

Н. С. ПИСКУНОВ

Дифференциал
ва интеграл
хисоб



Н. С. ПИСКУНОВ

517.2

Г147

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ

ОЛИЙ ТЕХНИКА ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

Биринчи том

БУСЧА ТЎҚҚИЗИНЧИ НАШРИГА МУВОФИҚЛАШТИ-
РИЛГАН ИККИНЧИ НАШРИ

Олий ва махсус ўрта таълим вазирлиги
томонидан олий техника ўқув юр்தларининг студент-
лари учун дарслик сифатида рухсат этилган.



ЎҚИТУВЧИ НАШРИЁТИ* ТОШКЕНТ — 1972

На узбекском языке

Николай Семенович Пискунов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

Для вузов, том I

Перевод с русского издания из-ва
„Наука“, Москва, 1970

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент — 1972

Таржимонлар:

Нишим Акбархужаев: кириш, I–IV боблар,
Анвар Исломов: V–X боблар (X бобдан 8- § гача),
Маҳкам Камолов: X–XII боблар (X бобда 9- § дан),

Махсус редактор *Ахмаджон Хамидов*

Нашриёт редактори *М. Одилов*

Бадний редактор *Е. И. Соин*

Техредактор *Э. В. Вильданова*

Корректор *Ж. Нуриддинова*

Теришга берилди 29/XII-1971 й. Босишга рухсат этилди. 1/IX-1972 й. Қогози 60×90^{1/16}. Физик. б. а. 31,5. Нашр а. 28,42. Тиражи 25000.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 364-68.
Баҳоси 80 т. Муқоваси 10 т.

Ўстрлар _____ ашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси иш-
лари бўйича Давлат қўмитетининг 1- босмаҳонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21.
1972. Зак. № 51. Қогоз № 3.

Типография № 1 Государственного комитета _____ Министро _____ по
делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Ҳамзы, 21.

РУСЧА ТЎҚҚИЗИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ.

Ушбу дарсликнинг тўққизинчи нашри саккизинчи нашридан фарқ қилади. Бу нашри олий техника ўқув юртлари учун математикадан 400—450 соатга мулжалланган программага бутунлай мос келади.

Дарсликка иккита янги XX ва XXI боблар киритилди.

XX боб „Эхтимолликлар назарияси ва математик статистика элементлари“ Олий ва ўрта махсус таълим Министрлигининг математика бўйича мажбурий программасининг тегишли қисмида кўзда тутилган материални ўз ичига олади.

XXI боб „Матрицалар. Чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини ва уларнинг ечимларини матрицалар орқали ёзиш“ ҳамда мажбурий программада кўзда тутилган материални ўз ичига олади. Аммо, бундан ташқари, бу бобда чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини ва бундай системаларнинг ечимларини матрица орқали ёзишга катта эътибор берилди. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаларининг кетма-кет тақрибий ечимларини матрица орқали ёзишдан фойдаланилди. Бу материални лар учун дифференциал ва интеграл ҳисоб курсига киритиш шунинг учун зарурки, ҳозирги вақтда электротехника, радиотехника, автоматикага доир кўпгина китобларда дифференциал тенгламалар системаларининг ечимлари матрицалар назарияси аппаратидан фойдаланиб текширилади.

XVI бобда янги 26, 27, 28- параграфлар ёзилди. Буларда дифференциал тенгламаларнинг ечимларини кетма-кет яқинлаштириш методи қараб чиқилди, дифференциал тенгламанинг ечими мавжудлиги ҳақидаги теорема билан ягоналик теоремаси исботланади. Дифференциал тенгламалар ҳақидаги бутун бобни жиддий баён қилишга эътибор берилди.

XIII бобнинг 31- параграфи „Ляпуновнинг турғунлик назарияси ҳақида тушунча“ анчагина кенгайтирилди. Бу нашрда у „Ляпуновнинг турғунлик назарияси ҳақида тушунча. Махсус

нуқта агрофида дифференциал тенглама траекториясининг ўзгариш ҳолати" дейилган. Бу ерда дифференциал тенгламалар системалари ечимларининг турғунлиги билан бир қаторда фазовий текисликдаги махсус нуқта яқинида траекторияларнинг ўзгариш ҳолати қараб чиқилди. Бу шунинг учун ҳам қилиниши зарур эдики, электротехника, радиотехника, автоматика курсларида тегишли масалаларни ўрганишда бу тушунчалардан эркин равишда фойдаланиш керак бўлади. Баъзи параграфлар комплекс сонлар назариясининг баёни билан янгидан ёзилди.

XI бобнинг 2- параграфи асосли равишда кенгайтирилди, унда узлуксиз функциянинг аниқ интегралли мавжудлигининг исботи берилди. XI бобга 11- § „Ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функциясини интеграллаш" қўшимча ёзилди. XVI бобга комплекс ҳадли қаторларга ва комплекс ўзгарувчили даражали қаторларга бағишланган янги 24 ва 25- параграфлар ёзилди.

XVII бобга комплекс формадаги Фурье қаторларига атаб янги 12- параграф ёзилди. Фурье интегралли ҳақидаги масаланинг баёни кенгайтирилди. Махсус амалий адабиётда фойдаланиладиган спектр, спектрал функция тушунчалари ёритилди. XVII бобда янги 15- § „Функцияларнинг ортогонал системаси бўйича Фурье қатори" ва 16- § „Чизиқли функционал фазо ҳақида тушунча. Функцияни Фурье қаторига ёйиш билан векторларни ёйиш орасидаги ўхшашлик" ёзилди. Бу материал шу математик аппаратга таянган бошқа фанлардаги материалларни студентлар ва инженерлар тушуна оладиган тарзда ёзилди.

XIX бобга янги 20- § „Дельта-функция ва унинг тасвири" ёзилди.

XIII бобга 19- § „Функцияни экспериментал маълумотларга асосан энг кичик квадратлар методи билан ҳосил қилиш" киритилди. Бу параграфнинг мазмуни илгари бу дарсликнинг биринчи томи охирида берилган I иловадан иборат.

VII бобда 10- § „Ньютоннинг интеграллаш формуласи" ва 11- § „Сонли дифференциаллаш" берилди. Бу параграфларнинг мазмуни илгари II иловадан иборат эди.

V, VII, IX, XII, XIII бобларга баъзи қўшимчалар қилинди.

XIII боб „Дифференциал тенгламалар" бутунлай иккинчи томга кўчирилди.

Автор

РУСЧА БЕШИНЧИ НАШРИГА СЎЗ ВОШИ

Тўртинчи нашрнинг ҳамма тексти бешинчи нашрда ўзгарип-сиз тўла сақланди, аммо бу материал икки томга бўлинди (дарсликнинг ушбу ва олдинги нашрларидан фойдаланишни қулайлаштириш учун бобларнинг тартиб номерлари ҳам ўзгарипсиз қолдирилди).

Бутун дарсликнинг мундарижаси олий техника ўқув юртлари учун математика курсининг 300—450 соатга мўлжалланган программалари билан аниқланади. Дарслик, стационар олий ўқув юртларида ҳам, сиртқи олий ўқув юртларида ҳам математика курсини ўрганиш учун мўлжалланган. Бу ҳол материални баён этишда эътиборга олинди; жумладан, шу мақсад билан дарсликда баён этилган назарий материални тушунтирувчи ва масалалар ечиш намуналарини берувчи қўпгина ми-соллар қараб чиқилди.

Биринчи том, олий техника ўқув юртларининг одатда 2-курсида ўтиладиган XIII „Дифференциал тенгламалар“ бобидан бошқа, биринчи курс программасига тегишли материални ўз ичига олади. Аммо баъзи бир олий ўқув юртларида дифференциал тенгламалардан, кейинги фанларни ўқитиш учун зарур бўладиган бошланғич маълумотлар 1-курсида берилади, шу сабабли бу бобнинг бир қисми (1—28-§) биринчи томда берилди.

Математика ўқитиш 300 соатга мўлжалланган олий техника ўқув юртларининг программасидаги материалнинг ҳаммасини деярли биринчи том ўз ичига олишини қайд этиб утаман (аммо, бу том программа доирасидан ташқарига чиқувчи материални ҳам ўз ичига олади).

Иккинчи том — XIII бобнинг охири (29—34-§), XIV—XIX боблар — олий техника ўқув юртларининг 2-курси программасига тегишли материални ўз ичига олади.

Биринчи томнинг дастлабки икки боби — „Сон. Ўзгарувчи миқдор. Функция“ ва „Лимит. Функциянинг узлуксизлиги“ мумкин қадар қисқа ёзилди. Одатда бу бобларда баён этиладиган баъзи масалалар ишга халал бермаган ҳолда учинчи ва ундан кейинги бобларга кучирилди.

Бундай қилиш олий техника ўқув юрти курсида бошқа фанлар талаб қиладиган, дифференциал ҳисобнинг асосий тушунчаси бўлмиш ҳосилани олдинроқ ўтиш имконини берди (материални бундай жойлаштиришнинг мақсадга мувофиқлиги иш тажрибасида тасдиқланади).

Олий техника ўқув юртларининг автоматика ва ҳисоблаш техникаси билан алоқадор фанларини математика курси билан таъминлаш учун зарур масалаларнинг олий математика бўйича олий ўқув юрти программасига киргизилиши муносабати

Силан дарсликда: „Дифференциал тенгламаларни ва дифференциал тенгламаларнинг системаларини сонли интеграллаш“*), „Чизиqli дифференциал тенгламалар системаларини интеграллаш“, „Ляпунов турғулги назарияси ҳақида тушунча“, „Гамилтон оператори“, „Фурье интегралли“ ва бошқа бўлимлар батафсил баён этилди.

XVIII бобда математик физиканинг асосий тенгламалари кўриб чиқилган. Турли типдаги тенгламаларга ва тегишли чегаравий масалаларга келтирувчи физик ҳодисаларнинг характерини аниқлашга катта аҳамият берилди. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли методларига ҳам кўпроқ эътибор берилди.

XIX бобда операцион ҳисобнинг асосий тушунчаларни билан бирга дифференциал тенгламаларни ечиш учун операцион метод баён этилди. Бундай қилиш ўрганиладиган кейинги фанлар ва айниқса электротехника фанлари учун керак бўлади.

Дарсликка машқ учун кўп миқдорда масала ва мисоллар киритилди, уларнинг аксарияти математиканинг бошқа фанлар билан муносабатини кўрсатиб беради. Масала ва мисоллар курснинг ҳар қайси бўлими бўйича махсус танланган, бу эса баён этиладиган материални ўзлаштиришга ёрдам беради. Бу ҳол математика курсини мустақил ўрганиш учун ҳам, жумладан, сиртдан ўқийдиган студентлар учун китобдан фойдаланишни осонлаштиради.

Олтинчи нашри бешинчисидан 1- том охирида берилган қўшимча билан фарқ қиладики, бунда инженерлар учун муҳим масала „Функцияни энг кичик квадратлар методи бўйича экспериментал натижаларга асосан олиш“ баён этилган.

Еттинчи нашри олтинчисидан 1- том охирида берилган „Ньютоннинг интерполяцион формуласи. Сон ҳисобида дифференциаллаш“ қўшимчаси билан фарқ қилади.

*) Анализнинг одатда баён этиладиган сонли методлари ҳам ушбу дарсликда баён этилган.

1 БОБ

СОН. ЎЗГАРУВЧИ МИҚДОР. ФУНКЦИЯ

1-§. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонларни сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирлаш

Математиканинг асосий тушунчаларидан бири сон тушунчасидир. Сон тушунчаси қадим замонларда пайдо бўлиб, узоқ замонлар давомида кенгайган ва умумлашган.

Бутун ва каср сонлар, мусбат ва манфий сонлар, ноль сони билан бирга *рационал сонлар* деб аталади. Ҳар бир рационал сонни иккита бутун сон p ва q нинг нисбати $\frac{p}{q}$ шаклида тасвирлаш мумкин, масалан:

$$\frac{5}{7}; \quad 1,25 = \frac{5}{4}.$$

Жумладан p бутун сонни икки бутун соннинг $\frac{p}{1}$ нисбати деб қараш мумкин, масалан:

$$\text{РАЦИОНАЛ} \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Рационал сонларни чекли ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ифодалаш мумкин. Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср билан тасвирланувчи сонлар *иррационал сонлар* деб аталади; бундай сонлар $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ ва ҳоказо.

Барча рационал ва иррационал сонлар биргаликда *ҳақиқий сонлар* тўплами деб аталади. Ҳақиқий сонлар қийматлари бўйича тартибга солинган, яъни ҳар бир пар (жуфт) x ва y ҳақиқий сонлар учун ушбу

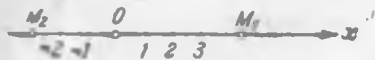
$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси тўғридир.

Ҳақиқий сонларни сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирлаш мумкин. *Сонлар ўқи* деб шундай чексиз тўғри чизиққа айтиладики, унда: 1) саноқ бошн дейиладиган бирор O нуқта, 2) мусбат йўналиш (бу йўналиш одатда стрелка билан кўрсатилади) ва 3) узунликларни ўлчаш учун масштаб танлаб олинган бў-

лади. Кўпинча биз сонлар ўқини горизонтал ҳолатда жойлаштирамиз ва мусбат йўналишни чапдан ўнгга қараб оламиз:

Агар x_1 сон мусбат бўлса, бу сон O нуқтадан ўнг томонда $OM_1 = x_1$ масофада ётувчи M_1 нуқта билан тасвирланади; агар x_2 сон манфий бўлса, у O нуқтадан чап томонда $OM_2 = -x_2$ масофада ётувчи M_2 нуқта билан тасвирланади (1-расм). O нуқта ноль сонни тасвирлайди. Ҳар бир ҳақиқий сон сонлар ўқининг маълум бир нуқтаси билан тасвирланади. Иккита ҳар хил ҳақиқий сон сонлар ўқининг ҳар хил нуқталари билан тасвирланади.



1-расм.

Сонлар ўқининг ҳар бир нуқтаси биргина ҳақиқий (рационал ёки иррационал) соннинг тасвири деган фикр ҳам туғри бўлади.

Шундай қилиб, барча ҳақиқий сонлар билан сонлар ўқидаги барча нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуддир: ҳар бир сонга сонлар ўқида уни тасвирловчи биргина нуқта мос келади ва, аксинча, сонлар ўқидаги ҳар бир нуқтага шу нуқта билан тасвирланувчи биргина сон туғри келади. Бу мослик кўпгина муҳокамаларда „ x сон“ тушунчаси билан „ x нуқта“ тушунчасини бир хил маънода ишлатишга имкон беради. Бу ҳолдан биз бу курсда кенг фойдаланамиз.

Ҳақиқий сонлар тўпламининг қуйидаги муҳим хоссасини исботсиз кўрсатамиз: *ихтиёрий иккита ҳақиқий сон орасида рационал сонлар ҳам, иррационал сонлар ҳам топилади.* Бу жумлани геометрик терминларда бундай ифодалаш мумкин: *сонлар ўқининг ихтиёрий икки нуқтаси орасида рационал нуқталар ҳам, иррационал нуқталар ҳам топилади.*

Натижада „назария билан амалиётни“ боғловчи ушбу теоремани келтирамиз.

Теорема. *Ҳар бир иррационал α сон исталган даражадаги аниқликда рационал сонлар ёрдами билан ифодаланиши мумкин.*

Ҳақиқатан, иррационал сон $\alpha > 0$ бўлсин ва бу α сонни $\frac{1}{n}$ гача (масалан, $\frac{1}{10}$ гача, $\frac{1}{100}$ гача ва ҳоказо) аниқликда ҳисоблаш керак бўлсин.

α ҳар қандай сон бўлганда ҳам у иккита N ва $N+1$ бутун сонлар орасида бўлади. N ва $N+1$ орасидаги кесмани n бўлакка бўламиз, бу ҳолда α иккита $N + \frac{m}{n}$ ва $N + \frac{m+1}{n}$ рационал сонлар орасида бўлади. Уларнинг айирмаси $\frac{1}{n}$ га тенг,

демак, буларнинг ҳар бири α ни: биринчиси ками билан, иккинчиси эса ортиги билан берилган даражада аниқлик билан ифодалайди.

Мисол: $\sqrt{2}$ иррационал сон қуйидаги рационал сонлар билан ифодланади:

$$1,4 \text{ ва } 1,5 \left(\frac{1}{10} \text{ гача аниқликда} \right).$$

$$1,41 \text{ ва } 1,42 \left(\frac{1}{100} \text{ гача аниқликда} \right).$$

$$1,414 \text{ ва } 1,415 \left(\frac{1}{1000} \text{ гача аниқликда} \right) \text{ ва ҳоказо.}$$

2-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати тушунчасини киритамиз, бу тушунча бундан буён бизга зарур бўлади.

Таъриф. x ҳақиқий соннинг *абсолют қиймати* (ёки *модули* $|x|$ билан белгиланади) деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи манфий бўлмаган ҳақиқий сонга айтилади:

$$x \geq 0 \text{ бўлса, } |x| = x;$$

$$x < 0 \text{ бўлса, } |x| = -x.$$

$$\text{Мисоллар: } |2| = 2; \quad |-5| = 5; \quad |0| = 0.$$

Таърифдан кўринадики, ҳар қандай x учун $x \leq |x|$ муносабат уринлидир.

Абсолют қийматларнинг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз.

1. Бир неча ҳақиқий сонлар алгебраик йиғиндисининг абсолют қиймати қўшилувчилар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмас:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $x + y \geq 0$ бўлсин, y ҳолда:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \text{ (чунки } x \leq |x| \text{ ва } y \leq |y|).$$

$x + y < 0$ бўлсин, y ҳолда:

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Келтирилган исбот қўшилувчилар сони ҳар қанча бўлган ҳолга осонгина умумлаштирилади.

$$\text{Мисоллар: } |-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ ёки } 1 < 5;$$

$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ ёки } 8 = 8.$$

2. Айирманинг абсолют қиймати камаювчи ва айрилувчининг абсолют қийматлари айирмасидан кичик эмас:

$$|x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x| \geq |y|.$$

Исбот. $x - y = z$ деб оламиз, y ҳолда $x = y + z$ ва юқорида исботланганига кўра:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

бундан:

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

3. Кўпайтманинг абсолют қиймати кўпайтувчилар абсолют қийматларининг кўпайтмасига тенг:

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. Бўлинманинг абсолют қиймати бўлинувчи ва бўлувчи абсолют қийматларининг бўлинмасига тенг:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Кейинги икки хосса абсолют қийматнинг таърифидан бевожита келиб чиқади.

3-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар

Вақт, узунлик, юз, ҳажм, масса, тезлик, босим, температура ва шунга ўхшаш физик миқдорларни улчаш натижасида уларнинг сон қийматлари аниқланади. Математика миқдорлар билан, уларнинг конкрет мазмунини эътиборга олмаган ҳолда, шуғулланади. Бундан буён миқдорлар ҳақида гапирганимизда биз уларнинг сон қийматларини назарда тутамиз. Турли ҳодисаларда баъзи миқдорлар ўзгаради, яъни уларнинг сон қийматлари ўзгаради, баъзи миқдорларнинг сон қийматлари ўзгармайди. Масалан, нуқтанинг текис ҳаракатида вақт ва масофа ўзгаради; тезлик ўзгармай қолаверади.

Турли сон қийматлар қабул қиладиган миқдор ўзгарувчи миқдор дейилади. Сон қийматлари ўзгармайдиган миқдор ўзгармас миқдор дейилади. Бундан буён ўзгарувчи миқдорларни $x, y, z, u, \dots$ ва ҳоказо ҳарфлар билан, ўзгармас миқдорларни $a, b, c, \dots$ ва ҳоказо ҳарфлар билан белгилаймиз.

Изоҳ. Кўпинча математикада ўзгармас миқдорга ўзгарувчи миқдорнинг барча сон қийматлари бир хил бўлган хусусий ҳоли деб қаралади.

Шуни ҳам қайд қилиб ўтиш керакки, конкрет физик ҳодисалар кўриляётганда бир хил исмли миқдор бир ҳодисада

Ўзгарувчи, бошқа бир ҳодисада ўзгармас бўладиган ҳол бўлиши ҳам мумкин. Масалан, текис ҳаракатнинг тезлиги ўзгармас миқдор, текис тезланувчи ҳаракатнинг тезлиги эса ўзгарувчи миқдордир. Ҳар қандай ҳодисада ҳам ўз қийматини ўзгартирмайдиган миқдорлар *абсолют ўзгармас миқдорлар* дейилади. Масалан, айлана узунлигининг диаметрига нисбати абсолют ўзгармас миқдордир: $\pi = 3,14159 \dots$

Бутун курс давомида кўрамизки, ўзгарувчи миқдор тушунчаси дифференциал ва интеграл ҳисобнинг асосий тушунчасидир. „Математикада бурилиш пункти,— деб ёзади. Ф. Өнгельс ўзининг „Табиат диалектикаси“ асарида — Декартнинг ўзгарувчи миқдори бўлди. Шу туфайли математикага *ҳаракат ва диалектика* кирди ҳамда шу туфайлигина дифференциал ва интеграл ҳисоб *тезда зарур* бўлиб қолди“.

4-§. Ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси

1) Ўзгарувчи миқдор турли сон қийматлар қабул қилади. Текшириляётган масаланинг характерига қараб, бу қийматлар тўплами турлича бўлиши мумкин. Масалан, одатдаги шароитда иситиляётган сувнинг температураси $15-18^{\circ}\text{C}$ бўлган уй температурасидан бошлаб, қайнаш нуқтаси 100°C гача ўзгаради. $x = \cos \alpha$ ўзгарувчи миқдор эса -1 дан $+1$ гача бўлган барча қийматларни қабул қилиши мумкин.

Ўзгарувчи миқдорнинг қийматлари геометрик равишда сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирланади. Масалан, $x = \cos \alpha$ ўзгарувчининг қийматлари α нинг мумкин бўлган барча қийматларида сонлар ўқи кесмасининг -1 ва $+1$ ни ҳам ўз ичига олган -1 дан $+1$ гача бўлган нуқталари тўплами билан тасвирланади (2-расм).

Таъриф. Ўзгарувчи миқдорнинг барча сон қийматлари тўплами шу ўзгарувчининг *ўзгариш соҳаси* дейиляди.

Ўзгарувчи миқдорнинг бундан буён тез-тез учрайдиган қуйидаги ўзгариш соҳаларини қайд қилиб утамиз.

Берилган a ва b ($a < b$) сонлар орасида ётувчи барча x сонлар тўплами *оралиқ* ёки *интервал* дейиляди, бунда a ва b сонларнинг ўзлари қаралаётган сонлар тўпламига тегишли эмас; у оралиқ (a, b) билан ёки $a < x < b$ тенгсизликлар билан белгилянади.

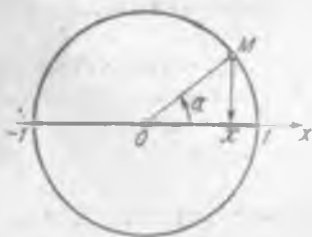
Берилган иккита a ва b сонлар орасида ётувчи барча x сонлар тўплами *кесма* ёки *сегмент* дейиляди, бунда a ва b сонларнинг иккаласи ҳам қаралаётган тўпламга тегишли бўляди; у кесма $[a, b]$ билан ёки $a \leq x \leq b$ тенгсизликлар билан белгилянади. Баъзан кесма *ёпиқ оралиқ* ёки *ёпиқ интервал* дейиляди.

Агар a ва b сонлардан бири, масалан a , оралиққа қушилб, иккинчиси қушилмаса, у ҳолда *ярим ёпиқ оралиқ* ҳосил бўлади, буни

$$a \leq x < b$$

тенгсизликлар билан бериш ва $[a, b]$ билан белгилаш мумкин. Агар b сони оралиққа кирса ва a сони кирмаса, у ҳолда *ярим ёпиқ оралиқ* $(a, b]$ ҳосил бўлади, уни бундай тенгсизликлар билан бериш мумкин:

$$a < x \leq b.$$



2- расм.

Агар ўзгарувчи x миқдор a дан катта ҳар қандай қийматлар қабул қилверса, у ҳолда бундай интервал $(a, +\infty)$ билан белгиланади ва $a < x < +\infty$ шартли тенгсизликлар билан берилади. Шунингдек, шартли тенгсизликлар

$$a \leq x < +\infty; -\infty < x < c; -\infty < x \leq c; -\infty < x < +\infty$$

билан бериладиган чексиз интерваллар ва ярим ёпиқ чексиз интерваллар ҳам қараб чиқилади.

