.$$

Агар $\mathbf{\Phi} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ вектор- функциянинг $\int \mathbf{\Phi}\,d\mathbf{r}$ эгри чизиқли интеграли L ёпиқ контур бўйлаб олинса, у ҳолда у $\mathbf{\Phi}$ вектор майдоннинг L ёпиқ контур бўйича *циркуляцияси* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\oint\limits_L \Phi\,d\mathbf{r} \quad \text{ёки} \quad \oint\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

3- мисол. $\mathbf{\Phi} = x\,\mathbf{i} + 2\,y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ вектор майдоннинг $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрни $z = 1$ текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган L айлана бўйлаб циркуляциясини ҳисобланг.

Ечилиши. L айлананинг параметрик тенгламаларини ёзамиз.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

$x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = 0$ бўлгани учун (53) формулага асосан:

$$\oint\limits_L (xdx + 2ydy + zdz) = \int\limits_0^{2\pi} [\cos t\ \ (-\sin t)\ + 2\sin t\ \cos t + 0]\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

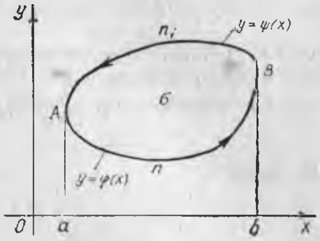
Шундай қилиб, $\mathbf{\Phi} = x\mathbf{i} + 2\,y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ векторнинг L айлана бўйлаб циркуляцияси нолга тенг.

4. Остроградский — Грин формуласи. *Oxy* текисликда координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар билан иккитадан ортиқ бўлмаган нуқталарда кесишувчи эгри чизиқ билан чегараланган σ соҳани қарайлик (47- расм). Сўнгра $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ ўзларининг $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial x}$ хусу-

сий ҳосилалари билан биргаликда σ соҳада узлуксиз функциялар бўлсин. У ҳолда *Остроградский — Грин* формуласи* деб аталувчи ушбу формула ўринли:

$$\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \oint\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (57)$$

Бу ерда икки каррали интеграл σ соҳа бўйича, эгри чизиқли интеграл эса σ соҳани чегаралаб турган L ёпиқ контур бўйича олинади. Бунда L контур мусбат йўналишда ўтилади, яъни у бўйлаб ҳаракатда σ соҳа чап томонда қолади (47- расм).



47- расм

Бу формулани келтириб чиқариш учун аввал $\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma$ икки каррали интегрални қараймиз. $y = \varphi(x)$ ифода $\overset{\frown}{AnB}$ ёйнинг тенгламаси, $y = \psi(x)$ эса $\overset{\frown}{AmB}$ ёйнинг тенгламаси бўлсин. У ҳолда икки каррали интегрални ҳисоблаш формуласига асосан

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$

ни ҳосил қиламиз. $P(x, y)$ функция x ўзгармас бўлганда $\frac{\partial P}{\partial y}$ учун бошланғич функциялардан бири бўлгани учун:

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = P(x, y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)).$$

Шу сабабли

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma = \int\limits_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))]\,dx = \int\limits_a^b P(x, \psi(x))\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x, \varphi(x))\,dx.$$

$\int\limits_a^b P(x, \varphi(x))\,dx$ интеграл $\overset{\frown}{AnB}$ ёй бўйлаб олинган $\int\limits_{\overset{\frown}{AnB}} P(x, y)\,dx$ эгри чизиқли интегралга тенг, бу (56) формуладан келиб чиқади:

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi(x))\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AnB}} P(x, y)\,dx.$$

* М. В. Остроградский (1801—1861) буюк рус математиги ва механиги, Д. Грин (1793—1841) инглиз математиги ва физиги.

Шунга ўхшаш,

$$\int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = \int_{\overset{\frown}{AmB}} P(x, y)\,dx.$$

Демак,

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_{\overset{\frown}{AmB}} P(x, y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{AnB}} P(x, y)\,dx.$$

$\overset{\frown}{AmB}$ ёй бўйлаб йўналишни қарама-қарши йўналишга ўзгартирсак, эгри чизиқли интегралнинг 1° хоссасига асосан:

$$\int_{\overset{\frown}{AmB}} P(x, y)\,dx = -\int_{\overset{\frown}{BmA}} P(x, y)\,dx.$$

Шу сабабли

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\left(\int_{\overset{\frown}{BmA}} P(x, y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{AnB}} P(x, y)\,dx\right).$$

$\overset{\frown}{BmA}$ ва $\overset{\frown}{AnB}$ ёйлар биргаликда σ соҳанинг мусбат йўналишда ўтиладиган L чегарасини беради, шунинг учун аддитивлик хоссасини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{\overset{\frown}{BmA}} P(x, y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{AnB}} P(x, y)\,dx = \oint_L P(x, y)\,dx.$$

Демак,

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\oint_L P(x, y)\,dx. \tag{58}$$

Ушбу тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади:

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_L Q(x, y)\,dy. \tag{59}$$

(59) тенгликдан (58) тенгликни айириб, Остроградский—Грин формуласини ҳосил қиламиз:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Бу формула L контурни координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар кўпи билан иккита нуқтада кесиб ўтади, деган фаразда келтириб чиқарилди, бироқ мазкур шарт бажарилмаган ҳолда (масалан, 24 - расмда тасвирланган σ соҳа учун) ҳам тўғрилигича қолади.

Остроградский — Грин формуласини ясси соҳанинг юзини эгри чизиқли интеграл ёрдамида ҳисоблашга татбиқ этамиз. $P(x, y) \equiv 0$ ва $Q(x, y) \equiv x$ функцияларни қарайлик. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ бўлгани учун (57) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_\sigma (1-0)\,d\sigma = \oint 0\cdot dx + x dy \quad \text{ёки} \quad \iint_\sigma d\sigma = \oint x dy.$$

Бироқ $\iint_\sigma d\sigma$ интеграл сон жиҳатидан σ соҳанинг юзига тенг. Шу сабабли

$$\sigma = \oint_L x dy. \tag{60}$$

Шунга ўхшаш, $P \equiv -y$, $Q \equiv 0$ деб олиб, соҳанинг юзини эгри чизиқли интеграл ёрдамида ҳисоблаш учун яна ушбу формулани ҳосил қилиш мумкин:

$$\sigma = -\oint_L y dx. \tag{60'}$$

Бу формулалар σ ясси соҳанинг юзини эгри чизиқли интеграл ёрдамида ҳисоблаш имконини беради.

Мисол. Параметрик тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}$$

бўлган эллипс билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

Ечилиши. Агар эллипсни мусбат йўналишда айланиб чиқиладиган бўлса, у ҳолда t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради. (60) формуладан ва эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma = \oint x dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \; b\cos t dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

5. Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқмаслиги. $\Phi = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ вектор майдон берилган бўлсин. Бундан кейин биз P ва Q функциялар Oxy текисликнинг бирор G соҳасида ўзларининг $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлсин деб фараз қиламиз.

G соҳада иккита ихтиёрий A ва B нуқтани қараймиз. Бу нуқталарни G соҳада ётувчи турли чизиқлар билан туташтириш мумкин ва улар бўйлаб $\int_{AB} P dx + Q dy$ эгри чизиқли интегралнинг қийматлари, умуман айтганда, турлича бўлади. Масалан, $\int_L (x+y)\,dx + 2xy\,dy$ эгри чизиқли интегрални ҳамда иккита $A(1;\ 1)$ ва $B(2;\ 4)$ нуқтани қарайлик. Бу интегрални, дастлаб A ва B нуқталарни туташтирувчи $y = 3x - 2$ тўғри чизиқнинг кесмаси l_1 бўйлаб, сўнгра уни шу нуқталарни туташтирувчи $y = x^2$ параболанинг l_2 ёйи бўйлаб ҳисоблаймиз. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

а) l_1 кесма бўйлаб:

$$\int_{l_1} (x+y)\,dx + 2xy\,dy = \int_1^2 [x + (3x-2) + 2x(3x-2)\cdot 3]\,dx =$$

$$= \int_1^2 (18x^2 - 8x - 2)\,dx = 28;$$

б) параболанинг l_2 ёйи бўйлаб:

$$\int\limits_{l_2} (x + y)\, dx + 2xydy = \int\limits_1^2 \left[x + x^2 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x\right] dx =$$

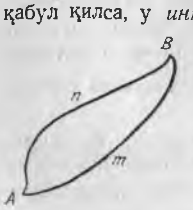
$$= \int\limits_1^2 (4x^4 + x^2 + x)\, dx = 28\frac{19}{30}.$$

Шундай қилиб, кўриб турибмизки, $\int\limits_L (x + y)\, dx + 2xydy$ эгри чизиқли интегралнинг қийматлари интеграллаш йўлига, яъни A ва B нуқталарни туташтирувчи чизиқнинг кўринишига боғлиқ,

Аксинча, A (1, 1) ва B (2, 4) нуқталарни туташтирувчи ўша l_1 ва l_2 чизиқлар бўйлаб олинган $\int\limits_L (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$ эгри чизиқли интеграл бир хил қийматга эга эканлигини ва у $33\frac{1}{3}$ га тенглигини текшириш осон.

Таҳлил қилинган бу мисоллар кўрсатадики, берилган иккита нуқтани туташтирувчи турли йўллар бўйича ҳисоблаган эгри чизиқли интеграллар бир ҳолларда ўзаро турлича, бошқа ҳолларда эса бир хил қиймат қабул қилади.

A ва B берилган G соҳанинг ихтиёрий иккита нуқтаси бўлсин. G соҳада ётувчи ҳамда A ва B нуқталарни туташтирувчи турли эгри чизиқларни қараймиз. Агар бу йўлларнинг исталган бири орқали олинган $\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ эгри чизиқли интеграл бир хил қиймат қабул қилса, у *интеграллаш йўлига боғлиқмас* деб аталади.



48- расм

Навбатдаги иккита теоремада $\int\limits_L Pdx + Qdy$ эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқмаслик шартлари келтирилади.

1-теорема. *Бирор G соҳа бўйича олинган $\int\limits_k Pdx + Qdy$ эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳада ётувчи исталган ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Етарлилиги. G соҳада ётувчи исталган ёпиқ контур бўйича олинган $\int\limits_L Pdx + Qdy$ интеграл нолга тенг бўлсин. Бу интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмаслигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, A ва B мазкур G соҳага тегишли иккита нуқта бўлсин. Бу нуқталарни G соҳада ётувчи иккита турли, ихтиёрий танланган $\overset{\frown}{AmB}$ ва $\overset{\frown}{AnB}$ эгри чизиқлар билан туташтирамиз (48-расм). $\int\limits_{AmB} = \int\limits_{AnB}$ эканини исбот қиламиз. $\overset{\frown}{AmB}$ ва $\overset{\frown}{AnB}$ ёйлар $AmBnA$ ёпиқ контурни ҳосил қилади. Эгри чизиқли интегралларнинг хоссасидан фойдаланиб,

$$\oint\limits_{AmBnA} = \int\limits_{\underbrace{}_{AmB}} + \int\limits_{\underbrace{}_{AnA}} = \int\limits_{\underbrace{}_{AmB}} - \int\limits_{\underbrace{}_{AnB}}$$

ни ҳосил қиламиз, чунки $\int\limits_{BnA} = -\int\limits_{AnB}$. Бироқ шартга кўра ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл сифатида $\oint\limits_{AmBnA} = 0$. Демак, $\int\limits_{AmB} - \int\limits_{AnB} = 0$ ёки $\int\limits_{AmB} = \int\limits_{AnB}$. Шундай қилиб, эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас.

Зарурийлиги. G соҳада $\int\limits_L P\, dx + Q\, dy$ эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмас бўлсин. Бу соҳада ётувчи исталган ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенглигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан хам, G соҳада ётувчи ихтиёрий ёпиқ контурни қарайлик ва унда ихтиёрий иккита A ва B нуқтани олайлик (48-расмга қаранг). У ҳолда

$$\oint\limits_{AmBnA} = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = \int\limits_{AmB} - \int\limits_{AnB} = 0,$$

чунки шартга кўра $\int\limits_{\underbrace{}_{AmB}} = \int\limits_{AnB}$. Демак, G соҳада ётувчи исталган ёпиқ контур бўйича интеграл нолга тенг.

Ушбу теорема эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигининг амалда фойдаланиш учун қулай бўлган шартларини беради.

2-теорема. *$\int\limits_L P\, dx + Q\, dy$ эгри чизиқли интеграл бир боғламли* G соҳада интеграллаш йўлига боғлиқмас бўлиши учун бу соҳанинг ҳар бир нуқтасида*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{61}$$

шартнинг бажарилиши зарур ва кифоядир.

Исботи. Етарлилиги. G соҳада $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлсин. G соҳада ётувчи исталган L ёпиқ контур бўйича олинган $\int\limits_L P\, dx + Q\, dy$ эгри чизиқли интеграл нолга тенглигини кўрсатамиз.

L контур билан чегараланган σ юзчани қарайлик, G соҳа бир боғламли бўлгани учун σ юзча бутунисн бу соҳага тегишли. Остроградский — Грин формуласига асосан $\int\limits_L P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$. Бироқ G соҳада, хусусан σ юзчада $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Шунинг учун $\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0$ ва, демак, $\oint\limits_L P\, dx + Q\, dy = 0$. Шундай қилиб G соҳадаги исталган L ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл нолга тенг. Биринчи теоремага асосан бу эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас деб хулоса чиқарамиз.

---

* Бир боғламли соҳа таърифини IX боб, 2-§, 3-пунктдан қаранг.

З а р у р и й л и г и. $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл бирор G соҳада интеграллаш йўлига боғлиқмас бўлсин. Бу соҳанинг барча нуқталарида $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлишини кўрсатамиз.

Аксини фараз қиламиз, яъни мазкур соҳанинг бирор $P_0(x_0; y_0)$ нуқтасида $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{P_0} \neq \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{P_0}$ бўлсин. Аниқлик учун $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{P_0} > 0$ бўлсин. $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигига асосан $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ узлуксиз функция бўлади. Демак, P_0 нуқта атрофида G соҳага тегишли шундай доира чизиш мумкинки, унинг барча нуқталарида $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ айирма P_0 нуқтадаги каби мусбат бўлади. σ доирага Остроградский — Грин формуласини қўллаймиз:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

бу ерда L — шу σ доиранинг чегараси. σ доиранинг барча нуқталарида $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ бўлгани учун икки каррали интегралнинг 3^0 хоссасига асосан $\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma > 0$. Демак, $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy > 0$. Шундай қилиб, σ доиранинг L чегараси бўйича олинган икки каррали интеграл нолга тенг эмас. Бу эса интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқмаслигига зиддир. Бу зиддиятлик эса G соҳанинг барча нуқталарида $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ тенглик ўринли эканлигини исботлайди.

1-мисол. $\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dx + 2\,xy\,dy$ эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмас, чунки бу интеграл учун 2-теореманинг шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, бу ерда $P = x^2 + y^2, Q = 2\,xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\,y$ ва демак, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2-мисол. $\int\limits_L (x + y)\,dx + 2\,x\,y\,dy$ эгри чизиқли интегрални қарайлик. Бу интеграл интеграллаш йўлига боғлиқлигини биз юқорида кўрган эдик (96-бетга қаранг) Ҳозир исботланган теорема ҳам шуни тасдиқлайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$P = x + y, \quad Q = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3-мисол. $\Phi = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$ ясси вектор майдонни ва $\int \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ эгри чизиқли интегрални қараймиз. Бу ерда $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$. Координаталар бошидан ташқари бутун Oxy текисликда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шарт бажарилади. $O\,(0,\ 0)$ нуқтада P ва Q функциялар ҳам, уларнинг $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial x}$ хусусий ҳосилалари ҳам аниқланмаган.

Радиуси бир бирлик ва маркази координаталар бошида бўлган L айланани қарайлик. Бу айлана бўйлаб олинган эгри чизиқли интеграл нолга тенг эмаслигини исботлаймиз.

Ҳақиқатдан ҳам L айлананинг параметрик тенгламалари $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ бўлгани учун эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш қоидасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\oint\limits_L \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t\,(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right] dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Шундай қилиб, бу соҳанинг ҳар бир нуқтасида $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шарт бажарилишига қарамасдан, L ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл нолга тенг бўлиб чиқди.

Келиб чиққан бу туюлма зиддиятлилик Oxy текислик $O\,(0, 0)$ нуқтани чиқарилганидан сўнг бир боғламли бўлмаслиги билан тушунтирилади.

6. Функцияни унинг тўла дифференциали бўйича излаш. Ушбу $P\,(x, y)\,dx + Q\,(x, y)\,dy$ дифференциал ифода берилган, шу билан бирга P ва Q функциялар бутун Oxy текисликда ёки бирор бир боғламли G соҳада ўзларининг $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial x}$ хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлсин. Энг аввало берилган $P\,dx + Q\,dy$ дифференциал ифода қандай шартларда бирор функциянинг тўла дифференциали бўлишини аниқлаймиз.

Теорема. *$P\,dx + Q\,dy$ дифференциал ифода бир боғламли G соҳада бирор $U = U(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлиши учун G соҳада (61) шарт:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

нинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

И с б о т и. З а р у р и й л и г и. Агар $P\,dx + Q\,dy$ тўла дифференциал бўлса, у ҳолда шундай $U\,(x,y)$ функция мавжудки, унинг учун

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy$$

бўлади. Демак, $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Биринчи тенгликни y бўйича, иккинчи тенгликни эса x бўйича дифференциаллаб, $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ни ҳосил қиламиз. Иккинчи аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right.$ ва $\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right.$ нинг узлуксизлигига асосан) улар бир-бирига тенг, яъни

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}. \quad \text{Демак,} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Етарлилиги. G соҳада (61) муносабат бажарилсин. Шундай $U(x, y)$ функция мавжудки, унинг учун $dU = P\,dx + Q\,dy$ ёки шунинг ўзи $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ ва $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ бўлишини кўрсатамиз. (61) шартдан (олдинги пункт, 2-теоремага қаранг). $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмасдан, балки A бошлангич нуқта ва B охирги нуқтага боғлиқ бўлиши келиб чиқади. Агар A нуқта тайинланган бўлса, у ҳолда эгри чизиқли интегралнинг қиймати фақат B нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлади, яъни интеграл B нуқта координаталарининг функциясидир, x_0, y_0 мазкур A нуқтанинг координаталари, x ва y эса B нуқтанинг координаталари бўлсин. $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$ орқали $A_0(x_0, y_0)$ ва $B(x, y)$ нуқталарни туташтирувчи ихтиёрий эгри чизиқ бўйлаб олинган эгри чизиқли интегрални белгилаймиз. Бу интеграл x ва y нинг функцияси бўлиб, уни $U(x, y)$ орқали белгилаймиз:

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

G соҳанинг ҳар бир нуқтасида бу функциянинг тўла дифференциали $P\,dx + Q\,dy$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун G соҳанинг исталган нуқтасида $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ тенгликлар ўринли бўлишини кўрсатиш кифоядир. $B(x, y)$ — қаралаётган G соҳанинг ихтиёрий тайинланган нуқтаси бўлсин. $U(x, y)$ функциядан B нуқтада x бўйича олинган хусусий ҳосилани топамиз. y ни ўзгармас қилиб сақлаб, B нуқтадан $x + \Delta x$ координатали B_1 нуқтага ўтамиз (49-расм). $U(x + \Delta x, y)$ функциянинг B_1 нуқтадаги қиймати A нуқтани B_1 нуқта билан туташтирувчи исталган йўл бўйлаб олинган эгри чизиқли интегралнинг қийматига тенг, яъни

$$U(x + \Delta x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

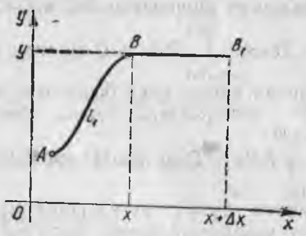
$U(x, y)$ функциянинг B нуқтадан B_1 нуқтага ўтилгандаги $\Delta_x U$ хусусий орттирмаси қуйидагига тенг:

$$\Delta_x U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}.$$

Эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмагани учун бу тенгликдаги эгри чизиқли интегралларни ҳисоблашда ихтиёрий йўлларни танлаш мумкин. A ва B нуқталарни туташтирувчи йўл сифатида G соҳада ётувчи ихтиёрий l_1 эгри чизиқни, A ва B_1 нуқталарни туташтирувчи йўл сифатида эса l_1 эгри чизиқ ва BB_1 кесмани қараймиз (49-расм). У ҳолда

$$\Delta_x U = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} = \int\limits_{ABB_1} - \int\limits_{AB} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BB_1} - \int\limits_{AB} = \int\limits_{BB_1} P\,dx + Q\,dy. \tag{62}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган эгри чизиқли интегрални аниқ интеграл орқали ифодалаш осон. Бунинг учун BB_1 кесманинг параметрик тенгламаларини ёзамиз: $x = t$, $y = y$, бунда t параметр x дан $x + \Delta x$ гача бўлган чегарада ўзгаради, y эса ўзгармас. $dx = dt$, $dy = 0$ бўлгани учун эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш қоидасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:



49- расм

$$\int\limits_{BB_1} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

Шундай қилиб,

$$\Delta_x U = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

$P(t, y)$ ифода y ўзгармас бўлганда битта t ўзгарувчининг функцияси бўлганлигини эътиборга олиб, сўнгги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз:

$$\Delta_x U = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt = P(\bar{x}, y)\,\Delta x$$

бу ерда $\bar{x}$ катталик x ва $x + \Delta x$ орасида ётади. $\Delta_x U$ ни Δx га бўлиб ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб, хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\bar{x}, y).$$

$\Delta x \to 0$ да $\bar{x}$ катталик x га интилади. $P(x, y)$ функциянинг узлуксизлигига асосан қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\bar{x} \to x} P(\bar{x}, y) = P(x, y).$$

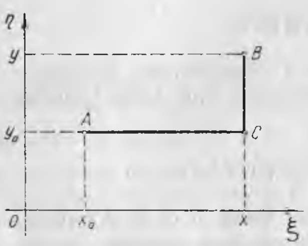
Шундай қилиб, B нуқтада $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x\,y)$ га эгамиз. Шу нуқтада $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ эканлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади. $B(x, y)$ ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун G соҳанинг исталган нуқтаси учун $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ га эгамиз ва, демак, $dU = P\,dx + Q\,dy$.

Шундай қилиб, $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл тўла дифференциали $P\,dx + Q\,dy$ га тенг бўлган функциядир. Шу билан теорема исботланди.

Энди ушбу таърифни киритамиз. Тўла дифференциали $P\,dx + Q\,dy$ дифференциал ифодага тенг бўлган $U(x, y)$ функция бу ифоданинг *бошланғич функцияси* деб аталади.

Демак, $\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл $P\,dx + Q\,dy$ дифференциал ифода учун бошланғич функция бўлади. Эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмагани сабабли $U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$ бошланғич функцияни топишда (x_0, y_0) ва (x, y) нуқталарни туташтирувчи исталган чизиқни олиш мумкин. (x, y) нуқтанинг координаталарини интеграллаш ўзгарувчилар билан аралаштирмаслик учун интеграллаш ўзгарувчиларини ξ ва η орқали белгилаймиз. У ҳолда $U(x, y)$ учун ифодани бундай қайта ёзиш мумкин:

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta. \tag{63}$$



50- расм

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун интеграллаш йўли сифатида AC ва CB томонлари координата ўқларига мос равишда параллел бўлган ACB синиқ чизиқни олиш мақсадга мувофиқдир (50-расм). У ҳолда $\int\limits_{ACB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$. AC кесма тенгламасини бундай ёзиш мумкин: $\xi = t, \eta = y_0$, бунда t параметр x_0 дан x гача ўзгаради. AC кесма бўйича интеграллашда $\int\limits_{AC} Q(\xi, \eta)\, d\eta$ интеграл нолга тенг, чунки бу кесма бўйлаб η ўзгармас ва демак, $d\eta = 0$. Шунинг учун

$$\int\limits_{AC} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt.$$

CB кесманинг тенгламалари бундай: $\xi = x$, $\eta = t$, бунда t параметр y_0 дан y гача ўзгаради. Бу кесма бўйлаб ξ ўзгармас бўлганлиги учун $d\xi = 0$. Шунинг учун

$$\int\limits_{CB} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt.$$

Шундай қилиб,

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt. \tag{64}$$

$U(x, y)$ бирор дифференциал ифода учун бошланғич функция бўлса, $U(x, y) + C$ ҳам бошланғич функция бўлиши равшандир. Исталган бошланғич функция $U(x, y) + C$ кўринишда ифодаланишини исботлаш мумкин.

Мисол. $(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$ дифференциал ифода учун бошланғич функцияни топинг.

Ечилиши. Бу ерда $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = 2xy$. Сўнгра $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, демак, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шарт бутун Oxy текисликда бажарилади. У ҳолда $U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} (\xi^2 + \eta^2)\, d\xi + 2\xi\eta\, d\eta$. Бошланғич (x_0, y_0) нуқта сифатида координаталар бошини оламиз. У ҳолда (64) формулага асосан:

$$U(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (\xi^2 + \eta^2)\, d\xi + 2\xi\eta\, d\eta = \int\limits_{0}^{x} (t^2 + 0^2)\, dt + \int\limits_{0}^{y} 2xt\, dt = \frac{x^3}{3} + xy^2.$$

Шундай қилиб, бошланғич функциялардан бири $U = \frac{x^3}{3} + xy^2$ дир.

$P\,dx + Q\,dy$ ифода

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy \tag{65}$$

бошланғич функцияга эга бўлсин. $\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интегрални қараймиз, бу ерда $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ интеграллаш йўлининг мос равишда бошланғич ва охирги нуқталари. Равшанки,

$$\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_0, y_0)} + \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}.$$

Бироқ

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = U(x_1, y_1), \qquad \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2)$$

ва, демак,

$$\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P\,dx + Q\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \tag{66}$$

Шундай қилиб, агар $P\,dx + Q\,dy$ дифференциал ифода бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда (66) эгри чизиқли интеграл бошланғич функциянинг интеграллаш йўлининг бошланғич ва охирги нуқталаридаги қийматлари айирмасига тенг. (66) формула аниқ интеграл учун Ньютон — Лейбниц формуласига ўхшашдир.

7. Ёй узунлиги бўйича эгри чизиқли интеграл. Олдинги пунктда биз вектор-функциядан олинган эгри чизиқли интегрални (координаталар бўйича эгри чизиқли интегрални) кўриб чиқдик. Бироқ баъзи масалалар бошқа турдаги эгри чизиқли интегралга олиб келади. Oxy текисликда узунлиги l бўлган $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқни қарайлик. Бу эгри чизиқ бўйлаб $\gamma = f(M) = f(x, y)$ чизиқли зичлик билан масса тақсимланган бўлсин. Эгри чизиқнинг m массасини аниқлаймиз. Бунинг учун $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқни $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ бўлиниш нуқталари ёрдамида n та бўлакка бўламиз ва бир хиллик бўлиши учун A ва B нуқталарни мос равишда A_0 ва A_n орқали белгилаймиз. Δm_i орқали узунлиги Δl_i бўлган $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг массасини белгилаймиз. Равшанки, $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг массасини тақрибан ҳисоблаймиз. $M_i(x_i, y_i)$ шу $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик M_i нуқтадаги зичлик билан бир хил деб ҳисоблаб массанинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta l_i = f(x_i, y_i)\,\Delta l_i$. Буларни жамлаб, m массанинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta l_i. \tag{67}$$

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг аниқ қиймати сифатида (67) йиғиндининг барча $\Delta l_i \to 0$ даги лимитини қабул қиламиз. Шундай қилиб,

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)\,\Delta l_i. \tag{68}$$

Бу турдаги йиғиндилар ва уларнинг лимитларига бошқа масалалар ҳам олиб келади. Келтирилган масаланинг конкрет маъносига эътибор қилмасдан $\overset{\frown}{AB}$ ёй нуқталарида аниқланган $f(x, y)$ узлуксиз функцияни қараймиз. Бу функция учун тузилган (67) кўринишдаги йиғинди интеграл йиғинди деб аталади. (67) интеграл йиғиндининг барча $\Delta l_i \to 0$ шартидаги лимити $f(x, y)$ функциядан $\overset{\frown}{AB}$ *ёйнинг узунлиги бўйича олинган эгри чизиқли интеграл* деб аталади ва $\int_{AB} f(M)\,dl$ ёки $\int_{AB} f(x, y)\,dl$ символи билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta l_i.$$

Шундай қилиб, ёйнинг массаси зичликдан бу ёйнинг узунлиги бўйича олинган эгри чизиқли интегралга тенг:

$$m = \int_{AB} f(x, y)\,dl. \tag{69}$$

Қуйидагига эътибор бериш лозим: ёйнинг узунлиги бўйича эгри чизиқли интеграл, координаталар бўйича эгри чизиқли интеграллардан фарқли ўлароқ, эгри чизиқда йўналишнинг танланишига боғлиқ эмас.

Ёйнинг узунлиги бўйича эгри чизиқли интегрални ҳисоблашни аниқ интегрални ҳисоблашга келтириш мумкинлигини кўрсатиш мумкин. Агар $\overset{\frown}{AB}$ ёй $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_a^b f[x, y(x)]\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{70}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл остидаги ифода чап томондаги интеграл остидаги ифодадан y ни $y(x)$ га ва dl ёй дифференциалини унинг декарт координаталаридаги $\sqrt{1 + y'^2}$ ифодасига алмаштириш билан ҳосил бўлади.

Мисол. Агар $y = \ln x$ эгри чизиқнинг $x = 1$ ва $x = 2$ абсциссали нуқталар орасидаги ёйи массасининг зичлиги $\gamma = x^3$ бўлса, бу ёйнинг массасини топинг.

Ечилиши. (69) ва (70) муносабатлардан қуйидагиларни топамиз:

$$m = \int_{AB} x^2 dl = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx =$$

$$\int_1^2 x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (1 + x^2)^{1/2}\,d(1 + x^2) = \left.\frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right) \approx 2{,}784.$$

Изоҳ. Кўпинча ёйнинг узунлиги бўйича эгри чизиқли интегрални *биринчи тур эгри чизиқли интеграл*, вектор-функциядан олинган эгри чизиқли интегрални эса *иккинчи тур эгри чизиқли интеграл* деб аталади.

4- §. Векторлар анализининг асосий тушунчалари

Олдинги параграфда вектор майдон тушунчаси киритилган эди. Бу ерда уни ўрганишда давом этамиз.

1. Сиртнинг юзи бўйича интеграл. Чегараланган ёпиқ L эгри чизиқ билан чегараланган S сиртда $f(M) = f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин.

Ушбу ишларни бажарамиз.

1. S сиртни n та $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ бўлакка* бўламиз.

2. Ҳар бир ΔS_i бўлакда x_i, y_i, z_i координатали M_i нуқтани ихтиёрий танлаймиз ва $f(x, y, z)$ функцияни танланган M_i нуқтадаги қийматининг ΔS_i юзга кўпайтмасини тузамиз:

$$f(M_i)\,\Delta S_i = f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

* Бу ерда ва бундан сўнг S ва ΔS_i сиртларни ҳам, уларнинг юзларини ҳам англатаверади.

3. Барча бундай кўпайтмалар йиғиндисини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i, \tag{71}$$

у *интеграл йиғинди* деб аталади.

4. Интеграл йиғиндининг ΔS_i кичик юзчалар сони n чексиз ортгандаги ва уларнинг ҳар бири нуқтага тортилгандаги лимитини қараймиз. Агар бу лимит мавжуд ва у S сиртни бўлакларга бўлиш усулига ҳамда ΔS_i юзчаларнинг ҳар бирида M_i нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимит $u = f(x, y, z) = f(M)$ функциядан S сиртнинг юзи бўйича олинган интеграл (ёки қисқа, *S сирт бўйича олинган интеграл)* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\iint_S f(M)\, dS \text{ ёки } \iint_S f(x, y, z)\, dS.$$

Шундай қилиб,

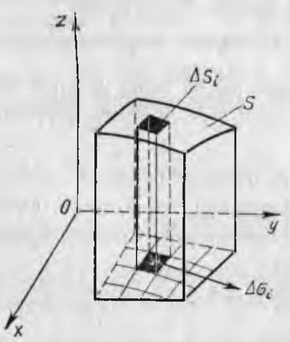
$$\iint_S f(M)\, dS = \operatorname{lia}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

ёки

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i. \tag{72}$$

Сирт бўйича олинган интеграл икки каррали интеграл эга бўлган барча хоссаларга эгалигини кўрсатиш мумкин. Жумладан, а д д и т и в л и к х о с с а с и ўринли, агар S сирт S_1 ва S_2 сиртларга бўлинган бўлса, у ҳолда $\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2}$; агар $f(x, y, z)$ узлуксиз функция бўлиб, $f(x, y, z) > 0$ бўлса, у ҳолда $\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS > 0$.

S юзли сирт $z = \varphi(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин, бу ерда $\varphi(x, y)$ — ўзининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз функция. У ҳолда **сирт бўйича олинган интегралнинг ушбу мавжудлик теоремаси** ўринли бўлиб, биз уни исботсиз қабул қиламиз.



51- расм

Ҳар қандай $u = f(x, y, z)$ узлуксиз функция учун сирт бўйича олинган интеграл мавжуд.

Сирт бўйича олинган интегрални ҳисоблашни мавжудлик теоремасининг шартлари бажарилганда икки каррали интегрални ҳисоблашга келтириш мумкинлигини кўрсатамиз. σ_{xy} мазкур сиртнинг Oxy текисликка проекцияси, $u = f(x, y, z)$ эса S сиртнинг барча нуқталарида аниқланган узлуксиз функция бўлсин.

σ_{xy} соҳани n та $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ кичик юзчаларга бўламиз. σ_{xy} соҳанинг бу бўлинишига S сиртнинг $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ бўлиниши мос келади (51- расм). Бунда ΔS_i сиртнинг $\Delta\sigma_i$ юзчага проекцияланадиган бўлаги. ΔS_i элементар юзчанинг юзини ҳисоблаймиз, бунинг учун (28) формуладан фойдаланамиз:

$$\Delta S_i = \iint_{\Delta\sigma_i} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)\, d\sigma}.$$

Бу интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаймиз (1- §, 3- пунктга қаранг):

$$\Delta S_i = \iint_{\Delta\sigma_i} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}\, d\sigma =$$

$$= \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(y_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i,$$

бу ерда x_i, y_i шу $\Delta\sigma_i$ юзчанинг бирор $P_i(x_i, y_i)$ нуқтаси координаталари.

Энди ҳар бир ΔS_i элементар юзчада x_i, y_i ва $z_i = \varphi(x_i, y_i)$ координатали M_i нуқтани оламиз. S сиртни шу бўлакларга бўлиш ва M_i нуқталарнинг шу танланишига мос $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$ интеграл йиғиндини тузамиз. ΔS_i учун юқорида олинган ифодани ва $z_i = \varphi(x_i, y_i)$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i \tag{73}$$

$n \to \infty$ да $\Delta\sigma_i$ юзчаларнинг ҳар бири нуқтага тортилади деб ҳисоблаб, лимитга ўтамиз. (73) тенгликнинг ўнг томонида турган йиғинди икки ўзгарувчининг

$$f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}$$

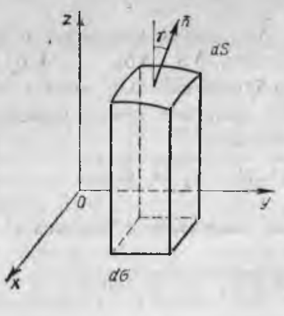
узлуксиз функцияси учун Oxy текисликнинг σ_{xy} соҳаси бўйича интеграл йиғиндидир. Шунинг учун унинг лимити σ_{xy} соҳа бўйича икки каррали интегралдир:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i =$$

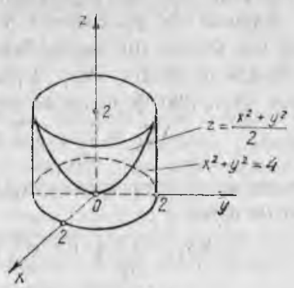
$$= \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}\, d\sigma.$$

(73) муносабатнинг чап томонида турган йиғиндининг лимити $f(M) = f(x, y, z)$ функциядан S сирт бўйича олинган интегралга тенг. Демак,

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}\, d\sigma. \tag{74}$$



52- расм



53- расм

Бу эса сирт бўйича олинган интегрални ҳисоблаш формуласидир. Шундай қилиб, S сирт бўйича олинган интегрални ҳисоблаш учун σ_{xy} соҳа бўйича олинган, унга тенг икки каррали интегрални (74) формула бўйича ҳисоблаш лозим.

1- изоҳ. (74) формуланинг ўнг томонида турган икки каррали интегралда интеграл остидаги ифодани тегишли сирт бўйича интегралнинг интеграл остидаги ифодасидан z ва dS ни

$$z = \varphi(x, y), \qquad dS = \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}\, d\sigma$$

формула бўйича алмаштириб ҳосил қилиш мумкин.

Агар $dS = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$ [(29) формулага қаранг] ва

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}}$$

эканлиги эътиборга олинса, кейинги формулани эслаб қолиш осон, бу ерда γ — нормал билан Oz ўқ орасидаги бурчак (52- расм).

2- изоҳ. Агар α ва β — мазкур сиртга ўтказилган нормалнинг мос равишда Ox ва Oy ўқлар билан ташкил қилган ўткир бурчаклари бўлса, у ҳолда (74) формулага ўхшаш ушбу формулалар ўринлидир:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{\sigma_{yz}} f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + g_y'^2(y,z) + g_z'^2(y,z)}\, d\sigma; \quad (74')$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{\sigma_{xz}} f(x, \omega(x,z), z)\sqrt{1 + \omega_x'^2(x, z) + \omega_z'^2(x, z)}\, d\sigma. \quad (74'')$$

Бу ерда $x = g(y, z)$, $y = \omega(x, z)$—мазкур сиртнинг мос равишда x ва y га нисбатан ечилган тенгламалари, σ_{yz} ва σ_{xz} эса S сиртнинг Oyz ва Oxz текисликларига проекциялари. Бунда $dS = \dfrac{d\sigma}{\cos\alpha}$ ёки $dS = \dfrac{d\sigma}{\cos\beta}$

бўлиб, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + g_y'^2 + g_z'^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \omega_x'^2 + \omega_z'^2}}$ (α ва β — ўткир бурчаклар).

Сирт бўйлаб олинган интегралларнинг татбиқлари асосида икки каррали интегралларнинг татбиқларидаги ўша принциплар ётади (1- §, 6- пунктга қаранг).

Хусусан, агар $\gamma(x, y, z)$ сиртий зичлик бўлса, у ҳолда S сиртнинг m массаси зичликдан сирт бўйлаб олинган интегралга тенг:

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z)\, dS. \quad (75)$$

Мисол. $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ айланиш параболоиднинг $x^2 + y^2 = 4$ цилиндр билан кесилган бўлагининг ҳар бир нуқтасидаги зичлик бу нуқтадан Oz ўққача бўлган масофанинг квадратига тенг бўлса, бу бўлакнинг m массасини топинг (153- расм).

Ечилиши. $M(x, y, z)$ нуқтадан Oz ўққача бўлган масофа $\sqrt{x^2 + y^2}$ га тенг бўлгани учун зичлик $\gamma = x^2 + y^2$ га тенг. (75) формулага асосан:

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z)\, dS = \iint_S (x^2 + y^2)\, dS.$$

Бу сиртий интегрални (74) формула бўйича ҳисоблаймиз. Мазкур ҳолда

$$z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \text{ шунинг учун } \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Шу сабабли

$$m = \iint_S (x^2 + y^2)\, dS = \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma.$$

Бу ерга икки каррали интеграл радиуси $R = 2$ ва маркази координаталар бошида бўлган σ_{xy} доира бўйлаб олинади. Ҳисоблашларни қутб координаталарида бажарамиз:

$$m = \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} r^2\sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + r^2}\, r^3\, dr.$$

Ички интегрални ҳисоблаш учун $1 + r^2 = z^2$ деб, ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $r\,dr = z\,dz$, бундан

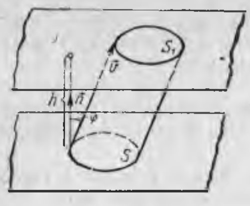
$$\int_0^2 \sqrt{1 + r^2}\, r^3\, dr = \int_1^{\sqrt{5}} z(z^2 - 1)\, z\, dz = \int_1^{\sqrt{5}} (z^4 - z^2)\, dz = \frac{2}{15}(25\sqrt{5} + 1).$$

Демак,

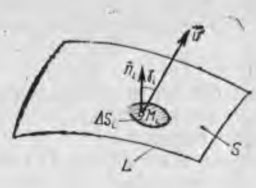
$$m = \int_0^{2\pi} \frac{2}{15}(25\sqrt{5} + 1)\, d\varphi = \frac{4\pi}{15}(25\sqrt{5} + 1) \approx 47{,}6.$$

2. Суюқлик оқими ҳақидаги масала. Фазода суюқликнинг ҳаракатини қараймиз. Фазонинг берилган M нуқтаси орқали оқиб ўтувчи зарранинг V тезлиги фақат бу нуқтага боғлиқ бўлиб, вақтга боғлиқ бўлмасин. Бу ҳолда суюқлик оқими барқарор (ёки стационар) оқим деб аталади. Суюқлик заррасининг V тезлиги фақат M нуқтанинг координаталарига боғлиқ бўлганлиги учун

$$\mathbf{v} = v_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + v_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + v_z(x, y, z)\,\mathbf{k},$$



54- расм



55- расм

бу ерда $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$ — тезликнинг координата ўқларига проекциялари. S сирт орқали оқиб ўтувчи суюқлик оқимини, яъни бу сирт орқали вақт бирлигида оқиб ўтувчи суюқлик миқдорини суюқликнинг зичлиги $\gamma = 1$ деб олиб ҳисоблаймиз.

Энг аввало $\mathbf{v}$ тезлик барча нуқталарда бир хил, сирт эса ясси юзчадан иборат бўлган хусусий ҳолни қараймиз (54- расм). S сиртда ётган суюқлик зарралари вақт бирлиги ичида $\mathbf{v}$ вектор йўналишда унинг узунлигига тенг масофага кўчади ва S_1 юзчада жойлашади. Вақт бирлиги ичида S юзча орқали ўтган суюқлик миқдори Π сон жиҳатидан, равшанки, асоси S ва ясовчиси $\mathbf{v}$ бўлган цилиндр ҳажмига тенг. Бу цилиндрнинг баландлигини h билан белгилаб, $\Pi = Sh$ ни ҳосил қиламиз.

$\mathbf{n}$ мазкур S сиртга ўтказилган бирлик нормал вектор, φ эса $\boldsymbol{n}$ ва $\mathbf{v}$ орасидаги бурчак бўлсин. $h = |\mathbf{v}| \cos\varphi = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{n}| \cos\varphi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ бўлгани учун

$$\Pi = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\ S. \qquad (76)$$

Энди умумий ҳолни қараймиз. Фазода суюқлик тезликларининг $\mathbf{v} = v_x(x, y, z)\ \mathbf{i} + v_y(x, y, z)\ \mathbf{j} + v_z(x, y, z)\ \mathbf{k}$ вектор майдони ва L фазовий чизиқ билан чегараланган S сирт берилган бўлсин (55- расм). Бу сиртнинг ҳар бир M нуқтасида $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ бирлик нормал вектор аниқланган бўлиб, унинг йўналтирувчи косинуслари сирт нуқталари координаталарининг узлуксиз функциялари бўлсин деб фараз қилайлик. Бу сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтган суюқлик миқдори Π ни ҳисоблаймиз

Умумий ҳолда $\mathbf{v}$ тезлик нуқтадан нуқтага ўтишда катталиги бўйича ҳам, йўналиши бўйича ҳам ўзгариши, S сирт эса ясси эмаслиги сабабли (76) формулани бевосита қўлланиш мумкин эмас. Π суюқлик миқдорини бу умумий ҳолда ҳам ҳисоблаш учун қуйидагича йўл тутамиз: S сиртни n та $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ кичик бўлакка бўламиз ва уларнинг ҳар бирида $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқтани танлаймиз. S сиртга M_i нуқтада ўтказилган бирлик нормал векторни $\mathbf{n}_i$ орқали белгилаймиз, бу ерда $\mathbf{n}_i = \mathbf{i}\cos\alpha_i + \mathbf{j}\cos\beta_i + \mathbf{k}\cos\gamma_i$ (55- расмга қаранг). Ҳар бир

ΔS_i кичик бўлак ичида суюқлик зарраларининг тезлиги ўзгармас ва ўзининг M_i нуқтадаги

$$\mathbf{v}_i = v_x(x_i, y_i, z_i)\ \mathbf{i} + v_y(x_i, y_i, z_i)\ \mathbf{j} + v_z(x_i, y_i, z_i)\ \mathbf{k}$$

қийматига тенг ҳамда ΔS_i кичик сиртни ясси деб ҳисоблаймиз. Бу фаразда ΔS_i орқали оқиб ўтувчи суюқлик миқдори $\Delta\Pi_i$ ни (76) формула бўйича тақрибан ҳисоблаш мумкин:

$$\Delta\Pi_i \approx (\mathbf{v}_i, \mathbf{n}_i)\ \Delta S_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Барча бундай ифодаларни жамлаб, S сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик миқдори Π нинг тақрибий қийматини топамиз:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Pi_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_i)\ \Delta S_i.$$

$n\to\infty$ да ҳар бир ΔS_i бўлак нуқтага тортилади деган шартда лимитга ўтиб, суюқлик миқдорининг аниқ

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i, \mathbf{n}_i)\,\Delta S_i$$

қийматини топамиз. Ёки скаляр кўпайтмани ушбу

$$\mathbf{v}_i\,\mathbf{n}_i = v_x(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + v_y(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + v_z(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i$$

координата шаклида ифодалаб, қуйидагини топамиз:

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [v_x(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + v_y(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + v_z(x_i, y_i, z_i)\times$$
$$\times\cos\gamma_i]\,\Delta S_i.$$

$\mathbf{n}$ бирлик нормал векторнинг йўналтирувчи косинуслари ҳамда $\mathbf{v}$ векторнинг v_x, v_y, v проекциялари S сирт нуқталари x, y, z координаталарининг узлуксиз функцияларидир. Шу сабабли $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma$ скаляр кўпайтма S сирт нуқталарида аниқланган узлуксиз функциядир. Демак, $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)\,\Delta S$. йиғиндининг лимити мавжуд ва $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ функциядан S сирт бўйлаб олинган интегралга тенг:

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_i)\,\Delta S_i = \iint_S (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

ёки координаталар орқали ёзилса,

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [v_x(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + v_y(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + v_z(x_i, y_i, z_i)\times$$
$$\times\cos\gamma_i]\,\Delta S_i = \iint_S (v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,dS.$$

Шундай қилиб, берилган S сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик миқдори ёки, одатда айтилишича, бу сирт орқали суюқлик оқими S сирт бўйича интегралдир:

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint_S (v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma)\, dS. \qquad (77)$$

3. Вектор майдон оқими. Оқувчи суюқлик оқимига ўхшаш равишда S сирт орқали $\Phi = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ вектор оқими тушунчасини киритамиз. Бунда бу сиртнинг ҳар бир нуқтасида $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ бирлик нормал вектор аниқланган ва унинг йўналтирувчи косинуслари сирт нуқталари координаталарининг узлуксиз функциялари деб фараз қиламиз.

S сирт орқали Φ *вектор оқими* (ёки Φ *вектор майдон оқими*) деб сирт бўйлаб олинган ушбу интегралга айтилади:

$$\Pi = \iint_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \qquad (78)$$

Бу интегрални ҳисоблаш (74) ёки (74′), ёки (74″) формулалар бўйича икки каррали интегрални ҳисоблашга келтирилади, бу ерда $f(x, y, z) = \Phi\cdot\mathbf{n}$.

Изоҳ. Ху сусан, $\Phi = R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ векторнинг $z = \varphi(x, y)$ тенглама билан берилган S сирт орқали оқими $\Pi = \iint_S R(x, y, z)\cdot\cos\gamma\, dS$ ни қарайлик. Сиртга бирлик нормал Oz ўқ билан ўткир бурчак ташкил қилсин. $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}$ бўлгани сабабли S сирт бўйлаб олинган интегрални ҳисоблаш учун (74) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS = \iint_S R(x, y, z)\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}\, dS = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y))\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}\cdot\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\, d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y))\, d\sigma.$$

Шундай қилиб,

$$\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y))\, d\sigma, \qquad (79)$$

бу ерда σ_{xy} — шу Oxy текисликнинг S сирт проекцияланадиган соҳаси. Агар бирлик нормал Oz ўқ билан ўтмас бурчак ташкил қилса ($\cos\gamma < 0$), у ҳолда, равшанки,

$$\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS = -\iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y))\, d\sigma \qquad (80)$$

Бирлик нормал векторнинг йўналиши қарама-қарши йўналишга ўзгарганида унинг йўналтирувчи косинусларининг ишоралари ўзгариши туфайли сирт орқали вектор оқимининг ишораси ўзгаради [(78) формулага қаранг].

1-мисол. $\Phi = xy^2\mathbf{i} + \dfrac{yz}{2}\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ вектор-функциянинг $z = x^2 + y^2$ айланиш параболоидининг $x^2 + y^2 = 4$ цилиндр билан кесилган бўлаги орқали Π оқимини топинг, бунда нормалнинг йўналиши сифатида бу нормал вектор Oz ўқ билан ўткир бурчак ташкил қиладиган йўналишини олинг (36-расмга қаранг).

Ечилиши. (78) формулага асосан: $\Pi = \iint_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS$. Айланиш параболоидига $\mathbf{n}$ бирлик нормал векторни топамиз. Агар сирт $z = \varphi(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{n} = \frac{-\varphi_x'(x, y)\,\mathbf{i} - \varphi_y'(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}$$

бўлишини биз биламиз [IX боб, (48) формулага қаранг).

Мазкур ҳолда $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, шу сабабли $\mathbf{n} = \dfrac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$. Демак,

$$\Phi\cdot\mathbf{n} = \frac{-2x^2y^2 - y^2z + x^2z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Шундай қилиб, Π оқим ушбу сирт бўйича интеграл билан ифодаланади:

$$\Pi = \iint_S \frac{-2x^2y^2 - y^2z + x^2z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS.$$

Сирт бўйича интегрални икки каррали интеграл орқали ҳисоблаш учун (74) формуладан фойдаланиб ва $z = \varphi(x, y) = x^2 + y^2$, $\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

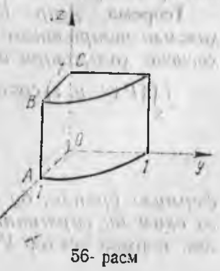
$$\Pi = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{-2x^2y^2 - y^2(x^2+y^2) + x^2(x^2+y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, d\sigma =$$
$$= \iint_{\sigma_{xy}} [-2x^2y^2 + (x^2+y^2)(x^2-y^2)]\, d\sigma,$$

бу ерда σ_{xy} — Oxy текисликдаги радиуси $R = 2$ ва маркази координаталар бошида бўлган доира (37-расмга қаранг).

Икки каррали интегрални қутб координаталарда ҳисоблаймиз

$$\Pi = \iint_{\sigma_{xy}} [-2r^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + r^4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(-\frac{\sin^2 2\varphi}{2} + \cos 2\varphi\right)\times$$
$$\times r^5 dr = \frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1-\cos 4\varphi}{4} + \cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{32}{3}\left[-\frac{\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{16} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{16\pi}{3} \approx -16{,}75.$$

2-мисол. $\Phi = yz\mathbf{j}$ векторнинг $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрик сиртнинг I октантда ётувчи ва $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ текисликлар билан чегараланган S бўлаги бўйлаб оқимини топинг, бунда цилиндрик сиртга нормаль Oy ўқ билан β ўткир бурчак ташкил этади, деб ҳисобланг (56-расм).



56- расм

Ечилиши. Цилиндрик сиртга бирлик нормал векторни топамиз. Бунинг учун унинг тенгламасини $x^2 + y^2 - 1 = 0$ кўринишда ёзиб оламиз. IX бобдаги (43) формулада $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ деб олиб, қуйидагини топамиз:

8—2950

$$\mathbf{n}=\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}=\frac{F'_x\mathbf{i}+F'_y\mathbf{j}+F'_z\mathbf{k}}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Бироқ цилиндр сиртида $x^2+y^2=1$, шунинг учун $\mathbf{n}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

Шундай қилиб,

$$\Pi=\iint_S(\Phi\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint_S y^2z\,dS.$$

Бу интегрални (74'') формула ёрдамида ҳисоблаймиз.

Бу ерда $y=\omega(x,z)=\sqrt{1-x^2}$, $dS=\sqrt{1+\omega'^2_x+\omega'^2_z}\,d\sigma=$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\;d\sigma=\frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Шунинг учун

$$\Pi=\iint_S y^2z\,dS=\iint_{\delta_{xz}}(\sqrt{1-x^2})^2\,z\,\frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2}}=\iint_{\delta_{xz}}z\sqrt{1-x^2}\;d\sigma,$$

бу ерда σ_{xz} — берилган S сирт Oxz текисликка проекцияланадиган $OABC$ квадрат. Икки каррали интегралда интеграллаш чегараларини тақсимлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Pi=\iint_{\delta_{xz}}z\sqrt{1-x^2}\;d\sigma=\int_0^1 dz\int_0^1 z\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Сўнгра

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin 1=\frac{\pi}{4}$$

бўлгани учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Pi=\int_0^1 z\,\frac{\pi}{4}\,dz=\frac{\pi}{8}=0{,}393.$$

4. Остроградский-Гаусс формуласи. S ёпиқ сирт орқали оқим S сирт билан чегараланган V соҳа бўйича олинган бирор уч каррали интеграл ёрдамида ҳисобланиши мумкинлигини кўрсатамиз.

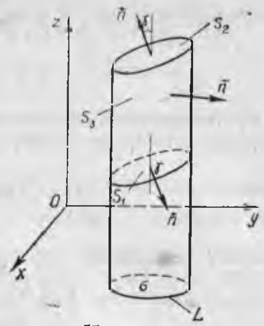
Теорема. *Агар $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар V ҳажмли чегараланган ёпиқ соҳада ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\iint_S[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS=$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV \qquad (81)$$

формула ўринли, бу ерда S шу V соҳанинг чегараси, шу билан бирга оқим бу сиртнинг ташқи томони бўйича олинади (яъни $\mathbf{n}$ бирлик нормал вектор V ҳажмдан ташқарига йўналган).

(81) тенглик *Остроградский — Гаусс формуласи* деб аталади.



57- расм

Исботи. Аввал $Oxyz$ фазода $S_1: z=g(x,y)$, $S_2: z=h(x,y)$ [бунда $g(x,y)\leqslant h(x,y)$] сиртлар ҳамда ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган S_3 цилиндрик сирт билан чегараланган V соҳани қараймиз (57-расм). S_3 цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси Oxy текисликдаги σ соҳани чегаралаб турган L эгри чизиқдир.

$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dV$ интегрални топамиз. Уч каррали интегрални ҳисоблаш формуласига асосан [(38) формулага қаранг]:

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dV=\iint_\sigma d\sigma\int_{g(x,y)}^{h(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz.$$

Сўнгра

$$\int_{g(x,y)}^{h(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz=R(x,y,z)\Big|_{g(x,y)}^{h(x,y)}=R(x,y,h(x,y))-R(x,y,g(x,y))$$

бўлгани учун

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dV=\iint_\sigma R(x,y,h(x,y))\,d\sigma-\iint_\sigma R(x,y,g(x,y))\,d\sigma \qquad (82)$$

бўлади. $R(x,y,z)\mathbf{k}$ векторнинг S_2 сиртнинг ташқи томони $(\cos\gamma>0)$ орқали оқимини, яъни $\iint_{S_2}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$ ни қараймиз. S_2 сирт тенгламаси $z=h(x,y)$ кўринишда. $\cos\gamma>0$ эканлигини ҳисобга олиб (57-расмга қаранг) ва (79) формуладан фойдаланиб,

$$\iint_{S_2}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS=\iint_\sigma R(x,y,h(x,y))\,d\sigma \qquad (83)$$

ни ҳосил қиламиз. $\iint_{S_1}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$ оқимни S_1 сиртнинг пастки томони $(\cos\gamma<0)$ бўйича ҳисоблаб ва (80) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_{S_1}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS=-\iint_\sigma R(x,y,g(x,y))\,d\sigma. \qquad (84)$$

(82), (83) ва (84) муносабатларни эътиборга олсак,

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dV=\iint_{S_1}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS+\iint_{S_2}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS \qquad (85)$$

га эга бўламиз. (85) тенгликнинг ўнг томонига S_3 цилиндрик сиртнинг ташқи томони бўйича олинган $\iint_{S_3}R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$ интегрални қўшсак, бу тенглик ўзгармайди. Цилиндрик сиртнинг ихтиёрий нуқтаси учун $\cos\gamma=\cos 90^\circ=0$ бўлгани сабабли бу интеграл нолга тенг. Шундай қилиб,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint\limits_{S_1} R(x,\ y,\ z)\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{S_2} R(x,\ y,\ z)\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{S_3} R(x,\ y, z)\cos\gamma\, dS.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган оқимлар йиғиндиси V ҳажмни чегаралаб турган S ёпиқ сиртнинг ташқи томони бўйлаб оқимдир:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint\limits_S R(x,\ y,\ z)\cos\gamma\, dS. \tag{86}$$

Ушбу формулалар ҳам шунга ўхшаш келтириб чиқарилади:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint\limits_S P(x,\ y,\ z)\cos\alpha\, dS, \tag{87}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint\limits_S Q(x,\ y,\ z)\cos\beta\, dS. \tag{88}$$

(86), (87) ва (88) формулаларни ҳадма-ҳад қўшиб, Остроградский-Гаусс* формуласини ҳосил қиламиз:

$$\iint\limits_S [P(x,\ y,\ z)\cos\alpha + Q(x,\ y,\ z)\cos\beta + R(x,\ y,\ z)\cos\gamma]\, dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

Мисол. $\Phi = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k}$ векторнинг $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ текисликлар билан чегараланган S пирамида сиртининг ташқи томони орқали оқимини Остроградский — Гаусс формуласи ёрдамида ҳисобланг

Ечилиши. Бу ерда $P = 3x$, $Q = 2y$, $R = -4z$. Сўнгра $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 + 2 - 4 = 1$ бўлгани учун, Остроградский — Гаусс формуласидан фойдаланиб,

$$\Pi = \iint\limits_S (3x\cos\alpha + 2y\cos\beta - 4z\cos\gamma)\, dS = \iiint\limits_V 1\cdot dV$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда уч каррали интеграл V пирамида бўйича олинади, $\iiint\limits_V dV$ интеграл V соҳа ҳажмига, яъни пирамиданинг ҳажмига тенг бўлгани учун:

$$\iint\limits_S (3x\cos\alpha + 2y\cos\beta - 4z\cos\gamma)\, dS = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{6}.$$

5. Остроградский — Гаусс формуласининг вектор ёзуви. Девиргенция.

Ушбу

$$\Phi = P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$$

вектор билан аниқланган вектор майдон берилган бўлсин. Остроградский — Гаусс формуласининг чап томонида турган $\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta +$

---

* Бу ерда биз $\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S P\cos\alpha\, dS + \iint\limits_S Q\cos\beta\, dS + \iint\limits_S R\cos\gamma\, dS$ тенгликдан фойдаландик. Бу эгри чизиқли интеграллар учун (51') муносабатни келтириб чиқаришга ўхшаш йўл билан ҳосил қилинади.

$+ R\cos\gamma)\, dS$ сиртий интеграл Φ векторнинг V ҳажмни чегаралаб турган S ёпиқ сирт орқали П оқимидир:

$$\Pi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS.$$

Шунинг учун Остроградский — Гаусс формуласининг чап томони координаталар системасига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳам маънога эгалиги тушунарлидир.

Энди Остроградский — Гаусс формуласининг ўнг томонини қараймиз. $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \varphi(x,\ y,\ z)$ бўлсин. Бу функция координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун фазонинг бирор $M(x,\ y,\ z)$ нуқтасини оламиз ва бу нуқта атрофида S ёпиқ сирт чизамиз. S сирт билан чегараланган V ҳажмга Остроградский — Гаусс формуласини қўллаймиз:

$$\iint\limits_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint\limits_V \varphi(x,\ y,\ z)\, dV.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\iiint\limits_V \varphi(x,\ y,\ z)\, dV = \varphi(M_0)\, V$$

га эгамиз, бу ерда $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ шу V ҳажмнинг ичидаги бирор нуқта. Демак,

$$\iint\limits_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS = \varphi(M_0)\cdot V,$$

бундан

$$\varphi(M_0) = \frac{\iint\limits_V (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS}{V}.$$

V ҳажм M нуқтага тортилади, деган шартда лимитга ўтиб,

$$\lim_{V\to 0}\varphi(M_0) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS}{V}$$

ни ҳосил қиламиз. Бунда $M_0 \to M$ бўлгани учун, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларнинг M нуқтада узлуксизлигига асосан

$$\lim_{V\to 0}\varphi(M_0) = \varphi(M) = \varphi(x,\ y,\ z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак $M(x, y, z)$ нуқтада қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_S (\Phi\cdot\mathbf{n})\, dS}{V}. \tag{89}$$

Бу тенгликнинг ўнг томони координаталар системасига боғлиқ бўлмаган ҳолда маънога эга бўлгани учун шу тенгликнинг чап томони

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ ҳам координаталар системасининг танланишига боғлиқ бўлмаган ҳолда бир хил қиймат қабул қилади.

Энди ушбу таърифни киритамиз;

$\mathbf{\Phi}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ вектор майдоннинг M нуқтадаги *дивергенцияси* деб $\mathbf{\Phi}$ векторнинг M нуқтани ўраб турган сирт орқали П оқимнинг бу сирт билан чегараланган V ҳажмга нисбатининг бу ҳажм нуқтага тортилади деган шартидаги лимитига айтилади.

$\mathbf{\Phi}$ вектор дивергенцияси $\operatorname{div}\mathbf{\Phi}$ символи билан белгиланади, шундай қилиб,

$$\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}.$$

Дивергенция скаляр миқдордир; (88) тенгликдан

$$\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \qquad (89')$$

эканлиги келиб чиқади.

Остроградский-Гаусс формуласини дивергенция тушунчасидан фойдаланиб, вектор формада ёзиш мумкин;

$$\iint_S(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{\Phi}\,dV. \qquad (90)$$

Бу тенглик *ёпиқ сирт орқали вектор оқими шу сирт билан чегараланган соҳа бўйича дивергенциядан олинган уч каррали интегралга тенг бўлишини билдиради.*

(90) формуланинг физик маъносини ойдинлаштирайлик. Вектор майдонни ҳаракатланаётган суюқликнинг $\mathbf{v}$ тезликлар майдони сифатида қараймиз, бунда суюқликнинг зичлиги $\gamma=1$ деб ҳисоблаймиз. S ёпиқ сирт билан чегараланган W соҳани оламиз. Бу ҳол учун (90) формула бундай ёзилади:

$$\iint_S(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iiint_W\operatorname{div}\mathbf{v}\,dW. \qquad (90')$$

$\iint_S(\mathbf{v}\mathbf{n})\,dS$ оқим S сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик миқдорини аниқлашни биз биламиз. Аниқроқ айтадиган бўлсак, $\iint_S(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS$ оқим S ёпиқ сирт* орқали оқиб чиқувчи ва оқиб кирувчи суюқлик миқдорларининг алгебраик йиғиндисини беради. Агар $\iint_S(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS>0$ бўлса, у ҳолда W соҳадан оқиб чиққан суюқлик оқиб кирган суюқликдан ортиқ бўлади. Агар $\iint_S(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS<0$ бўлса, у ҳолда, аксинча, оқиб кирган суюқлик оқиб чиққан суюқликдан кўпроқ бўлади.

1. $\iint_S(\mathbf{v}\mathbf{n})\,dS$ оқим сиртнинг ташқи томони бўйлаб олинишини кўзда тутиш лозим. Шу сабабли S сиртнинг берилган нуқтасида $\mathbf{v}$ тезлик вектори ташқарига йўналган бўлса, у ҳолда $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>0$, агар $\mathbf{v}$ вектор ичкарига йўналган бўлса, у ҳолда $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0$.

Энди бирор M нуқтада $\mathbf{v}$ тезлик дивергенцияси мусбат дейлик: $\operatorname{div}\mathbf{v}>0$.

Хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлганлиги учун у маркази M нуқтада бўлган S сфера билан чегараланган етарлича кичик W шарнинг нуқталарида ҳам мусбат бўлади. Бироқ у ҳолда $\iiint_W\operatorname{div}\mathbf{v}\,dW>0$, демак, (90′) формулага асосан $\iint_S(\mathbf{v}\mathbf{n})\,dS>0$, яъни W соҳадан унинг S чегараси орқали оқиб чиққан суюқлик оқиб кирган суюқликдан ортиқ. Шу сабабли M нуқтани *манба* деб аталади. Агар M нуқтада $\operatorname{div}\mathbf{v}<0$ бўлса, у ҳолда маркази шу нуқтада бўлган етарлича кичик сфера орқали оқиб кирган суюқлик оқиб чиққан суюқликдан ортиқдир. Шунинг учун бу ҳолда M нуқтани *обрез* деб аталади.

Ниҳоят, агар бирор S сирт билан чегараланган W ҳажмнинг ҳар бир нуқтасида $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ бўлса, у ҳолда оқим нолга тенг бўлиши (90′) формуладан келиб чиқади ва демак, бу сирт орқали қанча суюқлик оқиб чиқса, шунча суюқлик оқиб киради.

Мисол. Суюқликнинг тезликлар майдони $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ нинг дивергенциясини ҳисобланг, бу ерда a, b ва c ўзгармаслар.

Ечилиши. (89′) формулага асосан қуйидагини топамиз:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0.$$

Шундай қилиб, бу майдонда манбалар ҳам, обрезлар ҳам йўқ. Суюқликнинг барча зарралари бир хил тезликка эга, суюқлик қаттиқ жисм каби илгариланма ҳаракат қилади. Бундай суюқликнинг исталган ёпиқ сирт орқали оқими нолга тенг.

6. Вектор чизиқлар. Вектор трубкалар (найлар). $\mathbf{\Phi}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ вектор майдон берилган бўлсин. Ҳар бир нуқтасида майдон вектори уринма бўлган чизиқ *вектор чизиқ* деб аталади.

Суюқлик зарралари ҳаракатланадиган траекториялар суюқлик тезликлари майдонининг вектор чизиқлари бўлиши равшан.

Электростатик майдонда майдоннинг куч чизиқлари вектор чизиқлар бўлади. Шу сабабли ҳам вектор чизиқлар кўпинча ток чизиқлари (ёки куч чизиқлари) деб аталади.

Берилган вектор майдонда L ёпиқ эгри чизиқ берилган бўлиб, унинг ҳар бир нуқтаси орқали вектор чизиқ ўтсин. L чизиқ орқали ўтувчи барча вектор чизиқлар тўплами *вектор най* деб аталадиган сирт ҳосил қилади.

Бу майдоннинг ҳар бир нуқтасида $\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=0$ дейлик. Вектор найнинг S қисми ҳамда бу соҳанинг S_1 ва S_2 кесимлари билан чегараланган V соҳани қарайлик (58-расм).

Остроградский — Гаусс формуласига асосан:

$$\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{\Phi}\,dV=\iint_S(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS+\iint_{S_1}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS+\iint_{S_2}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

Бунда $\mathbf{n}$ бирлик нормал вектор барча ҳолларда ҳам ташқарига йўналган. $\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=0$ бўлгани учун $\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{\Phi}\,dV=0$. Демак,

$$\iint_S(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS+\iint_{S_1}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS+\iint_{S_2}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS=0.$$

58- расм

Вектор найнинг S сирти бўйлаб олинган $\iint\limits_S (\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS$ интеграл нолга тенг, чунки вектор найнинг характерли хусусияти шундаки, унинг ҳар бир нуқтасида мос $\mathbf{\Phi}$ вектор бу сиртга шу нуқтада ўтказилган уринма текисликда ётади ва демак, скаляр кўпайтма $\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n}=0$. Шундай қилиб, найнинг S_1 ва S_2 кесимлари бўйлаб олинган интеграллар қолади, бунда улар кесим сиртининг V ҳажмга нисбатан ташқи томони бўйича олинади:

$$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS=0 \text{ ёки } -\iint\limits_{S_1}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint\limits_{S_2}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

S_1 кесим нуқталарида $\mathbf{n}$ бирлик нормал вектор йўналишини қарама-қарши йўналишга ўзгартириб,

$$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n}_1)\,dS=\iint\limits_{S_2}(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $\mathbf{n}_1=-\mathbf{n}$ (58- расмга қаранг).

Бу муносабат қуйидагини англатади: *агар $\mathbf{\Phi}$ вектор майдоннинг барча нуқталарида $\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=0$ бўлса, у ҳолда вектор найнинг исталган кесими орқали вектор оқими бир хил қийматга эга бўлади.* Масалан, вектор майдон сиқилмайдиган суюқликнинг (яъни зичлиги ўзгармас суюқликнинг) $\mathbf{v}$ тезликлар майдони ҳамда $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ (яъни манбалар ва обрезлар йўқ) бўлса, у ҳолда найнинг исталган кўндаланг кесими орқали оқиб ўтувчи суюқликлар миқдори бир хил қийматга эга.

Ҳар бир нуқтасида $\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=0$ бўлган майдон *соленоидал* (ёки *найли*) майдон деб аталди.