Мисол. $x = \cos z$ ўзгарувчининг ўзгариш соҳаси z нинг мумкин бўлган ҳамма қийматларида $[-1, 1]$ кесмадан иборат ва $-1 \leq x \leq 1$ тенгсизликлар билан аниқланади.

Юқорида берилган таърифларни „сон“ тушунчаси урнига „нуқта“ тушунчасидан фойдаланиб ифодалаш мумкин, масалан:

Берилган a ва b нуқталар (*кесманинг учлари*) орасида ётувчи ҳамма x нуқталар тўплами *кесма* дейилади, бунда кесманинг учлари шу тўпламга тегиш-ли бўлади.

Берилган x_0 нуқтанинг *атрофи* деб, шу нуқтани ўз ичига олган, яъни учлари $a < x_0 < b$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрый (a, b) интервалга айтилади. Кўпинча x_0 нуқтанинг шундай (a, b) атрофи олиндики, унинг учун x_0 ўрта бўлади. У вақтда x_0 — *атрофнинг маркази*, $\frac{b-a}{2}$ миқдор *атрофнинг радиуси* дейи-



3- расм.

лади. 3- расмда x_0 нуқтанинг ϵ радиусли атрофи $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ тасвирланган.

5-§. Тартибланган ўзгарувчи миқдор.

Ўсувчи ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар.

Чекланган ўзгарувчи миқдор

Агар x ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси маълум бўлса ва унинг ихтиёрий ҳар икки қийматининг қайси бири олдинги ва қайси бири кейинги эканлигини айтиш мумкин бўлса, бу ўзгарувчининг *тартибланган ўзгарувчи миқдор* деб айтамыз. Бу ерда „олдинги“ ва „кейинги“ тушунчалари вақт билан боғлиқ бўлмай, балки ўзгарувчи миқдор қийматини „тартиблаш“ усули, яъни ўзгарувчи миқдорнинг тегишли қийматларининг тартибини аниқлашдан иборатдир.

Қийматлари $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ сонлар кетма-кетлигининг ҳосил қиладиган ўзгарувчи миқдор тартибланган ўзгарувчи миқдорнинг хусусий ҳолидир. Бу ерда $k' < k$ да қайси бири катталигидан қатъи назар x_k — „олдинги“ қиймат, x_k эса „кейинги“ қийматдир.

1-таъриф. Агар ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир кейинги қиймати олдинги қийматидан катта бўлса, ўзгарувчи миқдор *ўсувчи* дейилади. Агар ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир кейинги қиймати олдинги қийматидан кичик бўлса, ўзгарувчи миқдор *камаювчи* дейилади.

Ўсувчи ўзгарувчи миқдорлар ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар *монотон ўзгарадиган* ўзгарувчи миқдорлар ёки, тўғридан-тўғри, *монотон миқдорлар* дейилади.

Мисол. Доирага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сони иккилантириб борилганда, бу кўпбурчакнинг s юзи ўсувчи ўзгарувчи миқдор бўлади. Доирага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сони иккилантириб борилганда унинг юзи камаювчи ўзгарувчи миқдор бўлади. Ҳар қандай ўзгарувчи миқдор ҳам албатта ўсувчи ёки камаювчи бўла-вермаслигини курсатиб ўтамыз. Масалан, агар α миқдор $[0, 2\pi]$ кесмада ўсувчи бўлса, $x = \sin \alpha$ ўзгарувчи монотон миқдор бўлмайди. У аввал 0 дан 1 гача ўсади, сўнгра 1 дан — 1 гача камаяди, ундан кейин — 1 дан 0 гача ўсади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлиб, ўзгарувчининг бирор қийматидан бошлаб, унинг барча кейинги қийматлари

$$-M \leq x \leq M, \text{ яъни } |x| \leq M$$

шартни қаноатлантирса, ўзгарувчи x миқдор *чекланган* дейилади. Бошқача айтганда, агар шундай $[-M, M]$ кесмани курсатиш мумкин бўлсак, ўзгарувчи миқдорнинг бирор қийматидан бошлаб, ундан кейинги барча қийматлари шу кесмага тегишли бўлса, ўзгарувчи миқдор чекланган дейилади. Лекин ўзгарувчи миқдор $[-M, M]$ кесмадаги ҳамма қийматларни

элбатта қабул қилади деб ўйлаш ярамайди. Масалан, $[-2, 2]$ кесмада мумкин бўлган барча рационал қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи миқдор чекланган, шундай бўлишига қарамай $[-2, 2]$ кесмадаги барча қийматларни ҳам қабул қилавермайди, яъни иррационал қийматларни қабул қилмайди.

6-§. Функция

Табиатнинг турли ҳодисаларини ўрганишда ва техникага доир масалаларни ечишда, бинобарин, математикада ҳам бир миқдорнинг ўзгаришини бошқа миқдорнинг ўзгаришига боғлиқ равишда кўриб чиқишга тўғри келади. Масалан, ҳаракатни ўрганишда ўтилган йўл вақтнинг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгарадиган ўзгарувчи миқдор деб қаралади. Бу ерда ўтилган йўл вақтнинг функцияси дир.

Бошқа мисол қарайлик. Маълумки, доиранинг юзи радиус орқали $Q = \pi R^2$ тенглик билан ифодаланади. Агар R радиус турли сон қийматларни қабул қилса, Q ҳолда доиранинг юзи Q ҳам турли сон қийматларни қабул қилади. Шундай қилиб, бир ўзгарувчининг ўзгариши бошқасининг ўзгаришига сабаб бўлади. Бу ерда доиранинг Q юзи R радиусининг функцияси дир. „Функция“ тушунчасининг таърифини берамиз.

1-таъриф. Агар ўзгарурчи x нинг бирор соҳага тегишли ҳар бир қийматига бошқа ўзгарувчи y нинг маълум бир қиймати тўғри келса, y ҳолда y ўзгарувчи x нинг *функцияси* бўлади. Бу символик тарзда бундай ёзилади: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ ва ҳоказо.

Ўзгарувчи x *эркли ўзгарувчи ёки аргумент* деб аталади. x ва y ўзгарувчилар орасидаги муносабат функционал боғланиш дейилади. Функционал боғланишнинг $y = f(x)$ символик ёзилишида f ҳарфи y нинг қийматини ҳосил қилиш учун x нинг қиймати устида қандай амаллар бажарилиши кераклигини кўрсатади. $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ ва ҳоказо ёзувлар ўрнига баъзан $y \rightleftharpoons u(x)$, $u = u(x)$ ва ҳоказо ёзилади, яъни y ҳарфи эрксиз ўзгарувчини ҳам, x нинг устида бажариладиган амаллар туплами символини ҳам белгилайди.

$y = C$ ёзув x нинг ҳар қандай қийматида бир хил ва C га тенг бўлган функцияни билдиради, бу ерда C ўзгармас миқдорга тенг.

2-таъриф. x нинг берилган $f(x)$ қоидага биноан y функциянинг қийматлари топиладиган қийматлари туплами *функциянинг аниқланиш соҳаси* (функциянинг борлик соҳаси ёки *мавжудлик соҳаси*) дейилади.

1-мисол. $y = \sin x$ функция x нинг барча қийматлари учун аниқланган. Демак, унинг мавжудлик соҳаси $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервал бўлади.

1-изох. Агар иккита ўзгарувчи x ва $y = f(x)$ миқдорнинг функционал боғланишига эга бўлсак ҳамда x ва $y = f(x)$ тартибланган ўзгарувчи миқдорлар деб қаралса, y ҳолда функциянинг аргументнинг иккита x^* ва x^{**} қийматига мос иккита $y^* = f(x^*)$, $y^{**} = f(x^{**})$ қийматидан аргументнинг кейинги қийматига мос бўлгани функциянинг кейинги қиймати булади. Шунинг учун, масалан, қуйидаги таъриф табиийдир.

3-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция шундай бўлсаки, x аргументнинг катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келса, $y = f(x)$ функция ўсувчи дейилади. Камаювчи функция ҳам худди шундай таърифланади.

2-мисол. $0 < R < +\infty$ да $Q = \pi R^2$ ўсувчи функция, чунки R нинг катта қийматига Q нинг катта қиймати мос келади.

2-изох. Баъзан функция тушунчасининг таърифида x нинг бирор соҳага тегишли ҳар бир қийматига y нинг бир эмас, бир неча қийматлари ёки ҳатто чексиз кўп қийматлари тўплами мос келади, деб фараз қилинади. Бу ҳолда функцияни юқорида таърифланган бир қийматли деб аталувчи функциядан фарқ қилиш учун, кўп қийматли функция дейилади. Бундан буён функция ҳақида гапирганимизда фақат бир қийматли функцияларни назарда тутамиз. Агар баъзида кўп қийматли функция билан иш қуриш зарур бўлиб қолса, y ҳолда биз алоҳида айтиб ўтамиз.

7-§ Функциянинг берилиш усуллари

1. Функция берилишининг жадвал усули

Бу усулда аргументнинг маълум тартибдаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари ва функциянинг шуларга мос $y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари ёзилади.

x	x_1	x_2	$\dots\dots\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots\dots\dots$	y_n

Тригонометрик функциялар жадваллари, логарифмлар жадваллари ва ҳоказолар функциянинг жадвал усулда берилишига мисол булади.

Ҳодисаларни экспериментал равишда ўрганиш натижасида ҳам ўлчанаётган миқдорлар орасидаги функционал боғланишни ифодаловчи жадваллар ҳосил бўлиши мумкин. Масалан, метео-

299/2137

рологик майдончада маълум кунда ҳавонинг температурасини ўлчаш натижасида қуйидаги жадвал ҳосил бўлади.

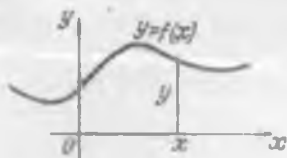
Вакт t га (соат ҳисобида) боғланишда температура (T) нинг қиймати (градус ҳисобида).

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0,5	1	3	3,5	4

Бу жадвал T ни t нинг функцияси каби аниқлайди.

II. Функция берилишининг график усули.

Агар текисликда тўғри бурчакли координаталар системасида қандайдир $M(x, y)$ нуқталар тўпламига эга бўлсак ва бунда шу тўпланиннг ҳар қандай иккита нуқтаси Oy ўққа параллел тўғри чиқиқда ётмаса, y ҳолда бу нуқталар тўплами бирор $y = f(x)$ бир қийматли функцияни аниқлайди; аргументнинг қийматлари нуқталарнинг абсциссаларидан, функциянинг қийматлари тегишли ординаталаридан иборатдир (4-расм).



4- расм.

Абсциссалари эркин ўзгарувчининг қийматларидан, ординаталари эса функциянинг тегишли қийматларидан иборат бўлган (xOy) текисликдаги нуқталар тўплами берилган функциянинг *графи* дейилади.

III. Функция берилишининг аналитик усули

Аввало „аналитик ифода“ тушунчасини изоҳлаймиз. Ўзгармас ёки ўзгарувчи миқдорларни белгиловчи сонлар ва ҳарфлар устида маълум тартибда бажариладиган маълум математик амаллар (операциялар) тўпланиннг символик тарздаги белгисини *аналитик ифода* деб атаймиз.

Маълум математик амаллар тўплами деган сўздан фақат ўрта мактаб курсидан маълум (қўшиш, айириш, илдиз чиқариш ва ҳоказо) амалларнигина эмас, балки бу курсни ўрганиш давомида аниқлана борадиган амалларни ҳам тушунишимизни қайд қилиб ўтамиз.

Масалан, қуйидагилар аналитик ифодалардир:

$$x^2 - 2, \quad \frac{\lg x - \sin x}{5x^2 + 1}, \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}$$

ва ҳоказо.

Агар $y = f(x)$ функционал боғланиш шундай бўлсаки, унда f аналитик ифодани белгиласа, y ҳолда x нинг функцияси y *аналитик тарзда берилган* дейилади.

Аналитик тарзда берилган функцияларга мисоллар:

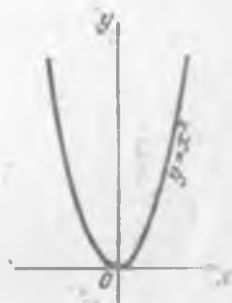
- 1) $y = x^4 - 2$, 2) $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$, 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$,
4) $y = \sin x$, 5) $Q = \pi R^2$ ва ҳоказо.

Бу ерда функциялар бىргина формула ёрдамда аналитик усулда берилган (формула деган сўздан икки аналитик ифоданинг тенглиги тушунилади). Бундай ҳолларда функция аниқланишининг табиий аниқланиш соҳаси ҳақида гапириш мумкин.

x нинг ўнг томонда турувчи аналитик ифода бутунлай аниқ қийматга эга бўладиган қийматларининг тўплами аналитик усулда берилган *функциянинг табиий аниқланиш соҳасидир*. Масалан, $y = x^4 - 2$ функциянинг табиий аниқланиш соҳаси $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалдан иборат, чунки функция x нинг барча қийматларида аниқланади. $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$ функция x нинг, $x = 1$ қийматидан бошқа, ҳамма қийматларида аниқланган; $x = 1$ қийматда махражнинг қиймати нолга айланади. $y = \sqrt{1 - x^2}$ функциянинг табиий аниқланиш соҳаси $-1 \leq x \leq 1$ кесма бўлади ва ҳоказо.

Изоҳ. Баъзан функция аниқланишининг бутун табиий соҳаси қаралмасдан, балки унинг бир қисмини қараш керак бўлади. Масалан, доира юзи Q нинг R радиусга боғлиқлиги $Q = \pi R^2$ функция билан аниқланади. Бу геометрик масалада берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $0 < R < +\infty$ чексиз интервалдан иборат. Бу функция аниқланишининг табиий соҳаси эса $-\infty \leq R < +\infty$ чексиз интервалдан иборатдир.

Агар $y = f(x)$ функция аналитик усулда берилган бўлса, y ҳолда бу функция xOy координаталар текислигида график тарзда тасвирланиши мумкин. Масалан, $y = x^2$ функциянинг графиги 5- расмда тасвирланган параболадир.



5- расм.

8-§. Асосий элементар функциялар. Элементар функциялар

Асосий элементар функциялар деб қуйидагича аналитик усул билан берилган функцияларга айтилади.

I. Даражали функция: $y = x^a$, бунда a — ҳақиқий сон*).

II. Курсаткичли функция: $y = a^x$, бунда a — бирга тенг бўлмаган мусбат сон.

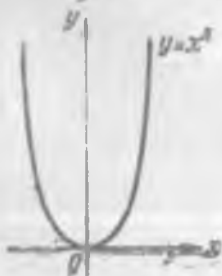
III. Логарифмик функция: $y = \log_a x$, бунда логарифм асоси a — бирга тенг бўлмаган мусбат сон.

IV. Тригонометрик функциялар:

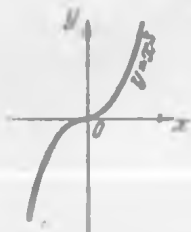
$$\begin{array}{lll} y = \sin x, & y = \cos x, & y = \operatorname{tg} x, \\ y = \operatorname{ctg} x, & y = \sec x, & y = \operatorname{cosec} x. \end{array}$$

V. Тескари тригонометрик функциялар:

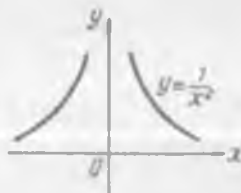
$$\begin{array}{lll} y = \arcsin x, & y = \arccos x, & y = \operatorname{arctg} x, \\ y = \operatorname{arccot} x, & y = \operatorname{arcsec} x, & y = \operatorname{arccosec} x. \end{array}$$



6- расм.



7- расм.



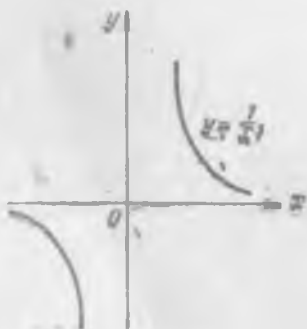
8- расм.

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш соҳаларини ва графикларини кўриб чиқамиз.

Даражали функция: $y = x^a$.

1. a бутун мусбат сон. Функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. Бу ҳолда функциянинг графиклари a нинг баъзи бир қийматларида 6- ва 7- расмларда тасвирланган кўринишларда бўлади.

2. a бутун манфий сон. Бу ҳолда функция x нинг $x = 0$ дан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган. Функциянинг графиклари a нинг баъзи бир қийматларида 8- ва 9- расмларда тасвирланган кўринишларда бўлади.

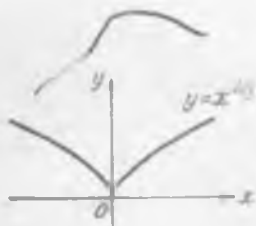


9- расм.

*) a иррационал сон бўлганда бу функция логарифмлаш ва потенцирлаш нули билан ҳисобланади: $\log y = a \log x$. Бунда $x > 0$ деб фараз қилинади.

10, 11, 12- расмларда α нинг рационал каср қийматлари учун даражали функциянинг графиклари тасвирланган.

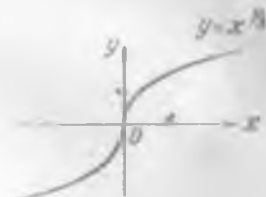
Курсаткичли функция, $y = a^x$, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Бу функция x нинг ҳамма қийматларида аниқланган. Унинг графиги 13- расмда тасвирланган кўринишга эга.



10- расм.



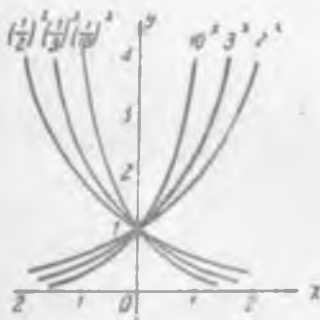
11- расм.



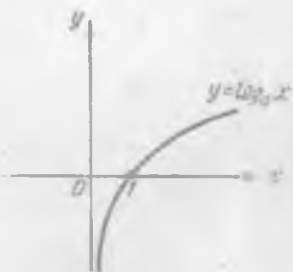
12- расм.

Логарифмик функция, $y = \log_a x$, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Бу функция $x > 0$ қийматларда аниқланган. Унинг графиги 14- расмда тасвирланган.

Тригонометрик функциялар. $y = \sin x$ ва ҳоказо формулаларда эркин ўзгарувчи x радиан билан ифодаланади. Тригонометрик функцияларнинг ҳаммаси даврийдир. Даврий функциянинг умумий таърифини келтираемиз.



13- расм.



14- расм.

1- таъриф. Агар шундай ўзгармас сон C мавжуд бўлиб, x аргументга бу сон қўшилганда (ёки айрилганда) функциянинг қиймати ўзгармаса, яъни $f(x + C) = f(x)$ бўлса, $y = f(x)$ *даврий функция* дейилади. Бундай энг кичик сон функциянинг *даври* дейилади; бундан буён уни $2l$ билан белгилаймиз.

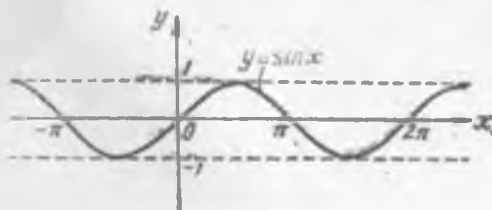
Таърифдан бевосита келиб чиқадики, $y = \sin x$ даври 2π бўлган даврий функциядир: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. $\cos x$ нинг даври ҳам 2π га тенг. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларнинг даври π га тенг.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар x нинг барча қийматларида аниқланган; $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \sec x$ функциялар x нинг

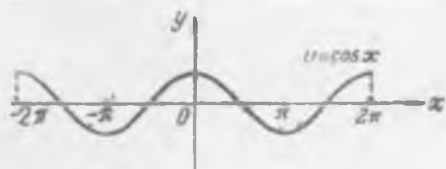
$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

нуқталардан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган; $y = \operatorname{ctg} x$ ва $y = \operatorname{cosec} x$ функциялар x нинг

$$x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



15- расм.

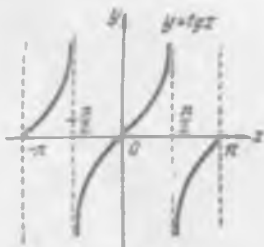


16- расм.

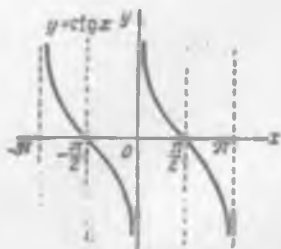
$$y = F(u)$$

B3

$$u = \varphi(x)$$



17- расм.



18- расм.

нуқталардан бошқа барча қийматларида аниқланган. Тригонометрик функцияларнинг графиклари 15—19- расмларда тасвирланган.

Тескари тригонометрик функцияларни кейинроқ батафсил кўриб чиқамиз.

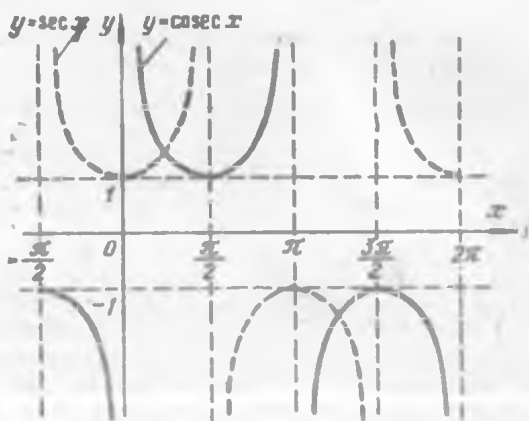
Сўнгра функциянинг функцияси тушунчасини киритамиз. Агар y u нинг функцияси бўлиб, u эса ўз навбатида x ўзгарувчига боғлиқ бўлса, x ҳолда y ҳам x га боғлиқ бўлади. Фараз қилайлик,

булсин. x нинг y функциясини ҳосил қиламиз:

$$y = F[\varphi(x)].$$

Охирги функция *функциянинг функцияси* ёки *мураккаб функция* дейлади.

1-мисол. $y = \sin u$, $u = x^2$ булсин. $y = \sin(x^2)$ функция x нинг мураккаб функциясида иборат.



19- расм.

Изоҳ. $y = F[\varphi(x)]$ функциянинг аниқланиш соҳаси ё $u = \varphi(x)$ функциянинг бутун аниқланиш соҳаси, ёки u нинг $F(u)$ функция аниқланиш соҳасидан ташқари чиқмайдиган қийматлари аниқланадиган қисми бўлади.

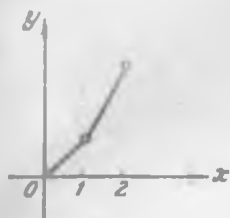
2-мисол. $y = \sqrt{1-x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1-x^2$) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, 1]$ кесмадан иборат, чунки $|x| > 1$ да $u < 0$ ва, бинобарин, ($u = 1-x^2$ функция x нинг ҳамма қийматларида аниқланган бўлса ҳам) $\sqrt{u}$ функция аниқланмаган. Бу функциянинг графиги маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг айлананинг устки ярмидан иборат бўлади.

„Функциянинг функцияси“ амали бир марта эмас, бир неча марта бажарилиши мумкин. Масалан, $y = \ln[\sin(x^2 + 1)]$ функция қуйидаги амаллар (қуйидаги функцияларнинг аниқланиши) натижасида ҳосил қилинади:

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Энди элементар функция тушунчасини таърифлаймиз.

2-таъриф. *Элементар функция* деб $y = f(x)$ кўринишдаги биргина формула билан берилиши мумкин булган функцияга айтилади, бунда унғ томонда турувчи ифода чекли сон-



20-расм.

да қушиш, айириш, купайтириш, бўлиш ва функциянинг функцияси амаллари ёрдамида асосий элементар функциялардан ва ўзгармаслардан тузилган.

Таърифдан элементар функциялар аналитик усулда берилган функциялар эканлиги келиб чиқади.

Элементар функцияларга мисоллар:

$$y = |x| = \sqrt{x^2},$$

$$y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}, \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\lg x}{16x - x + 16}.$$

Элементар бўлмаган функцияларга мисоллар:

$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($y = f(n)$) функция элементар функция эмас, чунки y ни топиш учун керак бўлган амаллар сонининг ўсиши билан ортади, яъни чекланган эмас.

Изоҳ. 20-расмда тасвирланган функция

агар $0 \leq x \leq 1$ бўлса, $f(x) = x$,

агар $1 \leq x \leq 2$ бўлса, $f(x) = 2x - 1$

икки формула ёрдамида берилган бўлса ҳам, элементар функциядир.

Бу функцияни $0 \leq x \leq 2$ қийматлар учун битта формула билан бериш ҳам мумкин:

$$f(x) = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} |x - 1| = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{(x - 1)^2}.$$

(V боб машқларидаги 139—144- мисолларга қаралсин.)

9-§. Алгебраик функциялар

Алгебраик функциялар жумласига қуйидагича кўринишдаги элементар функциялар киради:

I. Бутун рационал функция ёки кўпҳад:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

бу ерда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициентлар деб аталадиган ўзгармас сонлар; n манфий бўлмаган бутун сон бўлиб, кўпҳаднинг даражаси дейилади. Бу функция x нинг ҳамма қийматларида, яъни чексиз интервалда аниқланганлиги равшан.

I-мисол. $y = ax + b$ чизиқли функция. $b = 0$ бўлганда $y = ax$ чизиқли функция унинг x га пропорционаллик боғланишини ифодалайди. $a = 0$ бўлганда $y = b$ функция ўзгармасдир.

2- мисол. $y = ax^2 + bx + c$ **квадратик функция**. Квадратик функциянинг графиги параболадан иборат (21- расм).

Бу функциялар аналитик геометрияда муфассал қараб чиқилган.

II. Рационал каср функция. Бу функция иккита кўпхаднинг нисбати каби аниқланади:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

Масалан, тескари пропорционал муносабатни ифодаловчи

$y = \frac{a}{x}$ функция рационал каср

функциядир. Унинг графиги

22- расмда тасвирланган. Ра-

ционал каср функция x нинг

махражни нолга айлантиради-

ган қийматларидан бошқа ҳамма

қийматларида аниқланганлиги

кўриниб турибди.

III. Иррационал функция. Агар $y = f(x)$ формула-

нинг ўнг томонида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва

бутун бўлмаган рационал кўрсаткичли даражага кўтариш амал-

лари бажарилса, y га

x нинг **иррационал**

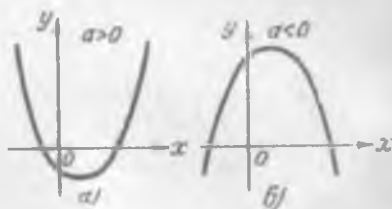
функцияси дейилади.

Иррационал функ-

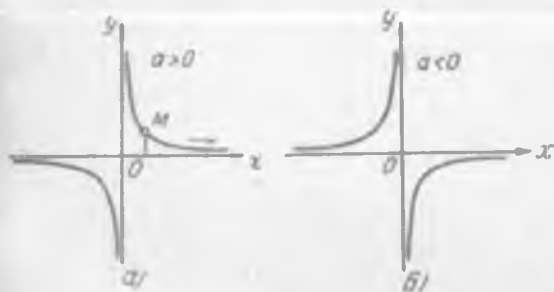
цияларга мисоллар:

$y = \sqrt{x}$ ва шунга

ўхшаш.



21- расм.



22- расм.

тирилган уч кўриниши алгебраик функцияларнинг ҳаммасини ўз ичига олмайди.

Ушбу

$$P_0(x)x^n + P_1(x)x^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай $y = f(x)$ функция алгебраик функция деб аталади; бу ерда $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ лар x га нисбатан бирор кўпхадлардир.

Келтирилган уч кўринишдаги функцияларнинг ҳар бири (1) кўринишдаги тенгламани қаноатлантиришини, лекин (1) кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай функ-

1- изоҳ. Алгебраик функцияларнинг кел-

ция келтирилган уч кўринишдаги функциялардан бири бўла-
вермаслигини исботлаш мумкин.

2-изоҳ. Алгебранг бўлмаган функция *трансцендент*
функция дейилади.

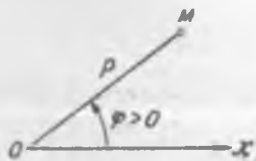
Трансцендент функцияларга мисоллар:

$$y = \cos x, \quad y = 10^x \quad \text{ва шунга ўхшаш.}$$

10-§. Қутб координаталари системаси

Текисликдаги нуқтанинг ўрнини *қутб координаталари*
системаси деб аталадиган система ёрдамида аниқлаш мумкин.

Текисликда, *қутб* деб аталадиган, бирор O нуқтани ва бу
нуқтадан чиқувчи *қутб ўқи* деб аталадиган ярим тўғри чизиқ-
ни танлаб оламиз. Текисликдаги бирор
 M нуқтанинг ўрни иккита сон: M нуқ-
танинг қутбдан узоқлигини ифодаловчи
 ρ сон ва OM кесманинг қутб ўқи билан
ҳосил қилган бурчак миқдори φ сон
билан аниқланиши мумкин. φ бурчакни
ҳисоблашда соат стрелкаси йўналишига
тескари йўналиш мусбат йўналиш ҳи-
собланади. ρ ва φ сонлар M нуқтанинг
қутб координаталари дейилади (23-
рasm).



23-расм.

ρ радиус-векторни доимо манфий эмас деб ҳисоблаймиз.
Агар φ қутб бурчаги $0 \leq \varphi < 2\pi$ ярим ёпиқ ораликда олинса,
у ҳолда текисликнинг қутбдан бошқа ҳар бир нуқтасига тўла
аниқ бир жуфт сон ρ ва φ мос келади. Қутб учун $\rho = 0$, φ —
ихтиёрий.

Қутб координаталари билан тўғри бурчакли Декарт коор-
динаталари орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Тўғри бурчак-
ли координаталар системасининг боши қутб билан, Ox ўқининг
мусбат йўналиши эса қутб ўқи билан устма-уст тушган бўлсин.

24-расмдан бевосита қуйидагилар келиб чиқади:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

ва аксинча,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

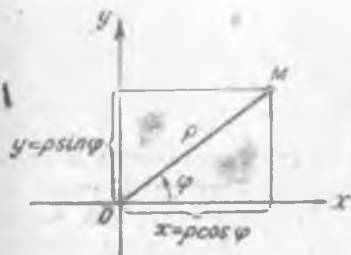
Изоҳ. φ ни топишда нуқтанинг қайси чоракда ётганлиги-
ни эътиборга олиб, φ нинг шунга мос қийматини олиш керак.

$\rho = F(\varphi)$ тенглама қутб координаталари системасида бирор
чизиқни аниқлайди.

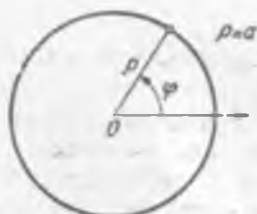
1- мисол. Ушбу $\rho = a$ тенглама қутб координаталарида маркази қутб-
да ва радиуси a бўлган айланани аниқлайди, бу ерда $a = \text{const}$. Тўғри бур-
чакли координаталар системасида 24- расмда кўрсатилгандек жойлашган ай-
лананинг тенгламаси

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ ёки } x^2 + y^2 = a^2$$

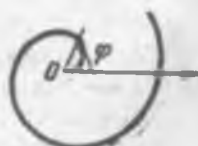
булади (25- расм).



24- расм.



25- расм.



26- расм.

2- мисол.

$\rho = a\varphi$, бу ерда $a = \text{const}$.

φ нинг баъзи қийматлари учун ρ нинг қийматлари жадвалини тузамиз:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

Бу қийматларга мос эгри чизик 26- расмда тасвирланган. Бу эгри чизик *Архимед спирал*и дейилади.

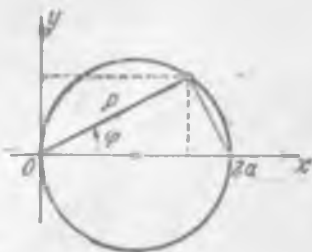
3- мисол.

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Бу — маркази $\rho_0 = a$, $\varphi = 0$ нуқтада, радиуси a га тенг бўлган айлана тенг-
ламасидан иборат (27- расм). Бу айлананинг тенгламасини тўғри бурчакли
координаталар билан ёзамиз. Берилган тенг-

ламага $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ қий-

матларни қўйиб, $\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ёки
 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ тенгламага эга булаемиз.



27- расм.

1 бобга машқлар

1. $f(x) = x^2 + 6x - 4$ функция берилган.
 $f(1) = 3$, $f(3) = 23$ экани текшириб курилсин.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Қуйидаги қийматлар ҳи-
سوبлансин:

а) $f(4)$. Жав. 17. б) $f(\sqrt{2})$. Жав. 3. в) $f(a+1)$. Жав. $a^2 + 2a + 2$.
 г) $f(a) + 1$. Жав. $a^2 + 2$. д) $f(a^2)$. Жав. $a^4 + 1$. е) $[f(a)]^2$. Жав. $a^4 + 2a^2 + 1$. ж) $f(2a)$. Жав. $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Ушбу $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ ва $\frac{1}{\varphi(x)}$ ифодалар ёзилсин. Жав.
 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{x-1}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Ушбу $\psi(2x)$ ва $\psi(0)$ ифодалар ёзилсин. Жав.
 $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \lg \theta$. Ушбу тенглик $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$ текшириб кўрилсин.

6. $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$. Ушбу тенглик $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ текшириб кўрилсин.

7. $f(x) = \lg x$, $\varphi(x) = x^2$. Қуйидаги ифодалар ёзилсин: а) $f[\varphi(2)]$. Жав. 3 lg 2. б) $f[\varphi(a)]$. Жав. 3 lg a. в) $\varphi[f(a)]$. Жав. $[\lg a]^2$.

8. $y = 2x^2 + 1$ функция аниқланишининг табиий соҳаси топилсин. Жав. $-\infty < x < +\infty$.

9. Қуйидаги функциялар аниқланишининг табиий соҳалари топилсин:

а) $\sqrt{1-x^2}$. Жав. $-1 < x < +1$. б) $\sqrt{3+x} + \sqrt{7-x}$. Жав. $-3 < x < 7$.
 в) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-b}$. Жав. $-\infty < x < +\infty$. г) $\frac{a+x}{a-x}$. Жав. $x \neq a$.
 д) $\arcsin^2 x$. Жав. $-1 < x < 1$. е) $y = \lg x$. Жав. $x > 0$. ж) $y = a^x$ ($a > 0$). Жав. $\infty < x < +\infty$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

10. $y = -3x + 5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. 12. $y = 3 - 2x^2$.

13. $y = x^2 + 2x - 1$. 14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \sin 2x$. 16. $y = \cos 3x$.

17. $y = x^2 - 4x + 6$. 18. $y = \frac{1}{1-x^2}$. 19. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

20. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \lg \frac{1}{2}x$. 22. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$. 23. $y = 3^x$.

24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2 \frac{1}{x}$. 26. $y = x^3 + 1$. 27. $y = 4 - x^3$. 28. $y = \frac{1}{x^2}$.

29. $y = x^4$. 30. $y = x^6$. 31. $y = \sqrt{x}$. 32. $y = (\sqrt{x})^{-1}$. 33. $y = \sqrt[3]{x}$.

34. $y = |x|$. 35. $y = \log_2 |x|$. 36. $y = \log_2 (1-x)$. 37. $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

38. $y = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

39. $f(x)$ функция $[-1; 1]$ кесмада қуйидагича аниқланган:

$$-1 < x < 0 \text{ да } f(x) = 1 + x;$$

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = 1 - 2x.$$

40. $f(x)$ функция $[0; 2]$ кесмада қуйидагича аниқланган:

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = x^2;$$

$$1 < x < 2 \text{ да } f(x) = x.$$

Қутб координаталарида қуйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиклар ясалсин:

41. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболик спираль). 42. $\rho = a^{\varphi}$ (логарифмик спираль).

43. $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската). 44. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида).

45. $\rho = a \sin 3\varphi$.

II БОБ

ЛИМИТ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1- §. Ўзгарувчи миқдорнинг лимити.

Чексиз катта ўзгарувчи миқдор

Бу параграфда биз „ўзгарувчи миқдор лимитга интилади“ терминлари билан аниқланадиган махсус равишда ўзгарадиган тартибланган ўзгарувчи миқдорларни текшираемиз. Бундан буён бутун курс бўйича ўзгарувчининг лимити тушунчаси асосий роль ўйнайди, чунки математик анализнинг ҳосила, интеграл ва бошқа асосий тушунчалари у билан бевосита боғлиқдир.

1- таъриф. Агар ҳар бир олдиндан берилган ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун ўзгарувчи x нинг шундай қийматини курсатиш мумкин бўлсаки, ўзгарувчининг барча кейинги қийматлари ушбу

$$|x - a| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, ўзгармас „ a “ сон ўзгарувчи x миқдорнинг *лимити* (*охирги марраси*) дейилади.

Агар a сон ўзгарувчи x миқдорнинг лимити бўлса, у ҳолда x ўзгарувчи a га интилади дейилади ва

$$x \rightarrow a \text{ ёки } \lim x = a^*)$$

кўринишда ёзилади.



28- расм.

Геометрик терминларда лимитнинг таърифини қуйидагича ифодалаш мумкин:

Агар маркази a нуқтада ва радиуси ε бўлган олдиндан берилган ихтиёрий ҳар қанча кичик атроф учун x нинг шундай

қиймати топилсаки, ўзгарувчининг кейинги қийматларига тегишли барча нуқталар шу атрофда бўлса, ўзгармас a сон ўзгарувчи x нинг *лимити* бўлади (28- расм). Лимитга интилувчи ўзгарувчиларнинг бир неча мисолини кўрамиз.

1- мисол: ўзгарувчи миқдор x кетма-кет қуйидаги қийматларни қабул қилади:

$$x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, \quad x_n = 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

*) „ $\lim$ “ қисқартирилган латинча *limes* — марра (чек) деган сўздир.

Бу ўзгарувчи миқдорнинг бирга тенг лимити борлигини исботлаймиз. Ушбу тенгликни ёзамиз:

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Ҳар қандай ϵ учун ўзгарувчининг n номердан бошланадиган барча кейинги қийматлари (бу ерда $\frac{1}{n} < \epsilon$ ёки $n > \frac{1}{\epsilon}$) $|x_n - 1| < \epsilon$ тенгсизлики қаноатлантиради. Бу эса талаб қилинган исботдир. Бу ерда ўзгарувчи миқдор камайиб борган ҳолда, лимитга интилишини қайд қилиб ўтамыз.

2-мисол. Ўзгарувчи миқдор x кетма-кет ушбу қийматларни қабул қилади:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}, x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}, x_3 = 1 - \frac{1}{2^3}, x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}, \dots, x_n = 1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \dots$$

Бу ўзгарувчи миқдор бирга тенг лимитга эга. Ҳақиқатан,

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Ҳар қандай ϵ учун

$$2^n > \frac{1}{\epsilon}, n \lg 2 > \lg \frac{1}{\epsilon} \text{ ёки } n > \frac{\lg \frac{1}{\epsilon}}{\lg 2}.$$

$\frac{1}{2^n} < \epsilon$ муносабатни қаноатлантирувчи n номердан бошлаб x нинг барча кейинги қийматлари

$$|x_n - 1| < \epsilon$$

муносабатни қаноатлантиради. Бу ерда ўзгарувчи миқдорнинг қийматлари лимитдан бир гал катта, бир гал кичик бўлишини қайд қилиб ўтамыз. Ўзгарувчи миқдор „лимитга унинг атрофида тебраниб“ интилади.

1-изох. 1 бобнинг 3- параграфида курсатиб ўтилганидек, ўзгармас миқдор c кўпинча ҳамма қийматлари бир хил: $x = c$ булган ўзгарувчи миқдор деб қаралади.

Ўзгармас миқдорнинг лимити шу ўзгармас миқдорнинг узига тенг экани равшан, чунки ϵ ҳар қандай булганда ҳам

$$|x - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

тенгсизлик доимо бажарилади.

2-изох. Лимитнинг таърифидан ўзгарувчи миқдор иккита лимитга эга бўла олмаслиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар $\lim x = a$ ва $\lim x = b$ ($a < b$) бўлса, у ҳолда ϵ ихтиёрий кичик булган ҳолда x бирданига ушбу иккита тенгсизликини қаноатлантириши лозим:

$$|x - a| < \epsilon \text{ ва } |x - b| < \epsilon.$$

бу эса $\epsilon < \frac{b-a}{2}$ булган ҳолда мумкин эмас (29- расм).

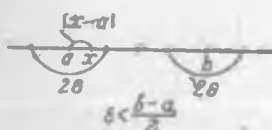
Handwritten signature or scribble at the bottom of the page.

3-изох. Ҳар бир ўзгарувчи миқдор лимитга эга деб ўйлаш ярамайди. Масалан, ўзгарувчи миқдор кетма-кет қуйидаги қийматларни қабул қилсин:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{8}, \dots$$

$$x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}, \quad x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(30-расм). k етарли даражада катта бўлганда x_{2k} қиймат ва ундан кейинги жуфт номерли барча қийматлар бирдан исталганча кам фарқ қилади, ундан кейинги x_{2k+1} қиймат ва x нинг тоқ номерли барча қийматлари эса нолдан исталганча кам фарқ қилади. Демак, ўзгарувчи x лимитга интилмайди.



29-расм.



30-расм.

Агар ўзгарувчи миқдор a лимитга интилса, у ҳолда a ўзгармас сон экани лимитнинг таърифида кўрсатилган. Аммо, „ингилади“ тушунчаси ўзгарувчи миқдорнинг бошқача ўзгариш усулини характерлаш учун ҳам ишлатилади, бунини қуйидаги таърифдан кўрамиз.

2-таъриф. Агар олдиндан берилган ҳар бир мусбат M сон учун x нинг шундай қийматини кўрсатиш мумкин бўлсаки, ўзгарувчининг шу қийматидан бошлаб, барча кейинги қийматлари $|x| > M$ тенгсизлигини қаноатлантирса, ўзгарувчи x чексизликка интилади.

Агар ўзгарувчи x чексизликка интилса, у чексиз катта ўзгарувчи миқдор дейилади ва $x \rightarrow \infty$ кўринишда ёзилади.

3-мисол: ўзгарувчи миқдор x

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3, \dots, x_n = (-1)^n n, \dots,$$

қийматларини қабул қилади. Бу чексиз катта ўзгарувчи миқдор, чунки ихтиёрий $M > 0$ да ўзгарувчининг бирор қийматидан бошлаб, ҳамма кейинги қийматлари абсолют миқдор бўйича M дан катта бўлади.

Бошқар ихтиёрий $M > 0$ да ўзгарувчининг бирор қийматидан барча кейинги қийматлари $M < x$ тенгсизлигини қаноат-

лантисра, ўзгарувчи миқдор x „плюс чексизликка интилади“ дейилади ва $x \rightarrow +\infty$ кўринишда ёзилади.

Плюс чексизликка интилувчи ўзгарувчи миқдорга $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$ қийматларни қабул қиладиган x ўзгарувчи миқдор мисол бўлади.

Агар ихтиёрий $M > 0$ да ўзгарувчининг бирор қийматидан бошлаб барча кейинги қийматлари $x < -M$ тенгсизликни қаноатлантирса, ўзгарувчи миқдор „минус чексизликка интилади“ $x \rightarrow -\infty$.

Масалан, $x_1 = -1, x_2 = -2, \dots, x_n = -n, \dots$ қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи x минус чексизликка интилади.

2- §. Функциянинг лимити

ёу параграфда x аргумент бирор a лимитга ёки чексизликка интилганда функция ўзгаришининг баъзи бир ҳолларини текшираимиз.

1- таъриф. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция a нуқта-нинг бирор атрофида ёки бу атрофнинг баъзи бир нуқталарида аниқланган бўлсин. Агар ҳар бир мусбат ε сон учун, y қанчалик кичик бўлмасин, шундай мусбат δ сонни кўрсатиш мумкин бўлсаки, x нинг a дан фарқли ва

$$|x - a| < \delta$$

тенгсизликни*) қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик ўрилин бўлса, x аргумент a га интилганда ($x \rightarrow a$), $y = f(x)$ функция b лимитга интилади ($y \rightarrow b$). Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити b бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ ёзилади.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция-нинг графигида бу қуйидагича тасвирланади (31- расм); $|x - a| < \delta$ тенгсизликдан $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик чиқар экан, у ҳолда бу, a нуқтадан δ дан йироқ бўлмаган масофада ту-



31- расм.

*) Бу ерда x нинг $|x - a| < \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи ва функциянинг аниқланиш соҳасига тааллуқли қийматлари назарда тутилади. Бундан бўён ҳам шундай ҳолатлар учраб туради. Масалан, $x \rightarrow \infty$ да функция-нинг ўзгаришини текширишда функция x нинг фақат бутун мусбат қийматлари учун аниқланган бўлиши мумкин. Бинобарин, бу ҳолда x фақат бутун мусбат қийматларни қабул қилиб чексизликка интилади ($x \rightarrow \infty$). Бундан кейин бу ҳақда изоҳ бериб ўтирмаймиз.

рувчи барча x нуқталар учун $y = f(x)$ функция графигининг M нуқталари $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан chegarаланган. энн 2ε бўлган йўл (полоса) ичида ётади.

1- изох. $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги лимитини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

Фараз қилайлик, ўзгарувчи миқдор x қийматларни шундай қабул қиладики (шундай тартибланган бўладики), агар

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|$$

булса, y ҳолда x^{**} кейинги, x^* эса олдинги қиймат бўлади; агар $|\bar{x} - a| = |\bar{x}^{**} - a|$ ва $\bar{x} < \bar{x}^{**}$ бўлса, y ҳолда $\bar{x}$ кейинги, $\bar{x}^{**}$ эса олдинги қиймат бўлади.

Бошқача айтганда, сонлар тўғри чизигининг иккита нуқта сндан a нуқтага яқини кейинги нуқтадир; масофалар тенг бўлганда a нуқтадан ўнгдагиси кейинги нуқта бўлади.

Шу равишда тартибланган ўзгарувчи x миқдор a лимитга интилсин $\{x \rightarrow a \text{ ёки } \lim x = a\}$.

Сўнгра $y = f(x)$ ўзгарувчини текшираимиз. Бунда ва бундан кейин функциянинг иккита қийматидан аргументнинг кейинги қийматига тегишли бўлганини функциянинг кейинги қиймати деб ҳисоблаймиз.

Агар шундай аниқланган y ўзгарувчи миқдор $x \rightarrow a$ да бирор b лимитга интилса, y ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

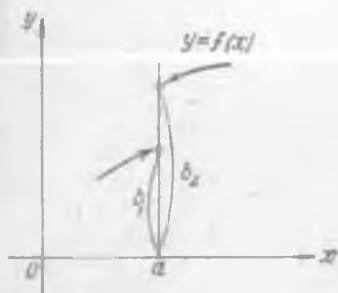
кўрнишда ёзамиз ва $y = f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да b лимитга интилади деб айтаимиз.

Функция лимитининг иккала таърифи эквивалент (тенг кучли) эканлигини исботлаш осон.

2- изох. Агар x бирор a сондан кичик қийматларнигина қабул қилиб, шу a сонга интилганда $f(x)$ функция b_1 лимитга интилса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ ёзилади ва b_1 га $f(x)$ функция-

нинг a нуқтадаги чап лимити дейилади. Агар x фақат a дан катта қийматларнигина қабул қилса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$ ёзилади ва b_2 га функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити дейилади (32- расм).

Агар ўнг лимит ва чап лимит мавжуд ва тенг, яъни $b_1 = b_2 = b$ булса, y ҳолда b , лимитнинг юқорида берилган таърифи маъносида, a нуқтадаги лимитнинг ўзи бўлишини исботлаш



32- расм.

мумкин. Аксинча, агар a нуқтада функциянинг лимити b мавжуд бўлса, у ҳолда функциянинг a нуқтада ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва улар тенг бўлади.

1-мисол. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ берилган бўлсин; ушбу

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилиши учун қуйидаги тенгсизликларнинг бажарилиши зарур:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Шундай қилиб, исталган ε да x нинг $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $3x + 1$ функция қийматининг 7 дан фарқи ε дан кичик бўлади. Бу эса $x \rightarrow 2$ да функциянинг лимити 7 демакдир.

3-изоҳ. Функциянинг лимити $x \rightarrow a$ да мавжуд бўлиши учун функция $x = a$ нуқтада аниқланган бўлиши талаб қилинмайди. Лимитни топишда a нуқтанинг a дан фарқли атрофида функциянинг қийматлари қаралади; бу ҳол қуйидаги мисол билан очиқ тасвирланади.

2-мисол. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ эканини исботлаймиз. Бу ерда $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ функция $x = 2$ да аниқланмаган.