7. Стокс формуласи. Ротор. Циркуляция. Стокс* формуласи Остроградский — Грин формуласининг умумлашмаси бўлиб, у L ёпиқ контур бўйлаб олинган эгри чизиқни ҳисоблашни бу контур билан чегараланган S сирт орқали ўтувчи оқимни ҳисоблашга келтириш имконини беради.

Теорема. *Агар $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар ва уларнинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари L ёпиқ контур билан чегараланган S сиртда узлуксиз бўлса, у ҳолда Стокс формуласи деб аталадиган ушбу формула ўринли:*

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS. \quad (91)$$

* Д. Стокс (1819 — 1903) инглиз математиги ва механиги.

Агар бунда сиртнинг томони танланган (яъни бирлик нормал векторнинг йўналиши танланган) бўлса, у ҳолда L контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат қилиб танланади, яъни у бундай танланади: контур бўйлаб S сиртнинг танланган томони бўйича юраётган кузатувчи шундай ҳаракатланадики, бунда сирт кузатувчидан чап томонда қолади (59- расм).

Бу теореманинг исботини келтирмаймиз.

$\mathbf{\Phi}=P(x,y,z)\,\mathbf{i}+Q(x,y,z)\,\mathbf{j}+R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ вектор майдон берилган бўлсин. Ушбу янги

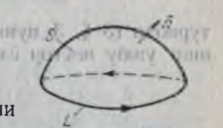
$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

векторни қараймиз. Бу вектор вектор майдоннинг *ротори* (ёки *ўрамаси*) деб аталади ва $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}$ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (92)$$

Бу ифодани эслаб қолиш учун ушбу символик детерминанти қарайлик:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$



59- расм

Агар бу детерминантни формал равишда биринчи сатр элементлари бўйича ёйилса ва бунда $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ символларнинг P, Q, R функциялари кўпайтмаларини мос хусусий ҳосилалар билан алмаштиришга (масалан, $\frac{\partial}{\partial x}Q$ кўпайтмани $\frac{\partial Q}{\partial x}$ хусусий ҳосила билан алмаштирилади) келишиб олинса, у ҳолда (92) формуланинг ўнг томони ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}. \quad (93)$$

$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}$ координаталар системасига боғлиқ бўлмасдан, балки дастлабки вектор майдон билан аниқланишини кўрсатиш мумкин. $\mathbf{\Phi}$ векторга янги вектор майдон — унинг ўрамлари майдони мос келади.

1- мисол. Oz ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланаётган абсолют қаттиқ жисмнинг $\mathbf{v}$ тезликлар майдони берилган бўлсин. Маълумки,* $\mathbf{v}=-\omega y\,\mathbf{i}+\omega x\,\mathbf{j}$.

$\operatorname{rot}\mathbf{v}$ ни топамиз. Бу ҳолда $P=-\omega y$, $Q=\omega x$, $R=0$, шунинг учун

* II боб, 5- §, 5- пункти, 3- мисолга қаранг.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(-\omega y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\mathbf{k} = 2\omega\,\mathbf{k}.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\omega\mathbf{k}$. Демак, $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ векторнинг модули қаттиқ жисмнинг Oz ўқи атрофида айланаётгандаги бурчак тезлигининг иккиланганига тенг. Ана шундан «ротор», яъни «айланиш» деган ном келиб чиқади.

Стокс формуласига қайтсак, унинг ўнг томонида $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}$ векторнинг S сирт орқали оқими турганини кўрамиз:

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$

$$= \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\, dS.$$

Унинг чап томонида эса $\mathbf{\Phi}$ векторнинг циркуляцияси, яъни $\oint\limits_L \mathbf{\Phi}\, d\mathbf{r}$ турибди (3-§, 3-пунктга қаранг). Шундай қилиб, Стокс формуласининг ушбу вектор ёзувини ҳосил қилдик:

$$\oint\limits_L \mathbf{\Phi}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\, dS. \tag{94}$$

(94) муносабат қуйидагини англатади: ***Φ** векторнинг L ёпиқ контур бўйлаб циркуляцияси **Φ** вектор роторининг L контур билан чегараланган S сирт орқали оқимига тенг.*

2- мисол. $\mathbf{\Phi} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ векторнинг учлари $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ бўлган учбурчакнинг $ABCA$ чегараси бўйлаб циркуляциясини Стокс формуласи ёрдамида топинг (40- расмга қаранг).

Ечилиши. (93) формулага кўра топамиз:

$$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial(x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(z^2)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial(y^2)}{\partial z} + \frac{\partial(x^2)}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial(z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = -2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$$

ABC учбурчак текислигининг тенгламаси $x + y\ z = 1$ кўринишда бўлгани учун бирлик нормал вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$. Демак, $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$.

$\mathbf{\Phi}$ вектор циркуляциясини Стокс формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\oint\limits_{ABCA} \mathbf{\Phi}\, d\mathbf{r} = \oint\limits_{ABCA} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dr = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n})\, dS =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (z + x + y)\,dS,$$

бунда S — берилган ABC учбурчакнинг ташқи томони. Ҳосил бўлган бу сиртий интегрални (74) формула бўйича ҳисоблаймиз. S сирт тенгламаси $z = 1 - x - y$ бўлгани учун $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. У ҳолда

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (z+x+y)\,dS = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_\sigma \left[(1-x-y)+x+y\right]\sqrt{3}\,d\sigma =$$

$$= -2\iint\limits_\sigma d\sigma = -2\sigma = -1;$$

чунки σ юз (AOB учбурчакнинг юзи) 1/2 га тенг. Шундай қилиб

$$\oint\limits_{ABCA} y^2dx + z^2dy + x^2dz = -1.$$

8. Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқмаслиги (фазода). 3-§, 5-пунктда $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ эгри чизиқли интегралнинг Oxy текисликда ётувчи L интеграллаш йўлига боғлиқмаслиги ҳақидаги масала қаралган эди. Энди шунга ўхшаш масалани

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

интеграл учун қараймиз.

Шундай қилиб, $\mathbf{\Phi} = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ вектор майдон берилган бўлсин. Бундан кейин $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ва $R(x,y,z)$ функциялар $Oxyz$ фазода ёки фазонинг бирор G соҳасида ўзларининг биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз деб фараз қиламиз.

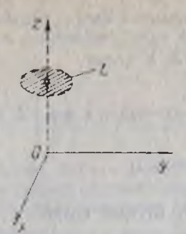
A ва B шу G соҳанинг иккита ихтиёрий нуқтаси бўлсин. G соҳада ётувчи ҳамда A ва B нуқталарни туташтирувчи турли эгри чизиқларни қараймиз. Агар $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ эгри чизиқли интеграл бу йўлларнинг исталган бўйича бир хил қиймат қабул қилса, у ҳолда *интеграллаш йўлига боғлиқмас* деб айтилади.

$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шартлари 3-§, 5-пункт, 1 ва 2-теоремаларга ўхшаш бўлган ушбу 1 ва 2-теоремалар орқали берилади.

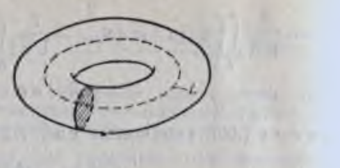
1- теорема. *$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ эгри чизиқли интеграл бирор G соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳада ётувчи исталган ёпиқ контур бўйича олинган интегралнинг нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.*

Бу теореманинг исботи $\int\limits_L Pdx + Qdy$ интеграл учун шу каби теореманинг исботи билан айнан бир хилдир.

2- теоремани таърифлашдан олдин фазода бир боғламли соҳа тушунчасини киритамиз. G соҳа ётувчи исталган L ёпиқ контур учун шу соҳада ётадиган ва L контур чегараси бўладиган сирт мавжуд бўлса, у ҳолда *G бир боғламли соҳа* деб аталади. Бу ҳолда L контурга бутунлай G соҳа тегишли бўлган сиртни «тортиш» мумкин деб айтилади. Маса-



60- расм



61- расм

лан, куб, шар, эллипсоид билан чегараланган жисм, бутун фазо бир боғламли соҳалардир.

Бир боғламли бўлмаган соҳага бирор тўғри чизиқнинг, масалан, Oz ўқнинг нуқталари чиқариб ташланган бутун фазо мисол бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, масалан, Oz ўққа перпендикуляр текисликда ётувчи ҳамда маркази шу ўқда бўлган L айланани қарайлик (60- расм). L айланага «тортилган» ҳар қандай сирт Oz ўқни кесиб ўтиши равшан, демак, у соҳага тегишли бўлмаган нуқтани ўз ичига олади. Торнинг («тешик кулчанинг») ичи ҳам бир боғламли бўлмаган соҳадир (61- расм). Ҳақиқатан ҳам, торнинг ичида ётувчи ва расмда пунктир чизиқ билан тасвирланган L айланага барча нуқталари торнинг ичида ётадиган сиртни «тортиш» мумкин эмас.

2- теорема. $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *вектор функциядан олинган* $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ *эгри чизиқли интеграл бир боғламли* G *соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳанинг ҳамма ерида* $\operatorname{rot}\Phi = 0$ *бўлиши зарур ва етарлидир.*

Етарлиликни исботлаш билан чекланамиз. G соҳада $\operatorname{rot}\Phi = 0$ бўлсин. G соҳада ётувчи исталган L ёпиқ контур бўйлаб олинган $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ эгри чизиқли интегралнинг нолга тенглигини кўрсатамиз. G соҳада L контур билан чегараланган S сиртни қарайлик, G соҳа бир боғламли бўлганлилиги учун бундай сирт доимо топилади. Стокс формуласига асосан;

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\Phi \cdot n)\, dS.$$

Бироқ G соҳада хусусан S сиртда ҳам, $\operatorname{rot}\Phi = 0$ тенглик ўринли. Шунинг учун $\iint\limits_S (\operatorname{rot}\Phi \cdot n)\, dS = 0$ ва демак,

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Шундай қилиб, G соҳадаги исталган L ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл нолга тенг. 1- теоремага асосан эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмас деган хулосага келамиз. Сўнгра

$$\operatorname{rot}\Phi = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

бўлганлиги учун 2- теоремани қуйидагича таърифлаш мумкин: $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ *эгри чизиқли интеграл бир боғламли соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳанинг ҳар бир нуқтасида қуйидаги муносабатларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (95)$$

Текислик бўлган ҳол учун эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шарти [(61) формулага қаранг] бевосита (95) формуладан келиб чиқади.

1- мисол. $\int\limits_L (2xy + z^2)\, dx + (x^2 + z)\, dy + (y + 2xz)\, dz$ эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмас, чунки унинг учун 2- теореманинг шарти бажарилади.

Ҳақиқатан ҳам, бу ерда $\Phi = (2xy + z^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + z)\,\mathbf{j} + (y + 2xz)\,\mathbf{k}$. Шунинг учун $P = 2xy + z^2$, $Q = x^2 + z$, $R = y + 2xz$ ва демак,

$$\operatorname{rot}\Phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 + z & y + 2xz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial (y + 2xz)}{\partial y} - \frac{\partial (x^2 + z)}{\partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial (2xy + z^2)}{\partial z} - \frac{\partial (y + 2xz)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial (x^2 + z)}{\partial x} - \frac{\partial (2xy + z^2)}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$

$$= (1 - 1)\,\mathbf{i} + (2z - 2z)\,\mathbf{j} + (2x - 2x)\,\mathbf{k} = 0.$$

2- мисол. $\int\limits_L ydx - xdy + zdz$ эгри чизиқли интегрални қарайлик. Бу ерда $\Phi = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ва

$$\operatorname{rot}\Phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial (-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -2\mathbf{k} \neq 0\ !$$

Демак, мазкур ҳолда эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқдир.

9. Тўла дифференциал бўйича бошланғич функцияни излаш (фазода). Бу масала 3- §, 6- пунктда текислик бўлган ҳол учун қаралган эди. Энди бу масалани фазо бўлган ҳол учун қисқача кўриб чиқамиз.

$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$ дифференциал ифода берилган бўлиб, шу билан бирга P, Q ва R функциялар бутун $Oxyz$ фазода ёки фазонинг бирор бир боғламли G соҳасида ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлсин.

Теорема. $Pdx + Qdy + Rdz$ *дифференциал ифода бир боғламли* G *соҳада бирор* $U = U(x, y, z)$ *функциянинг тўла дифференциали бўлиши учун бу соҳада ушбу (95) шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир:*

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Бу теореманинг исботи 3-§, 6-пунктдаги теореманинг исботига ўхшаш бўлгани учун уни келтирмаймиз.

Исботлаш жараёнида, текислик бўлган ҳолдаги каби, $\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} Pdx+Qdy+Rdz$ эгри чизиқли интеграл тўла дифференциали $Pdx+Qdy+Rdz$ га тенг бўлган изланаётган $U=U(x, y, z)$ функция эканлигини кўрсатиш мумкин. Энди ушбу таърифни киритамиз (102-бетдаги таъриф билан таққосланг). Тўла дифференциали $Pdx+Qdy+Rdz$ дифференциал ифодага тенг бўлган $U(x, y, z)$ функция бу ифода учун *бошланғич функция* деб аталади.

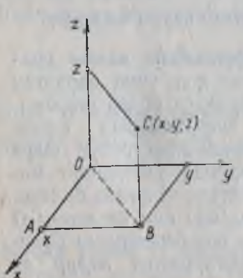
Демак, $\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} Pdx+Qdx+Rdz$ эгри чизиқли интеграл $Pdx+Qdy+Rdz$ дифференциал ифода учун бошлангич функциядир. Эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқмаслиги сабабли $U(x, y, z)=\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} Pdx+Qdy+Rdz$ бошланғич функцияни топишда (x_0, y_0, z_0) ва (x, y, z) нуқталарни туташтирувчи исталган чизиқни олиш мумкин. (x, y, z) нуқтанинг координаталарини интеграллаш ўзгарувчилари билан аралаштириб юбормаслик учун бу ўзгарувчиларни ξ, η, ζ билан белгилаймиз. У ҳолда $U(x, y, z)$ учун ифодани бундай қайта ёзиш мумкин:

$$U(x, y, z)=\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} P(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi+Q(\xi, \eta, \zeta)\,d\eta+R(\xi, \eta, \zeta)\,d\zeta. \qquad (96)$$

Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида интеграллаш йўли сифатида AC, CD, ва DB томонлари мос равишда координата ўқларига параллел $ACDB$ синиқ чизиқни олиш мумкин:

Мисол. $2xy^3zdx+3x^2y^2zdy+x^2y^3dz$ дифференциал ифода учун бошланғич функцияни топинг.

Ечилиши. Бу ерда $P=2xy^3z$, $Q=3x^2y^2z$, $R=x^2y^3$. Энг аввало (95) шартнинг бажарилиш-бажарилмаслигини текширамиз. Мазкур ҳолда $\frac{\partial R}{\partial y}=3x^2y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=3x^2y^2$, яъни $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$. Сўнгра $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлишига ҳам юқоридагига ўхшаш ишонч ҳосил қиламиз; яъни (95) шартлар бутун $Oxyz$ фазода бажарилади.



62- расм

Демак, (96) формулага асосан,

$$U(x, y, z)=\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} 2\xi\eta^3\zeta\,d\xi+3\xi^2\eta^2\zeta\,d\eta+\xi^2\eta^3\,d\zeta.$$

Бошланғич нуқта координаталар боши билан устма-уст тушсин ($x_0=y_0=z_0=0$). Интеграллаш йўли сифатида бўғинлари мос равишда координата ўқларига параллел $OABC$ синиқ чизиқни оламиз (62-расм). У ҳолда

$$U(x, y, z)=\int\limits_{(0;\,0;\,0)}^{(x;\,y;\,z)}=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}. \qquad (*)$$

OA кесмада; $\eta=0,\ \zeta=0,\ d\eta=0,\ d\zeta=0$; шунинг учун

$$\int\limits_{OA} 2\xi\eta^3\zeta\,d\xi+3\xi^2\eta^2\zeta\,d\eta+\xi^2\eta^3\,d\zeta=\int\limits_0^x 2\xi\cdot 0^3\cdot 0\,d\xi=0.$$

AB кесмада: $\xi=x,\ \zeta=0,\ d\xi=0,\ d\zeta=0$; демак,

$$\int\limits_{AB} 2\xi\eta^3\zeta\,d\xi+3\xi^2\eta^2\zeta\,d\eta+\xi^2\eta^3\,d\zeta=\int\limits_0^y 3x^2\eta^2\,0\,d\eta=0.$$

BC кесмада; $\xi=x,\ \eta=y,\ d\xi=0,\ d\eta=0$; демак,

$$\int\limits_{BC} 2\xi\eta^3\zeta\,d\xi+3\xi^2\eta^2\zeta\,d\eta+\xi^2\eta^3\,d\zeta=\int\limits_0^z x^2y^3d\zeta=x^2y^3\zeta\Big|_0^z=x^2y^3z.$$

(*) муносабатга асосан $U(x, y, z)=0+0+x^2y^3z$ га эгамиз. Шундай қилиб, бошланғич функциялардан бири $U=x^2y^3z$ функциядир. Берилган дифференциал ифода учун бу функциядан ташқари x^2y^3z+C кўринишдаги барча функциялар ҳам бошланғич функциялар бўлади, бунда C — исталган сон.

Текисликдаги ҳолга ўхшаш, $Pdx+Qdy+Rdz$ дифференциал ифода $U(x, y, z)$ бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{(x_1;\,y_1;\,z_1)}^{(x_2;\,y_2;\,z_2)} Pdx+Qdy+Rdz=U(x_2, y_2, z_2)-U(x_1, y_1, z_1). \qquad (97)$$

10. Потенциал майдон. $\mathbf{\Phi}=P(x, y, z)\,\mathbf{i}+Q(x, y, z)\,\mathbf{j}+R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ вектор майдоннинг барча нуқталарида $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=0$ бўлса, у *уюрмасиз майдон* деб аталади.

$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=0$ шартдан

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

келиб чиқади.

Олдинги пунктда айтилганларга асосан бундай хулосага келамиз: агар $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=0$ бўлган соҳа бир боғламли бўлса, у ҳолда $Pdx+Qdy+Rdz$ дифференциал ифода $U(x, y, z)$ бошланғич функцияга эга, яъни $Pdx+Qdy+Rdz=dU$. Иккинчи томондан $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$ бўлганлиги учун $P=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$, $R=\frac{\partial U}{\partial z}$.

$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$ (IX боб, 6-§, 3-пунктга қаранг) эканлигини ҳисобга олсак, $\operatorname{grad}U=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ га эгамиз. Бу деган сўз, уюрмасиз майдон бирор функциянинг градиентидир: $\mathbf{\Phi}=\operatorname{grad}U$.

Градиенти $\mathbf{\Phi}$ векторга тенг $U(x, y, z)$ функция $\mathbf{\Phi}$ майдоннинг *потенциал функцияси* (ёки оддийгина қилиб *потенциали*) деб аталади. Потенциалга эга бўлган майдон *потенциал майдон* деб аталади.

Шундай қилиб, ҳар бир *уюрмасиз бир боғламли* майдон потенциалга эга, яъни *потенциал майдондир*. Бунга тескари даъво ҳам ўринлидир: *ҳар қандай потенциал майдон уюрмасиз майдондир.* Бу $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$ дан келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам $\Phi = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$ бўлсин. Бу ерда $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Φ вектор функция учун (95) муносабатларининг бажарилишини кўрсатиш етарлидир.

Масалан, биринчи $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ муносабатнинг бажарилишини текшириб кўрамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}.$$

Бироқ $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}$ бўлгани учун $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ бўлади. Қолган муносабатларнинг бажарилиши ҳам шунга ўхшаш текширилади.

Агар $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ потенциал куч майдони бўлса, у ҳолда бирлик масса $A(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқтага кўчганда майдон кучларининг бажарган иши A нуқтадан B нуқтага борадиган йўлга боғлиқ эмас ва у потенциал функциянинг B ва A нуқталардаги қийматлари айирмасига, ёки одатда айтилишича, потенциаллар айирмасига тенг.

Ҳақиқатан ҳам, E иш

$$E = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

эгри чизиқли интеграл билан ифодаланишини биз биламиз. Майдон потенциал майдон бўлганлиги сабабли бу интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас, шу билан бирга бунда $U(x, y, z) = \int_{(x_0;\, y_0;\, z_0)}^{(x;\, y;\, z)} Pdx + Qdy + Rdz$. (97) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$E = \int_{(x_1;\, y_1;\, z_1)}^{(x_2;\, y_2;\, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1). \tag{98}$$

Куч майдони текисликда бўлган хусусий ҳолда, яъни $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ бўлганда (98) формула ушбу кўринишни олади:

$$E = \int_{(x_0;\, y_0)}^{(x;\, y)} Pdx + Qdy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \tag{99}$$

1-мисол. Тортишиш кучлари майдонини қарайлик (3-§, 1-пунктга қаранг). Координаталар бошида m масса бўлсин. Агар $M(x; y; z)$ нуқтага бирлик массани жойлаштирсак, у ҳолда унга илгари айтилганидек,

$$\mathbf{F} = \frac{-\varkappa m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

тортишиш кучи таъсир қилади. Бу ерда

$$P = \frac{-\varkappa mx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad Q = \frac{-\varkappa my}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad R = \frac{-\varkappa mz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Бу куч майдони потенциал майдон бўлишини текшириб кўриш осон, чунки $\operatorname{rot} F = 0$, ёки худди шунинг ўзи, бу майдон учун (95) шартлар бажарилади. Тортишиш кучлари майдони координаталар бошидан ташқари бутун $Oxyz$ фазода, яъни бир боғламли соҳада аниқланганлиги равшан.

Бу майдоннинг потенциалини топамиз. (96) муносабатдан фойдаланиб,

$$U(x, y, z) = -\int_{(x_0;\, y_0;\, z_0)}^{(x;\, y;\, z)} \frac{\varkappa m(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta)}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^3}$$

ни топамиз. $\frac{\varkappa m}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$ функция интеграл остидаги ифода учун бошланғич функция эканлигини текшириб кўриш осон. Шу сабабли (97) формулага асосан:

$$U(x, y, z) = \frac{-\varkappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{-\varkappa m}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = -\frac{-\varkappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C.$$

Одатда ихтиёрий C ўзгармасни нолга тенг деб оламиз. Бу ҳолда $U(x, y, z)$ потенциал функция чексизликда нолга тенг.

2-мисол. m массали моддий нуқтани қарайлик, унга mg га тенг оғирлик кучи таъсир қилади. Нуқта вертикал текисликда кўчаётган бўлсин. Бу текисликда Oxy координаталар системасини киритамиз, бунда Oy ўқни вертикал пастга (Ерга томон) йўналтирамиз. Равшанки, $\mathbf{F} = mg\mathbf{j}$. Бу ерда $P = 0$, $Q = mg$, $R = 0$, $\operatorname{rot} F = 0$ ва, демак, оғирлик кучлари майдони потенциал майдондир.

$U(x, y)$ потенциал функцияни топамиз. $dU = Pdx + Qdy + Rdz = 0 \cdot dx + mgdy + 0 \cdot dz = mgdy$ бўлганлиги учун потенциал функциялардан бири $U(x, y) = mgy$ функциядир. Масса $A(x_1; y_1)$ нуқтадан $B(x_2; y_2)$ нуқтага кўчганда бажариладиган ишни (99) формуладан топамиз:

$$E = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1) = mgy_2 - mgy_1 = mg(y_2 - y_1).$$

11. Гамильтон оператори. Биз векторлар анализининг асосий дифференциал тушунчаларини — градиент, дивергенция ва роторни кўриб чиқдик. Агар *Гамильтон* оператори* ёки ∇ *оператор* («набла») деб аталадиган

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

символ киритилса, бу катталикларни қисқароқ ёзиш мумкин.

Бу операторни шартли равишда вектор деб қараймиз. Унинг устида амаллар бажариш қоидаларини киритамиз.

1. $u(x, y, z)$ скаляр функция бўлсин. ∇ векторнинг u га кўпайтмаси деб ушбу векторни тушунишни шартлашиб олайлик:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Бироқ $\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{grad} u$.

Демак, $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

Шундай қилиб, ∇ *векторни скаляр функцияга формал кўпайтирсак, шу функциянинг градиенти ҳосил бўлади.*

2. ∇ векторнинг $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ вектор-функцияга скаляр кўпайтмаси деб, ушбу катталикни тушунишни келишиб олайлик:

* У. Гамильтон (1805 — 1865) инглиз математиги.

$$\nabla\cdot\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Бироқ

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\Phi;$$

демак,

$$\nabla\cdot\Phi=\operatorname{div}\Phi.$$

Шундай қилиб, ∇ *векторнинг вектор-функцияга скаляр кўпайтмаси бу вектор-функциянинг дивергенциясини беради.*

3. Ниҳоят, ∇ векторнинг $\Phi=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ вектор-функцияга вектор кўпайтмасини қарайлик:

$$\nabla\times\Phi=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}=\operatorname{rot}\Phi.$$

Шундай қилиб, ∇ *векторнинг вектор-функцияга вектор кўпайтмаси бу вектор-функциянинг роторини беради:**

$$\nabla\times\Phi=\operatorname{rot}\Phi.$$

∇ вектор устидаги амаллар векторлар алгебраси қоидалари асосида бажарилишини кўриб турибмиз. Бунда шуни назарда тутиш керакки, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ва $\frac{\partial}{\partial z}$ нинг скаляр функцияларга кўпайтмалари бу функцияларнинг мос равишда x, y, ва z бўйича хусусий ҳосилалари билан алмаштирилади.

* $\operatorname{rot}\Phi$ нинг символик детерминанти орқали ифодаси билан биз илгари (7-пунктда) танишган эдик.

XI БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§. СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1. Асосий таърифлар. Ушбу

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \qquad (1)$$

сонли кетма-кетлик $s_1=u_1$, $s_2=u_1+u_2+\ldots$, $s_n=u_1+u_2+u_n$ ва ҳ. к. тарзда тузилган бошқа

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \qquad (2)$$

кетма-кетлик билан биргаликда қараладиган бўлса, у *сонли қатор* деб аталади, бу ерда (1) кетма-кетликнинг ҳадлари *қаторнинг ҳадлари*, хусусан, u_1 — биринчи ҳад, u_2 — иккинчи ҳад, u_n — n-ҳад (ёки умумий ҳад), u_{n-1} эса $(n+1)$-ҳад деб аталади ва ҳ. к.

(2) кетма-кетликнинг ҳадлари (1) қаторнинг ***хусусий йиғиндилари***, хусусан s_1 — биринчи хусусий йиғинди, s_2 — иккинчи хусусий йиғинди, s_n — n хусусий йиғинди деб аталади ва ҳ. к.

Шундай қилиб, қатор бир ўзининг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги билан биргаликда қараладиган кетма-кетликдир. Шу муносабат билан қаторни одатда ушбу формада ёзилади:

$$u_1+u_2+\ \ldots+u_n+\ldots$$

Бундан кейин биз қаторнинг фақат шундай ёзилиш формасидан фойдаланамиз.

Ушбу қаторни қарайлик:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots \qquad (4)$$

Бу қаторнинг S_n хусусий йиғиндилари кетма-кетлигини тузамиз. Бунинг учун энг аввало қаторнинг умумий ҳадини қуйидагича ёзиш мумкинлигига эътибор берайлик:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Шунинг учун

$$S_1=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}.$$

Шунга ўхшаш йўл билан қуйидагини ҳам топамиз:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Булардан бу қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити бирга тенглиги келиб чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Энди

$$2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} + \ldots \tag{5}$$

қаторни қараймиз. Унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлигини топамиз:

$$S_1 = 2,\ S_2 = 2 + 6 = 8,\ S_3 = 2 + 6 + 18 = 26,\ \ldots$$

$$\ldots,\ S_n = 2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Бу хусусий йиғиндиларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_1 = 2 = 3 - 1,\ S_2 = 8 = 3^2 - 1,\ S_3 = 26 = 3^3 - 1, \ldots,\ S_n = 3^n - 1^*.$$

Бундан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (3^n - 1) = \infty$$

келиб чиқади.

Ушбу

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{6}$$

қатор учун хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \ldots$$

кўринишда бўлади. Бу мисолда хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги ҳеч қандай лимитга интилмайди.

Шундай қилиб, баъзи қаторлар учун хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги тайин лимитга интилади, бошқа қаторлар учун эса бундай лимит мавжуд эмас.

Агар қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги S_n нинг n номер чексиз ортганда S чекли лимити мавжуд, яъни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{7}$$

бўлса, у *яқинлашувчи қатор* деб аталади.

Яқинлашувчи қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг S лимити қаторнинг *йиғиндиси* деб аталади.

* Бу формулани математик индукция ёрдамида келтириб чиқариш мумкин.

Агар S яқинлашувчи $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ қаторнинг йиғиндиси бўлса, у бундай ёзилади:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Агар қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги лимитга эга бўлмаса, *узоқлашувчи* қатор деб аталади. Узоқлашувчи қатор йиғиндига эга эмас.

Юқоридаги мисолларга қайтадиган бўлсак, бундай хулосага келамиз: (4) қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси $S = 1$; (5) ва (6) қаторлар эса узоқлашади ва улар йиғиндига эга эмас.

Қаторлар математик анализнинг жуда муҳим аппарати бўлиб, улар математиканинг турли бўлимларида ҳам, унинг кўпгина татбиқларида ҳам, турли ҳисоблашларда ва тадқиқотларда кенг қўлланилади.

2. Геометрик прогрессия. Энг содда, бироқ жуда кўп учрайдиган қаторлардан бири геометрик прогрессиядир:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots; \tag{8}$$

a прогрессиянинг биринчи ҳади, q кўпайтувчи эса прогрессиянинг махражи деб аталади.

Прогрессия биринчи n та ҳадининг йиғиндиси (n-хусусий йиғиндиси) $q \neq 1$ бўлганда

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

формула бўйича ҳисобланади.

1) Агар $|q| < 1$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да $q^n \to 0$ (V боб, 1-§, 8-пунктга қаранг) ва

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Шундай қилиб, $|q| < 1$ бўлганда геометрик прогрессия яқинлашувчи қатор ва унинг йиғиндиси $S = \frac{a}{1-q}$ бўлади.

2) Агар $|q| > 1$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да $q^n \to \infty$ (V боб, 1-§, 7-пунктга қаранг) ва

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \infty.$$

Демак, бу ҳолда қатор узоқлашади.

3) Агар $q = 1$ бўлса, у ҳолда (8) қатор

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

кўринишни олади. Унинг учун $S_n = na$ ва $a \neq 0$ бўлганда $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, яъни қатор узоқлашади.

4) Агар $q = -1$ бўлса, у ҳолда (8) қатор

$$a - a + a - a + \ldots$$

кўринишни олади. Бу ҳолда n жуфт сон бўлганда $S_n = 0$ ва n тоқ сон бўлганда $S_n = a$ бўлади. Демак $a \neq 0$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ мавжуд эмас ва қатор узоқлашади.

Шундай қилиб, *геометрик прогрессия* $|q| < 1$ *да яқинлашувчи қатор,* $|q| \geq 1$ *бўлганда эса узоқлашувчи қатордир.*

3. Сонли қаторларнинг энг содда хоссалари. Энди сонли қаторларнинг бизга келгусида керак бўладиган бир неча содда хоссаларини кўриб чиқамиз.

1- теорема. *Агар*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (9)$$

қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S бўлса, у ҳолда қатор

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots + au_n + \ldots \qquad (9')$$

ҳам яқинлашади ва унинг йиғиндиси aS га тенг бўлади, бу ерда a — берилган сон.

Исботи. S_n берилган (9) қаторнинг n- хусусий йиғиндиси, σ_n эса (9′) қаторнинг n- хусусий йиғиндиси бўлсин, у ҳолда

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + au_3 + \ldots + au_n = a\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = a\,S_n.$$

Бундан

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} a\,S_n = a \lim_{n\to\infty} S_n = a\,S.$$

Шундай қилиб, (9′) қатор яқинлашади ва aS йиғиндига эга бўлади.

2- теорема. *Агар*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (10)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (11)$$

қаторлар яқинлашувчи ҳамда мос равишда S ва $\bar{S}$ йиғиндиларга эга бўлса, у ҳолда берилган қаторларни ҳадма — ҳад қўшишдан ҳосил бўлган

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots \qquad (12)$$

қатор ҳам яқинлашади ва $S + \bar{S}$ йиғиндига эга бўлади.

Исботи. (10), (11) ва (12) қаторларнинг n- хусусий йиғиндиларини мос равишда S_n, $\bar{S}_n$ ва σ_n орқали белгилаймиз.

У ҳолда

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) = S_n + \bar{S}_n.$$

Бунда лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = S + \bar{S}.$$

Шундай қилиб, (12) қатор яқинлашади. (12) қатор (10) ва (11) қаторларнинг *йиғиндиси* деб аталади.

Эслатма. Ушбу

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots \qquad (13)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S - \bar{S}$ га тенглигини юқоридагига ўхшаш исботлаш мумкин. (13) қатор (10) ва (11) қаторларнинг *айирмаси* деб аталади.

Ушбу иккита қаторни қарайлик:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots \qquad (14)$$

ва

$$u_{k+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots \qquad (14')$$

3- теорема. *Агар берилган (14) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14) қатордан унинг дастлабки чекли k сондаги ҳадини ташлаб юборишдан ҳосил бўлган (14′) қатор ҳам яқинлашади. Аксинча, (14′) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган (14) қатор ҳам яқинлашади.*

Исботи. (14) қаторнинг биринчи n та ҳадини S_n орқали, ташлаб юборилган k та ($k < n$) ҳад йиғиндисини S_k орқали ва (14′) қаторнинг биринчи $n - k$ та ҳадини σ_{n-k} орқали белгилаймиз:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n,$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k,$$

$$\sigma_{n-k} = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n.$$

Демак,

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}, \qquad (15)$$

шу билан бирга S_k — бирор сон бўлиб, n га боғлиқ эмас.

1. (14) қатор яқинлашувчи ва S йиғиндига эга, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ бўлсин, у ҳолда (15) тенгликдан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k.$$

Шундай қилиб, (14) қаторнинг σ_{n-k} хусусий йиғиндилари $n \to \infty$ да лимитга эга, яъни (14′) қатор яқинлашади.

2. (14) қатор яқинлашувчи ва σ йиғиндига эга, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$ бўлсин, (15) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) =$$

$$= S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

яъни (14) қатор яқинлашади.

3- теоремани қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

Қаторнинг яқинлашувчанлигига унинг чекли сондаги дастлабки ҳадларини ташлаб юбориш таъсир этмайди.

4. Қатор яқинлашувчилигининг зарурий аломати. Қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартини келтирамиз.

Теорема. *Агар $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда n номер чексиз ортганда унинг u_n умумий ҳади нолга интилади.*

Исботи. S йиғиндига эга бўлган

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u + \ldots,$$

яқинлашувчи қатор берилган бўлсин. Унинг

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

ва

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

хусусий йиғиндиларини қараймиз. Буларга кўра $u_n = S_n - S_{n-1}$. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}.$$

Бироқ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ва $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, чунки $n \to \infty$ да $n - 1 \to \infty$. Шунинг учун $\lim u_n = S - S = 0$. Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{16}$$

Натижа (қатор узоқлашувчилигининг етарли аломати). *Агар қаторнинг умумий ҳади n номер чексиз ортганида нолга интилмаса у ҳолда қатор узоқлашади.*

Ҳақиқатан ҳам, агар қатор яқинлашувчи бўлганида эди, у ҳолда унинг умумий ҳади юқоридаги теоремага асосан нолга интилар эди, бу эса шартга зид. Масалан, ушбу

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$$

қатор узоқлашувчидир, чунки унинг $u_n = \frac{n}{n+1}$ умумий ҳади нолга интилмайди:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1.$$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ шарт қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун зарурий шарт бўлиб, лекин у етарли шарт эмас. Бу эса $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ бўладиган узоқлашувчи қаторларнинг мавжудлигини билдиради. Бунга

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{\ }} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \tag{17}$$

қатор мисол бўла олади. Бу ерда $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Бироқ бу қаторнинг узоқлашувчи эканлигини кўрсатиш осон.

Бунинг учун бу қаторнинг

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

хусусий йиғиндисини қараймиз. $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$ бўлгани учун, равшанки,

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ёки $S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, яъни $S_n > \sqrt{n}$. Бу ердан $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ эканлиги бевосита келиб чиқади ва демак, қатор узоқлашувчидир.

5. Мусбат ишорали қаторлар яқинлашувчилигининг етарлилик аломатлари. Қаторнинг йиғиндиси деб унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ га айтилишини биз энди биламиз. Бироқ кўпчилик ҳолларда бу лимитни топиш катта қийинчиликлар билан боғлиқ бўлади. Бундай ҳолларда қаторнинг йиғиндиси тақрибий топилади, бунинг учун уни етарлича катта n номерли S_n хусусий йиғинди билан алмаштирилади. Бироқ бунинг учун мазкур қатор яқинлашувчи эканлигига ишонч ҳосил қилиш лозим. Қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини кўп ҳолларда етарлилик аломатлари деб аталувчи аломатлар ёрдамида аниқлашга эришилади. Бу пунктда биз ҳадлари мусбат бўлган қаторлар учун яқинлашиш ва узоқлашишнинг етарли аломатларини кўриб чиқамиз. Бундай қаторлар *мусбат ҳадли қаторлар* деб аталади.

Аввало қуйидагича эътибор берайлик. Мусбат ҳадли қаторда унинг барча ҳадлари мусбат бўлгани учун унинг

$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

хусусий йиғиндилари йиғинди номери n ортиши билан ўсади. Шундай қилиб, қаторнинг хусусий йиғиндилари ўсувчи сонли кетма-кетлик ҳосил қилади:

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots$$

Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланмаган. Бу ҳолда $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ва, демак, қатор узоқлашувчидир.

2. Хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланган, яъни исталган n да $S_n < C$. Бу ҳолда хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланган (V боб, 1-§, 8-пунктга қаранг) ва демак, қатор яқинлашувчидир.

Шундай қилиб, у ёки бу мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашувчилигини исботлашда унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг чегараланганлигини исботлаш кифоядир.

Энди қаторлар яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилигининг энг кўп учрайдиган баъзи аломатларини келтирамиз.

Биринчи таққослаш аломати (қатор яқинлашувчилигининг етарли аломати). *Ушбу иккита мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (V)$$

Биринчи қаторнинг ҳадлари иккинчи қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмасин:

$$u_1 \leqslant v_1,\ u_2 \leqslant v_2,\ u_3 \leqslant v_3, \cdots, u_n \leqslant v_n, \cdots \qquad (18)$$

*ва иккинчи қатор яқинлашувчи бўлсин. Бундай ҳолда биринчи қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси иккинчи қаторнинг йиғиндисидан ортиқ бўлмайди.**

Исботи. S_n ва σ_n орқали мос равишда биринчи ва иккинчи қаторларнинг n-хусусий йиғиндиларни белгилаймиз:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$
$$\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n.$$

(18) тенгсизликлардан $S_n \leqslant \sigma_n$ экани келиб чиқади. (V) қатор яқинлашувчи бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ мавжуд. Бунда бу қаторнинг ҳадлари мусбат бўлгани учун $\sigma_n < \sigma$ бўлиши равшан ва демак, $S_n < \sigma$ бўлади. Шундай қилиб (U) қаторнинг хусусий йиғиндилари чегараланган, демак (U) қатор яқинлашувчи, шу билан унинг йиғиндиси (V) қаторнинг йиғиндисидан ортиқ эмаслиги $S_n < \sigma$ тенгсизлигидан келиб чиқади.

Иккинчи таққослаш аломати (қатор узоқлашувчилигининг етарлилик аломати). Иккита мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (V)$$

Биринчи қаторнинг ҳадлари иккинчи қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлмасин:

$$u_1 \geqslant v_1,\quad u_2 \geqslant v_2,\quad u_3 \geqslant v_3, \cdots,\quad u_n \geqslant v_n, \cdots, \qquad (19)$$

ва иккинчи қатор узоқлашувчи бўлсин. Бу ҳолда биринчи қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

* (U) қаторнинг баъзи ҳадлари нолга тенг бўлганда ҳам теорема тўғрилигича қолади.

Исботи. S_n ва σ_n орқали яна мос равишда биринчи ва иккинчи қаторларнинг хусусий йиғиндиларини белгилаймиз:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$
$$\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n.$$

(19) тенгсизликлардан $S_n \geqslant \sigma_n$ бўлиши келиб чиқади. (V) қатор узоқлашувчи ва унинг хусусий йиғиндилари ўсувчи бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ бўлади. Бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ва демак, (U) қатор узоқлашувчидир.

Қаторларни таққослаш аломатлари ёрдамида текширишда таққослаш учун яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган қаторларга эга бўлишимиз керак.

2-пунктда биз геометрик прогрессияни кўрдик ва у $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| \geqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи қатор бўлишини исботладик.

Ушбу

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \qquad (20)$$

қатор $p > 1$ бўлганда яқинлашувчи қатор ва $0 < p \leqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи қатор бўлишини кейинроқ кўрсатамиз. $p = 1$ бўлганда *гармоник қатор* деб аталувчи

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad (21)$$

қатор ҳосил бўлади. (20) қатор *умумлашган гармоник қатор* деб аталади.

Геометрик прогрессия, гармоник қатор ва умумлашган гармоник қаторлардан таққослаш аломатлари ёрдамида қаторларни текширишда жуда кўп фойдаланилади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \cdots \qquad (*)$$

қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг.

Ечилиши. Ёрдамчи

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^{n+1}} + \cdots \qquad (**)$$

қаторни қараймиз. (**) қатор махражи $d = 1/2 < 1$ бўлган геометрик прогрессиядир ва демак, у яқинлашувчи қатордир. (*) қаторнинг ҳадлари (**) қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмаганлиги учун биринчи таққослаш аломатига кўра (*) қатор ҳам яқинлашувчи қатордир.

2-мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + \cdots \qquad (*)$$

Ечилиши. Ушбу ёрдамчи қаторни олайлик:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots, \qquad (**)$$

У узоқлашувчидир (4-пунктга қаранг). (*) қаторнинг ҳар бир ҳади (**) қаторнинг мос ҳадидан катта:

$$\ln n < n, \sqrt{\ln n} < \sqrt{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Шу сабабли иккинчи таққослаш аломатига кўра (*) қатор ҳам узоқлашувчидир.

Қаторларни текширишда ёрдамчи қаторлар тузиш зарурати туфайли таққослаш аломатларини қўлланишда кўпинча қийинчилик туғилади. Бунда барча ҳоллар учун яроқли бўлган умумий усуллар мавжуд эмас. Шу сабабли қаторларни текширишда кўпинча бошқа етарлилик аломатлари, хусусан, ушбу аломат қўлланилади.

Даламбер* аломати. *Агар мусбат ҳадли*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (22)$$

қаторда кейинги ҳаднинг олдинги ҳадга нисбатининг ҳад номери n чексиз ортганида лимити мавжуд, яъни

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \qquad (23)$$

бўлса, у ҳолда $\rho < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва $\rho > 1$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади.

Исботи. а) $\rho < 1$ бўлсин. Қаторнинг яқинлашувчилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ бўлгани учун кетма-кетлик лимитининг таърифига асосан исталган $\varepsilon < 0$ учун ε га боғлиқ шундай N натурал сонни танлаш мумкинки, номерлари $n \geqslant N$ бўлган барча ҳадлар учун $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Бундан

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho < +\varepsilon \quad \text{ёки} \quad \rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon.$$

$\rho + \varepsilon = q$ деб олсак, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ ни ҳосил қиламиз. Фаразга кўра ρ бирдан кичик, ε эса ихтиёрий кичик сон бўлгани учун ε ни $q = \rho + \varepsilon < 1$ бўладиган қилиб танлаш мумкин. Шундай қилиб, $n \geqslant N$ лар учун қуйидагига эгамиз:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < q, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q, \cdots,$$

яъни

$$u_{N+1} < u_N q, \; u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2, \; u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3, \cdots$$

Ушбу иккита қаторни қарайлик:

* Ж. Даламбер (1717 — 1783) — француз математиги.

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \cdots, \qquad (24)$$

$$u_N + u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \cdots \qquad (25)$$

(25) қатор махражи $|q| < 1$ бўлган геометрик прогрессия бўлгани учун яқинлашувчидир. (24) қаторнинг ҳадлари (25) қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмагани учун (24) қатор ҳам биринчи таққослаш аломатига кўра яқинлашувчидир.

Бироқ (24) қатор берилган (22) қатордан чекли сондаги $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{N-1}$ ҳадларни ташлаб юбориш натижасида ҳосил бўлади, демак, 3-пункт 3-теоремага асосан (22) қатор ҳам яқинлашувчидир.

Энди $\rho > 1$ бўлсин. Қаторнинг узоқлашувчилигини кўрсатамиз ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$. Бундан n нинг $n \geqslant N$ бўладиган етарли катта қийматлари учун $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ёки $u_{n+1} > u_N$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, қаторнинг ҳадлари n номери ортиши билан ўсади. Шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, яъни қатор узоқлашувчилигининг етарлилик аломати бажарилмоқда, демак, қатор узоқлашувчидир.

1-изоҳ. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ бўлса ҳам, қатор узоқлашувчи бўлади, чунки бу ҳолда ҳам етарлича катта n лар учун $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ва демак, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

2-изоҳ. Яна бир марта шуни таъкидлаб ўтамизки, агар қаторнинг узоқлашувчилиги Даламбер аломати ёрдамида исботланган бўлса, у ҳолда қаторнинг умумий ҳади нолга интилмайди.

3-изоҳ. Даламбер аломати $\rho = 1$ бўлганда қатор яқинлашадими ёки узоқлашадими деган саволга жавоб бермайди. Мисоллар шуни кўрсатадики, бу ҳолда қатор узоқлашувчи ҳам, яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Қаторларнинг яқинлашувчилигини Даламбер аломати ёрдамида текширишга доир мисоллар кўрамиз.

3-мисол . Ушбу қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n} + \cdots.$$

Ечилиши. Қуйидагини топамиз:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} : \frac{2n-1}{3^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} = \frac{2+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб $\rho = 1/3 < 1$ ва демак, берилган қатор яқинлашувчи.

4- мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{16}+\frac{8}{81}+\dots+\frac{2^n}{n^4}+\dots$$

Ечилиши. Қуйидагини топамиз:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}:\frac{2^n}{n^4}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{(n+1)^4}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^4}=2.$$

$\rho=2>1$ бўлгани учун берилган қатор узоқлашувчидир.

Энди $\rho=1$ бўлган қаторларга доир иккита мисол кўрамиз ва улардан бири яқинлашувчи, иккинчиси эса узоқлашувчи эканини кўрсатамиз.

5- мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$$

Ечилиши. ρ ни топамиз:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1.$$

Даламбер аломати асосида қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақида хулоса чиқара оламиз. Бироқ бу узоқлашувчи қатор эканлиги 4-пунктда кўрсатилган эди.

6- мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$$

Ечилиши. ρ ни топамиз:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}:\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

Берилган қатор яқинлашувчи эканлиги юқорида бевосита унинг йиғиндисини топиш билан кўрсатилган эди (1- пунктга қаранг).

Қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақида хулоса чиқариш учун Даламбер аломати ёрдам бермайдиган ҳолларда таққослаш аломатлари билан бир қаторда кўпинча қатор яқинлашишининг ушбу етарлилик аломати қўлланилади.

Кошининг интеграл аломати. *Ушбу мусбат ҳадли*

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots \tag{26}$$

қаторнинг ҳадлари мусбат, узлуксиз, $1\leqslant x<+\infty$ интервалда камаювчи бирор $f(x)$ функциянинг $x=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ даги қийматлари бўлсин, яъни

$$u_1=f(1),\ u_2=f(2),\ u_3=f(3),\ \dots,\ u_n=f(n),\ \dots$$

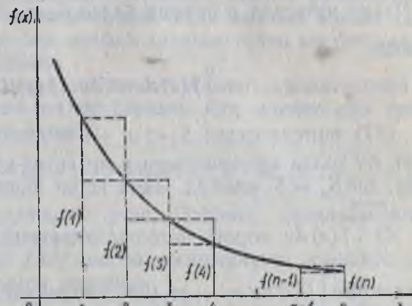
у [illegible]лда:

[illegible]) $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ яқинлашса, (26) қатор ҳам яқинлашади;

б) $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ узоқлашса, (26) қатор ҳам узоқлашади.

Исботи. Юқоридан $y=f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган, асоси $x=1$ дан $x=n$ гача бўлган эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу трапецияга асослари [1, 2], [2, 3], [3, 4], . . . сегментлар бўлган тўғри тўртбурчаклардан ташкил топган иккита поғонавий фигурани ички ва ташқи чизамиз.

Ички чизилган фигура тўғри тўртбурчакларининг баландликлари функциянинг $f(2)$, $f(3)$, . . ., $f(n)$, қийматларидан, ташқи чизилган фигура тўғри тўртбурчакларининг баландликлари функциянинг $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, . . ., $f(n-1)$ қийматларидан иборат бўлади (63- расм). Расмдан кўриниб турибдики, $\int\limits_1^n f(x)\,dx$ интеграл билан ифодаланадиган эгри чизиқли трапециянинг юзи ички ва ташқи чизилган поғонавий фигуралар юзлари орасида жойлашган.



63- расм

Ички чизилган фигуранинг юзи

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+f(4)\cdot 1+\dots+f(n)\cdot 1=u_2+u_3+u_4+\dots+u_n$$

йиғинди билан, ташқи чизилган фигуранинг юзи эса

$$f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\dots+f(n-1)\cdot 1=u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n-1}$$

йиғинди билан ифодаланади, шунинг учун ушбу тенгсизликлар бажарилади:

$$u_2+u_3+u_4+\dots+u_n<\int\limits_1^n f(x)dx<u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n-1},$$

ёки қисқароқ қилиб ёзилса,

$$S_n-u_1<\int\limits_1^n f(x)dx<S_n-u_n.$$

Бундан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$S_n<u_1+\int\limits_1^n f(x)dx, \tag{27}$$

$$S_n > u_n + \int_1^n f(x)\,dx. \qquad (28)$$

Энди ушбу ҳолларни қараймиз.

а) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашсин (мавжуд бўлсин). Бу эса $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = I$ мавжудлигини билдиради. $f(x)>0$ бўлганлиги сабабли $\int_1^n f(x)\,dx$ интеграл n ортиши билан ўсади ва ўзининг лимитидан ортмайди:

$$\int_1^n f(x)\,dx < \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = I.$$

(27) тенгсизликдан $S_n < u_1 + I$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланган ва демак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ мавжуд, яъни қатор яқинлашади.

б) $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашсин (мавжуд бўлмасин). Бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = +\infty$ (28) тенгсизликдан S_n хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланмаганлиги келиб чиқади, демак, қатор узоқлашади.

Интеграл аломати қўлланишига доир мисоллар кўрамиз. Бу пунктда (20) умумлашган

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{n^p}+\dots;$$

бу ерда $p>0$, гармоник қаторнинг $p>1$ да яқинлашиши ва $p\leqslant 1$ да узоқлашиши исботсиз айтиб ўтилган эди. Буни интеграл аломати ёрдамида исботлаймиз.

Бу ерда қаторнинг ҳадлари мусбат, монотон камаювчи $f(x)=\frac{2}{x^p}$ функциянинг $x=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ даги қийматларига тенг. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ хосмас интегрални қарайлик. Бу интеграл $p\leqslant 1$ да узоқлашувчилигини, $p>1$ да эса яқинлашувчилигини биз биламиз (VIII боб, 5-§, 1-пунктга қаранг). Демак, (20) қатор $p>1$ да яқинлашувчи ва $p\leqslant 1$ да узоқлашувчидир.

Ўзгарувчи ишорали қаторлар. Ҳозиргача биз фақат барча ҳадлари мусбат бўлган қаторларни ўргандик*. Энди ҳам мусбат, ҳам манфий ҳадларни ўз ичига олган қаторларни текширишга ўтамиз. Бундай қаторлар *ўзгарувчи ишорали қаторлар* деб аталади.

*Барча ҳадлари манфий бўлган қатор мусбат ҳадли қаторларга нисбатан ҳеч қандай янгилик бермайди, чунки у мусбат ҳадли қаторнинг барча ҳадларини (—1) га кўпайтириш билан ҳосил бўлади.

Ўзгарувчи ишорали қаторга мисол сифатида ушбу қаторни келтирамиз:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+$$
$$+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\dots+(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n^2}+\dots \qquad (29)$$

Ўзгарувчи ишорали қаторларни ўрганишни *ишора алмашинувчи қаторлар* деб аталадиган хусусий ҳолдан, яъни ҳар бир мусбат ҳадидан кейин манфий ҳад, ҳар бир манфий ҳадидан кейин мусбат ҳад келадиган қаторлардан бошлаймиз.

Ишора алмашинувчи қатор ҳадларининг абсолют қийматларини u_1 $u_2, \dots, u_n, \dots$ билан белгилаб ва биринчи ҳад мусбат деб ҳисоблаб, бу қаторни қуйидагича ёзамиз*:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+(-1)^{n-1}u_n+\dots. \qquad (30)$$

Ишора алмашинувчи қаторлар учун Лейбниц яқинлашишининг етарлилик аломати ўринлидир.

Лейбниц аломати. *Агар (30) ишора алмашинувчи қаторда ҳадларнинг абсолют қийматлари камайса:*

$$u_1>u_2>u_3>\dots>u_n>\dots \qquad (31)$$

ва қаторнинг умумий ҳади нолга интилса: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *у ҳолда қатор яқинлашади, шу билан бирга унинг йиғиндиси мусбат ва қаторнинг биринчи ҳадидан ортиқ бўлмайди.*

Исботи. Қаторнинг жуфт сондаги ҳадларининг хусусий йиғиндисини олайлик.

$$S_{2m}=u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+u_{2m-1}-u_{2m}.$$

Ҳадларни жуфт-жуфт қилиб группалаймиз:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\dots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Қатор ҳадларининг абсолют қийматлари шартга кўра камайгани учун қавсларнинг ичидаги барча айирмалар мусбат ва демак, S_{2m} йиғинди мусбат ва m ортиши билан ўсади.

Энди S_{2m} нинг ҳадларини бошқачасига группалаб ёзамиз:

$$S_{2m}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\dots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}].$$

Квадрат қавс ичидаги йиғинди ҳам мусбат. Шу сабабли m нинг исталган қиймати учун $S_{2m}<u_1$. Шундай қилиб, S_{2m} жуфт хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги m ортиши билан ўсади ва шу билан бир

*Биринчи ҳади манфий бўлган $-u_1+u_2-u_3+\dots-(-1)^{n-1}u_n+\dots$ ишора алмашинувчи қаторни текширишни унинг барча ҳадларини (—1) га кўпайтириш билан (30) қаторни текширишга келтирилади.

вақтда чегараланган бўлади. Демак, S_{2m} мусбат лимитга эга: $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Бунда $S_{2m} < u_1$ бўлгани учун $0 < S \leqslant u_1$ бўлиши равшан.

Энди тоқ сондаги ҳадлар йиғиндисини қараймиз:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

$m \to \infty$ да

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

чунки шартга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ва демак, $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$.

Шундай қилиб, ҳам жуфт сондаги, ҳам тоқ сондаги хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги умумий S лимитга эга. Бу эса умуман $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ бўлишини кўрсатади, яъни қатор яқинлашувчидир. Бунда S қаторнинг йиғиндиси унинг биринчи ҳадидан ортиқ бўлмаслиги исботдан кўриниб турибди.

1- мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашиш масаласини текширинг:

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} - \ldots$$

Ечилиши. Бу қатор Лейбниц аломати шартларини қаноатлантиради:

$$1)\ \frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \ldots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Демак, қатор яқинлашувчидир.

Энди ўзгарувчи ишорали қаторни умумий ҳолда текширишга ўтамиз. Ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{32}$$

қаторда $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ сонлар манфий ҳам, мусбат ҳам бўлиши мумкин деб фараз қилайлик.

Бундай қаторлар учун ушбу яқинлашиш аломати ўринли.

Теорема (ўзгарувчи ишорали қатор яқинлашишининг етарлилик аломати). *Агар*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{33}$$

ўзгарувчи ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{34}$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган ўзгарувчи ишорали қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исботи. (33) ва (34) қаторларнинг ҳадларидан тузилган

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + \ldots + \frac{u_n + |u_n|}{2} + \ldots \tag{35}$$

ёрдамчи қаторни қарайлик. Қуйидагиларга эгамиз:

$$u_n > 0 \text{ бўлганда } u_n = |u_n| \text{ ва } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|.$$

$$u_n < 0 \text{ бўлганда } |u_n| = -u_n \text{ ва } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0.$$

Шундай қилиб, (35) қаторнинг ҳадлари (34) яқинлашувчи қаторнинг ҳадларига ё тенг, ёки улардан кичик. Шунинг учун (35) қатор биринчи таққослаш аломатига кўра яқинлашади (5- пунктга ва 138- бетдаги сноскага қаранг).

(34) яқинлашувчи қаторнинг барча ҳадларини 1/2 га кўпайтириб,

$$\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \ldots + \frac{|u_n|}{2} + \ldots \tag{36}$$

яқинлашувчи қаторни ҳосил қиламиз (3- пункт, 1- теоремага қаранг). Энди (35) ва (36) яқинлашувчи қаторларнинг айирмасидан иборат

$$\left(\frac{u_1 + |u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2}\right) + \left(\frac{u_2 + |u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right) + \ldots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор 3- пункт, 2- теоремага асосан яқинлашувчидир.

Бироқ (33) қатор бу қатордан унинг барча ҳадларини 2 га кўпайтириш билан ҳосил бўлади:

$$2\cdot\left[\frac{|u_n| + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right] = 2\cdot\frac{u_n}{2} = u_n.$$

Демак, 3- пункт, 1- теоремага асосан дастлабки (33) қатор ҳам яқинлашувчидир.

2- мисол. Ўзгарувчи ишорали (29) қаторнинг яқинлашиши масаласини текширинг:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \ldots .$$

Ечилиши. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

қаторни қараймиз. Бу қатор $p = 2 > 1$ кўрсаткичли умумлашган гармоник қатор бўлгани учун яқинлашувчидир. Демак, исботланган аломатга асосан берилган (29) қатор ҳам яқинлашувчидир.

Ўзгарувчи ишорали қаторнинг яқинлашиш аломати етарли шарт бўлиб, бироқ зарурий шарт эмас. Бу деган сўз, шундай яқинлашувчи ўзгарувчи ишорали қаторлар мавжудки, улар ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторлар узоқлашади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n} + \ldots \tag{37}$$

қаторни олсак, у Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи. Шу билан бир вақтда берилган (37) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор гармоник қатор бўлиб, демак, у узоқлашувчи қатордир.

Юқорида қаралган (29) ва (37) қаторнинг иккаласи ҳам яқинлашувчи бўлса-да, бироқ уларнинг яқинлашиш характери турличадир.

(29) қатор ўзининг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор билан бир вақтда яқинлашувчидир, шу билан бир вақтда (37) яқинлашувчи қаторнинг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоқлашувчидир.

Шу муносабат билан ушбу таърифларни киритамиз.

$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ ўзгарувчи ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ўзгарувчи ишорали қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* деб аталади.

Ҳар қандай абсолют яқинлашувчи қатор ўзгарувчи ишорали қатор яқинлашишининг етарлилик аломатига асосан яқинлашувчи қатордир.

Агар $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ ўзгарувчи ишорали қаторнинг ўзи яқинлашувчи, бироқ унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ қатор узоқлашувчи бўлса, бу ўзгарувчи ишорали қатор *ноабсолют яқинлашувчи** қатор деб аталади.

Юқорида кўрилган мисолларга қайтадиган бўлсак, бундай айтишимиз мумкин: (29) қатор абсолют яқинлашувчи, (37) қатор эса ноабсолют яқинлашувчи қатордир.

Ўзгарувчи ишорали қаторлар орасида абсолют яқинлашувчи қаторлар алоҳида ўрин эгаллайди. Бу ана шундай қаторлар учун чекли йиғиндиларнинг асосий хоссалари ўринли эканлиги билан тушунтирилади. Ўрин алмаштириш хоссаси айниқса аҳамиятли бўлиб, фақат абсолют яқинлашувчи қаторларгина бу хоссага эгадир.

Биз исботсиз келтирадиган бу хосса қуйидагича таърифланади, *Абсолют яқинлашувчи қаторнинг ҳадларини исталганча ўрин алмаштиришдан унинг йиғиндиси ўзгармайди.*

Аксинча, ноабсолют яқинлашувчи қаторда ҳадларнинг ўринларини алмаштириш мумкин эмас, чунки уларнинг ўринлари алмаштирилганда қаторнинг йиғиндиси ўзгариши ва ҳатто узоқлашувчи қатор ҳосил бўлиши мумкин.

Ҳадларнинг ўринларини алмаштириш деганда биз чексиз кўп ҳадларнинг ўринларини алмаштиришни тушунамиз, чунки иккита, учта, тўртта ёки исталган чекли сондаги ҳадларнинг ўринлари алмаштириш билан биз қаторнинг йиғиндисини ўзгартирмаймиз.

Мисол сифатида (37) ноабсолют яқинлашувчи

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots$$

*Ноабсолют яқинлашувчи қаторни кўпинча шартли яқинлашувчи қатор деб аталади.

қаторни оламиз ва унинг йиғиндисини S билан белгилаймиз. Ҳар бир мусбат ҳаддан кейин иккита манфий ҳадни жойлаштириб, қатор ҳадларининг ўринларини ўзгартирамиз. Ушбу қаторни ҳосил қиламиз:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\ldots \qquad (37')$$

(37) қаторнинг хусусий йиғиндиларини S_n орқали, (37′) қаторнинг хусусий йиғиндиларини эса σ_n орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad S_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12},$$

$$S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60},\ \ldots;$$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\quad \sigma_6=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{7}{24},$$

$$\sigma_9=\frac{7}{24}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{37}{120},\ \ldots$$

Демак, $\sigma_3=0{,}5S_2$, $\sigma_6=0{,}5S_4$, $\sigma_9=0{,}5S_6$, ... ва умуман, $\sigma_{3m}=0{,}5\ S_{2m}$ бўлишини кўрсатиш мумкин. $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$ бўлгани учун $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_{3m}=0{,}5\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=0{,}5S$. Шундай қилиб, (37′) қаторнинг номерлари учга каррали бўлган хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги 0,5 S лимитга эга.

Сўнгра қуйидагиларни топамиз:

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}\right)=0{,}5\ S$$

ва

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+2}=\lim_{m\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}\right)=0{,}5\,S.$$

Шундай қилиб, биз n чексизликка исталган қонун бўйича яқинлашганда ҳам $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ мавжудлигини исботладик. Бу эса (37′) қатор яқинлашувчи эканини билдиради. Шу билан бирга унинг йиғиндиси бу қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириш билан ҳосил қилинган (37) қатор йиғиндисининг ярмига тенг.

7. Қаторнинг қолдиғи ва уни баҳолаш. Ушбу

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots \qquad (38)$$

яқинлашувчи қаторни қарайлик. Маълумки, унинг S йиғиндиси $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ хусусий йиғиндилар кетма-кетлигининг $n\to\infty$ даги лимитига тенг, яъни $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Шу сабабли етарлича катта n лар учун

$$S\approx S_n \qquad (39)$$

тақрибий тенглик ўринли бўлиб, n ортиши билан унинг аниқлиги ортади. (39) тақрибий тенгликнинг аниқлигини баҳолаш учун яқинлашувчи қаторнинг қолдиғи тушунчасини киритамиз.

(38) яқинлашувчи қаторнинг S йиғиндиси билан унинг n- хусусий йиғиндиси S_n орасидаги айирма бу қаторнинг *n- қолдиғи* деб аталади.

Қаторнинг қолдиғи r_n билан белгиланади:

$$r_n = S - S_n. \tag{40}$$

(40) тенгликдан кўриниб турибдики, қаторнинг қолдиғи бу қатордан унинг дастлабки n та ҳадини ташлаб юборишдан ҳосил бўлган яқинлашувчи қаторнинг йиғиндисидир.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots \tag{41}$$

Қаторнинг қолдиғи таърифидан

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

бўлиши тушунарлидир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S_n = 0.$$

Қаторнинг S йиғиндисини унинг S_n хусусий йиғиндиси билан алмаштирилганда ҳосил бўладиган абсолют хатолик қатор қолдиғининг модулига тенг бўлиши равшан:

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n|.$$

Шундай қилиб, қаторнинг йиғиндисини $\varepsilon > 0$ гача аниқликда топиш талаб қилинса, у ҳолда қаторнинг дастлабки n та ҳади йиғиндисини $|r_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажариладиган қилиб олиш лозим. Бироқ кўпчилик ҳолларда биз r_n қолдиқни аниқ топишни билмаймиз. Шу сабабли қолдиқнинг модули берилган ε сондан ортиқ бўлмайдиган n номерни қандай топишни аниқлаймиз.

1- теорема (мусбат ҳадли қатор қолдиғининг баҳоси ҳақида). *Агар яқинлашувчи мусбат ҳадли*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{42}$$

қаторнинг барча ҳадлари бошқа яқинлашувчи мусбат ҳадли

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{43}$$

қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмаса, у ҳолда (42) қаторнинг n- қолдиғи (43) қаторнинг n- қолдиғидан ортиқ бўлмайди.

Исботи. (42) ва (43) қаторларнинг n- қолдиқларини r_n ва r'_n орқали белгилаймиз:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots; \tag{44}$$

$$r'_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots. \tag{45}$$

Бу қолдиқларнинг ҳар бири яқинлашувчи мусбат ҳадли қаторнинг йиғиндисидир.

Шартга кўра $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$; $u_{n+2} \leqslant v_{n+2}$, ... бўлгани учун биринчи таққослаш аломатига кўра биринчи қаторнинг йиғиндиси иккинчи қаторнинг йиғиндисидан ортиқ эмас, яъни $r_n \leqslant r'_n$.

Агар ушбу иккита яқинлашувчи

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots; \tag{U}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n + \ldots \tag{V}$$

қатор берилган бўлиб, шу билан бирга (V) қаторнинг ҳадлари (U) қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлса, у ҳолда (V) қатор (U) қаторга нисбатан *мажорант* қатор деб аталади.

Олдинги теоремага асосан *мажорант қаторнинг қолдиғи доимо асосий қаторнинг қолдиғидан катта ёки унга тенг бўлади.*

Мажорант қатор сифатида одатда r'_n қолдиғини ҳисоблаш осон бўлган қатор (масалан, геометрик прогрессия) олинади. У ҳолда юқорида ҳозиргина исботланган теоремага асосан берилган қаторнинг r_n қолдиғини осон баҳолай оламиз.

1- мисол. Ушбу қаторнинг учинчи қолдиғини баҳоланг:

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{4\cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)5^n} + \ldots$$

Ечилиши. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади $q = 1/5$ махражли

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$$

геометрик прогрессиянинг мос ҳадидан кичик, демак, берилган қаторнинг r_3 учинчи қолдиғи бу прогрессиянинг r_3 учинчи қолдиғидан кичик:

$$r_3 < r'_3 = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots = \frac{1/5^4}{1 - 1/5} = \frac{1}{500}.$$

Шундай қилиб, берилган қатор йиғиндисининг унинг биринчи учта ҳади йиғиндисидан фарқи 1/500 дан кичик.

2- теорема (ўзгарувчи ишорали қатор қолдиғининг баҳоси ҳақида). *Абсолют яқинлашувчи ўзгарувчи ишорали*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{46}$$

қатор берилган бўлсин. У ҳолда унинг n- қолдиғининг абсолют қиймати берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторнинг n- қолдиғидан катта бўлмайди.

Исботи. (46) ўзгарувчи ишорали қатор абсолют яқинлашсин. Бу деган сўз

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{47}$$

қатор ҳам яқинлашувчидир.

(46) ва (47) қаторларнинг n- қолдиқларини қараймиз:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

$$r'_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots$$

Исталган p да қуйидагига эгамиз:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|.$$

Бу тенгсизликдан $p \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant \lim_{p\to\infty} [\,|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|\,]$$

ни ҳосил қиламиз ёки $|r| \leqslant r'_n$, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

2- мисол. Ушбу қаторнинг r_3 учинчи қолдиғини баҳоланг:

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots$$

Ечилиши. Бу қатор ўзгарувчи ишорали қатордир, чунки масалан,

$$\sin 1 > 0,\ \sin 2 > 0,\ \sin 3 > 0,\ \sin 4 < 0,\ \sin 5 < 0,\ \sin 6 < 0,\ \dots$$

Ушбу қаторни қараймиз:

$$\left|\frac{\sin 1}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3}{2^3}\right| + \dots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| + \dots$$

$\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ бўлгани учун бу қаторнинг ҳадлари

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

геометрик прогрессиянинг мос ҳадларидан ортиқ эмас. Шу сабабли берилган қатор абсолют яқинлашувчидир.