Ихтиёрий ε да шундай δ топиладики, агар $|x - 2| < \delta$ бўлса,

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad (1)$$

тенгсизлик бажарилишини исботлаш керак. Аммо $x \neq 2$ да (1) тенгсизлик

$$\left| \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| < \varepsilon$$

тенгсизликка ёки

$$|x - 2| < \varepsilon$$

тенгсизликка эквивалентдир.

Шундай қилиб, ихтиёрий ε да (2) тенгсизлик бажарилса, (1) тенгсизлик бажарилади (бу ерда $\delta = \varepsilon$). Бунинг узи, берилган функция $x \rightarrow 2$ да 4 сонидан иборат лимитга эга демакдир.

Энди, $x \rightarrow \infty$ да функция ўзгаришининг баъзи ҳолларини кўрамиз.

2-таъриф. Ҳар бир ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун шундай мусбат N сонни кўрсатиш мумкин бўлсаки, x нинг $|x| > N$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик қаноатлантирилса, $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция b лимитига интилади.

3-н. о. ~~қўйилган~~

69XTH
БИБЛИОТЕКА
299/2137
Ташкент
Ўзбекистон Республикаси

3-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1$$

Ўси бошқача ёзувда

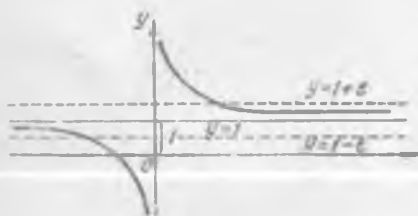
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

эканини исботлаймиз. Агар фақат $|x| > N$ бўлса, ихтиёрӣ ϵ да

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \epsilon \quad (3)$$

тенгсизлик бажарилишини исботламоқ керак, бунда ϵ танланиши билан

N аниқланади. (3) тенгсизлик $\left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$ тенгсизликка эквивалент; $|x| > \frac{1}{\epsilon} =$
 $= N$ бўлса, $\left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бунинг маъноси



83-расм.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

демаклар (33-расм).

Ушбу $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ символларнинг маъносини билган ҳолда, символик тарзда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

кўринишда ёзиладиган

„ $x \rightarrow +\infty$ да $f(x)$ b га интилади“ ва
 „ $x \rightarrow -\infty$ да $f(x)$ b га интилади“

ифодаларнинг маънолари равшан бўлади.

3-§. Чексизликка интилувчи функция.

Чекланган функциялар

Биз $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функциянинг бирор b лимитга интилиш ҳолларини кўрдик.

Энди аргумент бирор усул билан ўзгарганда $y = f(x)$ функция чексизликка интилган ҳолни кўрамиз.

1-таъриф. Ҳар қанча катта мусбат M сон учун шундай $\delta > 0$ қийматни топиш мумкин бўлсаки, x нинг $|x - a| < \delta$ шартин қаноатлантирадиган a дан фарқли барча қийматлари учун $|f(x)| > M$ тенгсизлик ўринли бўлса, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилади, яъни $x \rightarrow a$ да функция чексиз катта миқдор бўлади.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow \infty$.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса ва бунда фақат мусбат ёки фақат манфий қийматлар қабул қилса, мос равишда бундай ёзилади: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

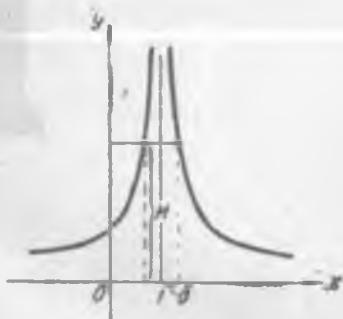
1-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, ҳар қандай $M > 0$ да фақат

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \sqrt{\frac{1}{M}} = \delta$$

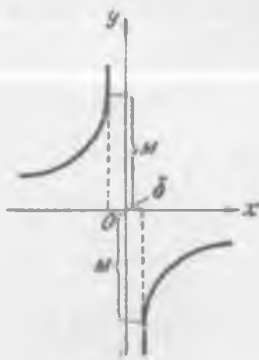
бўлса,

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M$$

га оға бўламиз. $\frac{1}{(1-x)^2}$ функция фақат мусбат қийматлар қабул қилади (34-расм).



34-расм.



35-расм.

2-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, ихтиёрӣ $M > 0$ да фақат

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$$

бўлса,

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M$$

бўлади. Бу ерда $x < 0$ да $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ ва $x > 0$ да $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$ (35-расм).

Агар $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ва жумладан

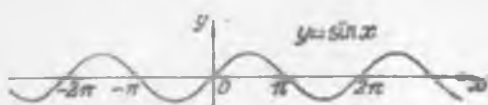
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

булиши мумкин.

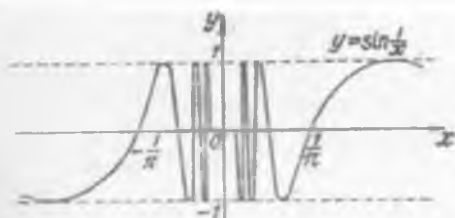
Масалан,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ ва ш. ғ.}$$

1-изоҳ. $x \rightarrow a$ да ёки $x \rightarrow \infty$ да $y = f(x)$ функция чекли лимитга ёки чексизликка интилмаслиги мумкин.



36- расм.



37- расм.

3- мисол. $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган $y = \sin x$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди (36- расм).

4- мисол. x нинг $x = 0$ дан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган $y = \sin \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow 0$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди. Бу функциянинг графиги 37- расмда тасвирланган.

2- таъриф. Агар шундай мусбат M сон мавжуд бўлиб, аргумент x нинг қаралаётган соҳага тегишли барча қийматлари учун $|f(x)| \leq M$ тенгсизлик бажарилса, x

нинг берилган ўзгариш соҳасида $y = f(x)$ чекланган функция дейилади. Агар бундай M сон мавжуд бўлмаса, у ҳолда берилган соҳада $y = f(x)$ чекланмаган функция дейилади.

5- мисол. Чексиз $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган $y = \sin x$ функция чекланган, чунки x нинг барча қийматларида

$$|\sin x| < 1 = M.$$

3- таъриф. Агар маркази a нуқтада бўлган атроф мавжуд бўлиб, берилган функция шу атрофда чекланган бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекланган дейилади.

4- таъриф. Агар шундай $N > 0$ сон мавжуд бўлиб, x нинг $|x| > N$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи барча қийматларида

$f(x)$ функция чекланган бўлса, $y = f(x)$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекланган дейилади.

Лимитга интилувчи функциянинг чекланганлиги ҳақидаги масала қуйидаги теорема билан ечилади.

1-теорема. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлиб, b чекли сон бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекланган бўлади.

Исбот. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ тенгликдан исталган $\varepsilon > 0$ да шундай δ топиладики, $a - \delta < x < a + \delta$ атрофда,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ёки

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекланган демакдир.

2-изох. Чекланган $f(x)$ функциянинг таърифидан агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{ёки} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

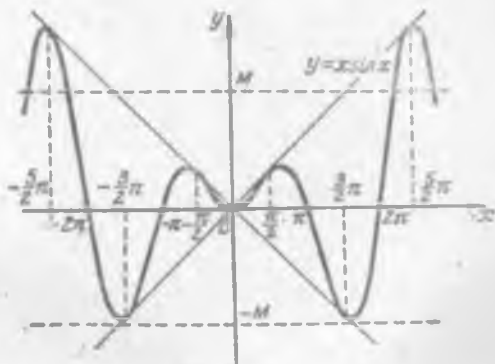
яъни $f(x)$ чексиз катта миқдор бўлса, у ҳолда функция чекланмаган бўлиши келиб чиқади. Бунинг акси: чекланмаган функция чексиз катта миқдор бўлмаслиги ҳам мумкин, деган жумла тўғри эмас.

Масалан, $y = x \sin x$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекланмаган, чунки исталган $M > 0$ учун x нинг шундай қийматларини топиш мумкинки, $|x \sin x| > M$ бўлади. Лекин $y = x \sin x$ функция $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ қийматларда нолга айлани учун чексиз катта миқдор эмас. $y = x \sin x$ функциянинг графиги 38-расмда тасвирланган.

2-теорема. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ бўлса, у

ҳолда $y = \frac{1}{f(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чекланган функциядир.

Исбот. Теореманинг шартидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ да $x = a$ нуқтанинг бирор атрофида $|f(x) - b| < \varepsilon$ ёки $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, ёки $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, ёки $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.



38-расм.

Охирги тенгсизликлардан $\frac{1}{|b|-\varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b|+\varepsilon}$ келиб чиқади; масалан, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$ деб олсак, ушбу

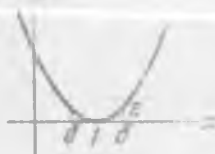
$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу эса $\frac{1}{f(x)}$ функция чекланган демакдир.

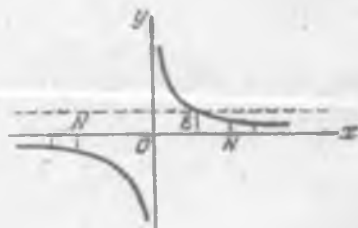
4- §. Чексиз кичик миқдорлар ва уларнинг асосий хоссалари

Бу параграфда аргументнинг бирор характердаги ўзгаришида нолга интилувчи функцияларни текшираемиз.

Таъриф. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ бўлса, $x \rightarrow a$ да ёки $x \rightarrow \infty$ да $\alpha(x)$ функция чексиз кичик миқдор дейилади.



39- расм.



40- расм.

Лимитнинг таърифидан чиқадики, масалан, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, бу, олдиндан берилган ҳар қандай ихтиёрий кичик мусбат ε учун $\delta > 0$ топиладики, x нинг $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|\alpha(x)| < \varepsilon$ шартни қаноатлантирилади демакдир.

1- мисол. $\alpha = (x - 1)^2$ функция $x \rightarrow 1$ да чексиз кичикдир, чунки $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$ (39- расм).

2- мисол. $\alpha = \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичикдир (40- расм) (2- § даги 3- мисолга қаранг).

Келгуси учун муҳим бўлган бир муносабатни аниқлаймиз:

1- теорема. Агар $y = f(x)$ функция ўзгармас сон b билан чексиз кичик миқдор α нинг йиғиндиси

$$y = b + \alpha \quad (1)$$

кўринишда берилса, y ҳолда,

$$\lim y = b \quad (x \rightarrow a \text{ ёки } x \rightarrow \infty \text{ да}).$$

Аксинча, агар $\lim y = b$ бўлса, $y = b + \alpha$ ёзиш мумкин, бу ерда α чексиз кичик миқдор.

Исбот. (1) тенгликдан $|y - b| = |\alpha|$ келиб чиқади. Аммо ихтиёрий ε да, бирор қийматдан бошлаб, α нинг барча қийматлари $|\alpha| < \varepsilon$ муносабатни қаноатлантиради, демак, бирор қийматдан бошлаб, y нинг барча қийматлари учун $|y - b| < \varepsilon$ тенгсизлик қаноатлантирилади. Бунинг ўзи $\lim y = b$ демакдир.

Аксинча: агар $\lim y = b$ бўлса, y ҳолда ихтиёрий ε да бирор қийматдан бошлаб, y нинг барча қийматлари учун $|y - b| < \varepsilon$ бўлади. Лекин $y - b = \alpha$ деб белгиласак, y ҳолда α нинг бирор қийматидан бошлаб, барча қийматлари учун $|\alpha| < \varepsilon$ бўлади, бу эса α чексиз кичик миқдор демакдир.

3-мисол. Функция

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

берилган бўлсин (41-расм), y ҳолда

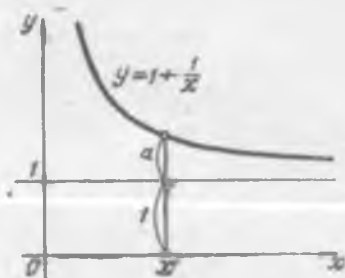
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1,$$

ва аксинча, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ бўлгани учун, ўзгариш

рувчи y ни лимит 1 билан $\alpha = \frac{1}{x}$ чексиз кичик миқдорнинг йиғиндиси, яъни

$$y = 1 + \alpha$$

кўринишда ёзиш мумкин.



41-расм.

2-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $\alpha = \alpha(x)$ нолга интилса-ю, лекин нолга айланмаса, y ҳолда $y = \frac{1}{\alpha}$ чексизликка интилади.

Исбот. $M > 0$ исталганча катта бўлганда $|\alpha| < \frac{1}{M}$ тенгсизлик бажарилса, $\frac{1}{|\alpha|} > M$ тенгсизлик бажарилади. $|\alpha| < \frac{1}{M}$ тенгсизлик α нинг бирор қийматидан бошлаб, барча қийматлари учун бажарилади, чунки $\alpha(x) \rightarrow 0$.

3-теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги чексиз кичик функцияларнинг алгебраик йиғиндиси чексиз кичик функциядир.

Исбот. Исботни иккита қўшилувчи учун келтирамыз, чунки саноғи исталганча булган қўшилувчилар учун теорема худди шундай исботланади.

$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ бўлсин, бу ерда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$.

Ихтиёрый инсталганча кичик $\varepsilon > 0$ шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик қаноатлантирилганда $|u| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз. $\alpha(x)$ чексиз кичик бўлгани учун шундай δ топиладики, маркази a нуқтада ва радиуси δ_1 бўлган атрофда

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. $\beta(x)$ чексиз кичик бўлгани учун, маркази a нуқтада ва радиуси δ_2 бўлган атрофда $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Энди δ ни δ_1 ва δ_2 миқдорлардан кичигига тенг қилиб оламиз, у ҳолда a нуқтанинг δ радиусли атрофида $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ ва $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. Бинобарин бу атрофда

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яъни $|u| < \varepsilon$ бўладики, бу эса талаб қилинган исботдир.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$$

булган ҳол учун ҳам исбот шундай ўтказилади.

Изоҳ. Бундан буён бизга шундай чексиз кичик миқдорларнинг йиғиндисини текширишга тўғри келадики, ҳар бир қушилувчининг камайиши билан қушилувчилар сони ортиб боради. Бу ҳолда теореманинг тасдиқи нотўғри бўлиб қолиши ҳам мумкин. Масалан, ушбу чексиз кичик миқдорлар йиғиндисини кўздан кечирайлик:

$$u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{x \text{ та қушилувчи}}$$

бу ерда x бутун мусбат қийматлар ($x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) қабул қилади. Ҳар бир қушилувчи $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичиклиги, лекин йиғинди $u = 1$ чексиз кичик эмаслиги равшан.

4-теорема. Чексиз кичик $\alpha = \alpha(x)$ функциянинг чекланган $z = z(x)$ функция билан купайтмаси $x \rightarrow a$ (ёки $x \rightarrow \infty$) да чексиз кичик миқдордир (функциядир).

Исбот. Исботини $x \rightarrow a$ ҳол учун келтирамиз. Бирор $M > 0$ учун $x = a$ нуқтанинг шундай атрофи топиладики, бу атрофда $|z| < M$ тенгсизлик қаноатлантирилади. Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ тенгсизлик бажариладиган атроф топнади. Бу иккита атрофдан энг кичигида

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса αz чексиз кичик демакдир. $x \rightarrow \infty$ ҳол учун ҳам исбот шу тариқа ўтказилади. Шу теоремадан қуйидаги натижалар чиқади:

1- натижа. Агар $\lim z = 0$, $\lim \beta = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim \alpha \beta = 0$, чунки $\beta(x)$ чекланган миқдор. Бу ҳол ҳар қандай чекли сондаги кўпайтувчилар учун ҳам ўринлидир.

2- натижа. Агар $\lim \alpha = 0$ ва $c = \text{const}$ бўлса, у ҳолда $\lim c\alpha = 0$.

5- теорема. Чексиз кичик $\alpha(x)$ миқдорни лимити нолдан фарqli функцияга бўлишдан чиққан $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ бўлима чексиз кичик миқдордир.

Исбот. $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$ бўлсин. 3- § даги 2- теоремага асосан, $\frac{1}{z(x)}$ чекланган миқдор эканлиги чиқади.

Шунинг учун $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ каср чексиз кичик миқдорнинг чекланган сон билан кўпайтмаси, яъни чексиз кичик миқдордир.

5- §. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар

Бу параграфда ҳам олдингидегидек, биргина x аргументга боғлиқ функциялар тўпламини текшираимиз, бунда $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$.

Биз исботни бу ҳоллардан биттаси учун келтираимиз, чунки иккинчиси учун исбот худди шундай ўтказилади. Баъзан биз умуман $x \rightarrow a$ ни ҳам, $x \rightarrow \infty$ ни ҳам ёзмаймиз, лекин булар ўрнига қараб англашилади.

1- теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги ўзгариувчилар алгебраик йиғиндисининг лимити бу ўзгариувчилар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\lim (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_n.$$

Исбот. Исботни икки қўшилувчи учун келтираимиз, чунки қўшилувчилар сони ҳар қанча бўлганда ҳам исбот худди шундай ўтказилади. Айтайлик, $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$ бўлсин. У ҳолда 4- § даги 1- теоремага асосан бундай ёзиш мумкин:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

бу ерда α_1 ва α_2 чексиз кичик миқдорлар. Демак,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

$(a_1 + a_2)$ ўзгармас миқдор, $(a_1 + a_2)$ эса чексиз кичик миқдор, у ҳолда яна 4-§ даги 1-теоремага асосан бундай хулоса чиқарамиз:

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

2-теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги ўзгарувчилар кўпайтмасининг limiti бу ўзгарувчилар limitларининг кўпайтмасига тенг:

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \dots \cdot \lim u_n.$$

Исбот. Ёзувни ихчамлаш мақсадида исботни икки кўпайтувчи учун келтирамиз.

$$\lim u_1 = a_1, \quad \lim u_2 = a_2 \text{ бўлсин.}$$

Демак,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

$a_1 a_2$ кўпайтма ўзгармас миқдор. 4-§ даги теоремаларга асосан $a_1 a_2 + a_2 \alpha_1 + a_1 \alpha_2$ чексиз миқдор. Демак, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Натижа. Ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин.

Ҳақиқатан, агар $\lim u_1 = a_1$, c ўзгармас ва, демак, $\lim c = c$ бўлса, у ҳолда $\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, бу эса талб қилинган исботдир.

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

3-теорема. Махражининг limiti нолдан фарқли бўлса, икки ўзгарувчи миқдор бўлинмасининг limiti шу ўзгарувчилар limitларининг бўлинмасига тенг:

$$\text{Агар } \lim v \neq 0 \text{ бўлса, } \lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

Исбот. $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$ бўлсин. Демак, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, бу ерда α ва β чексиз кичик миқдорлар.

Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{a\beta - \beta a}{b(b + \beta)}$$

ёки

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

$\frac{a}{b}$ каср ўзгармас сон, $\frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}$ каср эса 4-§ нинг 4-ва 8-теоремаларига мувофиқ чексиз кичик ўзгарувчи миқдордир, чунки $ab - \beta a$ чексиз кичик миқдор, $b(b + \beta)$ махраж эса $b^2 \neq 0$ лимитга эга. Бинобарин,

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

3-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 5}{4x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 2)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5}{4 \lim_{x \rightarrow 1} x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Бу ерда биз касрнинг лимити ҳақида исботланган теоремадан фойдаландик, чунки $x \rightarrow 1$ да махражнинг лимити нолдан фарқи. Агар махражнинг лимити нол бўлса касрнинг лимити ҳақидаги теоремани қўлланиш мумкин эмас. Бу ҳолда махсус текширишлар ўтказиш керак бўлади.

4-мисол. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ топилсин.

Бу ерда $x \rightarrow 2$ да махраж ҳам, сурат ҳам нолга интилади ва демек, 8-теорема қўл келмайди. Қуйидаги айний алаштиришни бажарамиз:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Бу алаштириш x нинг 2 дан фарқи ҳамма қийматлари учун ўринлидир. Шунинг учун лимитнинг таърифини назарда тутган ҳолда бундай ёза оламиз:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

5-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$ топилсин. $x \rightarrow 1$ да махраж нолга интилади, сурат аса нолга интирмайди (сурат бирга интилади). Демак, тескари миқдорнинг лимити нол, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Бундан ўтган параграфнинг 2-теоремасига асосан:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \infty.$$

4-теорема. Агар учта $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ функциянинг тегишли қийматлари орасида $u \leq z \leq v$ тенгсизликлар бажарилоа, бунда $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $u(x)$ ва

$v(x)$ биргина b лимитга интилса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $z = z(x)$ ҳам шу лимитга интилади.

Исбот. Аниқлик учун $x \rightarrow a$ да функцияларнинг ўзгаришини текшираемиз. $u \leq z \leq v$ тенгсизликлардан

$$u - b \leq z - b \leq v - b$$

тенгсизликлар келиб чиқади; шарт буйича

$$\lim_{x \rightarrow a} u = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = b.$$

Демак, исталган $\varepsilon > 0$ да маркази a нуқтада бўлган бирор атроф топиладики, бу атрофда $|u - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; шунингдек маркази a нуқтада бўлган бирор атроф ҳам топиладики, бу атрофда $|v - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Курсатилган атрофлардан энг кичигида

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \quad \text{ва} \quad -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади, демак,

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} z = b.$$

5-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) функция у манфий бўлмаган $u \geq 0$ да қийматларни қабул қилса ва бунда b лимитга интилса, у ҳолда b манфий бўлмаган $b \geq 0$ сондир.

Исбот. Фараз қилайлик, $b < 0$ бўлсин, у ҳолда $|u - b| \geq |b|$, яъни $|u - b|$ айирманинг модули $|b|$ мусбат сондан катта, демак, $x \rightarrow a$ да нолга интилмайди. Аммо, у вақтда $x \rightarrow a$ да у функция b га интилмайди, бу эса теореманинг шартига зид келади. Демак, $b < 0$ деб фараз қилиш қарама-қаршиликка олиб келади. Демак, $b \geq 0$.

Агар $u \leq 0$ бўлса, у ҳолда $\lim u \leq 0$ бўлиши шунинг сингарини исботланади.

6-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) лимитларига интилувчи иккита $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциянинг тегишли қийматлари орасида $v \geq u$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\lim v \geq \lim u$ бўлади.

Исбот. Шартга биноан $v - u \geq 0$, демак, 5-теоремага мувофиқ $\lim (v - u) \geq 0$ ёки $\lim v - \lim u \geq 0$, яъни $\lim v \geq \lim u$.

6-мисоал. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ни исботлаймиз.

42-расмдан: агар $OA = 1$, $x > 0$ бўлса, $AC = \sin x$, $\cup AB = x$, $\sin x < x$ экани чиқади. $x < 0$ да $|\sin x| < |x|$ бўлиши равшан. Бу тенгсизликлардан 5 ва 6-теоремаларга асосан $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ эканлиги чиқади.

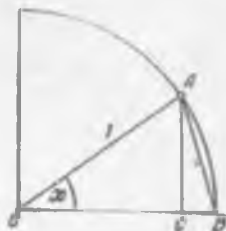
7- мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ ни исботлаймиз.
Ҳақиқатан,

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| < \left| \sin x \right|.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

8- мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ни исботлаймиз.



44- расм.

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ эканини эътиборга оламиз, демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Ўзгарувчиларнинг limiti ҳақидаги масаланинг баъзи бир текширишларида иккита мустақил масалани ечишга тўғри келади:

- 1) ўзгарувчининг limiti мавжудлигини исботлаш ва ичида текширилаётган лимит ётадиган чегараларни аниқлаш;
- 2) текширилаётган лимитни керакли даражада аниқлик билан ҳисоблаш.

Баъзан биринчи масала келгуси учун муҳим бўлган қуйидаги теорема ёрдами билан ечилади.

7- теорема. Агар ўзгарувчи миқдор v ўсувчи, яъни унинг ҳар бир кейинги қиймати олдингисидан катта бўлса ва у чекланган, яъни $v < M$ бўлса, бу ўзгарувчи миқдор $\lim v = a$ лимитга эгадир, бу ерда $a \leq M$.

Чекланган ҳолда камайиб борадиган ўзгарувчи миқдор учун ҳам шундай тасдиқ ўринлидир.

Бу теореманинг исботини бу ерда келтирмаймиз, чунки у ҳақиқий сонлар назариясига асосланади, биз бу ерда у назарияни келтирмаймиз*).

Қуйидаги икки параграфда математикада куп татбиқ этиладиган иккита функциянинг limitлари чиқарилади.