Берилган қаторнинг, унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторнинг ва геометрик прогрессиянинг қолдиқларини мос равишда r_3, r'_3 ва r''_3 билан белгиласак, $|r_3| \leqslant r'_3 \leqslant r''_3$ га эгамиз. Шундай қилиб, берилган қатор учинчи қолдиғининг баҳосини топамиз:

$$|r_3| \leqslant \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1/2^4}{1-1/2} = \frac{1}{8}.$$

3- теорема (Лейбниц аломати бўйича яқинлашадиган ишора алмашинувчи қатор қолдиғининг баҳоси ҳақида). *Агар ишора алмашинувчи қатор Лейбниц аломати бўйича яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг n- қолдиғининг абсолют қиймати ташлаб юборилган ҳадлардан биринчисининг модулидан ортиқ бўлмайди.*

Исботи. Ушбу

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда қаторнинг

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots)$$

n- қолдиғининг ўзи ҳам ишора алмашинувчи қатор йиғиндиси бўлади. Лейбниц аломатига кўра r_n қолдиқнинг абсолют қиймати бу қатор биринчи ҳадининг модулидан ортиқ бўлмаслиги лозим, яъни

$$|r_n| \leqslant u_{n+1}. \tag{47'}$$

3- мисол. Ушбу қаторнинг йиғиндисини 0,01 гача аниқликда ҳисобланг:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \dots.$$

Ечилиши. Бу қатор Лейбниц аломати бўйича яқинлашувчи, шу сабабли

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Қаторнинг йиғиндиси 0,01 гача аниқликда ҳисобланиши лозим бўлганлиги учун ушбу тенгсизлик бажарилиши етарлидир: $|r_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}01$ ёки

$$\frac{1}{(2n-1)!} < 0{,}01.$$

Бу тенгсизлик $n = 3$ дан бошлаб бажарилади. Шундай қилиб,

$$S \approx S_2 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \approx 1 - 0{,}17 = 0{,}83.$$

2- §. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

1. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси. Энди ҳадлари сонлар эмас, балки x аргументнинг бирор ўзгариш соҳасида аниқланган функциялар бўлган қаторларни ўрганишга киришамиз:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{48}$$

Бундай қаторлар *функционал қаторлар* деб аталади.

Масалан,

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \dots + \frac{1}{n}\sin nx$$

функционал қатордир.

Агар (48) қаторда x га $u_n(x)$ функцияларнинг аниқланиш соҳасидан бирор x_0 қийматни бериладиган бўлса, у ҳолда

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \tag{49}$$

сонли қаторни ҳосил қиламиз. Бу қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин. Агар у яқинлашувчи бўлса, у ҳолда x_0 нуқта (48) функционал қаторнинг *яқинлашиш нуқтаси* деб аталади. Агар $x = x_0$ да (49) қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функционал қаторнинг *узоқлашиш нуқтаси* деб аталади. Қатор $u_n(x)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаларидан олинган баъзи нуқталар учун яқинлашувчи, бошқа нуқталар учун эса узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Функционал қаторнинг барча яқинлашувчи нуқталари тўплами унинг *яқинлашиш соҳаси* деб аталади.

Функционал қаторнинг хусусий йиғиндиси, яъни унинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \tag{50}$$

x ўзгарувчининг функцияси бўлади.

Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси таърифидан келиб чиқадики, бу соҳанинг исталган x нуқтаси учун $n \to \infty$ да $S_n(x)$ хусусий йиғиндининг лимити мавжуд. Яқинлашиш соҳасига тегишли бўлмаган нуқталарда $S_n(x)$ хусусий йиғинди лимитига эга эмас. Функционал қаторнинг $S(x)$ йиғиндиси бу қаторнинг яқинлашиш соҳасида аниқланган x ўзгарувчининг бирор функцияси бўлиши тушунарли. Бу ҳолда бундай ёзилади:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots .$$

Агар функционал қатор яқинлашувчи ва $S(x)$ йиғиндига эга бўлса, у ҳолда $S(x) - S_n(x)$ айирма сонли қаторлардаги каби унинг n-қолдиғи деб аталади. Қаторнинг қолдиғини $r_n(x)$ билан белгилаймиз: $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Равшанки, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Қолдиқ $r_n(x)$ (48) қатордан унинг биринчи n та ҳадини ташлаб юборишдан ҳосил бўлган қаторнинг йиғиндисидир:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) + \ldots . \tag{51}$$

Мисол. Ушбу функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқланг:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} + \ldots .$$

Ечилиши. Бу қаторнинг ҳадлари $q = \frac{1}{x^2}$ махражли геометрик прогрессия ташкил этади. Бизга маълумки, геометрик прогрессия $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи ва $|q| \geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчидир. Шу сабабли берилган қатор x нинг $\frac{1}{x^2} < 1$ ёки $x^2 > 1$ бўладиган қийматларида яқинлашувчидир. Шундай қилиб, қатор $|x| > 1$ бўлган барча x нуқталар учун яқинлашувчидир. Берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси ушбу иккита чексиз интервалдан иборат:

$$-\infty < x < -1 \text{ ва } 1 < x < +\infty.$$

2. Мунтазам яқинлашувчи функционал қаторлар ва уларнинг хоссалари. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи (48)

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

функционал қатор учун шундай яқинлашувчи мусбат ҳадли

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{52}$$

қатор мавжуд бўлсаки, берилган (48) қатор ҳадларининг абсолют қийматлари x нинг $[a, b]$ сегментга тегишли исталган қийматида (52) мусбат ҳадли қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмаса, яъни $|u_n(x)| \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлса, у ҳолда (48) қатор $[a, b]$ сегментда *мунтазам яқинлашувчи* қатор деб аталади. Мунтазам яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари ҳақидаги баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *$[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи ҳар қандай қатор бу сегментнинг исталган нуқтасида абсолют яқинлашади.*

Маълумки, чекли сондаги узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси узлуксиз функциядир. Ҳадлари узлуксиз функциялар бўлган мунтазам яқинлашувчи функционал қаторнинг йиғиндиси ҳам шу хоссага эга, яъни ушбу теорема ўринли.

2-теорема. *$[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг барча ҳадлари узлуксиз бўлса, у ҳолда унинг йиғиндиси ҳам $[a, b]$ сегментда узлуксиздир.

Чекли сондаги функцияларнинг йиғиндисини ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш мумкинлигини биз биламиз.

Агар

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x) + g(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} &f'(x) = [\varphi(x) + \omega(x) + g(x)]' = \varphi'(x) + \omega'(x) + g'(x), \\ &\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x) + \omega(x) + g(x)]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \\ &\qquad + \int_{x_1}^{x_2} \omega(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx. \end{aligned}\right| \tag{53}$$

Бу хоссалар қўшилувчилар сони чексиз бўлганда, яъни қаторлар учун ҳар доим ҳам бажарилавермас экан. Бироқ бу хоссалар сегментда мунтазам яқинлашувчи функционал қаторлар учун сақланади.

3-теорема. *Агар $[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг барча ҳадлари бу сегментда яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин.

Бу деган сўз, агар x_1 ва x_2 лар $[a, b]$ сегментнинг исталган иккита нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)\,dx + \ldots \tag{54}$$

4-теорема. Ушбу

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи ва унинг ҳадлари $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинган қатор $[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг йиғиндиси берилган қаторнинг ҳосиласига тенг бўлади:

$$[u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots]' =$$
$$= u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots \qquad (55)$$

5-теорема. *$[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

қаторни $\varphi(x)$ чегараланган функцияга кўпайтириш билан ҳосил қилинган

$$\varphi(x)\cdot u_1(x) + \varphi(x)\cdot u_2(x) + \ldots + \varphi(x)\cdot u_n(x) + \ldots \qquad (56)$$

қатор $[a, b]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи қатор бўлади.

3-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

1. Даражали қатор ва унинг яқинлашиш соҳаси. Функционал қаторнинг муҳим хусусий ҳоли даражали қаторлардир.

Даражали қаторлар деб

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (57)$$

кўринишдаги қаторга айтилади, бу ерда a ва $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициентлар — ўзгармас сонлар. Хусусан $a = 0$ бўлганда даражали қатор

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (58)$$

кўринишда бўлади.

Аввал (58) кўринишдаги

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

даражали қаторларнинг хоссаларини ўрганамиз. Дастлаб (58) даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси қандай кўринишда бўлишини аниқлаймиз. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган мусбат ҳадли

$$|a_0| + |a_1x| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots \qquad (59)$$

қаторни қараймиз ва унга Даламбер аломатини қўллаймиз. Бунинг учун $u_{n+1} = |a_{n+1}x^{n+1}|$ олдинги ҳаднинг $u_n = |a_nx^n|$ кейинги ҳадга нисбатининг $n \to \infty$ даги лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ мавжуд деб фараз қилайлик. Уни $\frac{1}{R}$ билан белгилайлик, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|\cdot\frac{1}{R}.$$

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{R} < 1$, яъни $|x| < R$ бўлса, у ҳолда Даламбер аломатига асосан (59) қатор яқинлашувчи деган хулосага келамиз. Бироқ бу ҳолда ўзгарувчи ишорали (58) қатор ҳам ўзгарувчи ишорали қаторлар яқинлашишининг умумий етарлилик аломатига асосан яқинлашувчи бўлади, равшанки, бунда абсолют яқинлашувчи бўлади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ бўлса, (59) қатор узоқлашувчи бўлади. Бу ҳолда етарлича катта n лар учун (59) қаторнинг ҳадлари ўсади (141-бетга қаранг), шу сабабли $u_n = |a_nx^n|$ умумий ҳад $n \to \infty$ да нолга интилмайди. Демак, (58) қаторнинг умумий ҳади, яъни a_nx^n ҳам нолга интилмайди. Шу сабабли x нинг $|x| > R$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматлари учун (58) даражали қатор узоқлашувчи бўлади.

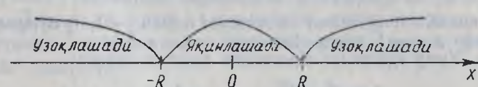
Ниҳоят, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{R} = 1$, яъни $|x| = R$ бўлса, у ҳолда бу ерда Даламбер аломатини қўлланиб бўлмайди ва (58) қатор ҳам, (59) ҳам конкрет ҳолларга боғлиқ равишда яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ мавжуд ва нолга тенг эмас деб фараз қилиб, ушбу теоремани исбот қилдик.

Теорема. *Ушбу*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $]-R, R[$ интервал бўлиб, бу интервалга конкрет ҳолларга боғлиқ равишда унинг $-R$ ва R



64-расм

охирлари қўшилиши мумкин (64-расм). *$]-R, R[$ интервалнинг ҳар бир нуқтасида қатор абсолют яқинлашади.**

$]-R, R[$ интервал даражали қаторнинг *яқинлашиш интервали*, бу интервал узунлигининг ярми, яъни R сон эса *яқинлашиш радиуси* деб аталади.

Ҳар қандай даражали қатор $x = 0$ бўлганда яқинлашувчидир, чунки $x = 0$ да $a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сонли қатор ҳосил бўлади. Агар қаторнинг бошқа яқинлашиш нуқталари мавжуд бўлмаса, у ҳолда унинг яқинлашиш радиуси $R = 0$ деб ҳисоблаймиз. Агар даражали қатор сон ўқининг барча нуқталарида яқинлашувчи бўлса, унинг яқинлашиш радиуси $R = \infty$ деб ҳисоблаймиз.

1-мисол. Ушбу даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топамиз:

$$\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots \qquad (*)$$

Е ч и л и ш и. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

* Теорема $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ мавжуд бўлмаган ҳолда ҳам тўғрилигича қолишини исботлаш мумкин.

$$\frac{|x|}{\sqrt{1}}+\frac{|x|^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}+\ldots \qquad (**)$$

қаторни қараймиз. Бу ерда $u_n=\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$, $u_{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}:\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}\right]=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x|.$$

Шундай қилиб, (**) қатор ва демак, (*) қатор ҳам $|x|<1$ бўлганда, яъни $]-1, 1[$ интервалда яқинлашувчи ва $|x|>1$ бўлганда узоқлашувчидир. Қаторнинг яқинлашиш радиуси $R=1$. Энди яқинлашиш интервалининг охирларида, яъни $x=1$ ва $x=-1$ нуқталарда қаторнинг яқинлашиш масаласини текширамиз.

(*) қаторга $x=1$ ни қўйсак узоқлашувчи

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

умумлашган гармоник қаторни ҳосил қиламиз (чунки $p=\frac{1}{2}<1$, 1-§, 5-пунктга қаранг).

$x=-1$ нуқтада ишора алмашинувчи

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\ldots,$$

қаторни ҳосил қиламиз. У Лейбницнинг яқинлашиш аломатига асосан яқинлашувчи қатордир.

Шундай қилиб, (*) қаторнинг яқинлашиш соҳаси $]-1, 1[$ интервал бўлиб, унга унинг чап охири $x=-1$ нуқта қўшилади: $-1\leqslant x<1$,

2- мисол. Ушбу қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x_n}{n!}+\ldots \qquad (*)$$

Ечилиши. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\ldots+\frac{|x|_n}{n!}+\ldots \qquad (**)$$

қатор учун кейинги ҳаднинг олдинги ҳадга нисбатининг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|x|^n}{n!}\right]=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0=0.$$

Шундай қилиб, x нинг исталган қиймати учун $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$. Демак, Даламбер аломатига асосан (**), бинобарин (*) қатор ҳам бутун сон ўқида яқинлашади. Бу ерда яқинлашиш радиуси $R=\infty$.

$\frac{|x|^n}{n!}$ яқинлашувчи қаторнинг умумий ҳади бўлганлиги учун $n\to\infty$ да нолга интилишини айтиб ўтамиз.

2. Даражали қаторнинг хоссалари. Ушбу (58)

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қатор$]-R, R[$ яқинлашиш интервалига эга бўлсин. Бу қатордан ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш билан ҳосил қилинадиган ушбу қаторларни қарайлик:

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots; \qquad (60)$$

$$a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\ldots \qquad (61)$$

(60) ва (61) қаторлар ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторларга Даламбер аломатини қўлланиб, бунда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ мавжуд деб фараз қилинса, (60) ва (61) қаторлар ҳам берилган (58) қатор эга бўлган ўша яқинлашиш интервалига эга бўлишига ишонч ҳосил қилиш осон.

Шундай қилиб, ушбу теоремага келдик.

1- теорема. Ушбу

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қатор $]-R,R[$ яқинлашиш интервалига эга бўлсан. У ҳолда бу қатордан уни ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш билан ҳосил қилинган қаторлар берилган қатор эга бўлган ўша яқинлашиш интервалига эга бўлади.

2- теорема. Ушбу (58)

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қатор $]-R,R[$ яқинлашиш интервалига эга бўлсин, r эса R дан кичик ихтиёрий мусбат сон бўлсин. У ҳолда берилган даражали қатор $[-r,r]$ сегментда мунтазам яқинлашувчи қатор бўлади.

Исботи. Даражали қатор яқинлашиш интервалининг исталган нуқтасида абсолют яқинлашишини биз биламиз. Шунинг учун $x=r$ нуқтада мусбат ишорали

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots \qquad (62)$$

қатор яқинлашади. x шу $[-r,r]$ сегментнинг исталган нуқтаси бўлсин. $|x|\leqslant r$ бўлганлиги учун $|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n$. Шунинг учун берилган (58) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\ldots+|a_nx^n|+\ldots$$

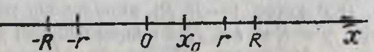
қаторнинг ҳадлари x нинг $[-r,r]$ сегментга тегишли исталган қийматида мусбат ишорали (62) сонли қаторнинг мос ҳадларидан ортиқ бўлмайди. Бу эса таърифга асосан берилган даражали қатор $[-r,r]$ сегментда мунтазам яқинлашувчилигини билдиради. Шундай қилиб, теорема исбот қилинди.

3- теорема. (58)

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

даражали қаторнинг йиғиндиси $]-R,R[$ яқинлашиш интервалининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз функция бўлади.

Исботи. x_0 яқинлашиш интервалининг исталган нуқтаси бўлсин. У ҳолда шундай $r\,(|x_0|<r<R)$ мусбат сон мавжудки, $[-r,r]$ сегмент x_0 нуктани ўз ичига олади (65-расм). (58) даражали қатор 2- тео-



65- расм

ремага кўра $[-r, r]$ сегментда мунтазам яқинлашувчидир. Шу сабабли унинг йиғиндиси 2- § даги 2- теоремага асосан $[-r, r]$ сегментнинг исталган нуқтасида, хусусан x_0 нуқтасида узлуксиз функция бўлади.

4- теорема. (58)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторни ўзининг яқинлашиш интервалининг исталган нуқтасида ҳадма- ҳад дифференциаллаш мумкин.

Исботи. (58) даражали қатор $]-R, R[$ яқинлашиш интервалига эга бўлсин. Берилган қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

(60) қаторни қараймиз. Унинг яқинлашиш интервали 1- теоремага асосан берилган қаторнинг яқинлашиш интервали билан устма- уст тушади. x яқинлашиш интервалининг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Яқинлашиш интервалининг ичида ётувчи ва x_0 нуқтани ўз ичига олувчи $[-r, r]$ сегментни қарайлик ($|x_0| < r < R$) (65- расмга қаранг). (60) қатор 2- теоремага асосан мунтазам яқинлашувчидир. Демак, 2- §, 4- теоремага асосан унинг йиғиндиси берилган қатор йиғиндисининг ҳосиласига тенг, яъни

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

5- теорема. Ушбу

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторни $]-R, R[$ яқинлашиш интервалида ҳадма- ҳад интеграллаш мумкин, яъни x_1 ва x_2 яқинлашиш интервалига тегишли нуқталар бўлса, у ҳолда

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} a_0\, dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n\, dx + \ldots .$$

Исботи. Яқинлашиш интервалида ётувчи ҳамда x_1, x_2 нуқталарни ўз ичига олган $[-r, r]$ сегментни қараймиз. $[-r, r]$ сегментда даражали қатор мунтазам яқинлашувчи бўлганлиги учун 2- §, 3- теоремага асосан уни ҳадма- ҳад интеграллаш мумкин.

3. $x - a$ айирманинг даражалари бўйича қаторлар. Энди $x - a$ айирманинг даражалари бўйича (57) кўринишдаги

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots$$

қаторларни қараймиз. (58) кўринишдаги қаторлар (57) кўринишдаги қаторларнинг $a = 0$ бўлгандаги хусусий ҳолидир. $x - a = t$ деб (57) қаторни (58) кўринишдаги

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \tag{63}$$

қаторга келтирамиз. (63) қатор $]-R, R[$ яқинлашиш интервалига эга бўлсин. Бу деган сўз, у $-R < t < R$ да яқинлашувчи ва $|t| > R$ да узоқлашувчидир. Бироқ бу ҳолда (57) қатор $-R < x - a < R$, яъни

$a - R < x < a + R$ бўлганда яқинлашувчи ва $|x - a| > R$ бўлганда узоқлашувчидир.

Шундай қилиб, (57) даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси маркази a нуқтада ва узунлиги $2R$ бўлган интервалдир. (57) қатор бу интервалнинг барча нуқталарида абсолют яқинлашувчи, бу интервалдан ташқарида эса узоқлашувчидир. $x = a + R$ ва $x = a - R$ нуқталарда (яъни яқинлашиш интервалининг охирларида) конкрет ҳолларга боғлиқ равишда яқинлашиш ёки узоқлашиш рўй бериши мумкин.

x нинг даражалари бўйича қаторларнинг хоссалари $x - a$ нинг даражалари бўйича қаторлар учун ҳам ўринлидир.

(57) даражали қатор $]a - R, a + R[$ интервалда абсолют яқинлашади ва унинг йиғиндиси бу интервалда узлуксиз функциядир. Даражали қаторни унинг яқинлашиш интервалининг ичида ҳадма- ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш мумкин, шу билан бирга ҳосил бўлган қаторлар дастлабки (57) қатор эга бўлган ўша яқинлашиш интервалига эга бўлади.

(57) даражали қаторнинг яқинлашиш интервалини ҳам амалда Даламбер аломати ёрдамида топиш мумкин:

Мисол. Ушбу даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

$$\frac{x-2}{1\cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots + \tag{*}$$

Ечилиши. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$\frac{|x-2|}{1\cdot 2} + \frac{|x-2|^2}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{|x-2|^n}{n\cdot 2^n} + \ldots \tag{**}$$

қаторни қарайлик. Унга Даламбер аломатини қўллаймиз.

$$u_n = \frac{|x-2|^n}{n\cdot 2^n}, \qquad u_{n+1} = \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^{n+1} n\cdot 2^n}{|x-2|^n (n+1)\, 2^{n+1}} = \frac{|x-2|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-2|}{2}.$$

(**) қатор Даламбер аломатига асосан $\frac{|x-2|}{2} < 1$ бўлганда яқинлашади ва $\frac{|x-2|}{2} > 1$ бўлганда узоқлашади. Демак, берилган (*) қатор ҳам $\frac{|x-2|}{2} < 1$ бўлганда яқинлашувчи ва $\frac{|x-2|}{2} > 1$ бўлганда узоқлашувчидир. Шунинг учун (*) қатор маркази $a = 2$ нуқтада бўлган $0 < x < 4$ интервалда яқинлашади.

Берилган қаторнинг $x = 0$ ва $x = 4$ нуқталарда, яъни яқинлашиш интервалининг охирларида яқинлашиш масаласини текширамиз. $x = 4$ бўлганда узоқлашувчи

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

гармоник қаторни ҳосил қиламиз.

$x = 0$ бўлганда ноабсолют яқинлашувчи ишора алмашинувчи

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (*) қатор $0 \leqslant x < 4$ шартни қаноатлантирувчи барча x ларда яқинлашади.

4. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш. Тейлор қатори. $f(x)$ функция яқинлашиш интервали $]a-R, a+R[$ бўлган

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots \quad (64)$$

даражали қаторнинг йиғиндисидан иборат бўлсин.

Бу ҳолда $f(x)$ функция a нуқтанинг атрофида даражали қаторга ёки $x-a$ нинг даражалари бўйича ёйилади деб айтилади. Бу даражали қаторнинг $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларини топамиз.

Даражали қаторни яқинлашиш интервалида ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинлигини биз биламиз, бунда натижада яқинлашиш интервали дастлабки қаторнинг $]a-R, a+R[$ яқинлашиш интервалидан иборат бўлган қатор ҳосил бўлади. (64) айниятни кетма-кет дифференциаллаб, яқинлашиш интервалидан олинган исталган x учун ўринли бўлган ушбу айниятларни ҳосил қиламиз:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+\dots$$
$$\dots+a_n(x-a)^n+a_{n+1}(x-a)^{n+1}+\dots,$$
$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3+\dots+na_n(x-$$
$$-a)^{n-1}+(n+1)a_{n+1}(x-a)^n+\dots,$$
$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\dots+n(n-1)a_n(x-$$
$$-a)^{n-2}+(n+1)na_{n+1}(x-a)^{n-1}+\dots,$$
$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+\dots+n(n-1)(n-2)a_n(x-$$
$$-a)^{n-3}+(n+1)n(n-1)a_{n+1}(x-a)^{n-2}+\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overset{(n)}{f}(x)=n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2a_n+(n+1)n(n-1)\dots 3\cdot 2a_{n+1}(x-$$
$$-a)+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Бу айниятларда $x=a$ десак, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f(a)=a_0,\ f'(a)=a_1,\ f''(a)=2a_2,\ f'''(a)=2\cdot 3a_3\dots \overset{(n)}{f}(a)=$$
$$=n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2a_n,\dots$$

Бу ердан даражали қаторнинг коэффициентларини ҳосил қиламиз.

$$a_0=f(a),\ a_1=f'(a),\ a_2=\frac{f''(a)}{2},\ a_3=\frac{f'''(a)}{2\cdot 3},\dots,a_n=\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{2\cdot 3\cdot 4\dots n},\dots$$

ёки

$$a_0=f(a), a_1=\frac{f'(a)}{1!},\ a_2=\frac{f''(a)}{2!}, a_3=\frac{f'''(a)}{3!},\dots,a_n=\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}.$$

Коэффициентларнинг топилган қийматларини (64) тенгликка қўямиз:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$
$$\dots+\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

Шундай қилиб, агар $f(x)$ функция $x-a$ нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйилса, у ҳолда бу қатор ушбу кўринишда бўлади:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \quad (65)$$

(65) қатор $f(x)$ функция учун *Тейлор* қатори* деб аталади.

Хусусий ҳолда, $a=0$ бўлганда (65) қатор

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{\overset{(n)}{f}(0)}{n!}x^n+\dots \quad (66)$$

кўринишни олади. Бу қатор $f(x)$ функция учун *Маклорен** қатори* деб аталади.

Шундай қилиб, агар функция $x-a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилса, у ҳолда бу қатор унинг Тейлор қатори (ёки $a=0$ бўлса, Маклорен қатори) бўлади.

Кўриниб турибдики, агар функция $x-a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилса, у ҳолда у $x=a$ нуқтада барча тартибли ҳосилаларга эга бўлади ёки, одатда айтилишича, a нуқтада чексиз дифференциалланувчи бўлади.

Энди тескари масалани қараймиз. a нуқтада чексиз дифференциалланувчи $f(x)$ функция берилган бўлсин. Унинг учун формал равишда

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

Тейлор қаторини тузамиз.

Ушбу масалани қўямиз: $f(x)$ функция билан унинг учун тузилган мазкур Тейлор қаторининг йиғиндиси бир хил бўладими? Ҳар доим ҳам бундай бўлавермаслиги ушбу мисоллардан кўринади.

Қуйидагича аниқланган $y=f(x)$ функцияни қарайлик:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Бу функция $x=0$ нуқтада барча тартибли ҳосилаларга эга, шу билан бирга $\overset{(n)}{f}(0)=0$ $(n=1,2,\dots)$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Шу сабабли бу функция учун Тейлор қатори ушбу кўринишда ёзилади:

* Б. Тейлор (1685 — 1731) — инглиз математиги.
** К. Маклорен (1698 — 1746) — шотланд математиги.

$$0+\frac{0}{1!}+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots.$$

Унинг $S(x)$ йиғиндиси нолга айнан тенг ва демак, берилган функция билан бир хил эмас.

Энди берилган функциянинг Тейлор қатори қандай шартларда бу функция билан бир хил бўлишини аниқлаймиз. Тейлор қаторининг хусусий йиғиндисини ёзамиз.

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (67)$$

Бу хусусий йиғинди *n-даражали Тейлор кўпҳади* деб аталади.

$f(x)$ функция билан унинг n-даражали кўпҳади орасидаги айирмани қараймиз. Бу айирма *Тейлор қаторининг қолдиқ ҳади* деб аталади ва $R_n(x)$ орқали белгиланади*.

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x). \quad (68)$$

Теорема. *a нуқтада чексиз дифференциалланувчи $f(x)$ функция унинг учун тузилган Тейлор қаторининг йиғиндиси бўлиши учун $R_n(x)$ қолдиқ ҳад $n\to\infty$ да нолга интилиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурлиги. $f(x)$ функция Тейлор қаторининг йиғиндиси, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ бўлсин. У ҳолда (68) муносабатдан $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ келиб чиқади.

Етарлилиги. $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ бўлсин. У ҳолда (68) муносабатдан $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ экани келиб чиқади. Бу $f(x)$ функция қаторнинг йиғиндиси эканини билдиради.

Бу теорема функциянинг Тейлор қаторига ёйилиш-ёйилмаслик масаласини текшириш учун унинг қолдиқ ҳади $R_n(x)$ нинг $n\to\infty$ даги характерини текшириш кераклигини кўрсатади. Агар аргументнинг берилган $x=x_0$ қиймати учун $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x_0)=0$ бўлса, у ҳолда Тейлор қаторининг йиғиндиси фукциянинг x_0 нуқтадаги қийматига, яъни $f(x_0)$ га тенг бўлади. Агар $R_n(x_0)$ нолга интилмаса, Тейлор қатори ё узоқлашади, ёки унинг $x=x_0$ даги қиймати функциянинг берилган x_0 нуқтадаги қиймати билан бир хил бўлмайди.

$R_n(x)$ қолдиқ ҳаднинг кўринишини топайлик. (68) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

*Тейлор қаторининг қолдиқ ҳадини Тейлор қаторининг қолдиғи билан чалкаштирмаслик лозим. Тейлор қаторининг қолдиғи бу унинг $S(x)$ йиғиндиси билан $S_n(x)$ хусусий йиғиндиси орасидаги айирма, яъни $S(x)-S_n(x)$ дир. Тейлор қаторининг $R_n(x)$ қолдиқ ҳади эса $f(x)$ функция билан $S_n(x)$ орасидаги айирмадир. $S(x)=f(x)$ бўлган ҳолдагина Тейлор қаторининг қолдиғи Тейлор қаторининг қолдиқ ҳади билан бир хил бўлади.

Бу муносабатга $S_n(x)$ нинг ифодасини келтириб қўямиз:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (69)$$

$R_n(x)$ қолдиқ ҳадни

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q \quad (70)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда Q ҳали топилиши керак бўлган катталикдир.

У ҳолда (69) формулани қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q. \quad (71)$$

Тайин x оламиз, у ҳолда Q бирор сон қиймат олади. Q ни топиш учун қуйидаги ёрдамчи функцияни тузамиз:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

Равшанки, $t=x$ деб, $F(x)=0$ ни ҳосил қиламиз. (71) тенгликни эътиборга олиб, шунингдек $F(a)=0$ эканига ҳам ишонч ҳосил қиламиз. x ўзгармас деб фараз қилиб, $F(x)$ нинг t бўйича ҳосиласини топамиз:

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{2f''(t)}{2!}(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{3f'''(t)}{3!}(x-t)^2-\frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3+\ldots+\frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n(n+1)}{(n+1)!}Q$$

ёки ихчамлаштиришлардан сўнг:

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n}{n!}Q.$$

Шундай қилиб, $F(t)$ функция $[a,\ x]$ сегментда дифференциалланувчи ва бу сегментнинг охирларида нолга тенг қийматларни қабул қилади. Демак, у Ролль теоремаси (VI боб, 6-§, 2-пунктга қаранг) шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун a ва x орасида жойлашган шундай $t=c$ қиймат мавжудки, унинг учун $F'(t)$ ҳосила нолга тенг бўлади: $F'(c)=0$, яъни

$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{(x-c)^n}{n!}Q=0.$$

Бу тенгликдан $Q = f^{(n+1)}(c)$ ни топамиз. Q нинг топилган бу қийматини (70) тенгликка қўйиб, қолдиқ ҳад учун ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{72}$$

бу ерда c нуқта a ва x орасида жойлашган.

Қолдиқ ҳаднинг (72) формула кўринишидаги ифодаси *Лагранж формасидаги қолдиқ ҳад* дейилади.

$a = 0$ бўлган хусусий ҳолда Маклорен қатори учун қолдиқ ҳаднинг ифодасини ҳосил қиламиз:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{73}$$

бу ерда c нуқта 0 ва x орасида жойлашган.

Қолдиқ ҳаднинг юқорида келтирилган кўринишлари бир қатор ҳолларда унинг $n \to \infty$ даги хусусиятини текширишни осонлаштиради.

(69) ифодани ва қолдиқ ҳад учун (72) ифодани эътиборга олиб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{74}$$

бу ерда c нуқта a ва x орасида жойлашган.

(74) формула *Тейлор формуласи*, унинг $a = 0$ бўлган хусусий ҳолдаги кўриниши *Маклорен формуласи* дейилади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{75}$$

бу ерда c нуқта 0 ва x орасида жойлашган.

5. Баъзи элементар функцияларни Тейлор ва Маклорен қаторларига ёйиш. Баъзи элементар функцияларни даражали қаторларга ёйилишига оид мисоллар кўрамиз.

$f(x) = e^x$ функцияни даражали қаторга ёйиш. Бу функциянинг ҳосилаларини топамиз: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$. Сўнгра $x = 0$ деб қуйидагиларни топамиз:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ \ldots, f^{(n)}(0) = 1,\ \ldots$$

(66) формуладан фойдаланиб, $f(x) = e^x$ функция учун Маклорен қаторини ёзамиз:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \tag{76}$$

1-§, 1-пункт, 2-мисолда кўрсатилганидек, (76) қатор бутун сон ўқида яқинлашади ва $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$.

Бу қаторнинг йиғиндиси e^x функцияга тенг эканини исботлаш учун исталган x да $R_n(x)$ қолдиқ ҳад $n \to \infty$ да нолга интилишини кўрсатамиз. $f^{(n+1)}(c) = e^c$ бўлгани учун $R_n(x)$ қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

бу ерда c нуқта 0 ва x орасида жойлашган [(73)-формулага қаранг]. e^x функция монотон ўсувчи, шунинг учун $e^c < e^{|x|}$, чунки $c < |x|$. Шундай қилиб,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}. \tag{77}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ бўлгани учун $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ ҳам $n \to \infty$ да нолга интилади. Демак, (77) тенгсизликка асосан x нинг исталган қийматлари учун $R_n(x) \to 0$ ва (76) қаторнинг йиғиндиси e^x функция билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, бутун сон ўқида ушбу ёйилма ўринлидир:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \tag{78}$$

$f(x) = \sin x$ функцияни даражали қаторга ёйиш. Ҳосилаларни топамиз: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x$, $f^{\mathrm{V}}(x) = \cos x$, $f^{\mathrm{VI}}(x) = -\sin x, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(VI боб, 2-§, 1-пункт, 4-мисолга қаранг).

$x = 0$ да

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{\mathrm{IV}}(0) = 0,$$
$$f^{\mathrm{V}}(0) = 1,\ \ldots,\ f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},\ f^{(2n)}(0) = 0,\ \ldots .$$

(66) формуладан фойдаланиб, $\sin x$ функция учун ушбу Маклорен қаторини ҳосил қиламиз:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Бу қаторнинг бутун сон ўқида яқинлашувчи эканини текшириш осон. Унинг қолдиқ ҳади

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\sin\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ни текширамиз, бу ерда c нуқта 0 ва x орасида жойлашган.

$|f^{(n+1)}(c)| = \left|\sin\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leqslant 1$ бўлгани учун $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Энди $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (олдинги мисолга қаранг) эканини эътиборга олиб, $R_n(x) \to 0$ деган хулосага келамиз.

Шу сабабли бутун сон ўқида $\sin x$ функция учун қуйидаги ёйилма ўринлидир:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots . \qquad (79)$$

$f(x) = \cos x$ *функциянинг даражали қаторга ёйиш.* $\cos x$ функциянинг ёйилмасини $\sin x$ функцияни қаторга ёйишда фойдаланилган усулга ўхшаш усул ёрдамида ҳосил қилиш мумкин. Бироқ $\cos x$ функция ёйилмасини $\sin x$ функция ёйилмасини ҳадма-ҳад дифференциаллаб ҳосил қилиш осондир*:

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \ldots + \left[\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]' + \ldots .$$

Бинобарин,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots . \qquad (80)$$

Бу ёйилма бутун сон ўқида ўринлидир.

Биномиал қатор. $f(x) = (1+x)^m$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёямиз, бу ерда m — нолдан фарқли исталган ҳақиқий сон.

Берилган функцияни дифференциаллаймиз:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \; f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \ldots$$
$$\ldots, \; f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \ldots$$

$x = 0$ деб топамиз:

$$f(0) = 1, \; f'(0) = m, \; f''(0) = m(m-1), \; f'''(0) = m(m-1)(m-2), \ldots$$
$$\ldots, \; f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Коэффициентларнинг топилган қийматларини (66) формулага қўйиб $(1+x)^m$ функциянинг Маклорен қаторини ҳосил қиламиз:

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Бу қатор *биномиал қатор* дейилади. Унинг яқинлашиш интервалини топамиз. Даламбер аломатидан фойдаланиб топамиз:

* Ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинлиги даражали қаторлар хоссаларидан келиб чиқади.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\right|} =$$
$$= |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Кўрамизки, $|x| < 1$ да, яъни $-1 < x < 1$ интервалда қатор яқинлашади. Бу ҳолда ҳам $R_n(x)$ қолдиқ ҳад $|x| < 1$ учун $n \to \infty$ да нолга интилишини кўрсатиш мумкин. Бироқ бу исбот анча мураккаб бўлгани учун биз уни бу ерда келтирмаймиз.

Шундай қилиб, $-1 < x < 1$ интервалда қуйидаги ёйилма ўринлидир:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (81)$$

Агар фақат m натурал сон бўлмаса, $|x| > 1$ да қатор узоқлашади. Яқинлашиш интервалининг чегараларида m нинг тайин* қийматларига боғлиқ равишда қатор яқинлашади ёки узоқлашади. Агар m натурал сон бўлса, у ҳолда $n = m + 1$ дан бошлаб барча коэффициентлар нолга айланади ва Ньютон биномининг хусусий ҳолидан иборат кўпҳадни ҳосил қиламиз. m нинг турли қийматлари учун биномиал қаторларга бир нечта мисол келтирамиз.

а) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Бу ерда $m = \frac{1}{2}$.

(81) формулага кўра:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!} + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^n}{n!} + \ldots$$

* Қаторнинг яқинлашиш интервали охирларида m нинг турли қийматларига мос ҳолда ўзини тутиши қуйидаги жадвалдан кўринади:

$x = 1$	$m \leqslant -1$ $-1 < m < 0$ $m > 0$	узоқлашади ноабсолют яқинлашади абсолют яқинлашади
$x = -1$	$m < 0$ $m > 0$	узоқлашади абсолют яқинлашади

ёки соддалаштиришлардан сўнг:

$$\sqrt{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2 \cdot 1!} - \frac{1 \cdot x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3x^3}{2^3 \cdot 3!} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n\, n!} x^n + \dots \qquad (82)$$

Бу ёйилма $-1 < x < 1$ ҳол учун ўринли экани равшан. Муфассалроқ текширишлар у $x = -1$ ва $x = 1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатади (169- бетдаги сноскага қаранг).

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Бу ерда $m = -\frac{1}{2}$. (81) формулага кўра $|x| < 1$ учун ўринли бўлган қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n\, n!} x^n + \dots \qquad (83)$$

(83) ёйилма $x = 1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатиш мумкин (169- бетдаги сноскага қаранг).

в) $f(x) = (1+x)^5$. Бу ерда $m = 5$. (81) формулани қўллаб, соддалаштиришлардан сўнг қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

$y = \ln x$ функцияни даражали қаторга ёйиш. $\ln x$ функция $x = 0$ да аниқланмаган, шунинг учун уни x нинг даражалари бўйича қаторга, яъни Маклорен қаторига ёйиш мумкин эмас.

$y = \ln x$ функцияни $x - 1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёямиз. Ҳосилаларни топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},\ f''(x) = -1 \cdot x^{-2},\ f'''(x) = 1 \cdot 2\, x^{-3},$$

$$f^{IV}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3\, x^{-4},\ \dots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n},\ \dots.$$

$x = 1$ да қуйидагига эгамиз: $f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$,

$$f'''(1) = 2!,\ f^{IV}(1) = -3!,\ \dots,\ f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1})(n-1)!,\dots$$

(65) формула бўйича $\ln x$ нинг Тейлор қаторини топамиз:

$$\frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!\,(x-1)^3}{3!} - \frac{3!\,(x-1)^4}{4!} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \dots$$

ёки соддалаштиришлардан сўнг:

$$\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots$$

Даламбер аломатини татбиқ қилиб ва қаторни яқинлашиш интервали охирларида текшириб, унинг x нинг $0 < x \leqslant 2$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун яқинлашишини кўрамиз. x нинг яқинлашиш соҳасига тегишли барча қийматлари учун $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ эканини кўрсатиш мумкин. Шу сабабли $0 < x \leqslant 2$ учун қуйидаги ёйилма ўринли:

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots$$

Функцияни (65) ва (66) формулалар бўйича даражали қаторга ёйиш кўпинча ҳосилани топиш ва қолдиқ ҳадни текширишга оид узоқдан-узоқ ҳисоблашлар билан боғлиқдир. Функцияни даражали қаторга ёйишда бу қийинчиликлардан қутулишга имкон берадиган баъзи бир усулларни кўрсатамиз. Даражали қаторни унинг яқинлашиш интервалида ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинлигига асосланган бундай усуллардан бири билан $y = \cos x$ функцияни қаторга ёйишда танишган эдик.

Геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиш. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ функцияни қараймиз. Кўриш осонки, бу функция биринчи ҳади бирга тенг ва махражи $q = -x$ бўлган геометрик прогрессиянинг йиғиндисидир. Шунинг учун:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \qquad \textbf{(84)}$$

Бу ёйилма $|x| < 1$ учун ўринлидир. $f(x)$ функцияни $f(x) = (1+x)^{-1}$ кўринишида ёзиш мумкинлигини эслатиб ўтамиз, бинобарин, (84) биноминал қатордир ва уни (81) формула бўйича $m = -1$ да ҳосил қилиш мумкин эди.

Ўрнига қўйиш усули. Бу усулнинг моҳияти қуйида келтирилган мисоллардан кўринади.

1- мисол. e^{-x^2} функцияни даражали қаторга ёйинг,

Ечилиши. $-x^2 = t$ деймиз, у ҳолда $e^{-x^3} = e^t$. (78) формуладан[1] фойдаланиб, бу функция ёйилмасини ёзамиз:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Бу ёйилма t нинг барча қийматлари учун ўринлидир. Хусусан, $t = -x^3$ да x нинг барча қийматлари учун ўринли бўлган ушбу ёйилмага эгамиз:

$$e^{-x^3} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots.$$

2- мисол. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

Ечилиши. $t = -x^2$ деймиз. У ҳолда $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. (83) формулани татбиқ қилиб, $-1 < t < 1$ интервал учун ўринли бўлган ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1\cdot t}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3\, t^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\, t^3}{2^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n\, 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1) t^n}{2^n\, n!} + \ldots$$

Бу ёйилмада t нинг ўрнига $-x^2$ ни қўйиб, x нинг $-1 < x < 1$ интервалларга барча қийматлари учун ўринли бўлган ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1\cdot x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\, x^6}{2^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n}}{2^n\, n!} + \ldots$$

3-мисол. $\frac{1}{1+x^2}$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

Ечилиши. $t = x^2$ деб, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+t}$ ни ҳосил қиламиз. (84) формула бўйича топамиз:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots .$$

Бу ёйилмада t нинг ўрнига x^2 ни қўйиб, $-1 < x < 1$ интервал учун ўринли бўлган

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

ёйилмани ҳосил қиламиз.

Интеграллаш усули билан даражали қаторга ёйиш. Усулнинг моҳияти қуйидагича. $f(x)$ функциянинг ҳосиласи учун даражали қатор маълум бўлсин. У ҳолда қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб, $f(x)$ функциянинг қаторга ёйилмасини ҳосил қиламиз.

4-мисол. $\ln(1+x)$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечилиши. Қуйидаги айниятни қараймиз: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. Интеграл остидаги $\frac{1}{1+t}$ функцияни (84) формула бўйича даражали қаторга ёямиз:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots .$$

Бу қатор t нинг $-1 < t < 1$ интервалдаги барча қийматлари учун яқинлашади. Яқинлашиш интервалида даражали қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин бўлгани учун $|x| < 1$ учун қуйидагига эгамиз:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots)\, dt =$$

$$= t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \ldots + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Шундай қилиб, агар $-1 < x < 1$ бўлса, у ҳолда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots$$

Бу тенглик $x = 1$ учун ҳам тўғрилигини кўрсатиш мумкин.

5-мисол. $\operatorname{arctg} x$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

Ечилиши. Қуйидаги айниятни қараймиз:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \ldots .$$

формуладан фойдаланиб, даражали қаторга ёямиз (3-мисолга қаранг). Бу қатор t нинг $-1 < t < 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун яқинлашади. Демак.

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)\, dt = t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x +$$

$$+ \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Бу ёйилма x нинг $-1 < x < 1$ интервалдаги барча қийматлари учун тўғридир. Бироқ, у интервалнинг охирларида ҳам ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, $[-1, 1]$ сегментга тегишли бўлган барча x лар учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

4-§. ҚАТОРЛАРНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАРГА ТАТБИҚИ

Сонли ва функционал қаторлар тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилади. Бу татбиқларнинг баъзи энг муҳимларини келтирамиз.

1. Функцияларнинг қийматларини қаторлар ёрдамида ҳисоблаш. Функциянинг $x = x_0$ даги қийматини берилган даражадаги аниқликда ҳисоблаш талаб қилинаётган бўлсин. Берилган функцияни $]a-R, a+R[$ интервалда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

даражали қаторга ёйиш мумкин ва $x = x_0$ нуқта мазкур интервалга тегишли бўлсин. У ҳолда

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - a) + a_2(x_0 - a)^2 + \cdots + a_n(x_0 - a)^n + \cdots .$$

Етарли сондаги дастлабки ҳадларни олиб, қуйидаги тақрибий тенгликка эга бўламиз:

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - a) + a_2(x_0 - a)^2 + \cdots + a_n(x_0 - a)^n.$$

Бу тенгликнинг аниқлиги n ортиши билан оша боради. Бу тақрибий тенгликнинг абсолют хатолиги, яъни $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ қатор қолдиғининг модулига тенг:

$$|f(x_0)-S_n(x_0)|=|r_n(x_0)|,$$

бу ерда

$$r_n(x_0)=a_{n+1}(x_0-a)^{n+1}+a_{n+2}(x_0-a)^{n-2}+\dots .$$

$f(x_0)$ функциянинг қийматини $\varepsilon>0$ аниқлик билан ҳисобламоқчи бўлсак, шундай n та дастлабки ҳадлар йиғиндисини олишимиз керакки,

$$|f(x_0)-S_n(x_0)|=|r_n(x_0)|<\varepsilon$$

бўлсин.

Қатор қолдиғини баҳолаш усуллари билан 1-§, 7-пунктда танишган эдик.

Қатор қолдиғини баҳолашнинг яна бир усули — Тейлор (ёки Маклорен) қаторининг қолдиқ ҳади ёрдамида баҳолаш усулини келтирамиз.

Маълумки, агар функция даражали қаторга ёйилган бўлса, бу қатор Тейлор ёки Маклорен қатори бўлади (3-§, 4-пунктга қаранг). Бу ҳолда абсолют хатолик, яъни $|f(x_0)-S_n(x_0)|$ айирма Тейлор (ёки Маклорен) қаторининг қолдиқ ҳади модулига тенг.

Шундай қилиб,

$$|f(x_0)-S_n(x_0)|=|R_n(x_0)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0-a)^{n+1}\right|,$$

бу ерда c сон a ва x_0 орасида жойлашган. Ҳар бир конкрет ҳолга қараб қатор қолдиғини боҳолашнинг у ёки бу усули қўлланилади.

1- мисол. e сонини 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечилиши. Маълумки, ҳар қандай x учун (78) ёйилма ўринлидир:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots .$$

$x=1$ да қуйидагига эгамиз:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots .$$

Дастлабки $n+1$ та ҳадни олиб,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз.

Яқинлашиш хатолигини Маклорен қаторининг қолдиқ ҳади ёрдамида баҳолаймиз. $f^{(n+1)}(x)=e^x$ бўлгани учун $R_n(x)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, бу ерда c сон 0 ва x орасида ётади. $x=1$ да:

$$R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!},\quad 0<c<1.$$

$e^c<e^1<3$ эканини эътиборга олиб (V боб, 1-§, 8-пунктга қаранг), $R_n(1)<\dfrac{3}{(n+1)!}$ ни ҳосил қиламиз.

Агар $n=5$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{3}{(5+1)!}=\dfrac{3}{6!}=\dfrac{1}{240}>0{,}001$, агар $n=6$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{3}{(6+1)!}=\dfrac{1}{1680}<0{,}001$. Шу сабабли талаб қилинган аниқликка эришиш учун $n=6$ деб олиш етарлидир.

Шундай қилиб, 0,001 гача аниқлик билан қуйидагига эгамиз:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}.$$

Биз йўл қўйган хатоликка яна қўшилувчиларни яхлитлашда қилинадиган хатолик ҳам қўшилмаслиги учун ҳар бир қўшилувчини битта қўшимча хона билан ёзиб чиқамиз:

$e\approx 1{,}0000+1{,}0000+0{,}5000+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083+0{,}0014=2{,}7181$.

Демак, 0,001 гача аниқлик билан: $e=2{,}718$.

2- мисол. $\sin 18^\circ$ ни 0,0001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечилиши. $\sin x$ учун x нинг барча қийматларида ўринли бўлган (79) ёйилмага эгамиз:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

18° ни радианларга ўтказиб, $x=\pi/10$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!\,10^3}+\frac{\pi^5}{5!\,10^5}-\dots .$$

Бу қатор ишоралари алмашинувчидир, унинг ҳадлари абсолют қиймати бўйича камаяди ва умумий ҳади нолга интилади. Шунинг учун қаторнинг қолдиғи биринчи ташлаб юборилган ҳаддан катта бўлмайди (1-§, 7-пунктга қаранг). $\dfrac{\pi^3}{3!\,10^3}>0{,}0001$ ва $\dfrac{\pi^5}{5!\,10^5}<0{,}0001$ бўлгани учун 0,0001 гача аниқлик билан

$$\sin 18^\circ\approx\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!\,10^3}$$

ни ҳосил қиламиз. Барча ҳисоблашларни $\pi\approx 3{,}14159$ деб битта қўшимча хона рақами олиб бажарамиз. $\pi^3=31{,}00624$ бўлгани учун

$$\sin 18^\circ=\frac{31{,}14159}{10}-\frac{31{,}00624}{6000}=0.31416-0{,}00517=0{,}30899.$$

Шундай қилиб, $\sin 18^\circ\approx 0{,}3090$.

2. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш. Усул моҳиятини мисоллар ёрдамида тушунтирамиз.

1- мисол. $\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx$ аниқ интегрални 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечилиши. Бу интегрални ҳисоблаш учун Ньютон — Лейбниц формуласини татбиқ қила олмаймиз, чунки e^{-x^2} нинг бошланғич функцияси мавжуд бўлса-да, бироқ элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Шунинг учун интеграл остидаги e^{-x^2} функцияни даражали қаторга ёямиз (3-§, 3-пункт, 1-мисолга қаранг):

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots .$$

Бу қатор бутун сон ўқида яқинлашади. Демак, уни исталган сегментда хусусан, $[0,1/3]$ сегментда ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1/3}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx = x\,\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3\cdot 1!}\Big|_0^{1/3} +$$

$$+\frac{x^5}{5\cdot 2!}\Big|_0^{1/3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!}\Big|_0^{1/3} + \cdots = \frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 1!\,3^3}+\frac{1}{5\cdot 2!\,3^5}-\frac{1}{7\cdot 3!\,3^7}+\cdots.$$

Изланаётган интеграл ишоралари алмашинувчи қатор йиғиндисига тенг. Сўнгра

$$\frac{1}{5\cdot 2!\,3^5}=\frac{1}{2430}<0{,}001,\quad \frac{1}{3\cdot 1!\,3^3}=\frac{1}{81}>0{,}001.$$

бўлгани учун ишоралари алмашинувчи қатор бўлганда хатоликни ҳисоблаш қоидасига асосан (1- §, 7- пункт қаранг) 0,001 гача аниқлик билан қуйидагига эгамиз:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\approx 0{,}3333-0{,}0123=0{,}3210.$$

Шундай қилиб, $\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}321.$

e^{-x^2} функциянинг $F(x)$ бошланғич функцияси элементар функция эмаслигини қайд қиламиз. Уни даражали қатор йиғиндиси кўринишда ҳосил қилиш осон. Бунинг учун e^{-x^2} учун олинган қаторни 0 дан x гача оралиқда интеграллаймиз:

$$F(x)=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots$$

Бу функциянинг ҳосиласи e^{-x^2} га тенг: $F'(x)=e^{-x^2}$.

2- мисол. $\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$ интегрални 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечилиши. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$ бўлгани учун бу тенгликнинг иккала қисмини ҳадма-ҳад x га бўлиб, қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_{0,5}^{1}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)dx = x\Big|_{0,5}^{1}-\frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_{0,5}^{1}+$$

$$+\frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_{0,5}^{1}-\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{3\cdot 3!\,2^3}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{5\cdot 5!\,2^5}\right)-\cdots$$

Ҳосил қилинган бу қаторни Лейбниц теоремаси (1- §, 6- пунктга қаранг) шартларини қаноатлантирувчи ушбу иккита яқинлашувчи ишоралари алмашинувчи қаторлар айирмаси сифатида қараш мумкин:

$$1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots \qquad (*)$$

ва

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\,2^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\,2^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\,2^7}+\cdots. \qquad (**)$$

Шунинг учун

$$\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx=\left[1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\,2^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5\cdot 5!\,2^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\,2^7}+\cdots\right].$$

Бироқ Лейбниц аломати бўйича ишоралари алмашинувчи яқинлашувчи қаторда хатолик ташлаб юборилган ҳадлардан биринчисининг модулидан катта бўла олмаслиги ва $\frac{1}{7\cdot 7!}<0{,}0005$ [(*) қатор учун], $\frac{1}{5\cdot 5!\,2^5}<0{,}0005$ [** қатор учун], бўлгани учун:

$$\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx\approx\left[1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\,2^3}\right]\approx 0{,}4530.$$

Шундай қилиб, 0,001 гача аниқлик билан $\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx=0{,}453$ га эгамиз, чунки тақрибий сонларни айиришда абсолют хатолар қўшилади (IX боб, 4- §. 3- пунктга қаранг).

5- §. КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА. КОМПЛЕКС СОҲАДАГИ ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

1. Комплекс ўзгарувчининг функцияси ҳақида тушунча. VII бобда комплекс сон тушунчаси киритилган эди. Энди комплекс ўзгарувчининг функцияси тушунчасини киритамиз.

$z=x+yi$ комплекс сонлар тўплами G ни ва $w=u+vi$ комплекс сонлар тўплами Γ ни қараймиз.

Комплекс ўзгарувчининг функцияси деб ҳар бир $z\in G$ комплекс сонга бир ёки бир нечта $w\in\Gamma$ қийматни мос қўядиган қоидага айтилади. G тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси*, z эркли ўзгарувчи, w *эрксиз (боғлиқ) ўзгарувчи* ёки мослик қоидасининг ўзини ҳам *функция* дейилади. Геометрик нуқтан назардан функциянинг аниқланиш соҳаси комплекс текислик нуқталарининг бирор тўпламидан иборатдир.

Комплекс ўзгарувчининг функцияси ҳақиқий ўзгарувчининг функцияси каби белгиланади: $w=f(z)$.

Келгусида фақат бир қийматли функцияларнинг яъни $z\in G$ нинг ҳар бир қийматига $w\in\Gamma$ нинг ягона қиймати мос келадиган функцияларни қараймиз.

Қуйидаги кўпҳад комплекс ўзгарувчининг функциясига мисол бўла олади:

$$w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n,$$

бу ерда n натурал сон, $a_0, a_1, \ldots a_n$—комплекс сонлар.

Бу функция z нинг барча қийматлари учун, ёки бошқача айтганда, бутун комплекс текисликда аниқланган.

Иккита кўпҳаднинг нисбатидан иборат бўлган функция *рационал функция* дейилади. Масалан, $w = \frac{5z^3+6z-7}{2z^2+3z-2}$ рационал функциядир.

Комплекс ўзгарувчининг функцияси учун лимит, узлуксизлик ва ҳосила тушунчалари оддий функция ҳолидагидек аниқланади.

Дастлаб комплекс текислик нуқтасининг атрофи тушунчасини киритамиз: z_0 нуқтанинг δ атрофи деб маркази z_0 нуқтда ва радиуси δ бўлган доиранинг ичига айтилади.

Агар ҳар қандай мусбат ε сон олинганда ҳам, z_0 нуқтанинг шундай δ атрофи мавжуд бўлсаки, комплекс текисликнинг бу атрофда ётувчи барча (z_0 нуқта бунга кирмаслиги мумкин) z нуқталари учун $|f(z)-c|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $c=a+ib$ комплекс сон $w=f(z)$ функциянинг $z \to z_0$ даги *лимити* дейилади.

Функция лимити қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c.$$

Агар $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ тенглик ўринли бўлса, $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Берилган нуқтада узлуксиз бўлган бир нечта функциянинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳам бу нуқтада узлуксиз функция бўлишини кўрсатиш мумкин. Агар иккита узлуксиз функциянинг бўлинмасида махраж берилган нуқтада нолга тенг бўлмаса, бу нисбат ҳам узлуксиз функция бўлади.

Комплекс ўзгарувчининг $w=f(z)$ функциясининг *ҳосиласи* ҳақиқий ўзгарувчи функциясининг ҳосиласи каби аниқланади, яъни функция орттирмасининг эркли ўзгарувчи орттирмасига нисбатининг эркли ўзгарувчи орттирмаси нолга интилгандаги лимити каби аниқланади:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Мисол. $w=f(z)=z^n$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз: $f(z+\Delta z)=(z+\Delta z)^n$ Ньютон биноми формуласини татбиқ этиб топамиз:

$$f(z+\Delta z)=(z+\Delta z)^n = z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \ldots + (\Delta z)^n.$$

Функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = \left[z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \ldots + (\Delta z)^n\right] -$$

$$- z^n = nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \ldots + (\Delta z)^n.$$

Демак,

$$f'(z) = (\lim_{\Delta z\to 0}) \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \ldots + (\Delta z^n)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\Delta z + \ldots + (\Delta z)^{n-1}\right] = nz^{n-1}.$$

Шундай қилиб,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари учун келтириб чиқарилган йиғиндини, кўпайтмани ва бўлинмани дифференциаллаш қоидалари комплекс ўзгарувчининг функциялари учун ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

2. Комплекс ҳадли сонли қаторлар. Ҳадлари $z_n = x_n + iy_n$ комплекс сонлар бўлган $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ кетма-кетликни қараймиз. Мазкур ҳол учун кетма-кетликнинг лимити тушунчасини умумлаштирамиз.

Агар ҳар қандай мусбат ε сон олинганда ҳам, шундай натурал N сон топилсаки, барча натурал $n \geqslant N$ сонлар учун $|z_n - c| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $c = a+ib$ комплекс сон $\{z_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити* дейилади.

$z_n - c = (x_n + iy_n) - (a+bi) = (x_n - a) + i\ (y_n - b)$ бўлгани учун $|z_n - c| = |\ (x_n - a) + i\ (y_n - b)| = \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} < \varepsilon.$

Бироқ $\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}$ ифода $(x_n;\ y_n)$ ва $(a;\ b)$ нуқталар, яъни z_n ва c нуқталар орасидаги масофага тенг; демак, агар c сон $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлса, у ҳолда n ўсиши билан z_n нуқталар c нуқтага чексиз яқинлашади.

Ҳадлари комплекс сонлардан иборат

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \qquad (85)$$

қатор берилган бўлсин, бу ерда $z_n = x_n + iy_n$. Агар қатор хусусий йиғиндиси $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ нинг $n\to\infty$ да лимити мавжуд бўлса, (85) қатор *яқинлашувчи*, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ лимит эса унинг *йиғиндиси* дейилади; агар бу хусусий йиғинди лимитга эга бўлмаса, қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Қуйидаги теорема ўринли бўлиб, биз уни исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Комплекс ҳадли қатор берилган бўлсин:*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

у ҳолда берилган қатор ҳадларининг модулларидан тузилган

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

қатор яқинлашса, берилган қатор ҳам яқинлашади.

Агар комплекс ҳадли қатор берилган бўлиб, унинг ҳадлари модулларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Комплекс ҳадли абсолют яқинлашувчи қаторлар ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат абсолют яқинлашувчи қаторларга эга бўлган хоссаларга эгадир.

3. Комплекс соҳада даражали қаторлар.

Ушбу

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

даражали қатор берилган бўлсин, бу ерда $z = x + iy$ ва $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентлар комплекс ёки ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар соҳасида даражали қаторлар учун қилинганига ўхшаш қуйидагиларни аниқлаш мумкин.

1. Ҳар бир даражали қатор учун, умуман айтганда, шундай $R > 0$ сон мавжудки, барча $|z| < R$ учун даражали қатор яқинлашади, $|z| > R$ учун эса узоқлашади. Комплекс текисликнинг $|z| < R$ шартни қаноатлантирадиган $z = x + iy$ нуқталари радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган доира ичида ётади*. Бу доира даражали қаторнинг *яқинлашиш доираси*, унинг радиуси R эса *яқинлашиш радиуси* дейилади. Яқинлашиш доирасининг ташқарисида, яъни $|z| > R$ бўладиган нуқталарда даражали қатор узоқлашади. Яқинлашиш доирасининг чегарасида, яъни $|z| = R$ нуқталарда конкрет ҳолларга қараб қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Изоҳ. Агар даражали қатор фақат $z = 0$ нуқтада яқинлашса, унинг яқинлашиш радиуси нолга тенг деб ҳисобланади: $R = 0$.

Агар даражали қатор z нинг ҳамма қийматларида, яъни комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида яқинлашса, у ҳолда қаторнинг яқинлашиш радиусини чексизликка тенг деб ҳисобланади: $R = \infty$.

2. Яқинлашиш доирасининг ичида даражали қатор ҳадлари ҳақиқий сонлар бўлган қаторлар эга бўлган барча хоссаларга эга бўлади, яъни яқинлашиш доирасининг ичида даражали қатор абсолют яқинлашади ва унинг йиғиндиси $S(z)$ комплекс ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлади, даражали қаторни яқинлашиш доираси ичида ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин, бунда ҳосил қилинган қаторнинг яқинлашиш радиуси дастлабки қаторнинг яқинлашиш радиусига тенг бўлади. Бу тасдиқларни биз исботламаймиз.

Бирор яқинлашиш доирасида даражали қаторнинг йиғиндиси сифатида ифодаланиши мумкин бўлган комплекс ўзгарувчили функция бу яқинлашиш доирасида *аналитик функция* дейилади,

Яқинлашиш доирасини Даламбер аломати ёрдамида топиш мумкин.

Мисол тариқасида

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{86}$$

қаторнинг яқинлашиш соҳасини топамиз.

Берилган қатор ҳадларининг модулларидан тузилган ушбу қаторни қараймиз:

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots + \frac{|z|^n}{n!} + \ldots \tag{87}$$

Бу мусбат ишорали қатордир: $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|z|^n}{n!}\right] = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |z| \cdot 0 = 0.$$

---

* Бу $|z|$ нинг z нуқтадан координаталар бошигача масофа сифатидаги таърифидан келиб чиқади (VII боб, 3- §, 1- пунктга қаранг).

Шундай қилиб, исталган z учун $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = 0 < 1$. Бинобарин, (87) қатор комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида яқинлашади; бироқ у ҳолда 2- пунктдаги теоремага кўра (86) қатор ҳам комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида яқинлашади, шу билан бирга абсолют яқинлашади.

Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар тушунчаларини комплекс соҳадаги даражали қаторлар ёрдамида комплекс ўзгарувчи бўлган ҳол учун умумлаштирамиз.

Бизга маълумки, x нинг исталган ҳақиқий қиймати учун қуйидаги (78) ёйилма ўринлидир:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

(78) қаторда x ҳақиқий ўзгарувчини z комплекс ўзгарувчи билан алмаштиришдан ҳосил бўлган ушбу қаторни қарайлик:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Биз ҳозиргина бу қатор комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида яқинлашишини ва бинобарин, унинг йиғиндиси аналитик функция бўлишини ва у z нинг ҳақиқий қийматларида (яъни $z = x$ да) e^x билан бир хил (e^x нинг ўзи) бўлишини кўрсатдик. Бу қаторнинг йиғиндисини комплекс ўзгарувчи бўлган ҳол учун юқоридагидек e^x орқали белгилаймиз. Демак, таърифга кўра

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{88}$$

Иккита исталган z_1 ва z_2 комплекс сонлар учун $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

(88) қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаб, топамиз:

$$(e^z)' = \frac{1}{1!} + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \ldots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Буни (88) тенглик билан таққослаб, $(e^z)' = e^z$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, e^z функция комплекс соҳада кўрсаткичли функциянинг асосий хоссаларига эга бўлади. z нинг комплекс қийматлари учун $\sin z$ ва $\cos z$ ни ҳам шунга ўхшаш аниқлаймиз:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \tag{89}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} + \ldots \tag{90}$$

Бу қаторлар z нинг барча қийматлари учун абсолют яқинлашади. $z=x$, (x — ҳақиқий ўзгарувчи) да юқорида аниқланган функциялар ҳақиқий ўзгарувчининг мос равишда $\sin x$ ва $\cos x$ функциялари билан бир хил бўлади.

(89) ва (90) муносабатлардан бевосита $\sin(-z)=-\sin z$, $\cos(-z)=\cos z$ экани кўринади.

(89) ва (90) қаторларни ҳадма-ҳад дифференциаллаб, $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$ эканини топамиз.

e^z кўрсаткичли функция билан $\sin z$ ва $\cos z$ тригонометрик функциялар орасида содда боғланиш мавжуд. $z=it$ бўлсин, бу ерда t — комплекс сон. $z=it$ ни (88) қаторга қўямиз, у ҳолда

$$e^{it}=1+\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2}{2!}+\frac{(it)^3}{3!}+\frac{(it)^4}{4!}+\frac{(it)^5}{5!}+\frac{(it)^6}{6!}+\dots.$$

Маълумки, $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$ ва ҳ. к.

Шунинг учун

$$e^{it}=1+\frac{it}{1!}-\frac{t^2}{2!}-\frac{it^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{it^5}{5!}-\frac{t^6}{6!}-\frac{it^7}{7!}+\dots.$$

(88) қатор z нинг исталган қийматида абсолют яқинлашади, демак, қўшилувчиларнинг ўрни алмашишидан қаторнинг йиғиндиси ўзгармайди. Шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$e^{it}=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots\right)+i\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\dots\right).$$

Бироқ t нинг исталган қийматида

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots,\quad \sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\dots$$

муносабатлар ўринли. Демак,

$$e^{it}=\cos t+i\sin t, \tag{91}$$

бу ерда t — исталган комплекс сон.

(91) тенгликда t ни $-t$ га алмаштириб, топамиз:

$$e^{-it}=\cos(-t)+i\sin(-t)=\cos t-i\sin t.$$

Шундай қилиб, исталган t комплекс сон учун қуйидагига эгамиз:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t,\quad e^{-it}=\cos t-i\sin t. \tag{92}$$

(92) формулалар *Эйлер* формулалари* дейилади. Бу формулалардан

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},\qquad \cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \tag{93}$$

ни топиш осон.

---

*Л. Эйлер (1707 — 1783) буюк математик, механик ва физик.

Мисол. $e^{3+i\frac{\pi}{2}}$ ни топинг.

Ечилиши. Кўрсаткичли функция хоссасига кўра $e^{3+i\pi/2}=e^3e^{i\pi/2}$. Энди $e^{i\pi/2}$ ни ҳисоблаш учун Эйлер формуласини $t=\frac{\pi}{2}$ да қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$e^{3+i\pi/2}=e^3e^{i\pi/2}=e^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=ie^3.$$

Пировардида, комплекс текисликда e^z функция $T=2\pi i$ даврли даврий функция эканини қайд қиламиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

6- §. ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

1. Даврий жараёнлар ва даврий функциялар. Табиат ва техникада содир бўладиган жуда кўп жараёнлар маълум вақт оралиғида такрорланиш хоссасига эгадир. Бундай жараёнлар даврий жараёнлар дейилади. Двигателда шатун ва поршенининг ҳаракатлари, электромагнит тебранишлар тарқалиши билан боғлиқ бўлган ҳодисалар ва кўпгина ҳодисалар даврий жараёнларга мисол бўла олади. Даврий жараёнларни ўрганиш математикада даврий функциялар билан тавсифланади. Даврий функция таърифи I боб, 4- §, 8- пунктда келтирилган.

$\sin x$ ва $\cos x$ энг содда даврий функцияларга мисол бўлади. Бу функцияларнинг даври 2π га тенг:

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x,\qquad \cos(x\pm 2\pi)=\cos x.$$

$\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ функциялар ҳам даврий функциялардир, бироқ, уларнинг даври $T=2\pi/\omega$ га тенг. Ҳақиқатан ҳам, масалан,

$$\sin\left[\omega\left(x\pm\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]=\sin(\omega x\pm 2\pi)=\sin\omega x.$$

Иккита даврий функциянинг йиғиндиси масалан, $a\sin\omega_1 x+b\cos\omega_2 x$ кўринишдаги функция умуман айтганда, энди даврий бўлмайди. Бироқ, агар $\omega_1:\omega_2$ нисбат рационал сон бўлса, у ҳолда бу йиғинди даврий функция бўлишини исбот қилиш мумкин.

Энг содда даврий жараён — гармоник тебраниш $\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ даврий функциялар билан тавсифланади. Анча мураккаб даврий жараёнлар $\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ кўринишидаги чекли ёки чексиз сондаги қўшилувчилардан тузилган функциялар орқали тавсифланишини қуйида кўрамиз.

Келгусида бизга зарур бўладиган бир нечта формулани келтирамиз.

p ва k бутун сонлар қандай бўлишидан қатъи назар, қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cdot\cos kx\,dx=\begin{cases}\text{агар } p\neq k & \text{бўлса, } 0;\\ \text{агар } p=k & \text{бўлса, } \pi.\end{cases} \tag{94}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\cdot\sin kx\,dx=\begin{cases}\text{агар } p\neq k & \text{бўлса, } 0;\\ \text{агар } p=k & \text{бўлса, } \pi.\end{cases} \tag{95}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \cos kx\, dx = 0, \tag{96}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0. \tag{97}$$

Масалан, (94) тенгликни текширайлик. Бизга маълум бўлган

$$\cos px \cdot \cos kx = \frac{\cos (p+k)\, x + \cos (p-k)\, x}{2}$$

формуладан фойдаланамиз. Дастлаб, $p \neq k$ дейлик. У ҳолда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cdot \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (p+k)\, x}{p+k} + \frac{\sin (p-k)\, x}{p-k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

чунки $\sin (p+k)\, \pi = 0$, $\sin (p-k)\, \pi = 0$.

Агар $p = k$ бўлса, у ҳолда $\cos px \cdot \cos kx = \cos^2 px = \frac{1+\cos 2px}{2}$ ва

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2px)\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2p}\sin 2px\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

(95), (96) ва (97) тенгликлар ҳам худди шундай текширилади.

2. **Фурье қатори.** Қуйидаги функционал қаторни қараймиз:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + $$
$$+ b_n \sin nx + \ldots \tag{98}$$

Бу қатор *тригонометрик қатор* дейилади. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ сонлар тригонометрик қаторнинг *коэффициентлари* дейилади. Қаторнинг озод ҳади келгусида ҳосил бўладиган формулалар бир хил кўринишда бўлиши учун $\frac{a_0}{2}$ кўринишида ёзилган. (98) қатор кўпинча қуйидаги кўринишда ҳам ёзилади:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{99}$$

(99) тригонометрик қаторнинг ҳадлари умумий $T = 2\pi$ даврга эга бўлгани учун, қаторнинг йиғиндиси ҳам, агар у яқинлашса, 2π даврга эга бўлган даврий функция бўлади.

$f(x)$ функция бу қаторнинг йиғиндиси бўлсин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{99'}$$

Бундай ҳолда $f(x)$ функция тригонометрик қаторга ёйилади дейилади. Бу қаторни $[-\pi, \pi]$ сегментда (тўғри) яқинлашувчи деб фараз қилиб, унинг коэффициентларини қандай топишни кўрсатамиз.

Сегментда тўғри яқинлашувчи қаторни бу сегментда ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин (2- §, 2- пунктга қаранг). Шунинг учун:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right).$$

Бироқ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$ [(97) га қаранг], шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi.$$

Бу ердан

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Энди k натурал сон бўлсин. a_k коэффициентни топиш учун (99′) қаторни $\cos kx$ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз. Ҳосил қилинган

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

қатор 2- §, 2- пунктдаги 5- теоремага кўра $[-\pi, \pi]$ сегментда тўғри маънода яқинлашувчидир. Уни ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx + \right.$$
$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\, dx\right). \tag{100}$$

(97) формулага кўра $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0$, (94) ва (96) тенгликларга кўра йиғинди белгиси остида $n = k$ бўлгандаги фақат битта интеграл нолдан фарқлидир:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi.$$

Шунинг учун (100) тенглик

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = a_k \pi$$

кўринишда ёзилади, бу ердан:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Худди шунга ўхшаш (99′) тенгликнинг иккала қисмини $\sin kx$ га кўпайтириб ва $-\pi$ дан π гача оралиқда интеграллаб, (95), (96) ва (97) тенгликларга кўра b_k коэффициентлар учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Шундай қилиб, агар даври 2π бўлган даврий $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда тўғри яқинлашувчи (99) тригонометрик қаторнинг йиғиндиси бўлса, бу қаторнинг коэффициентлари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{101}$$

Бу формулалар бўйича исталган натурал k учун қаторнинг барча коэффициентларини ҳисоблаш мумкин. Қаторнинг бу формулалар бўйича аниқланган коэффициентлари Эйлер — Фурье коэффициентлари (ёки *Фурье* коэффициентлари*) дейилади.

Коэффициентлари (101) *Эйлер — Фурье формулалари* бўйича аниқланадиган ушбу

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

тригонометрик қатор $f(x)$ функциянинг *Фурье қатори* дейилади.

Шундай қилиб. агар даврий $f(x)$ функция тўғри яқинлашувчи тригонометрик қаторнинг йиғиндиси бўлса, бу қатор унинг Фурье қатори бўлади.

3. Фурье қаторининг яқинлашиши. (101) формулани келтириб чиқаришда биз олдиндан $f(x)$ функция тўғри яқинлашувчи (99) тригонометрик қаторга ёйилади деб фараз қилган эдик. Агар бундай фараз қилинмасдан $f(x)$ функция учун (101) формулаларнинг ўнг томонларидаги барча интеграллар мавжуд деб олинса, у ҳолда бу формулалар бўйича a_0, a_k ва b_k коэффициентларни ҳисоблаш мумкин ва берилган функциянинг Фурье қаторидан иборат бўлган (99) тригонометрик қаторни тузиш мумкин.

Шундай йўл билан тузилган Фурье қатори яқинлашувчи бўладими, агар у яқинлашувчи бўлса, у ана шу қаторнинг коэффициентларини

* Ж. Фурье (1768 — 1830) — француз математиги.

ҳисоблаш учун фойдаланилган худди шу $f(x)$ функцияга яқинлашади деб айта оламизми?

Даражали қаторларни ўрганишда ана шундай саволга дуч келган эдик.

Фурье қаторининг берилган функцияга яқинлашиш хоссасига функцияларнинг анча кенг синфлари эга бўлиши маълум бўлди. Фурье қатори яқинлашишининг етарлилик шартлари ва бинобарин, функцияларни Фурье қаторига ёйиш имконияти Дирихле* теоремаси ёрдамида берилади. Бу теоремани келтиришдан аввал иккита таъриф киритамиз.

Агар $f(x)$ функция аниқланган $[a, b]$ сегментни чекли сондаги сегментчаларга бўлиш мумкин бўлсаки, уларнинг ҳар бирининг ичида бу функция фақат ўсадиган ёки фақат камаядиган, ёки ўзгармас бўлса, $f(x)$ функция бу сегментда *бўлакли-монотон* дейилади.

Энди бу бўлим учун асосий бўлган таърифни келтирамиз.

Агар $f(x)$ функция:

1) $[a, b]$ *сегментда узлуксиз ёки унда чекли сондаги I тур** узилиш нуқталарига эга бўлса,*

2) $[a, b]$ *сегментда бўлакли-монотон бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Дирихле шартларини қаноатлантиради дейилади.*

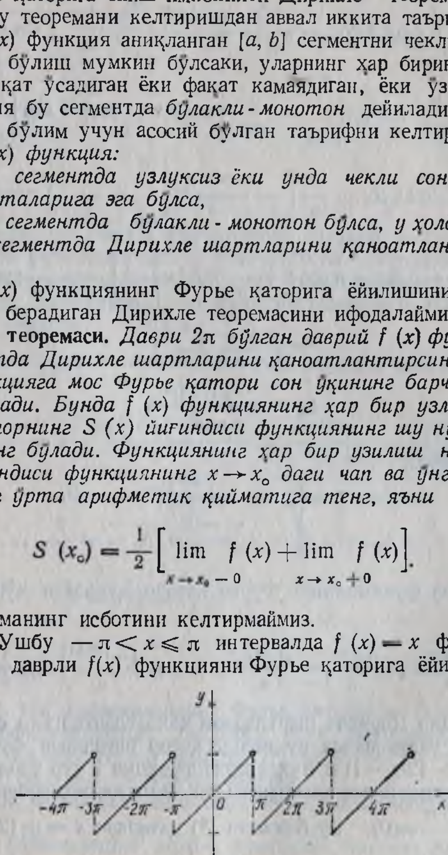
Энди $f(x)$ функциянинг Фурье қаторига ёйилишининг етарлилик шартларини берадиган Дирихле теоремасини ифодалаймиз.

Дирихле теоремаси. *Даври 2π бўлган даврий $f(x)$ функция исталган сегментда Дирихле шартларини қаноатлантирсин. Бундай ҳолда бу функцияга мос Фурье қатори сон ўқининг барча нуқталарида яқинлашади. Бунда $f(x)$ функциянинг ҳар бир узлуксизлик нуқтасида қаторнинг $S(x)$ йиғиндиси функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг бўлади. Функциянинг ҳар бир узилиш нуқтаси x_0 да қатор йиғиндиси функциянинг $x \to x_0$ даги чап ва ўнг лимит қийматларнинг ўрта арифметик қийматига тенг, яъни*

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right]. \tag{102}$$

Бу теореманинг исботини келтирмаймиз.

Мисол. Ушбу $-\pi < x \leqslant \pi$ интервалда $f(x)=x$ формула билан берилган 2π даврли $f(x)$ функцияни Фурье қаторига ёйинг (66- чизма).



66- расм

* П. Дирихле (1805 — 1859) — немис математиги.

** I тур узилиш нуқтасининг таърифини V боб, 2- §, 1-пунктдан қаранг.

Ечилиши. Бу функция Дирихле шартларини қаноатлантиради, демак, уни Фурье қаторига ёйиш мумкин. (101) формулалардан фойдаланиб, Эйлер — Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[\pi^2-(-\pi)^2\right]=0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi k^2}\left[\cos k\pi-\cos(-k\pi)\right]=0;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[-\pi\cos kx-\pi\cos k+\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=-\frac{2}{k}\cos k\pi=$$

$$=-\frac{2(-1)^k}{k}\,{}^*;$$

$$b_k=-\frac{2(-1)^k}{k}.$$

Шундай қилиб,

$$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=\ldots=0,$$

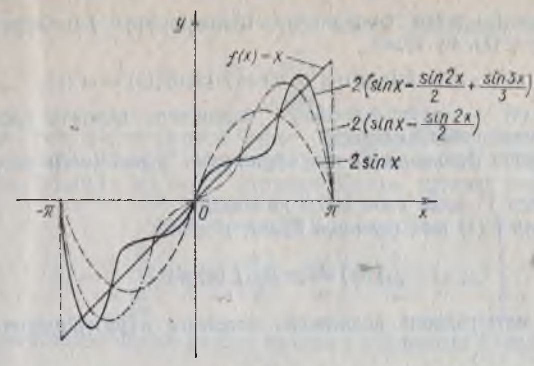
$$b_1=\frac{2}{1},\ b_2=-\frac{2}{2},\ b_3=\frac{2}{3},\ b_2=-\frac{2}{4},\ \ldots,$$

Демак, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори қуйидаги кўринишда бўлади:

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\ldots\right]\ (*)$$

$f(x)$ функция Дирихле шартларини қаноатлантиргани сабабли $f(x)$ нинг исталган узлуксизлик нуқтасида қатор йиғиндиси функция қийматига тенг. $\pm(2n-1)\pi$ нуқталарда функция I тур узилишларга эга ва қатор йиғиндиси нолга тенг (чап ва ўнг лимит қийматларининг ярим йиғиндиси: $\frac{-\pi+\pi}{2}=0$). Бу бевосита (*) қатордан $x=\pm(2n-1)\pi$ да

* Ҳақиқатан, k жуфт бўлганда $\cos k\pi=1$ ва k тоқ бўлганда $\cos k\pi=-1$; шунинг учун $\cos k\pi=(-1)^k$ деб ёзиш мумкин.



67-расм

ҳам ҳосил бўлади. 67- расмда функциянинг графиги ва (*) қаторнинг битта, иккита ва учта ҳадга эга бўлган ҳусусий йиғиндилари тасвирланган. Расмдан йиғинди ҳадлари сони орта бориши билан қатор хусусий йиғиндиларининг графиклари $f(x)$ функция графигига яқинлаша бориши кўриниб турибди.

(*) ёйилмадан фойдали натижа келтириб чиқариш мумкин. $x=\frac{\pi}{2}$ деб топамиз:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}=2\left[\frac{\sin(\pi/2)}{1}-\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin(3\pi/2)}{3}-\frac{\sin(4\pi/2)}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5}-\ldots\right]$$

ёки

$$\frac{\pi}{2}=2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right],$$

бу ердан

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

4. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари. Айрим ҳолларда Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун фойдаланадиган (101) формулаларни соддалаштириш мумкин. Бу жуфт ва тоқ функциялар учун хосдир (1-боб, 4-§, 8-пунктга қаранг).

Жуфт ва тоқ функцияларнинг бир нечта содда хоссаларини келтирамиз.

1°. *Жуфт функциянинг жуфт функцияга ёки тоқ функциянинг тоқ функцияга кўпайтмаси жуфт функциядир.*

Масалан, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ жуфт функциялар бўлсин. $\omega(x)=f(x)\times\times\varphi(x)$ функция ҳам жуфт эканини исбот қилайлик.

$f(x)$ва $\varphi(x)$ жуфт функциялар бўлгани учун $f(-x) = f(x)$ ва $\varphi(-x) = \varphi(x)$, бу ердан

$$\omega(-x) = f(-x)\cdot\varphi(-x) = f(x)\cdot\varphi(x) = \omega(x),$$

яъни $\omega(x)$ — жуфт функция. 1° тасдиқнинг иккинчи қисми ҳам худди шундай исбот қилинади.

2°. *Жуфт функциянинг тоқ функцияга кўпайтмаси тоқ функциядир.*

Бу хосса 1° хосса каби исбот қилинади.

3°. *Агар $f(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{103}$$

Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига кўра қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Биринчи интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз. $x = -z$ деймиз, у ҳолда $dx = -dz$; агар $x = 0$ бўлса, $z = 0$; агар $x = -a$ бўлса, $z = a$. Шунинг учун

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(z)\,dz.$$

Демак, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(z)\,dz + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, чунки аниқ интеграл интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишига боғлиқ эмас.

4°. *Агар $f(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{104}$$

Бу хоссанинг исботи 3° хосса исботига ўхшаш.

Энди $f(x)$ жуфт функцияни Фурье қаторига ёйиш керак бўлсин. $\cos kx$ жуфт функция, $\sin kx$ эса тоқ функция бўлгани учун $f(x)\cos kx$ жуфт функция, $f(x)\ \sin kx$ эса тоқ функция бўлади (1° ва 2° хоссалар). 3° ва 4° хоссаларга кўра:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0.
\end{aligned}\right| \tag{105}$$

Шунга кўра жуфт функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Агар тоқ функцияни Фурье қаторига ёйиш талаб қилинган бўлса, у ҳолда 1° ва 2° хоссаларга кўра $f(x)\cos kx$ кўпайтма тоқ функция, $f(x)\sin kx$ эса жуфт функция бўлади. Шунинг учун

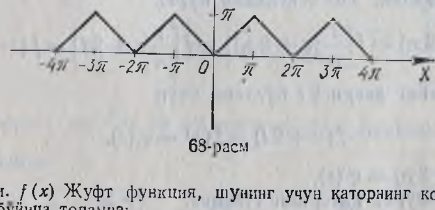
$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= a_k = 0,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.
\end{aligned}\right| \tag{107}$$

Тоқ функциянинг Фурье қатори қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{108}$$

Шундай қилиб, *жуфт функция каррали ёйларнинг фақат косинуслари бўйича, тоқ функция эса каррали ёйларнинг фақат синуслари бўйича қаторга ёйилади.*

Мисол. Ушбу $-\pi < x \leqslant \pi$ интервалда $f(x) = |x|$ формула билан берилган 2π даврли $f(x)$ функцияни Фурье қаторига ёйинг (68- расм).



68-расм

Ечилиши. $f(x)$ Жуфт функция, шунинг учун қаторнинг коэффициентларини (105) формула бўйича топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi} = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x\sin kx}{k}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = \left.\frac{2}{\pi k^3}\cos kx\right|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1) - 1\right];\quad b_k = 0.$$

Шундай қилиб,

$$a_0 = \pi, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi \cdot 1^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{4}{\pi \cdot 5^2}, \ldots$$

Берилган $f x)$ функцияга мос Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right].$$

Берилган функция Дирихле теоремасининг шартларини қаноатлантиради, демак, қатор бутун сон ўқида яқинлашади ва йиғиндиси $f(x)$ функциядан иборат бўлади.

5. Даври $2l$ бўлган функцияларни Фурье қаторига ёйиш. Кўпинча, даври 2π дан фарқли бўлган функцияни тригонометрик қаторга ёйишга тўғри келади.

Бу ҳол осонгина юқорида ўрганилган ҳолга келтирилади. Дирихле шартларини ихтиёрий сегментда қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг даври $2l$ бўлсин:

$$f(x \pm 2l) = f(x).$$

Ушбу
$$z = \frac{\pi}{l}x \tag{109}$$

муносабат ёрдамида янги z ўзгарувчи киритамиз.

Ушбу
$$\varphi(z) = f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \tag{110}$$

функцияни қараймиз. (109) тенгликдан $x = \frac{l}{\pi}z$ келиб чиқади, шунинг учун $\varphi(z) = f(x)$. Энди $\varphi(z)$ даври 2π га тенг функция эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, 110 тенгликка кўра:

$$\varphi(z + 2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(z + 2\pi)\right] = f\left[\frac{l}{\pi}z + 2l\right] = f(x + 2l).$$

$f(x)$ функциянинг даври $2l$ бўлгани учун

$$f(x + 2l) = f(x) = \varphi(z).$$

Демак, $\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z)$.

$\varphi(z)$ учун Фурье қаторини тузамиз:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kz + b_k \sin kz), \tag{111}$$

бу ердаги a_0, a_k, b_k коэффициентлар Эйлер — Фурье формулалари бўйича топилади. Қуйидагига эгамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right)dz.$$

$z = \frac{\pi}{l}x$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда $dz = \frac{\pi}{l}dx$, интеграллаш чегараларини мос равишда ўзгартириб, топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right)dz = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx.$$

Худди шундай, қуйидагиларни ҳам топамиз:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\cos kz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\cos kz\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x \cdot \frac{\pi}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\sin kz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\sin kz\,dz =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

Шундай қилиб, даври $2l$ бўлган $f(x)$ функциянинг Эйлер — Фурье коэффициентлари қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx, \\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx. \end{aligned}\right| \tag{112}$$

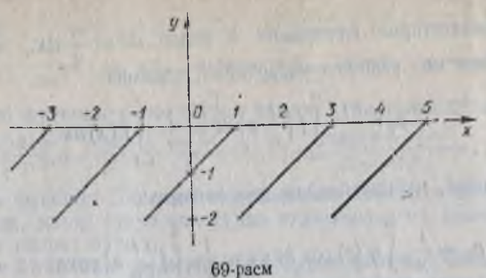
(111) қаторда z ни $\frac{\pi}{l}x$ га алмаштириб, $f(x)$ функция учун қаторни ҳосил қиламиз:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{113}$$

1-мисол. Ушбу $-1 < x \leqslant 1$ интервалда $f(x) = x - 1$ формула билан берилган $2l = 2$ даврли функцияни Фурье қаторига ёйинг. $f(x)$ функциянинг графиги 69-расмда тасвирланган.

Ечиш. Фурье коэффициентларини (112) формулалар бўйича $l = 1$ деб топамиз:

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(x - 1)\,dx = \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = -2;$$



69-расм

$$a_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos k\pi x dx = \int_{-1}^{1} x\cos k\pi x dx - \int_{-1}^{1}\cos k\pi x dx =$$

$$= \frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin k\pi x}{k\pi}dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

$$b_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin k\pi x dx = \int_{-1}^{1} x\sin k\pi x\, dx - \int_{-1}^{1}\sin k\pi x dx =$$

$$= -\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx + \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{k\pi}\Big[\cos k\pi + \cos(-k\pi)\Big] +$$

$$+ \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi}\Big[\cos k\pi - \cos(-k\pi)\Big] = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}.$$

Шундай қилиб,

$$a_0 = -2, \quad a_k = 0, \quad b_k = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}.$$

Хусусан,

$$b_1 = \frac{2}{1\pi}, \quad b_2 = -\frac{2}{2\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \ \dots .$$

Берилган $f(x)$ функция учун Фурье қатори

$$-1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \dots\right]$$

кўринишда бўлади.

Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье коэффициентлари учун чиқарилган (105) ва (107) формулалар $2l$ даврли функция учун қуйидаги кўринишга келади.

Жуфт функция учун:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x dx, \quad b_k = 0, \qquad (114)$$

тоқ функция учун:

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx. \qquad (115)$$

Бу ҳолда (106) ва (108) Фурье қаторлари мос равишда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (116)$$

(жуфт функция учун) ва

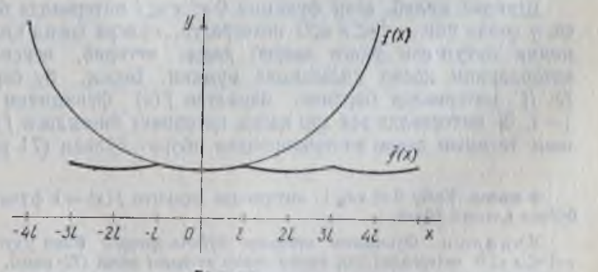
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (117)$$

(тоқ функция учун) кўринишда бўлади.

Пункт охирида нодаврий функцияни Фурье қаторига ёйиш масаласини қараб чиқамиз. $f(x)$ бутун сон ўқида берилган нодаврий функция бўлсин. Тригонометрик қаторнинг йиғиндиси даврий функция бўлгани учун, равшанки, берилган нодаврий функцияни Фурье қаторига ёйиб бўлмайди.

Бу функцияни $-l < x \leqslant l$ интервалда текширамиз ва йиғиндиси шу функцияга тенг бўлган Фурье қаторини қуришга ҳаракат қиламиз.

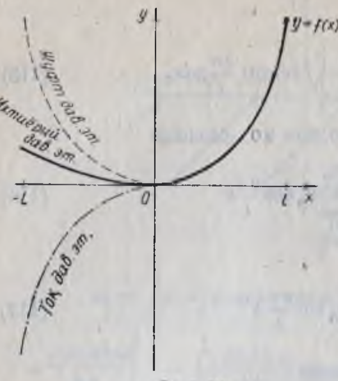
Бунинг учун даври $2l$ бўлган ва $-l < x \leqslant l$ интервалда қиймати $f(x)$ функциянинг қийматига тенг бўлган ёрдамчи $\overline{f}(x)$ функцияни қараймиз (70-расм). Агар $\overline{f}(x)$ функция учун Дирихле теоремаси



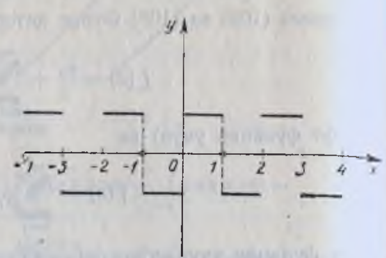
70-расм

шартлари бажарилса, уни тегишли Фурье қатори ёрдамида тасвирлаш мумкин. $-l < x \leqslant l$ интервалдаги бу қатор функциянинг барча узлуксизлик нуқталарида $\overline{f}(x) = f(x)$ йиғиндига эга бўлади.

Баъзан фақат $0 < x \leqslant l$ интервалда берилган функция билан иш кўришга тўғри келади. Бундай ҳолда биз функцияни бирор қонун бўйича $-l < x \leqslant 0$ интервалда давом эттиришимиз, сўнгра уни бутун



71- расм



72- расм

сон ўқига $2l$ давр билан даврий давом эттиришимиз мумкин. Функцияни $0 < x \leqslant l$ интервалдан $-l < x \leqslant 0$ интервалга ихтиёрий давом эттириш мумкин.

Кўпинча функцияни жуфт ёки тоқ тарзда давом эттирилади. Агар функция жуфт, яъни $f(-x) = f(x)$ тарзда давом эттирилаётган бўлса, у ҳолда Фурье қатори фақат косинуслар ва озод ҳаддан иборат бўлади. Агар функция тоқ, яъни $f(-x) = -f(x)$ тарзда давом эттирилаётган бўлса, у ҳолда қатор фақат синуслардан иборат бўлади.

Шундай қилиб, агар функция $0 < x \leqslant l$ интервалда берилган бўлса, у ҳолда уни $-l < x \leqslant 0$ интегралга, сўнгра ҳосил қилинган функцияни бутун сон ўқига даврий давом эттириб, чексиз кўп Фурье қаторларини ҳосил қилишимиз мумкин. Бироқ, бу барча қаторлар $]0, l[$ интервалда биргина: берилган $f(x)$ функцияни ифодалайди, $]-l, 0[$ интервалда эса ҳар қайси қаторнинг йиғиндиси $f(x)$ функциянинг тегишли давом эттирилишидан иборат бўлади (71- расм).

2- мисол. Ушбу $0 < x \leqslant 1$ интервалда берилган $f(x) = 1$ функцияни синуслар бўйича қаторга ёйинг.

Ечилиши. Функцияни синуслар бўйича қаторга ёйиш учун дастлаб уни $-1 < x \leqslant 0$ интервалда тоқ тарзга давом эттириш керак (72- расм), сўнгра ҳосил қилинган функцияни бутун сон ўқига даврий давом эттириш керак.

Қаторнинг коэффициентлари

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

формулалар бўйича ҳисобланади. Бу ерда $l = 1$ ва $f(x) = 1$ деб олиш керак. У ҳолда

$$b_k = 2\int_0^1 \sin k\pi x dx = -2\left.\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right|_0^1 = -\frac{2}{k\pi}[\cos k\pi - \cos 0] =$$
$$= -\frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1].$$

Шундай қилиб,

$$a_0 = a_k = 0; \quad b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \ \ldots$$

Берилган функциянинг Фурье қатори қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right].$$

XII БОБ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Дифференциал тенгламаларга олиб келадиган масалалар ва баъзи умумий тушунчалар. Математика, физика ва техниканинг кўпчилик масалаларини ечишда кўпинча изланаётган ва берилган ўзгарувчи миқдорлар орасидаги функционал боғланишни бирданига топиш қийин бўлади, лекин эркли ўзгарувчи, изланаётган функция ва унинг ҳосилаларини боғловчи тенглама тузишга муваффақ бўлинади. Бундай тенглама *дифференциал* тенглама дейилади. Дифференциал тенгламада эркли ўзгарувчи ва изланаётган функция ошкор ҳолда қатнашмаслиги ҳам мумкин, бироқ унда изланаётган функциянинг битта ёки бир нечта ҳосиласи бўлиши шарт.

Масалан,

$$y' + 2y = 0, \qquad y'' + y' \cos x = \ln x, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

дифференциал тенгламалардир.

Энг содда дифференциал тенгламаларга бошланғич функцияни топиш масаласини ечишда дуч келган эдик. Ҳақиқатан, агар $y = F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда бошланғич функциянинг таърифига кўра

$$y' = f(x). \tag{1}$$

Изланаётган функциянинг ҳосиласи қатнашган (1) тенглама энг содда дифференциал тенгламадир.

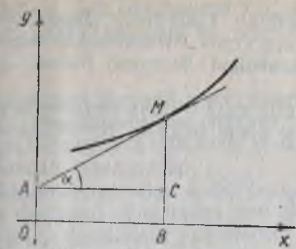
1-масала. Жисм 10 мин давомида 100° дан 60° гача совиди. Атрофдаги температура ўзгармас ва 10° га тенг. Жисм температураси неча минутдан сўнг 20° бўлишини аниқланг.

Бир қарашда бу масала жуда осон ечиладигандек кўринади: агар жисм 10 мин давомида 40° га (100° дан 60° гача) совиган бўлса, у ҳолда яна 40° га (60° дан 20° гача) жисм яна 10 минутда совийди. Шундай қилиб, жисм 100° дан 20° гача 20 минутда совийди.

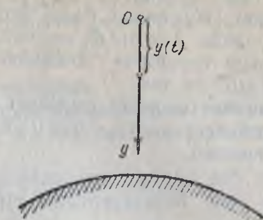
Бироқ бундай мулоҳаза хатодир. Гап шундаки, физикадан маълум бўлишича, жисмнинг совиш тезлиги жисм қиздирилган температура билан атроф-муҳит температураси орасидаги айирмага пропорционалдир.

Жисмнинг бирор t вақт моментидаги температурасини $T(t)$ билан белгилаймиз, у ҳолда температуранинг вақт бўйича ўзгариш тезлиги $\frac{dT}{dt}$ ҳосилага тенг бўлади. Совиш тезлиги жисм қиздирилган температура билан атроф-муҳит температураси орасидаги айирмага пропорционал бўлгани учун

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10) \tag{2}$$



73-расм



74-расм

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда k — топилиши керак бўлган пропорционаллик кўпайтувчисидир. (2) тенглама номаълум функцияси $T(t)$ бўлган дифференциал тенгламадир. Бу функцияни қандай топиш (яъни ҳосил қилинган тенгламани қандай ечиш) тўғрисида 3-пунктда гапирилади.

2-масала. $M_0(1; 2)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги хоссага эга бўлган эгри чизиқ тенгламасини топинг: координата ўқлари, изланаётган эгри чизиқнинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтасига ўтказилган уринма ҳамда M нуқта орқали ўтувчи ва Oy ўққа параллел тўғри чизиқ билан чегараланган $OAMB$ трапеция (73-расм) юзи 3 кв. бирликка тенг.

$M(x; y)$ нуқта тенгламаси $y = f(x)$ бўлган изланаётган эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $OAMB$ трапециянинг юзи $S = \frac{1}{2}(OA + BM) \cdot OB$ формула орқали ифодаланади. Дифференциал тенглама тузиш учун OA, BM ва OB кесмаларни $(x; y)$ нуқтанинг координаталари ва y' ҳосила орқали ифодалаймиз.

Чизмадан: $BM = y$ ва $OB = AC = x$, $OA = BM - CM = BM - AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = y - xy'$. Бу ифодаларни трапеция юзини ифодаловчи формулага келтириб қўйсак, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{y - xy' + y}{2}x = 3,$$

ёки

$$2xy - x^2y' = 6. \tag{3}$$

(3) дифференциал тенгламадир. Уни ечиш, яъни номаълум $y = f(x)$ функцияни топиш 5-пунктда қаралади.

3-масала. Массаси m бўлган моддий нуқта ернинг тортиш кучи таъсири остида пастга тушмоқда. Агар бошланғич момент t (пайт) да нуқтанинг тезлиги $v = v_0$ бўлса, нуқтанинг t вақт давомида ўтган йўлини аниқлаш талаб қилинади.

Нуқта ҳаракатланадиган вертикал тўғри чизиқни Oy ўқ деб қабул қиламиз. Координаталар боши учун ўқнинг нуқта ҳолатининг бошланғич моменти ($t = 0$ да $y = 0$) га мос келадиган нуқтасини оламиз. Oy ўқнинг мусбат йўналиши учун Ерга томон йўналишини оламиз

(74- расм). Нуқтанинг босиб ўтган y йўли t вақтнинг бирор функцияси бўлади. Ана шу функцияни топиш керак. Механикадан маълумки, эркин тушаётган жисмнинг тезланиши ўзгармас бўлиб, $g \approx 9{,}81$ м/с^2 га тенг.

Иккинчи томондан тезланиш йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага, яъни y'' га тенг экани маълум. Бу ифодаларни ўзаро тенглаб,

$$y''=g \tag{4}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Биз яна дифференциал тенглама ҳосил қилдик. (2) ва (3) дифференциал тенгламалардан фарқи унда иккинчи тартибли ҳосила қатнашади. Биз бу тенгламанинг масала шартида берилган қуйидаги чеклашларни қаноатлантирадиган ечимини топишимиз керак. Бошланғич пайтда ўтилган йўл $y_0=0$ га ва бошланғич тезлик v_0 га тенг. Тезлик йўлдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила бўлгани учун бу шарт қуйидагича ёзилади: $y'|_{t=0}=v_0$.

Масаланинг ечилиши 2- § нинг 2-пунктида келтирилади.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, дифференциал тенгламада биринчи тартибли, иккинчи тартибли ёки янада юқори тартибли ҳосилалар иштирок этиши мумкин. Қуйидаги таърифни киритамиз.

Дифференциал тенгламанинг *тартиби* деб номаълум функциянинг бу тенгламага кирувчи ҳосилаларининг энг юқори тартибига айтилади.

Масалан, $y'+3xy-y^2=0$ ва $y'+\sqrt{y}=0$ — биринчи тартибли; $y''+5xy'+6y=0$, $y''+y^2\sin x=x$, $y''+x^2=y$ — иккинчи тартибли; $y^{IV}+y''\ln x=1$ — тўртинчи тартибли тенгламалардир ва ҳ. к.

Юқорида кўрилган масалаларда (2) ва (3) биринчи тартибли, (4) эса иккинчи тартибли тенгламадир.

Энди биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ўрганишга киришамиз.

2. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. *Биринчи тартибли дифференциал тенглама* эркли ўзгарувчи, изланаётган функция ва унинг биринчи тартибли ҳосиласини ўзаро боғлайди. Шунинг учун уни умумий кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x,y,y')=0. \tag{5}$$

Бу ерда x — эркли ўзгарувчи, y — ўзгарувчи x нинг изланаётган функцияси, y' — унинг ҳосиласи.

(5) тенгламада x ва y ошкор ҳолда иштирок этмаслиги мумкин, лекин y' ни ўз ичига олиши шарт.

(5) тенгламани, агар мумкин бўлса, y' ҳосилага нисбатан ечиб,

$$y'=f(x,y) \tag{6}$$

ни топамиз.

(6) тенглама *ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенглама* дейилади.

Изоҳ. (6) тенгламани $f(x,y)\,dx-dy=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундай кўринишда бу тенглама қуйидаги умумийроқ кўринишдаги

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{6'}$$

тенгламанинг хусусий ҳоли бўлиб ҳисобланади.

(6′) тенгламани ҳам биринчи тартибли дифференциал тенглама деб аташга келишамиз. Масалан, $x^2\,dx+y^2\,dy=0$ биринчи тартибли дифференциал тенгламадир.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг *ечими* деб тенгламага келтириб қўйилганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай $y=\varphi(x)$ функцияга айтилади.

Масалан, $y=\sin x$ функция $y'+y\,\mathrm{ctg}x-2\cos x=0$ тенгламанинг ечимидир; ҳақиқатан ҳам,

$$(\sin x)'+\sin x\,\mathrm{ctg}\,x-2\cos x=\cos x+\cos x-2\cos x\equiv 0.$$

Дифференциал тенгламанинг ечимини топишда кўп ҳолларда интеграллаш амалини бажаришга тўғри келишини қуйида кўрамиз. Шунинг учун дифференциал тенглама ечимини топиш процесси *дифференциал тенгламани интеграллаш* дейилади.

Дифференциал тенглама ечимининг графиги *интеграл эгри чизиқ* дейилади.

Энг аввало биринчи тартибли (6) дифференциал тенглама қандай геометрик маънога эга эканини аниқлаймиз.

(6) тенгламада x ва y ўзгарувчиларни текисликдаги нуқтанинг декарт координаталари сифатида қараймиз. $y=\varphi(x)$ — (6) тенгламанинг ечими бўлсин. Бу нарса (6) тенгламада y ўрнига $\varphi(x)$ функцияни, y' ўрнига $\varphi'(x)$ ҳосилани қўйсак,

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)). \tag{7}$$

айниятни ҳосил қилишимизни билдиради. $y=\varphi(x)$ функция графигида, яъни интеграл эгри чизиқда ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтани қараймиз ва бу нуқтада уринма ўтказамиз. Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра

$$\varphi'(x)=\mathrm{tg}\alpha, \tag{8}$$

бу ерда α — уринманинг Ox ўққа оғиш бурчаги. (8), (7) ва (6) муносабатлардан $\mathrm{tg}\alpha=f(x,\varphi(x))=f(x,y)$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда $(x;y)$ қараётган M нуқтанинг координаталари. Шундай қилиб, интеграл эгри чизиққа унинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти (6) дифференциал тенглама ўнг томонининг бу нуқтадаги қийматига тенг. Шундай қилиб, (6) дифференциал тенглама интеграл эгри чизиқнинг ҳар бир $(x;y)$ нуқтасида бу эгри чизиққа ўтказилган уринманинг йўналишини аниқлайди.

$y'=f(x,y)$ дифференциал тенгламани қарайлик. Ҳар бир $M(x;y)$ нуқтага бурчак коэффициенти $f(x,y)$ га, яъни $\mathrm{tg}\alpha=f(x,y)$ га тенг кесмани мос қўямиз.

Текисликнинг ҳар бир нуқтасига Ox ўққа оғиш бурчагининг тангенси $y'=f(x,y)$ дифференциал тенглама ўнг томонининг шу нуқтадаги қийматига тенг бўладиган қилиб кесма қўйилган қисми (ёки бутун текисликнинг ўзи) бу дифференциал тенгламанинг *йўналишлар майдони* деб аталади.

Шундай қилиб, (6) дифференциал тенгламага унинг йўналишлар майдони мос келади.

(6) дифференциал тенгламанинг геометрик маъноси ана шундан иборат. Юқорида кўрсатилган кесмаларни етарлича кўп сондаги нуқталар учун ўтказиб, йўналишлар майдонининг яққол тасвирини ҳосил қиламиз. Интеграл эгри чизиқ нуқтасига ўтказилган уринма шу нуқтада ўтказилган кесма йўналишига эга бўлгани учун (6) дифференциал тенгламани ечиш (интеграллаш) масаласини геометрик қуйидагича ифодалаш мумкин: *интеграл эгри чизиқ шундай ўтказилсинки, унинг ҳар бир нуқтадаги уринмасининг йўналиши йўналишлар майдонининг шу нуқтадаги кесмаси йўналиши билан бир хил бўлсин.*

Йўналишлар майдонини қуришни енгиллаштириш учун Oxy текисликнинг кесмалар бир хил йўналишга эга бўладиган барча нуқталарини топамиз.

Текисликнинг майдон кесмалари бир хил йўналишга эга бўладиган барча нуқталар тўплами дифференциал тенгламанинг *изоклинаси* дейилади.

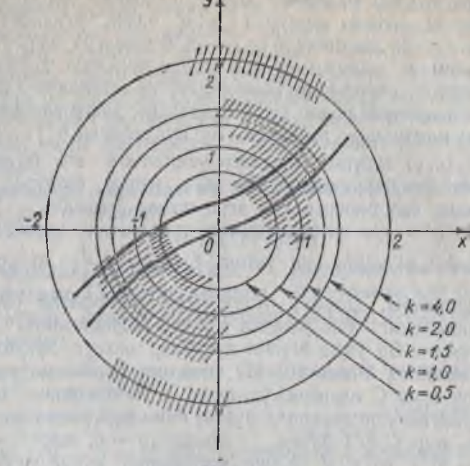
Изоклинанинг (бир хил оғишлар эгри чизиғининг) тенгламасини топиш жуда осон. Ҳақиқатан ҳам, изоклинанинг ҳар бир нуқтасида майдон кесмаларининг оғиш бурчаги тангенси бир хил — $\operatorname{tg}\alpha = k$ қийматга эга. Иккинчи томондан, $\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$ бўлгани учун изоклинанинг ҳар бир нуқтасининг координаталари

$$f(x, y) = k \tag{9}$$

тенгламани қаноатлантиради. (9) муносабат (6) дифференциал тенглама изоклинасининг тенгламасидир. (9) тенгламадаги k турли қийматлар қабул қилиши мумкин деб фараз қиладиган бўлсак, у ҳолда бу тенгламани изоклиналар оиласининг тенгламаси сифатида қараш мумкин.

Масалан, $y' = x^2 + y^2$ дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдонини тузайлик.

Бу дифференциал тенглама изоклиналарининг тенгламалари $x^2 + y^2 = k$ кўринишга эга бўлиб, бу ерда изоклиналар радиуси $\sqrt{k}$ ва маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланалардан иборат бўлади. Айланаларнинг ҳар бирининг нуқталари орқали Ox ўқ билан тангенси α га тенг бир хил бурчаклар ҳосил қиладиган кесмалар ўтказиш керак. Масалан, $k = 1/2$ да изоклина $x^2 + y^2 = 1/2$ айланадан, $k = 1$ да $x^2 + y^2 = 1$ айланадан иборат ва ҳ. к. $k = 0$ да $x^2 + y^2 = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ягона $(0; 0)$ нуқта қаноатлантиради. Бу ҳолда изоклина фақат битта нуқтадан иборат бўлиб, унинг учун $\operatorname{tg}\alpha = 0$ бўлади. 75-расмда берилган дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдони тасвирланган. Интеграл эгри чизиқни ясаш учун текисликда бирор $(x_0; y_0)$ нуқтани оламиз. Бу нуқта орқали эгри чизиқни шундай ўтказамизки, у ҳар бир нуқтасида майдон йўналишига эга бўлсин (яъни унга ҳар бир нуқтада ўтказилган уринманинг йўналиши шу нуқтадаги майдон кесмасининг йўналиши билан бир хил бўлсин). 75-расмда $(0; 0)$ ва $(1; 1)$ нуқталардан ўтувчи интеграл эгри чизиқлар тасвирланган.



75- расм

Кўриб чиқилган мисол маълум шартларда биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг кенг синфи учун ўринли бўлган қатор хулосалар чиқаришга имкон беради.

1. (6) дифференциал тенгламага чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар, бинобарин, чексиз кўп ечимлар мос келади.

2. Бу тўпламдан тайин интеграл эгри чизиқни ажратиб олиш учун бу эгри чизиқ ўтадиган $(x_0; y_0)$ нуқтани бериш керак.

Бошқача айтганда, $y = \varphi(x)$ ечим аргументнинг $x = x_0$ қийматида қабул қиладиган y_0 қийматни бериш лозим. Изланаётган ечимнинг $x = x_0$ даги берилган y_0 қиймати *бошланғич шарт* дейилади. У одатда қуйидагича ёзилади:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ ёки } y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

(6) дифференциал тенглама ечимга эга бўлишини таъминлайдиган шартлар дифференциал тенгламалар назарияси асосий теоремасининг мазмунини ташкил этади. Кошига мансуб бу теорема (6) дифференциал **тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси** дейилади. Биз уни исботсиз келтирамиз.

Агар $y' = f(x, y)$ тенгламанинг $f(x, y)$ ўнг томони ва унинг $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосиласи x ва y ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳаси G да аниқланган ва узлуксиз бўлса, бу соҳанинг $(x_0; y_0)$ ички нуқтаси қандай бўлмасин, берилган тенглама $x = x_0$ да берилган $y = y_0$ қийматни қабул қиладиган ягона $y = \varphi(x)$ ечимга эга бўлади.

Геометрик нуқтаи назардан бу, G соҳанинг ҳар бир $(x_0; y_0)$ ички нуқтаси орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтишини билдиради. $y' = f(x, y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи *Коши масаласи* дейилади.

Текисликнинг ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартлари бажарилмайдиган $(x;y)$ нуқталари дифференциал тенгламанинг *махсус нуқталари* дейилади. Бу нуқталарда ё $f(x, y)$ функция ёки унинг $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосиласи узилишига эга бўлади. Бундай нуқталарнинг ҳар бири орқали ёки бир нечта интеграл эгри чизиқ ўтиши мумкин, ёки бирорта ҳам эгри чизиқ ўтмайди.

Масалан, $y' = y/x$ дифференциал тенгламани қарайлик. Бу ерда ўнг томон $f(x, y) = y/x$ ва унинг $f'_y(x, y) = \frac{1}{x}$ хусусий ҳосиласи $x \neq 0$ да узлуксиз. Демак, бутун Oxy текисликда (Oy дан ташқари) тенгламанинг ўнг томони Коши теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Oy ўқда ётувчи нуқталар махсус нуқталардир.

Бу тенгламанинг ечими $y = Cx$ функция бўлишини текшириб кўриш осон, бу ерда C ихтиёрий ўзгармас. C ўзгармаснинг тайин қийматларида берилган тенгламанинг турли ечимлари олинади.

Масалан, агар $C = 1$ бўлса, у ҳолда $y = x$, агар $C = 10$ бўлса, у ҳолда $y = 10\ x$ ва ҳ. к. Коши масаласини ечиш учун бошланғич шарт қўямиз: $y(x_0) = y_0$. Умумий ечимда x ва y ўрнига уларнинг x_0 ва y_0 қийматларини қўйиб, C ўзгармасни топиш учун $y_0 = C x_0$ муносабатни ҳосил қиламиз, бу ердан $C = y_0/x_0$, бунга мос хусусий ечим: $y = xy_0/x_0$.

$y = Cx$ умумий ечим геометрик жиҳатдан координаталар бошидан ўтувчи барча тўғри чизиқлар (Oy дан ташқари) тўпламини беради. Oy ўқда ётмаган ҳар бир нуқта орқали бу тўпламнинг ягона тўғри чизиғи (интеграл эгри чизиқ) ўтади. Координаталар боши орқали чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар ўтади. Ягоналикнинг бузилишига сабаб координаталар боши махсус нуқта эканлигидадир. Яна шуни ҳам қайд қиламизки, Oy ўқда ётган ва координаталар боши билан устма-уст тушмайдиган махсус нуқталар орқали бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди.

Энди ўнг томони $f(x, y)$ бирор G соҳада Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирадиган (6) дифференциал тенгламанинг умумий ва хусусий ечимлари таърифларини келтирамиз.

Агар x аргумент ва ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ бўлган $y = \varphi(x, C)$ функция қуйидаги иккита шартни қаноатлантирса, y (6) тенгламанинг G соҳадаги умумий ечими деб аталади:

1) *ихтиёрий C ўзгармаснинг бирор тўпламга тегишли исталган қийматларида $y = \varphi(x, C)$ функция* (6) *тенгламанинг ечими бўлади;*

2) *G соҳа ичида ётувчи $(x_0; y_0)$ нуқта ҳар қандай бўлганда ҳам ўзгармаснинг шундай ягона $C = C_0$ қиймати мавжуд бўладики, $y = \varphi(x, C_0)$ ечим $y|_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантиради.*

$C = C_0$ қийматни $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ шартдан топиш мумкин. (6) тенгламанинг унинг $y = \varphi(x, C)$ умумий ечимидан тайин $C = C_0$ қийматда ҳосил бўладиган ҳар қандай $y = \varphi(x, C_0)$ ечими *хусусий ечим* дейилади.

Эслатма. Агар дифференциал тенгламанинг умумий ечими y га нисбатан ечилмаган ҳолда, яъни $\omega(x, y, C) = 0$ кўринишда топилган бўлса, у дифференциал тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади.

Энди биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ечимларини топиш усулларини қараб чиқишга ўтамиз. Умуман (6) тенгламанинг ўнг томони $f(x, y)$ исталган кўринишда бўлганда тенглама ечимларини топишнинг тайин (ягона) усули мавжуд эмас. Шунинг учун биз бу тенгламани ечиш (интеграллаш) нинг айрим хусусий ҳолларинигина қараймиз.

3. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар. Агар биринчи тартибли дифференциал тенгламани

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{11}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, у *ўзгарувчилари ажраладиган тенглама* дейилади, (11) тенгламанинг ўнг томони ҳар бири фақат битта аргументнинг функциясидан иборат иккита кўпайтувчининг кўпайтмасидан иборат.

Масалан, $y' = \frac{x^2}{y + \sin y}$ тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир, чунки унда $f_1(x) = x^2$ ва $f_2(y) = \frac{1}{y + \sin y}$ деб олиш мумкин. Худди шундай, $xy' + y = y^2$ ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир, чунки уни (11) кўринишда ёзиш мумкин:

$y' = \frac{y^2 - y}{x}$, бу ерда $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f_2(y) = y^2 - y$.

Аксинча, $xy' + y = x^2$ ни (11) кўринишида ифодалаш мумкин эмас, бинобарин, бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама эмас. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани интеграллаш усули қуйидагича. (11) тенглатмани $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ кўринишида ёзиб оламиз. У ҳолда

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx. \tag{12}$$

Агар (11) тенглама (12) кўринишида ифодаланган бўлса, унда ўзгарувчилар ажратилган дейилади.

(12) тенгламанинг ечими $y(x)$ ни топдик деб фараз қилайлик. Агар бу $y(x)$ функцияни (12) тенгламага қўйилса, у айниятга айланади; уни ҳадма-ҳад интеграллаб, топамиз:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x)\, dx + C_2$$

ёки

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + C, \tag{13}$$

бу ерда $C = C_2 - C_1$ — ихтиёрий ўзгармас. (13) ифода (12) тенгламанинг умумий интегралидир.

Эслатма. (11) тенгламанинг иккала қисмини $f_2(y)$ га бўлиб, $f_2(y) = 0$ бўладиган ечимларни йўқотишимиз мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $y = y_0$ да $f_2(y) = 0$ бўлса, у ҳолда равшанки, $y = y_0$ функция — константа (11) тенгламанинг ечими бўлади.

1-мисол $xy' + y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Тенгламани y' га нисбатан ечиб, $y' = -\frac{y}{x}$ ёки $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ни ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиб топамиз: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Интеграллаш билан топамиз: $\ln|y| = -\ln|x| + C_1$, бу ерда C_1 — ихтиёрий ўзгармас. Ҳосил қилинган ечимни соддалаштириш учун кўпинча қўлланиладиган усулдан фойдаланамиз. $C_1 = \ln C_2$ $(C_2 > 0)$ деймиз,* у ҳолда $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_2$, бу ердан $|y| = C_2 / |x|$ ёки $y = \pm C_2/x$. Бу ерда $\pm C_2 = C$ деб, узил-кесил топамиз:

$$y = C/x, \tag{*}$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. Топилган (*) умумий ечим геометрик нуқтаи назардан тенг томонли гиперболалар оиласини ташкил этади.

Топилган умумий ечимдан $y|_{x=1} = 1/2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни ажратиш талаб қилинган бўлсин. (*) тенгликда x ва y ни бошланғич шартда берилганлар билан алмаштириб, $1/2 = C/4$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $C = 2$ ни топамиз. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим $y = 2/x$ дан иборат бўлади.

2-мисол. Энди 1-пунктдаги 1-масалада ҳосил қилинган (2) тенгламани ечамиз. Тенглама қуйидаги кўринишда эди:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10).$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратиб топамиз:

$$\frac{dT}{T-10} = kdt.$$

Интеграллаймиз:

$$\ln|T - 10| = kt + \ln C_1 \quad (C_1 > 0),$$
$$|T - 10| = C_1 e^{kt}, \quad T - 10 = \pm C_1 e^{kt} = C e^{kt}.$$

Шундай қилиб,

$$T = C e^{kt} + 10. \tag{*}$$

(*) формула (2) тенгламанинг умумий ечимини беради. Хусусий ечимни ажратиш учун ушбу $T|_{t=0} = 100$ бошланғич шартдан фойдаланамиз. Шундай қилиб, $C e^{k\cdot 0} + 10 = 100$, бу ердан $C = 90$. Бинобарин, хусусий ечим

$$T = 90 e^{kt} + 10$$

кўринишга эга бўлади. Бу ечимда номаълум кўпайтувчи k бор. Энди иккинчи қўшимча шартдан фойдаланамиз. $t = 10$ да жисм температураси $T = 60°$. У ҳолда $60° = 90 \cdot e^{10k} + 10$ бу ердан $e^{10k} = 5/9$. Шундай қилиб, (2) тенгламанинг изланаётган ечими қуйидагича бўлади:

$$T = 90(e^{10k})^{t/10} + 10 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{t/10} + 10.$$

Қанча вақтдан сўнг жисм $20°$ гача совийди, деган саволга жавоб бериш учун

$$20 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{t/10} + 10$$

тенгламани тузамиз, бу ердан $\left(\frac{5}{9}\right)^{t/10} = \frac{1}{9}$.

* C_2 ўзгармас 0 дан ∞ гача ўзгарганда $\ln C_2$ катталик $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгаришини қайд қилиб ўтамиз.

Логарифмлаб, топамиз:

$$t = \frac{10 \lg 9}{\lg 9 - \lg 5} \approx 37{,}4 \text{ мин.}$$

Энди унча мураккаб бўлмаган алмаштиришлар ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириладиган баъзи тенгламаларни қараймиз.

4. Бир жинсли тенгламалар. Агар биринчи тартибли дифференциал тенгламани ўнг томони фақат ўзгарувчиларнинг y/x нисбатининг функциясидан иборат

$$y' = \varphi(y/x) \tag{14}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, уни бир *жинсли тенглама* дейилади.

Масалан, $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \sin\frac{y}{x} + 2$ ва $\frac{dy}{dx} = \ln\frac{y}{x} + 3e^{y/x}$ — бир жинсли тенгламалардир.

$y' = \frac{x^3 + x^2 y}{xy^2}$ тенглама ҳам бир жинслидир, чунки ўнг томоннинг сурат ва махражини x^3 га бўлиб, $y' = \frac{1 + y/x}{(y/x)^2}$ ни ҳосил қиламиз.

Хусусан, $y' = f(x, y)$ кўринишда ёзилган тенгламада $f(x, y)$ бир жинсли бир хил даражали* иккита кўпҳаднинг нисбатидан иборат бўлса, берилган тенглама бир жинсли бўлади.

Бир жинсли (14) тенгламада ўзгарувчилар, умуман айтганда, ажралмайди. Бироқ уни ўзгарувчилари ажраладиган тенглама кўринишига келтириш осон.

Шу мақсадда янги z функция киритамиз: $z = y/x$ деймиз ёки

$$y = xz. \tag{15}$$

(15) тенгликни дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}. \tag{16}$$

(15) ва (16) ифодаларни (14) тенгламага қўйиб, уни

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z)$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенгламада ўзгарувчилар ажралади. Ҳақиқатан ҳам,

$$x\,dz = [\varphi(z) - z]\,dx,$$

бу ерда $\varphi(z) - z \neq 0$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

* Ҳар бир ҳадидаги ўзгарувчилар даражаларининг йиғиндиси n га тенг бўлган кўпҳадлар n-даражали (n-ўлчовли) *бир жинсли кўпҳад* дейилади. Масалан, $x^4 + x^3y - 2x^2y^2 + 5y^4$ — тўртинчи даражали (тўрт ўлчовли) бир жинсли кўпҳаддир.

$f'_y(x,y)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда G соҳанинг ҳар бир ички (x_0, y_0) нуқтаси орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтади. Бироқ Коши теоремаси шартлари G соҳанинг чегарасида ётувчи нуқталар учун бажарилмаслиги мумкин. Коши теоремаси шартлари бажарилмаётган бундай нуқталарни биз махсус нуқталар деб номлаган эдик (204- бетга қаранг). Агар $M_0(x_0, y_0)$ махсус нуқта бўлса, у ҳолда бу нуқта орқали бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмаслиги мумкин ёки бир нечта интеграл эгри чизиқ ўтиши мумкин. Юқорида (2-пунктга қаранг) кўрсатганимиздек, $y' = y/x$ дифференциал тенглама учун бутун Oy ўқи махсус нуқталардан иборатдир. Бунда координаталар боши орқали чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар ўтади, координаталар бошидан фарқли махсус нуқталар орқали эса бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди.

Агар $y = \varphi(x)$ чизиқ фақат махсус нуқталардан иборат бўлиб, дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиғи бўлса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ функция *махсус ечим* дейилади.

Коши теоремаси шартлари бирор G соҳада махсус ечим мавжуд бўлмаслиги учун етарлидир. Шу сабабли махсус ечим мавжуд бўлиши учун Коши теоремасининг шартлари бажарилмаслиги зарурдир. Демак, $y' = f(x, y)$ *дифференциал тенгламанинг махсус ечимини топиш учун ҳар бир нуқтасида* $f(x,y)$ *ёки* $f'_y(x,y)$ *узилишга эга бўладиган чизиқни топиш керак ва* $y = \varphi(x)$ *функция тенгламанинг ечими бўлиш-бўлмаслигини текшириб кўриш керак.* Агар $y = \varphi(x)$ функция дифференциал тенгламанинг ечими бўлса, у махсус ечим бўлади.

Масалан, $y' = \sqrt[3]{y^2}$ тенгламани қарайлик. Бу тенгламанинг ўнг томони бўлмиш $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ функция y нинг барча қийматларида узлуксиз, бироқ $f'_y(x, y) = 2/(3\sqrt[3]{y})$ ҳосила $y = 0$ да, яъни бутун Ox ўқда узилишга эга. Шундай қилиб, $y = 0$ тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси махсус нуқта экан. Равшанки, $y = 0$ функция берилган тенгламанинг ечими бўлади. Бинобарин $y = 0$ махсус ечимдир.

Энди берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Ўзгарувчиларни ажратиб топамиз: $\frac{dy}{y^{2/3}} = dx$. Интеграллаб, умумий ечимни топамиз:

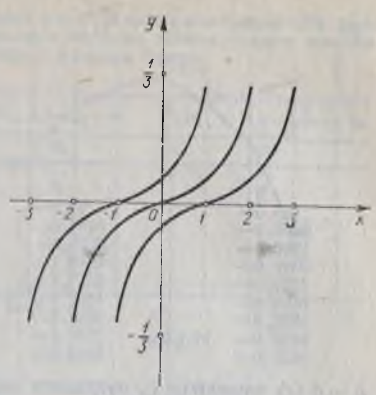
$$3y^{1/3} = x + C \text{ ёки } y = \frac{(x+C)^3}{27}.$$

Топилган умумий ечимга мос интеграл эгри чизиқлар оиласи кубик параболалардан иборат. $y = 0$ махсус ечим (Ox ўқ) нинг ҳар бир нуқтаси орқали берилган тенгламанинг яна битта интеграл эгри чизиғи (кубик парабола) ўтганлиги учун Ox ўқнинг ҳар бир нуқтасида ягоналик хоссаси бузилади (76- расм).

Умуман олганда, *махсус ечим умумий ечим таркибида бўлмаслигини ва ундан C ўзгармаснинг ҳеч қандай конкрет қийматида ҳосил қилинмаслигини қайд қилиб ўтамиз.*

Энди $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$ тенгламани қараймиз. Юқоридаги мисолдагига ўх-

шаш, барча махсус нуқталар тўплами $y = 0$ тўғри чизиқ — Ox дан иборат. Бироқ $y = 0$ функция берилган тенгламанинг ечими эмаслигини текшириб кўриш осон. Шунинг учун берилган тенглама махсус ечимларга эга эмас.



76- расм

8. Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни Эйлер усули билан тақрибий ечиш. 2-пунктда биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқларини изоклиналар ёрдамида тақрибий ясаш усули баён этилган эди.

Ҳозир тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг *Эйлер усули* деб аталувчи яна битта тақрибий усулини кўриб чиқамиз. Эйлер усулининг ғояси хусусий ечимнинг графиги бўлган интеграл чизиқни синиқ чизиқ билан тақрибий алмаштиришдан иборатдир.

Бизга (6) дифференциал тенглама

$$y' = f(x, y)$$

ва $y|_{x=x_2} = y_0$ бошланғич шарт берилган бўлсин.

$[x_0, b]$ сегментда (6) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқта орқали ўтадиган $y = \varphi(x)$ интеграл эгри чизиғини тақрибий ясаш талаб этилади. Бунинг учун $[x_0, b]$ сегментни

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

бўлиниш нуқталари билан $\Delta x = (b - x_0)/n$ узунликдаги n та тенг бўлакка бўламиз (77- расм).

Δx катталик сегментни *бўлиш қадами* дейилади. (6) тенгламадан фойдаланиб, интеграл эгри чизиқнинг (x_0, y_0) бошланғич нуқтасида уринманинг бурчак коэффициентини ҳисоблаймиз: $y'_0 = f(x_0, y_0)$; у ҳолда (x_0, y_0) нуқтадаги уринманинг тенгламаси ушбу кўринишда ёзилади:

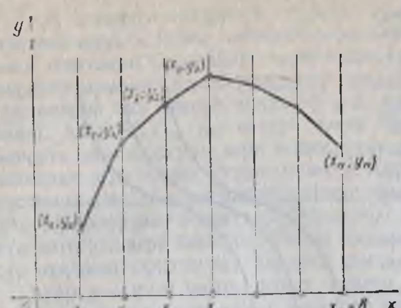
$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) \text{ ёки } y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

$[x_0, x_1]$ сегментда изланаётган $y = \varphi(x)$ интеграл эгри чизиқни бу уринма кесмаси билан алмаштириб (77- расмга қаранг), y_1 ечимнинг x_1 нуқтадаги тақрибий ечимини топамиз:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

ёки $x_1 - x_0 = \Delta x$ бўлгани учун:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x.$$



77- расм

x_1 ва y_1 нинг қийматларини (6) тенгламанинг ўнг томонига қўйиб $y_1' = f\ (x_1,\ y_1)$ ни топамиз.

$[x_1,\ x_2]$ сегментда $y = \varphi\ (x)$ интеграл эгри чизиқни $(x_1,\ y_1)$ нуқта орқали ўтувчи ва бурчак коэффициенти $k = y_1' = f(x_1,\ y_1)$ бўлган уринма кесмаси билан тақрибан алмаштирамиз.

$$y - y_1 = f\ (x_1,\ y_1)\ (x - x_1)$$

ёки $y = y_1 + f\ (x_1, y_1)\ (x - x_1)$

Бу тўғри чизиқ тенгламасида $x = x_2$ деб, изланаётган $y = \varphi\ (x)$ ечимнинг x_2 нуқтадаги тақрибий қийматини топамиз:

$$y_2 = y_1 + f\ (x_1,\ y_1)\ (x_2 - x_1)$$

ёки

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

бўлгани учун

$$y_2 = y_1 + f\ (x_1,\ y_1) \cdot \Delta x,$$

Бу жараённи давом эттириб, $y = \varphi\ (x)$ ечимнинг кетма-кет $x_3,\ x_4, \ldots\ x_i, \ldots,\ x_n = b$ нуқталардаги тақрибий қийматларини ҳсоил қиламиз. Бунда функциянинг x_i нуқтадаги қиймати функциянинг ва унинг ҳосиласининг x_{i-1} нуқтадаги қийматлари орқали

$$y_i = y_{i-1} + f\ (x_{i-1}\ ,\ y_{i-1})\ \Delta x \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots\ ) \tag{30}$$

формула бўйича ҳисобланади. Шундай қилиб, изланаётган ечимнинг $x_1, x_2, x_3, \ldots,\ x_i, \ldots\ ,\ b$ нуқталардаги тақрибий қийматларини ҳосил қиламиз ва интеграл эгри чизиқни синиқ чизиқ кўринишида ясаймиз.

Изоҳ. Биз $b > x_0$ бўлган ҳолни кўрдик. Агар $b < x_0$ бўлса, (30) формула ўз кучида қолади, бироқ бу ҳолда бўлиш қадами $\Delta x = (b - x_0)/n$ манфий бўлади.

Эйлер усули биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш усуллари ичида энг соддасидир. Унинг камчилиги кам аниқлигидадир. Албатта йўл қўйилган хатолик интеграл эгри чизиқни синиқ чизиқ билан алмаштиришдан ҳосил бўлади ва у $[x_0,\ b]$ сегментни бўлиш нуқталари сонига боғлиқдир. Бунда y_i ординаталарни хисоблашдаги хатолик $(\Delta x)^2$ га пропорционал эканини кўрсатиш мумкин.

Мисол. $y' = y^2 - x^2$ дифференциал тенгламанинг $y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими $y = \varphi\ (x)$ нинг $[1, 2]$ сегментдаги тақрибий қийматлари жадвалини тузинг.

Сегментни бўлиш қадамини $\Delta x = 0{,}1$ деб олинг.

Ечилиши. Юқоридаги схемага асосан $y = \varphi\ (x)$ ечим қийматларини (30) формула бўйича ҳисоблаймиз. Барча ҳисоблашларни вергулдан кейинги тўртинчи хонагача аниқликда бажарамиз ва натижаларни умумий жадвалга ёзамиз.

i	x	y_i	$f\ (x_i,\ y_i) = y_i^2 - x_i^2$	$f\ (x_i\ ,\ y_i)\ \Delta x = (y_i^2 - x_i^2)\ \Delta x$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1,0	1	0	0
1	1,1	1	—0,21	—0,021
2	1,2	0,979	—0,4816	—0,0482
3	1,3	0,9308	—0,8236	—0,0824
4	1,4	0,8484	—1,2402	—0,1240
5	1,5	9,7244	—1,7252	—0,1725
6	1,6	0,5519	—2,2554	—0,2255
7	1,7	0,3264	—2,7835	—0,2784
8	1,8	0,0480	—3,2377	—0,3238
9	1,9	—0,2758	—3,5339	—0,3534
10	2,0	—0,6292		

(3) устун $y = \varphi\ (x)$ функциянинг x_i нуқталардаги тақрибий қийматларидан иборат.

2-§ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Асосий тушунчалар. Иккинчи тартибли дифференциал тенглама эркли ўзгарувчи, изланаётган функция ва унинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини боғлайди. Хусусий ҳолларда тенгламада x, y ва y' иштирок этмаслиги мумкин. Бироқ иккинчи тартибли дифференциал тенгламада албатта y'' бўлиши шарт.

Иккинчи тартибли дифференциал тенглама умумий ҳолда

$$F\ (x,\ y,\ y',\ y'') = 0 \tag{31}$$

кўринишида, агар иккинчи тартибли ҳосилага нисбатан ечиш мумкин бўлса,

$$y'' = f\ (x,\ y,\ y') \tag{32}$$

кўринишда ёзилади.

1- § нинг 1- пунктида энг содда иккинчи тартибли дифференциал тенгламага олиб келадиган масалани кўриб чиққан эдик [(4) формулага қаранг].

Биринчи тартибли тенглама бўлган ҳолга ўхшаш, иккинчи тартибли тенглама учун ҳам умумий ва хусусий ечимлар мавжуд бўлиши мумкин. Дастлаб иккинчи тартибли тенгламанинг умумий ечими қандай кўринишга эга бўлишини ва хусусий ечим ундан қандай ажратиб олинишини мисолда кўрамиз.

Энг содда иккинчи тартибли

$$y'' = 2 \tag{33}$$

тенгламани оламиз. Уни ечиш учун $y' = v\ (x)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $y'' = v'$ ва (33) тенглама $v' = 2$ кўринишга келади.

$v'(x) = f(x)$ тенгламага эга бўламиз. Уни ечиб қуйидагига эга бўламиз:

$$v(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1,$$

бу ерда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияларидан бири. $v(x) = y'$ бўлгани учун $y' = F(x) + C_1$ бўлади.

Бу ердан, яна бир марта интеграллаб, (35) тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2.$$

1 мисол. $y'' = \sin(x)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $y' = v(x)$ деб, $v'(x) = \sin x$ тенгламани ҳосил қиламиз. Интеграллаймиз: $v(x) = -\cos x + C_1$. Бу ерда $v(x)$ ни y' билан алмаштириб яна бир марта интеграллаймиз, натижада тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

$y'' = f(x, y')$ кўринишдаги тенглама, Бу тенгламада изланаётган y функция ошкор иштирок этмайди. Юқоридагига ўхшаш, янги $v(x) = y'$ функцияни киритиб ва $y'' = v'(x)$ эканини назарда тутиб, $v(x)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли

$$v'(x) = f(x, v)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг умумий ечими $v = \varphi(x, C_1)$ топилди деб фараз қилайлик. Бу ечимда v функцияни y' билан алмаштириб, $y' = \varphi(x, C_1)$ ни ҳсил қиламиз. Шундай қилиб, (36) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

2-мисол. $(1 + x^2)\,y'' - 2xy' = 0$ тенгламанинг $y|_{x=1} = 0, y'|_{x=1} = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топинг.

Ечилиши. $y' = v(x)$ деймиз, у ҳолда $y'' = v'(x)$. Бу ифодаларни берилган тенгламага қўйиб, биринчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(1 + x^2)\,v' - 2xv = 0.$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Интеграллаймиз:

$$\ln|v| = \ln(1 + x^2) + \ln C_0.$$

$v(x)$ ни топиш учун потенцирлаймиз:

$$v = \pm C_0 (1 + x^2) = C_1 (1 + x^2).$$

$v = y'$ бўлгани учун $y' = C_1(1 + x^2)$. Яна бир марта интеграллаб, берилган тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Бу умумий ечимдан хусусий ечимни ажратамиз. Биринчи бошланғич шарт $y|_{x=1} = 0$ дан фойдаланиб, $0 = C_1\left(1 + \frac{1}{3}\right) + C_2$ ёки $\frac{4}{3} C_1 + C_2 = 0$ ни топамиз. Умумий

ечимни дифференциаллаймиз: $y' = C_1(1 + x^2)$. Иккинчи бошланғич шарт $y'|_{x=1} = 1$ дан фойдаланиб, $1 = C_1(1 + 1)$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $C_1 = 1/2$. Шундай қилиб, C_1 ва C_2 ўзгармасларни топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = 1/2, \\ &\frac{4}{3} C_1 + C_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу ердан $C_1 = 1/2$, $C_2 = -2/3$. Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$$

кўринишда бўлади.

$y'' = f(y, y')$ кўринишдаги тенглама. Бу тенгламада x эркли ўзгарувчи ошкор иштирок этмайди. Тенгламанинг тартибини пасайтириш учун яна y га боғлиқ янги $v(y)$ функция киритамиз, бунинг учун $y' = v(y)$ деймиз. Бу тенгликни y ўзгарувчи x нинг функцияси эканини эътиборга олган ҳолда x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dv(y)}{dx} = \frac{dv(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx} = v(y)$ бўлгани учун

$$y'' = \frac{dv}{dy} \cdot v. \qquad (38)$$

y' ва y'' нинг ифодаларини берилган дифференциал тенгламага қўйиб, $v(y)$ функцияга нисбатан ушбу биринчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{dy} v = f(y, v).$$

$v(y) = \varphi(y, C_1)$ функция бу тенгламанинг умумий ечими бўлсин. У ҳолда $v(y) = \frac{dy}{dx}$ эканини назарда тутиб, қуйидаги ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Уни интеграллаб, берилган (37) тенгламанинг умумий интегралини топамиз:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

3-мисол. Ушбу $1 + y'^2 = 2yy''$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $y' = v(y)$ деб, янги номаълум $v(y)$ функцияни киритамиз, у ҳолда (38) муносабатга кўра $y'' = \frac{dv}{dy} v$ ни ҳосил қиламиз. y' ва y'' нинг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз:

$$1 + v^2 = 2yv\frac{dv}{dy}.$$

Биринчи тартибли бу тенгламада ўзгарувчилар ажралади:

$$\frac{2\,v\,dv}{1+v^2}=\frac{dy}{y}.$$

Бу ердан, интеграллаб, топамиз: $\ln(1+v^2)=\ln|y|+\ln C_0$. бу ердан $1+v^2=\pm$ $\pm C_0 y=C_1 y$ ва $v=\pm\sqrt{C_1 y-1}$. $v=\frac{dy}{dx}$ бўлгани учун $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1 y-1}$ ва демак,

$$dx=\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 y-1}}.$$

Интеграллаб, умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$x+C_2=\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1\,y-1} \text{ ёки } (x+C_2)^2=\frac{4}{C_1{}^2}\,(C_1\,y-1).$$

Бу ердан умумий ечимни топамиз:

$$y=\frac{C_1^2\,(x+C_2)^2+4}{4C_1}.$$

4-мисол. 1-§ нинг 1-пунктида қаралган моддий нуқтанинг эркин тушиши ҳақидаги масалага қайтамиз. Бу масалага олиб келган тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y''=g.$$

[(4) формулага қаранг]. Бу (35) кўринишдаги тенглама. Бу ерда аргумент вақтдир. Янги $v(t)=y'$ функцияни киритиб, $v'=g$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, $v=gt+C_1$ ни топамиз. Бошланғич ҳолатда нуқтанинг тезлиги v_0 га тенг бўлиши керак бўлгани учун ва нуқтанинг тезлиги йўлдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли y' ҳосилага тенг бўлгани сабабли C_1 ни аниқлаш учун $v_0=g\cdot 0+C_1$ тенгламага эгамиз. Бу ердан

$$C_1=v \text{ ва } v=gt+v_0.$$

Бу физикадан маълум бўлган моддий нуқтанинг эркин тушиши тезлиги формуласидир.