6- §. $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг limiti

$\frac{\sin x}{x}$ функция $x = 0$ да аниқланмаган, чунки касрнинг сурат ва махражи нолга айланади. Бу функциянинг $x \rightarrow 0$ даги limitини топамиз. Радиуси 1 бўлган айланани қараймиз (43- расм);

*) Бу теореманинг исботи, масалан, Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, 1- том, 1970, китобида келтирилган.

МОВ марказий бурчакни x билан белгилаймиз, бунда $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

43- расмдан бевосита қуйидагилар чиқади:

$$\triangle MOA \text{ юзи} < \widehat{MOA} \text{ сектор юзи} < \triangle COA \text{ юзи.} \quad (1)$$

$$\triangle MOA \text{ юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$\widehat{MOA} \text{ сектор юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{MA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$\triangle COA \text{ юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

(1) тенгсизлик $\frac{1}{2}$ га қисқартирилгандан сўнг бундай ёзилади:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Ҳамма ҳадларини $\sin x$ га бўламиз:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ёки

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$



43- расм

Биз бу тенгсизликни $x > 0$ фараз қилиб чиқардик;

$\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ ва $\cos(-x) = \cos x$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгсизлик $x < 0$ да ҳам тўғри деган хулосага келамиз. Аммо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Демак, $\frac{\sin x}{x}$ ўзгарувчи шундай икки миқдор оралигидаки, уларнинг иккаласи ҳам биргина лимитга интилади ва у лимит 1 га тенг; шундай қилиб, ўтган параграфнинг 4-теоремасига асосан

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$y = \frac{\sin x}{x}$ функциянинг графиги 44- расмда тасвирланган.

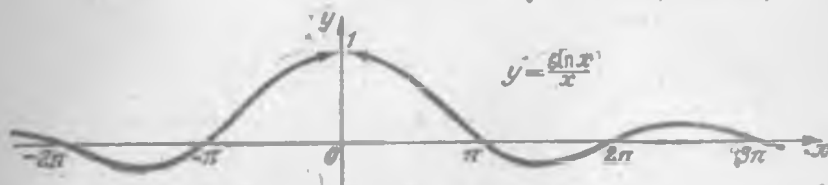
Мисоллар.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k \quad (k = \text{const}).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \\ (a = \text{const}, \beta = \text{const}).$$



44- расм.

7- §. e сонн

Ушбу

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ўзгарувчи миқдорни текширамыз, n бу ерда натурал қатор сонларининг 1, 2, 3, ... қийматларини қабул қиладиган ўсувчи миқдор.

1- теорема. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор $n \rightarrow \infty$ да 2 билан 3 орасида ётувчи лимитга эга.

Исбот. Ньютон биноми формуласига мувофиқ бундай ёзишимиз мумкин:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

(1) тенгликни қуйидагича алмаштиришимиз мумкин:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

Охирги тенгликдан $(1 + \frac{1}{n})^n$ узгарувчи миқдор n ўсиши билан ўсадиган узгарувчи миқдор эканлиги чиқади. Ҳақиқатан, n қийматдан $n+1$ қийматга ўтганда охирги йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси ўсади.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{ ва ҳоказо}$$

ва яна бир ҳад қўшилади. (Ёйилманинг ҳамма ҳадлари мусбат.)

Энди $(1 + \frac{1}{n})^n$ узгарувчи миқдор чекланганлигини кўрсатамиз. $(1 - \frac{1}{n}) < 1$; $(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) < 1$ ва ҳоказо эканлигини қайд қилиб, (2) ифодадан ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Сўйгра

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{2}{2^{n-1}}$$

эканлигини қайд қилиб, тенгсизликни бундай ёзмағимиз мумкин:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонида тагига чизилгач ҳадлар маҳражи $q = \frac{1}{2}$ ва биринчи ҳади $a = 1$ бўлган геометрик прогрессияни ҳосил қилади, шунинг учун

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \\ &= 1 + \frac{a - aq^n}{1 - q} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3. \end{aligned}$$

Демак, барча n учун шу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

(2) тенгликдан

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Бу билан $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор чекланганлиги аниқланди.

Демак, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор ўсувчи ва чекланган, шунинг учун 5- § даги 7- теоремага асосан у лимитга эга. Бу лимит e ҳарфи билан белгиланади.

Таъриф. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдорнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити e сони дейилади:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n*}.$$

5- § даги 6- теоремага асосан (3) тенгсизликдан e сони ҳам $2 \leq e \leq 3$ тенгсизликни қаноатлантириши чиқади. Теорема исботланди.

e сони иррациональ сон. Кейинроқ уни исталган даражада аниқлик билан ҳисоблаш методи кўрсатилади. Унинг вергулдан кейинги ўнта ишончли рақамли қиймати:

$$e = 2,7182818284 \dots$$

2-теорема. x чексизликка интилганда $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функция e лимитга интилади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Исбот. Агар n бутун мусбат қийматлар қабул қилса, $n \rightarrow \infty$ да $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ аниқланган эди. Энди x каср қийматлар ҳам, маъфий қийматлар ҳам қабул қилган ҳолда, чексизликка интилсин.

1) $x \rightarrow +\infty$ дейлик. Унинг ҳар бир қиймати иккита мусбат бутун сон орасида:

$$n \leq x < n + 1.$$

Бунда қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}.$$

^{*}) n монотон ўсаядиган ўзгарувчи миқдор бўлмаганда ҳам $n \rightarrow +\infty$ да $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ эканлиги кўрсатмоқ мумкин.

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Агар $x \rightarrow \infty$ бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ равшан. Ораларида $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ узгарувчи ётадиган узгарувчиларнинг лимитларини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

демак, (5- § даги 4- теоремага мувофиқ),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

2) $x \rightarrow -\infty$ дейлик. Янги $t = -(x+1)$ ёки $x = -(t+1)$ узгарувчини киритамиз. $t \rightarrow +\infty$ да $x \rightarrow -\infty$ бўлади. Бундай ёза оламиз:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

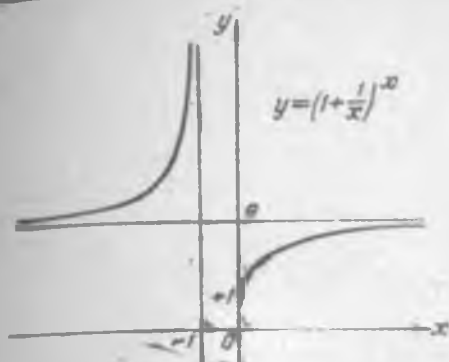
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Теорема исботланди, $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функциянинг графиги 45- расмда тасвирланган.

Агар (4) тенгликда $\frac{1}{x} = \alpha$ фараз қилинса, у ҳолда $x \rightarrow \infty$ да $\alpha \rightarrow 0$ (аммо $\alpha \neq 0$) ва биз мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$



45- расм.



46- расм.

Мисоллар:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e.$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e \cdot e = e^3.$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4} =$
 $= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4.$

Изоҳ. Асоси e бўлган кўрсаткичли функция

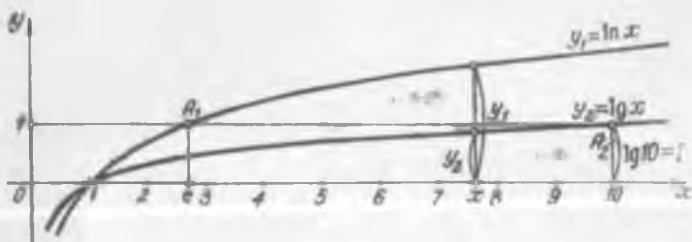
$$y = e^x,$$

буидан буён математика курсида жуда катта роль ўйнайди. Бу функция механикада (тебранишлар назариясида), электротехникада ва радиотехникада, радиохимия ва ҳоказоларда турли ҳодисаларни ўрганишда катта роль ўйнайди. Бу функцияни кўпинча **экспонентал** функция (Exponential function) деб аташади. Кўрсаткичли функция $y = e^x$ нинг ва кўрсаткичли функция $y = e^{-x}$ нинг графиклари 46- расмда тасвирланган.

8- §. Натурал логарифмлар

I бобнинг 8- § ида логарифмик функция $y = \log_a x$ таърифланган эди. a сони логарифмлар асоси дейилади. Агар $a = 10$ бўлса, y ҳолда y га x нинг ўнли логарифми дейилади ва $y = \lg x$ билан белгиланади. Инглиз олими Бригг (1556—1630) номи билан Бригг логарифмлари деб аталадиган ўнли логарифмлар қийматларининг жадвали мактаб курсидан маълум.

Асоси $e = 2,71828 \dots$ сондан иборат логарифмлар *натурал логарифмлар* ёки биринчи логарифмик жадвалларнинг ихтирочиларидан бири, математик Непер (1550—1617) номи билан *Непер логарифмлари* дейилади. Демак, $e^y = x$ бўлса, y га x нинг натурал логарифми дейилади ва $y = \log_e x$ ўрнига $y = \ln x$ билан ёзилади. $y = \ln x$ ва $y = \lg x$ функцияларнинг графиклари 47- расмда ясалган.



47- расм.

Энди айни бир x соннинг ўнли ва натурал логарифмлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз. $y = \lg x$ ёки $x = 10^y$ бўлсин. Охирги тенгликнинг чап ва ўнг томонларини e асосга кўра логарифмлаймиз:

$$\ln x = y \ln 10.$$

Бундан $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ ёки y нинг қийматини қўйиб, $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, агар x соннинг натурал логарифми маълум бўлса, бу соннинг ўнли логарифми уни x га боғлиқ бўлмаган $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$ кўпайтувчига кўпайтириш йўли билан топилади. M сони натурал логарифмдан ўнли логарифмга *утиш модули* дейилади:

$$\lg x = M \ln x.$$

Агар бу айнtimerда $x = e$ фараз қилсак, y ҳолда M соннинг ўнли логарифм орқали ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\lg e = M \quad (\ln e = 1).$$

Натурал логарифмлар ўнли логарифмлар билан бундай ифодаланади:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

бу ерда

$$\frac{1}{M} \approx 2,302585.$$

Изоҳ. Сонларнинг натурал логарифмларини ҳисоблаш учун махсус жадваллар бор (масалан, қаралсин: И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, 1967).

9- §. Функцияларнинг узлуксизлиги

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция бирор x_0 қийматда ва маркази x_0 да бўлган бирор атрофда аниқланган $y_0 = f(x_0)$ бўлсин.

Агар x бирор мусбат ёки манфий (фарқи йўқ) Δx орттима олсак ва $x = x_0 + \Delta x$ қийматга эга бўлиб қолсак, y ҳолда y функция ҳам бирор Δy орттима олади. Функциянинг янги ўстирилган қиймати $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ бўлади (48-расм).

Δy функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

формула билан ифодаланади.

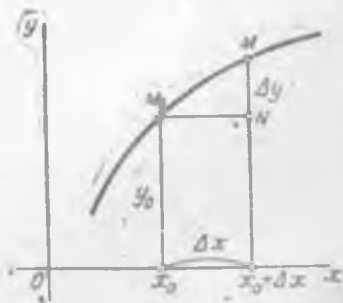
1- таъриф. Агар x_0 нуқтанинг бирор атрофида (x_0 нуқтанинг ўзида ҳам) $y = f(x)$ функция аниқланган бўлса ва агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

ёки (яна шунинг ўзи)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad (2)$$

бўлса, $x = x_0$ қийматда (ёки x_0 нуқтада) функция узлуксиз



48- расм.

дейилади. (2) ифоданинг узлуксизлик шартини бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ёки

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (3)$$

яъни

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x.$$

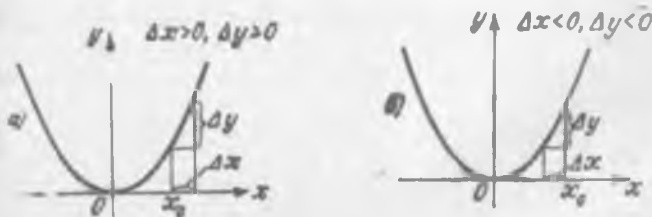
Демак, (3) тенглакни бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right), \quad (4)$$

яъни $x \rightarrow x_0$ да узлуксиз функциянинг лимитини топиш учун функциянинг ифодасида аргумент x ўрнига унинг x_0 қийматини қўйиш kifoya. Берилган нуқтада функция узлуксизлигининг геометрик тасвири шуни билдирадики, агар фақат $|\Delta x|$ етарли кичик бўлса $x_0 + \Delta x$ ва x_0 нуқталарда функция графиги ординаталарининг айирмаси абсолют қиймат бўйича ихтиёрий кичик бўлади.

1-мисол. $y = x^2$ функциянинг ихтиёрий x_0 нуқтада узлуксизлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2,$$



49-расм.

x исталган усул билан исботлаш мумкин (49-а ва б расм):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

2-мисол. Ихтиёрий x_0 нуқтада $y = \sin x$ функциянинг узлуксизлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$y_0 = \sin x_0, \quad y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Юқорида 5- § даги (7- мисол) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ эканлиги кўрсатилган эди.
 $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ функция чекланган. Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Ҳар бир асосий элементар функцияни худди шу тариқа кўздан кечириб, ҳар бир асосий элементар функция ўзи аниқланган ҳар бир нуқтада узлуксиз эканини исботлаш мумкин.

Сўнгра қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ йиғинди ҳам x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.

Исбот. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар узлуксиз бўлгани учун (3) тенгликка асосан мана буларни ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0) \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Лимитлар ҳақидаги 1- теоремага асосан бундай ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \\ &= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0). \end{aligned}$$

Демак, йиғинди $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ узлуксиз функциядир. Теорема исботланди.

Теорема ҳар қандай чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам туғрилигини натижа тариқасида қайд қилиб ўтаемиз.

Лимитлар назариясига суяниб, қуйидаги теоремаларни ҳам исботлаш мумкин:

а) Икки узлуксиз функциянинг қўпайтмаси узлуксиз функциядир.

б) Икки узлуксиз функциянинг бўлинмаси, агар қаралаётган нуқтада махраж нолга айланмаса, узлуксиз функциядир.

в) Агар $x = x_0$ да $u = \varphi(x)$ узлуксиз ва $u_0 = \varphi(x_0)$ нуқтада $f(u)$ функция узлуксиз бўлса, $f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиздир.

Бу теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

2-теорема. Ҳар қандай элементар функция ўзи аниқланган ҳар бир нуқтада узлуксиздир*).

*) Бу масала Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, I- том, 1970, китобида муфассал баён этилган.

3-мисол. $y = x^2$ функция исталган x_0 нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

4-мисол. $y = \sin x$ функция исталган нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5-мисол. $y = e^x$ функция ҳар бир нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a.$$

✓ 6-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right].$$

Мэдомики, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ва $z > 0$ да $\ln z$ функция узлуксиз, демак, $z = e$ да ҳам узлуксиз, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

2-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция бирор (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу интервалда узлуксиз дейилади, бу ерда $a < b$.

Агар функция $x = a$ да ҳам аниқланган бўлса ва бунда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада

унгдан узлуксиз дейилади. Агар $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = b$ нуқтада чандан узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса ва интервал учларида тегишли равишда унгдан ва чандан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ интервалда ёки кесмада узлуксиз дейилади.

7-мисол. $y = x^2$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳар қандай нуқтасида узлуксизлиги 1-мисолдан келиб чиқади.

Агар бирор $x = x_0$ нуқтада $y = f(x)$ функция учун узлуксизлик шартларидан ҳеч бўлмаганда биттаси бажарилмаса, яъни агар $x = x_0$ да функция аниқланмаган бўлса, ёки $\lim f(x)$

лимит мавжуд булмаса, ёки $x \rightarrow x_0$ интилиш ихтиёрий булса-ю, ўнгда ва чапда турган нфодалар мавжуд булса-да, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ булса, у ҳолда $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада *узилган* бўлади. Бу ҳолда $x = x_0$ нуқта *функциянинг узилиш нуқтаси* дейилади.

8-мисол. $y = \frac{1}{x}$ функция $x = 0$ булганда узилувчидир. Ҳақиқатан $x = 0$ да функция аниқланмаган.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Бу функция исталган $x \neq 0$ қийматда узлуксиз эканлигини кўрсатиш осон.

9-мисол. $y = 2^x$ функция $x = 0$ да узилувчи. Ҳақиқатан, $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^x = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^x = 0$. $x = 0$ да функция аниқланмаган (50-расм).

10-мисол. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ функцияни текшираимиз.

$$x < 0 \text{ да } \frac{x}{|x|} = -1 \text{ бўлади;}$$

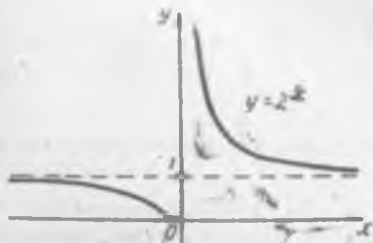
$$x > 0 \text{ да } \frac{x}{|x|} = 1 \text{ бўлади.}$$

Демак,

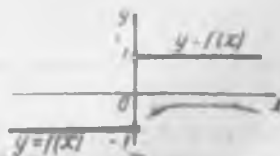
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1;$$

$x = 0$ да функция аниқланмаган. Шундай қилиб, $x = 0$ да $f(x) = \frac{x}{|x|}$ функция узилувчи эканини аниқладик (51-расм).



50-расм.



51-расм.

11- мисол. 3- § нинг 4- мисолида текширилган $y = \sin \frac{1}{x}$ функция $x = 0$ да узилувчидир.

3- таъриф. Агар $f(x)$ функция шундай бўлсаки,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \text{ ва } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$$

чекли лимитлар мавжуд, аммо $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ ёки $x = x_0$ да $f(x)$ функция аниқланмаган бўлса, у ҳолда $x = x_0$ нуқта 1- тур узилиш нуқта дейилади. (Масалан, 10- мисолда кўрилган функция учун $x = 0$ нуқта 1- тур узилиш нуқтадир.)

10- §. Узлуксиз функцияларнинг баъзи бир хоссалари

Бу параграфда кесмада узлуксиз бўлган функцияларнинг баъзи бир хоссаларини текширамыз. Бу хоссалар теоремалар шаклида ифодаланади, уларни исботсиз келтирамыз*).

1- теорема. Агар $y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ ($a \leq x \leq b$) кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = x_1$ нуқта топиладики, функциянинг бу нуқтадаги қиймати

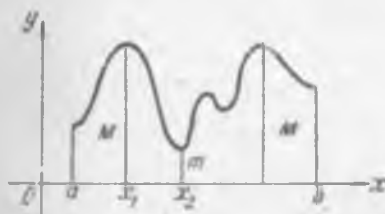
$$f(x_1) \geq f(x)$$

муносабатни қаноатлантиради, бу ерда x кесманинг исталган бошқа нуқтаси ва ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = x_2$ нуқтаси топиладики, функциянинг бу нуқтадаги қиймати

$$f(x_2) \leq f(x)$$

муносабатни қаноатлантиради.

Функциянинг $f(x_1)$ қийматини $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати деб атаймиз, функциянинг $f(x_2)$ қийматини функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик қиймати деб атаймиз.



52- расм.

Бу теорема қисқача бундай ифодаланади:

$a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз функция бу кесмада ҳеч бўлмаганда бир марта энг катта M қийматга ва энг кичик m қийматга эришади.

Бу теореманинг маъноси 52- расмда равшан тасвирланган.

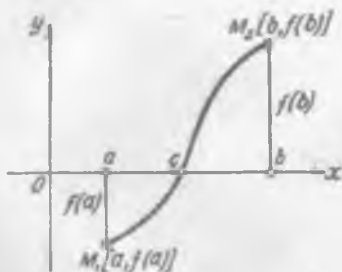
*) Бу теореманинг исботи Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, 1- томи, „Ўқитувчи“, 1970, китобидан топиш мумкин.

Из ох. Функциянинг қийматлари $a < x < b$ интервалда қаралса, функциянинг энг катта қиймати бўлиши ҳақидаги теореманинг тасдиқи нотўғри бўлиб қолиши мумкин. Масалан, $y = x$ функцияни $0 < x < 1$ интервалда қарасак, у ҳолда унинг қийматлари орасида энг каттаси ҳам йўқ ва энг кичиги ҳам йўқ. Ҳақиқатан, бу интервалда x нинг энг кичик қиймати ҳам, энг катта қиймати ҳам йўқ. (Четки чап нуқта йўқ, чунки ҳар қандай x^* нуқтани олмайлик, бу олинган нуқтадан чапда бўлган, масалан, $\frac{x^*}{2}$ нуқта топилади; шунингдек четки унг нуқта ҳам йўқ, демак, $y = x$ функциянинг энг кичик қиймати ҳам, энг катта қиймати ҳам йўқ.)

2-теорема. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бу кесманинг учларида турли ишорали қийматларни қабул қилса, у ҳолда a ва b нуқталар орасида ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = c$ нуқта топиладики, бу нуқтада функция нолга айланади:

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Бу теорема содда геометрик маънога эга. $y = f(x)$ узлуксиз функциянинг $M_1[a, f(a)]$ ва $M_2[b, f(b)]$ нуқталарни туташтирувчи графиги Ox ўқни ҳеч бўл-



53-расм.



54-расм.

маганда битта нуқтада кеседи, бу ерда $f(a) < 0$ ва $f(b) > 0$ (ёки $f(a) > 0$ ва $f(b) < 0$) (53-расм).

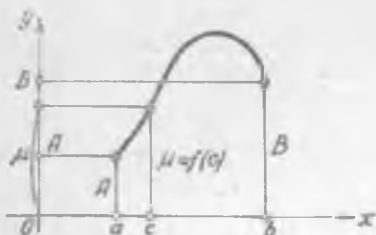
Мисол. $y = x^3 - 2$ функция берилаган; $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Бу функция $[1, 2]$ кесмада узлуксиз. Демак, бу кесмада $y = x^3 - 2$ нолга айланадиган нуқта мавжуд. Ҳақиқатан, $x = \sqrt[3]{2}$ да $y = 0$ (54-расм).

3-теорема. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу кесманинг

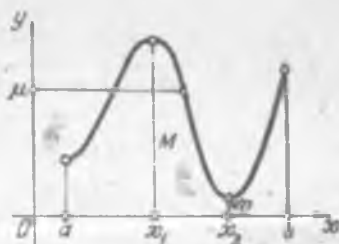
учларида функция тенг булмаган $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларни қабул қилса, у ҳолда A ва B сонлар орасида ётувчи μ сон қандай бўлмасин, a ва b орасида ётувчи шундай $x = c$ нуқта топиладики, унда $f(c) = \mu$ бўлади.

Бу теореманинг маъноси 55-расмда очиқ-ойдин тасвирланади. Бу ҳолда ҳар қандай $y = \mu$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигини кеседи.

Изоҳ. 2-теорема бу теореманинг хусусий ҳолидан иборат эканлигини қайд қилиб ўтамиз, чунки агар A ва B турли ишораларга эга бўлса, у ҳолда μ ўрнида 0 ни олиш мумкин, у вақтда $\mu = 0$ ўзи A ва B сонлар орасида бўлади.



55-расм.



56-расм.

3-теореманинг натижаси. Агар $y = f(x)$ функция бирор интервалда ўзлуксиз бўлиб, энг катта ва энг кичик қийматларни қабул қилса, у ҳолда бу интервалда функция ҳеч бўлмаганда бир марта ўзининг энг кичик ва энг катта қийматлари орасида ётувчи исталган қийматни қабул қилади.

Ҳақиқатан, $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ бўлсин. $[x_1, x_2]$ кесмани қараймиз. Бу ҳолда 3-теоремага биноан бу кесмада $y = f(x)$ функция M ва m орасида ётувчи исталган μ қийматни қабул қилади. Аммо, $[x_1, x_2]$ кесма $f(x)$ функция аниқланган текширилаётган интервал ичига жойлашган (56-расм).

11-§. Чексиз кичик миқдорларни таққослаш

Айтайлик, бир вақтда бир неча

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$

чексиз кичик миқдорлар биргина x аргументнинг функцияларидан иборат бўлиб, x бирор a лимитга ёки чексизликка интилганда улар нолга интилсин. Бу ўзгарувчиларнинг нисбатла-

рини куздан кечириб, узгарувчиларнинг нолга интилишларини характерлаймиз*).

Бундан буён қуйидаги таърифлардан фойдаланамиз.

1- таъриф. Агар $\frac{\beta}{\alpha}$ нисбат чекли ва нолдан фарқли лимит-га эга, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$, демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$ бўлса, у ҳолда β ва α чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар дейилади.