Бу ерда v ни $\frac{dy}{dt}$ билан алмаштириб ва яна бир марта интеграллаб, топамиз:

$$\frac{dy}{dt}=gt+v_0,\ dy=(gt+v_0)\,dt,\ y=\frac{gt^2}{2}+v_0t+C_2.$$

Бошлангич моментда босиб ўтилган йўл шартга кўра нолга тенг бўлгани учун

$$0=\frac{g\cdot 0}{2}+v_0\cdot 0+C_2$$

га эгамиз, бу ердан $C_2=0$. Демак, (4) тенгламанинг хусусий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=\frac{1}{2}\,gt^2+v_0t.$$

Бу жисмнинг эркин тушишида босиб ўтилган йўл формуласидир.

5-мисол. Қуйидаги физик масалани кўрамиз. $v_0=5$м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган моторли қайиқда мотор ўчирилади. Ўз ҳаракатида қайиқ сув қаршилигига дуч келади, қаршилик кучи қайиқ тезлиги квадратига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффициенти $k=m/50$ га тенг, бу ерда m — қайиқ массаси. Қайиқ тезлиги қанча вақтдан сўнг икки марта камаяди ва қайиқ бу вақт давомида қанча масофани ўтади?

Ечилиши. Бу масалани ечишда Ньютоннинг иккинчи қонунидан фойдаланамиз. Моддий нуқтага таъсир этувчи куч катталиги нуқтанинг массасини унинг тезланиши катталигига кўпайтмасига тенг, куч йўналиши эса тезланиш йўналиши билан бир хил.

Тезлик йўлдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли $v=\frac{ds}{dt}$ ҳосилага, тезланиш эса йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ ҳосилага тенг бўлгани учун қайиқни моддий нуқта деб олиб, қайиқ ҳаракати тенгламасини ушбу кўринишда ёзишимиз мумкин $ma=F$ ёки

$$m\,\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{m}{50}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{*}$$

Бу ерда «минус» ишораси сув қаршилиги қайиқ ҳаракатига қарши йўналганлигини билдиради.

Тезлик $v=s'$ бўлгани учун, бошланғич шартлар $s|_{t=0}=0$, $s'|_{t=0}=v|_{t=0}=$ $=v_0=5$м/с кўринишида бўлади. $s''=v'$ бўлгани учун s' ва s'' нинг ифодаларини (*) тенгламага қўйиб, қуйидаги биринчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$mv'=-\frac{m}{50}\,v^2 \text{ ёки } \frac{dv}{dt}=-\frac{v^2}{50}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\frac{dv}{v^2}=-\frac{1}{50}\,dt, \qquad \frac{1}{v}=\frac{t}{50}+C_1.$$

$s'|_{t=0}=v|_{t=0}=5$ бошланғич шартлардан фойдаланиб, $C_1=1/5$ ва $v=\frac{50}{t+10}$ ни топамиз. $v=\frac{ds}{dt}$ бўлгани учун $\frac{ds}{dt}=\frac{50}{t+10}$ бўлади. Кейинги тенгламани интеграллаб, $s=50\ln(t+10)+C_2$ ни топамиз. $s|_{t=0}=0$ эканини эътиборга олиб, топамиз: $0=50\ln(0+10)+C_2$. Демак, $C_2=-50\ln 10$ ва

$$s=50\ln\frac{t+10}{10}.$$

Шундай қилиб, қайиқнинг ҳаракат қонунини ҳосил қилдик. Масала шартига кўра қанча вақтдан сўнг қайиқ тезлиги икки марта камайишини аниқлаш керак. Бунинг учун тезликнинг $v=\frac{50}{t+10}$ формуласига $v=0{,}5v_0=2{,}5$ қийматни қўямиз. Қайиқ тезлиги икки марта камаядиган вақтни T орқали белгилаб, $2{,}5=\frac{50}{T+10}$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан $T=10$с.

Ана шу вақт давомида қайиқ ўтган масофани ҳисоблаш учун s нинг ифодасига $T=10$ с ни қўямиз:

$$s=50\ln\frac{10+10}{10}=50\ln 2\approx 50\cdot 0{,}69\approx 34{,}5 \text{ м.}$$

3. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча. *n-тартибли дифференциал тенглама* умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F(x,\,y,\,y',\,y'',\,\ldots,\,y^{(n)})=0$$

жудлик ва ягоналик теоремаси ўринлидир. Бироқ, чизиқли тенглама учун бу теорема соддароқ баён қилиниши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, тенгламанинг $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ коэффициентлари ва $b(x)$ озод ҳади бирор $]\alpha,\beta[$ интервалда узлуксиз бўлсин. Шу билан бирга $a_0(x)$ коэффициент бу интервалнинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг бўлмасин деб фараз қилайлик. У ҳолда (44) тенгламанинг ўнг томони

$$f(x, y, y') = \frac{b(x) - a_1(x)\, y' - a_2(x)\, y}{a_0(x)}$$

ва унинг

$$f'_y(x, y, y') = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)} \quad \text{ва} \quad f'_{y'}(x, y, y') = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

хусусий ҳосилалари y ва y' ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида ва x нинг $]\alpha,\beta[$ интервалга тегишли қийматларида узлуксиз функциялар бўлади. Айтилганлар асосида (42) чизиқли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналигининг Коши теоремасини баён қиламиз.

Теорема. *Агар* (42) *чизиқли тенгламанинг* $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ *коэффициентлари ва* $b(x)$ *ўнг томони* $]\alpha,\beta[$ *интервалда узлуксиз бўлса ва шу билан бирга* $a_0(x)$ *коэффициент бу интервалнинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг бўлмаса, у ҳолда* $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ *(бу ерда* x_0 *нуқта* $]\alpha,\beta[$ *интервалга тегишли) бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам тенгламанинг берилган бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд бўлади.*

2. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар ечимларининг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз.

1-теорема. *Агар* $y_1 = y_1(x)$ *ва* $y_2 = y_2(x)$ *функциялар* (43) *чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ *функция ҳам* C_1 *ва* C_2 *ўзгармасларнинг** *исталган қийматларида бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исботи. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ функцияни ва унинг ҳосилаларини (43) тенгламанинг чап қисмига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a_0(x)\,[\,C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,]'' + a_1(x)\,[\,C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,]' + \\ + a_2(x)\,[\,C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,] = a_0(x)\,[\,C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)\,] + \\ + a_1(x)\,[\,C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)\,] + a_2(x)\,[\,C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,] = \\ = C_1\,[\,a_0(x)\, y_1''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_2(x)\, y_1(x)\,] + \\ + C_2\,[\,a_0(x)\, y_2''(x) + a_1(x)\, y_2'(x) + a_2(x)\, y_2(x)\,] = 0, \end{aligned}$$

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (43) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун квадрат қавслардаги энг охирги иккита ифода нолга тенг.

* $C_1 y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ ифода $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функцияларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ иккита ихтиёрий ўзгармас C_1 ва C_2 га эга бўлгани учун қуйидаги савол юзага келади: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ечим (43) тенгламанинг умумий ечими бўлмасмикан?

Ҳар доим ҳам шундай бўлавермаслигини кўрсатамиз. Масалан, $y'' + 4y = 0$ тенглама ҳар қандай бошланғич шартларда мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартларини қаноатлантиради (1-пунктга қаранг). Бу тенглама $y_1 = \sin 2x$ ва $y_2 = 10 \sin 2x$ хусусий ечимларга эга бўлишини текшириб кўриш осон. Бироқ уларнинг чизиқли комбинацияси $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \sin 2x$ берилган тенгламанинг ечими бўлса-да, лекин унинг умумий ечими бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $y = \cos 2x$ функция $y'' + 4y = 0$ тенгламанинг ечими бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бироқ, бу ечимни $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \cdot \sin 2x$ чизиқли комбинациядан ҳосил қилиб бўлмайди, чунки бошланғич шартларнинг биринчиси $y|_{x=0} = 1$ шу $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \cdot \sin 2x$ функция учун C_1 ва C_2 нинг ҳеч қандай қийматларида бажарилмайди: $C_1 \sin 0 + C_2 \times 10 \cdot \sin 0 \neq 1$.

Агар иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг иккита хусусий ечими $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ учун бирор $]\alpha,\beta[$ интервалнинг ҳеч қандай нуқтасида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \qquad (45)$$

детерминант нолга тенг бўлмаса, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимлар $]\alpha,\beta[$ интервалда фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. $W(x)$ детерминант *Вронский детерминанти* (ёки *вронскиан*) дейилади.

1-мисол. Биз юқорида $y'' + 4y = 0$ тенглама $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = 10 \sin 2x$, $y_3 = \cos 2x$, хусусий ечимларга эга эканини кўрсатган эдик. Биринчи ва иккинчи ечимлар фундаментал ечимлар системасини ташкил этмаслигига ишонч ҳосил қилиш осон. Биринчи ва учинчи ечимлар бутун сон ўқида фундаментал система ҳосил қилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & 10 \sin 2x \\ 2\cos 2x & 20 \cos 2x \end{vmatrix} = 20 \sin 2x \cos 2x - 20 \sin 2x \cos 2x \equiv 0,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2 \neq 0.$$

2-мисол. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ тенглама $y_1 = x$ ва $y_2 = x^2$ хусусий ечимларга эгалигини кўриш осон. Бу ечимлар $x = 0$ ни ўз ичига олмаган ҳар қандай интервалда фундаментал система ташкил этади. Ҳақиқатан ҳам,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

яъни Вронский детерминанти $x \neq 0$ да нолга тенг эмас.

Ю. Вронский (1778 — 1853) — Поляк математиги.

Изоҳ. Равшанки, ҳар қандай чизиқли бир жинсли тенглама $y_1 \equiv 0$ ечимга эга. Бироқ бу ечим бошқа ҳеч қандай $y_2 = y_2(x)$ ечим билан бирга фундаментал система ташкил қилмайди, чунки бу ҳолда Вронский детерминанти айнан нолга тенг бўлади:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ 0 & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Бир жинсли чизиқли тенглама умумий ечимининг кўриниши ҳақида юқорида қўйилган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

2-теорема. (умумий ечим структураси ҳақида). *Агар (43) тенгламанинг иккита $y_1 = y_1(x)$ ва $y_2 = y_2(x)$ хусусий ечими $]\alpha,\beta[$ интервалда фундаментал система ташкил этса, у ҳолда бу тенгламанинг умумий ечими*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{46}$$

кўринишда бўлади. Бунда $]\alpha,\beta[$ интервалда $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ коэффициентлар узлуксиз ва $a_2\ x \neq 0$ деб фараз қилинади.

Исбот. Дастлаб, исталган C_1 ва C_2 да $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ функция 1-теоремага кўра (43) тенгламанинг ечими эканини айтиб ўтамиз. Шу сабабли бу ечим умумий ечим эканига ишонч ҳосил қилиш учун бу ечимдан берилган

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0' \tag{47}$$

(бу ерда x_0 нуқта $]\alpha,\beta[$ интервалга тегишли, y_0 ва y_0' эса ихтиёрий) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ягона хусусий ечимни ажратиш мумкин эканлигини кўрсатиш қолади. Фараз қилайлик $Y = Y(x)$ — (43) тенгламанинг (47) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи бирор ечими бўлсин. Бу ечимни (46) ечимдан C_1 ва C_2 ўзгармасларни кераклича танлаш орқали ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ва $y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_1'(x)$, бўлгани учун бошланғич шартларни буларга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0 &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2(x_0). \end{aligned}$$

Бу тенгликлар номаълумлари C_1 ва C_2 бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Бу системанинг

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

детерминанти $W(x)$ Вронский детерминантининг $x = x_0$ даги қийматига тенг. Шартга кўра $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимлар $]\alpha,\beta[$ интервалда (x_0 нуқта бу интервалга тегишли) хусусий ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этгани учун $W(x_0) \neq 0$. Шу сабабли C_1 ва C_2 номаълумлар учун қуйидаги ягона қийматларни * ҳосил қиламиз:

* Крамер формулаларига қаранг (II боб, 2-§, 1-пункт).

$$C_{10} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)}, \qquad C_{20} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W(x_0)}.$$

Ҳосил қилинган $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ хусусий ечим ягоналик теоремасига кўра $Y(x)$ ечим билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этса, у ҳолда умумий ечим

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

кўринишда бўлиши кўрсатилди.

Исбот қилинган теоремадан умумий ечимни топиш учун унинг фундаментал система ҳосил қиладиган иккита хусусий ечимини билиш етарли экани келиб чиқади.

3-мисол. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ тенгламани қараймиз. 2-мисолда кўрганимиздек, $y_1 = x$ ва $y_2 = x^2$ функциялар $x = 0$ нуқтани ўз ичига олмаган исталган интервалда бу тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ҳосил қилади. Шунинг учун 2-теоремага кўра берилган тенгламанинг умумий ечими $y = C_1 x + C_2 x^2$ кўринишда бўлади.

Хусусий ечимни қуйидаги бошланғич шартларда топамиз: $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$. Маълумки, $y' = C_1 + 2C_2 x$, шу сабабли бунга бошланғич шартларни қўйиб C_1 ва C_2 ўзгармасларни аниқлаш учун

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 + 2C_2 \end{aligned}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ ни топамиз. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим $y = x^2 - x$ бўлади.

Чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама хусусий ечимларининг фундаментал системаси тушунчаси ечимларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги тушунчалари билан узвий боғлиқдир.

Агар ҳеч бўлмаганда биттаси O нолдан фарқли шундай λ_1 ва λ_2 сонлар мавжуд бўлсаки, бирор $]\alpha,\beta[$ интервалга тегишли барчи x лар учун

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \tag{48}$$

тенглик ўринли бўлса, $y_1 = y_1(x)$ ва $y_2 = y_2(x)$ функциялар $]\alpha,\beta]$ интервалда *чизиқли боғлиқ* дейилади. Агар бу тенглик $]\alpha,\beta[$ интервалга тегишли барча x лар учун фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ да бажарилса, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар шу интервалда *чизиқли эркли* дейилади.

Равшанки, агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлса, улар пропорционал бўлади. Ҳақиқатан ҳам, масалан $\lambda_1 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (48) тенгликдан $y_1(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_2(x) = k\, y_2(x)$ келиб чиқади. Аксинча, агар функциялар пропорционал бўлса, улар чизиқли боғлиқ* бўлиши равшандир.

* Функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги тушунчалари векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги тушунчаларига ўхшашдир (II боб, 4-§, 1-пунктга қаранг).

Агар (43) тенгламанинг иккита хусусий ечими $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ чизиқли боғлиқ бўлса, яъни $y_1(x) = ky_2(x)$ бўлса, у ҳолда улар фундаментал система ташкил этмаслигига ишонч ҳосил қилиш осон, ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда Вронский детерминанти айнан нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ky_2 & y_2 \\ ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

(43) тенгламада $]\alpha, \beta[$ интервалда $a_0(x)$, $a_1(x)$ ва $a_2(x)$ коэффицентлар узлуксиз ва $a_0(x) \neq 0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тескари тасдиқ ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин: *агар* (43) *тенгламанинг иккита* $y_1(x)$ *ва* $y_2(x)$ *ечими* $]\alpha, \beta[$ *интервалда чизиқли эркли бўлса, улар бу интервалда фундаментал система ташкил этади.*

Масалан, юқорида кўрилган 2-мисолда $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ ечимлар системаси фундаменталдир, чунки бу ечимлар чизиқли эркли:

$$x^2 \neq kx.$$

3. Чизиқли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар. Энди чизиқли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли (42) дифференциал тенгламанинг асосий хоссаларини қараб чиқамиз:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x).$$

Чап томони бир жинсли бўлмаган (42) тенгламанинг чап томони билан бир хил бўлган чизиқли бир жинсли тенгламани келгусида (42) га мос бир жинсли тенглама деб атаймиз.

Теорема. *Агар* $\bar{y}(x)$ (41) *тенгламанинг хусусий ечими,* $Y(x)$ *эса унга мос бир жинсли* (43) *тенгламанинг умумий ечими бўлса, у ҳолда* $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ *функция бир жинсли бўлмаган* (42) *дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.*

Исбот. $\bar{y}(x)$ (42) тенгламанинг ечими бўлгани учун

$$a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x) \equiv b(x).$$

Худди шунга ўхшаш, $Y(x)$ мос бир жинсли тенгламанинг ечими бўлгани учун

$$a_0(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x) \equiv 0.$$

Бу ҳолда қуйидагига эгамиз:

$$a_0(x)[\bar{y}(x) + Y(x)]'' + a_1(x)[\bar{y}(x) + Y(x)]' + a_2(x)[\bar{y}(x) + Y(x)] =$$
$$= [a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x)] + [a_0(x)Y''(x) +$$
$$+ a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x)] \equiv b(x) + 0 \equiv b(x).$$

Бу ердан $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ функция, ҳақиқатан ҳам, бир жинсли бўлмаган (42) тенгламанинг ечими бўлиши келиб чиқади. Бу ечим умумий ечим эканига ишонч ҳосил қилиш учун ундан (47) бошланғич шартлар:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'$$

ни қаноатлантирадиган ягона хусусий ечим ажратиш мумкинлигини кўрсатиш қолди.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ мос бир жинсли тенгламанинг хусусий ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этувчи иккита хусусий ечими бўлсин. У ҳолда $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ва

$$y = \bar{y}(x) + Y(x) = \bar{y}(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \tag{49}$$

фараз қилайлик, $y = \varphi(x)$ бир жинсли бўлмаган (42) тенгламанинг (47) шартларни қаноатлантирувчи бирор ечими бўлсин. Уни (49) ечимдан C_1 ва C_2 ни мос ҳолда танлаб олиш билан ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам,

$$y = \bar{y}(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \text{ ва } y' = \bar{y}'(x) + C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)$$

бўлгани учун буларга бошланғич шартларни қўйиб C_1 ва C_2 ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \bar{y}(x_0) + C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0), \\ y_0' &= \bar{y}'(x_0) + C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) &= y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) &= y_0' - \bar{y}'(x_0). \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлгани учун у ягона C_{10} ва C_{20} ечимга эга (2-теореманинг исботига қаранг). Ҳосил қилинган $y = \bar{y}(x) + C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x)$ хусусий ечим ягоналик теоремасига мувофиқ $y = \varphi(x)$ ечим билан бир хил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

4. Ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули. Олдинги пунктда чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини билиш етарли экани кўрсатилган эди.

Агар мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум бўлса, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими қандай топилишини кўрсатамиз.

Ушбу чизиқли бир жинсли бўлмаган (42) дифференциал тенглама

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

ни қарайлик. $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими бўлсин, бу ерда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ фундаментал система ташкил этувчи хусусий ечимлар. Умумий ечимда C_1 ва C_2 ўзгармасларни $z_1(x)$ ва $z_2(x)$ функциялар билан алмаштирамиз. Бу функцияларни шундай танлаймизки,

$$\bar{y} = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) \tag{50}$$

бир жинсли бўлмаган (42) тенгламанинг ечими бўлсин. (50) тенглик билан аниқланган $\bar{y}$ функция (42) тенгламанинг ечими бўлиши керак. Шунинг учун $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ни (42) тенгламага қўйганда айният ҳосил бўлиши керак.

y ни x бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$\bar{y}' = z_1'(x)\, y_1(x) + z_2'(x)\, y_2(x) + z_1(x)\, y_1'(x) + z_2(x)\, y_2'(x). \tag{51}$$

Биз иккита янги номаълум функция $z_1(x)$ ва $z_2(x)$ ни киритдик. Уларни аниқлаш учун иккита тенглама тузиш керак.

Бу тенгламанинг биринчиси сифатида қуйидаги тенгламани оламиз

$$z_1'(x)\, y_1(x) + z_2'(x)\, y_2(x) = 0. \tag{52}$$

У ҳолда $\bar{y}'$ учун (51) ифода қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\bar{y}' = z_1(x)\, y_1'(x) + z_2(x)\, y_2'(x). \tag{53}$$

Бу ифодани яна бир марта дифференциаллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar{y}'' = z_1'(x)\, y_1'(x) + z_1(x)\, y_1''(x) + z_2'(x)\, y_2'(x) + z_2(x)\, y_2''(x).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ нинг ифодаларини (42) тенгламага қўямиз:

$$a_0(x)\left[z_1' y_1' + z_1 y_1'' + z_2' y_2' + z_2 y_2''\right] + a_1(x)\left[z_1 y_1' + z_2 y_2'\right] + \\ + a_2(x)\left[z_1 y_1 + y_2 z_2\right] + b(x)$$

ёки ҳадларни группаласак:

$$\left[a_0(x)\, y_1'' + a_1(x)\, y_1' + a_2(x)\, y_1\right] z_1 + \left[a_0(x)\, y_2'' + a_1(x)\, y_2' + \right. \\ \left. + a_2(x)\, y_2\right] z_2 + a_0(x)\left[z_1' y_1' + z_2' y_2'\right] = b(x). \tag{54}$$

y_1 ва y_2 функциялар бир жинсли тенгламаларнинг ечимлари бўлгани учун қуйидаги айниятлар ўринлидир:

$$a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 \equiv 0,$$
$$a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 \equiv 0.$$

Шунинг учун (54) тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$a_0(x)[z_1' y_1' + z_2' y_2'] = b(x)$$

ёки

$$z_1'(x) y_1'(x) + z_2'(x) y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}. \tag{55}$$

(55) тенглама $z_1(x)$ ва $z_2(x)$ функциялар қаноатлантириши керак бўлган иккинчи тенгламадир.

Шундай қилиб, (52) ва (55) тенгламаларни бирлаштириб, $z_1(x)$ ва $z_2(x)$ функцияларнинг ҳосилалари учун қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} z_1'(x) y_1(x) + z_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ z_1'(x) y_1'(x) + z_2'(x) y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

(56) тенгламалар системасидан $z_1'(x)$ ва $z_2'(x)$ учун ягона ифодаларни топиш мумкин, чунки бу системанинг детерминанти $y_1(x)$ ва $y_2(x)$

хусусий ечимларнинг фундаментал системаси учун Вронский детерминанти бўлгани учун:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

$z_1'(x)$ ва $z_2'(x)$ ни аниқлагач, интеграллаш орқали $z_1(x)$ ва $z_2(x)$ ни топамиз, сўнгра (50) формула бўйича хусусий ечимни тузамиз.

Мисол. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ тенгламанинг хусусий ечимини топинг.

Ечилиши. 2-пунктдаги 1-мисолда $y'' + 4y = 0$ тенглама хусусий ечимларнинг фундаментал системаси сифатида $y_1(x) = \sin 2x$ ва $y_2(x) = \cos 2x$ функцияларга эгалигини топган эдик. Шунинг учун берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими (50) формула асосида қуйидагича ёзилади:

$$\bar{y} = z_1(x) \sin 2x + z_2(x) \cos 2x. \tag{*}$$

$z_1'(x)$ ва $z_2'(x)$ ни топиш учун ёзилган (56) система мазкур ҳолда қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} z_1'(x) \sin 2x + z_2'(x) \cos 2x &= 0, \\ 2z_1'(x) \cos 2x - 2z_2'(x) \sin 2x &= \frac{1}{\cos 2x}. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани $z_1'(x)$ ва z_2' га нисбатан ечамиз:

$$z_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\cos 2x \cdot \frac{1}{\cos 2x}}{-2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x} = \frac{1}{2}.$$

Худди шунга ўхшаш, $z_2'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$ ни топамиз. Интеграллаб, топамиз:

$$z_1(x) = \frac{1}{2} x, \qquad z_2(x) = \frac{1}{4} \ln|\cos 2x|.$$

Хусусий ечимни излаётганимиз учун ихтиёрий ўзгармасларни ёзмаймиз. Топилганларни (*) ифодага қўйиб, берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимини топамиз:

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимини топиб ва мос бир жинсли тенглама хусусий ечимларининг фундаментал системасини билган ҳолда (49) формула асосида бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини ёзишимиз мумкинлигини қайд қиламиз:

$$y = \bar{y} + V = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} \ln|\cos 2x| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

4-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Мазкур параграфда чизиқли иккинчи тартибли тенгламаларнинг хусусий ҳоли — тенгламанинг коэффициентлари ўзгармас, яъни сонлардан иборат бўлган ҳол қаралади. Бундай тенгламалар ўзгармас коэффициентли тенгламалар дейилади. Тенгламаларнинг бу тури айниқса кенг қўлланишга эга.

1. Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ушбу

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

тенгламани қараймиз, бу ерда a_0, a_1, a_2 коэффициентлар ўзгармас, шу билан бирга $a_0 \neq 0$. Тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_0 га бўлиб ва $a_1/a_0 = p$, $a_2/a_0 = q$ деб белгилаб, берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{57}$$

Маълумки, чизиқли бир жинсли иккинчи тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг хусусий ечимларининг фундаментал системасини топиш етарли (3- §, 2-пунктдаги 2- теоремага қаранг). Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама хусусий ечимларининг фундаментал системаси қандай топилишини кўрсатамиз.

Бу тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = e^{kx} \tag{58}$$

кўринишда излаймиз. Бу функцияни икки марта дифференциаллаб ҳамда y, y', y'' нинг ифодаларини (57) тенгламага қўйиб,

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

ни ҳосил қиламиз, $e^{kx} \neq 0$ бўлгани учун e^{kx} га қисқартириб, қуйидагги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{59}$$

Бу тенгламадан k нинг e^{kx} функция (57) тенгламанинг ечими бўладиган қийматлари аниқланади.

k коэффициентни аниқлаш учун хизмат қиладиган (59) алгебраик тенглама берилган (57) дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Характеристик тенглама иккинчи даражали тенгламадир, бинобарин иккита илдизга эга. Бу илдизлар ё ҳақиқий ва ҳар хил, ё ҳақиқий ва тенг, ёки қўшма комплекс бўлиши мумкин.

Бу ҳолларнинг ҳар бирида хусусий ечимларнинг фундаментал системаси қандай кўринишга эга бўлишини кўриб чиқамиз.

1. *Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил:* $k_1 \neq k_2$. Бу ҳолда (58) формула бўйича иккита хусусий ечимни топамиз: $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$. Бу иккита хусусий ечим чизиқли эркли, чунки $y_1/y_2 = e^{k_1x}/e^{k_2x} = e^{(k_1-k_2)x} \neq \text{const}$ (берилишига кўра) $k_1 \neq$

$\neq k_2$. Шунинг учун улар ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этади (3- §, 2- пунктга қаранг).

Демак, тенгламанинг умумий ечими (46) формулага кўра қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

2. *Характеристик тенгламаларнинг илдизлари тенг:* $k_2 = k_1$. Бу ҳолда иккала илдиз ҳақиқий сон бўлади. (58) формула бўйича фақат битта $y_1 = e^{k_1x_1}$ хусусий ечимни ҳосил қиламиз. Биринчи ечим билан бирга фундаментал система ҳосил қилувчи иккинчи $y_2(x)$ хусусий ечим $y_2 = xe^{k_1(x)}$ кўринишда бўлишини кўрсатамиз.

Дастлаб, $y_2(x)$ функция (57) тенгламанинг ечими бўлишини текширамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = (xe^{k_1x})'' + p(xe^{k_1x})' + q(xe^{k_1x}) = 2k_1e^{k_1x} +$$
$$+ k_1^2xe^{k_1x} + p(e^{k_1x} + xk_1e^{k_1x}) + qxe^{k_1x} = e^{k_1x}(2k_1 + k_1^2x + p + pxk_1 + qx) =$$
$$= e^{k_1x}[x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1)].$$

Бироқ, k_1(59) характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. Бундан ташқари, Виет теоремаси бўйича $p = -(k_1 + k_2) = -2k_1$. Шунинг учун $p + 2k_1 = 0$. Демак, $y_2'' + py_2' + q = 0$, яъни $y_2(x) = xe^{k_1x}$ функция ҳақиқатан ҳам (57) тенгламанинг ечимидир.

Топилган $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = xe^{k_1x}$ хусусий ечимлар ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этади, чунки улар чизиқли эрклидир: $y_1/y_2 = e^{k_1x}/xe^{k_1x} = \frac{1}{x} \neq \text{cosnt}$.

Шундай қилиб, бу ҳолда чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$$

ёки

$$Y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x). \tag{61}$$

3. *Характаристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар.* Маълумки, ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламанинг комплекс илдизлари қўшма комплекс сонлардан* иборат, яъни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ кўринишга эга. Бу ҳолда (57) тенгламанинг хусусий ечимлари (58) формулага кўра қуйидагича ёзилади:

$$y_1 = e^{k_1x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x};\quad y_2 = e^{k_2x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}.$$

Эйлер формулаларини қўллаб (XI боб, 5- §, 3- п) y_1 ва y_2 нинг ифодаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);\qquad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

---

* VII боб, 3-§. 3-пунктга қаранг.

Бу ечимлар комплекс ечимлардир. Ҳақиқий ечимларни ҳосил қилиш учун қуйидаги янги функцияларни қараймиз:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x; \qquad \overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Булар y_1 ва y_2 ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. бинобарин, ўзлари ҳам (57) тенгламанинг ечимлари бўлади (3-§, 2-пункт, 1-теоремага қаранг):

$\overline{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $\overline{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ечимлар чизиқли эркли бўлгани учун улар ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этади.

Шундай қилиб, чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлган ҳолда қуйидаги кўринишда бўлади;

$$Y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ёки

$$Y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (62)$$

Пировардида характеристик тенгламанинг илдизлари кўринишига боғлиқ ҳолда (57) тенгламанинг умумий ечимлари формулалари жадвалини келтирамиз.

Дифференциал тенглама	$y'' + py' + q = 0$		
Характеристик тенглама	$k^2 + pk + q = 0$		
Характеристик тенгламанинг илдизлари	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = \alpha + \beta i$ $k_2 = \alpha - \beta i$
Хусусий ечимларнинг фундаментал системаси	$e^{k_1 x}$ $e^{k_2 x}$	$e^{k_1 x}$ $xe^{k_1 x}$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x$
Умумий ечимнинг кўриниши	$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$Y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$	$Y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

1-мисол. $y'' + 5y' + 6y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2 + 5k + 6 = 0$ дан иборат. Унинг илдизлари $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Хусусий ечимларнинг фундаментал системаси: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

кўринишдадир.

2-мисол. $y'' - 2y' + y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $k^2 - 2k + 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = k_2 = 1$ тенг илдизларга эга. Хусусий ечимларнинг фундаментал системаси:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x.$$

Тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$Y = e^x(C_1 + C_2 x).$$

3-мисол. $y'' + 4y' + 13y = 0$ тенгламани умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $k_2 + 4k + 13 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = -2 + 3i$ ва $k^2 = -2 - 3i$ илдизларга эга. Бу ерда $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Хусусий ечимларнинг фундаментал системаси:

$$y_1 = e^{-2x}\cos 3x, \quad y_2 = e^{-2x}\sin 3x.$$

Тенгламанинг умумий ечими:

$$Y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

4-мисол. $y'' + 2y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $k^2 + 2 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = \sqrt{2}\,i$ ва $k_2 = -\sqrt{2}\,i$ илдизларга эга. Бу ерда $\alpha = 0$ ва $\beta = \sqrt{2}$. Хусусий ечимларнинг фундаментал системаси: $y_1 = \cos\sqrt{2}\,x$, $y_2 = \sin\sqrt{2}\,x$. Тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$Y = C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x.$$

2. Чизиқли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар. Қуйидаги

$$y'' + py' + qy\,f(x) \qquad (63)$$

тенгламани кўрамиз, бу ерда p ва q коэффициентлар яна сонлар, ўнг томон $f(x)$ эса номаълум функция. Юқорида (3-§, 3-пункт) кўрсатилганидек, (63) тенгламанинг умумий ечими мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисидан иборат.

Бир жинсли ўзгармас коэффициентли (57) тенгламанинг ечимини топиш усули олдинги пунктда батафсил қараб чиқилган эди. Бир жинсли бўлмаган (63) тенгламанинг хусусий ечимини топиш учун олдинги параграфнинг 4-пунктида баён қилинган ўзгармасларни вариациялаш усулини қўллаш мумкин. Умуман айтганда, бу усул дифференциалланувчи ҳар қандай ўнг томон учун қўлланилиши мумкин. Бироқ ўнг томони махсус кўринишга эга бўлган ўзгармас коэффициентли тенгламалар учун *хусусий* ечимни топишнинг анча содда усули мавжуд. Бу усул хусусий *ечим шаклини (кўринишини) танлаш усули* дейилади. Исботларни келтириб ўтирмасдан, дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x)$ нинг кўринишига қараб хусусий ечимни қандай шаклда излаш кераклигини кўрсатамиз.

1. *Тенгламанинг ўнг томони қуйидаги кўринишда:*

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Бу ҳолда y хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаш керак:

$$\overline{y} = Q_n(x)\,x^r.$$

Бу ерда $Q_n(x)$ кўпҳад $P_n(x)$ кўпҳаднинг даражаси каби даражали кўпҳад, бироқ коэффициентлари номаълум, r — характеристик тенгламанинг нолга тенг илдизлари сони.

1-мисол. $y'' + y' = 5x + 3$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. Бу ерда $k^2 + k = 0$ характеристика тенглама $k_1 = 0$ ва $k_2 = -1$ илдизларга эга. Бир жинсли тенгламанинг буларга мос умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$Y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Тенгламанинг ўнг томони биринчи даражали кўпҳад ва характеристик тенгламанинг илдизларидан бири нолга тенг бўлгани учун $(r = 1)$ хусусий ечимни (64) формулага кўра

$$\bar{y} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$$

кўринишда излаш керак. A ва B коэффициентларни $\bar{y}$ берилган тенгламанинг ечими бўладиган қилиб танлаймиз. Бунинг учун $\bar{y}$ нинг ифодасини берилган тенгламага қўямиз:

$$(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = 5x + 3.$$

Бу ердан

$$2A + 2Ax + B = 5x + 3$$

ёки

$$2Ax + (2A + B) = 5x + 3.$$

Ҳосил қилинган тенглик айниятдир, шунинг учун x нинг тенгликнинг ҳар иккала қисмидаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентлари тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 2A &= 5, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned}\right\}$$

бу ерда $A = 5/2$, $B = -2$ ни топамиз.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y} = \frac{5}{2}x^2 - 2x$ кўринишда, умумий ечими эса

$$y = \bar{y} + Y = \frac{5}{2}x^2 - 2x + C_1 + C_2e^{-x}$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. $y'' + 3y' + 2y = x^2$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и л и ш и. Характеристик тенглама $k^2 + 3k + 2 = 0$ ни тузамиз ва унинг $k_1 = -1$, $k_2 = -2$ илдизларини топамиз. Шунинг учун мос бир жинсли тенглама $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ умумий ечимга эга бўлади. Тенгламанинг ўнг томони иккинчи даражали кўпҳад $(x^2 = x^2 + 0\cdot x + 0)$ ва характеристик тенгламанинг бирорта ҳам илдизи нолга тенг бўлмагани учун хусусий ечимни

$$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)x^0 = Ax^2 + Bx + C$$

шаклда излаш керак.

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \; \bar{y}'' = 2A$$

ҳосилаларни топамиз. Уларни берилган дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ёки

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = x^2.$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 2A &= 1, \\ 6A + 2B &= 0, \\ 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб, $A = 1/2$, $B = -3/2$, $C = 7/4$ ни топамиз. Шундай қилиб, хусусий ечим $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ бўлиб, $y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ умумий ечим бўлади.

II. *Тенгламанинг ўнг томони $f(x) = e^{ax}P_n(x)$ кўринишда.* Бу ерда $P_n(x)$ n-даражали кўпҳад, даража кўрсаткичидаги a коэффициент эса ҳақиқий сон.

Бу ҳолда хусусий ечим $\bar{y}$ ни

$$\bar{y} = Q_n(x)\, e^{ax}\, x^r \tag{65}$$

кўринишда излаш керак. Бу ерда $Q_n(x)$ *кўпҳаднинг даражаси $P_n(x)$ кўпҳад даражаси билан бир хил, бироқ коэффициентлари номаълум, r — эса характеристик тенгламанинг даража кўрсаткичдаги a коэффициент билан бир хил бўлган илдизлари сони.*

И з о ҳ. $a = 0$ да 1 ҳолга эга бўламиз, чунки $f(x) = e^{0x}P_n(x) = P_n(x)$.

3-мисол. $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}$ (*) тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и л и ш и. Характеристик тенгламани тузамиз ва унинг илдизларини топамиз: $k^2 - 2k - 3 = 0$; $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Ўнг томони йўқ тенгламанинг умумий ечими $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ кўринишга эга. Характеристик тенгламанинг илдизлари орасида фақат битта $k_2 = a = 3$ илдиз мавжуд бўлгани учун $r = 1$ бўлиб, $\bar{y}$ хусусий ечимни

$$\bar{y} = (Ax + B)e^{3x}\cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$$

кўринишда излаш керак.

$\bar{y}'$ ва $\bar{y}''$ ни топамиз:

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x},$$
$$\bar{y}'' = 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$ ва $\bar{y}''$ нинг ифодаларини (*) тенгламага қўйиб ва $e^{3x} \neq 0$ кўпайтувчига қисқартириб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - 2[(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx)] - 3(Ax^2 + Bx) = x + 2.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$8Ax + (2A + 4B) = x + 2.$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 8A &= 1 \\ 2A + 4B &= 2 \end{aligned}\right\}$$

бу ердан $A = 1/8$ ва $B = 7/16$ ни топамиз.

A ва B нинг топилган қийматларини $\bar{y}$ нинг ифодасига қўйиб, тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}.$$

(*) тенгламанинг умумий ечими ўнг томони йўқ тенгламанинг умумий ечими Y ва (*) тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y}$ нинг йиғиндиси каби топилади, яъни

$$y = \bar{y} + Y = \frac{x}{8}\left(x + \frac{7}{2}\right)e^{3x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

III. *Тенгламанинг ўнг томони $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$ кўринишда,* бу ерда M, N ва b — берилган сонлар.

Бу ҳолда y хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаш керак:

$$\bar{y} = (A\cos bx + B\sin bx)\cdot x^r, \tag{66}$$

бу ерда A ва B — номаълум коэффициентлар, r — характеристик тенгламанинг bi га тенг илдизлари сони.

4- мисол. Ушбу

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг ва ундан $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни ажратинг.

Ечилиши. $k^2 + 4k + 5 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = -2 + i$, $k_2 = -2 - i$, илдизларга эга. Шунинг учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (62) формулага асосан қуйидагича ёзилади:

$$Y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

$bi = i$ характеристик тенгламанинг илдизи эмас, шунинг учун $r = 0$ ва хусусий ечимни

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$$

кўринишда излаш керак. Дифференциаллаб, топамиз:

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x, \quad \bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

$\bar{y}''$, $\bar{y}'$ ва $\bar{y}$ нинг ифодаларини берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламага қўямиз:

$$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x - \sin x.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x.$$

Бу тенглик айниятдир. Шунинг учун чап ва ўнг томонлардаги $\sin x$ ва $\cos x$ нинг олдидаги коэффициентлар мос равишда тенг бўлиши керак. Бу коэффициентларни тенглаб, A ва B ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз*

$$\left.\begin{aligned} 4A + 4B &= 2, \\ 4B - 4A &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Бу системадан $B = 1/8$, $A = 3/8$ ни топамиз. Шундай қилиб, тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y} = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$. умумий ечими эса

$$y = \bar{y} + Y = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + e^{-2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$$

бўлади.

Хусусий ечимни ажратиш учун берилган $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ бошланғич шартларни қўллаб топамиз:

$$y' = -\frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x - 2e^{-2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^{-2x}\left(-C_1\sin x + C_2\cos x\right),$$

* Бу тенгламаларнинг биринчисини $(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$ дан $x = 0$ да, иккинчисини $x = \pi/2$ да ҳосил қилиш мумкин.

у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{8} + C_1, \\ 2 &= \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2. \end{aligned}\right|$$

Бу ердан $C_1 = 5/8$, $C_2 = 25/8$. Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + e^{-2x}\left(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x\right)$$

дан иборат бўлади.

5- мисол. $y'' + 4y = 5\sin 2x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $k^2 + 4 = 0$ характеристик тенгламанинг ечими $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ сонлардан иборат. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$V = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

кўринишга эга. Берилган дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = 5\sin 2x$ қаралаётган типга мансубдир, чунки, уни $5\sin 2x + 0\cdot\cos 2x$ кўринишида тавсирлаш мумкин. Бундан ташқари $bi = 2i$ сон характеристик тенгламанинг илдизларидан бирига тенг ва, бинобарин, $r = 1$ эканини қайд қилиб ўтамиз. Шунинг учун бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини

$$\bar{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x)\,x$$

шаклда излаймиз. Бу ечимни дифференциаллаб ва тенгламага қўйиб, кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{y}' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)\,x + (A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$\bar{y}'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\,x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\,x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x),$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x) + 4(A\cos 2x + B\sin 2x)x = 5\sin 2x.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Бу ердан

$$\left.\begin{aligned} -4A &= 5, \\ 4B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ёки $A = -\frac{5}{4}$, $B = 0$. Шундай қилиб, $\bar{y} = -\frac{5}{4}x\cos 2x$ ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \bar{y} + V = -\frac{5}{4}x\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

кўринишда ёзилади.

Пировардида чизиқли тенгламаларни ечишда кўпинча қўлланиб туриладиган бир теоремани келтирамиз.

Теорема. *Агар*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \tag{67}$$

тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y}_1$ бўлиб, бу тенгламанинг чап томони билан бир хил чап томонга эга бўлган

$$y + py' + qy = f_2(x) \tag{68}$$

тенгламанинг ечими $\overline{y}_2$ *бўлса, у ҳолда* $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ *йиғинди*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) \tag{69}$$

тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Исботи. (69) тенгламанинг чап томонига $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ йиғиндини қўйиб, (67) ва (68) тенгликларга асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$(\overline{y}_1 + \overline{y}_2)'' + p(\overline{y}_1 + \overline{y}_2)' + q(\overline{y}_1 + \overline{y}_2) = (\overline{y}_1'' + p\overline{y}_1' + q\overline{y}_1) +$$
$$+ (\overline{y}_2'' + p\overline{y}_2' + q\overline{y}_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Шундай қилиб, $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ ҳақиқатан ҳам (69) тенгламанинг ечими экан.

6- мисол. $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$ (*) тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечилиши. $k^2 - 2k + 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = k_2 = 1$ илдизларга эга, шунинг учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (61) формулага асосан қуйидагича ёзилади: $Y = e^x(C_1 + C_2x)$.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топиш учун қуйидаги иккита ёрдамчи тенгламани қараймиз:

$$y'' + 2y' + y = 3e^x, \tag{**}$$
$$y'' + 2y' + y = x + 1. \tag{***}$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бири учун $\overline{y}_1$ ва $\overline{y}_2$ хусусий ечимларини топамиз. (**) тенгламанинг хусусий ечимини $\overline{y}_1 = Ae^x \cdot x^2$ кўринишда излаймиз, чунки характеристик тенгламанинг кўрсаткичдаги $a = 1$ коэффициент билан бир хил бўлган илдизлар сони 2 га тенг ($r = 2$).

$\overline{y}_1$ ни дифференциаллаб ва (**) тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\overline{y}_1' = Ae^x x^2 + 2Ae^x x, \quad \overline{y}'' = Ae^x \cdot x^2 + 4Ae^x \cdot x + 2Ae^x;$$

$$(Ae^x \cdot x^2 + 4Ae^x \cdot x + 2Ae^x) - 2(A \cdot e^x \cdot x^2 + 2Ae^x \cdot x) + Ae^x \cdot x^2 = 3e^x.$$

Тенгликнинг иккала қисмини $e^x \neq 0$ кўпайтувчига қисқартириб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, $2A = 3$, $A = 3/2$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $\overline{y}_1 = \frac{3}{2}e^x \cdot x^2$.

(***) тенгламанинг хусусий ечимини $\overline{y}_2 = Bx + C$ кўринишда излаймиз. $\overline{y}_2' = B$ ва $\overline{y}_2'' = 0$ бўлгани учун уларни (***) тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$0 - 2B + Bx + C = x + 1.$$

Бу ердан $B = 1$ ва $C = 3$. Шундай қилиб, $\overline{y}_2 = x + 3$. Юқоридаги теоремага асосан (*) тенгламанинг хусусий ечими қуйидагича бўлади:

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = \frac{3}{2}e^x \cdot x^2 + x + 3.$$

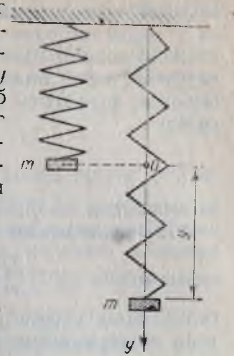
Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \overline{y} + V = \frac{3}{2}e^x \cdot x^2 + x + 3 + e^x(C_1x + C_2)$$

кўринишда бўлади.

3. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг механик ва электр тебранишларни ўрганишга татбиқи. Қуйидаги масалани қараймиз. Пружина учига осилган m массали моддий нуқта (юк) вертикал тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади. Юкнинг ҳаракат қонунини аниқлаш талаб қилинади.

Мувозанат ҳолатда юк оғирлиги пружинанинг эластиклик кучи билан мувозанатлашади деб фараз қиламиз. Координаталар бошини юкнинг мувозанат ҳолати билан устма-уст туширамиз. Oy ўқни юк ҳаракат қилаётган тўғри чизиқ бўйлаб вертикал пастга йўналтирамиз. Юкнинг вақтнинг исталган t моментидаги вазияти юкнинг координаталар бошидаги четланиши y билан аниқланади (79-расм). Юкнинг ҳаракат қонунини топиш учун y четланиш (оғиш) нинг t вақтга боғланишини аниқлаш керак.



69- расм

Юкка қуйидаги кучлар таъсир қилади:

1) Юкни бошланғич вазиятга қайтаришга ҳаракат қилувчи тиклаш кучи $\mathbf{F}_1$. Бу куч Oy ўқ бўйлаб йўналган ва унинг бу ўққа проекцияси юкнинг мувозанат ҳолатидан четланишига пропорционал: $F_{1y} = -ky$. Бу ердаги $k\,(k > 0)$ сон тиклаш коэффициенти дейилади. Куч проекцияси F_{1y} нинг ифодасидаги «минус» ишораси тиклаш кучи пружина деформациясига қарама-қарши томонга йўналганини кўрсатади.

1) Юкли пружина жойлашган муҳитнинг қаршилик кучи $\mathbf{F}_2$ юк ҳаракати тезлиги векторига қарама-қарши йўналган. Тажрибанинг кўрсатишича, $\mathbf{F}_2$ кучнинг миқдори, юк тезлигининг катталиги v га пропорционалдир. Шунинг учун $\mathbf{F}_2$ кучнинг Oy ўққа проекцияси $F_{2y} = -\lambda v$ (бу ерда $\lambda > 0$) ёки $F_{2y} = -\lambda\frac{dy}{dt}$ кўринишда ёзилади.

Юкнинг оғирлик кучини ҳисобга олмаймиз, чунки у пружинанинг эластиклик кучи билан мувозанатлашади, пружинанинг оғирлигини эса йўқ деб ҳисоблаймиз.

Юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузиш учун Ньютоннинг иккинчи қонунидан фойдаланамиз:

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F} \tag{70}$$

Бу ерда $\mathbf{a}$ — тезланиш вектори ва $\sum \mathbf{F}$ — моддий нуқтага таъсир этувчи кучлар йиғиндиси.

Бизнинг ҳолда моддий нуқтага (юкка) Oy ўқ бўйлаб йўналган $\mathbf{F}_1$ ва $\mathbf{F}_2$ иккита куч таъсир этади. (70) тенгликнинг иккала томонидаги векторларни Oy ўққа проекциялаб ва тезланиш вектори $\mathbf{a}$ нинг Oy ўққа проекцияси $\frac{d^2y}{dt^2}$ га тенг эканини эътиборга олиб, изланаётган дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}$$

ёки

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{71}$$

шаклда излаш керак. $\bar{y}$ ни икки марта дифференциаллаб, $\bar{y}$, $\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$ нинг ифодаларини (77) тенгламага қўйиб, A ва B коэффициентлар учун ифодаларни ҳосил қиламиз: $A = \frac{a}{\omega^2-\mu^2}$, $B = 0$. Шундай қилиб, (77) тенгламанинг хусусий ечими

$$\bar{y} = \frac{a}{\omega^2-\mu^2} \sin\mu t$$

кўринишда, умумий ечим эса

$$y = \bar{y} + Y = \frac{a}{\omega^2-\mu^2} \sin\mu t + N\sin(\omega t + \varphi) \qquad (78)$$

кўринишда бўлади.

(78) муносабатдан ташқари кўзғатувчи кучнинг μ частотаси пружина тебранишларининг хусусий частотаси ω га яқин бўлса, у ҳолда $\omega^2-\mu^2$ айирма нолга яқин бўлиши ва тебраниш амплитудаси кескин ортиши келиб чиқади.

Агар ташқи кўзғатувчи кучнинг μ частотаси ω хусусий частота билан бир хил бўлса, (78) формуладан фойдаланиб бўлмайди. Бунда $\mu i = \omega i$ ушбу $k^2+\omega^2=0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун 2- пунктдаги қоидага кўра (77) тенгламанинг хусусий ечимини бу ҳолда

$$\bar{y} = (A\sin\mu t + B\cos\mu t)t$$

шаклда излаш керак. $\bar{y}$ ва $\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$ ни (77) тенгламага қўйиб ва $\mu=\omega$ эканини назарда тутиб, A ва B коэффициентларнинг қийматини топамиз.

$$A = 0, \ B = -\frac{a}{2\omega}.$$

Шунинг учун $\bar{y}$ хусусий ечим қуйидаги кўринишга эга:

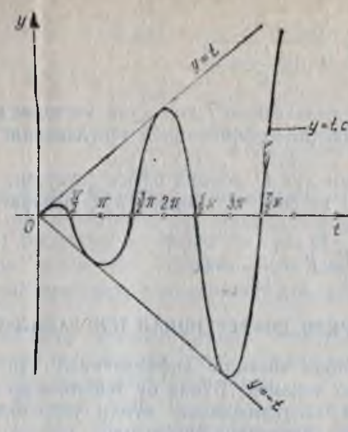
$$\bar{y} = -\frac{at}{2\omega}\cos\omega t,$$

(77) тенгламанинг умумий ечими эса қуйидагича ёзилади:

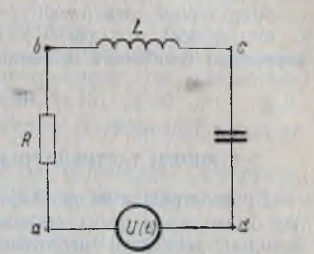
$$y = Y + \bar{y} = N\sin(\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega}\cos\omega t.$$

Иккинчи ҳадда t кўпайтувчининг бўлиши тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан чексиз ўсишини билдиради. $\frac{at}{2\omega}\cos\omega t$ функциянинг графиги $a=2$, $\omega=1$ бўлган ҳол учун 80- расмда тасвирланган. Бундай ҳолда *резонанс* рўй берди дейилади. Демак, тебранма ҳаракатда резонанс ҳодисаси тебранишларнинг хусусий частотаси ташқи куч частотаси билан бир хил бўлган ҳолда рўй беради.

Занжирда ток кучи ўзгариши билан боғлиқ бўлган ҳодисалар ҳам иккинчи тартибли чизиқли тенгламаларга олиб келади.



80- расм



81- расм

R омик қаршилик, L ўзиндукция ва C сиғимдан иборат электр занжирини қараймиз, унга вақт ўтиши билан маълум $U=U(t)$ қонун бўйича ўзгарадиган электр юритувчи куч манбаи уланган (81- расм). Занжирдаги $I=I(t)$ ток кучининг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгаришини текширамиз. Занжирнинг ab, bc, cd участкалари (қисмлари) даги кучланиш пасайишларини мос равишда U_{ab}, U_{bc}, U_{cd} орқали белгилаймиз. Ёпиқ контурда кучланиш пасайишларининг алгебраик йиғиндиси электр юритувчи кучга тенг бўлгани учун

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t).$$

Физикадан маълумки,

$$U_{ab} = RI(t) \qquad \text{(Ом қонуни)},$$

$$U_{bc} = L\frac{dI(t)}{dt}, \ U_{cd} = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt.$$

Шунинг учун

$$R\cdot I(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt = U(t).$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини t бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} = U'(t)$$

ёки

$$I'' + \frac{R}{L}\, I' + \frac{I}{LC} = \frac{U'}{L}.$$

Шундай қилиб, занжирдаги изланаётган I ток кучи ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламанинг ечими бўлади.

Агар ташқи электр юритувчи куч U доимий бўлса (хусусан, нолга тенг бўлса), у ҳолда $U' = 0$ ва биз ўнг томони йўқ чизиқли дифференциал тенгламага келамиз:

$$I'' + \frac{R}{L}\, I' + \frac{I}{LC} = 0.$$

5-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Бу параграфда юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар билан жуда қисқа танишиб чиқамиз. Бунда бу тенгламалар ечимларининг хоссалари исботлари келтирилмайди, чунки улар иккинчи тартибли тенгламаларнинг мос исботларига ўхшашдир.

1. Таърифлар ва умумий хоссалар. Ушбу

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x) \quad (79)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади.

Бу ерда $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ коэффициентлар ва $f(x)$ озод ҳад x аргументнинг берилган функцияси.

Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, чизиқли тенглама

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0 \quad (80)$$

кўринишга эга бўлиб, *чизиқли бир жинсли* (ёки ўнг томони йўқ) тенглама дейилади. Агар $f(x) \neq 0$ бўлса, тенглама *бир жинсли бўлмаган* (ёки ўнг томони бор) *тенглама* дейилади.

n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси иккинчи тартибли чизиқли тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси каби ифодаланади.

Теорема. Агар (79) *чизиқли тенгламанинг* $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... $a_n(x)$ *коэффициентлари ва* $f(x)$ *ўнг томони бирор* $]\alpha, \beta[$ *интервалда узлуксиз, шу билан бирга* $a_0(x)$ *коэффициент бу интервалнинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг бўлмаса, у ҳолда ушбу*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\; y'\big|_{x=x_0} = y_0',\; y''\big|_{x=x_0} = y_0'',\; \ldots,\; y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (\alpha < x_0 < \beta)$$

бошланғич шартлар қандай бўлмасин тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ягона ечими мавжуд бўлади. $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$ лар бир жинсли чизиқли (80) тенгламанинг n та қандайдир хусусий ечимлари бўлсин. Ушбу

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (81)$$

детерминант *Вронский детерминанти* дейилади.

Агар n-тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг $W(x)$ Вронский детерминанти $]\alpha, \beta[$ интервалнинг ҳеч қандай нуқтасида нолга тенг бўлмаса, тенгламанинг $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ хусусий ечимлари ечимларнинг *фундаментал системасини* ҳосил қилади.

Иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар ҳолидагидек, n-тартибли чизиқли тенгламалар учун умумий ечимнинг тузилиши тўғрисидаги қуйидаги теоремалар ўринлидир.

1-теорема. Агар $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y = y_3(x)$, ..., $y = y_n(x)$ лар (80) *n-тартибли бир жинсли чизиқли тенгламанинг* $]\alpha, \beta[$ *интервалда хусусий ечимларининг фундаментал системасини ташкил этувчи хусусий ечимлари бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими*

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad (82)$$

кўринишда бўлади.

2-теорема. *Агар* $\bar{y}$ (79) *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими бўлиб,* Y *эса мос бир жинсли* (80) *тенгламанинг умумий ечими бўлса, у ҳолда* $y = \bar{y} + Y$ *функция бир жинсли бўлмаган* (79) *дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.*

Изоҳ. Иккита функция учун киритилган чизиқли боғлиқлик ва чизиқли эрклилик тушунчаларини n та функциялар бўлган ҳол учун умумлаштирамиз.

Агар бирор $]\alpha, \beta[$ интервалдаги барча x лар учун $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$ тенглик ўринли бўладиган, ҳаммаси бирданига нолга тенг бўлмаган λ_1, λ_2, ..., λ_n сонлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ функциялар $]\alpha, \beta[$ интервалда *чизиқли боғлиқ* дейилади.

Агар бу тенглик $]\alpha, \beta[$ даги барча x лар учун фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина бажарилса, бундай функциялар $]\alpha, \beta[$ интервалда *чизиқли эркли* дейилади.

Масалан, 1, x, x^2, ... x^n функциялар системаси бутун сон ўқида чизиқли эрклидир (II боб, 7-§, 3-пунктга қаранг).

Қуйидаги тасдиқ ўринлидир (биз уни исботсиз келтирамиз). (80) *тенгламанинг n та хусусий ечимлар системаси берилган интервалда фундаментал бўлиши учун мазкур интервалда бу ечимлар чизиқли эркли бўлиши зарур ва етарлидир.*

2. **n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар.** Ушбу

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (83)$$

кўринишдаги тенглама *n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама дейилади.* Бу ерда a_0, a_1, a_2 . . . , a_{n-1}, a_n — коэффициентлар — бирор сонлар, шу билан бирга $a_0\neq 0$.

Ушбу бир жинсли ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \qquad (84)$$

(84) тенгламанинг ечимини $y=e^{kx}$ кўринишда излаймиз. Бу функцияни берилган тенгламага қўйиб ва умумий кўпайтувчи $e^{kx}\neq 0$ га қисқартириб, қуйидаги алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0, \qquad (85)$$

бу ердан k нинг $y=e^{kx}$ функция (84) тенгламанинг ечими бўладиган қийматлари аниқланади. (85) алгебраик тенглама (84) чизиқли дифференциал тенглама учун *характеристик тенглама* дейилади.

(85) тенглама n-даражали тенгламадир, шунинг учун у n та илдизга эга (VII боб, 3-§. 4-пунктга қаранг). Қуйидагини кўрсатиш мумкин:

1) *характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган ($k_1=k_2=$ $=k_3=\ldots=k_r$) исталган ҳақиқий илдизи k_1 га ушбу r та хусусий ечим мос келади:*

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=xe^{k_1x},\ y_3=x^2e^{k_1x},\ \ldots,\ y_r=x^{r-1}e^{k_1x};$$

2) *характеристик тенгламанинг ҳар бирининг карралиги r бўлган ҳар қандай комплекс қўшма $k_1=a+\beta i$, $k_2=a-\beta i$ илдизлар жуфтига ушбу $2r$ та хусусий ечим мос келади:*

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_r=x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{r+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{r+2}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2r}=x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(85) характеристик тенгламанинг барча ҳақиқий ва комплекс илдизларига мос келувчи бундай ечимларнинг сони n га тенг. Бу ечимлар хусусий ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этишини кўрсатиш мумкин.

1-мисол. $y^V-y^{IV}-y^{III}-y''=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и л и ш и. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^5-k^4-k^3+k^2=0.$$

Бу тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб ечамиз:

$$k^5-k^4-k^3+k^2=k^2(k^3-k^2-k+1)=k^2[k^2(k-1)-(k-1)]=k^2(k-1)\times$$
$$\times(k^2-1)=k^2(k-1)^2(k+1).$$

Демак, характеристик тенгламанинг илдизлари: $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=1$, $k_5=$ $=-1$. Карралиги 2 бўлган $k_1=k_2=0$ илдизга иккита хусусий ечим мос келади:

$y_1=e^{0x}=1$, $y_2=xe^{0x}=x$. Карралиги 2 га тенг бўлган $k_3=k_4=1$ илдизга $y=$ $=e^x$ ва $y_4=xe^x$ хусусий ечимлар мос келади, ниҳоят, $k_5=-1$ оддий илдизга битта $y_5=e^{-5}$ хусусий ечим мос келади. Бу барча хусусий ечимлар фундаментал система ташкил этади. Шунинг учун умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$Y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x+C_5e^{-x}.$$

Энди ушбу бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x). \qquad (86)$$

Бизга маълумки, бу тенгламанинг умумий ечими мос бир жинсли (80) тенгламанинг умумий ечими билан бир жинсли бўлмаган (86) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг.

Бир жинсли чизиқли тенгламанинг умумий ечимини топиш ҳозиргина қараб чиқилди.

(86) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини излашда ўнг томон махсус кўринишга эга бўлган ҳол билан чекланамиз (4-§, 2-пунктга қаранг).

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими шаклини тузиш қоидаси иккинчи тартибли тенгламанинг хусусий ечими шаклини тузишнинг 4-§, 2-пунктда ифодаланган қоидасининг худди ўзи бўлади.

2-мисол. $y'''+y'=\cos 2x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и л и ш и. Характеристик тенглама тузамиз: $k^3+k=0$. Унинг илдизларини топамиз: $k_1=0$, $k_2=i$, $k_3=-i$. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$Y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$$

кўринишда бўлади.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини

$$\bar{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$$

шаклда излаш керак. $\bar{y}$ ни уч марта дифференциаллаймиз:

$$\bar{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\ \bar{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x,$$
$$\bar{y}'''=8A\sin 2x-8B\cos 2x.$$

$\bar{y}'''$ ва $\bar{y}'$ нинг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$8A\sin 2x-8B\cos 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x=\cos 2x,$$
$$6A\sin 2x-6B\cos 2x=\cos 2x.$$

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонидаги $\sin 2x$ ва $\cos 2x$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаб, $6A=0$, $-6B=1$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан $A=0$, $B=$ $=-1/6$ ва натижада хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$\bar{y}=-\frac{1}{6}\sin 2x.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y=\bar{y}+Y=-\frac{1}{6}\sin 2x+C_1+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

6-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ҚАТОРЛАР ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

1-§ нинг 8-пунктида биринчи тартибли тенгламаларни интеграллаш методлардан изоклиналар методи ва Эйлер методи қаралган эди. Бу параграфда дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини қаторлар ёрдамида топиш усули қаралади. Бу усул исталган тартибли тенгламани тақрибий ечиш учун яроқлидир.

Дифференциал тенгламанинг ечими кўп ҳолларда бирор интервалда яқинлашадиган даражали қатор кўринишида берилиши мумкин. Бу қаторнинг коэффициентларини Тейлор қаторини қўллашга асосланган усул ёрдамида топиш мумкин.

Ушбу иккинчи тартибли

$$y'' = f(x, y, y') \tag{87}$$

тенгламанинг $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топиш талаб қилинган бўлсин.

Берилган тенгламанинг $y = y(x)$ ечимини даражали қатор (Тейлор қатори) кўринишида ифодалаш мумкин деб фараз қилайлик:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{x - x_0}{1!} + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \\ + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots \tag{88}$$

Қаторнинг коэффициентларини аниқлаш учун қуйидагича йўл тутамиз. $y(x_0) = y_0$ ва $y'(x_0) = y_0'$ қийматлар бизга бошланғич шартлардан маълум. $y''(x_0)$ ни топиш учун (87) тенгламанинг ўнг томонида y ва y' ўрнига уларнинг $x = x_0$ даги қийматларини қўямиз:

$$y''(x_0) = y_0'' = f(x_0, y_0, y_0'). \tag{89}$$

$y'''(x_0)$ ни топиш учун (87) тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз ва y, y, y'' нинг $x = x_0$ даги қийматларини қўямиз. Кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y'''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' + \frac{\partial f}{\partial y'}\, y'' = \Phi(x, y, y', y''), \tag{90}$$

$$y'''(x_0) = \Phi(x_0, y_0, y_0', y_0'').$$

(90) тенгликни яна дифференциаллаб ва x_0, y_0, y_0', y_0'', y_0''' қийматларни қўйиб, $y^{IV}(x_0)$ қийматни топамиз ва ҳ.к. Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (88) Тейлор қаторига қўямиз. Натижада (87) тенгламанинг ечимини топамиз.

Мисол. $y'' = y\cos x + x$ тенгламанинг $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимининг даражали қаторга ёйилмасидаги биринчи учта ҳадини топинг.

Ечилиши. Тенглама ечимини Маклорен қатори кўринишида излаймиз:

$$y = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots.$$

$x = 0$ да $y = 1$ эканини эътиборга олиб, берилган дифференциал тенгламадан топамиз:

$$y''(0) = 1\cdot\cos 0 + 0 = 1.$$

y''' ни топиш учун берилган тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз:

$$y''' = y'\cos x - y\sin x + 1;$$

$x = 0$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'''(0) = y'(0)\cdot\cos 0 - y(0)\cdot\sin 0 + 1 = 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1 = 1.$$

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини қаторга қўйиб, $y(x)$ ечим учун қаторнинг хусусий йиғиндиси кўринишидаги тақрибий ифодани ҳосил қиламиз:

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Изоҳ. Тенгламаларнинг тақрибий ечимини қаторлар ёрдамида топишда қандай шартларда ечимни даражали қатор кўринишида излаш мумкинлиги масаласини, шунингдек, топилган ечимнинг аниқлиги масаласини қарамаймиз.

7-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1. Умумий тушунчалар. Математика, физика ва техниканинг кўпгина масалаларида бир варакайига ўзаро бир нечта дифференциал тенгламалар билан боғланган бир нечта функцияни топиш талаб қилинади. Бундай тенгламалар тўплами *дифференциал тенгламалар системаси* дейилади. Хусусан, бундай системаларга фазода берилган кучлар таъсирида бўлган жисм ҳаракати ўрганиладиган масалалар олиб келади.

Масалан, фазода бирор (L) эгри чизиқ бўйлаб $\mathbf{F}$ куч таъсири остида m массали моддий нуқта ҳаракат қилаётган бўлсин. Нуқтанинг ҳаракат қонунини, яъни нуқта координаталарининг вақтга боғлиқлик қонунини аниқлаш талаб қилинади. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ҳаракатланаётган нуқтанинг радиус-вектори бўлсин. Агар нуқтанинг ўзгарувчи координаталари $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ орқали белгиланса, у ҳолда

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + \mathbf{r}(t)\,\mathbf{k}$$

бўлади. Ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги [ва тезланиши қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

(VI боб, 5-§, 4-пунктга қаранг).

$\mathbf{F}$ куч, умуман айтганда, вақтнинг, нуқта координаталарининг ва тезликнинг координата проекцияларининг функциясидир:

$$\mathbf{F} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{i} + F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{j} + \\ + F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{k}.$$

6- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ҚАТОРЛАР ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

1- § нинг 8- пунктида биринчи тартибли тенгламаларни интеграллаш методлардан изоклиналар методи ва Эйлер методи қаралган эди. Бу параграфда дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини қаторлар ёрдамида топиш усули қаралади. Бу усул исталган тартибли тенгламани тақрибий ечиш учун яроқлидир.

Дифференциал тенгламанинг ечими кўп ҳолларда бирор интервалда яқинлашадиган даражали қатор кўринишида берилиши мумкин. Бу қаторнинг коэффициентларини Тейлор қаторини қўллашга асосланган усул ёрдамида топиш мумкин.

Ушбу иккинчи тартибли

$$y'' = f(x,\ y,\ y') \tag{87}$$

тенгламанинг $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топиш талаб қилинган бўлсин.

Берилган тенгламанинг $y = y(x)$ ечимини даражали қатор (Тейлор қатори) кўринишида ифодалаш мумкин деб фараз қилайлик:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{x - x_0}{1!} + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots \tag{88}$$

Қаторнинг коэффициентларини аниқлаш учун қуйидагича йўл тутамиз. $y(x_0) = y_0$ ва $y'(x_0) = y_0'$ қийматлар бизга бошланғич шартлардан маълум. $y''(x_0)$ ни топиш учун (87) тенгламанинг ўнг томонида y ва y' ўрнига уларнинг $x = x_0$ даги қийматларини қўямиз:

$$y''(x_0) = y_0'' = f(x_0,\ y_0,\ y_0'). \tag{89}$$

$y'''(x_0)$ ни топиш учун (87) тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз ва $y,\ y,\ y''$ нинг $x = x_0$ даги қийматларини қўямиз. Кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y'''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\ y' + \frac{\partial f}{\partial y'}\ y'' = \Phi(x,\ y,\ y',\ y''), \tag{90}$$

$$y'''(x_0) = \Phi(x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'').$$

(90) тенгликни яна дифференциаллаб ва $x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'',\ y_0'''$ қийматларни қўйиб, $y^{\mathrm{IV}}(x_0)$ қийматни топамиз ва ҳ.к. Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (88) Тейлор қаторига қўямиз. Натижада (87) тенгламанинг ечимини топамиз.

Мисол. $y'' = y\cos x + x$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимининг даражали қаторга ёйилмасидаги биринчи учта ҳадини топинг.

Е ч и л и ш и. Тенглама ечимини Маклорен қатори кўринишида излаймиз:

$$y = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots .$$

$x = 0$ да $y = 1$ эканини эътиборга олиб, берилган дифференциал тенгламадан топамиз:

$$y''(0) = 1\cdot\cos 0 + 0 = 1.$$

y''' ни топиш учун берилган тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз:

$$y''' = y'\cos x - y\sin x + 1;$$

$x = 0$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'''(0) = y'(0)\cdot\cos 0 - y(0)\cdot\sin 0 + 1 = 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1 = 1.$$

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини қаторга қўйиб, $y(x)$ ечим учун қаторнинг хусусий йиғиндиси кўринишидаги тақрибий ифодани ҳосил қиламиз:

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

И з о ҳ. Тенгламаларнинг тақрибий ечимини қаторлар ёрдамида топишда қандай шартларда ечимни даражали қатор кўринишида излаш мумкинлиги масаласини, шунингдек, топилган ечимнинг аниқлиги масаласини қарамаймиз.

7- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1. Умумий тушунчалар. Математика, физика ва техниканинг кўпгина масалаларида бир варакайига ўзаро бир нечта дифференциал тенгламалар билан боғланган бир нечта функцияни топиш талаб қилинади. Бундай тенгламалар тўплами *дифференциал тенгламалар системаси* дейилади. Хусусан, бундай системаларга фазода берилган кучлар таъсирида бўлган жисм ҳаракати ўрганиладиган масалалар олиб келади.

Масалан, фазода бирор (L) эгри чизиқ бўйлаб **F** куч таъсири остида m массали моддий нуқта ҳаракат қилаётган бўлсин. Нуқтанинг ҳаракат қонунини, яъни нуқта координаталарининг вақтга боғлиқлик қонунини аниқлаш талаб қилинади. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ҳаракатланаётган нуқтанинг радиус-вектори бўлсин. Агар нуқтанинг ўзгарувчи координаталари $x(t),\ \ y(t),\ z(t)$ орқали белгиланса, у ҳолда

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + \mathbf{r}(t)\,\mathbf{k}$$

бўлади. Ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги [ва тезланиши қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

(VI боб, 5- §, 4- пунктга қаранг).

F куч, умуман айтганда, вақтнинг, нуқта координаталарининг ва тезликнинг координата проекцияларининг функциясидир:

$$\mathbf{F} = F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{i} + F_y\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{j} + F_z\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\mathbf{k}.$$

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан нуқтанинг ҳаракат қонуни тенгламаси қуйидагича ёзилади: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларида турган векторларни координата ўқларига проекциялаб, ҳаракатнинг учта дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Бу дифференциал тенгламалар изланаётган учта $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функцияга нисбатан учта иккинчи тартибли* дифференциал тенгламалар системасидан иборатдир.

Келгусида фақат изланаётган $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ функцияларга нисбатан махсус кўринишдаги биринчи тартибли тенгламалар системасини ўрганиш билан чекланамиз. Бу система қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n), \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n) \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

кўринишга эга ва *нормал шаклдаги система* ёки *нормал система* дейилади.

Нормал системада тенгламаларнинг ўнг томонлари изланаётган функцияларнинг ҳосилаларини ўз ичига олмайди.

(92) *системанинг ечими* деб бу системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантирадиган $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ функциялар тўпламига айтилади.

Иккинчи, учинчи ва янада юқорироқ тартибли тенгламалар системасини янги функциялар киритиб, нормал системага келтириш мумкин. Масалан, (91) система нормал системага қуйидагича келтирилади:

$$u(t) = \frac{dx}{dt},\ v(t) = \frac{dy}{dt},\ w(t) = \frac{dz}{dt}$$

деб янги $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ функциялар киритамиз. У холда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt},\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt},$$

натижада (91) тенгламалар системаси қуйидагича ёзилади:

* Дифференциал тенгламалар системасининг тартиби деб, бу системага кирувчи тенгламаларнинг энг юқори тартибига айтилади.

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{m}F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w), \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m}F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w), \\ \frac{dx}{dt} &= u(t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(t). \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

(93) нормал системадир. Масалан, учта x, y, z номаълум функцияли учта тенгламадан иборат ушбу нормал системани қараймиз:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t,\ x,\ y,\ z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t,\ x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t,\ x,\ y,\ z). \end{aligned} \tag{94}$$

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун Кошининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси қуйидагича ифодаланади:

Теорема. (94) *система тенгламаларининг ўнг томонлари, яъни* $f_i(t,\ x,\ y,\ z)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ *функциялар бирор G соҳада барча ўзгарувчилари бўйича узлуксиз ва унда узлуксиз* $\frac{df_i}{dx},\ \frac{df_i}{dy},\ \frac{df_i}{dz}$ *хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда G соҳага тегишли* $t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0$ *қийматлар ҳар қандай бўлганда ҳам системанинг ушбу*

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0 \tag{95}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ягона $x(t),\ y(t),\ z(t)$ *ечими мавжуд бўлади.*

(94) системани интеграллаш учун шундай усулни қўллаш мумкинки, унинг ёрдамида учта изланаётган функцияга нисбатан учта тенгламага эга бўлган берилган система битта номаълум функцияга нисбатан учинчи тартибли битта тенгламага келтирилади. Бу усул номаълумларни *йўқотиш усули* дейилади.

Унинг қўлланишини мисолда кўрсатамиз. Соддалик учун иккита тенглама системаси билан чекланамиз. Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 5y. \end{aligned}$$

Системанинг биринчи тенгламасини t бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

ни топамиз. Бу тенгликка $\frac{dy}{dt}$ нинг системанинг иккинчи тенгламасидаги ифодасини қўямиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + (-2x - 5y).$$

Ниҳоят, y функцияни унинг системанинг биринчи тенгламасидаги

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x \qquad (*)$$

ифодаси билан алмаштириб, битта номаълум функцияга нисбатан иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламага келамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right)$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0.$$

Бу тенгламани интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t). \qquad (**)$$

(**) ни дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

x ва $\frac{dx}{dt}$ нинг ифодаларини (*) тенгликка қўйиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}[(C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t].$$

Ушбу

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{-6t}[(C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t] \qquad (***)$$

функциялар берилган системанинг ечими бўлади.

Шундай қилиб, иккита дифференциал тенгламанинг нормал системасини интеграллаб, унинг иккита ихтиёрий C_1 ва C_2 ўзгармасга боғлиқ ечимини ҳосил қилдик. Умумий ҳолда n та тенгламадан иборат нормал система учун унинг умумий ечими n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ эканини кўрсатиш мумкин. Масалан, учта тенгламадан иборат ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t, x, y, z) \end{aligned}\right|$$

нормал система учун умумий ечим ихтиёрий учта C_1, C_2, C_3 ўзгармасга боғлиқ бўлади ва у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3),\ y = y(t, C_1, C_2, C_3),\ z = z(t, C_1, C_2, C_3).$$

Хусусий ечимни ажратиш учун

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0$$

бошланғич шартлар берилади ва C_1, C_2, C_3 ўзгармаслар қуйидаги тенгламалар системасидан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} x(t_0, C_1, C_2, C_3) &= x_0, \\ y(t_0, C_1, C_2, C_3) &= y_0, \\ z(t_0, C_1, C_2, C_3) &= z_0. \end{aligned}\right\}$$

Мисол сифатида юқорида топилган (***) умумий ечим

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{-6t}[(C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$$

дан $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни ажратайлик.

Берилган бошланғич шартларда (***) ечимдан C_1 ва C_2 ўзгармасларни топиш учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 1 &= (C_2 + C_1)\cdot 1 + (C_2 - C_1)\cdot 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу ердан $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Демак, изланаётган хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = e^{-6t} \sin t,\ y = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системалари. Тенгламаларнинг нормал системасини интеграллашнинг юқорида кўрилган усулидан ташқари яна битта усулни кўрсатамиз. Бу усул фақат ўзгармас коэффициентли чизиқли тенгламаларнинг нормал системаси учун қўлланилади.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси берилган бўлсин. Соддалик учун учта номаълум функцияли учта тенглама системаси билан чекланамиз:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\
\frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\
\frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.
\end{aligned}\right| \tag{96}
$$

Бу системанинг хусусий ечимичи

$$
x = \alpha e^{kt},\ y = \beta e^{kt},\ z = \gamma e^{kt} \tag{97}
$$

кўринишда излаймиз. Биз α, β, γ коэффициентларни ва даража кўрсаткичи k ни шундай аниқлашимиз керакки, (97) функциялар (96) системанинг ечими бўлсин. Бу функцияларни (96) тенгликларга қўйиб ва $e^{kt} \neq 0$ кўпайтувчига қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$
\left.\begin{aligned}
k\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\
k\beta &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\
k\gamma &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma.
\end{aligned}\right\}
$$

Барча ҳадларни бир томонга ўтказиб, α, β, γ га нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$
\left.\begin{aligned}
(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= 0, \\
a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma &= 0, \\
a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{98}
$$

(98) бир жинсли тенгламалар системасидир. Маълумки (II боб, 7-§, 7-пункт), бир жинсли система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. Шундай қилиб, (98) система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} - k
\end{vmatrix} = 0 \tag{99}
$$

тенглик бажарилиши керак.

(99) тенглик k га нисбатан учинчи даражали тенгламадир, у (96) системанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. Характеристик тенглама ҳар хил ҳақиқий k_1, k_2, k_3 илдизларга эга бўлган ҳол билан чекланамиз. Бу илдизларнинг ҳар бири учун мос (98) тенгламалар системасини ёзамиз ва α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 коэффициентларни аниқлаймиз. Агар системанинг характеристик тенгламанинг k_1 илдизига мос ечимини x_1, y_1, z_1 орқали, k_2 га мос ечимини x_2, y_2, z_2 орқали, k_3 га мос ечимини x_3, y_3, z_3 орқали белгиласак, (96) дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими қуйидагича ёзилишини кўрсатиш мумкин:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \\
y(t) &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\
z(t) &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3.
\end{aligned}
$$

ёки

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1\alpha_1 e^{k1t} + C_2\alpha_2 e^{k2t} + C_3\alpha_3 e^{k3t}, \\
y(t) &= C_1\beta_1 e^{k1t} + C_2\beta_2 e^{k2t} + C_3\beta_3 e^{k3t}, \\
z(t) &= C_1\gamma_1 e^{k1t} + C_2\gamma_2 e^{k2t} + C_3\gamma_3 e^{k3t}.
\end{aligned} \tag{100}
$$

Мисол. Ушбу системанинг умумий ечимини топинг:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -2x - 3y \\
\frac{dy}{dt} &= -x
\end{aligned}\right| \tag{*}
$$

Ечилиши. Берилган дифференциал тенгламалар системасига мос (99) характеристик тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$
\begin{vmatrix}
-2-k & -3 \\
-1 & 0-k
\end{vmatrix} = 0
$$

ёки $k^2 + 2k - 3 = 0$. Унинг илдизлари: $k_1 = -3$, $k_2 = 1$

(*) системанинг хусусий ечимларини

$$
x_1 = \alpha_1 e^{k_1t},\ y_1 = \beta_1 e^{k_1t};\ x_2 = \alpha_2 e^{k_2t},\ y_2 = \beta_2 e^{k_2t}
$$

кўринишда излаймиз.

$k_1 = -3$ да α ва β ни аниқлаш учун (98) тенгламалар системаси қуйидагича ёзилади:

$$
\left.\begin{aligned}
[-2-(-3)]\alpha_1 - 3\beta_1 &= 0, \\
-\alpha_1 + [0-(-3)]\beta_1 &= 0
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\alpha_1 - 3\beta_1 &= 0. \\
-\alpha_1 + 3\beta_1 &= 0.
\end{aligned}\right\}
$$

Бу система чексиз кўп ечимга эга, чунки иккинчи тенглама биринчи тенгламанинг натижасидир. Масалан, $\beta_1 = 1$ деб, $\alpha_1 = 3$ ни топамиз. Шундай қилиб, характеристик тенгламанинг $k_1 = -3$ илдизига $x_1 = 3e^{-3t}$ ва $y_1 = e^{-3t}$ хусусий ечимлар мос келади.

$k = 1$ да α ва β ни аниқлаш учун (98) тенгламалар системаси қуйидагича бўлади:

$$
\left.\begin{aligned}
-3\alpha_2 - 3\beta_2 &= 0, \\
-\alpha_2 - \beta_2 &= 0
\end{aligned}\right\}
$$

Бу системанинг ечимлари сифатида $\alpha_2 = 1$ $\beta_2 = -1$ ни олиш мумкин. У ҳолда: характеристик тенгламанинг $k = 1$ илдизига $x_2 = e^t$ ва $y_2 = -e^t$ хусусий ечимлар мос келади.

Берилган (*) системанинг умумий ечими (100) формулага кўра қуйидагича бўлади

$$
x(t) = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^t;\ y(t) = C_1 e^{-3t} - C_2 e^t.
$$

Агар (99) характеристик тенгламанинг илдизлари орасида комплекс сонлар бўлса, у ҳолда уларга мос хусусий ечимлар битта чизиқли тенглама ҳолидагига ўхшаш (4-§, I-пунктга қаранг), Эйлер формулалари бўйича ўзгартирилади.

XIII БОБ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

1. Тасодифий миқдорлар. Частота. Эҳтимол. Эҳтимоллар назарияси кўп сондаги тасодифий ҳодисалар (воқеалар) нинг қонуниятларини ўрганувчи математик фандир.

Маълум шартлар мажмуаси (тўплами) бажарилганда содир бўлиши ҳам, содир бўлмаслиги ҳам мумкин бўлган ҳар қандай воқеа *тасодифий ҳодиса* (ёки оддий қилиб айтганда, *ҳодиса*) дейилади. Эҳтимоллар назарияси кўп сонлилик характерига эга бўлган ана шундай ҳодисалар билан иш кўради. Бу берилган шартлар тўплами чексиз кўп марта амалга оширилиши мумкин деган сўздир. Бу шартлар тўпламининг ҳар гал амалга оширилиши *синов* (ёки *тажриба* дейилади.)

Масалан, агар синов тангани ташлашдан иборат бўлса, у ҳолда унинг гербли томони тушиши ҳодисадир; агар синов берилган турдаги подшипникни тайёрлаш бўлса, у ҳолда подшипникнинг стандартга мослиги ҳодисадир; агар синов ўйин соққасини, яъни ёқларига 1 дан 6 гача рақамлар (очколар) ёзилган кубикни ташлашдан иборат бўлса, у ҳолда бешлик тушиши ҳодисадир.

Ҳодисаларни латин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгилаймиз: $A, B, C \cdots$

n та синовда A ҳодиса m марта рўй берган бўлсин. m/n нисбат A *ҳодисанинг частотаси* (*нисбий частотаси*) дейилади ва $P^*(A) = \frac{m}{n}$ каби белгиланади.

Тажриба синовларни кўп марта такрорлаганда тасодифий ҳодисанинг $P^*(A)$ частотаси барқарор эканини кўрсатади. Буни мисолда тушунтирамиз.

Тангани 4040 марта ташланганда гербли томон 2048 марта тушган бўлсин. Мазкур синовлар сериясида гербнинг тушиш (рўй бериш) частотаси $P^*(A) = m/n = 2048/4040 = 0{,}5069$ га тенг. Шу тангани 12000 марта ташланганда герб 6019 марта тушади. Бинобарин, бу ҳолда частота $P^*(A) = 6019/12000 = 0{,}5016$. Ниҳоят, тангани 24000 марта ташланганда герб $P^*(A) = 0{,}5005$ частота билан 12012 марта тушади. Шундай қилиб, кўрамизки, тангани кўп марта ташланганда гербнинг тушиш частотаси барқарордир, яъни 0,5 сонидан кам фарқ қилади. Тажрибанинг кўрсатишича, частотанинг 0,5 сонидан бу четланиши синовлар сонининг ортиши билан камаяди. Бу мисолда кўрилган частотанинг барқарорлик хоссаси кўп сонли тасодифий миқдорлар учун умумийдир, хусусан, мазкур ҳодисанинг рўй бериш частотаси яқинлашадиган шундай сон мавжудки, синовлар сони катта бўлганда частота бу сондан кам фарқ қилади. Бу сон ҳодисанинг *эҳтимоли* дейилади. У ҳодиса рўй беришининг объектив имконини ифодалайди. Ҳодисанинг эҳтимоли қанчалик катта бўлса, унинг рўй бериши шунчалик мумкин бўлади. A ҳодисанинг эҳтимолини $P(A)$ орқали белгилаймиз. Юқорида қаралган мисолда гербнинг тушиш эҳтимоли 0,5 га тенг экани равшандир.

Агар ҳодиса мазкур синовда албатта рўй берса, у *муқаррар ҳодиса* дейилади, аксинча, агар мазкур синовда ҳодиса рўй бериши мумкин бўлмаса, у *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади.

Масалан, фақат қора шарлар бўлган қутидан шар олинаётган бўлсин. У ҳолда қора шар чиқиши *муқаррар ҳодиса*, оқ шар чиқиши мумкин бўлмаган ҳодисадир.

Агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳар бир синовда рўй беради ($m = n$). Шунинг учун муқаррар ҳодисанинг частотаси ҳар доим бирга тенг. Аксинча, агар ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса бўлса, у ҳеч қайси синовда рўй бермайди ($m = 0$). Демак, мумкин бўлмаган ҳодисанинг синовларнинг ҳар қандай сериясидаги частотаси нолга тенг. Шунинг учун муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга, мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли эса нолга тенг.

Агар A ҳодиса муқаррар ҳодиса ҳам, мумкин бўлмаган ҳодиса ҳам бўлмаса, у ҳолда унинг частотаси m/n синовлар сони катта бўлганда бирор $p\,(0 < p < 1)$ сондан — A ҳодисанинг эҳтимолидан кам фарқ қилади.

2. Ҳодисанинг кесишмаси ва бирлашмаси. Иккита A ва B ҳодисанинг кесишмаси (ёки кўпайтмаси) деб ҳам A, ҳам B ҳодисанинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. Бу ҳодисани AB ёки BA орқали белгилаймиз.

Худди шунга ўхшаш, бир нечта, масалан, A, B ва C ҳодисаларнинг *кесишмаси* деб A, B ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган $D = ABC$ ҳодисага айтилади.

Иккита A ва B ҳодисанинг *бирлашмаси* (*ёки йиғиндиси*) деб A ёки B ҳодисаларнинг камида биттаси рўй беришидан иборат C ҳодисага айтилади. Бу ҳодиса қуйидагича белгиланади: $C = A + B$.

Бир нечта ҳодисанинг бирлашмаси деб улардан камида бирининг рўй беришидан иборат ҳодисага айтилади. $D = A + B + C$ ёзув D ҳодиса A, B ва C ҳодисаларнинг бирлашмаси эканини билдиради.

Агар A ҳодисанинг рўй бериши B ҳодисанинг рўй беришини инкор этса, A ва B ҳодисалар *биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалар* дейилади. Бу ердан агар A ва B биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалар бўлса, у ҳолда AB мумкин бўлмаган ҳодиса бўлиши келиб чиқади.

Қуйидаги мисолни кўрайлик. Бирор идишга жойланган газнинг бирон-бир тайин молекуласи ҳаракатини кузатамиз. Бу идиш (ҳажм) ичида α ва β ҳажмларни ажратамиз (82-расм). A ҳодиса молекуланинг α ҳажмга, B ҳодиса молекуланинг β ҳажмга тушиши бўлсин. A ва B ҳодисаларнинг кесишмаси молекуланинг α ва β ҳажмларнинг умумий қисмига тушишидан иборат бўлади. Агар α ва β ҳажмлар умумий нуқтага эга бўлмаса, равшанки, A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлади. A ва B ҳодисаларнинг бирлашмаси (йиғиндиси) молекуланинг ё фақат α ҳажмга, ё фақат β ҳажмига ёки уларнинг умумий қисмига тушишидан иборат бўлади.

82- расм

3. Эҳтимоллар аксиомалари. A ва B иккита биргаликда бўлмаган ҳодиса бўлсин, шу билан бирга m A синовда ҳодиса m_1 марта, B ҳодиса эса m_2 марта рўй берган бўлсин. У ҳолда A ва B ҳодисаларнинг частоталари мос равишда $P^*(A) = \frac{m_1}{n}$, $P^*(B) = \frac{m_2}{n}$ га тенг. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун $A + B$ ҳодиса мазкур синовлар сериясида $m_1 + m_2$ марта рўй берган. Демак,

$$P^*(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P^*(A) + P^*(B).$$

Шундай қилиб, $A + B$ ҳодисанинг частотаси A ва B ҳодисалар частоталарининг йиғиндисига тенг. Бироқ катта n ларда $P^*(A)$, $P^*(B)$ ва $P^*(A+B)$ частоталар тегишли $P(A)$, $P(B)$ ва $P(A+B)$ эҳтимоллардан кам фарқ қилади. Шунинг учун агар A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у ҳолда $P(A+B) = P(A) + P(B)$ деб олиш табиийдир.

Баён қилинган бу фикрлар эҳтимолларнинг қуйидаги ҳоссаларини баён этишга имкон беради. Биз уларни аксиомалар сифатида қабул қиламиз.

1-аксиома. *Ҳар бир A тасодифий ҳодисага унинг эҳтимоли деб аталувчи ва $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи тайин $P(A)$ сон мос келади.*

2-аксиома. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг.*

3-аксиома. (эҳтимолларни қўшиш аксиомаси). *A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлсин. У ҳолда бу ҳодисалардан камида бирининг рўй бериши эҳтимоли уларнинг эҳтимоллари йиғиндисига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

3-аксиома бир нечта ҳодиса бўлган ҳол учун умумлаштирилади, чунончи, агар $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *ҳодисалар жуфт-жуфт бўлиб* биргаликда бўлмаса (яъни бу ҳодисаларнинг исталган бири қолган ҳар қайси ҳодиса билан биргаликда бўлмаса) у ҳолда

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{2}$$

бўлади.

A ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* деб $\bar{A}$ ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат $\bar{A}$ ҳодисага айтилади. A ва $\bar{A}$ ҳодисалар биргаликда бўлмаслиги равшандир.

Масалан, A ҳодиса буюм стандартга мувофиқ эканидан иборат бўлсин, у ҳолда қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса буюм стандартга жавоб бермаслигидан иборат бўлади. A ҳодиса ўйин соққасини бир марта ташланганда жуфт сон тушиши бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ тоқ сон тушиши бўлади.

1-теорема. *Исталган A ҳодиса учун қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги тенглик билан ифодаланади:*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{3}$$

Исботи. Ё A ҳодисанинг, ёки $\bar{A}$ ҳодисанинг рўй беришидан иборат $A + \bar{A}$ ҳодиса, равшанки, муқаррар ҳодисадир. Шунинг учун

2-аксиомага кўра $P(A+\bar{A}) = 1$. Бу ердан, A ва $\bar{A}$ ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун, 3-аксиомага кўра: $P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ Демак, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, бу ердан $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2- теорема. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.*

Исботи. Агар мумкин бўлмаган ҳодиса муқаррар ҳодисага қарама-қарши эканини эътиборга олсак, исбот бевосита 2- аксиома ва 1-теоремадан келиб чиқади.

4. Эҳтимолнинг классик таърифи. Юқорида айтилганидек, синовлар сони n катта бўлганда A ҳодисанинг рўй бериш частотаси $P^*(A) = \frac{m}{n}$ турғунликка (барқарорликка) эга ва A ҳодиса эҳтимолининг тақрибий қийматини беради, яъни

$$P(A) \approx P^*(A).$$

Бу ҳол ҳодиса эҳтимолини синовлар йўли билан тақрибан топишга имкон беради. Ҳодиса эҳтимолини топишнинг бу усули амалда ҳар доим қулай эмас. Бир қатор ҳолларда ҳодиса эҳтимолини синовгача ҳодисаларнинг тенг эҳтимоллик (тенг имкониятлилик) тушунчасидан фойдаланиб топишга эришилади.

Агар ҳодисаларнинг ҳар бири бошқа исталган бирига қараганда тезроқ кўпроқ рўй беради деб ҳисоблашга ҳеч қандай объектив сабаблар бўлмаса, бу ҳодисалар *тенг эҳтимолли* (ёки *тенг имкониятлилик*) дейилади.

Масалан, тангани ташлашда гербнинг ёки рақамли томонининг тушиши тенг эҳтимолли ҳодисалардир.

Бошқа мисол кўрамиз. Ўйин соққаси ташланаётган бўлсин. Соққа (кубик) симметрик бўлгани учун 1, 2, 3, 4, 5 ёки 6 рақамларидан исталган бирининг тушиши бир хилда мумкиндир (тенг эҳтимоллидир).

Агар синов натижасида $E_1, E_2, \cdots, E_N$ ҳодисаларнинг камида биттаси рўй берса, бу ҳодисалар мазкур синовда *тўлиқ группани* ташкил этади.

Масалан, охирги мисолда тўлиқ группа олтита ҳодисадан — 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 рақамларининг тушишидан иборатдир.

Ҳар қандай A ҳодиса ва унга қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса тўлиқ группани ташкил этиши равшандир.

Агар B ҳодисанинг рўй бериши A ҳодисанинг рўй беришига олиб келса, B ҳодиса A ҳодисага *имкон яратувчи* ҳодиса дейилади.

Масалан, агар A ўйин соққасини ташлашда жуфт сондаги очколарнинг тушиши бўлса, 4 рақамининг тушиши A ҳодисага имкон яратувчи ҳодисадан иборат бўлади.

$E_1, E_2, \cdots, E_N$ ҳодисалар мазкур синовда тенг эҳтимолли ва жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган тўлиқ группа ташкил этсин. Уларни синовларнинг *натижалари* деб атаймиз. A ҳодисага синовнинг M та натижаси имкон яратувчи бўлсин дейлик. У ҳолда A ҳодисанинг мазкур синовдаги эҳтимоли деб M/N нисбатга айтилади. Шундай қилиб, таърифга келамиз.

A ҳодисанинг мазкур синовдаги P(A) эҳтимоли деб A ҳодисага имкон яратувчи синов натижалари сони M нинг синовнинг тенг эҳтимоли, жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган тўлиқ группасини ташкил этувчи, мумкин бўлган натижаларининг умумий сони N га нисбатига айтилади: $P(A) = M(N)$.

Эҳтимолнинг бу таърифи кўпинча **классик таъриф** деб аталади. Қлассик таъриф эҳтимолнинг аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатиш мумкин.

1-мисол. Заводга 1000 та подшипникдан иборат партия келтирилди. Бу партияга тасодифан стандартга жавоб бермайдиган 30 та подшипник аралашиб қолган. Таваккалига олинган подшипник стандарт бўлиши эҳтимоли $P(A)$ ни аниқланг.

Ечилиши. Стандарт подшипниклар сони $1000 - 30 = 970$ та. Ҳар бир подшипникнинг олиниш эҳтимоли бир хил деб ҳисоблаймиз. У ҳолда ҳодисаларнинг тўлиқ группаси $N = 1000$ та тенг эҳтимолли натижалардан иборат бўлиб, A ҳодисага улардан $M = 9{,}0$ та натижа имкон яратади. Шунинг учун $P(A) = \frac{M}{N} = 970/1000 = 0{,}97$.

2-мисол. Қутида 10 та шар бор: 3 та оқ ва 7 та қора. Қутидан бирданига иккита шар олинади. Олинган иккала шар оқ бўлиши эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Синовнинг барча тенг эҳтимоли натижалари сони 10 та шардан иккита шарни олиш усулларига, яъни 10 та элементдан олинган группалашлар сонига тенг: $N = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$. Имкон яратувчи натижалар сони $M = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$. Демак, изланаётган эҳтимол $P = M/N = 3/45 = 1/15$.

3-мисол. Қутида 2 та яшил, 7 та қизил, 5 та сариқ ва 10 та оқ шар бор. Рангли шарнинг чиқиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Мос равишда яшил, қизил ва сариқ шарларнинг чиқиш эҳтимолини топамиз:

P (яшил) $= 2/24$; P (қизил) $= 7/24$; P (сариқ) $= 5/24$. Қаралаётган ҳодисалар, равшанки, биргаликда эмас, шунинг учун қўшиш аксиомасини қўллаб, рангли шар чиқиш эҳтимолини топамиз:

P (рангли) $= P$ (яшил) $+ P$ (қизил) $+ P$ (сариқ) $= \frac{2}{24} + \frac{7}{24} + + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$

5. Шартли эҳтимол. Эҳтимолларни кўпайтириш теоремаси.

Кўп масалаларда A ва B ҳодисаларнинг эҳтимоллари маълум бўлганда бу ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимолини топишга тўғри келади. Қуйидаги мисолни кўрамиз. Иккита танга ташланган бўлсин. Иккита герб тушиш эҳтимолини топамиз.

Биз тўлиқ группа ташкил этувчи 4 та тенг эҳтимолли жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ушбу натижаларга эгамиз:

	1-танга	2-танга
1-натижа	герб	герб
2-натижа	герб	рақам
3-натижа	рақам	герб
4-натижа	рақам	рақам

Шундай қилиб, P (герб, герб) $= 1/4$.

Энди биринчи тангада герб тушгани маълум деб фараз қилайлик. Шундан сўнг герб иккала тангада тушиш эҳтимоли қандай ўзгаради? Биринчи тангада герб тушгани учун энди тўлиқ группа иккита тенг эҳтимолли биргаликда бўлмаган натижалардан иборат бўлади:

	1-танга	2-танга
1-натижа	герб	герб
2-натижа	герб	рақам

Бунда натижалардан фақат биттаси (герб, герб) ҳодисага имкон яратади. Шунинг учун қилинган фаразларда P (герб, герб) $= 1/2$. Энди A орқали иккита гербнинг тушишини, B орқали эса гербнинг биринчи тангада тушишини белгилаймиз. B ҳодиса рўй берганлиги маълум бўлганда A ҳодиса эҳтимоли ўзгаришини кўраяпмиз.

A ҳодисанинг B ҳодиса рўй берди деган шарт остидаги янги эҳтимолини $P_B(A)$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб. $P(A) = 1/4$, $P_B(A) = 1/2$.

A ҳодисанинг B ҳодиса рўй беради деган шарт остидаги эҳтимоли A ҳодисанинг *шартли эҳтимоли* дейилади.

Кўпайтириш теоремаси. *A ва B ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоли улардан бири эҳтимолининг иккинчисининг биринчи ҳодиса рўй берди деб ҳисобланган шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг, яъни*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{4}$$

Исботи. (4) муносабатнинг тўғрилигини эҳтимолнинг классик таърифига асосланиб исботлаймиз. Мазкур синовнинг мумкин бўлган $E_1, E_2, \cdots, E_N$ натижалари тенг эҳтимолли жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этсин ва улардан A ҳодисага M та натижа имкон яратсин ҳамда ана шу M та натижадан L таси B ҳодисага имкон яратсин. Равшанки, A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмасига синовнинг мумкин бўлган N та натижасидан L таси имкон яратади. Бундан қуйидагига эгамиз:

$$P(A) = \frac{M}{N}; \qquad P(AB) = \frac{L}{N}; \qquad P_A(B) = \frac{L}{M}.$$

Шундай қилиб,

$$P(AB) = \frac{L}{N} = \frac{M}{N} \cdot \frac{L}{M} = P(A) \cdot P_A(B);$$

теорема исбот бўлди. Худди шунга ўхшаш, A ва B нинг ўринларини алмаштириб, топамиз:

$$P(AB) = P(B) P_B(A). \tag{5}$$

(4) ва (5) формулалардан натижа сифатида қуйидагига эгамиз:

$$P(A) P_A(B) = P(B) P_B(A). \tag{6}$$

Кўпайтириш теоремаси исталган чекли сондаги ҳодисалар учун осон умумлаштирилади. Масалан, учта A_1, A_2, A_3 ҳодиса* учун қуйидагига эга бўламиз:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P[(A_1 A_2) A_3] = P(A_1 A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) =$$
$$= P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3).$$

Умумий ҳолда

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) \quad (7)$$

Қуйидаги таърифни киритамиз.

Агар иккита A ва B ҳодисанинг бири рўй берди деган фараз иккинчисининг эҳтимолини ўзгартирмаса, яъни

$$P_B(A) = P(A) \text{ ва } P_A(B) = P(B) \quad (8)$$

бўлса, A ва B *эркли ҳодисалар* дейилади.

(6) муносабатдан (8) даги иккита тенгликнинг бири иккинчисининг натижаси экани келиб чиқади.

Масалан, A тангани бир марта ташлашда гербнинг тушиш ҳодисаси, B эса карта дастасидан карта олганда ғиштин картанинг чиқиш ҳодисаси бўлсин. Равшанки, A ва B ҳодисалар эркли ҳодисалардир.

A ва B ҳодисалар эркли бўлган ҳолда (4) формула ушбу анча содда кўринишга келади:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad (9)$$

яъни, иккита эркли ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг.

Агар $A_1, \ldots, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан ҳар бирининг рўй бериши эҳтимоли қолган бир нечта ҳодисалар рўй берганда ўз қийматини ўзгартирмаса, бу ҳодисалар *биргаликда эркли* дейилади.

Бу таърифдан $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда эркли бўлган ҳолда (7) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_n). \quad (10)$$

1-мисол. Тангани ўн марта ташлаганда гербли томон 10 марта тушиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. A_i ҳодиса i- ташлашда герб тушиши бўлсин. Изланаётган эҳтимол барча A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots 10)$ ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимолидир.

A_i ҳодисалар эса биргаликда эркли бўлгани учун, (10) формулани қўллаб, қуйидагига эгамиз:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_{10}).$$

Бироқ исталган i учун $P(A_i) = 1/2$ шу сабабли

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_{10}) = (1/2)^{10} = 1/1024 \approx 0{,}001.$$

2-мисол. Ишчи бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайдиган учта станокни бошқаради. Бир соат мобайнида ишчининг станокка қараши керак бўлмаслик эҳтимоли биринчи станок учун 0,9 га, иккинчи станок учун 0,8 га, учинчи станок учун эса 0,7 га тенг.

1) Бир соат мобайнида учта станокдан ҳеч қайсисига ишчининг эътибори керак бўлмаслик эҳтимоли p ни топинг;

* $A_1 A_2 A_3$ ҳодисанинг иккита: $C = A_1 A_2$ ҳодиса ва A_3 ҳодиса кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин.

2) Бир соат мобайнида камида битта станокка ишчининг эътибори зарур бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. 1) Изланаётган p эҳтимолини (10) формула бўйича топамиз:

$$p = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

2) Бир соат мобайнида станокка ишчининг эътибор бериши зарур бўлиш эҳтимоли биринчи станок учун $1 - 0{,}9 = 0{,}1$ га, иккинчи ва учинчи станоклар учун у мос равишда $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ ва $1 - 0{,}7 = 0{,}3$ га тенг. У ҳолда бир соат мобайнида учала станокка ишчининг эътибор бериши зарур бўлиш эҳтимоли (10) формулага асосан

$$0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

Бир соат мобайнида учала станокка ишчининг эътибор бериши зарур бўлишидан иборат А ҳодиса камида битта станокка ишчининг эътибор бериши зарур бўлмаслигидан иборат ҳодиса $\bar{A}$ га қарама-қаршидир. Шунинг учун (3) формулага кўра топамиз:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

3-мисол. 3 та оқ ва 7 та қора шар бўлган қутидан иккита шар олинади. Олинган иккала шар оқ бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу масала 4- пунктда эҳтимолнинг классик таърифидан фойдаланиб ечилган эди. Ҳозир уни (5) формулани қўллаб ечамиз. Иккита шарни олиш уларни кетма-кет олишга тенг кучлидир. Биринчи олишда оқ шар чиқишини A орқали, иккинчи олишда оқ шар чиқишини B орқали белгилаймиз. Иккита оқ шар чиқишидан иборат ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмасидан иборат бўлади. (5) формулага кўра қуйидагига эгамиз: $P(AB) = P(A) P_A(B)$. Бироқ, биринчи оқ шар чиққандан сўнг қутида 2 таси оқ бўлган 9 та шар қолгани учун $P(A) = 3/10$, $P_A(B) = 2/9$. Демак $P(AB) = (3/10) \cdot (2/9) = 1/15$

6. Тўлиқ эҳтимол формуласи. Айтайлик, A ҳодиса тўлиқ группа ташкил этувчи жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларнинг фақат биттаси билан биргаликда рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда агар A ҳодиса рўй берган бўлса, бу жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1 A, H_2 A, \ldots, H_n A$ ҳодисаларнинг бирортаси рўй берганини билдиради. Демак,

$$A = H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A.$$

Эҳтимолларни қўшиш аксиомасини қўллаб, ушбуга эга бўламиз:

$$P(A) = P(H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \ldots +$$
$$+ P(H_n A).$$

Бироқ $P(H_i A) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ шунинг учун

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (11)$$

Бу формула *тўлиқ эҳтимол формуласи* дейилади. $H_1, H_2, \ldots H_n$ ҳодисалар кўпинча «гипотезалар» дейилади.

Мисол. Магазинга тўртта лампа заводида тайёрланган бир турдаги электр лампочкалари келтирилди: 1- заводдан 250 та, 2- заводдан 525 та, 3- заводдан 275 та, 4- заводдан 950 та. Лампочка 1500 соатдан ортиқ ёниш эҳтимоли 1- завод учун 0,15 га, 2- завод учун 0,30 га, 3- завод учун 0,20 га, 4- завод учун 0,10 га тенг. Магазин пештахталарига жойлаштиришда лампочкалар аралаштириб юборилди. Сотиб олинган лампочка 1500 соатдан ортиқ ёниш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. A ҳодиса лампочка 1500 соатдан ортиқ ёнишидан иборат, H_1, H_2, H_3 ва H_4 лар эса лампочкалар мос равишда 1-, 2-, 3-, ёки 4- заводда тайёрланганлигидан иборат гипотезалар бўлсин. Ҳамма лампочкалар 2000 дона бўлгани учун гипотезаларнинг эҳтимоллари мос равишда қуйидагига тенг:

$$P(H_1) = 250/2000 = 0{,}125, \quad P(H_2) = 525/2000 = 0{,}2625;$$

бинацияларнинг ҳар бирининг эҳтимоли ҳам $p^m \cdot q^{n-m}$ га тенг. Шундай қилиб,

$$P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_k) = p^m \cdot q^{n-m}.$$

Барча имкон яратувчи комбинациялар, равшанки, биргаликда эмас. Шунинг учун (эҳтимолларни қўшиш аксиомаларига кўра):

$$P_n^m(m) = P(B_1 + B_2 + \ldots + B_к) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_к) =$$
$$= k\, p^m\, q^{n-m} = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}.$$

Демак,

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}. \qquad (13)$$

ёки

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

бўлгани учун

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} \qquad (13')$$

(13) формула *Бернулли* формуласи* дейилади.

1-мисол. Битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,6 га тенг. 8 та ўқ узганда 5 марта нишонга теккизиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу ерда $n = 8$, $m = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0,6 = 0{,}4$ (13′) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!\,(8-5)!}(0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 \approx 0{,}28.$$

Кўпинча m нинг қандай қийматида эҳтимол энг катта қийматга эга бўлишини билиш керак бўлади, яъни мазкур синовлар сериясида A ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони m_0 ни топиш талаб қилинади, m_0 сони ушбу

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p \qquad (14)$$

қўш тенгсизликни қаноатлантириши кераклигини исбот қилиш мумкин. m_0 ётган $[np - q,\ np + p]$ сегмент $(np + p) - (np - q) = p + q = 1$ узунликка эгалигини қайд қиламиз. Шунинг учун унинг учларидан бир бутун сон бўлмаса, бу учлар ўртасида ягона бутун сон ётади ва m_0 бир қийматли аниқланади.

Иккала уч бутун сон бўлган ҳолда иккита энг эҳтимолли қиймат $np - p$ ва $np + p$ мавжуддир.

2-мисол. 1- мисолдаги нишонга тегишларнинг энг эҳтимолли сонини топинг.

Ечилиши. Бу ерда $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $np - q = 8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 = 4{,}4$, $np + p = 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 = 5{,}4$. (14) формулага кўра энг эҳтимолли қиймат m_0 $[4{,}4;\ 5{,}4]$ сегментда ётади, бинобарин, у 5 га тенг.

n нинг катта қийматларида $P_n(m)$ эҳтимолларни (13) формула бўйича топиш узундан-узоқ ҳисоблашлар билан боғлиқ. Бу ҳолда ушбу

* Я. Бернулли (1654 — 1705) — швейцария математиги.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi_0(x) \qquad (15)$$

формуладан фойдаланиш қулай, бу ерда $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

(p нолга ва бирга тенг эмас), $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$.

(15) формула *Лапласнинг* локал теоремасини* ифодалайди. n ўсиши билан бу формуланинг аниқлиги ортади.

$\varphi_0(x)$ функция эҳтимоллар назариясида жуда катта роль ўйнайди, биз буни кейинроқ кўрамиз. Бу функциянинг аргументнинг турли қийматларига мос қийматлари Иловада келтирилган (335- бетдаги 1-жадвалга қаранг).

3-мисол. Ўйин соққаси 80 марта ташланди. Бунда 3 рақами 20 марта тушиши эҳтимолини аниқланг.

Ечилиши. Бу ерда $m = 20$, $n = 80$, $p = 1/6$, $q = 1 - 1/6 = 5/6$; Қуйидагига эгамиз:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{10}{3}; \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 80 \cdot (1/6)}{10/3} = 2.$$

(15) формулани қўллаймиз:

$$P_{80}(20) \approx \frac{1}{10/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(2)^2/2} = \frac{3}{10} \cdot 0{,}054 = 0{,}0162.$$

1 - жадвалдан: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(2)^2/2} = \varphi_0(2) = 0{,}054.$

3-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

Тасодифий миқдор тушунчаси эҳтимоллар назарияси ва унинг татбиқларида асосий тушунчалардан бири ҳисобланади. Масалан, ўйин соққасини бир марта ташлашда тушган очколар сони, берилган вақт ичида радийнинг емирилган атомлари сони, маълум вақт оралиғида телефон станциясидаги чақириқлар сони, тўғри созланган технологик жараёнда деталнинг бирорта ўлчамининг номиналдан четланиши ва ҳ. к. лар тасодифий миқдорлардир (2- иловага қаранг).

Шундай қилиб, синов натижасида у ёки бу сон олдиндан (номаълум) қийматни қабул қила оладиган ўзгарувчи миқдор *тасодифий миқдор* дейилади.

Келгусида бундай тасодифий миқдорларнинг икки тури — дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларни кўрамиз.

Дискрет тасодифий миқдорлар. Қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари чекли ёки чексиз $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ сонли кетма-кетликни ташкил этувчи тасодифий миқдор** ни қараймиз.

* П. Лаплас (1749 — 1827) — француз математиги ва астрономи.

** Тасодифий миқдорларни грек алфавитининг кичик ҳарфлари билан белгилаймиз: $\zeta, \eta, \varsigma, \ldots$

Қиймати ҳар бир $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ нуқтада ξ миқдор $x = x_i$ қийматни қабул қилиш эҳтимолига тенг бўлган $p(x)$ функция берилган бўлсин:

$$p(x_i) = P(\xi = x_i). \quad (16)$$

Бундай тасодифий миқдор *дискрет (узлукли) тасодифий миқдор* дейилади. $p(x)$ функция *тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни ёки қисқача, тақсимот қонуни* дейилади. Бу функция x_1 $x_2, \ldots x_n, \ldots$ кетма-кетликнинг нуқталарида аниқланган. Синовларнинг ҳар бирида ξ тасодифий миқдор ҳар доим унинг ўзгариш соҳасидаги бирорта қийматини қабул қилгани учун

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) + \ldots = 1.$$

1- мисол. ξ тасодифий миқдор ўйин соққасини бир марта ташлашда тушган очколар сони. ξ нинг мумкин бўлган қийматлари 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари. Бунда ξ нинг бу қийматлардан бирини қабул қилиш эҳтимоли бир хил бўлиб, 1/6 га тенг.

Шундай қилиб, бу ерда эҳтимолларнинг тақсимот қонуни x нинг $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ тўпламдаги қийматларининг исталган бирининг $p(x) = 1/6$ функциясидир.

2- мисол. η тасодифий миқдор A ҳодисанинг битта синовда рўй беришлар сони, шу билан бирга $P(A) = p$ бўлсин. Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари иккита сон 0 ва 1 дан иборат: $\eta = 0$, агар A ҳодиса рўй бермаса, $\eta = 1$, агар A ҳодиса рўй берса. Шундай қилиб,

$$p(0) = P(\eta = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p = q, \quad p(1) = P(\eta = 1) = P(A) = p.$$

n та эркли синов ўтказилаётган бўлсин ва бу синовларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши ва рўй бермаслиги мумкин деб фараз қилайлик. A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлсик. A ҳодисанинг n та эркли синовда рўй беришлар сонидан иборат тасодифий миқдор ξ ни қараймиз. ξ нинг ўзгариш соҳаси 0 дан n гача бўлган (0 ҳам киради) барча бутун сонлардан иборат. Эҳтимолларнинг тақсимот қонуни $p(m)$ (13′) Бернулли формуласи билан аниқланади:

$$p(m) = P(\xi = m) = P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Эҳтимолларнинг Бернулли формуласи бўйича тақсимот қонунини кўпинча $P_n(m)$ ифода $(p+q)^m$ биномнинг ёйилмасидаги m- ҳад бўлгани учун, *биномиал тақсимот* деб аталади.

ξ тасодифий миқдор исталган бутун манфий бўлмаган қиймат қабул қилиши мумкин бўлсин, шу билан бирга

$$p(k) = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{\lambda}}{k!} \, (k = 0,\ 1, 2, \ldots, n, \ldots), \quad (17)$$

бу ерда λ — бирор мусбат ўзгармас сон. Бундай ҳолда тасодифий миқдор *Пуассон қонуни бўйича тақсимланган* дейилади. $k = 0$ да $0! = 1$ деб олиш кераклигини қайд қилиб ўтамиз.

Бизга маълумки, эркли синовлар сони n нинг катта қийматларида A ҳодисанинг m марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m)$ ни Бернулли формуласи бўйича эмас, балки Лаплас формуласи бўйича ҳисоблаш қулайдир [(15) формулага қаранг]. Бироқ Лаплас формуласи A ҳодисанинг битта синовда рўй бериш эҳтимоли p кичик бўлганда катта хато беради. Бундай ҳолда $P_n(m)$ эҳтимолни ҳисоблаш учун $\lambda = np$ деб олиб Пуассон формуласидан фойдаланиш қулайдир.

Пуассон формуласини Бернулли формуласининг синовлар сони n ни чексиз орттириб ва $p = \lambda/n$ эҳтимолнинг нолга интилгандаги лимит ҳоли каби ҳосил қилиш мумкин.

3- мисол. Заводга 1000 дона деталдан иборат партия келтирилди. Деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,001 га тенг. Келтирилган деталлар орасида 5 дона деталь яроқсиз бўлиб чиқиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу ерда $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$. (17) формулага кўра топамиз:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0{,}003.$$

Пуассон тақсимоти қонуни бошқа масалаларда ҳам тез-тез учраб туради. Масалан, агар телефонистка бир соат давомида n та чақириқ қабул қилса, у ҳолда унинг бир минут давомида N та чақириқ қабул қилиш эҳтимоли $P(k)$ Пуассон формуласи билан ифодаланади: агар $\lambda = N/60$ деб олсак:

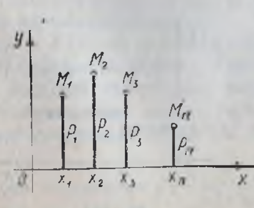
$$P(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{N}{60}\right)^k \cdot e^{-N/60}.$$

Агар ξ тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари чекли $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кетма-кетликни ташкил этса, у ҳолда тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни қуйидаги жадвал кўринишда берилади, бу ерда $p_i = P(\xi = x_i)$ ва $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

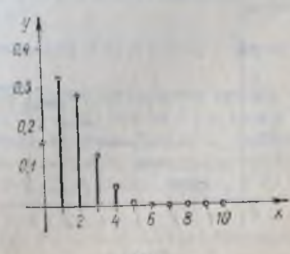
ξ нинг қийматлари	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(x_i)$ эҳтимоллар	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Бу жадвални ξ тасодифий миқдорнинг *тақсимот қатори* дейилади.

$p(x)$ функцияни график кўринишда тасвирлаш мумкин. Бунинг учун текисликда тўғри бурчакли координаталар системасини оламиз. Горизонтал ўққа ξ тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини қўямиз, вертикал ўққа эса $p(x_i) = P(\xi = x_i)$ функциянинг қийматларини қўямиз. $p(x)$ функция графиги 83- расмда тасвирланган.



83- расм



84-расм

Агар бу графикнинг нуқталарини тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирсак, *тақсимот кўпбурчаги* деб аталадиган фигурани ҳосил қиламиз.

4-мисол. А ўйин соққасини ташлаганда бир очко тушиши бўлсин; $P(A) = 1/6$. Ўйин соққасини ўн марта ташлаганда А ҳодисанинг рўй бериш сонидан иборат ξ тасодифий миқдорни қараймиз. $p(x)$ функциянинг қийматлари (тақсимот қонуни) қуйидаги жадвалда берилган.

ξ нинг қийматлари	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x_i)$ эҳтимоллар	0,162	0,323	0,291	0,155	0,054	0,013	0,002	0	0	0	0

$p(x_i)$ эҳтимоллар Бернулли формуласи бўйича $n = 10$ да ҳисобланган, $x \geqslant 7$ учун улар деярли (амалда) нолга тенг. $p(x)$ функциянинг графиги 84-расмда тасвирланган.

2. Тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот функцияси ва унинг хоссалари. Бутун сон ўқида қуйидагича аниқланган $F(x)$ функцияни қараймиз: ҳар бир x учун $F(x)$ нинг қиймати ξ дискрет тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолига тенг, яъни

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{18}$$

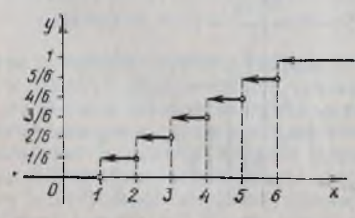
Бу функция *эҳтимоллар тақсимоти функцияси* ёки қисқача, *тақсимот функция* дейилади.

1-мисол. 1-пунктдаги 1-мисолда келтирилган ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

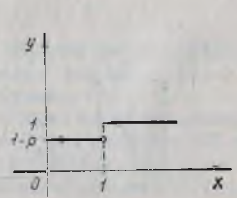
Ечилиши. Равшанки, агар $x \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0$, чунки ξ бирдан кичик қийматларни қабул қилмайди. Агар $1 < x \leqslant 2$ бўлса, у ҳолда $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 1/6$; агар $2 < x \leqslant 3$ бўлса, у ҳолда $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3)$. Бироқ $\xi < 3$ ҳодиса мазкур ҳолда иккита биргаликда бўлмаган $\xi = 1$ ва $\xi = 2$ ҳодисаларнинг йиғиндисидан иборат. Демак,

$$P(\xi < 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Шундай қилиб, $2 < x \leqslant 3$ учун $F(x) = 1/3$ га эгамиз. Функциянинг $3 < x \leqslant 4$, $4 < x \leqslant 5$ ва $5 < x \leqslant 6$ оралиқдаги қийматлари ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Ниҳоят, агар $x > 6$ бўлса, $F(x) = 1$, чунки бу ҳолда ξ нинг исталган мумкин бўлган қийматлари (1, 2, 3, 4, 5, 6) x дан кичик, $F(x)$ функция графиги 85-расмда тасвирланган.



85-расм



86-расм

2-мисол. 1-пунктдаги 2-мисолда келтирилган η тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

Ечилиши. Равшанки,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - p = q, & \text{агар } 0 < x \leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$F(x)$ нинг графиги 86-расмда тасвирланган.

Тақсимот функцияси $F(x)$ ни билган ҳолда ξ тасодифий миқдор $x' \leqslant \xi < x''$ тенгсизликларни қаноатлантириши эҳтимолини топиш осон.

Тасодифий миқдор x'' дан кичик қийматни қабул қилишидан иборат ҳодисани қараймиз. Бу ҳодиса иккита биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисига ажралади: 1) ξ тасодифий миқдор x' дан кичик қийматлар қабул қилади, яъни $\xi < x'$, 2) тасодифий миқдор $x' \leqslant \xi < x''$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қийматлар қабул қилади. Қўшиш аксиомасидан фойдаланиб, топамиз:

$$P(\xi < x'') = P(\xi < x') + P(x' \leqslant \xi < x'').$$

Бу ердан

$$P(x' \leqslant \xi < x'') = P(\xi < x'') - P(\xi < x').$$

Бироқ $F(x)$ тақсимот функциясининг таърифига кўра [(18) формулага қаранг] қуйидагига эгамиз:

$$P(\xi < x'') = F(x''), \ P(\xi < x') = F(x'),$$

демак,

$$P(x' \leqslant \xi < x'') = F(x'') - F(x'). \tag{19}$$

Шундай қилиб, *дискрет тасодифий миқдорнинг* $x' \leqslant \xi < x''$ *интервалга тушиш эҳтимоли тақсимот функциясининг бу интервалдаги орттирмасига тенг.*

Тақсимот функциясининг асосий хоссаларини кўрамиз.

1°. *Тақсимот функцияси камаймайдиган функциядир.*

Ҳақиқатан ҳам, $x' < x''$ бўлсин. Исталган ҳодисанинг эҳтимоли манфий бўлмагани учун $P(x' \leqslant \xi < x'') \geqslant 0$. Шунинг учун (19) формуладан $F(x'') - F(x') \geqslant 0$ экани келиб чиқади, яъни

$$F(x'') \geqslant F(x').$$

2°. *Тақсимот функциясининг қийматлари* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ *тенгсизликларни қаноатлантиради.*

Бу хосса $F(x)$ ни эҳтимол сифатида таърифланганидан келиб чиқади [(18) формулага қаранг]. Равшанки, $F(-\infty) = 0$ ва $F(+\infty) = 1$*.

3°. ξ *дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган* x_i *қийматлардан бирини қабул қилиш эҳтимоли тақсимот функциясининг* x_i *нуқтадаги сакрашига тенг* (V боб, 2-§, 1-пунктга қаранг).

---

* Бу ерда ва келгусида $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ белгилашлар киритилган.

Ҳақиқатан ҳам, x_i — дискрет тасодифий миқдор қабул қиладиган қиймат ва $\Delta x > 0$ бўлсин. (19) формулада $x' = x_i$, $x'' = x_i + \Delta x$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(x_i \leqslant \xi < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i). \qquad (20)$$

$\Delta x \to 0$ да лимитга ўтсак, тасодифий миқдорнинг $x_i \leqslant \xi < x_i + \Delta x$ интервалга тушиш эҳтимоли ўрнига ξ миқдорни берилган x_i қийматни қабул қилиши эҳтимолини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_i \leqslant \xi < x_i + \Delta x) = P(\xi = x_i) = p(x_i).$$

Иккинчи томондан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x_i + \Delta x) = F(x_i + 0)$ ни, яъни $F(x)$ функциянинг ўнг томондан лимитини ҳосил қиламиз, чунки $\Delta x > 0$. Демак, (20) формула лимитда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0), \qquad (21)$$

яъни $p(x_i)$ нинг қиймати функциянинг x_i нуқтадаги сакрашига тенг*. Бу хосса 85 ва 86- расмларда яққол кўзга ташланади.

3. Узлуксиз тасодифий миқдорлар. Мумкин бўлган қийматлари ҳеч қандай интервални бутунлай тўлдирмайдиган чекли ёки чексиз сонлар кетма-кетлиги ташкил этадиган дискрет тасодифий миқдорлардан ташқари мумкин бўлган қийматлари бирор интервални ташкил этадиган тасодифий миқдорлар ҳам тез-тез учрайди. Бундай тасодифий миқдорга тўғри технологик жараён амалга оширилганда деталнинг баъзи ўлчамларининг номиналдан четланиши мисол бўлади. Бундай тасодифий миқдорлар $p(x)$ эҳтимолларнинг тақсимот қонуни ёрдамида берилиши мумкин эмас. Бироқ уларни эҳтимоллар тақсимоти функцияси $F(x)$ ёрдамида бериш мумкин. Бу функция худди дискрет тасодифий миқдор ҳолидагидек аниқланади:

$$F(x) = P(\xi < x). \qquad (18)$$

Шундай қилиб, бу ерда ҳам $F(x)$ функция бутун сон ўқида аниқланган ва унинг ҳар бир x нуқтадаги қиймати тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолига тенг.

(19) формула ҳамда 1° ва 2° хоссалар исталган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси учун ўринлидир. Бу факт дискрет миқдор бўлган ҳолдаги каби исбот қилинади.

Агар эҳтимолларнинг тақсимот функцияси (18) формула бўйича берилган ξ тасодифий миқдор учун манфий бўлмаган бутун сон ўқида бўлакли-узлуксиз** ва x нинг ҳар қандай қийматида

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \qquad (22)$$

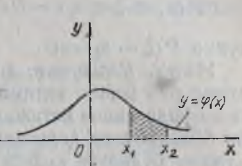
* $F(x_i) = F(x_i - 0)$ эканини, яъни $F(x)$ функция x_i нуқтада чапдан узлуксиз эканини кўрсатиш мумкин.

** Агар функция исталган сегментда ё узлуксиз, ё I турдаги узилиш нуқталарига эга бўлса, у бутун сон ўқида бўлакли-узлуксиз дейилади.

тенгликни қаноатлантирадиган $\varphi(x)$ функция мавжуд бўлса, ξ тасодифий миқдор *узлуксиз* дейилади. $\varphi(x)$ функция *эҳтимоллар тақсимотининг зичлиги*, ёки қисқача, *тақсимот зичлиги* дейилади. Агар $x_1 < x_2$ бўлса, (20) ва (22) формулалар асосида қуйидагига эгамиз:

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,dt. \qquad (23)$$

Интегралнинг юз сифатидаги геометрик маъносига асосланиб, $x_1 \leqslant \xi < x_2$ тенгсизликларнинг бажарилиш эҳтимоли асоси $[x_1, x_2]$ бўлган ва юқоридан $y = \varphi(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг дейиш мумкин (87-расм).



87- расм

$F(+\infty) = P(\xi < +\infty) = 1$ ва (22) формулага кўра $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ бўлгани учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1. \qquad (24)$$

(22) формуладан фойдаланиб ва тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ ни узлуксиз деб $F'(x)$ ни интегралнинг ўзгарувчи юқори чегара бўйича ҳосиласи сифатида топамиз:*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt\right) = \varphi(x). \qquad (25)$$

Узлуксиз тасодифий миқдор учун $F(x)$ тақсимот функцияси $\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлган исталган x нуқтада узлуксиз эканлигини қайд қиламиз. Бу $F(x)$ функция ана шу нуқталарда дифференциалланувчилигидан келиб чиқади (VI боб, 1-§, 5- пунктга қаранг).

(23) формула асосида $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$ деб, қуйидагига эга бўламиз: $P(x \leqslant \xi < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$. $F(x)$ функция узлуксиз бўлгани учун $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$. Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x \leqslant \xi < x + \Delta x) = P(\xi - x) = 0.$$

Шундай қилиб, *узлуксиз тасодифий миқдорнинг ихтиёрий аниқ x қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг.*

* Интегрални ўзгарувчи юқори чегара бўйича дифференциаллашнинг қуйи чегара чекли бўлган ҳол учун чиқарилган қоида (VIII боб, 2-§, 3- пунктга қаранг) қуйи чегара чексиз бўлган интеграллар учун ҳам ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt + \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt\right) = 0 + \varphi(x) = \varphi(x),$$

чунки $\int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt$ интеграл ўзгармас катталикдир.

Бу ердан $x_1 \leqslant \xi < x_2$, $x_1 < \xi \leqslant x_2$, $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$, $x_1 < \xi < x_2$ тенгсизликларнинг ҳар бирининг бажарилишидан иборат ҳодисалар бир хил эҳтимолга эгалиги келиб чиқади, яъни

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = P(x_1 < \xi \leqslant x_2) = P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = P(x_1 < \xi < x_2).$$

Ҳақиқатан ҳам, масалан,

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = P(\xi = x_1) + P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2),$$

чунки $P(\xi = x_1) = 0$.

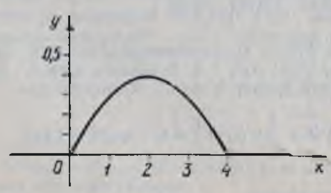
Изоҳ. Маълумки, агар ҳодиса мумкин бўлмайдиган ҳодиса бўлса, унинг рўй бериш эҳтимоли нолга тенг бўлади. Эҳтимолнинг классик таърифида синов натижалари чекли бўлганда тескари тасдиқ ҳам ўринли бўлади: агар ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг бўлса, у ҳолда у мумкин бўлмаган ҳодиса бўлади, чунки бу ҳолда унга синов натижаларининг ҳеч бири имкон яратмайди. Тасодифий миқдор узлуксиз бўлган ҳолда унинг мумкин бўлган қийматлари сони чексиздир. Бу миқдор бирор тайин x_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли, юқорида кўрдикки, нолга тенг. Бироқ бундан бу ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса экани келиб чиқмайди, чунки синов натижасида тасодифий миқдор, хусусан, x_1 қийматни қабул қилиши мумкин. Шунинг учун узлуксиз тасодифий миқдор бўлган ҳолда тасодифий миқдорнинг бирор тайин қиймат қабул қилиши тўғрисида эмас, балки унинг интервалга тушиши тўғрисида гапириш маънога эгадир.

Масалан, валик тайёрлашда бизни унинг диаметри номиналга тенг бўлиш эҳтимоли қизиқтирмайди. Биз учун валик диаметри йўл қўйиладиган чегарадан чиқиб кетмаслиги муҳимдир.

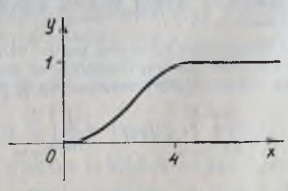
Мисол. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги қуйидагича берилган:

$$\varphi(x)\ \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \dfrac{3}{32}(4x - x^2), & \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$\varphi(x)$ функциянинг графиги 88-расмда келтирилган. ξ тасодифий миқдорнинг $-2 \leqslant \xi < 3$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қиймат қабул қилиши эҳтимолини топинг. Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.



88- расм



89-расм

Ечилиши. (23) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P(-2 \leqslant \xi \leqslant 0) = \int_{-2}^{3} \varphi(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{3} \varphi(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{3} \frac{3}{32}(4x - x^2)\,dx = \frac{27}{32}.$$

(22) формулага кўра берилган тасодифий миқдор учун $F(x)$ тақсимот функциясини топамиз.

Агар $-\infty < x \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{0}^{x} 0 \cdot dt = 0$.

Агар $0 < x \leqslant 4$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{32}(4t - t^2)\,dt = \frac{6x^2 - x^3}{32}.$$

Агар $x > 4$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_{0}^{4} \varphi(t)\,dt + \int_{4}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)\,dt + \int_{4}^{x} 0 \cdot dt = 1.$$

Шундай қилиб,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, & \text{агар } 0 < x \leqslant 4 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$F(x)$ функциянинг графиги 89-расмда тасвирланган.

Навбатдаги икки пункт узлуксиз тасодифий миқдорларнинг амалда тез-тез учраб турадиган тақсимотлари — текис ва нормал тақсимотларга бағишланган.

4. Текис тақсимот. Ox ўқдаги $[a, b]$ сегмент бирор асбобнинг шкаласи бўлсин. Бу асбоб кўрсаткичи $[a, b]$ сегментнинг бирор нуқтасида албатта тўхтайди ҳамда кўрсаткичнинг шкаланинг бирор кесмасига тушиш эҳтимоли бу кесма узунлигига пропорционал ва кесманинг шкаладаги ўрнига боғлиқ эмас деб фараз қиламиз. Асбоб кўрсаткичининг белгиси, $[a, b]$ сегментдан исталган қийматларини қабул қилиши мумкин бўлган ξ тасодифий миқдордир. Шунинг учун $P(a \leqslant \xi \leqslant b) = 1$. Сўнгра, агар x_1 ва x_2 $(x_1 < x_2)$ шкаладаги иккита исталган белги бўлса, у ҳолда шартга кўра қуйидагига эгамиз:

$$P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = k(x_2 - x_1),$$

бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, x_1 ва x_2 га боғлиқ эмас $x_2 - x_1$ эса $[x_1, x_2]$ сегментнинг узунлиги. $x_1 = a$ ва $x_2 = b$ да $P(a \leqslant \xi \leqslant b) = 1$ га эга бўлганимиз учун $k(b - a) = 1$, бу ердан $k = 1/b - a$. Шундай қилиб,

$$P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \tag{26}$$

Энди ξ тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот функцияси $F(x)$ ни топиш осон. Агар $x \leqslant a$ бўлса, у ҳолда $F(x) = P(\xi < x) = 0$, чунки ξ миқдор a дан кичик қийматларни қабул қилмайди. Энди $a < x \leqslant b$ бўлсин. Эҳтимолларни қўшиш аксиомасига кўра $P(\xi < x) = P(\xi < a) + P(a \leqslant \xi < x)$. (26) формулада $x_1 = a$, $x_2 = x$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P(a \leqslant \xi \leqslant x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Сўнгра $P(\xi < a) = 0$ бўлгани учун $a < x \leqslant b$ да қуйидагига эгамиз:

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

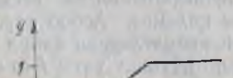
Ниҳоят, агар $x > b$ бўлса, $F(x) = 1$ бўлади, чунки ξ нинг қийматлари $[a, b]$ сегментда ётади ва демак, b дан катта бўлмайди. Шундай қилиб, қуйидаги тақсимот функциясига эга бўламиз:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant a \text{ бўлса,} \\ \dfrac{x - a}{b - a}, & \text{агар } a < x \leqslant b \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > b \text{ бўлса,} \end{cases}$$

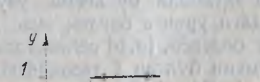
$F(x)$ функциянинг графиги 90- расмда келтирилган. Эҳтимолларнинг тақсимот зичлигини (25) формула бўйича топамиз. Агар $x < a$ ёки $x > b$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = F'(x) = 0$ бўлади. Агар $a < x < b$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = F'(x) = \left(\dfrac{x - a}{b - a}\right)' = \dfrac{1}{b - a}$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < a \text{ бўлса,} \\ \dfrac{1}{b - a}, & \text{агар } a < x < b \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > b \text{ бўлса,} \end{cases} \tag{27}$$

$\varphi(x)$ функциянинг графиги 91- расмда тасвирланган. a ва b нуқталарда $\varphi(x)$ узилишга эга эканини қайд қиламиз.



90- расм



91- расм

Тақсимот зичлиги (27) формула билан берилган миқдор текис *тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади.

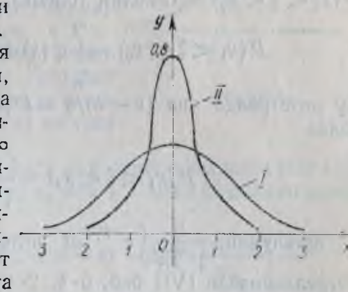
5. Нормал тақсимот. Агар ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \tag{28}$$

кўринишда бўлса (бу ерда a исталган ҳақиқий сон, $\sigma < 0$), у ҳолда ξ миқдор *нормал тақсимланган* ёки *Гаусс тақсимоти қонунига бўйсунади* дейилади. a ва σ параметрнинг маъноси кейинроқ аниқланади. (4- §, 2- пунктга қаранг). $\varphi(x)$ тақсимот зичлиги ва $F(x)$ тақсимот функцияси орасидаги боғланишга кўра [(22) формулага қаранг) қуйидагига эга бўламиз:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}\, dt.$$

$\varphi(x)$ функция графиги $x = a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир. Содда текширишлар $\varphi(x)$ функция максимумга $x = a$ да эришишини, унинг графиги эса $x_1 = a + \sigma$ ва $x_2 = a - \sigma$ да букилиш нуқталарига эга эканини кўрсатади. $x \to \pm\infty$ да функция графиги Ox ўққа асимптотик яқинлашади. σ ортиши билан тақсимот зичлигининг эгри чизиғи анча ясси роқ бўла боради. Аксинча, камайиши билан тақсимот зичлиги графиги симметрия ўқига сиқилади. $a = 0$ да симметрия ўқи Oy ўқдан иборат бўлади. 92- расмда функциянинг иккита графиги тасвирланган. I график $a = 0$, $\sigma = 1$ қийматларга, II эса $a = 0$, $\sigma = 1/2$ қийматларга мос келади.



92- расм

$\varphi(x)$ функция (24) шартни қаноатлантиришини, яъни исталган a ва σ ларда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\, dx = 1$$

муносабат бажарилишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, бу интегралда $(x - a)/\sigma = t$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma\, dt$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Интеграл остидаги функция жуфт бўлгани учун қуйидагига эгамиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Бироқ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\pi/2}$ (X боб, 1-§, 7- пунктга қаранг). Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx = 1. \tag{29}$$

$P(x_1 < \xi < x_2)$ эҳтимолни топамиз. (23) формулага кўра

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Бу интегралда яна $(x-a)/\sigma = t$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt. \tag{30}$$

Маълумки, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-t^2/2}\,dt$ интеграл элементар функцияларда интегралланмайди (VII боб, 6-§, 2- пунктга қаранг). Шунинг учун (30) аниқ интегрални ҳисоблаш учун

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt \tag{31}$$

функция киритилади ва у *эҳтимоллар интеграли* дейилади. Бу функция учун унинг (аргументнинг турли қийматлари учун) қийматлари жадваллари тузилган (Иловадаги II жадвалга қаранг). (31) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(x_1-a)/\sigma}^{0} e^{-t^2/2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(x_2-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(x_2-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(x_1-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Шундай қилиб,

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{32}$$

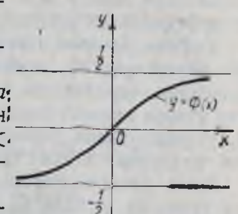
$\Phi(x)$ функция (эҳтимоллар интеграли) қуйидаги хоссаларга эгалигини кўрсатиш осон.

1°. $\Phi(0) = 0$.

2°. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2}$; $|x| \leqslant 4$ да $|\Phi(x)|$ катталик амалда $1/2$ га тенг (II жадвалга қаранг).

3°. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, яъни эҳтимоллар интеграли тоқ функциядир.

$\Phi(x)$ функция графиги 93- расмда тасвирланган.



93- расм

Шундай қилиб, агар ξ тасодифий миқдор a ва σ параметрлар билан нормал тақсимланган бўлса, у ҳолда тасодифий миқдорнинг $x_1 < \xi < x_2$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимоли (32) муносабат билан аниқланади.