1- мисол. $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$ бўлсин, бу ерда $x \rightarrow 0$. α ва β бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлардир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

2- мисол. $x \rightarrow 0$ да x , $\sin 3x$, $\lg 2x$, $7 \ln(1+x)$ чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлардир. Бунинг исботи 1- мисолда исбот қандай утказилган бўлса, шундай қилинади.

2- таъриф. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг нисбати $\frac{\beta}{\alpha}$ нолга интилса, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$) бўлса, у ҳолда β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор дейилиб, α чексиз кичик миқдор эса β чексиз кичик миқдорга нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдор дейилади.

3- мисол. $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \rightarrow 0$ бўлсин. β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0$.

Бунда α чексиз кичик миқдор β чексиз кичик миқдорга нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдордир.

3- тариф. Агар β ва α^k бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$ бўлса, β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан k - тартибли чексиз кичик миқдор дейилади.

4- мисол. Агар $\alpha = x$, $\beta = x^3$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow 0$ да β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан учинчи тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

* Махраждаги чексиз кичик миқдор α нуқтанинг бирор атрофида нолга айланмайди деб фараз қиламиз.

4- таъриф. Агарда иккита чексиз кичик миқдорнинг $\frac{\beta}{\alpha}$ нисбати бирга интилса, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ бўлса, у ҳолда β ва α чексиз кичик миқдорлар *эквивалент чексиз кичик миқдорлар**) дейилади ва $\alpha \sim \beta$ шаклида ёзилади.

5- мисол. $\alpha = x$ ва $\beta = \sin x$ бўлсин, бунда $x \rightarrow 0$. α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

6- мисол. $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, бўлсин. $x \rightarrow 0$, бунда α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(9- § даги 6- мисолга қarang).

1- теорема. Агар α ва β эквивалент чексиз кичик миқдорлар бўлса, уларнинг $\alpha - \beta$ айырмаси α ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир.

Исбот. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

2- теорема. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг $\alpha - \beta$ айырмаси α га ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда α ва β эквивалент чексиз кичик миқдорлардир.

Исбот. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$ бўлсин, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, ёки $1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, ёки $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha}$, яъни $\alpha \approx \beta$. Агар $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, яъни $\alpha \approx \beta$.

7- мисол. $\alpha = x$, $\beta = x + x^2$ бўлиб, $x \rightarrow 0$ бўлсин.

α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки уларнинг $\alpha - \beta = x^2$ айырмаси α га нисбатан ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x} = 0.$$

*) Бу ҳолда α ва β баъзан *тег кучли* чексиз кичик миқдорлар дейиладди.

8-мисол. $x \rightarrow \infty$ да $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ ва $\beta = \frac{1}{x}$ чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки уларнинг $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ айирмаси α га нисбатан ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. α ва β нисбатининг limiti 1 га тенг:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Изоҳ. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг $\frac{\alpha}{\beta}$ нисбати лимитга эга бўлмаса ва чексизликка интилмаса, у ҳолда β ва α юқорида кўрсатилган маънода ўзаро таққослана олмайди.

9-мисол. $\alpha = x$, $\beta = x \sin \frac{1}{x}$ бўлиб, $x \rightarrow 0$ бўлсин. α ва β чексиз кичик миқдорлар таққосланадиган эмас, чунки уларнинг $\frac{\alpha}{\beta} = \sin \frac{1}{x}$ нисбати $x \rightarrow 0$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди (3-§ даги 4-мисолга қаранг).

II бобга машқлар

Кўрсатилган лимитлар ҳисоблансин:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 1}$. Жав. 4. 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2\sin x - \cos x + \operatorname{ctg} x]$. Жав. 2.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$ Жав. 0. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)$. Жав. 2.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$. Жав. $\frac{4}{3}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$. Жав. 1.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$. Жав. $\frac{1}{2}$. 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^3}$. Жав. $\frac{1}{3}$.

Кўрсатма. $k = 0, 1, 2, \dots, n$ учун $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ формулани ёзамиз.

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1; \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1; \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1; \\ &\dots \dots \dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Ҳап ва ўнг томонларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n+1),$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

бундан

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5}$. Жав. ∞ .
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4}$. Жав. 0.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$. Жав. $\frac{1}{2}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Жав. 4.
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. Жав. 3.
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. Жав. $\frac{1}{8}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$. Жав. 1.
16. $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 3y^2 + 2y}{y^2 - y - 6}$. Жав. $-\frac{2}{5}$.
17. $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u + 2)(u - 3)}$. Жав. 0.
18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$. Жав. $2x$.
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$. Жав. -1.
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$. Жав. n . (n — бутун мусбат сон).
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$. Жав. $-\frac{1}{2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$. Жав. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$. Жав. $\frac{q}{p}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Жав. $\frac{2}{3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$. Жав. $\frac{1}{m \sqrt[m]{a^{m-1}}}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$. Жав. $\frac{1}{2}$.
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Жав. 1.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. Жав. $x \rightarrow +\infty$ да 1; $x \rightarrow -\infty$ да -1.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$. Жав. 0.
30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$. Жав. $\frac{1}{2}$; $x \rightarrow -\infty$ да $-\infty$.
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$. Жав. 1.
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$. Жав. 4.
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$. Жав. $\frac{1}{9}$.
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Жав. $\sqrt{2}$.
35. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$. Жав. 1.
36. $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos v}{\sin(v - \frac{\pi}{3})}$. Жав. $\sqrt{3}$.
37. $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$. Жав. $\frac{2}{\pi}$.
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\arcsin x}{3x}$. Жав. $\frac{2}{3}$.
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$. Жав. $2 \cos a$.
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Жав. $\frac{1}{2}$.

41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. Жав. e^2 . 42. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$. Жав. $\frac{1}{e}$.
43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. Жав. $\frac{1}{e}$. 44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$. Жав. e .
45. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n[\ln(n+1) - \ln n])$. Жав. 1. 46. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. Жав. e^2 .
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$. Жав. a . 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$. Жав. e .
49. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \lg^2 x)^{\frac{1}{\lg^2 x}}$. Жав. e^3 . 50. $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$. Жав. 1.
51. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^a)}{a}$. Жав. $a \rightarrow +\infty$ да 1; $a \rightarrow -\infty$ да 0. 52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$. Жав. $\frac{\alpha}{\beta}$.
53. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 1$). Жав. a . 54. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$. Жав. $\ln a$.
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{x}$. Жав. $a - \beta$. 56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$. Жав. 1.

Функцияларнинг узилиш нуқталари аниқлансин:

57. $y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Жав. $x = -2; -1; 0; 2$ да узилиш.
58. $y = \lg \frac{1}{x}$. Жав. $x = 0$ ва $x = \pm \frac{2}{\pi}; \pm \frac{2}{3\pi}; \dots \pm \frac{2}{(2n+1)\pi}$ да узилиш.
59. $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг узилиш нуқтаси топилсин ва бу функциянинг графиги ясалсин. Жав. $x = 0$ да узилиш ($x \rightarrow 0 + 0$ да $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0 - 0$ да $y \rightarrow 1$).
60. Қуйидаги ($x \rightarrow 0$ да) чексиз кичик миқдорлар $x^2, \sqrt{x(1-x)}, \sin 3x, 2x \cos x, \sqrt[3]{\lg^2 x}, xe^{2x}$ орасидан чексиз кичик миқдор x билан бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар, ҳамда x га нисбатан юқори ва қуйи тартибли чексиз кичик миқдорлар ажратилсин. Жав. x билан бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар: $\sin 3x$ ва xe^{2x} ; x га қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар: x^2 ва $2x \cos x, \sqrt[3]{\lg^2 x}$; x га қараганда қуйи тартибли чексиз кичик миқдор: $\sqrt{x(1-x)}$.
61. Кўрсатилган чексиз кичик миқдорлар ($x \rightarrow 0$ да) орасида чексиз кичик миқдор x га тенг кучли чексиз кичик миқдорлар топилсин: $2 \sin x; \frac{1}{2} \lg 2x; x - 3x^2; \sqrt{2x^2 + x^3}; \ln(1+x); x^3 + 3x^4$. Жав. $\frac{1}{2} \lg 2x; x - 3x^2; \ln(1+x)$.

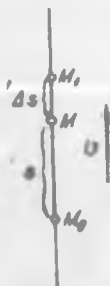
62. $x \rightarrow 1$ да $1-x$ ва $1-\sqrt{x}$ чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли бўлишига ишонч ҳосил қилинсин. Улар эквивалент буладими? Жав. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 3$, демак, берилган чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли, аниқ эквивалент эмас.

Ш БОБ

ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1- §. Ҳаракат тезлиги

Бирор қаттиқ жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракатини масалан, юқорига вертикал ҳолда отилган тошининг ҳаракатини, ёки двигатель цилиндридаги поршень ҳаракатини ва шунга ўхшаш ҳаракатларни текшираемиз. Жисмнинг конкрет ўлчамларини ва шаклини эътиборга олмай, бундан буён уни ҳаракат қилувчи M нуқта шаклида тасаввур қиламиз. Ҳаракат қилувчи нуқтани унинг бирор бошланғич M_0 ҳолатидан ҳисобланадиган s масофа t вақтга боғлиқ бўлади, яъни s масофа t вақтнинг функцияси бўлади:



$$s = f(t). \quad (1)$$

Фараз қилайлик, ҳаракат қилувчи M нуқта t вақтнинг*) бирор моментида M_0 бошланғич ҳолатдан s масофада бўлсин, ундан кейинги бирор $t + \Delta t$ моментда эса нуқта бошланғич ҳолатдан $s + \Delta s$ масофада бўлиб, M_1 ҳолатни олган бўлсин (57- расм).

57- расм. Шундай қилиб, Δt вақт оралигида s масофа Δs миқдорда ўзгаради. Бу ҳолда Δt вақт оралигида s миқдор Δs орттирмани олди дейилади.

Энди $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатни текширайлик; у бизга нуқта ҳаракатининг Δt вақтдаги ўртача тезлигини беради:

$$v_{\text{орта}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

Ўртача тезлик M нуқта ҳаракатининг t моментдаги тезлигини ҳамма ҳолда ҳам аниқ характерлайвермайди. Масалан,

* *) Бу ерда ва бундан буён ҳам ўзгарувчининг конкрет қийматини ўзгарувчининг ўзини билдирувчи ҳарф билан белгилаймиз.

жисм Δt оралиқнинг бошида жуда тез, охирида эса жуда секин ҳаракатланган бўлса, у ҳолда ўртача тезлик нуқта ҳаракатининг кўрсатилган хусусиятларини акс эттира олмаслиги ва бизга нуқта ҳаракатининг t моментдаги ҳақиқий тезлиги ҳақида тасаввур бера олмаслиги равшан. Бу ҳақиқий тезлигини ўртача тезлик ёрдами билан аниқроқ ифодалаш учун Δt кичик вақт оралиғини олиш керак. Нуқта ҳаракатининг t моментдаги тезлигини $\Delta t \rightarrow 0$ даги ўртача тезлиқнинг интилган limiti жуда тўла характерлайди. Бу лимит ҳаракатнинг берилган моментдаги тезлиги дейилади:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3)$$

Шундай қилиб, вақт орттирмаси Δt нолга интилган ҳолда йўл орттирмаси Δs нинг вақт орттирмаси Δt га нисбатининг limiti *ҳаракатнинг берилган моментдаги тезлиги* дейилади.

Биз (3) тенгликни ёйилган шаклда ёзамиз. Масофанинг орттирмаси

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

бўлгани учун

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (3')$$

Бунинг ўзи нотекис ҳаракатнинг тезлиги бўлади. Шундай қилиб, нотекис ҳаракат тезлиги тушунчаси лимит тушунчаси билан узвий равишда боғланганлигини кўрамиз. Фақат лимит тушунчаси ёрдами билан нотекис ҳаракат тезлигини топиш мумкин.

Юқоридаги (3') формуладан тезлик v вақт орттирмаси Δt га боғлиқ бўлмасдан, балки t нинг қийматига ва $f(t)$ функциянинг характерига боғлиқлиги келиб чиқади.

Мисол. Йўлнинг вақтга боғлилиши

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланса, текис тезланувчан ҳаракатнинг ихтиёрий t моментдаги ва $t = 2$ секунд моментдаги тезлиги топилисин.

Еч иш. t моментда $s = \frac{gt^2}{2}$ га эгаимиз; $t + \Delta t$ моментда:

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Δs ни топамиз:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатини тузамиз:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{g\Delta t}{2};$$

таърифга кура:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt.$$

Шундай қилиб, t вақтнинг исталган momentiда тезлик $v = gt$ га тенг.
 $t = 2$ бўлса, $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ м/сек.

2- §. Ҳосиланинг таърифи

Бирор оралиқда аниқланган

$$y = f(x) \quad (1)$$

функцияга x аргументнинг шу оралиқдаги ҳар бир қийматида $y = f(x)$ функция маълум қийматга эга.

Аргумент x бирор (мусбат ёки манфий — бари бир) Δx орттирмани олсин. У вақтда y функция бирор Δy орттирмани олади. Шундай қилиб:

аргументнинг x қийматида $y = f(x)$ га,

аргументнинг $x + \Delta x$ қийматида $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ га эга бўламиз. Функциянинг орттирмаси Δy ни топамиз:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини тузамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Бу нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимитини топамиз. Агар бу лимит мавжуд бўлса, у берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи дейилади ва $f'(x)$ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кура,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ёки

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Демак, берилган $y = f(x)$ функциянинг аргумент x бўйича ҳосиласи деб, аргумент орттирмаси Δx ихтиёрий равишда

нолга интилган ҳолда функция орттормаси Δy нинг аргумент орттормаси Δx га нисбатининг лимитига айтилади.

Умумий ҳолда x нинг ҳар бир қиймати учун $f'(x)$ ҳосила маълум қийматга эга, яъни ҳосила ҳам x нинг функцияси бўлишини қайд қилиб ўтаемиз.

Ҳосила учун $f'(x)$ белги қаторида бошқача белгилар ҳам ишлатилади, масалан,

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Ҳосиланинг $x = a$ даги конкрет қиймати $f'(a)$ ёки $y'|_{x=a}$ билан белгиланади.

Берилган $f(x)$ функциядан ҳосила топиш амали шу функцияни *дифференциаллаш* дейилади.

1- мисол. $y = x^3$ функция берилган; унинг: 1) ихтиёрий x нуқтадаги ва 2) $x = 3$ нуқтадаги ҳосиласи y' топилисин.

Ечиш. 1) Аргументнинг x га тенг қийматида $y = x^2$ га эгамиз. Аргументнинг $x + \Delta x$ га тенг қийматида $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ га эгамиз. Функциянинг орттормасини топамиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 2x \Delta x + (\Delta x)^3.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни тузамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Лимитга ўтиб, берилган функциядан ҳосила топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Демак, $y = x^3$ функциянинг ихтиёрий нуқтадаги ҳосиласи

$$y' = 2x.$$

2) $x = 3$ да шуни ҳосил қиламиз:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

2- мисол. $y = \frac{1}{x}$, y' топилисин.

Ечиш. Бундан олдинги мисолдаги каби муҳокама қилиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Изоҳ. Ўтган параграфда, агар ҳаракатланувчи нуқта s масофасининг t вақтга боғлиғиши $s = f(t)$ формула билан ифодаланса, у ҳолда t моментдаги v тезлик

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

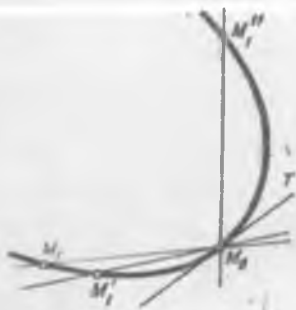
формула билан ифодаланиши аниқланган эди. Демак,

$$v = s'_t = f'(t),$$

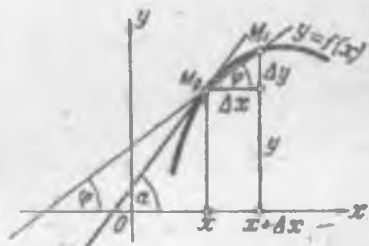
яъни тезлик v дан t вақт бўйича олинган ҳосиллага*) тенг.

8- §. Ҳосиланинг геометрик маъноси

Ҳаракат қилувчи жисмининг (нуқтанинг) тезлигини текшириш натижасида, яъни *механик* тасавурлардан чиқиб бориб, ҳосила тушунчасига келдик. Энди ҳосиланинг жуда муҳим геометрик маъносини берамиз. Бунинг учун энг аввал эгри чизикқа унинг берилган нуқтасида ўтказилган уринманинг таърифини беришимиз керак бўлади.



58- расм.



59- расм.

Бир эгри чизик ва унда тайин M_0 нуқта берилган бўлсин. Эгри чизикда бир M_1 нуқтани оламиз ва M_0M_1 кесувчини ўтказамиз (58- расм). Агар M_1 нуқта эгри чизик бўйича M_0 нуқтага чексиз яқинлаша борса, у ҳолда M_0M_1 кесувчи M_0M_1' , M_0M_1'' ва ҳоказо турли вазиятларни ишғол қилади.

*) Биз „ x бўйича ҳосила“ ёки „вақт t бўйича ҳосила“ ва ҳоказо деганимизда, бу билан биз ҳосилани ҳисоблашда аргумент учун x ни ёки вақт t ни ва ҳоказо олинниши кераклигини тушунаемиз.

Агар M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича исталган томонда M_0 нуқтага чексиз яқинлаша борганда кесувчи маълум M_0 тўғри чизиқ вазиятини эгаллашга интилса, у ҳолда бу тўғри чизиқ M_0 нуқтада эгри чизиққа урикма дейилади („эгаллашга интилади“ деган тушунча қуйида аниқланади).

Биз $f(x)$ функцияни ва тўғри бурчакли координаталар системасида унга мос

$$y = f(x)$$

эгри чизиқни кўздан кечирамиз (59- расм). x нинг бирор қийматида функция $y = f(x)$ қийматга эга. Эгри чизиқда x ва y нинг бу қийматларига $M_0(x, y)$ нуқта тўғри келади. Аргумент x га Δx орттирмани берамиз. Аргументнинг янги $x + \Delta x$ қийматига функциянинг „орттирилган“ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ қиймати тўғри келади. Эгри чизиқнинг бунга мос нуқтаси $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқта бўлади. M_0M_1 кесувчининг ўтказамиз ва унинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагини φ билан белгилаймиз. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни тузамиз. 59- расмдан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

эканлигини бевосита курамиз.

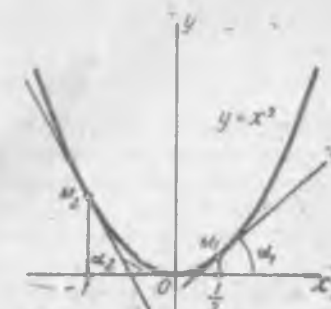
Энди агар Δx нолга интилса, у ҳолда M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилиб, M_0 нуқтага яқинлаша боради. M_0M_1 кесивувчи M_0 нуқта атрофида айланади ва Δx ўзгариши билан φ бурчак ўзгаради. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да φ бурчак бирор α лимитга интилса, у ҳолда M_0 нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ изланган урикма бўлади. Унинг бурчак коэффициентини топиш қийин эмас.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Демак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

яъни аргумент x нинг берилган қийматида $f'(x)$ ҳосиланинг қиймати $f(x)$ функциянинг графигига унинг $M_0(x, y)$ нуқтасидаги урикманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчак тангенсига тенг.



60- расм.

Мисол. $y = x^2$ эгри чизиққа $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $M_2(-1, 1)$ нуқталардаги урнималар огмалик бурчақларининг тангенслари топилсин (60-расм).

Ечйш. 2-§ даги 1-мисолга асосан, $y' = 2x$; демак,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1} = -2.$$

4-§. Функцияларнинг дифференциалланувчилиги

Таъриф. Агар

$$y = f(x) \quad (1)$$

функция $x = x_0$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

мавжуд бўлса, y ҳолда берилган $x = x_0$ қийматда функция *дифференциалланувчи* ёки (бари бир) ҳосилага эга деймиз.

Агар функция бирор $[a, b]$ кесманинг ёки (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, y ҳолда функция $[a, b]$ кесмада ёки (a, b) интервалда дифференциалланувчи дейилади.

Теорема. Агар $y = f(x)$ функция бирор $x = x_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, y ҳолда функция шу нуқтада узлуксиздир.

Ҳақиқатан, агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

бўлса,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

бу ерда $\Delta x \rightarrow 0$ да γ нолга интилувчи миқдордир. Лекин, y ҳолда

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \gamma \Delta x \quad \delta - \text{чи},$$

булади; бундан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$, бу эса x_0 нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз демакдир (II боб, 9-§ га қаранг).

Шундай қилиб, узилиш нуқтасида функция ҳосилага эга бўла олмайди. Тескари хулоса тўғри эмас, яъни бирор $x = x_0$ нуқтада $y = f(x)$ функция узлуксиз бўлишидан бу нуқтада y дифференциалланувчи ҳам бўлади деган хулоса чиқмайди; x_0 нуқтада $f(x)$ функция ҳосилага эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Бунга ишонч ҳосил қилмоқ учун бир неча мисол кўриб чиқамиз.

1- мисол. $f(x)$ функция $[0, 2]$ кесмада қуйидагича аниқланган (61- расмга қаранг):

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = x,$$

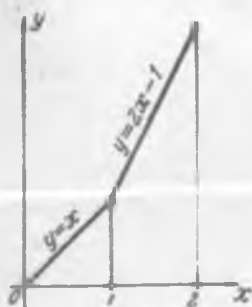
$$1 < x < 2 \text{ да } f(x) = 2x - 1.$$

Бу функция $x = 1$ нуқтада узлуксиз бўлса-да, ҳосиллага эга эмас. Ҳақиқатан, $\Delta x > 0$ да

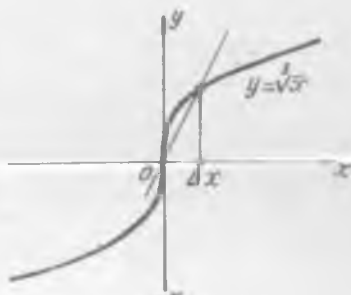
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(1 + \Delta x) - 1] - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$\Delta x < 0$ да

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1 + \Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$



61- расм.



62- расм.

Шундай қилиб, текширилаётган лимит Δx нинг ишораси қандайлигига бориқ, бу эса $x = 1$ нуқтада функция ҳосиллага эга эмас демакдир*). Геометрик жиҳатдан бунга шундай факт мос келадики, $x = 1$ нуқтада берилган «эгри чизиқ» маълум бир уринмага эга бўлмайди.

Функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксизлиги

$$\Delta x < 0 \text{ да } \Delta y = \Delta x,$$

$$\Delta x > 0 \text{ да } \Delta y = 2\Delta x$$

бўлишидан келиб чиқади ва демак, иккала ҳолда ҳам $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$.

2- мисол. Графики 62- расмда тасвирланган $y = \sqrt[3]{x}$ функция эркин узгарувчининг барча қийматлари учун аниқланган ва узлуксиздир. Бу функция $x = 0$ да ҳосиллага эгами-йўқми эканлигини аниқлаймиз; бунинг учун $x = 0$ да ва $x = 0 + \Delta x$ да функциянинг қийматларини топамиз:

$$x = 0 \text{ да } y = 0, \quad x = 0 + \Delta x \text{ да } y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

*) Ҳосиланинг таърифига биноан $\Delta x \rightarrow 0$ да Δx қандай қилиб нолга интилишига қарамай, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг биргина лимитга интилиши талаб қилинади.

Демак,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг лимитини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати $x = 0$ нуқтада чексизликка интилади (лимитга эга эмас). Демак, текширилаётган функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. Бу нуқтада ағри чизиққа уринма абсцисса ўқи билан $\frac{\pi}{2}$ бурчак ҳосил қилади, яъни Oy ўқининг устига тушади.

5- §. n бутун ва мусбат бўлганда $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи

Берилган $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳосиланинг умумий таърифига асосан топиш учун қуйидаги амалларни бажариш зарур:

1) аргумент x га Δx орттирма бериш, функциянинг орттирилган қийматини ҳисоблаш:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) функциянинг орттирмасини топиш;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини тузиш:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) $\Delta x \rightarrow 0$ да бу нисбатнинг лимитини топиш:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Биз бу ерда ва бундан кейинги параграфларда бу умумий усулни баъзи бир элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш учун қўлланамиз.