$\varepsilon > 0$ бўлсин. Нормал тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг a параметрдан абсолют қиймати бўйича ε дан кичик миқдорда четланиш эҳтимолини, яъни $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ ни топамиз.

$|\xi - a| < \varepsilon$ тенгсизлик $a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon$ тенгсизликларга тенг кучли бўлгани учун (32) да $x_1 = a - \varepsilon$, $x_2 = a + \varepsilon$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Эҳтимоллар интеграли тоқ функция бўлгани учун $\Phi(-\varepsilon/\sigma) = -\Phi(\varepsilon/\sigma)$ га эгамиз. Демак,

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma). \tag{33}$$

1- мисол. ξ тасодифий микдор билан эҳтимолларнинг $a - 0$, $\sigma = 2$ параметрли нормал тақсимот қонунига бўйсунсин. Қуйидагиларни аниқланг:

1) $P(-2 < \xi < 3)$; 2) $P(|\xi| < 0{,}1)$.

Ечилиши. 1) (32) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$P(-2 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1{,}5) + \Phi(1).$$

II жадвалдан топамиз: $\Phi(1{,}5) = 0{,}43319$, $\Phi(1) = 0{,}34134$.
Демак,

$$P(-2 < \xi < 3) = 0{,}43319 + 0{,}34134 = 0{,}77453.$$

2) $a=0$ бўлгани учун $|\xi| = |\xi - a|$. (33) формулага кўра:
$P(|\xi| < 0,1) = 2\,\Phi(0,1/2) = 2\,\Phi(0,05) = 2\cdot 0,01994 = 0,03988.$

2- мисол. Нормал тақсимот қонунига бўйсунадиган тасодифий миқдор $P(|\xi - a| < \varepsilon) = 0,99730$ бўлиши учун қандай оралиқларда ўзгариши керак?

Е ч и л и ш и. (33) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\,\Phi(\varepsilon/\sigma) = 0,99730.$$

Демак, $\Phi(\varepsilon/\sigma) = 0,49865$. II жадвалдан $\Phi(\varepsilon/\sigma)$ нинг бу қийматига $\varepsilon/\sigma = 3$ мос келишини кўрамиз, бу ердан $\varepsilon = 3\sigma$.

Охирги мисолдан агар тасодифий миқдор нормал тақсимот қонунига бўйсунса, у ҳолда тасодифий миқдор 0,9973 эҳтимол билан $]a - 3\sigma, a + 3\sigma[$ интервалда жойлашган деб айтиш мумкин. Берилган эҳтимол бирга яқин бўлгани учун нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг қийматлари амалда $]a - 3\sigma;\ a + 3\sigma[$ интервалдан ташқарига чиқмайди деб ҳисоблаш мумкин. Бу факт *уч сигма қоидаси* дейилади.

6. Икки ўлчовли тасодифий миқдорлар. Кўпинча бир эмас, балки бир нечта хусусан, иккита тасодифий миқдор билан тавсифланадиган ҳодисалар қараладиган масалаларни ечишга тўғри келади. Масалан, агар станок автомат цилиндрик валикларни штамплаб чиқараётган бўлса, у ҳолда валик диаметри ξ_1 ва унинг баландлиги ξ_2 иккита тасодифий миқдордан иборат (ξ_1, ξ_2) системани ташкил этади.

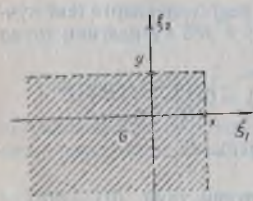
Икки ўлчовли тасодифий миқдор деб иккита тасодифий миқдордан тузилган шундай (ξ_1, ξ_2) системага айтиладики, унинг учун $\xi_1 < x$, $\xi_2 < y$ тенгсизликларнинг (бу ерда x ва y ихтиёрий ҳақиқий сонлар) биргаликда бажарилиш эҳтимоли $P[(\xi_1 < x), (\xi_2 < y)]$ аниқланган бўлади.

Исталган x ва y учун аниқланган

$$F(x, y) = P[(\xi_1 < x), (\xi_2 < y)] \qquad (34)$$

функция иккита тасодифий миқдор системаси (ξ_1, ξ_2) нинг *тақсимот функцияси* дейилади.

ξ_1 ва ξ_2 ни текисликдаги нуқтанинг декарт координаталари деб қараймиз. $M(\xi_1, \xi_2)$ нуқта $O\xi_1, \xi_2$ текисликда у ёки бу вазиятни эгаллаши мумкин. У ҳолда тақсимот функцияси $M(\xi_1, \xi_2)$ тасодифий нуқтанинг 94- расмда тасвирланган σ соҳага тушиш эҳтимолидан иборат бўлади.



94- расм

Агар ξ_1 ва ξ_2 дискрет миқдорлар бўлса, икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдор *дискрет* дейилади. ξ_1 ва ξ_2 нинг мумкин бўлган қийматлари, масалан, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ чекли кетма-кетликларни ташкил этсин. Икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (x_i, y_j) кўринишга эга, бу ерда $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, s$. p_{ij} орқали $(\xi_1, \xi_2) = (x_i, x_j)$ бўлиши эҳтимолини белгилаймиз:

$$p_{ij} = P[(\xi_1 = x_i), (\xi_2 = y_j)].$$

$F(x, y)$ тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij},$$

бу ерда қўш йиғинди $x_i < x$ ва $y_j < y$ бўладиган i ва j лар учун аниқланган.

Икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдорни бир ўлчовли тасодифий миқдор каби жадвал кўринишида ҳам бериш мумкин. Жадвалнинг биринчи сатри ξ_1 тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларидан, биринчи устуни эса ξ_2 нинг мумкин бўлган қийматларидан иборат. Қолган катакларда тегишли эҳтимоллар келтирилган бўлиб, уларнинг йиғиндиси ҳар доим бирга тенг. Мисол тариқасида қуйидаги жадвал орқали берилган икки ўлчовли тасодифий миқдорни қараймиз:

ξ_1 / ξ_2	-1	0	1
0,1	$p_{11} = 0,05$	$p_{12} = 0,20$	$p_{13} = 0,30$
0,2	$p_{21} = 0,10$	$p_{22} = 0,20$	$p_{23} = 0,15$

Барча эҳтимоллар йиғиндиси:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 0,05 + 0,20 + 0,30 + 0,10 + 0,20 + 0,15 = 1,00.$$

Агар барча i, j жуфтлар учун ушбу $p_{ij} = P[(\xi_1 = x_i), (\xi_2 = y_0)] = P(\xi_1 = x_i)(\xi_2 = y_0)$ муносабат бажарилса, ξ_1 ва ξ_2 тасодифий миқдорлар эркли миқдорлар дейилади.

1- мисол. Иккита ўйин соққаси бир мартадан ташланади. ξ_1 орқали биринчи соққада тушган очколар сонини, ξ_2 орқали эса иккинчи соққада тушган очколар сонини белгилаймиз, у ҳолда (ξ_1, ξ_2) икки ўлчовли дискрет миқдор бўлади. ξ_1 ва ξ_2 миқдорлар эркли эканини кўрсатамиз. Бу миқдорларнинг ҳар бири бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда 6 та турли қийматни қабул қилиши мумкин бўлгани учун, икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдорнинг турли қийматлари сони 36 га тенг бўлади. Бу қийматларнинг барчаси, равшанки, тенг эҳтимолли. Шунинг учун $P[(\xi_1 = x_i), (\xi_2 = y_j)] = 1/36$. Иккинчи томондан, $P(\xi_1 = x_i) = 1/6$ ва $P(\xi_2 = y_j) = 1/6$. Шундай қилиб,

$$P[(\xi_1 = x_i), \xi_2 = y_j)] = P(\xi_1 = x_i)\cdot P(\xi_2 = y_j) = 1/36.$$

Агар икки ўзгарувчининг шундай узлуксиз манфий бўлмаган $\varphi(x, y)$ функцияси мавжуд бўлиб, $M(\xi_1, \xi_2)$ нуқта $O\xi_1\xi_2$ текисликнинг бирор σ соҳасида ётиш эҳтимоли $\varphi(x, y)$ функциядан σ соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга тенг, яъни

$$P(M(\xi_1; \xi_2) \in \sigma) = \iint_\sigma \varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad (35)$$

бўлса, у ҳолда икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) миқдор *узлуксиз* дейилади. $\varphi(x, y)$ функция иккита ξ_1 ва ξ_2 миқдор системасининг ***эҳтимоллар тақсимоти зичлиги*** дейилади. Бу ердан, хусусий ҳолда, агар σ соҳа 94-расмда тасвирланган кўринишга эга бўлса, у ҳолда тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот функциясини қуйидагича ёзиш мумкинлиги келиб чиқади:

$$F(x, y) = P[(\xi_1 < x)\cdot(\xi_2 < y] = \iint_\sigma \varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, y)\,dy. \qquad (36)$$

Агар ξ_1 ва ξ_2 тасодифий миқдорлар эҳтимолларининг $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(y)$ тақсимот зичликлари учун $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$ бўлса, у ҳолда ξ_1 ва ξ_2 *эркли тасодифий миқдорлар* дейилади. Бу ҳолда

$$F(x, y) = P[(\xi_1 < x), (\xi_2 < y)] = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} \varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{y} \varphi_2(y)\,dy = F_1(x)\cdot F_2(y),$$

бу ерда $F_1(x)$ ва $F_2(y)$ мос равишда ξ_1 ва ξ_2 миқдорларнинг тақсимот функциялари [(22) формулага қаранг].

Икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдорнинг $F(x, y)$ тақсимот функциясини билган ҳолда, ξ_1 ва ξ_2 тасодифий миқдорларнинг ҳар бирининг тақсимот функциясини ҳам, тақсимот зичлигини ҳам топиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $F_1(x)$ функция ξ_1 тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бўлсин. У ҳолда $F_1(x) = P(\xi < x)$.

Бу ҳолда ξ_2 ҳар қандай қийматни қабул қилиши мумкин бўлгани учун, равшанки,

$$P(\xi_1 < x) = P[(\xi_1 < x), (-\infty < \xi_2 < +\infty)].$$

Демак, (36) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$F_1(x) = P(\xi_1 = x) = P[(\xi_1 < x), \quad (-\infty < \xi_2 < +\infty)] =$$

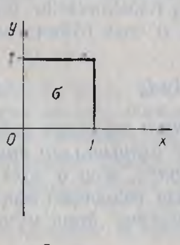
$$= \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dy.$$

Охирги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, интегрални ўзгарувчи юқори чегара бўйича интеграллаш* қоидасига мувофиқ,

$$\varphi_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dy \tag{37}$$

ни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш қуйидагини топамиз:

$$F_2(y) = P(\xi_2 < y) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dx.$$



95- расм

демак,

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dx. \tag{38}$$

Шундай қилиб, икки ўлчовли тасодифий миқдорни ташкил этувчиларидан бирининг тақсимот зичлигини топиш учун система тақсимотининг зичлиги $\varphi(x, y)$ ни иккинчи тасодифий миқдорга мос ўзгарувчи бўйича $-\infty$ дан $+\infty$ гача оралиқда интеграллаш керак.

2- мисол. Икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдор $\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ тақсимот зичлигига эга.

---

* 275-бетдаги сноскага қаранг.

Қуйидагиларни топинг: 1) $M(\xi_1; \xi_2)$ тасодифий нуқтанинг 95- расмда тасвирланган квадратга тушиш эхтимоли p ни, 2) тақсимот функцияси $F(x, y)$ ни; 3) ҳар қайси (ξ_1 ва ξ_2) миқдорнинг тақсимот зичлигини.

Ечилиши. 1) $M(\xi_1; \xi_2)$ тасодифий нуқтанинг 95- расмда тасвирланган σ квадратга тушиш эҳтимоли p (35) формулага кўра қуйидагига тенг:

$$p = \iint_{\sigma} \varphi(x, y)\,d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} y\,\Big|_0^1 \cdot \operatorname{arctg}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right)\left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}.$$

2) (36) муносабатдан фойдаланиб, $F(x, y)$ тақсимот функциясини топамиз.

$$F(x, y) = P[(\xi_1 < x), (\xi_2 < y)] = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} \frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2}\cdot\int_{-\infty}^{y} \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(-\infty)]\,[\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}(-\infty)] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right).$$

3) ξ_1 тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлигини (37) формула бўйича топамиз:

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Шунга ўхшаш, (38) формуладан фойдаланиб, $\varphi_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ни топамиз.

ξ_1 ва ξ_2 тасодифий миқдорлар эркли эканига ишонч ҳосил қилиш осон, чунки $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$.

Таърифга кўра, агар ξ_1 ва ξ_2 миқдорлар системасининг зичлиги

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}}\,e^{-\frac{1}{1-R^2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - R\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]},$$

(9- §, 2- пунктга қаранг) кўринишга эга бўлса, у ҳолда икки ўлчовли (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлади, бу ерда $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, R — бирорта ўзгармас. ξ_1 ва ξ_2 миқдорларнинг ҳар бири нормал тақсимланганлигини (37) ва (38) формулалардан фойдаланиб кўрсатиш мумкин:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\,e^{-(x-a_1)^2/2\sigma_1^2}, \quad \varphi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\,e^{-(y-a_2)^2/2\sigma_2^2}.$$

Бу фактнинг исботига тўхтаб ўтирмаймиз. Хусусан, агар ξ_1 ва ξ_2 эркли бўлса, у ҳолда $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$ бўлади.

Бу ердан $R=0$ эканлиги ва бинобарин,

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\left[\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ушбу тескари тасдиқ ҳам ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш осон: агар $R=0$ бўлса, у ҳолда ξ_1 ва ξ_2 эркли тасодифий миқдорлардир.

4-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

Эҳтимоллар назариясида ва унинг кўпчилик татбиқларида тасодифий миқдорларнинг турли сонли характеристикалари катта аҳамиятга эга. Уларнинг асосийлари математик қутилма (қутилиш) ва дисперсиядир.

1. Тасодифий миқдорнинг математик қутилмаси ва унинг хоссалари. Дастлаб қуйидаги мисолни кўрамиз. Заводга N та подшипникдан иборат партия келтирилган бўлсин. Бунда қуйидагилар маълум бўлсин:

m_1— ташқи диаметри x_1 бўлган подшипниклар сони;

m_2— $\|$ — $\|$ — x_2 — $\|$ — $\|$ — $\|$

. . . .

m_n — $\|$ — $\|$ — x_n — $\|$ — $\|$ —

Бу ерда $m_1+m_2+\ .\ .\ .+m_n=N$ Подшипник ташқи диаметрининг ўрта арифметик қиймати $x_{ўрт}$ ни топамиз. Равшанки,

$$x_{ўрт}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{N}=\frac{m_1}{N}x_1+\frac{m_2}{N}x_2+$$
$$+\ldots\frac{m_n}{N}x_n.$$

Таваккалига олинган подшипникнинг ташқи диаметрини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1=m_1/N,\ p_2=m_2/N, \ldots, p_n=m_n/N$ эҳтимоллар билан қабул қилувчи (чунки ташқи диаметри x_i бўлган подшипникнинг чиқиш эҳтимоли $p_i=m_i/N$) ξ тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Шундай қилиб, подшипник ташқи диаметрининг ўрта арифметик қиймати:

$$x_{ўрт}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

муносабат ёрдамида аниқлаш мумкин.

ξ дискрет тасодифий миқдор ўзининг ушбу тақсимот қонуни $P(\xi=x_i)=p_i$ билан берилган бўлсин:

ξ нинг қийматлари	x_1	x_2	....	x_n
$P(\xi-x_i)$ эҳтимоллар	p_1	p_2	...	p_n

ξ дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси $M(\xi)$ деб, тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматларини уларнинг мос эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади, яъни*

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ p_i. \tag{39}$$

Юқорида таҳлил қилинган мисолга қайтсак, кўрамизки, подшипникнинг ўртача диаметри ξ тасодифий миқдорнинг подшипник диаметрининг математик кутилмасига тенг.

Тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ бўлган узлуксиз ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси $M(\xi)$ деб,

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\varphi(x)\,dx \tag{40}$$

тенглик билан аниқланадиган сонга айтилади. Бунда (40) тенгликнинг ўнг томонида турган хосмас интеграл мавжуд деб фараз қилинади.

Математик кутилманинг хоссаларини кўрамиз. Бунда биринчи иккита хоссанинг исботи билан чекланамиз ва уни дискрет тасодифий миқдорлар учун келтирамиз.

1°. C ўзгармаснинг математик кутилмаси шу ўзгармаснинг ўзига тенг.

Исботи. C ўзгармасни бирга тенг эҳтимол билан фақат битта C қийматни қабул қилувчи ξ тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Шунинг учун

$$M(\xi)=C\cdot 1=C\text{-}$$

2°. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилма белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни

$$M(k\xi)=kM(\xi).$$

Исботи. (39) муносабатдан фойдаланиб, топамиз:

$$M(k\xi)=\sum_{i=1}^{n}kx_i\,p_i=k\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i=k\ M(\xi).$$

Қуйидаги иккита хоссани исботсиз келтирамиз.

3°. Бир нечта тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилмаси бу миқдорлар математик кутилмаларининг йиғиндисига тенг:

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n). \tag{41}$$

---

* Агар дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари тўплами $x_1, x_2, \ldots x_{n_1}, \ldots$ чексиз кетма-кетликни ташкил этса, у ҳолда бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси $\sum_{i=1}^{\infty}x_i\ p_i$ қаторнинг йиғиндиси сифатида аниқланади, бунда бу қаторнинг абсолют яқинлашиши талаб қилинади.

*4°. Иккита эркли тасодифий миқдор кўпайтмасининг математик кутилмаси бу миқдорлар математик кутилмаларининг кўпайтмасига тенг**:

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{42}$$

2. Дисперсия ва унинг хоссалари. Ўртача квадратик четланиш. Кўпчилик амалий жиҳатдан муҳим бўлган ҳолларда тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилмасидан четланиши $\xi - M\xi$ ни баҳолаш керак булиб қолади.

Дастлаб битта мисол кўрамиз. Иккита ξ ва η миқдор қуйидаги тақсимот қаторлари билан берилган бўлсин:

ξ нинг қийматлар	$-0,2$	$-0,1$	$0,1$	$0,2$
$p(x)$ эҳтимоллар	0,25	0,25	0,25	0,25

η нинг қийматлари	50	-40	40	50
$p(x)$ эҳтимоллари	0,25	0,25	0,25	0,25

Бу тасодифий миқдорларнинг математик кутилмалари бир хил ва нолга тенг эканига ишонч ҳосил қилиш осон:

$$M(\xi) = (-0{,}25)\cdot 0{,}25 + (-0{,}1)\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}25 + 0{,}2\cdot 0{,}25 = 0,$$

$$M(\eta) = (-50)\cdot 0{,}25 + (-40)\cdot 0{,}25 + 40\cdot 0{,}25 + 50\cdot 0{,}25 = 0.$$

Бироқ бу миқдорлар қийматларининг уларнинг математик кутилмасига нисбатан тарқоқлиги бир хил эмас. Биринчи ҳолда ξ тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматлар унинг математик кутилмасига яқин, иккинчи ҳолда эса узоқ. Тасодифий миқдор қийматларининг унинг математик кутилмаси атрофида тарқоқлигини (сочилишини) баҳолаш учун янги сонли характеристика — дисперсия тушунчаси киритилади.

ξ тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* $D(\xi)$ деб тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилмасидан четланиши квадратининг математик кутилмасига айтилади**:

$$D(\xi) = M[\xi - M(\xi)]^2. \tag{43}$$

---

* Иккита ξ ва η тасодифий миқдорнинг йиғиндиси (кўпайтмаси) деганда мумкин бўлган қийматлари ξ миқдорнинг мумкин бўлган ҳар бир қийматининг ва η миқдорнинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати билан йиғиндисига (кўпайтмасига) тенг бўлган $\zeta = \xi + \eta$ ($M = \xi \cdot \eta$ тасодифий миқдор тушунилади.

** Бу ерда четланиш квадратини эмас, балки тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилмасидан четланиши $\xi - M(\xi)$ нинг ўзини қараш табиийроқ бўлиб туюлади. Бироқ бу четланишнинг математик кутилмаси нолга тенг, чунки $M[\xi - M(\xi)] = M(\xi) - M[M(\xi)] = M(\xi) - M(\xi) = 0$. Бу ерда $M(\xi)$ нинг ўзгармаслигидан фойдаландик, ўзгармаснинг математик кутилмаси эса шу ўзгармасдир. Математик кутилманинг тарқоқлик ўлчови учун тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилмасидан четланиши модулини математик кутилмаси $M[|\xi - M(\xi)|]$ ни қараш мумкин эди. Бироқ абсолют миқдорлар билан боғлиқ амаллар одатда ундан- узоқ ҳисоблашларни талаб этади.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилувчи ξ дискрет тасодифий миқдор берилган бўлсин. Равшанки, $[\xi - M(\xi)]^2$ тасодифий миқдор $[x_1 - M(\xi)]^2, [x_2 - M(\xi)]^2, \ldots, [x_n - M(\xi)]^n$ қийматларни шу $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилади. Демак, дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$D(\xi) = M[\xi - M(\xi)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\xi)]^2 \cdot p_i. \tag{44}$$

Агар ξ тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ бўлган узлуксиз тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда таърифга кўра

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 \varphi(x)\, dx. \tag{45}$$

Дисперсия таърифини ва математик кутилма хоссаларини эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$D(\xi) = M[\xi - M(\xi)]^2 = M\{\xi^2 - 2\xi \cdot M(\xi) + [M(\xi)]^2\} =$$
$$= M(\xi^2) - 2M[\xi \cdot M(\xi)] + M[M(\xi)]^2.$$

$M(\xi)$ ва $[M(\xi)]^2$ — ўзгармас миқдорлар бўлган учун математик кутилма хоссаларидан фойдаланиб, топамиз: $M[\xi \cdot M(\xi)] = M(\xi)\cdot M(\xi)$ ва $M[M(\xi)]^2 = [M(\xi)]^2$.

Демак,

$$D(\xi) = M(\xi^2) - 2M(\xi)\cdot M(\xi) + [M(\xi)]^2,$$

бу ердан, узил-кесил ушбуни топамиз:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2. \tag{46}$$

Энди дисперсиянинг хоссаларини қараб чиқамиз.

1°. *Ўзгармаснинг дисперсияси нолга тенг.*

Исботи. $\xi = C$ бўлсин. (46) формулага кўра

$$D(C) = M(C^2) - [M(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0,$$

чунки ўзгармаснинг математик кутилмаси шу ўзгарувчининг ўзига тенг:

$$M(C) = C, \quad M(C^2) = C^2.$$

2°. *Ўзгармас кўпайтувчини дисперсия белгиси ташқарисига уни квадратга кўтариб чиқариш мумкин:*

$$D(k\xi) = k^2 D(\xi). \tag{47}$$

Исботи. (46) муносабат асосида қуйидагини ёзиш мумкин:

$$D(k\xi) = M[(k\xi)]^2 - [M(k\xi)]^2.$$

Бу ерда

$$M[(k\xi)^2] = M(k^2\xi^2) = k^2 M(\xi^2)$$

ва

$$[M(k\xi)]^2 = [kM(\xi)]^2 = k^2[M(\xi)]^2$$

бўлгани учун

$$D(k\xi) = k^2\{M(\xi^2) - [M(\xi)]^2\} = k^2 D(\xi).$$

3°. *Агар ξ ва η эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда бу миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг:*

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta). \tag{48}$$

Исботи. (46) формулага кўра:

$$D(\xi + \eta) = M[(\xi + \eta)^2] - [M(\xi + \eta)]^2.$$

Бироқ

$$M[(\xi + \eta)^2] = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) = M(\xi^2) + 2M(\xi \cdot \eta) + M(\eta^2).$$

ξ ва η эркли тасодифий миқдорлар бўлгани учун:

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Демак,

$$M[(\xi + \eta)^2] = M(\xi^2) + 2M(\xi) \cdot M(\eta) + M(\eta^2).$$

Маълумки,

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta);$$

шунинг учун

$$[M(\xi + \eta)]^2 = [M(\xi) + M(\eta)]^2 = [M(\xi)]^2 + 2M(\xi) \cdot M(\eta) + [M(\eta)]^2$$

Шундай қилиб,

$$D(\xi + \eta) = M(\xi^2) + 2M(\xi) \cdot M(\eta) + M(\eta^2) - [M(\xi)]^2 \cdot 2M(\xi) \times$$
$$\times M(\eta) - [M(\eta)^2]^2 = \{M(\xi^2) - [M(\xi)]^2\} + \{M(\eta^2) - [M(\eta)]^2\}.$$

Бироқ

$$M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = D(\xi), \quad M(\eta^2) - [M(\eta)^2] = D\eta.$$

Демак,

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Изоҳ. 3° хосса чекли сондаги жуфт-жуфти билан эркли тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринлидир:

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n).$$

ξ тасодифий миқдорнинг *ўртача квадратик четланиши* $\sigma(\xi)$ деб, унинг дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{49}$$

$\sigma(\xi)$ ўртача квадрат четланиш ξ тасодифий миқдорнинг ўлчови каби ўлчовга эга.

1-мисол. ξ тасодифий миқдор ўйин соққасини бир марта ташлаганда тушадиган очколар сони бўлсин (3-§, 1-п., 1-мисолга қаранг). $M(\xi)$ ва $D(\xi)$ ни топинг.

Ечилиши. (39), (44) ва (49) формулалардан фойдаланиб,мос равишда қуйидагиларни топамиз:

$$M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

$$D(\xi) = (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ (5 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}92;$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}71.$$

2-мисол. η тасодифий миқдор A ҳодисанинг битта синовда рўй беришлар сони, шу билан бирга $P(A) = p$ (3-§, 1-пункт, 2-мисолга қаранг). $M(\eta)$ ва $D(\eta)$ ни топинг.

Ечилиши. η миқдор 0 ва 1 қийматини мос равишда $q = 1 - p$ ва p эҳтимоллар билан қабул қилади. Шунинг учун (39) ва (44) формулаларга кўра топамиз:

$$M(\eta) = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p, \; D(\eta) = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p(1 -$$
$$- p) = p \cdot q.$$

3-мисол. m тасодифий миқдор A ҳодисанинг n та эркли синовда рўй бериши сони, шу билан бирга A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли p га тенг. $M(m)$, $D(m)$ ва $\sigma(m)$ ни топинг.

Ечилиши. ξ_i берилган A ҳодиса i синовда рўй бериш-бермаслигига қараб, 1 ёки 0 қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлсин. У ҳолда $m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Равшанки, ξ_i миқдорлар жуфт-жуфти билан эркли. 2-мисол натижасидан ҳар қандай i учун $M(\xi_i) = p$, $D(\xi_i) = pq$ экани келиб чиқади. Математик кутилма ва дисперсиянинг 3° хоссасига кўра

$$M(m) = M(\xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = np,$$

$$D(m) = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n) = npq;$$

$$\sigma(m) = \sqrt{npq}.$$

4-мисол. ξ Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин: $p(k) = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n \ldots)$ [(17) формулага қаранг]. $M(\xi)$ ни топинг.

Ечилиши. (39) муносабатдан фойдаланиб, топамиз:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

чунки:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots = e^{\lambda}$$

(XI боб, 3-§, 5-пунктга қаранг).

5-мисол. ξ тасодифий миқдор текис тақсимланган бўлиб, қуйидаги

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < a \text{ бўлса;} \\ \dfrac{1}{b - a}, & \text{агар } a < x < b \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } x > b \text{ бўлса,} \end{cases}$$

зичлик функциясига эга бўлсин. [(27) формулага қаранг). $M(\xi)$, $D(\xi)$ ва $\sigma(\xi)$ ни топинг.

Ечилиши. (40), (45) ва (49) формулалар бўйича топамиз:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2};$$

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\varphi(x)\,dx=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sqrt{3}\cdot\frac{b-a}{6}.$$

Айтайлик, ξ миқдор a ва σ параметрлар билан нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин (3-§, 5-пунктга қаранг). $M(\xi)$ ва $D(\xi)$ ни топамиз.

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ бўлгани учун (40) формулага кўра

$$M(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx$$

ни топамиз.

Интегралда $(x-a)/\sigma=z$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз, у ҳолда $x=a+\sigma z$, $dx=\sigma\,dz$. Демак,

$$M(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma z)\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,\sigma' dr=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2/2}\,zdz.$$

Бизга маълумки, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2/2}\,dz=1$ ((29) формулага қаранг). Сўнгра $ze^{-z^2/2}$ функция тоқ бўлгани учун тоқ функцияларнинг хоссасига кўра (XI боб, 6-§, 4-пунктга қаранг) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2/2}\,zdz=0$. Демак, $M(\xi)=a$.

Дисперсияни (45) формула бўйича топамиз:

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(\xi)]^2\varphi(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx=\sigma^2.$$

(интегрални ҳисоблашни келтирмаймиз)

Демак, $D(\xi)=\sigma^2$, $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sigma$.

Шундай қилиб a ва δ параметрлар нормал тақсимланган тасодифий миқдор учун содда эҳтимолий маънога эга: a — математик кутилма, σ — ўртача квадратик четланиш.

3. Тасодифий миқдорларнинг чизиқли функциялари. *ξ нормал тақсимланган тасодифий миқдор, $M(\xi)=a$ ва $\sigma(\xi)=\sigma$ тақсимот параметрлари бўлсин. У ҳолда, агар A ва B ўзгармас сонлар бўлса, ξ билан чизиқли боғлиқ бўлган $\eta=A+B\xi$ тасодифий миқдор ҳам нормал тақсимланган, шу билан бирга*

$$M(\eta)=A+Ba,\quad D(\eta)=B^2\sigma^2$$

бўлади.*

Шу тасдиқни исботлаймиз. Соддалик учун $B>0$ бўлсин. $y_1<\eta<y_2$ тенгсизликларнинг эҳтимолини баҳолаймиз. Бу тенгсизликлар $y_1<A+B\xi<y_2$ тенгсизликларга тенг кучли, яъни $(y_1-A)\,B<\xi<(y_2-A)/B$. Шунинг учун

$$P(y_1<\eta<y_2)=P\left(\frac{y_2-A}{B}<\xi<\frac{y_2-A}{B}\right).$$

ξ миқдор нормал тақсимланган бўлгани учун

$$P\left(\frac{y_1-A}{B}<\xi<\frac{y_2-A}{B}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{(y_1-A)/B}^{(y^2-A)/B}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Бу интегралда $x=(y-A)/B$ деб, ўзгарувчини алмаштирамиз, у ҳолда $dx=\frac{dy}{B}$, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{(y_1-A)/B}^{(y_2-A)/B}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma B}\int_{y_1}^{y_2}e^{-(y-A-aB)^2/2\sigma^2B^2}\,dy.$$

Шундай қилиб,

$$P(y_1<\eta<y_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}B\sigma}\int_{y_1}^{y_2}e^{-[y-(A+aB)]^2/2\sigma^2B^2}\,dy.$$

Бу тенглик η тасодифий миқдор нормал тақсимотга эгалигини, шу билан бирга $M(\eta)=A+Ba$ ва $D(\eta)=\sigma^2B^2$ бўлишини билдиради.

Анча умумийроқ тасдиқ ҳам ўринлидир. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ўзгармаслар, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ нормал тақсимланган жуфт-жуфти билан эркли бўлган тасодифий миқдорлар, шу билан бирга $M(\xi_i)=a_i$ ва $D(\xi_i)=\sigma_i^2$ бўлсин. У ҳолда $\eta=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\ldots+\lambda_n\xi_n$ тасодифий миқдор ҳам нормал тақсимотга эга ва

$$M(\eta)=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_na_n.$$

$$D(\xi)=\lambda_1^2\sigma_1^2+\lambda_2^2\sigma_2^2+\ldots+\lambda_n^2\sigma_n^2$$

бўлади.

* Бу тасдиқни математик кутилма ва дисперсиянинг хоссасидан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Масалан, $M(\eta)=M(A+B\xi)=M(A)+BM(\xi)=A+Ba$.

Хусусан, агар ҳар қандай i учун $M(\xi_i) = a$, $D(\xi_i) = \sigma^2$ бўлса, $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$ тасодифий миқдор нормал тақсимланган шу билан бирга $M(\bar{\xi}) = a$, $D(\bar{\xi}) = \sigma^2/n$, $\sigma(\bar{\xi}) = \sqrt{D(\bar{\xi})} = \delta/\sqrt{n}$ бўлади.

5-§. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

1. Чебишев леммалари. Мазкур пунктда Чебишевга* мансуб бўлган қуйидаги иккита леммани исбот қиламиз.

1-лемма. *η фақат манфий бўлмаган қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлсин, у ҳолда $P(\eta \geqslant 1) \leqslant M(\eta)$.*

Исботи. Соддалик учун бу тасдиқни $x_i \geqslant 0$ шартда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни қабул қилувчи η дискрет тасодифий миқдор учун исбот қиламиз. Эҳтимолларни қўшиш аксиомасига кўра

$$P(\eta \geqslant 1) = \sum_{x_i \geqslant 1} P(\eta = x_i),$$

бу ерда йиғинди бирдан катта ва бирга тенг барча x_i қийматлар учун тааллуқлидир. Бироқ $x_i \geqslant 1$ учун, равшанки, $P(\eta = x_i) \leqslant x_i P(\eta = x_i)$. Шунинг учун

$$P(\eta \geqslant 1) = \sum_{x_i \geqslant 1} P(\eta = x_i) \leqslant \sum_{x_i \geqslant 1} x_i P(\eta = x_i) \tag{50}$$

50) тенгсизликнинг ўнг томонига $\sum\limits_{x_i < 1} x_i P(\eta = x_i)$ йиғиндини қўшамиз, бу ерда $x_i < 1$. Бу йиғинди манфий эмас, чунки шартга кўра $x_i \geqslant 0$, эҳтимоллар эса $P(\eta = x_i) \geqslant 0$. Шунинг учун

$$\sum_{x_i \geqslant 1}^{n} x_i P(\eta = x_i) \leqslant \sum_{x_i \geqslant 1} x_i P(\eta = x_i) + \sum_{x_i < 1} x_i P(\eta = x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(\eta = x_i). \tag{51}$$

Охирги йиғинди η қабул қиладиган барча x_i қийматлар учундир. Бироқ бу йиғинди таърифига кўра математик кутилмага тенг:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P(\eta = x_i) = M(\eta).$$

(50) ва (51) муносабатларни таққослаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P(\eta \geqslant 1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i P(\eta = x_i) = M(\eta).$$

Лемма исбот бўлди.

2-лемма. *ξ тасодифий миқдор, ε эса мусбат сон бўлсин. У ҳолда ξ тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилмасидан четланиши модулининг ε дан кичик бўлишининг эҳтимоли $1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$ айирмадан катта ёки унга тенг бўлади,* яъни

$$P[\,|\xi - M(\xi)| < \varepsilon] \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \tag{52}$$

(52) тенгсизлик *Чебишев тенгсизлиги* дейилади.

Исботи. Дастлаб $|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$ тенгсизликни кўрамиз. Бу $\frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1$ тенгсизликка тенг кучли бўлгани учун

$$P[\,|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon] = P\left\{\frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1\right\}.$$

$\eta = \frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2}$ тасодифий миқдор манфий эмас, демак, Чебишевнинг 1-леммаси шартларини қаноатлантиради. Бинобарин,

$$P(\eta \geqslant 1) = P\left\{\frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1\right\} \leqslant M\left\{\frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} M[\xi - M(\xi)]^2 = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

чунки $M[\xi - M(\xi)]^2 = D(\xi)$. Шунинг учун

$$P[\,|\xi - M(\xi)|^2 \geqslant \varepsilon] = P\left\{\frac{[\xi - M(\xi)]^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1\right\} \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \tag{53}$$

$|\xi - M(\xi)| < \varepsilon$ тенгсизлик билан ифодаланувчи ҳодиса $|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$ тенгсизлик билан ифодаланувчи ҳодисага қарама-қарши бўлгани учун $P[\xi - M(\xi)| < \varepsilon] = 1 - P[(\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon]$. Энди (53) муносабатни эътиборга олиб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$P[\,|\xi - M(\xi)| < \varepsilon] \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

2. Чебишевнинг катта сонлар қонуни. Қуйидаги тасдиқ ўринлидир. *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ жуфт-жуфти билан эркли бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлсин, яъни исталган i учун $D(\xi_i) \leqslant C$ бўлсин У ҳолда $\varepsilon > 0$ ҳар қандай бўлганда ҳам ушбу муносабат ўринлидир:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{54}$$

Исботи. $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n)/n$ миқдорни, яъни n та тасодифий миқдорнинг ўртача арифметигини $\bar{\xi}_n$ орқали белгилаймиз. $\bar{\xi}_n$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси

* П. Л. Чебишев (1821 — 1894) буюк рус математиги.

$$M(\overline{\xi}_n) = M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n}M(\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n) =$$
$$= \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n)}{n}$$

га ва дисперсияси

$$D(\overline{\xi}_n) = D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}[D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n)]$$

га тенг (биз бу ерда математик кутилма ва дисперсиянинг хоссаларидан фойдаландик). Энди $\overline{\xi}_n = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)/n$ тасодифий миқдорга Чебишевнинг иккинчи леммасини қўлланиб, топамиз:

$$P[|\overline{\xi}_n - M(\overline{\xi})| < \varepsilon] \geqslant 1 - \frac{D(\overline{\xi}_n)}{\varepsilon^2},$$

яъни

$$P\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 -$$
$$- \frac{D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n)}{n^2\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n},$$

чунки ҳар қандай i да $D(\xi_i) \leqslant C$ ва демак, $E(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n) \leqslant nC$. Ҳар қандай ҳодисанинг эҳтимоли бирдан катта бўла олмаслигини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$1 \geqslant P\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon\right] \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}.$$

$n \to \infty$ да лимитга ўтамиз (V боб, 1-§, 6-пункт, 6-теоремага қаранг):

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Чебишевнинг катта сонлар қонунининг маъноси қуйидагидан иборат. Алоҳида олинган тасодифий миқдор ўзининг математик кутилмасидан анча узоқда бўлган қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган бир пайтда катта сондаги тасодифий миқдорларнинг ўртача арифметиги бирга яқин эҳтимол билан бу тасодифий миқдорлар математик кутилмаларининг ўртача арифметигига яқин қийматларни қабул қилади.

Ч е б и ш е в н и н г к а т т а с о н л а р қ о н у н и н и н г х у с у с и й ҳ о л и. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ жуфт-жуфти билан эркли бўлган тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган $(D(\xi_i) \leqslant C)$ *ва бир хил математик кутилма* $M(\xi_i) = a$ *га эга бўлсин. У ҳолда* $\varepsilon > 0$ ҳар қандай бўлганда ҳам ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Бу

$$\frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n)}{n} = a$$

бўлгани учун бевосита (54) формуладан келиб чиқади.

И з о ҳ. Агар ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам $|\varsigma_n - A| < \varepsilon$ тенгсизликнинг эҳтимоли n ортган сари чексиз равишда бирга яқинлаша борса, ς_n — тасодифий миқдор A сонга *эҳтимол бўйича яқинлашади* дейилади. Эҳтимол бўйича яқинлашиш $\lim\limits_{n\to\infty} \varsigma_n = A$ эканини билдирмайди. Ҳақиқатан ҳам, кейинги ҳолда $|\varsigma_n - A| < \varepsilon$ тенгсизлик n нинг етарлича катта барча қийматлари учун бажарилади. Эҳтимол бўйича яқинлашишда эса бу тенгсизлик n нинг айрим етарлича катта қийматлари учун бажарилмаслиги мумкин. Бироқ $|\varsigma - A| < \varepsilon$ тенгсизликнинг n нинг катта қийматлари учун бажарилмаслиги жуда кам бўладиган (кичик эҳтимолли) ҳодисадир. Буни эътиборга олиб, Чебишевнинг катта сонлар қонунининг хусусий ҳолини қуйидагича таърифлаш мумкин.

Жуфт-жуфти билан эркли бўлган текис чегараланган дисперсияларга ва бир хил математик кутилма $M(\xi_i) = a$ *га эга бўлган* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *тасодифий миқдорларнинг ўртача арифметиги* $(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)/n$ *эҳтимол бўйича* a *га яқинлашади.*

Чебишевнинг катта сонлар қонунининг хусусий ҳоли маъносини тушунтирамиз. Бирор физик катталикнинг ҳақиқий қиймати a ни (масалан, бирор деталнинг ўлчамини) топиш талаб қилинган бўлсин. Бунинг учун бир-бирига боғлиқ бўлмаган бир қатор ўлчашлар ўтказамиз. Ҳар бир ўлчашда бирор хатоликка йўл қўйилади (бу ҳақда муфассалроқ 6-§, 1-пунктга қаранг). Шунинг учун ўлчашнинг ҳар бир мумкин бўлган натижаси ξ_i тасодифий миқдордир (i индекс ўлчаш номери). Ҳар қайси ўлчашда систематик хато йўқ деб фараз қиламиз, яъни ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймат a дан у ёки бу томонга четланиши (оғиши) тенг эҳтимоллидир. Бундай ҳолда барча ξ_i тасодифий миқдорларнинг математик кутилмалари бир хил ва ўлчанаётган a миқдорга тенг бўлади, яъни $M(\xi_i) = a$.

Ниҳоят, ўлчашлар бирор кафолатли аниқлик билан бажарилаяпти деб фараз қиламиз. Бу барча ўлчашлар учун $D(\xi_i) \leqslant C$ деган сўздир. Шундай қилиб, бу ҳолда Чебишевнинг катта сонлар қонуни шартлари бажарилмоқда, шунинг учун агар ўлчашлар сони етарлича катта бўлса, $\varepsilon > 0$ ҳар қандай бўлганда ҳам ўлчашлар натижаларининг ўртача арифметик қиймати фарқи ε дан кичик бўлишини амалда муқаррарлик билан тасдиқлаш мумкин.

3. Бернуллининг катта сонлар қонуни. Эркли синовлар кетма-кетлиги ўтказилаётган бўлсин. Бу синовларнинг ҳар бирининг натижасида A ҳодиса рўй бериши ҳам мумкин, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлиб, бунда бу ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли бир хил ва p га тенг бўлсин. Агар A ҳодиса n та синов натижасида m марта рўй берган бўлса, у ҳолда, маълумки, m/n нисбат A ҳодисанинг рўй бериш, содир бўлиш частотаси дейилади. Частота тасодифий миқдордир, шу билан бирга частота m/n қийматни қабул қилиш эҳтимоли (13) Бернулли формуласи $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ бўйича ифодаланади.

Катта сонлар қонуни Бернулли формасида қуйидагича ифодаланади: *синовлар сони етарлича катта бўлганда A ҳодисанинг рўй бериш частотаси унинг эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилади деб, бирга яқин эҳтимол билан тасдиқлаш мумкин, яъни $\varepsilon > 0$ мусбат сон ҳар қандай бўлганда ҳам*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1 \qquad (55)$$

бўлади.

Бошқача айтганда, *синовлар сони n ни чексиз орттирилганда, A ҳодисанинг m/n частотаси $P(A)$ га эҳтимол бўйича яқинлашади.*

Исбот. $\xi = \frac{m}{n}$ тасодифий миқдорни қараймиз. $M(m) = np$ ва $D(m) = npq$ бўлгани учун (4-§, 2-пункт, 3-мисолга қаранг):

$$M(\xi) = M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}M(m) = \frac{np}{n} = p,$$

$$D(\xi) = D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(m) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

ξ тасодифий миқдорга Чебишевнинг иккинчи леммасини қўллаймиз:

$$1 \geqslant P\left[\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 - \frac{D\left(\frac{m}{n}\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

$n \to \infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Биз синовлар сони катта бўлганда A ҳодисанинг $P^*(A) = \frac{m}{n}$ частотаси барқарорлик хоссасига эга бўлади деб айтган эдик (1-§, 1-пунктга қаранг). Бу ҳолни Бернуллининг катта сонлар қонуни тушунтириб беради.

6-§. ЛЯПУНОВ ВА ЛАПЛАС ТЕОРЕМАЛАРИ

1. Ляпунов теоремаси. Кўпинча катта сондаги эркли тасодифий миқдорларнинг йиғиндисидан иборат тасодифий миқдорлар билан иш кўришга тўғри келади. Маълум бўлишича, баъзи умумий шартларда қўшилувчиларнинг ҳар бири эҳтимоллар тақсимотининг нормал қонунига бўйсунмаса-да, лекин бу йиғинди нормал тақсимотга яқин бўлган тақсимотга эга бўлар экан. Бу шартлар Ляпунов* томонидан топилган ва унинг номи билан аталувчи теореманинг мазмунини ташкил этади.

* А. М. Ляпунов (1857 — 1918) — буюк рус математиги.

Биз фақат Ляпунов теоремасидан келиб чиқадиган натижани исботсиз келтирамиз.

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ математик кутилмалари $M(\xi_i) = a_i$ ва дисперсиялари $D(\xi_i) = \sigma_i^2$ бўлган жуфт-жуфти билан эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин, шу билан бирга бу миқдорлар қуйидаги иккита хоссага эга бўлсин:

1) Шундай L сон мавжудки, исталган i учун $|\xi_i - M(\xi_i)| < L$ тенгсизлик ўринлидир, яъни тасодифий миқдорларнинг барча қийматлари математик кутилмаларига нисбатан текис чегараланган;

2) $n \to \infty$ да $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ чексиз ўсади.

У ҳолда етарлича катта n да $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ йиғинди нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади.

a ва σ^2 лар $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси бўлсин. У ҳолда

$$a = M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) =$$

$$= M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\sigma^2 = D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) +$$

$$+ \ldots + D(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Ляпунов теоремаси натижасига кўра ξ тасодифий миқдор n нинг катта қийматлари учун нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлгани учун (32) формулага кўра қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$P(x_1 < \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (56)$$

бу ерда $\Phi(x)$ — эҳтимоллар интеграли.

2. Хатоларнинг асосий қонуни. Биз бирор ўлчаш ўтказаётган бўлсак, унинг натижасига ўлчаш хатоликларини келтириб чиқарувчи бир қатор факторлар таъсир қилади. Ўлчаш хатоликларини асосан учта группага ажратиш мумкин: 1) қўпол хатолар; 2) систематик хатолар; 3) тасодифий хатолар.

Қўпол хатолар асбобнинг кўрсатишини диққат билан ўқимасликдан, кўрсатишларни нотўғри ёзишдан, асбобдан нотўғри фойдаланишдан пайдо бўлади. Бу хатолардан ўлчаш қоидаларига риоя қилинганда қутулиш мумкин.

Систематик хатолар одатда ўлчаш натижаларини маълум бир томонга бузиб кўрсатувчи. Улар, масалан, асбобларнинг номукаммаллигидан, кузатувчининг шахсий сифатларидан келиб чиқади ва тегишли тузатмалар ёрдамида бартараф қилиниши мумкин.

Тасодифий хатолар аниқ ҳисоб-китоб қилиб бўлмайдиган ва ҳар бир алоҳида ҳолда турлича таъсир кўрсатадиган кўп сондаги алоҳида-алоҳида сабаблар туфайли юзага келади. Бу хатолар сезилмайдиган механик сабаблардан, ўлчов асбоблари параметрларининг ўзгаришидан, метеорологик шароитлардан ва ҳ. к. лардан пайдо бўлади. Бу сабабларнинг ҳар бири алоҳида олганда ўлчаш чоғида жуда кичик v_i хато пайдо қилади. Бу кичик хатолар йиғилиб, $v = \sum v_i$ йиғинди хатони вужудга келтирадики, энди бу хатони эътиборга олмасдан бўлмайди. Ана шу йиғинди хато v тасодифий миқдор бўлиб, жуда катта сондаги унча муҳим бўлмаган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорларнинг йиғиндисидан иборат ва Ляпунов теоремаси натижасига кўра нормал тақсимотга эга. Ўлчашни қўпол ва систематик хатолардан ҳоли деб фараз қилиб, ўлчашнинг мумкин бўлган натижаси математик кутилмаси ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати a га тенг, яъни $M(\xi) = a$ бўлган ξ тасодифий миқдор деб ҳисоблаш мумкин (297-бетга қаранг). $v = \xi - a$ йиғинди хато нормал тақсимот қонунига бўйсунади, шунинг учун ўлчашнинг мумкин бўлган натижаси $\xi = a + v$ ҳам тақсимотнинг нормал қонунига бўйсунади (4-§, 3- пунктга қаранг). *Хатоларнинг асосий қонуни ана* шундан иборат.

3. Лапласнинг интеграл теоремаси. Қуйидаги тасдиқ ўринлидир.

Теорема. *Ҳар бирининг натижасида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил ва $p(p \neq 1,\ p \neq 0)$ га тенг бўлган n та эркли синов ўтказилаётган бўлсин. A ҳодисанинг n та синовда рўй беришлар сони m бўлсин. У ҳолда етарлича катта n лар учун m тасодифий миқдор*

$$a = M(m) = np, \quad \sigma = \sqrt{D(m)} = \sqrt{npq}$$

параметрлар билан нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади.

Исбот. A ҳодисанинг i синовда рўй беришлар сони ξ_i бўлсин. У ҳолда $a_i = M(\xi_i) = p$, $\sigma_i^2 = D(\xi_i) = pq$ (4-§, 2-пункт, 2-мисолга қаранг). ξ_i фақат иккита 0 ва 1 қийматни қабул қилиши мумкин бўлгани сабабли исталган i учун: $|\xi_i - a_i| = |\xi_i - p| \leqslant |\xi_i| + |p| \leqslant 1 + 1 = 2$. Бундан ташқари, $n \to \infty$ да $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = npq$ миқдор чексизликка интилади. Шундай қилиб, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги Ляпунов теоремаси натижасининг шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун бу миқдорларнинг йиғиндиси $m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ етарлича катта n лар учун нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди. m тасодифий миқдор, яъни A ҳодисанинг n та синовда рўй беришлар сони $x_1 < m < x_2$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимолини ҳисоблаймиз, бу ерда x_1 ва x_2 берилган сонлар. $a = M(m) = np$, $\sigma =$

$= \sigma(m) = \sqrt{npq}$ бўлгани учун (4- §, 2- пункт, 2- мисолга қаранг). (32) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(x_1 < m < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{67}$$

бу ерда $\Phi(x)$ эҳтимоллар интеграли.

Мисол. Ишлаб чиқилган технологик режимда завод ўртача 70% биринчи сорт маҳсулот чиқаради. 1000 та буюмнинг биринчи сортлилари сони 652 ва 760 орасида бўлиш эҳтимолини аниқланг.

Ечилиши. Бу ерда $p = 0{,}7$; $q = 1 - p = 0{,}3$; $n = 1000$; $np = 0{,}7 \cdot 1000 = 700$, $npq = 1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 210$, $\sqrt{npq} = \sqrt{210} \approx 14{,}49$.

(57) формуладан ва эҳтимоллар интегралининг II жадвалдаги (иловага қаранг) қийматидан фойдаланиб, топамиз:

$$P(652 < m < 760) \approx \Phi\left(\frac{760 - 700}{14{,}49}\right) - \Phi\left(\frac{652 - 700}{14{,}49}\right) = \Phi(4{,}14) - \Phi(-3{,}31) =$$
$$= \Phi(4{,}14) + \Phi(3{,}31) = 0{,}49997 + 0{,}49948 = 0{,}99945.$$

7- §. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЎЛЧАШЛАР НАТИЖАЛАРИНИ ИШЛАБ ЧИҚИШГА ТАТБИҚИ

Номаълум физик доимий a ни аниқлаш учун n та эркли (бир-бирига боғлиқ бўлмаган) ўлчашлар ўтказилаётган бўлсин, бунда қўпол ва систематик хатоларга йўл қўйилмаган деб ҳисобланади (6- §, 2- пунктга қаранг). n та ўлчашдан ҳар бирининг мумкин бўлган натижаси тасодифий миқдордир, уни ξ_i (i — ўлчаш номери) орқали белгилаймиз. Ҳар бир ўлчаш бошқа ўлчашлар натижаларига боғлиқ бўлмагани учун биз n та $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ эркли тасодифий миқдорларга эга бўламиз. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ орқали a миқдорни n-та ўлчашдаги ҳосил қилинган натижаларини белгилаймиз. Шундай қилиб, x_i тасодифий миқдор ξ_i нинг мумкин бўлган қийматларидан бири.

Чебишевнинг катта сонлар қонуни (5- §, 2- пунктга қаранг) асосида қуйидаги тасдиқни келтиришимиз мумкин: ўлчашлар сони n етарли даражада катта бўлганда ўлчаш натижаларининг ўртача арифметиги физик доимий (ўзгармас)нинг ҳақиқий қийматидан жуда кам фарқ қилишини амалда ишонч (муқаррарлик) билан тасдиқлашимиз мумкин, яъни ушбу

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \approx a$$

тақрибий тенгликнинг бажарилиши эҳтимоли 1 га исталганча яқин бўлади.

Бу тақрибий тенгликнинг аниқлигини баҳолаймиз. Бунинг учун дастлаб, хатоларнинг асосий қонунига кўра (6- §, 2- пунктга қаранг) ўлчашнинг ҳар бир мумкин бўлган натижаси ξ_i тасодифий миқдор эканини ва эҳтимоллар тақсимотининг нормал қонунига (ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати a га тенг бўлган бир хил математик кутилма $M(\xi_i) = a$; $i = 1, 2, \ldots, n$ билан) бўйсунишини қайд қиламиз. Сўнгра, барча ўлчашлар бир хил аниқлик даражасида олиб борилаяпти деб фараз қиламиз (бир хил аниқликдаги ўлчашлар). Шунинг учун барча тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари бир хил бўлиши керак, яъни $D(\xi_i)=\sigma^2$.

Дастлаб σ нинг қиймати маълум деб, a нинг номаълум қийматини баҳолаш ҳолини қараб чиқамиз. i- ўлчашнинг мумкин бўлган натижаси математик кутилмаси $M(\xi_i)=a$ ва дисперсияси $D(\xi_i)=\sigma^2$ бўлган эҳтимоллар тақсимотининг нормал қонунига бўйсунувчи ξ_i тасодифий миқдор бўлгани учун $\bar{\xi}=(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)/n$ тасодифий миқдор ҳам ўша $M(\bar{\xi})=a$ математик кутилма ва $\sigma(\bar{\xi})=\sqrt{D(\bar{\xi})}=\sigma/\sqrt{n}$ ўртача квадратик оғиш (4- §, 3- пунктга қаранг) билан нормал тақсимотга эга. Шунинг учун ўртача арифметик $\bar{\xi}$ учун эҳтимоллар тақсимотининг зичлиги қуйидаги кўринишга эга:

$$\varphi_{\bar{\xi}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(\bar{\xi})}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2(\bar{\xi})}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-(x-a)^2n/2\sigma^2},$$

бу ерда тақсимот параметрлари a ва $\sigma(\bar{\xi})=\sigma/\sqrt{n}$ га тенг.

Демак, n та ўлчашда қийматларнинг шундай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тўпламини олишимиз ва исталган $\varepsilon>0$ да $]\bar{\xi}-\varepsilon, \bar{\xi}+\varepsilon[$ интервал a ни ўз ичига олиш эҳтимоли (33) формулага кўра қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$P(\bar{\xi}-\varepsilon<a<\bar{\xi}+\varepsilon)=P(|\bar{\xi}-a|<\varepsilon)=2\,\Phi(\varepsilon/\sigma(\bar{\xi}))=2\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma) \tag{58}$$

$]\bar{\xi}-\varepsilon, \bar{\xi}+\varepsilon[$ интервал $\bar{\xi}-\varepsilon$ ва $\bar{\xi}+\varepsilon$ тасодифий чегараларга эга. (58) муносабат исталган $n\geqslant 1$ қиймат учун ўринли. $2\,\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)$ эҳтимол $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар қабул қиладиган конкрет қийматларга боғлиқ эмас ва ўлчашлар сони n ўсганда $\Phi(x)$ функциянинг хоссасига мувофиқ ўсади (3- §, 4- пункт). (58) муносабат ўлчаш натижасида ҳосил қилинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматлар қандай бўлишидан қатъи назар қуйидаги формула ўринли бўлишини кўрсатади:

$$P(\bar{x}-\varepsilon<a<\bar{x}+\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma), \tag{59}$$

бу ерда $\bar{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$. Бу ердаги $\bar{x}$ миқдор *ўртача танланма* дейилади. (59) формуладан кўп ҳолларда фойдаланиш мумкин эмас, чунки одатда σ нинг қиймати номаълум бўлади. Шунинг учун a ва σ миқдорнинг иккаласи номаълум бўлган ҳолни қараймиз.

Айтайлик, s^2 миқдор ушбу муносабат орқали аниқланган бўлсин.

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n-1}, \tag{60}$$

бу ерда $\bar{\xi}=(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)/n$.

s^2 миқдор σ^2 га тенг математик кутилма ва $\frac{2\sigma^4}{n-1}$ га тенг диспер-

сияга эга эканини кўрсатиш мумкин, яъни $M(s^2)=\sigma^2$, $D(s^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$ (исботни ҳисоблашлар узун бўлгани учун келтирмаймиз). Бу s^2 миқдорга Чебишевнинг иккинчи леммасини қўллаймиз (5- §, 1- пунктга қаранг):

$$P[\,|s^2-M(s^2)|<\varepsilon\,]\geqslant 1-\frac{D(s^2)}{\varepsilon^2},$$

бу ерда $\varepsilon>0$. Бу ерда $M(s^2)$ ва $D(s^2)$ нинг қийматларини қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$1\geqslant P[\,|s^2-\sigma^2|<\varepsilon\,]\geqslant 1-\frac{2\sigma^4}{(n-1)\,\varepsilon^2}. \tag{61}$$

(61) муносабат, агар $n\to\infty$ бўлса, $P[\,|s^2-\sigma^2|<\varepsilon\,]\to 1$ бўлишини, яъни s^2 эҳтимол бўйича σ^2 га интилишини кўрсатади.

Энди $\bar{s}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ миқдорни қараймиз. $\bar{s}^2$ миқдор s^2 нинг мумкин бўлган қийматларидан бири бўлгани учун етарлича катта n ларда қуйидаги тақрибий тенгликнинг ўринли эканини амалда ишончлилик билан тасдиқлаш мумкин:

$$\bar{s}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\approx\sigma^2 \text{ ёки } \sigma\approx\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\bar{s}, \tag{62}$$

бу ерда $\bar{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$. Бу ердаги $\bar{s}^2$ миқдор *танлама дисперсия* дейилади.

Амалда ўлчанаётган миқдорнинг a ҳақиқий қиймати $]\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon[$ интервалда ётиш эҳтимолини баҳолаш учун (59) формуладан фойдаланилади, бунда σ ўрнига унинг (62) формула бўйича топилган $\bar{s}$ тақрибий қиймати қўйилади.

Шундай қилиб, n нинг етарлича катта қийматлари учун қуйидагига эгамиз:

$$P(\bar{x}-\varepsilon<a<\bar{x}+\varepsilon)=2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n}/\bar{s}\right), \tag{63}$$

бу ерда

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \qquad \bar{s}=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}. \tag{64}$$

$]\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon[$ интервал *ишончлилик интервали*, $\alpha=2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n}/\bar{s}\right)$ эҳтимол эса *ишонч** дейилади.

Мисол. Пўлат таркибидаги хромнинг процентини аниқлаш учун 34 та ўлчаш ўтказилди, уларнинг натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

*(63) формула бўйича ҳисоблаш $n\geqslant 30$ да аниқлиги бўйича қониқарли бўлган натижалар беради.

№	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	№	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	4,505	$0\cdot10^{-3}$	$0\cdot10^{-6}$	19	4,507	$2\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-6}$
2	4,524	$0{,}019=19\cdot10^{-3}$	$361\cdot10^{-6}$	20	4,502	$-3\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-6}$
3	4,492	$-13\cdot10^{-3}$	$169\cdot10^{-6}$	21	4,497	$-8\cdot10^{-3}$	$64\cdot10^{-6}$
4	4,500	$-5\cdot10^{-3}$	$25\cdot10^{-6}$	22	4,485	$-20\cdot10^{-3}$	$400\cdot10^{-6}$
5	4,493	$-12\cdot10^{-3}$	$144\cdot10^{-6}$	23	4,511	$6\cdot10^{-3}$	$36\cdot10^{-6}$
6	4,515	$10\cdot10^{-3}$	$100\cdot10^{-6}$	24	4,519	$14\cdot10^{-3}$	$196\cdot10^{-6}$
7	4,504	$-1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-6}$	25	4,513	$8\cdot10^{-3}$	$64\cdot10^{-6}$
8	4,508	$3\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-6}$	26	4,517	$12\cdot10^{-3}$	$144\cdot10^{-6}$
9	4,517	$12\cdot10^{-3}$	$144\cdot10^{-6}$	27	4,508	$3\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-6}$
10	4,513	$8\cdot10^{-3}$	$64\cdot10^{-6}$	28	4,504	$-1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-6}$
11	4,519	$14\cdot10^{-3}$	$196\cdot10^{-6}$	29	4,515	$10\cdot10^{-3}$	$100\cdot10^{-6}$
12	4,511	$6\cdot10^{-3}$	$36\cdot10^{-6}$	30	4,493	$-12\cdot10^{-3}$	$144\cdot10^{-6}$
13	4,485	$-20\cdot10^{-3}$	$400\cdot10^{-6}$	31	4,500	$-5\cdot10^{-3}$	$25\cdot10^{-6}$
14	4,497	$-8\cdot10^{-3}$	$64\cdot10^{-6}$	32	4,492	$-13\cdot10^{-3}$	$169\cdot10^{-6}$
15	4,502	$-3\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-6}$	33	4,424	$19\cdot10^{-3}$	$361\cdot10^{-6}$
16	4,507	$2\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-6}$	34	4,505	$0\cdot10^{-3}$	$0\cdot10^{-6}$
17	4,501	$-4\cdot10^{-3}$	$16\cdot10^{-6}$				
18	4,501	$-4\cdot10^{-3}$	$16\cdot10^{-6}$	$\sum$	153,186		$6968\cdot10^{-6}$

Ишончлилик интервалини $\alpha = 0{,}9973$ ишонч билан топинг.

Ечилиши: Бу ерда $n = 34$. Жадвалда берилганлардан фойдаланиб, топамиз:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{153{,}286}{34} = 4{,}5055; \quad \bar{s} = \sqrt{\frac{6968\cdot10^{-6}}{34-1}} \approx 0{,}0145$$

$$\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0145}{\sqrt{34}} = 0{,}0025$$

$\alpha = 0{,}9973$ ишонч бўйича (63) формуладан топамиз:

$$2\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\bar{s}) = 2\Phi(\varepsilon/0{,}0025) = 0{,}9973.$$

Демак, $\Phi(\varepsilon/0{,}0025) = 0{,}49865$. Иловадаги II жадвалдан $\varepsilon/0{,}0025 = 3$ ни топамиз, бу ердан $\varepsilon = 0{,}0025\cdot3 = 0{,}0075$.

Мазкур ҳолда ишончлилик интервали қуйидагичадир:

$$]\bar{x}-\varepsilon,\ \bar{x}+\varepsilon[=]4{,}5055-0{,}0075;\ 4{,}5055+0{,}075[=]4{,}498;\ 4{,}513[.$$

Шундай қилиб, хромнинг пўлатдаги процент таркиби $\alpha = 0{,}9973$ ишонч билан]4,498; 4, 513[интервалда ётади.

8-§. Эҳтимоллар назариясининг статистикага татбиқи

Математик статистика математиканинг кўп сондаги тасодифий ҳодисалар устида кузатишлар олиб бориш натижасида ҳосил қилинган тажриба натижаларини ишлаб чиқиш ва анализ қилиш усуллари ўрганиладиган қисмидир. Шундай қилиб, ўлчаш натижаларини ишлаб чиқиш (7-§ га қаранг) математик статистиканинг масалаларидан бири ҳисобланади. Мазкур параграфда математик статистиканинг яна иккита масаласини кўриб чиқамиз.

1. Номаълум тақсимот функциясини аниқлаш. Қийматлари кузатишлардан олинган узлуксиз ξ тасодифий миқдор билан иш кўраётган бўлайлик. ξ нинг кузатилаётган қийматлар диапазонини бир хил ΔX узунликдаги $]X_0, X_1[$, $]X_1, X_2[$, ..., $]X_{k-1}, X_k[$ интервалларга бўламиз. m_i шу ξ нинг i-интервалга тушган кузатилаётган қийматлари сони бўлсин. m_i ни кузатишларнинг умумий сони n та бўлиб, i-интервалга мос келувчи p_i^* частотани ҳосил қиламиз: $p_i^* = m_i/n$, шу билан бирга $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = \sum_{i=1}^{k} m_i/n = 1$. Қуйидаги жадвални тўлдирамиз:

Интервал номери	Интервал	m_i	p_i^*
1	$]X_0, X_1[$	m_1	p_1^*
2	$]X_1, X_2[$	m_2	p_2^*
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$]X_{k-1}, X_k[$	m_k	p_k^*

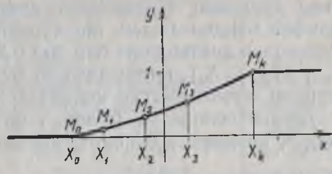
Бу жадвал *статистик қатор* дейилади. ξ тасодифий миқдор тақсимотининг *эмпирик* (ёки *статистик*) *функцияси* деб, ξ миқдор синов атижасида x дан кичик қийматни қабул қилишидан иборат ҳодиса стотасига айтилади:

$$F^*(x) = P^*(\xi < x).$$

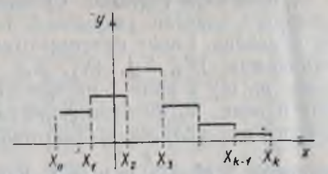
Амалда статистик тақсимот функцияси $F^*(x)$ нинг $X_0, X_1, \ldots, X_k$ нуқталардаги қийматларини топиш етарлидир (улар эса статистик қатор интервалларининг чегараларидир:)

$$\begin{cases} F^*(X_0) = P^*(\xi < X_0) = 0, \\ F^*(X_1) = P^*(\xi < X_1) = \dfrac{m_1}{n} = p_1^*, \\ F^*(X_2) = P^*(\xi < X_2) = \dfrac{m_1+m_2}{n} = p_1^* + p_2^*, \\ F^*(X_k) = P^*(\xi < X_k) = \dfrac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{n} = p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1. \end{cases} \qquad (65)$$

$x < X_0$ да $F^*(x) = 0$ ва $x > X_k$ да $F^*(x) = 1$ эканини қайд қилиш керак. $M_i[X_i, F^*(X_i)]$ нуқталарни ясаб ва уларни силлиқ эгри чизиқ билан туташтириб, тақсимотнинг эмпирик функциясининг тақрибий графигини ҳосил қиламиз (96-чизма). Бернуллининг катта сонлар қонунидан фойдаланиб, синовлар сони n етарлича катта бўлганда бирга яқин эҳтимол билан тақсимотнинг $F^*(x)$ эмпирик функцияси ξ миқдорнинг бизга номаълум бўлган тақсимот функцияси $F(x)$ дан жуда ҳам кам фарқ қилишини исбот қилиш мумкин.



96- расм



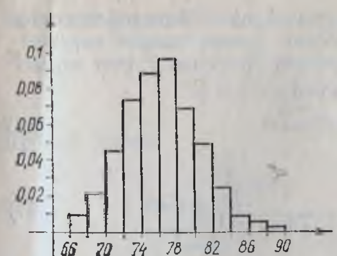
97- расм

Кўпинча тақсимотнинг эмпирик функциясини ясаш ўрнига қуйидагича йўл тутилади. Абсциссалар ўқида $]X_0, X_1[$, $]X_1, X_2[$, ... , $]X_{k-1}, X_k[$ интерваллар қўйиб чиқилади. Ҳар қайси интервалда юзи берилган интервалга мос бўлган p_i^* частотага тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясалади. Бу тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $h_i = p_i^*/\Delta X$ га тенг, бу ерда ΔX — ҳар бир интервалнинг узунлиги. Равшанки, барча ясалган тўғри тўртбурчакларнинг юзлари йиғиндиси бирга тенг.

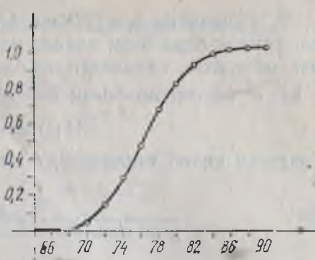
$]X_{i-1}, X_i[$ интервалда ўзгармас ва h_i га тенг бўлган $y = \varphi^*(x)$ функцияни қараймиз. Бу функциянинг графиги *гистограмма* дейилади. У поғонавий чизиқдан иборат (97- чизма). Бернуллининг катта сонлар қонунидан фойдаланиб, кичик ΔX ва катта n ларда (амалда муқаррарлик билан) $\varphi^*(x)$ функция узлуксиз ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ дан жуда кам фарқ қилишини кўрсатиш мумкин.

Мисол. Хвостовикнинг 270 та вали диаметри ўлчанган. Диаметрнинг қийматлари (см ларда) 66 — 90 см ораликда (диапазонда) ётади. Бу оралиқни узунлиги 2 см ($\Delta X = 2$ см) бўлган интервалларга бўлиб, статистик қаторни ҳосил қиламиз (жадвалга қаранг).

Интерваллар номерлари	Интерваллар	m_i	$P^*_i = \frac{m_i}{n}$	$h^*_i = \frac{P_i}{\Delta x}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	]66,68[	4	0,015	0,008
2	]68,70[	12	0,045	0,022
3	]70,72[	24	0,090	0,045
4	]72,74[	41	0,152	0,076
5	]74,76[	50	0,185	0,092
6	]76,78[	53	0,196	0,098
7	]78,80[	39	0,144	0,072
8	]80,82[	26	0,096	0,048
9	]82,84[	13	0,048	0,024
10	]84,86[	5	0,019	0,009
11	]86,88[	2	0,007	0,004
12	]88,90[	1	0,003	0,002
Σ		270	1,000	



98- расм



99- расм

Тақсимот гистограммасини ва эмпирик функциясини ясаймиз. Ҳисобланган p_i^* частоталар (4) устунда, гистограмма тўғри тўртбурчакларининг баландликлари h_i ларнинг қийматлари (5) устунда келтирилган. Гистограмма 98- расмда тасвирланган.