Теорема. $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи (бунда n бутун мусбат сон) nx^{n-1} га тенг, яъни

$$\text{агар } y = x^n \text{ бўлса, } y' = nx^{n-1} \quad (1)$$

Исбот. Ушбу функция берилган:

$$y = x^n.$$

1) Агар x ўзига Δx орттирма олса, y ҳолда

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб, бундай ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n \end{aligned}$$

ёки

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3) Нисбатни топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Бу нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\begin{aligned} y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \right. \\ &\left. + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

демак, $y' = nx^{n-1}$, бу эса теореманинг исботидир.

1- мисол. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

2- мисол. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Охирги натижа оддий геометрик маънога эга; $y = x$ тўғри чизиққа уринма x нинг ҳар қандай қийматида бу тўғри чизиқ билан устма-уст тушади ва демак, Ох ўқининг мусбат йўналиши билан тангенс 1 га тенг бурчак ҳосил қилади.

(1) формула n каср ва манфий бўлган ҳолда ҳам тўғрилигини қайд қилиб ўтамыз. (Бу 12- § да исботланади.)

3- мисол. $y = \sqrt{x}$.

Бу функцияни даража кўринишида тасвирлаймиз:

$$y = x^{\frac{1}{2}};$$

y вақтда (1) формулага биноан (ҳозиргина қилинган изоҳни ҳисобга олиб) шуни ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ёки

4- мисол.

$$y = \frac{1}{x \sqrt{x}}.$$

у ни даражали функция кўринишида ёзамиз:

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

У вақтда

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2 \sqrt{x}}.$$

6- §. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларнинг ҳосилалари1- теорема. $\sin x$ нинг ҳосиласи $\cos x$, яъни (II)
агар $y = \sin x$ бўлса, $y' = \cos x$ бўлади.Исбот. Аргумент x га Δx орттирма берамиз; у ҳолда:

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$
 $= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$

4) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$

аmmo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

шунинг учун

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Охириги тенглик $\cos x$ узлуксиз функция эканлигига асосан ҳосил қилинади.2- теорема. $\cos x$ нинг ҳосиласи $-\sin x$, яъни (III)
агар $y = \cos x$ бўлса, $y' = -\sin x$ бўлади.

Исбот. Аргумент x га Δx орттирмани берамиз; y ҳолда

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$\sin x$ нинг узлуксиз функциялигини эътиборга олиб, охирида шуни ҳосил қиламиз:

$$y' = -\sin x.$$

7- §. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи, ўзгармас миқдор билан функция кўпайтмасининг ҳосиласи, йиғиндининг, кўпайтманинг, бўлинманинг ҳосилалари

1- теорема. *Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи нолга тенг, яъни*

агар $y = C$ бўлса, бу ерда $C = \text{const}$, $y' = 0$ бўлади. (IV)

Исбот. $y = C$ ўзи x нинг шундай функциясики, барча x лар учун унинг қийматлари C га тенг.

Демак, x нинг исталган қийматида

$$y = f(x) = C.$$

Аргумент x га Δx ($\Delta x \neq 0$) орттирмани берамиз. Аргументнинг барча қийматларида функция y ўзининг C қийматини сақлайди, шунинг учун

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Демак, функциянинг орттирмаси мана бунга тенг:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

демак,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

яъни

$$y' = 0.$$

Охирги натижа содда геометрик маънога эга. $y = C$ функциянинг графиги Ox ўққа параллел тўғри чизиқдан иборат. Графикнинг исталган нуқтасида уринма бу тўғри чизиқ билан бир хил бўлади ва демак, Ox ўқ билан тангенс y' нолга тенг бурчак ҳосил қилади.

2-теорема. *Ўзгармас купайтувчини ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни агар $y = Cu(x)$ бўлса, ($C = \text{const}$), $y' = Cu'(x)$ бўлади. (V)* Исбот. Бундан олдинги теоремани исботлашдаги каби муҳокама-юрғизамиз:

$$y = Cu(x);$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ яъни } y' = Cu'(x).$$

1-мисол. $y = 3\sqrt[3]{x}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{4}{3}},$$

яъни

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt[3]{x}}.$$

3-теорема. *Чекли сондаги дифференциалланувчи функциялар йиғиндисининг ҳосиласи шу функциялар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг*).*

Масалан, қўшилувчилар учта бўлган ҳол учун:

$$y = u(x) + v(x) + w(x); \quad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad (VI)$$

*) $y = u(x) - v(x)$ шунда $y = u(x) + (-1)v(x)$ га тенг кучан ва $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Исбот. Аргументнинг x қиймати учун

$$y = u + v + w$$

(ёзувни қисқартиш мақсадида функцияларнинг белгисида аргумент x ни тушириб қолдирамиз).

Аргументнинг $x + \Delta x$ қиймати учун:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

бу ерда Δy , Δu , Δv ва Δw лар, y , u , v ва w функцияларнинг аргумент x ни Δx орттирмасига мос орттирмалари. Демак,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ёки

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

2- мисол. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1},$$

яъни

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

4- теорема. Иккита дифференциалланувчи функциялар кўпайтмасининг ҳосиласи биринчи функция ҳосиласининг иккинчи функция билан кўпайтмаси плус биринчи функциянинг иккинчи функция ҳосиласи билан кўпайтмасига тенг, яъни

$$\text{агар } y = uv \text{ бўлса, } y' = u'v + uv'. \quad (\text{VII})$$

Исбот. Олдинги теоремани исботлашдаги каби муҳокама қиламиз:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) v + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

(чунки u ва v лар Δx га боғлиқ эмас).

Ўнг томондаги охириги ҳадни текшираемиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$u(x)$ дифференциалланувчи функция, шунинг учун узлуксиз. Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Вундан ташқари,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Шундай қилиб, текшириляётган ҳад нолга тенг ва биз охирида

$$y' = u'v + uv'$$

га эга бўламиз. Искотланган теоремага асосан ҳар қанча функцияларнинг кўпайтмасини дифференциаллаш қондаси осонгина чиқарилади.

Масалан, учта функциянинг кўпайтмасига эга бўлсак:

$$y = uvw,$$

у ҳолда ўнг томонини u билан (vw) нинг кўпайтмаси каби тасвирлаб, шунн ҳосил қиламиз:

$$y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Шундай қилиб, истаганча сондаги функциялар кўпайтмасининг ҳосиласи учун шунга ўхшаш формула ҳосил қила оламиз. Яъни агар $y = u_1 u_2 \dots u_n$ бўлса, у ҳолда

$$y' = u_1' u_2 \dots u_{n-1} u_n + u_1 u_2' \dots u_{n-1} u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n'.$$

3- мисол. Агар $y = x^2 \sin x$ бўлса, у ҳолда

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

4- мисол. Агар $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos^2 x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x. \end{aligned}$$

5- теорема. Касрнинг (яъни иккита функция бўлинмасининг) ҳосиласи касрга тенг бўлиб, унинг махражн берилган каср махражининг квадратидан, сурати эса махражнинг сурат ҳосиласи билан ва суратнинг махраж ҳосиласи билан кўпайтмалари орасидаги айирмадан иборат, яъни

$$\text{агар } y = \frac{u}{v} \text{ бўлса, } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (\text{VIII})$$

Исбот. Агар Δu , Δv ва Δv лар u , v ва v функцияларнинг аргумент x нинг Δx орттирмасига мос орттирмалари бўлса, у ҳолда

$$u + \Delta u = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta u = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

$$u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}.$$

Бундан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta v \rightarrow 0$ ни эътиборга олиб, шу натижа-ни ҳосил қиламиз*):

$$u' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3- мисол. Агар $y = \frac{x^3}{\cos x}$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$$

Изоҳ. Агар махражи C ўзгармас бўлган

$$y = \frac{u(x)}{C}$$

кўринишдаги функцияга эга бўлсак, у ҳолда бу функцияни дифференциаллашда (VIII) формулани қўлланишнинг ҳолати йуқ, балки (V) формулани қўлланиш маъқул:

$$y' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Бу натижанинг ўзи (VIII) формуладан ҳам албатта чиқади.

6- мисол. Агар $y = \frac{\cos x}{7}$ бўлса,

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}.$$

*) $v(x)$ — дифференциалланувчи, демак, узлуксиз функциядир, шунинг учун $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$.

8- §. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

Теорема. $\log_a x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{x} \log_a e$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \log_a x \text{ булса, } y' = \frac{1}{x} \log_a e \text{ бўлади.} \quad (\text{IX})$$

Исбот. Агар $y = \log_a x$ функциянинг аргумент x нинг Δx орттирмасига мос орттирмаси Δy бўлса, y ҳолда $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$;

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги ифодани x га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$\frac{\Delta x}{x}$ миқдорни α билан белгилаймиз. Берилган x учун $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$ бўлиши равшан. Демак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Аммо

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

эканн маълум (II боб, 7- § га қаранг). Агар логарифм ишораси остида турган ифода e сонга интилса, y ҳолда бу ифоданинг логарифми $\log_a e$ га интилади (логарифмик функция узлуксиз бўлгани учун). Шунинг учун охирда ушбу натижални ҳосил қиламиз;

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Бунда $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ эканлигини эътиборга олиб, чиққан формулани

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Бу формуланинг муҳим хусусий ҳолини қайд қилиб ўтамиз: агар $a = e$ бўлса, y ҳолда $\ln a = \ln e = 1$, яъни

$$\text{агар } y = \ln x \text{ булса, } y' = \frac{1}{x} \text{ бўлади.} \quad (\text{X})$$

9- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ мураккаб функция, яъни шундай функция берилганки, уни

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

ёки $y = F[\varphi(x)]$ (1 боб 8- § га қаранг) кўринишда тасвирлаш мумкин бўлсин. $y = F(u)$ ифодада u ўзгарувчи *оралиқ аргумент* дейилади.

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасини чиқарамиз.

Теорема. Агар $u = \varphi(x)$ функция бирор x нуқтада $u'_x = \varphi'(x)$ ҳосиллага эга бўлса, $y = F(u)$ функция эса u нинг мос қийматида $y'_u = F'(u)$ ҳосиллага эга бўлса, y ҳолда кўрсатилган x нуқтада $y = F[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'(x)$$

га тенг ҳосиллага эга бўлади, бу ерда u ўрнига $u = \varphi(x)$ ифода қўйилиши зарур. Қисқача,

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

яъни мураккаб функциянинг ҳосиласи берилган функциянинг *оралиқдаги аргумент* u бўйича ҳосиласининг *оралиқдаги аргументнинг* x бўйича ҳосиласи билан кўпайтмасига тенг.

Исбот. Аргумент x нинг маълум қийматида

$$u = \varphi(x), \quad y = f(u).$$

Аргументнинг устирилган $x + \Delta x$ қийматида

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Шундай қилиб, Δx орттирмага Δu орттирма мос келади, бунга эса Δu орттирма мос келади, бунинг устига $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$. Шартга мувофиқ

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Бу муносабатдан, лимит таърифидан фойдаланиб, ($\Delta u \neq 0$ да)

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \quad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $\Delta u \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$. Бу (1) тенгликни

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u \quad (2),$$

қўринишда ёзамиз. Бу (2) тенглик ихтиёрнй α да $\Delta u = 0$ бўлганда ҳам тўғрилигича қолади, чунки $u(0) = 0$ айниятга айланади. $\Delta u = 0$ да $\alpha = 0$ деб ҳисоблаймиз. (2) тенгликнинг барча ҳадларини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u'_x \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

Шартга кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

(3) тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y'_x = u'_x u'_x, \quad (4)$$

бу эса талаб қилинган исботдир.

1- мисол. $y = \sin(x^2)$ функция берилган бўлсин, y'_x ни топамиз. Берилган функцияни қуйидигича функциянинг функцияси шаклида ёзамиз:

$$y = \sin u, \quad u = x^2.$$

Бундан

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = 2x.$$

Демак, (4) формулага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

u ўрнига унинг ифодасини қўйиб, охирда

$$y'_x = 2x \cos(x^2)$$

натижани ҳосил қиламиз.

2- мисол. $y = (\ln x)^3$ функция берилган. y'_x ни топамиз.

Берилган функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$y = u^3, \quad u = \ln x.$$

Бундан шуларни топамиз:

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Демак,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Агар $y = f(x)$ функция шундай бўлсаки, уни

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x)$$

қўринишда ёзиш мумкин бўлса, y'_x ҳосилани топиш олдинги теоремани кетма-кет қўлланиш билан бажарилади.

Исботланган қоидага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Бу теоремани u_x ни топниш учун қўлланиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

u'_x нинг ифодасини олдинги тенгликка қўясак,

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \quad (5)$$

ёки

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'_v(v) \psi'_x(x).$$

3- мисол. $y = \sin [(\ln x)^2]$ функция берилган. y'_x ни топамиз. Берилган функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$y = \sin u, \quad u = v^2, \quad v = \ln x.$$

Бундан

$$y'_u = \cos u, \quad u'_v = 2v, \quad v'_x = \frac{1}{x}$$

ни топамиз. Демак, (5) формулага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 2(\cos u) v^2 \frac{1}{x},$$

ёки охириги натижа:

$$y'_x = \cos [(\ln x)^2] \cdot 2(\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Текширилган функция фақат $x > 0$ да аниқлангандигини эслатиб ўташимиз.

10- §. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln |x|$ Функцияларнинг ҳосилалари

1- теорема. $\operatorname{tg} x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{\cos^2 x}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \operatorname{tg} x \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда } y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (XI)$$

Исбот. Модомики,

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ёки, y ҳолда касрни дифференциаллаш қондасига мувофиқ (III боб, 7- §, (VIII) формулага қаранг):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

2- теорема. $\operatorname{ctg} x$ функциянинг ҳосиласи $-\frac{1}{\sin^2 x}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \operatorname{ctg} x \text{ бўлса, } y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (\text{XII})$$

Исбот. Модомики,

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

экан, у ҳолда

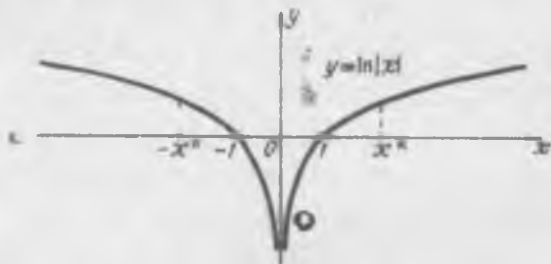
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

1- мисол. Агар $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

2- мисол. Агар $y = \ln \operatorname{ctg} x$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$



63- расм.

3- теорема. $\ln |x|$ функциянинг ҳосиласи (63- расм) $\frac{1}{x}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \ln |x| \text{ бўлса, у ҳолда } y' = \frac{1}{x}. \quad (\text{XIII})$$

Исбот. а) Агар $x > 0$ бўлса, $|x| = x$, $\ln |x| = \ln x$ ва шунинг учун

$$y' = \frac{1}{x}.$$

б) $x < 0$ бўлсин, у ҳолда $|x| = -x$. Лекин

$$\ln |x| = \ln (-x).$$

(Агар $x < 0$ бўлса, $-x > 0$ бўлишини қайд этамиз.)

$y = \ln u$, $u = -x$ фараз қилиб, $y = \ln(-x)$ функцияни мураккаб функция шаклида ёзамиз. У ҳолда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u} (-1) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

Демак, x нинг манфий қийматлари учун ҳам

$$y'_x = \frac{1}{x}$$

тенглик тўғри бўлади. Демак, (XIII) формула исталган $x \neq 0$ қийматлар учун исботланди. ($x = 0$ да $\ln|x|$ функция аниқланмаган.)

11- §. Ошкормас функция ва уни дифференциаллаш

Иккита x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари ўзаро бирор тенглама билан боғланган бўлсин, биз уни символик тарзда бундай белгилаймиз:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Агар $y = f(x)$ функция бирор (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, (1) тенгламада y ўрнига $f(x)$ ифода қўйилганда тенглама x га нисбатан айниятга айланса, y ҳолда $y = f(x)$ функция (1) тенглама билан аниқланган, ошкормас функция бўлади.

Масалан,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

тенглама мана бу

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (4)$$

элементар функцияларни ноошкор тарзда аниқлайди (64- ва 65- расм).

Ҳақиқатан, бу қийматларни (2) тенгламага қўйгандан сўнгра айният ҳосил бўлади:

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

(3) ва (4) ифодалар (2) тенгламани y га нисбатан ечиш йўли билан ҳосил қилинган. Аммо, ҳар қандай ошкормас берилган функцияни ҳам ошкор шаклда бермоқ, яъни $y = f(x)$ шакл-

*) Агар функция $y = f(x)$ кўринишдаги тенглама билан берилган бўлса, y ҳолда функция ошкор кўринишда ёки ошкора берилган дейилади.

га қўймоқ мумкин бўлавермайди, бу ерда $f(x)$ элементар функция.

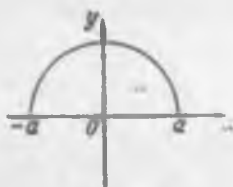
Масалан,

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

ёки

$$y - x - \frac{1}{4} \sin y = 0$$

тенгламалар билан берилган функциялар элементар функциялар билан ифодаланмайди, яъни бу тенгламаларни элементар функциялар орқали у га нисбатан ечиш мумкин эмас.



64- расм.



65- расм.

1- изоҳ. „Ошкор функция“ ва „ошкормас функция“ терминлари функциянинг табиатини эмас, балки берилиш усулини характерлайди. Ҳар бир ошкор функция $y = f(x)$ ни ошкормас функция $y - f(x) = 0$ шаклида бериш мумкин.

Энди ошкормас функцияни ошкор кўринишга келтирмасдан, яъни $y = f(x)$ шаклга алмаштирмасдан, унинг ҳосиласини топиш қондасини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, функция ушбу

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар у бу ерда x нинг шу тенглик билан аниқланадиган функцияси бўлса, у ҳолда бу тенглик айниятдир.

у ни x нинг функцияси деб ҳисоблаб, бу айниятнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб (мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасидан фойдаланган ҳолда), шуни топамиз:

$$2x + 2yy' = 0,$$

бундан

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Агар биз ушбу

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ошкор функцияни дифференциаллаган бўлсак,

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

яъни худди ўша натижани ҳосил қилган булар эдик.

у x нинг ошкормас функцияси бўлган ҳолга яна бир мисол кўраимиз:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Буни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0,$$

бундан

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

2-изох. Аргумент x нинг берилган қийматида ошкормас функция ҳосиласининг қийматини топиш учун x нинг берилган қийматида у функциянинг қийматини ҳам билиш зарурлигини келтирилган мисоллардан келиб чиқади.

12-§. Кўрсаткичи исталган ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг, кўрсаткичли функциянинг, мураккаб кўрсаткичли функциянинг ҳосилалари

1-теорема. x^n функциянинг ҳосиласи nx^{n-1} га тенг, яъни

агар $y = x^n$ бўлса, y ҳолда $y' = nx^{n-1}$, (1')
бу ерда n — исталган сон.

Исбот. $x > 0$ бўлсин. Берилган функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = n \ln x.$$

Чиққан тенгликнинг иккала томонини, у ни x нинг функцияси ҳисоблаб, x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x}, \quad y' = yn \frac{1}{x}.$$

бунга $y = x^n$ қиймати қўйиб, охириги натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Агар фақат x^n маънога эга бўлса, бу формуланинг $x < 0$ учун ҳам тўғрилигини кўрсатиш қийин эмас^{*)}.

2-теорема. a^x функциянинг ҳосиласи, $a^x \ln a$ га тенг, бу ерда $a > 0$, яъни

$$\text{агар } y = a^x \text{ бўлса, } y' = a^x \ln a, \quad (\text{XIV})$$

Исбот. $y = a^x$ тенгликни логарифмлаймиз:

$$\ln y = x \ln a.$$

Бу тенгликни, у ни x нинг функцияси ҳисоблаб, дифференциаллаймиз:

$$\frac{1}{y} y' = \ln a; \quad y' = y \ln a$$

ёки

$$y' = a^x \ln a.$$

Агар асос $a = e$ бўлса, у ҳолда $\ln e = 1$ бўлади ва биз

$$y = e^x, \quad y' = e^x \quad (\text{XIV}')$$

формулани ҳосил қиламиз.

1-мисол. $y = e^{x^2}$ функция берилган. Оралық аргумент u ни киритиб, уни мураккаб функция сингари тасвирлаймиз:

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

у ҳолда

$$y'_u = e^u, \quad u'_x = 2x,$$

демак,

$$y'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} 2x.$$

Асоси ҳам, даража кўрсаткичи ҳам x нинг функцияларидан иборат бўлган функция мураккаб кўрсаткичли функция дейилади, масалан $(\sin x)^{x^2}$, x^{e^x} , x^x , $(\ln x)^x$ ва шунга ўхшаш, умуман,

$$y = [u(x)]^{v(x)} = u^v$$

кўринишдаги ҳар бир функция мураккаб кўрсаткичли функциядир^{**)}.

3-теорема.

Агар $y = u^v$ бўлса, $y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$ бўлади. (XV)

^{*)} Бу формула илгари (III боб, 5-§) n бутун мусбат сон бўлган ҳол учун исботланган эди. Энди (1) формула умумий ҳолда (исталган ўзгармас n сон учун) исботланди.

^{**) Кўпинча бундай функция кўрсаткичли-даражали ёки даражали-кўрсаткичли функция дейилади.}

Исбот. у функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = v \ln u.$$

Чиққан тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \ln u,$$

бундан

$$y' = y \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

Бунга $y = u^v$ ифодани қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u.$$

Шундай қилиб, мураккаб кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи иккита қўшилувчидан иборат: агар дифференциаллашда u ни x нинг функцияси, v ни эса ўзгармас деб фараз қилинса (яъни агар u^v даражали функция деб қаралса), биринчи қўшилувчи чиқади; агар v ни x нинг функцияси, u ни эса const деб фараз қилинса (яъни, u^v кўрсаткичли функция деб қаралса) иккинчи қўшилувчи чиқади.

2- мисол. Агар $y = x^x$ бўлса, у ҳолда $y' = x x^{x-1} (x') + x^x (x') \ln x$ ёки

$$y' = x^x + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x).$$

3- мисол. Агар $y = (\sin x)^{x^2}$ бўлса, у ҳолда

$$y' = x^2 (\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} (x^2)' \ln \sin x = x^2 (\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x.$$

Ҳосилаларни топиш учун бу параграфда қўлланилган ва аввал берилган функция логарифмининг ҳосиласини топишдан иборат бўлган усул, функцияларни дифференциаллашда кенг қўлланилади. Бу усулни қўлланиш кўпинча ҳисоблашни бирмунча соддалаштиради.

4- мисол. $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ функциядан ҳосилда топиш талаб қилинади.

Ечиш. Тенгликнинг иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\ln y = 2 \ln (x+1) + \frac{1}{2} \ln (x-1) - 3 \ln (x+4) - x.$$

Оқирги тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

у га кўпайтириб ва у ўрнига $\frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$ ифодани қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right]$$

Изоҳ. Берилган $y = y(x)$ функция натурал логарифмининг x бўйича ҳосиласидан иборат $\frac{y'}{y} = \ln(y)'$ ифода *логарифмик ҳосила* дейилади.

13-§. Тескари функция ва уни дифференциаллаш

Фараз қилайлик, бирор (a, b) ($a < b$) интервалда аниқланган ўсувчи (66- расм) ёки камаювчи функция

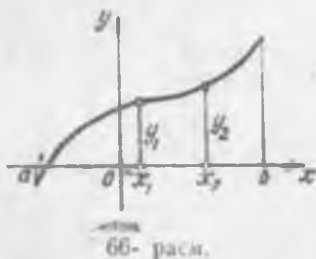
$$y = f(x) \quad (1)$$

берилган бўлсин (1 боб, 6-§ га қаранг) $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлсин. Аниқлик учун бундан буён ўсувчи функцияни текширамиз. (a, b) интервалга қарашли иккита ҳар хил x_1 ва x_2 қийматларни қараймиз. Ўсувчи функциянинг таърифидан агар $x_1 < x_2$ ва $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ бўлса, у вақтда $y_1 < y_2$ бўлиши чиқади. Демак, иккита ҳар хил x_1 ва x_2 қийматларга функциянинг иккита y_1 ва y_2 турли қийматлари мос келади. Бунинг тескарисин ҳам туғри, яъни агар $y_1 < y_2$ ва $y_1 = f(x_1)$ ҳамда $y_2 = f(x_2)$ бўлса, ўсувчи функциянинг таърифидан $x_1 < x_2$ бўлиши чиқади. Шундай қилиб, x нинг қийматлари билан унинг уларга мос қийматлари орасида ўзаро бир қийматли мослик аниқланади.