Тақсимот эмпирик функциясининг қийматлари интервалларнинг чегаравий нуқталарида (65) формула билан ҳисобланган ва қуйидаги жадвалда келтирилган.

X	66	68	70	72	74	76	78
$F^*(x)$	0	0,015	0,060	0,150	0,302	0,487	0,683

давоми

X	80	82	84	86	88	90
$F^*(x)$	0,827	0,923	0,971	0,990	0,997	1,000

Масалан,

$$F^*(72) = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n} = p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0{,}015 + 0{,}045 + 0{,}090 = 0{,}150.$$

$F^*(x)$ функция графиги 99- расмда тасвирланган.

2. Тақсимотнинг номаълум параметрларини аниқлаш. Гистограмма ёрдамида ξ тасодифий миқдор тақсимоти зичлигининг графигини тақрибан ясашимиз мумкин. Бу графикнинг кўриниши кўпинча тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ ҳақида сўз юритишга (хулоса чиқаришга) имкон беради. Бу тақсимот зичлиги ифодасига одатда баъзи параметрлар киради, уларни тажриба натижаларидан аниқлаш талаб қилинади.

Тақсимот зичлиги $\varphi(x)$ иккита параметрга боғлиқ бўлган хусусий ҳолга тўхталамиз.

Шундай қилиб, $x_1, x_2, \ldots x_n$ — узлуксиз ξ тасодифий миқдорнинг кузатилаётган қийматлари бўлсин ва унинг эҳтимоллар тақсимоти зичлиги иккита номаълум A ва B параметрга боғлиқ, яъни $\varphi(x,$

A, B) кўринишга эга бўлсин. Номаълум A ва B параметрларни топиш усулларидан бири қуйидагидан иборат: уларни назарий тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсияси танланма ўртача қиймат $\overline{x}$ ва $\overline{s^2}$ дисперсия билан бир хил, яъни

$$M(\xi) = \overline{x}, \; D(\xi) = s^2 \tag{66}$$

бўладиган қилиб танланади, бу ерда

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad \overline{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}. \tag{67}$$

Ҳосил қилинган иккита (66) тенгламадан номаълум A ва B параметрлар топилади. Масалан, агар ξ тасодифий миқдор эҳтимоллар тақсимотининг нормал қонунига бўйсунса, у ҳолда унинг эҳтимоллар тақсимоти зичлиги $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ иккита a ва σ параметрга боғлиқ бўлади. Бизга маълумки, бу параметрлар ξ тасодифий миқдорнинг мос равишда математик кутилмаси ва ўртача квадратик оғишидан иборатдир, шунинг учун (66) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$a = \overline{x}, \; \sigma^2 = \overline{s}^2. \tag{68}$$

Демак, эҳтимоллар тақсимоти зичлиги қуйидаги кўринишга эга,

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\overline{s}} e^{-(x-\overline{x})^2/2\overline{s}^2}.$$

1-изоҳ. Бундай масалани 7-§ да ечган эдик. Ўлчаш натижаси ξ тасодифий миқдор бўлиб, у a ва σ параметрлар билан нормал тақсимот қонунига бўйсунади. a нинг тақрибий қиймати учун $\overline{x}$ миқдорни, σ нинг тақрибий қиймати учун $\overline{s}$ миқдорни танлаб олдик.

2-изоҳ. Синовлар сони катта бўлганда $\overline{x}$ ва $\overline{s^2}$ миқдорларни (67) формулалар бўйича топиш катта ҳисоблашлар билан боғлиқ. Шунинг учун қуйидагича йўл тутилади: ξ миқдорнинг статистик қаторнинг i- интервали $]X_{i-1}, X_i[$ га тушган ҳар бир кузатиладиган қийматини бу интервалнинг ўртаси c_i га тақрибан тенг, яъни $c_i = (X_{i-1} + X_i)/2$ деб ҳисобланади. Биринчи $]X_0, X_1[$ интервални қараймиз. Бу интервалга ξ тасодифий миқдорнинг m_1 та кузатилган қиймати тушган, уларнинг ҳар бирини c_1 сон билан алмаштирамиз. Бинобарин, бу қийматларнинг йиғиндиси тақрибан m_1c_1 га тенг. Худди шунга ўхшаш, ξ миқдорнинг иккинчи интервалга тушган қийматлари йиғиндиси тақрибан m_2c_2 га тенг ва ҳоказо. Шунинг учун

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}{n}.$$

Қуйидаги тақрибий тенгликни ҳам худди шундай ҳосил қиламиз:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i (c_i - \overline{x})^2}{n-1}.$$

Шундай қилиб,

$$\overline{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i c_i}{n}, \quad \overline{s^2} \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i (c_i - \overline{x})^2}{n-1}, \tag{69}$$

бу ерда $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, k — статистик қатор интервалларининг сони.

3-изоҳ. Амалда ҳисоблашларни янада соддалаштириш учун қуйидаги усулдан фойдаланилади. x_0 — ихтиёрий сон бўлсин. $u_i = c_i - x_0$ деб белгилаймиз ва қуйидаги муносабатлар билан аниқланувчи ν_1 ва ν_2 миқдорларни қараймиз:

$$\nu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}{n}, \quad \nu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}{n-1}. \tag{70}$$

Қуйидагини исботлаймиз:

$$\overline{x} \approx \nu_1 + x_0, \quad \overline{s^2} = \nu_2 - \frac{\nu_1^2 n}{n-1}. \tag{71}$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n \text{ ва } \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i c_i}{n} \approx \overline{x}$$

бўлгани учун [(69) формулага қаранг]:

$$\nu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}{n} = \frac{\sum_{i=1} m_i (c_i - x_0)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i c_i}{n} - \frac{x_0 \sum_{i=1}^{k} m_i}{n} \approx$$

$$\approx \overline{x} - x_0.$$

Шундай қилиб, $\nu_1 \approx \overline{x} - x_0$, бу ердан $\overline{x} \approx \nu_1 + x_0$. (71) муносабатларнинг иккинчиси ҳам шундай исбот қилинади.

Мисол. Хвостовик вали диаметри қийматларининг статистик тақсимоти учун ясалган гистограмма (98-расмга қаранг) биз нормал тақсимот қонуни билан иш кўраётибмиз деб фараз қилишимизга имкон яратади. 306-бетдаги жадвалда келтирилган қийматлардан фойдаланиб, бу тақсимотнинг параметрлари a ва σ ни аниқлаш талаб этилади.

Ечилиши. $x_0 = 75$ деб олиб*, ν_1 ва ν_2 ларни ҳисоблаймиз. Ҳисоблашларни қуйидаги жадвал кўринишида жойлаштирамиз.

---

*Одатдагидек, ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида x_0 учун кузатилаётган қийматлар ўзгариш диапазонининг ўртасига яқин сонни танладик.

Интерваллар-нинг номер-лари	c_i интервал-нинг ўртаси	m_i	$u_i = c_i - 75$	$m_i u_i$	u_i^2	$m_i u_i^2$
1	67	4	—8	—32	64	256
2	69	12	—6	—72	36	432
3	71	24	—4	—96	16	384
4	73	41	—2	—82	4	164
5	75	50	0	0	0	0
6	77	53	2	106	4	212
7	79	39	4	156	16	624
8	81	26	6	156	36	936
9	83	13	8	104	64	832
10	85	5	10	50	100	500
11	87	2	12	24	144	288
12	89	1	14	14	196	196
Σ		270		328		4824

(70) формулалар бўйича топамиз:

$$\nu_1 = \frac{328}{270} = 1,21, \qquad \nu_2 = \frac{4824}{270-1} = 17.93.$$

Энди (71) формуладан фойдаланиб топамиз: $\overline{x} \approx \nu_1 + x_0 = 1,21 + 75 = 76,21$;

$$\overline{s^2} \approx \nu_2 - \frac{\nu_1^2 \cdot n}{n-1} = 17,93 - \frac{(1,21)^2 \cdot 270}{269} = 16,47.$$

a ва σ параметрларни (68) шартлар бажариладиган қилиб танлаймиз: $a = \overline{x}$. $\sigma^2 = \overline{s^2}$.

Демак, $a = 76,21$; $\sigma = \sqrt{16,47} = 4,06$. Шундай қилиб, эҳтимоллар тақсимотининг зичлиги:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4,06} e^{-(x-76,21)^2/(2 \cdot 16,47)}.$$

Қуйидаги жадвалда $\varphi(x)$ функциянинг статик қатор интервалининг ўрта нуқталаридаги қийматларини ҳисоблаш келтирилган. $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ функциянинг қийматлари иловадаги 1- жадвалдан олинган.

x	$x - 76,21$	$t = \frac{x-76,21}{4,06}$	$\varphi_0(t)$	$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(t)}{4,06}$	$\varphi^*(x) = h_i$
67	—9,21	—2,27	0,0303	0,006	0,008
69	—7,21	—1,78	0,0818	0,020	0,022
71	—5,21	—1,29	0,1736	0,043	0,045
73	—3,21	—0,79	0,2920	0,072	0,076
75	—1,21	—0,30	0,3697	0,091	0,092
77	0,79	0,20	0,3825	0,095	0,098
79	2,79	0,69	0,3144	0,075	0,072
81	4,79	1,18	0,1989	0,049	0,048
83	6,79	1,62	0,0973	0,024	0,024
85	8,79	2,17	0,0379	0,009	0,009
87	10,79	2,66	0,0116	0,003	0,004
89	12,79	3,16	0,0020	0,001	0,002

Жадвалнинг охирги устунида $\varphi^*(x)$ функциянинг 306- бетдаги жадвалнинг (5) устунидан олинган қийматлари келтирилган. Таққослашлар $\varphi(x)$ функция $\varphi^*(x)$ га яқинлигини кўрсатади.

9- §. КОРРЕЛЯЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1. Кириш. Математик анализда биз иккита ўзгарувчан миқдор орасидаги функционал боғланиш билан иш кўрган эдик, бунда бу ўзгарувчилардан бирининг ҳар бир қийматига бошқасининг ягона қиймати мос келар эди.

Бироқ кўпинча функционал боғланишдан кўра мураккаброқ боғланишлар билан ишлашга тўғри келади. Бундай боғланиш миқдорлардан бири фақат бошқасига эмас, балки бошқа бир қатор ўзгарувчи факторларга боғлиқ бўлганда ҳосил бўладики, бу факторлар орасида ҳар иккала миқдор учун умумий бўлганлари ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, қарағайнинг баландлиги ортиши (ўсиши) билан унинг танаси диаметри ортиб боради. Бироқ агар бу боғланишни тақрибан олинган натижалар бўйича текширадиган бўлсак, баъзи баланд бўйли қарағайлар танасининг диаметри паст бўйли қарағайлар танасининг диаметридан кичик бўлиб чиқишини кўришимиз мумкин. Бу қарағай танасининг диаметри фақат унинг баландлигига боғлиқ бўлмай, бошқа факторларга (масалан, тупроқ хоссаларига, намлик миқдорига ва бошқаларга) ҳам боғлиқ бўлиши билан тушунтирилади.

Бу ҳол қарағай танаси диаметрининг унинг баландлигига боғлиқ ҳолда келтирилган қийматлари жадвалидан кўринади. Бу жадвалнинг ҳар қайси катагида тегишли тана диаметрига ва баландликка эга бўл-

Баландлик (м) / Диаметр (см)	22,5—23,5 23	23,5—24,5 24	24,5—25,5 25	25,5—26,5 26	26,5—27,5 27	27,5 — 28,5 28	m''_i
20—24 22	2						2
24—28 26		2	1	2			5
28—32 30		2	2		1		5
32—36 34			2	1			3
36—40 38			1	1	2		4
40—44 2				2		3	5
44—48 46					2		2
m'_i	2	4	6	6	5	3	26

ган қарағайлар сони келтирилган*. Масалан, баландлиги 24 м ва танасининг диаметри 26 см бўлган қарағайлар сони иккига тенг.

Қуйида қарағай танаси диаметрининг унинг баландлигига боғлиқ ҳолдаги ўртача қийматлари келтирилган.

Баландлик	23	24	25	26	27	28
Ўртача диаметр	22	28	32	34,7	39,6	42

Қарағай баландлиги ортиши билан унинг танасининг диаметри ўртача ортиб боришини кўрамиз. Бироқ берилган баландликдаги қарағайларнинг диаметрлари етарлича катта тарқоқликка эга. Масалан, ўртача 26 метрлик қарағайлар 25 метрлик қарағайларга қараганда йўғонроқ бўлса-да, айрим қарағайлар учун бу муносабат бузилади.

Кўрилган мисолда биз ушбу иккита тасодифий миқдорга эгамиз: ξ — қарағайнинг баландлиги ва η — қарағай танасининг диаметри. ξ миқдорнинг ҳар бир x қийматига η нинг турли эҳтимоллар билан қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами мос келади. Бундай ҳолда ξ ва η орасида корреляцион боғланиш мавжуд дейилади.

Бу мисол бизни қуйидаги таърифга олиб келади.

Иккита тасодифий миқдор ξ ва η дан бирининг ҳар бир қийматига бошқасининг тайин эҳтимоллар тақсимоти мос келса, бу миқдорлар *корреляцион боғланишда* дейилади.

Тасодифий миқдорлар орасидаги корреляцион боғланишни характерлаш учун корреляция коэффициенти тушунчаси киритилади.

2. **Корреляция коэффициенти.** Бизга маълумки, агар ξ ва η эркли тасодифий миқдорлар бўлса, математик кутилма таърифига кўра қуйидаги тенглик ўринлидир (4- §, 1- пункт):

$$M(\xi\cdot\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta). \tag{72}$$

Агар ξ ва η эркли тасодифий миқдорлар бўлмаса, у ҳолда умуман айтганда $M(\xi\cdot\eta)\neq M(\xi)\cdot M(\eta)$ бўлади.

Иккита тасодифий миқдор ξ ва η нинг боғланиш ўлчови учун қуйидаги муносабат билан аниқланувчи ўлчамсиз $R(\xi, \eta)$ миқдорни қабул қилишга келишилган:

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)} \tag{73}$$

Бу миқдор *корреляция коэффициенти* дейилади.

Корреляция коэффициентининг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз.

Агар ξ ва η эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда корреляция коэффициенти нолга тенг бўлади.

Бу хосса бевосита (72) ва (73) муносабатлардан келиб чиқади. Тескари тасдиқ, умуман олганда тўғри эмаслигини, яъни агар $R(\xi, \eta) = 0$ бўлса, ҳали бу ердан ξ ва η нинг эркли экани келиб чиқмаслигини қайд қиламиз.

*Ҳисоблашларда берилган интервалга тушган барча қарағайлар танасининг диаметрини ва баландликларини тегишли интервалларнинг ўртасига тенг деб оламиз.

Шуни ҳам исботсиз қайд қиламизки, $|R(\xi, \eta)| \leqslant 1$. Агар бунда $|R(\xi, \eta)| = 1$ бўлса, у ҳолда ξ ва η тасодифий миқдорлар орасида функционал, чунончи чизиқли боғланиш мавжуд бўлади.

Изоҳ. Юқорида кўрдикки (3- §, 6- пункт), агар ξ_1 ва ξ_2 система миқдорларининг тақсимот зичлиги $\varphi(x, y)$ ушбу

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} e^{-\frac{1}{1-R^2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - R\frac{(x-a_1)(y_1-a_2)}{\sigma_1\cdot\sigma_2} + \frac{\left(y-a_2^2\right)}{2\sigma_2^2}\right]}$$

кўринишга эга бўлса, (ξ_1, ξ_2) икки ўлчовли тасодифий миқдор нормал тақсимланади.

R ўзгармас ξ_1 ва ξ_2 миқдорларнинг корреляция коэффициентига тенг эканини, яъни $R(\xi_1, \xi_2) = R$ эканини кўрсатиш мумкин. ξ_1 ва ξ_2 миқдорлар системаси нормал тақсимланган ва корреляция коэффициенти $R(\xi_1, \xi_2) = R = 0$ бўлган ҳолда ξ_1 ва ξ_2 миқдорлар эркли бўлишини (3- §, 6- пунктга қаранг) ҳам қайд қилиб ўтиш керак.

3. **Регрессия функциялари ва чизиқлари.** ξ ва η корреляцион боғланишда бўлган узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлсин. Бу ξ тасодифий миқдорнинг ҳар бир x қийматига η миқдорнинг тўла аниқланган эҳтимоллар тақсимоти мос келишини билдиради. η миқдорнинг $\xi = x$ шарти остида тақсимотининг зичлиги $\varphi_x(y)$ тасодифий миқдор η *тақсимотининг шартли зичлиги* дейилади.

Мазкур ҳол учун η миқдорнинг $\xi = x$ шарти остидаги шартли математик кутилмаси $M_x(\eta)$ ни ҳисоблаймиз. Узлуксиз тасодифий миқдор математик кутилмасининг таърифига кўра [(40) формулага қаранг]:

$$M_x(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_x(y)\,dy.$$

ξ тасодифий миқдорнинг ҳар бир мумкин бўлган x қийматига шартли математик кутилма $M_x(\eta)$ нинг тайин қиймати мос келади. Шундай қилиб, x ўзгарувчининг $M_x(\eta) = f(x)$ функциясини ҳосил қиламиз. Бу $y = f(x)$ функция η *миқдорнинг ξ га регрессия функцияси*, унинг графиги эса η *нинг ξ га регрессия чизиғи* дейилади.

Худди шунга ўхшаш, ξ миқдорнинг $\eta = y$ шарти остидаги шартли математик кутилмаси

$$M_y(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_y(x)\,dx = g(y)$$

ҳам аниқланади, бу ерда $\varphi_y(x)$ тасодифий миқдор ξ нинг $\eta = y$ шарти остида эҳтимоллигининг шартли зичлиги. $x = g(y)$ функция ξ *миқдорнинг* η га *регрессия функцияси*, унинг графиги эса ξ *нинг* η га *регрессия чизиғи* дейилади.

Шуни қайд қилиш лозимки, $y = f(x)$ ва $x = g(y)$ функциялар бирбирига нисбатан тескари функциялар эмас.

Агар $M_x(\eta) = f(x)$ ва $M_y(\xi) = g(y)$ функциялар чизиқли бўлса, регрессия чизиқлари тўғри чизиқлар бўлади. Бундай ҳолда ξ ва η тасодифий миқдорлар *чизиқли корреляцион боғланиш билан боғланган* дейилади. η нинг ξ га регрессия тўғри чизиғи тенгламаси қуйидагича кўринишда бўлишини кўрсатиш мумкин:

$$y - M(\eta) = R(\xi, \eta)\frac{\sigma(\eta)}{\sigma(\xi)}[x - M(\xi)], \tag{74}$$

бу ерда $y = M_x(\eta)$ тасодифий миқдор η нинг $\xi = x$ шарти остидаги шартли математик кутилмаси. ξ нинг η га регрессия тўғри чизиғи тенгламаси ҳам шунга ўхшаш ёзилади:

$$x - M(\xi) = R(\xi, \eta)\frac{\sigma(\xi)}{\sigma(\eta)}[y - M(\eta)], \tag{75}$$

бу ерда $x = M_y(\xi)$ тасодифий миқдор ξ нинг $\eta = y$ шарти остидаги шартли математик кутилмаси. Ушбу

$$R(\xi, \eta)\frac{\sigma(\eta)}{\sigma(\xi)} = \rho(\eta/\xi), \quad R(\xi, \eta)\frac{\sigma(\xi)}{\sigma(\eta)} = \rho(\xi/\eta) \tag{76}$$

миқдорлар мос равишда η нинг ξ га ва ξ нинг η га *регрессия коэффициентлари* дейилади.

(76) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$\rho(\eta/\xi)\cdot\rho(\xi/\eta) = R^2(\xi, \eta). \tag{77}$$

Бу тенглик ҳар иккала регрессия коэффициенти бир хил ишорага эга эканини кўрсатади. Агар улар мусбат (манфий) бўлса, у ҳолда аргумент ўсиши билан мос шартли математик кутилма ортади (камаяди).

Агар $R(\xi, \eta) = 0$ бўлса, у ҳолда (74) ва (75) тенгламалардан кўринишича, $y = M_x(\eta) = M(\eta)$ ва $x = M_y(\xi) = M(\xi)$ бўлади, яъни бу ҳолда шартли математик кутилмалар ўзгармас ҳамда ξ ва η тасодифий миқдорларнинг мос математик кутилмаларига тенг бўлади,

Изоҳ. Агар иккита тасодифий миқдор системаси нормал тақсимотга эга бўлса, бу миқдорлар чизиқли корреляцион боғланишда бўлишини кўрсатиш мумкин.

4. Тажриба натижаларига кўра чизиқли корреляция анализи. Математик статистиканинг масалаларидан бири тасодифий миқдорлар орасидаги корреляцион боғланишни текширишдан иборат. n та тажриба ўтказилган бўлсин ва уларнинг натижасида (ξ, η) системанинг қуйидаги қийматларини ҳосил қилган бўлайлик:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_n, y_n).$$

$M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$ ва $D(\eta)$ нинг тақрибий қийматлари учун уларнинг танланма қийматлари $\overline{x}, \overline{y}, \overline{s}_1^2, \overline{s}_2^2$ олинади [(66) ва (67) формулага қаранг]:

$$M(\xi) \approx \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad M(\eta) \approx \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \tag{78}$$

$$D(\xi) \approx \overline{s}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}, \qquad D(\eta) \approx \overline{s}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}. \tag{79}$$

Корреляциянинг танланма коэффициенти деб ушбу

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(n-1)\,\overline{s}_1\,\overline{s}_2} \tag{80}$$

муносабат билан аниқланувчи $\overline{R}$ сонга айтилади.

Бу $\overline{R}$ коэффициент корреляция коэффициенти $R(\xi, \eta)$ га эҳтимол бўйича яқинлашишини кўрсатиш мумкин.

(76) муносабатларда $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$ ва $R(\xi, \eta)$ ни уларнинг танлама қийматлари $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$ ва $\overline{R}$ билан алмаштириб [(79),(80) формулаларга қаранг], регрессия коэффициентларининг тақрибий қийматларини ҳосил қиламиз:

$$\rho(\eta/\xi) \approx \overline{R}\frac{\overline{s}_2}{\overline{s}_1}; \quad \rho(\xi/\eta) = \overline{R}\frac{\overline{s}_1}{\overline{s}_2}. \tag{81}$$

(74) ва (75) тенгламаларга регрессия коэффициентларининг тақрибий қийматларини қўйиб ҳамда (78) ва (81) муносабатлардан фойдаланиб, регрессияларнинг эмпирик тўғри чизиқлари тенгламаларини ҳосил қиламиз:

η нинг ξ га:

$$y - \overline{y} = \overline{R}\frac{\overline{s}_2}{\overline{s}_1}(x - \overline{x}); \tag{82}$$

ξ нинг η га:

$$x - \overline{x} = \overline{R}\frac{\overline{s}_1}{\overline{s}_2}(y - \overline{y}). \tag{83}$$

Тажрибалар сони катта бўлганда $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{s}$, $\overline{s}_2$ ва корреляция коэффициенти $\overline{R}$ нинг қийматларини ҳисоблашни соддалаштириш учун қуйидагича йўл тутамиз (9-§, 2-пункт, 2 ва 3-изоҳларга қаранг).

ξ ва η тасодифий миқдорларнинг кузатилаётган қийматлари ўзгариш диапазонларини мос равишда

$$]X_0, X_1[,\ ]X_1, X_2[,\ \ldots,\ ]X_{i-1}, X_i[,\ \ldots,\ ]X_{k-1}, X_k[$$

ва

$$]Y_0, Y_1[,\ ]Y_1, Y_2[,\ \ldots,\ ]Y_{j-1}, Y_j[,\ \ldots,\ ]Y_{s-1}, Y_s[$$

интервалларга ажратамиз. $\xi(\eta)$ нинг i-(j-) интервалга тушган ҳар бир кузатилаётган қийматини бу интервалнинг ўртаси $c_i(d_j)$ га тақрибан тенг деб ҳисоблаймиз. $m_i'(m_j'')$ энди $\xi(\eta)$ нинг юқоридаги i-(j-) интервалга тушган қийматлари сони x_0 ва y_0 эса ихтиёрий сонлар бўлиб, улар ξ ва η нинг қийматлари ўзгарадиган диапазонларнинг ўрталарига яқин бўлсин. $u_i = c_i - x_0$ ва $v_j = d_j - y_0$ деб фараз қилиб ва (70), (71) формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\overline{x} \approx \nu_1' + x_0, \qquad \overline{s}_1^2 \approx \nu_2' - \frac{\nu_1'^2 n}{n-1},$$

$$\overline{y} \approx \nu_1'' + y_0, \qquad \overline{s}_2^2 \approx \nu_2'' - \frac{\nu_1''^2 n}{n-1} \qquad (84)$$

бу ерда

$$\nu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i' \cdot u_i}{n}, \qquad \nu_1'' = \frac{\sum_{j=1}^{s} m_j'' \cdot v_j}{n},$$

$$\nu_2' = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i' u_i^2}{n-1}, \qquad \nu_2'' = \frac{\sum_{j=1}^{s} m_j'' v_j^2}{n-1}.$$

Корреляциянинг танлама коэффициенти R ни (80) формула бўйича ҳисоблаш учун дастлаб $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ ифодани янги $u_i = c_i - x_0$ ва $v_j = d_j - y_0$ ўзгарувчиларда ёзамиз. m_{ij} орқали (ξ, η) жуфтларнинг кузатилаётган қийматлари ичидан ξ қийматлари i- интервал $]X_{i-1}, X_i[$ га, η нинг қийматлари эса j- интервал $]Y_{j-1}, Y_j[$ га тушганларининг сонини белгилаймиз. ξ ва η нинг ҳар бир шундай қийматларини $]X_{i-1}, X_i[$ ва $]Y_{j-1}, Y_j[$ интервалларнинг мос ўрталари c_i ва d_j билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \approx \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=k \\ j=s}} m_{ij} (c_i - \overline{x})(d_j - \overline{y}),$$

бу ерда тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди барча мумкин бўлган (i, j) сонлар жуфтлари бўйича олинган, шу билан бирга i бунда 1 дан k гача, j эса 1 дан s гача қийматларни қабул қилади. Шакл алмаштиришлардан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \approx \sum_{i,j} m_{ij} u_i v_j - n\nu_1' \nu_1''.$$

Шундай қилиб, корреляциянинг танлама коэффициенти учун охирги ҳисоб формуласи қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i,j} m_{ij} u_i v_j - n\nu_1' \cdot \nu_1''}{(n-1)\overline{s}_1 \overline{s}_2}. \qquad (85)$$

Мисол. Қарағай танасининг диаметри (η) билан унинг баландлиги (ξ) орасидаги боғланишни аниқлаш учун 26 та қарағай текширилди. Қарағай баландлигининг кузатилган қийматлари 22, 5 м дан 28, 5 м гача оралиқда, танасининг диаметри эса 20 см дан 48 см гача оралиқда ўзгаради. Қарағай баландлиги ўзгарадиган диапазонни 1 м узунликдаги интервалларга, танасининг диаметри ўзгарадиган интервални

4 см узунликдаги интервалларга бўлиб, 311- бетда келтирилган жадвални ҳосил қиламиз. Бу жадвал корреляцион жадвал дейилади. Унинг ҳар бир катагида қарағайлар сони берилган бўлиб, уларнинг танасининг диаметри ва баландлиги кўрсатилган чегарада (оралиқларда) бўлади, m_{ij} сонлар. Статистик характеристикаларни ҳисоблашда берилган интервалга тушган барча қарағайлар баландликларини бу интервал ўртаси c_i га, танасининг диаметрини эса мос интервалнинг ўртаси d_j га тенг деб оламиз. Танланма ўрта қийматларни, дисперсияларни ва корреляция коэффициентини ҳисоблашни (84) ва (85) формулалар бўйича бажарамиз, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{s}_1$ ва $\overline{s}_2$ ни $x_0 = 25$, $y_0 = 34$, яъни $u_i = c_i - 25$, $v_j = d_j - 34$ деб иккита қўшимча жадвал тузамиз.

Интервал номери	Баландлик интервали ўртаси, c_i	u_i	m_i'	u_i^2	$m_i' u_i$	$m_i' u_i^2$
1	23	2	2	4	—4	8
2	24	-1	4	1	—4	4
3	25	0	6	0	0	0
4	26	1	6	1	6	6
5	27	2	5	4	10	20
6	28	3	3	9	9	27
Σ			26		17	65

Интервал номери	Диаметр интервали ўртаси d_j	v_j	m_j''	v_j^2	$m_j'' v_j$	$m'' v_j^2$
1	22	—12	2	144	—24	288
2	26	—8	5	64	—40	320
3	30	—4	5	16	—20	80
4	34	0	3	0	0	0
5	38	4	4	16	16	64
6	42	8	5	64	40	320
7	46	12	2	144	24	288
Σ			26		—4	1360

Биринчи жадвалдан қарағай баландлиги ξ учун қуйидагини топамиз:

$$\nu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i' u_i}{n} = \frac{17}{26} \approx 0{,}65; \quad \nu_2' = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i' u_i^2}{n-1} = \frac{65}{25} \approx 2{,}60;$$

$$\overline{x} = \nu_1' + x_0 = 0{,}65 + 25 = 25{,}65;$$

$$\overline{s}_1^2 = \nu_2' - \frac{\nu_1'^2 \cdot n}{n-1} = 2{,}60 - \frac{(0{,}65)^2 \cdot 26}{25} \approx 2{,}16; \quad \overline{s}_1 = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47.$$

Иккинчи жадвалдан қарағай танасининг диаметри η учун топамиз:

$$\nu_1'' = \frac{\sum_{j=1}^{7} m_j'' v_j}{n} = \frac{-4}{26} \approx -0{,}15; \quad \nu_2'' = \frac{\sum_{j=1}^{7} m_j'' v_j^2}{n-1} = \frac{1360}{25} = 54{,}4;$$

$$\overline{y} \approx v_1'' + y_0 = -0{,}15 + 34 = 33{,}85;$$

$$\overline{s}_2^{\,2} = v_2'' - \frac{v_1''^2 \cdot n}{n-1} = 54{,}40 - 0{,}02 \approx 54{,}38; \quad \overline{s}_2 = \sqrt{54{,}38} \approx 7{,}38.$$

$\sum\limits_{i,j} m_{ij} u_i v_j$ ни ҳисоблаш учун янги жадвални тузамиз. Унинг ҳар бир катагининг юқорисидаги ўнг бурчакда бир хил u_i, v_j қийматга эга бўлган қарағайлар сони m_{ij} кўрсатилган, пастда чап бурчакда эса $m_{ij} u_i v_j$ кўпайтма келтирилган. Охирги устун ўзгармас j да барча $m_{ij} u_i v_j$ ларнинг йиғиндисидан иборат. Жадвалдан кўринишича, $\sum\limits_{i,j} m_{ij} u_i v_j = 204$.

v_j \ u_i	−2	−1	0	1	2	3	Σ
−12	48 $\boxed{2}$						48
−8		16 $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$	16 $\boxed{2}$			0
−4		8 $\boxed{2}$	0 $\boxed{2}$		−8 $\boxed{1}$		0
0			0 $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$			0
4			0 $\boxed{1}$	4 $\boxed{1}$	16 $\boxed{2}$		20
8				16 $\boxed{2}$		72 $\boxed{3}$	88
12					48 $\boxed{2}$		48
							204

(85) формуладан фойдаланиб, корреляциянинг танланма коэффициентини топамиз:

$$\overline{R} = \frac{\sum\limits_{i,j} m_{ij} u_i v_j - n v_1' v_1''}{(n-1)\,\overline{s}_1\,\overline{s}_2} = \frac{204 - 26 \cdot 0{,}65 \cdot (-0{,}15)}{25 \cdot 1{,}47 \cdot 7{,}38} \approx \frac{206{,}54}{271{,}22} \approx 0{,}76,$$

(81) формулалар бўйича регрессия коэффициентларининг қийматларини топамиз:

$$\rho(\eta/\xi) = R(\xi/\eta)\frac{\sigma(\eta)}{\sigma(\xi)} \approx \overline{R}\frac{\overline{s}_2}{\overline{s}_1} = 0{,}76\frac{7{,}38}{1{,}47} \approx 3{,}81;$$

$$\rho(\xi/\eta) = R(\xi, \eta)\frac{\sigma(\xi)}{\sigma(\eta)} \approx \overline{R}\frac{\overline{s}_1}{\overline{s}_2} = 0{,}76\frac{1{,}47}{7{,}38} \approx 0{,}15.$$

(82) ва (83) формулалар бўйича регрессия тўғри чизиқларининг эмпирик тенгламаларини топамиз. η нинг ξ га регрессия тўғри чизиғи тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$y - 33{,}85 = 3{,}81\,(x - 25{,}65) \text{ ёки } y = 3{,}81x - 63{,}88.$$

Бу тенглама қарағай танаси диаметрининг ўртача қиймати билан унинг узунлиги орасидаги боғланишни беради.

ξ нинг η га регрессия тўғри чизиғи қуйидаги кўринишга эга:

$$x - 25{,}65 = 0{,}15\,(y - 33{,}85) \quad \text{ёки} \quad x = 0{,}15y + 21{,}57.$$

Кейинги тенглама дарахт танаси узунлигининг ўртача қиймати билан унинг диаметри орасидаги боғланишни беради.

XIV БОБ

ОПЕРАЦИОН ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Операцион ҳисоб амалий математик анализ методларидан бири ҳисобланади. Унинг ёрдамида кўп ҳолларда механика, электроника, автоматика ҳамда фан ва техниканинг бошқа соҳаларида учрайдиган масалаларни ечиш соддалашади. Операцион ҳисоб автоматик системаларни расчёт қилиш ва лойиҳалашга доир бир қатор инженерлик методларининг назарий асосини ташкил этади.

Мазкур бобда операцион ҳисобнинг баъзи тушунчаларини ва унинг чизиқли дифференциал тенгламаларни ечишга татбиқини қараб чиқамиз.

1-§. ОРИГИНАЛ ВА ТАСВИРЛАР

1. Асосий таърифлар. Бутун сон ўқида аниқланган ва қуйидаги хоссаларга эга бўлган $f(t)$ функцияни қараймиз:

1°. $f(t)$ функция Ot ўқнинг исталган чекли интервалида ё узлуксиз ёки чекли сондаги I тур узилиш нуқталарига эга;

2°. $t < 0$ да $f(t) \equiv 0$;

3°. Шундай $M > 0$ ва $s_0 \geqslant 0$ сонлар мавжудки, барча t лар учун: $|f(t)| < Me^{s_0 t}$.

2° шарт физика ва техниканинг кўп масалаларида t аргумент вақт сифатида қаралиш муносабати билан киритилади. Шунинг учун $f(t)$ функция вақтнинг бирор бошланғич пайтигача (уни ҳар доим нолга тенг деб олиш мумкин) ўзини қандай тутиши аҳамиятга эга эмас.

3° шарт $t \to \infty$ да* $f(t)$ функциянинг ўсиш характерини чеклайди ва бу билан келгусида учрайдиган баъзи хосмас интегралларнинг мавжудлигини таъминлайди. У $f(t)$ функция $t \to \infty$ да кўрсаткичли функциядан секинроқ (тез эмас) ўсишини билдиради. Хусусан, 3° шартни, масалан, исталган чегараланган функция қаноатлантиради (бундай ҳолда $s_0 = 0$ экани равшан), шунингдек, уни t^k $(k > 0)$ даражали функция ҳам қаноатлантиради. s_0 сони *ўсиш кўрсаткичи* дейилади.

Ҳар бир $f(t)$ функцияга $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt$ (1) деб фараз қилиб*,

---

* Келгусида, қисқалик учун $+\infty$ ўрнига ∞ ни ёзамиз.

** (1) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-(s+i\tau)}\,dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,e^{-i\tau t}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-st}(\cos\tau t -$$

$$- i\sin\tau t)\,dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-st}\cos\tau t\,dt - i\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-st}\sin\tau t\,dt$$

(бунда 182-бетдаги Эйлер формуласидан фойдаландик).

$p = s + i\tau\, (s \geqslant s_0)$ комплекс ўзгарувчининг $F(p)$ функциясини мос келтирамиз. $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг *тасвири*, юқоридаги учта шартни қаноатлантирувчи $f(t)$ функция эса *оригинал* дейилади.

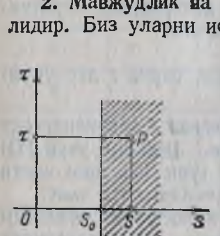
M — барча $f(t)$ оригиналлар тўплами, N эса уларга мос тасвирлар тўплами бўлсин. (1) формула M тўпламини N тўпламига акслантиради. Бу акслантириш *Лаплас оператори* ёки *акслантириш* дейилади.

Агар $F(p)$ $f(t)$ функциянинг тасвири бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \text{ ёки } L = \{f(t)\} = F(p).$$

Изоҳ. Агар $f(t)$ функция юқорида келтирилган шартлардан ҳеч бўлмаганда биттасини қаноатлантирмаса, у оригинал бўлмайди. Масалан, $\operatorname{tg} t$ ва $1/t$ функциялар оригинал бўла олмайди, чунки улар II тур узилиш нуқталарига эга. e^{t^2} функция ҳам оригинал бўла олмайди, чунки у 3° шартни қаноатлантирмайди. У $Me^{s_0 t}$ функциядан кўра тезроқ ўсади (M ва s_0 лар ҳар қандай бўлганда ҳам).

2. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Қуйидаги теоремалар ўринлидир. Биз уларни исботсиз келтирамиз.



100- расм

1-теорема (тасвирнинг мавжудлик теоремаси). *Ҳар қандай $f(t)$ оригинал учун $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (бу ерда s_0 — оригиналнинг ўсиш кўрсаткичи) ярим текисликда аниқланган $F(p)$ тасвир мавжуддир (100-расм). Бу ярим текисликнинг ҳар бир нуқтасида $F(p)$ функция исталган тартибли ҳосилага эга. Бундан ташқари, агар $\operatorname{Re} p = s \to \infty$ бўлса, у ҳолда тасвир $F(p) \to 0$.*

2-теорема (оригиналнинг ягоналик теоремаси). *Агар $F(p)$ иккита $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ оригиналнинг тасвири бўлса, у ҳолда бу оригиналлар улар узлуксиз бўлган барча нуқталарда ўзаро тенг бўладилар.*

Пировардида, тасвир чизиқлилик хоссасига эга эканини қайд қиламиз. Бу қуйидагини билдиради:

1) оригиналнинг сонга кўпайтмасининг тасвири тасвирнинг бу сонга кўпайтмасига тенг, яъни агар $f(t) \xrightarrow{L} F(p)$ бўлса, у ҳолда $cf(t) \xrightarrow{L} cF(p)$;

2) бир нечта оригинал алгебраик йиғиндисининг тасвири бу оригиналлар тасвирларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни агар, масалан, $f_1(t) \xrightarrow{L} F_1(p)$, $f_2(t) \xrightarrow{L} F_2(p)$ бўлса, у ҳолда

$$f_1(t) \pm f_2(t) \xrightarrow{L} F_1(p) \pm F(p).$$

Бу хоссалар интегралнинг чизиқлилигидан келиб чиқади.

Масалан,

$$f_1(t) \pm f_2(t) \xrightarrow{L} \int_0^\infty [f_1(t) \pm f_2(t)]\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt} dt \pm$$

$$\pm \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt = F_1(p) \pm F_2(p).$$

2-§. БАЪЗИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ТАСВИРЛАРИ

Келгусида бизга қуйидаги лемма зарур бўлади.

Лемма. Агар $z = x + iy$ комплекс сон учун унинг ҳақиқий қисми $\operatorname{Re} z = x > 0$ ва b ҳақиқий ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{b \to \infty} e^{-zb} = 0$ бўлади.

Исботи. Эйлер формуласига кўра қуйидагига эгамиз:

$$e^{-zb} = e^{-(x+iy)b} = e^{-xb}\, e^{-iyb} = e^{-xb} (\cos yb - i \sin yb).$$

Демак,

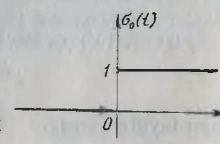
$$\lim_{b \to \infty} e^{-zb} = \lim_{b \to \infty} e^{-xb} (\cos yb - i \sin yb) = \lim_{b \to \infty} e^{-xb} \cos yb -$$

$$- i \lim_{b \to \infty} e^{-xb} \sin yb = 0,$$

чунки $x > 0$ да $\lim\limits_{b \to +\infty} e^{-xb} = 0$.

1. Бирлик сакраш ва унинг тасвири. Қуйидагича аниқланган функцияни қараймиз:

$$f(t) = \begin{cases} \text{агар } t \geqslant 0 \text{ бўлса, } 1, \\ \text{агар } t < 0 \text{ бўлса, } 0. \end{cases}$$



101- расм

Унинг графиги 101- расмда тасвирланган. Бу функция *Хевисайднинг* бирлик* функцияси ёки *бирлик сакраш* дейилади. Уни $\sigma_0(t)$ орқали белгилашга келишамиз.

$f(t)$ функциянинг тасвирини топамиз. (1) формулани татбиқ қиламиз, унда $f(t) = 1$ деб, топамиз**

$$\sigma_0(t) \xrightarrow{L} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^b =$$

$$= -\frac{1}{p} (\lim_{b \to \infty} e^{-pb} - 1) = \frac{1}{p}$$

* О. Хевисайд (1850 — 1925) — инглиз физиги.

** $\int_0^b f(t)\, e^{-pt} dt$ интеграл учун Ньютон — Лейбниц формуласи ўринли эканини исбот қилиш мумкин.

($\mathrm{Re}\,p = s > s_0 > 0$ бўлгани учун леммага кўра $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-pb} = 0$). Шундай қилиб,

$$\sigma_0(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p}. \tag{2}$$

2. Кўрсаткичли функциянинг тасвири. Ушбу функциянинг тасвирини топамиз:

$$f(t) = \begin{cases} \text{агар } t < 0 \text{ бўлса, } 0; \\ \text{агар } t \geqslant 0 \text{ бўлса, } e^{\alpha t}, \end{cases}$$

бу ерда α — комплекс сон. (1) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$f(t) \xrightarrow{L} \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{\lim\limits_{b\to\infty} [e^{-(p-\alpha)t}]_0^b}{-(p-\alpha)} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-(p-\alpha)b}}{-(p-\alpha)} + \frac{1}{p-\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{p-\alpha},$$

бу ерда $\mathrm{Re}\,(p-\alpha) > 0$ ёки $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$ деб фараз қиламиз, чунки бу шартда леммага асосан: $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-(p-\alpha)b} = 0$. Шундай қилиб, берилган функция учун қуйидагига эгамиз:

$$f(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p-\alpha}, \quad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha. \tag{3'}$$

Келгусида оригиналнинг $t \geqslant 0$ да эга бўлган ифодасинигина қолдириб, соддароқ ифодасидан (ёзилишидан) фойдаланамиз.

Хусусан, (3′) формулани қисқача қуйидагича ёзамиз:

$$e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{1}{p-\alpha}, \quad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha. \tag{3}$$

Худди шунга ўхшаш

$$e^{-\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{1}{p+\alpha}, \quad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,(-\alpha). \tag{4}$$

3. $\sin\omega t$ ва $\cos\omega t$ функцияларнинг тасвирлари. XI бобдаги (93) формуладан фойдаланиб $\sin\omega t$ ва $\cos\omega t$ (бу ерда ω ҳақиқий сон) функцияларни қуйидагича ёзамиз:

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

(3) ва (4) формулалар ва тасвирнинг чизиқлилик хоссасига асосан, топамиз:

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \ \mathrm{Re}\,p > 0.$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \ \mathrm{Re}\,p > 0.$$

Шундай қилиб,

$$\sin\omega t \xrightarrow{L} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0, \tag{5}$$

$$\cos\omega t \xrightarrow{L} \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0. \tag{6}$$

4. $sh\,\omega t$ ва $ch\,\omega t$ гиперболик функцияларнинг тасвирлари. Бу функцияларнинг тасвирларини худди юқоридагидек топамиз:

$$sh\,\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \ \mathrm{Re}\,p > |\omega|,$$

$$ch\,\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2}, \ \mathrm{Re}\,p > |\omega|.$$

Шундай қилиб,

$$sh\,\omega t \xrightarrow{L} \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > |\omega|, \tag{7}$$

$$ch\,\omega t \xrightarrow{L} \frac{p}{p^2-\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > |\omega|. \tag{8}$$

5. Даражали функция t^n нинг тасвири. (1) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$t^n \xrightarrow{L} \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt.$$

n марта бўлаклаб интеграллаб ва $\mathrm{Re}\,p > 0$ бўлганда $\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{-pt} = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

Шундай қилиб,

$$t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0. \tag{9}$$

1- мисол. $f(t) = 5\sin 4t + 3\cos 2t$ функциянинг тасвирини топинг.

Ечилиши. Тасвирнинг чизиқлилик хоссаси ва (5) ҳамда (6) формулалар асосида топамиз:

$$f(t) \xrightarrow{L} 5\frac{4}{p^2+4^2} + 3\frac{p}{p^2+2^2} = \frac{20}{p^2+16} + \frac{3P}{p^2+4}.$$

2- мисол. Тасвири $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^2+4}$ кўринишга эга бўлган оригинални топинг.

Ечилиши.

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+4} = 2\frac{p}{p^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}$$

бўлгани учун (5) ва (6) формулаларга ҳамда чизиқлилик хоссасига асосан топамиз:

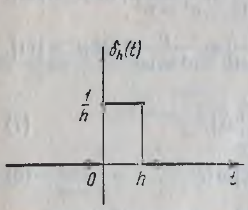
$$f(t) = 2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t.$$

3- мисол. $f(t)=t^3-5t^2+2t+6$ **функциянинг тасвирини топинг.**
Ечилиши. (2) ва (9) формулаларга ҳамда чизиқлилик хоссасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(t)\xrightarrow{L}\frac{3!}{p^{3+1}}-5\frac{2!}{p^{2+1}}+2\frac{1!}{p^{1+1}}+6\frac{1}{p}=\frac{6}{p^4}-\frac{10}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\frac{6}{p}.$$

6. Диракнинг импульс функцияси ва унинг тасвири. Қуйидагича аниқланган $\delta_h(t)$ функцияни қараймиз:

$$\delta_h(t)=\begin{cases}\text{агар } t<0 \text{ бўлса, } 0;\\ \text{агар } 0\leqslant t\leqslant h \text{ бўлса, } 1/h;\\ \text{агар } t>h \text{ бўлса, } 0.\end{cases}$$



102- расм

$\delta_h(t)$ нинг графиги 102-расмда тасвирланган. Физика нуқтаи назаридан бу функцияни t вақт давомида таъсир этувчи $1/h$ куч катталиги сифатида талқин этиш мумкин. Бу кучнинг импульси исталган h да бирга тенг.

*Дирак*нинг $\delta(t)$ импульс функциясини $\delta_h(t)$* функциянинг $h\to 0$ даги лимити каби аниқлаймиз:

$$\delta(t)=\lim_{h\to\infty}\delta_h(t).$$

Бу функцияни $t=0$ да чексиз катта, t нинг барча қолган қийматларида нолга тенг бўлган куч сифатида талқин этиш мумкин. Бу кучнинг импульсини ҳам бирга тенг деб оламиз.

$\delta(t)$ импульс функциянинг тасвирини $\delta_h(t)$ функция тасвирининг $h\to 0$ даги лимити сифатида аниқлаймиз:

(1) формула бўйича $\delta_h(t)$ функция тасвирини топамиз:

$$\delta_h(t)\xrightarrow{L}\int_0^\infty \delta_h(t)e^{-pt}\,dt=-\frac{1}{ph}e^{-pt}\Big|_0^h=\frac{1}{ph}(1-e^{-ph}),$$

чунки $t>h$ да $\delta_h(t)\equiv 0$. Шунинг учун

$$\delta(t)\xrightarrow{L}\lim_{h\to\infty}\frac{1}{ph}(1-e^{-ph})=1,$$

чунки Лопиталь қоидасини татбиқ қилиб

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{p^h}=\lim_{h\to 0}\frac{pe^{-ph}}{p}=\lim_{h\to 0}e^{-hp}=1$$

ни топамиз.

Шундай қилиб, Диракнинг импульс функцияси тасвири бирга тенг:

$$\delta(t)\xrightarrow{L}1 \tag{10}$$

$F(p)=1$ функцияни шартли маънода тасвир деб ҳисоблаш кераклигини қайд қиламиз, чунки $F(p)$ функция $p\to\infty$ да нолга интилмайди

---

* П. Дирак (1902 й. да туғилган) — инглиз физиги.

(1-§, 1-теоремага қаранг). Бироқ, бу тасвирнинг ва $\delta(t)$ импульс функциянинг киритилиши оний импульс характерига эга бўлган миқдорлар қараладиган масалаларни ечишда фойдали бўлади.

3- §. ОПЕРАЦИОН ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ ТЕОРЕМАЛАРИ

1. Ўхшашлик теоремаси. *$f(t)\xrightarrow{L}F(p)$ бўлсин. У ҳолда $f(\alpha t)\xrightarrow{L}\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, бу ерда $\alpha>0$ бўлади.*

Исботи. Тасвирнинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$f(\alpha t)\xrightarrow{L}\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt.$$

Бу интегралда $\alpha t=z$ деб, ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $dz=\alpha\,dt$. Демак,

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty f(z)e^{-pz/\alpha}\frac{dz}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Шундай қилиб,

$$f(\alpha t)\xrightarrow{L}\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{11}$$

(11) муносабат оригиналнинг эркли ўзгарувчисини мусбат сонга кўпайтирилса, унинг тасвири ва тасвирнинг эркли ўзгарувчиси бу сонга бўлинишини кўрсатади. Ўхшашлик теоремаси ана шундан иборат.

2. Силжитиш теоремаси. *Агар $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$ бўлса, $e^{-\alpha t}f(t)\xrightarrow{L}F(p+\alpha)$ бўлади.* Бунда α — ҳақиқий сон ва $\mathrm{Re}(p+\alpha)>s_0$ деб фараз қилинади.

Исботи. $e^{-\alpha t}f(t)$ функциянинг тасвирини топамиз:

$$e^{-\alpha t}f(t)\xrightarrow{L}\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p+\alpha)t}\,dt=F(p+\alpha).$$

Шундай қилиб, агар $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$ бўлса, $e^{-\alpha t}f(t)\xrightarrow{L}F(p+\alpha)$.

Бу теорема ва (5) ҳамда (6) теорема асосида топамиз:

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t\xrightarrow{L}\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},\quad e^{-\alpha t}\cos\omega t\xrightarrow{L}\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}. \tag{12}$$

1- мисол. $e^{-2t}(\sin t+3\cos t)$ **функциянинг тасвирини топинг.**
Ечилиши. Чизиқлилик хоссасидан ва (12) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$e^{-2t}(\sin t+3\cos t)\xrightarrow{L}\frac{1}{(p+2)^2+1}+3\frac{p+2}{(p+2)^2+1}=\frac{3p+7}{p^2+4p+6}.$$

2- мисол. Ушбу $\frac{2p+1}{p^2+2p+2}$ **тасвирига кўра оригинални топинг.**

Ечилиши. Чизиқлилик хоссасидан ва (12) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$\frac{2p+1}{p^2+2p+2}=\frac{2(p+1)-1}{(p+1)^2+1^2}=\frac{2(p+1)}{(p+1)^2+1^2}-\frac{1}{(p+1)^2+1^2}\xleftarrow{L}$$

$$\xleftarrow{L} 2e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=e^{-t}(2\cos t-\sin t).$$

$e^{-\alpha t}t^n$ функциянинг тасвирини топамиз. (9) формулага кўра $f(t)=t^n\xrightarrow{L}F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$. Силжитиш теоремасини қўлланиб, топамиз:

$$e^{-\alpha t}t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$$

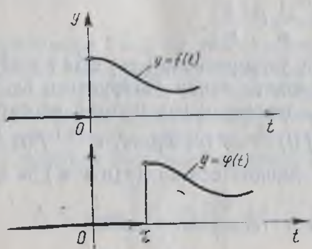
Бу формулада $-\alpha$ ни α га алмаштирамиз:

$$e^{\alpha t}t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}. \qquad (14)$$

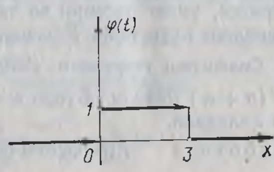
3. Кечикиш теоремаси. $f(t)$ оригинал бўлсин. Қуйидагича аниқланган $\varphi(t)$ функцияни қараймиз:

$$\varphi(t)=\begin{cases}\text{агар } t<\tau \text{ бўлса, } 0;\\ \text{агар } t\geqslant\tau \text{ бўлса. } f(t-\tau),\end{cases}$$

бу ерда τ мусбат сон.



103- расм



104- расм

$y=\varphi(t)$ функция графиги оригинал графиги $y=f(t)$ ни Ot ўқ бўйлаб τ катталикка суриш орқали ҳосил қилинади (103- расм).

Демак, агар $f(t)$ функция бирор жараённи тавсифлаётган бўлса, у ҳолда $\varphi(t)$ функция ўша жараённи τ га кечикиш билан тавсифлайди.

Оригиналнинг аргументи τ га кечикканда, бу оригиналнинг тасвиричи топамиз. Шу мақсадда қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. $\tau>0$ *ва* $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$ *бўлсин. У ҳолда* $f(t-\tau)\xrightarrow{L}e^{-p\tau}F(p)$ *бўлади.*

Исботи. Тавсирнинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$f(t-\tau)\xrightarrow{L}\int_0^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_{\tau}^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt,$$

чунки $t<\tau$ яъни $t-\tau<0$ учун $f(t-\tau)=0$. Кейинги интегралда $t-\tau=z$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $t=\tau+z$, $dt=dz$ ва

$$\int_{\tau}^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}f(z)e^{-p(\tau+z)}dz=\int_0^{\infty}f(z)e^{-pz}e^{-p\tau}dz=$$

$$=e^{-p\tau}\int_0^{\infty}f(z)e^{-pz}dz=e^{-p\tau}F(p).$$

Шундай қилиб,

$$f(t-\tau)\xrightarrow{L}e^{-p\tau}F(p).$$

1- мисол. Графиги 104- расмда келтирилган функциянинг тасвирини топинг.

Ечилиши. Бирлик $\delta_0(t)$ функция ёрдамида бу функцияни ягона аналитик ифода орқали ёзамиз:

$$\varphi(t)=\delta_0(t)-\delta_0(t-3).$$

$\delta_0(t)\xrightarrow{L}1/p$ бўлгани учун, кечикиш теоремасига кўра:

$$\delta_0(t)-\delta_0(t-3)\xrightarrow{L}\frac{1}{p}e^{-3p}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(1-e^{-3p}\right).$$

2- мисол. $(t-2)^3$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечилиши. Бу ерда $f(t)=t^3$, $\tau=2$ экани маълум. $t^3\xrightarrow{L}\frac{3!}{p^4}$ бўлгани учун кечикиш теоремасига кўра қуйидагига эгамиз:

$$(t-2)^3\xrightarrow{L}\frac{6e^{-2p}}{p^4}.$$

4- §. ОРИГИНАЛЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ВА ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Оригиналларни дифференциаллаш. $F(p)$ ушбу $f(t)$ оригиналнинг тасвири бўлсин. $f'(t)$ ҳосиланинг тасвирини топиш талаб қилинади.

Теорема. *Агар* $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$ *ва* $f'(t)$ *оригинал бўлса, у ҳолда*

$$f'(t)\xrightarrow{L}pF(p)-f(0). \qquad (15)$$

Исботи. Тасвирини аниқловчи формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$f'(t)\xrightarrow{L}\int_0^{\infty}f'(t)e^{-pt}dt.$$

Ҳосил қилинган интегрални бўлаклаб интеграллаймиз: $u=e^{-pt}$, $dv=f'(t)dt$ деймиз, бу ердан $du=-pe^{-pt}dt$, $v=f(t)$. У ҳолда:

$$\int_0^{\infty}f'(t)e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}f'(t)e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\Big[f(t)e^{-pt}\Big|_0^b+$$

$$+p\int_0^{b}f(t)e^{-pt}dt\Big]=\lim_{b\to\infty}\Big[f(b)e^{-pb}-f(0)+p\int_0^{b}f(t)e^{-pt}dt\Big]=$$

$$=p\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt-f(0).$$

Чунки* $\lim\limits_{b\to\infty} f(b)\,e^{-pb} = 0$. Бироқ $\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = F(p)$.

Демак,

$$f'(t) \xrightarrow{L} p\,F(p) - f(0).$$

Хусусан, агар $f(0) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$f'(t) \xrightarrow{L} p\,F(p). \tag{16}$$

(15) формулани иккинчи ҳосила $f''(t)$ га қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f''(t) \xrightarrow{L} p\,F_1(p) - f'(0).$$

$F_1(p)$ бу ерда $f'(t)$ нинг тасвири. Бироқ (15) формулага кўра $F_1(p) = p\,F(p) - f(0)$, шунинг учун

$$f''(t) \xrightarrow{L} p\,[F(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0). \tag{17}$$

Худди шунга ўхшаш

$$f'''(t) \xrightarrow{L} p\,[p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0)] - f''(0) = p^3 F(p) - p^2 f(0) -$$

$$- p\,f'(0) - f''(0). \tag{18}$$

(15) формулани $n-1$ марта татбиқ қилиб, қуйидагига эга бўламиз**

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{L} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p\,f^{(n-2)}(0) -$$

$$- f^{(n-1)}(0). \tag{19}$$

Хусусан, агар $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ бўлса, у ҳолда

---

*Ҳақиқатан ҳам, $|f(b)\,e^{-pb}| = |f(b)| \cdot |e^{-pb}| = |f(b)| \cdot |e^{-(s+i\tau)b}|$. Энди $e^{-(s+i\tau)b} = e^{-sb}\,e^{-i\tau b} = e^{-sb}(\cos\tau b - i\sin\tau b)$ бўлгани учун $|e^{-(s+i\tau)b}| = e^{-sb}$ га эгамиз. Оригиналнинг 3^0 хоссасига кўра: $|f(b)| < M\,e^{s_0 b}$, демак, $|f(b)\,e^{-pb}| < M\,e^{s_0 b}\,e^{-sb} = M\,e^{-(s-s_0)b}$. Бироқ тасвирнинг мавжудлик теоремасига кўра $F(p)$ тасвир $\mathrm{Re}\,p = s > s_0$ учун, яъни $s - s_0 > 0$ учун мавжуд. Шунинг учун $b \to \infty$ да $M\,e^{-(s-s_0)b} \to 0$. Демак, $\lim\limits_{b\to\infty} f(b)\,e^{-pb} = 0$.

(17) — (19) формулаларни келтириб чиқаришда $f''(t)$, $f'''(t)$, $\ldots$, $f^{(n)}(t)$ ҳосилалар оригинал деб фараз қилинади.

$$\left.\begin{aligned} &f'(t) \xrightarrow{L} p\,F(p), \\ &f''(t) \xrightarrow{L} p^2 F(p), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &f^{(n)}(t) \xrightarrow{L} p^n F(p). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Мавжудлик теоремасида кўрсатилишича (1-§ га қаранг), $p \to \infty$ да ($\mathrm{Re}\,p = s \to \infty$ шартда) ҳар қандай оригиналнинг тасвири нолга интилади. Шунинг учун агар $f'(t) \xrightarrow{L} F_1(p)$ бўлса, у ҳолда $p \to \infty$ да $F_1(p) \to 0$. Бироқ (15) формулага кўра $F_1(p) = p\,F(p) - f(0)$. Демак, $p \to \infty$ да қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{p\to\infty} F_1(p) = \lim_{p\to\infty} [p\,F(p) - f(0)] = 0.$$

Шундай қилиб,

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p). \tag{21}$$

Бу формула $f(t)$ оригиналнинг бошланғич қийматини оригинални ҳисоблаб ўтирмасдан унинг $F(p)$ тасвири бўйича топишга имкон беради.

Мисол. $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ тасвир берилган. Оригиналнинг бошланғич қиймати $f(0)$ ни топинг.

Ечилиши. (21) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{p}{p^2+1} = 1.$$

(6) формулага кўра $\dfrac{p}{p^2+1}$ тасвирга $\cos t$ оригинал мос келишини (у $t = 0$ да бирга тенг) қайд қиламиз.

(20) формула, агар $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ бўлса, оригинални ҳар гал дифференциаллашга тасвирни p га кўпайтириш мос келишини кўрсатади.

2.° Оригиналларни интеграллаш. $F(p)$ $f(t)$ оригиналнинг тасвири бўлсин. Оригиналдан олинган интегралнинг тасвирини топиш талаб қилинади.

Теорема. *Агар $f(t) \xrightarrow{L} F(p)$ бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_0^t f(x)\,dx \xrightarrow{L} \frac{F(p)}{p}.$$

Исботи. $g(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$ функция оригинал эканини кўрсатиш мумкин. Унинг тасвири $\Phi(p)$ бўлсин:

$$g(t) \xrightarrow{L} \Phi(p). \tag{22}$$

$g(0)=\int\limits_0^0 f(x)\,dx=0$ бўлгани учун (20) формулаларнинг биринчисига кўра қуйидагига эгамиз:

$$g'(t)\xrightarrow{L}p\Phi(p).$$

Бироқ

$$g'(t)=\frac{d\int\limits_0^t f(x)\,dx}{dt}=f(t)\xrightarrow{L}F(p).$$

Демак, $F(p)=p\,\Phi(p)$. Бу ердан $\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}$, яъни

$$\int\limits_0^t f(x)\,dx\xrightarrow{L}\frac{F(p)}{p}.$$

(22) муносабат оригиналнинг интеграллаш операцияси тасвир устида алгебраик амал бажаришга, чунончи, уни p га бўлишга мос келишини билдиради.

5-§. ОРИГИНАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАСВИРЛАРИ ЖАДВАЛИ

Баъзи оригиналлар ва уларнинг тасвирлари жадвалини келтирамиз.

№	Оригинал $f(t)$	Тасвир $F(p)-\int\limits_э^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt$	Изоҳ
I	$\sigma_0(t)$	$\frac{1}{p}$	
II	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	
III	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	
IV	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
V	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	
VI	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	
VII	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	
VIII	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
IX	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
X	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	
XI	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	
XII	$e^{\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	
XIII	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$	формула исботсиз келтирилган
XIV	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	формула исботсиз келтирилган
XV	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}F(p/\alpha)$	ўхшашлик теоремаси
XVI	$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(p+\alpha)$	силжитиш теоремаси
XVII	$f'(t)$ $f''(t)$	$pF(p)-f(0)$ $p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$	оригиналнинг дифференциаллаш
XVIII	$\int\limits_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(p)}{p}$	оригиналнинг интеграллаш
XIX	$\delta(t)$	1	Дирак функцияси
XX	$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$	кечикиш теоремаси

Келтирилган жадвалдан фойдаланиб, унда келтирилган тасвир (оригинал) бўйича унинг оригиналини (тасвирини) топиш мумкин.

Шуни қайд қилиш керакки, агар тасвир тўғри рационал каср бўлса, у ҳолда мос оригинални топиш учун тасвирни энг содда касрлар йиғиндисига ёйиш (ажратиш) ва чизиқлилик хоссасини қўллаш керак.

Мисол. $F(p)=\frac{p^2+2p+2}{(p-2)^2(p+3)}$ тасвир берилган. Оригинални топинг.

Ечилиши. Берилган тўғри касрни энг содда касрларга ажратиб, топамиз (VII боб, 3-§, 8-пунктдаги 2-мисолга қаранг):

$$F(p)=\frac{p^2+2p+2}{(p-2)^2(p+3)}=\frac{4}{5(p-2)}+\frac{2}{(p-2)^2}+\frac{1}{5(p+3)}.$$

Жадвалдаги II XII ва III формулаларга кўра топамиз:

$\frac{1}{p-2}\xrightarrow{L}e^{2t}$, $\frac{1}{(p-2)^2}\xleftarrow{L}te^{2t}$, $\frac{1}{p+3}\xleftarrow{L}e^{-3t}$. Демак, чизиқлилик хоссасига кўра:

$$F(p)\xleftarrow{L}\frac{4}{5}e^{2t}+2te^{2t}+\frac{1}{5}e^{-3t}.$$

6-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

XII бобнинг 4- ва 5-§ ларида ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш методи баён қилинган эди.

Бу масаланинг Лаплас операторини қўлланишга асосланган анча содда ечиш методини кўрсатамиз.

Соддалик учун иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама билан чекланамиз. Шундай қилиб, ўзгармас коэффициентли чизиқли иккинчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \tag{23}$$

бу ерда a_1 ва a_2 — ҳақиқий сонлар. Бу тенгламанинг $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, бу ерда y_0 ва y_0' берилган сонлар, бошлангич шартларни қаноатлантирувчи $y(t)$ хусусий ечимини топиш талаб қилинади.

Изланаётган $y(t)$ ечим, унинг $y'(t)$, $y''(t)$ ҳосилалари, дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(t)$ оригиналлар бўлсин деб фараз қилайлик. $y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$, $f(t) \xrightarrow{L} F(p)$ деб белгилаб ва (15), (17) формулалар, шунингдек, бошланғич шартлардан фойдаланиб, $y'(t)$ ва $y''(t)$ тасвирларни топамиз:

$$y'(t) \xrightarrow{L} pY(p) - y_0, \quad y''(t) \xrightarrow{L} p^2 Y(p) - py_0 - y_0'.$$

Чизиқлилик хоссасига кўра (23) тенгламада тасвирларга ўтамиз:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) \xrightarrow{L} p^2 Y(p) - py_0 - y_0' + a_1 (pY(p) - y_0) + a_2 Y(p) = F(p)$$

ёки

$$(p^2 + a_1 p + a_2) Y(p) = F(p) + py_0 + y_0' + a_1 y_0. \tag{24}$$

(24) тенглама *ёрдамчи тенглама* ёки (23) дифференциал тенгламага мос *тасвирлардаги тенглама* дейилади. Шундай қилиб, $y(t)$ оригинал учун (23) дифференциал тенглама ўрнига унинг $Y(p)$ тасвири учун (24) чизиқли алгебраик тенглама ҳосил қилдик. (24) тенгламадан топамиз:

$$Y(p) = \frac{F(p) + p(y_0) + y_0' + a_1 y_0}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{25}$$

(25) формула (24) тенгламанинг *оператор ечими* деб аталувчи ечимини беради. Оригинал $y(t)$ учун (25) формула билан аниқланадиган $Y(p)$ функция тасвир бўлади. Ана шу $y(t)$ (23) дифференциал тенгламанинг изланаётган ечими бўлади.

1-мисол. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Ечилиши. Жадвалдаги (II) формула бўйича тенгламанинг ўнг томонининг тасвирини топамиз: $2e^{3t} \xrightarrow{L} \frac{2}{p-3}$. (25) формуладан фойдаланиб ва $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $y_0 = 1$, $y_0' = 3$ эканини эътиборга олиб, ечимнинг тасвирини ҳосил қиламиз:

$$Y(p) = \frac{\frac{2}{p-3} + p \cdot 1 + 3 + (-3) \cdot 1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{p-3}.$$

Энди жадвалдаги II формулага кўра оригинални топамиз, у берилган тенгламанинг изланаётган ечими бўлади: $y(t) = e^{3t}$.

2-мисол. $y'' + 4y = \sin t$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ бошлангич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Ечилиши. Жадвалдаги (IV) формула бўйича тенгламанинг ўнг томонининг тасвирини топамиз: $\sin t \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2+1}$. (25) формула бўйича ечимнинг тасвирини топамиз, бунда $y_0 = 1$, $y_0' = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 4$ эканини эътиборга оламиз:

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1} + p + 1}{p^2 + 4} = \frac{1 + (p+1)(p^2+1)}{(p^2+4)(p^2+1)} = \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Ҳосил қилинган ифодани ўзгартирамиз. $Y(p)$ ни энг содда касрларга ажратамиз, натижада

$$Y(p) = \frac{p + 2/3}{p^2 + 4} + \frac{1}{3(p^2+1)} \text{ ёки } Y(p) = \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3(p^2+4)} + \frac{1}{3(p^2+1)}.$$

Сўнгра, $\frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1} \xleftarrow{L} \frac{1}{3}\sin t$, $\frac{p}{p^2+4} \xleftarrow{L} \cos 2t$, $\frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4} \xleftarrow{L} \frac{1}{3}\sin 2t$ бўлгани учун: $y(t) = \frac{1}{3}\sin t + \cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t$.

7-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини операцион ҳисоб методи билан ечиш усули битта тенглама бўлган ҳолдаги кабидир.

Масалан, иккита номаълум $x(t)$ ва $y(t)$ функцияларга нисбатан биринчи тартибли ўзгармас коэффициентли иккита чизиқли тенглама системасини кўрайлик:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + a_{11} x(t) + a_{12} y(t) &= f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} + a_{21} x(t) + a_{22} y(t) &= f_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Бу системанинг $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш талаб қилинади.

Изланаётган $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар, уларнинг ҳосилалари ва ўнг томонлари $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ лар оригинал деб фараз қиламиз. Ушбу

$$x(t) \xrightarrow{L} X(p), \; y(t) \xrightarrow{L} Y(p), \; f_1(t) \xrightarrow{L} F_1(p),$$
$$f_2(t) \xleftarrow{L} F_2(p),$$

МУНДАРИЖА