у нинг бу қийматларини аргументнинг қийматлари деб, x нинг қийматларини эса функциянинг қийматлари деб қараб, x ни у нинг функцияси сифатида оламиз:

$$x = \varphi(y). \quad (2)$$

Бу функция $y = f(x)$ функция учун *тескари функция* дейилади. $y = f(x)$ функция ҳам $x = \varphi(y)$ функция учун тескари эканлиги равшан. Шунга ўхшаш муҳокама билан камаювчи функция ҳам тескари функцияга эга эканлигини исботлаш мумкин.

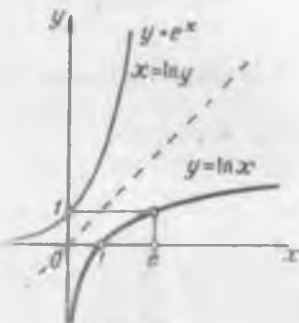


1- изоҳ. Агар ўсувчи (ёки камаювчи) $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бунинг устига $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлса, у ҳолда тескари функция ҳам $[c, d]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз эканлигини исботсиз кўрсатамиз.

1- мисол. $y = x^3$ функция берилган бўлсин. Бу функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда ўсувчи; бунга тескари функция $x = \sqrt[3]{y}$ (67- расм).



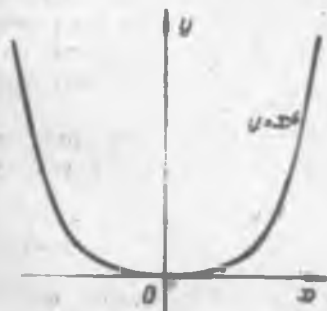
67- расм.



68- расм.

$x = \varphi(y)$ тескари функция $y = f(x)$ тенгламани x га нисбатан ечиш йўли билан топилишини айтиб ўтаемиз.

2- мисол. $y = e^x$ функция берилган бўлсин. Бу функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда ўсувчи. Унга тескари функция $x = \ln y$. Тескари функциянинг мавжудлик соҳаси $0 < y < +\infty$ (68- расм).



69- расм.

2- изоҳ. Агар $y = f(x)$ функция бирор интервалда ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам бўлмаса, у ҳолда бу функция бир неча тескари функцияларга эга бўлиши мумкин*).

3- мисол. $y = x^2$ функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. Бу функция ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам эмас ва тескари функцияга ҳам эга эмас. Агар биз $0 < x < +\infty$ интервални қарасак, бу ҳолда функция бу ерда ўсувчи ва унинг учун тескари функция $x = \sqrt{y}$ бўлади. $-\infty < x < 0$ интервалда эса функция камаювчи ва унинг учун тескари функция $x = -\sqrt{y}$ бўлади (69- расм).

*) у ни x нинг функцияси эканлиги ҳақида гапирганимизда, биз у нинг x билан бир қийматли тарзда боғлиқлигини тушунишимизни яна бир марта таъкидлаб ўтаемиз.

3-изоҳ. Агар $y = f(x)$ ва $x = \varphi(y)$ функциялар узаро тескари бўлса, уларнинг графиклари биргина эгри чизиқдан иборат бўлади. Аммо, тескари функциянинг аргументини яна x билан, функцияни эса y билан белгиласак ва уларни бир координаталар системасида чизсак, y ҳолда иккита ҳар хил график ҳосил қиламиз.

Графиклар биринчи координат бурчагининг биссектриссасига нисбатан симметрик бўлишини кўриш қийин эмас.

4-мисол. 68-расмда 2-мисолда текширилган $y = e^x$ (ёки $x = \ln y$) функциянинг ва унга тескари $y = \ln x$ функциянинг графиклари чизилган.

Энди тескари функция ҳосиласини билган ҳолда $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топишга имкон берувчи теоремани исботлаймиз.

Теорема. Агар

$$y = f(x) \quad (1)$$

функция учун текшириладиган y нуқтада нолдан фарқли $\varphi'(y)$ ҳосилага эга бўлган

$$x = \varphi(y) \quad (2)$$

тескари функция мавжуд бўлса, y ҳолда тегишли x нуқтада $y = f(x)$ функция $\frac{1}{\varphi'(y)}$ га тенг бўлган $f'(x)$ ҳосилага эга бўлади, яъни

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad (XVI)$$

формула тўғри бўлади.

Шундай қилиб, иккита узаро тескари функциялардан бирининг ҳосиласи бирни бу функциялардан иккинчисининг x ва y нинг тегишли қийматларидаги ҳосиласига бўлинганига тенг*).

Исбот. Ду орттирмани олганимизда, (2) га биноан

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

$\varphi(y)$ монотон функция бўлгани учун $\Delta x \neq 0$. Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \quad (3)$$

* Биз $f'(x)$ ёки u_x ёзар эканмиз, y ҳолда ҳосилани ҳисоблашда эркин ўзгарувчи сифатида x олинади деб ҳисоблаймиз; $\varphi'(y)$ ёки x'_y ёзганимизда эса ҳосилани ҳисоблашда эркин ўзгарувчи родини y уйнайди деб ҳисоблаймиз. (XVI) формуланинг ўнг томонида y бўйича дифференциаллагандаан сўнг у ўрнига $f(x)$ ни қўйиш кераклигини уқтириб ўтамиз.

$\varphi(y)$ узлуксиз функция бўлгани учун, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\Delta x \rightarrow 0$. $\Delta y \rightarrow 0$ да (3) тенгликнинг иккала томонида лимитга ўтиш билан

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ ёки } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

ни ҳосил қиламиз, яъни XVI формуланинг ўзи келиб чиқди.

Изоҳ. Агар мураккаб функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан фойдаланилса, у ҳолда XVI формулани қуйидагича ҳосил қилиш мумкин. у ни x нинг функцияси ҳисоблаб, (2) тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз: $1 = \varphi'(y) y'_x$, бундан

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Чиққан натижа геометрик усулда очик тасвирланади. $y = f(x)$ функциянинг графигини текширамыз (70-расм). Бу эгри чизиқ $x = \varphi(y)$ функциянинг графиги ҳам бўлади, бу ерда x энди функция деб, y эса эркин ўзгарувчи деб қаралади. Бу эгри чизиқнинг бирор $M(x, y)$ нуқтасини текширамыз. Берилган уринманинг Ox ва Oy ўқларнинг мусбат йуналишлари билан ташкил қилган бурчакларини мос равишда α ва β билан белгилаймиз. Ҳосиланинг геометрик маъноси ҳақида 3-§ даги натижаларга асосан:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \varphi'(y) = \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Агар $\alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\beta = \frac{\pi}{2}$ бўлиши 70-расмдан бевожита чиқади. Агар $\alpha > \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ эканлигини кўриш осон. Демак, ҳар қандай ҳолда

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha,$$

бундан

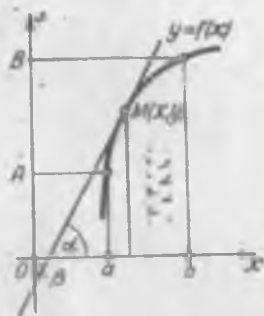
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

ёки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

(4) формуладан $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{tg} \beta$ нинг ифодаларини ўрнига қўйиш билан шу натижани ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$



70-расм.

14-§. Тескари тригонометрик функциялар ва уларни дифференциаллаш

1) Функция $y = \arcsin x$.

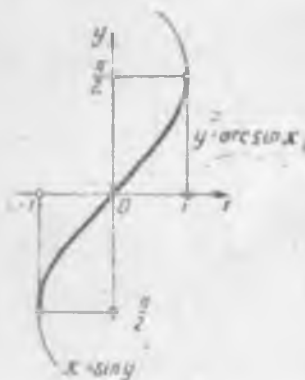
Ушбу

$$x = \sin y \quad (1)$$

функцияни қараймиз ва Оу ўқи юқорига вертикал ҳолда йуналтириб, бу функциянинг графигини ясаймиз (71- расм). Бу функция $-\infty < y < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. $-\frac{\pi}{2} <$

$y < \frac{\pi}{2}$ кесмада $x = \sin y$ функция ўсувчи, унинг қийматлари $-1 < x < 1$ кесмани тулатади. Бинобарин, $x = \sin y$ функция тескари функцияга эга, у бундай белгиланади:

$$y = \arcsin x^*).$$



71- расм.

Бу функция $-1 < x < 1$ кесмада аниқланган, унинг қийматлари $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ кесмани тулатади. 71- расмда $y = \arcsin x$ функциянинг графиги қуюқ чизик билан тасвирланган.

1-теорема. $\arcsin x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ га тенг, яъни агар $y = \arcsin x$ бўлса,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (XVII)$$

Исбот. (1) тенгликка асосан:

$$x' = \cos y.$$

Тескари функцияни дифференциаллаш қондасига кўра

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\cos y},$$

лекин

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

шунинг учун

$$y_x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

* Тригонометриядан маълум $y = \arcsin x$ тенглик (1) тенгликнинг бошқача ёзилиши эканлигини қайд этамиз. Бу ерда y (берилган x да) синуслари x га тенг бурчакларнинг қийматлари тўпламини билдиради.

ндиз олдида плюс ишора олинади, чунки $y = \arcsin x$ функция $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ кесмада қийматлар қабул қилади, демак, $\cos y \geq 0$.

1- мисол. $y = \arcsin e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

2- мисол.

$$y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2,$$

$$y' = 2 \arcsin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -2 \arcsin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

2) Функция $y = \arccos x$.

Юқорндагидек,

$$x = \cos y \quad (2)$$

функцияни қараймиз ва Оу ўқни юқорига йўналтириб, унинг графигини ясаймиз (72- расм). Бу функция $-\infty < y < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. $0 < y < \pi$ кесмада $x = \cos y$ функция камаювчи ва тескари функцияга эга бўлиб, у мана бундай белгиланади:

$$y = \arccos x.$$

Бу функция $-1 < x < 1$ кесмада аниқланган. Функциянинг қийматлари $\pi \geq y \geq 0$ кесмани тўлдиради. 72- расмда $y = \arccos x$ функциянинг графиги қуюқ чизиқ билан тасвирланган.

2- теорема. $\arccos x$ функциянинг ҳо-

силаси $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ га тенг, яъни

агар $y = \arccos x$ бўлса,

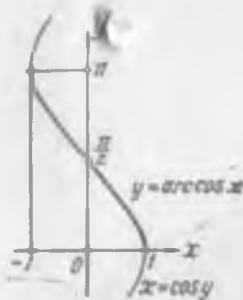
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{XVIII})$$

Исбот. (2) тенгликка асосан

$$x_y = -\sin y.$$

Демак,

$$y_x = \frac{1}{x_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$



72- расм.

Аmmo $\cos y = x$, шунинг учун

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ тенгликда илдиз олдида плюс ишора олинди, чунки $y = \arcsin x$ функция $0 < y < \pi$ кесмада аниқланган, демак, $\sin y \geq 0$.

3- мисол. $y = \arcsin(\lg x)$.

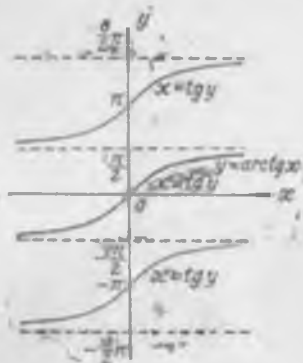
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\lg^2 x}} (\lg x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\lg^2 x}} \frac{1}{x}.$$

3) Функция $y = \arctg x$.

Ушбу

$$x = \lg y \quad (3)$$

функцияни қараймиз ва графигини ясаймиз (73- расм). Бу функция унинг, $y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) қийматларидан



73- расм.

бошқа, барча қийматлари учун аниқланган. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ интервалда $x = \lg y$ функция ўсувчи ва тескари функцияга эга бўлиб, у бундай белгиланади:

$$y = \arctg x.$$

Бу функция $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган. Функциянинг қийматлари $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ интервални тўлдиради. 73- расмда $y = \arctg x$ функциянинг графиги қуюқ чизик билан тасвирланган.

3- теорема. $\arctg x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{1+x^2}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \arctg x \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (\text{XIX})$$

Исбот. (3) тенгликка асосан

$$x'_{y'} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Демак,

$$y'_x = \frac{1}{x_y} = \cos^2 y,$$

аммо

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

$\operatorname{tg} y = x$ бўлгани учун охирги натижа:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

4- мисол. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 (\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 \frac{1}{1 + x^2}.$$

4) Функция $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$.

Ушбу

$$x = \operatorname{ctg} y$$

(4)

функцияни қараймиз. Бу функция унинг, $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$) қийматларидан бошқа, барча қийматлари учун аниқланган. Бу функциянинг графиги 74- расмда тасвирланган. $0 < y < \pi$ интервалда $x = \operatorname{ctg} y$ функция камаювчи ва тескари функцияга эга бўлиб, у

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$$

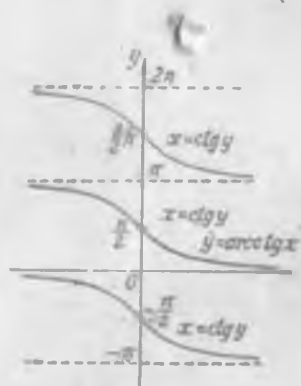
билан белгиланади. Бу функция, $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган, унинг қийматлари $0 < y < \pi$ интервални тулдиради.

4- теорема. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ функциянинг ҳосиласи $-\frac{1}{1+x^2}$ га тенг, яъни

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \text{ булса, } y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (\text{XX})$$

Исбот. (4) тенгликдан

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$



74- расм.

Демак,

$$y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}.$$

Аммо $\operatorname{ctg} y = x$. Шунинг учун

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

15-§. Дифференциаллашнинг асосий формулалари жадвали

Энди дифференциаллашнинг олдинги параграфларда чиқарилган барча асосий формулаларини ва қондаларини бир жидвалга йиғамиз.

$$y = \operatorname{const}, \quad y' = 0.$$

Даражали функция:

$$y = x^a, \quad y' = ax^{a-1};$$

жумладан

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометрик функциялар:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Тескари тригонометрик функциялар:

$$y = \arcsin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Кўрсаткичли функциялар:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

жумладан,

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Логарифмик функция:

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

жумладан,

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Дифференциаллашнинг умумий қоидалари:

$$y = Cu(x), \quad y' = Cu'(x) \quad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \quad y' = u' + v' - w',$$

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array} \right\} \quad y'_x = f'_y(u) \varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \quad y' = vu^{v-1}u' + uv' \ln u.$$

Агар $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ бўлиб, f ва φ ўзаро тескари функциялар бўлса, у ҳолда

$$f''(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

бўлади, бу ерда $y = f(x)$.

16-§. Функцияларнинг параметрик берилиши

Икки тенглама берилган:

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array} \right\} \quad (1)$$

бу ерда, $t [T_1, T_2]$ кесмадаги қийматларни қабул қилади. t нинг ҳар бир қийматига x ва y нинг қийматлари тўғри келади (φ ва ψ функцияларни бир қийматли деб фараз қиламиз). Агар x ва y қийматларига Oxy координат текислигидаги нуқтанинг координаталари деб қаралса, у ҳолда t нинг ҳар бир қийматига текисликнинг маълум бир нуқтаси тўғри келади. t нинг қийматлари T_1 дан T_2 гача ўзгарса, бу нуқта текисликда бирор эгри чизиқни чизади. (1) тенгламалар бу эгри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* дейилади, t параметр дейилади,

эгри чизиқни (1) тенгламалар билан бериш усули эса *параметрик усул* дейилади.

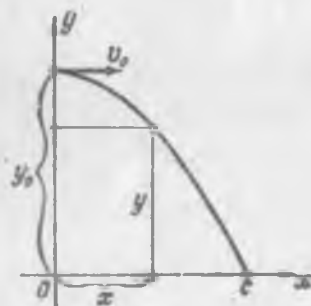
Энди, фараз қилайлик, $x = \varphi(t)$ функция $t = \Phi(x)$ тескари функцияга эга бўлсин. У ҳолда y ўзи x нинг функциясидан иборат бўлиши равшан:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \quad (2)$$

Шундай қилиб, (1) тенгламалар y ни x нинг функцияси каби аниқлайди ва x нинг функцияси параметрик равишда берилди дейилади. y нинг x билан бевосита боғлиқлигининг ифодаси $y = f(x)$ ни (1) тенгламадан параметр t ни йўқотиш йўли билан ҳосил қилиш мумкин.

Эгри чизиқларнинг параметрик тарзда берилиши механикада кенг қўлланилади. Агар Оху текисликда бирор моддий нуқта ҳаракат қилса ва бизга бу нуқтанинг координата ўқларидаги проекцияларининг ҳаракат қонунлари маълум:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1')$$



75- расм.

бўлса, бу ерда параметр t вақт, y ҳолда (1') тенгламалар ҳаракатланувчи нуқта траекториясининг параметрик тенгламаларидан иборат бўлади. Бу тенгламалардан параметр t ни йўқотиб, $y = f(x)$ ёки $F(x, y) = 0$ формада траектория тенгламасини ҳосил қиламиз. Масалан, шундай бир масалани кўздан кечирайлик.

Масала. y_0 баландликда v_0 тезлик билан горизонтал ҳаракат қилаётган самолётдан ташланган юкнинг траекторияси ва тушиш

жойи аниқлансин (ҳавонинг қаршилагини эътиборга олмаслик мумкин).

Ечйш. Юкни самолёт Оу ўқини кесган моментда ташлаган деб фараз қилиб, координаталар системасини 75- расмда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Равшанки, юкнинг ўзгармас v_0 тезлик билан горизонтал силжиши текис ҳаракат бўлади:

$$x = v_0 t.$$

Тортиш кучининг таъсири остида тушаётган юкнинг авертикал силжиши

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланади. Демак, вақтнинг исталган моментиде юкнинг ёрдан масдфаси

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланади.

Ушбу икки тенглама:

$$x = v_0 t,$$

$$y = y_0 - \frac{g t^2}{2},$$

траекториянинг параметрик тенгламалари бўлади. Параметр t ни йўқотиш учун биринчи тенгламадан $t = \frac{x}{v_0}$ қийматни топамиз ва бу қийматни иккинчи тенгламага қўямиз. У вақтда траектория тенгламасини

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

формада ҳосил қиламиз. Бу — учи $M(0, y_0)$ нуқтада бўлган парабола тенгламасидир, бунда Oy ўқ параболанинг симметрия ўқи хизматини қилади.

Энди OC кесманинг миқдорини аниқлаймиз. C нуқтанинг абсциссасини X билан белгилаймиз, бу нуқтанинг ординатаси $y = 0$ экандигини қайд этамиз, Бу қийматларни олдинги формулага қўйсак,

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

бундан

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

17- §. Баъзи эгри чизиқларнинг параметрик формадаги тенгламалари

А й л а н а. Маркази координаталар бошида ва радиуси r бўлган айлана берилган (76- расм).

Айлананинг бирор $M(x, y)$ нуқтасига ўтказилган радиусининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t билан белгилаймиз, U ҳолда айлана исталган нуқтасининг координаталари параметр t билан қуйидагича ифодаланади:

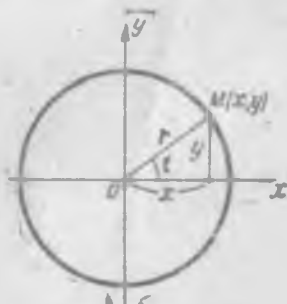
$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi.$$

Бу эса айлананинг параметрик тенгламаларидир. Агар бу тенгламалардан параметр t ни йўқотсак, y ҳолда айлананинг фақат x ва y ни ўз ичига олган тенгламасини ҳосил қиламиз. Параметрик тенгламаларни квадратга кўтариб ва қўшиб, айлана учун мана бу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки

$$x^2 + y^2 = r^2,$$



76- расм.

Эллипс. Эллипснинг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

тенгламаси берилган. Бунда

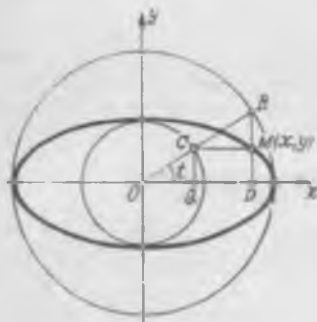
$$x = a \cos t \quad (2')$$

фараз қиламиз. Бу ифодани (1) тенгламага қўйиб,

$$y = b \sin t \quad (2'')$$

ифодани оламиз. Мана бу тенгламалар:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi, \quad (2)$$



77- расм.

эллипснинг параметрик тенгламаларидир.

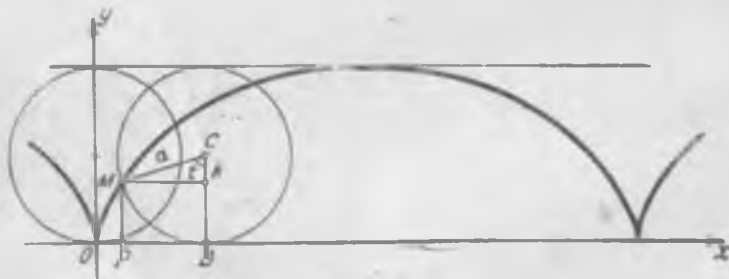
Параметр t нинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Марказлари координаталар бошида ва радиуслари a ва b бўлган иккита айлана утказамиз (77- расм). $M(x, y)$ нуқта эллипсда ётсин, B нуқта эса катта айлананинг M нуқта билан бир хил абсциссага эга бўлган нуқтаси бўлсин, OB радиуснинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t билан белгилаймиз. Расмдан бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$x = OP = a \cos t \quad \{ \text{бу — (2')} \text{ тенглама} \}$$

$$CQ = b \sin t.$$

(2'') тенгликка асосан $CQ = y$, яъни CM тўғри чизик Ox ўққа параллел деган ҳулосага келамиз.

Демак, (2) тенгламаларда t радиус OB нинг абсцисса ўқи билан ҳосил қилган бурчагидир. Баъзан t бурчак *эксцентрик бурчак* деб ҳам аталади.



78- расм.

Циклоида: Агар айлана тўғри чизик бўйича сирпанмасдан юмаланса, бу айланада ётувчи нуқта чизган эгри чизик циклоида дейилади (78- расм). Фараз қилайлик, юмаланувчи айлананинг M нуқтаси ҳаракат бошланишида координаталар бошига тушган бўлсин. Айлана t бурчакка бурилгандан кейин M нуқтанинг координатларини аниқлаймиз. Юмаланувчи айлананинг радиусини a билан белгилаймиз (78- расмдан кўрингандек).

$$x = OP = OB - PB,$$

аимо айлана сирпанимдан юмаланади, шунинг учун

$$OB = MB = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

Демак,

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

Сўнгра,

$$y = MP = KB = (B - CK) = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi \quad (3)$$

тенгламалар циклоиданинг параметрик тенгламаларидир. t нинг 0 дан 2π га-ча ўзгаришида M нуқта циклоиданинг бир аркини чизади.

Охириги тенгламалардан параметр t ни йўқотамиз ва x нинг y га бевосита боғланишини ҳосил қиламиз. $0 < t < \pi$ кесмада $y = a(1 - \cos t)$ функция ушбу тескари

$$t = \arccos \frac{a-y}{a}$$

функцияга эга. t нинг ифодасини (3) тенгламалардан биринчисига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin \left(\arccos \frac{a-y}{a} \right)$$

ёки

$$0 < x < \pi a \text{ да } x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Расмдан бевосита кўрамизки, $\pi a < x < 2\pi a$ да

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right).$$

$x = a(t - \sin t)$ функция тескари функцияга эга, бироқ y элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Шунинг учун $y = f(x)$ функция ҳам элементар функциялар билан ифодаланмайди.

1-изох. Функцияларни ва эгри чизиқларни текшириш учун баъзи бир ҳолларда y нинг x га ёки x нинг y га бевосита боғланишига қараганда параметрик тенгламалар қулайроқ эканлигига циклоида мисолида ишонч ҳосил қилиш осон.

Астроида. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ z = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi) \quad (4)$$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқ астроида дейилади.

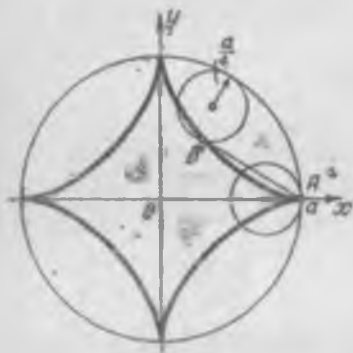
Иккала тенгламанинг барча ҳадларини $\frac{2}{3}$ даражага кўтариниш ва қўшини билан x ва y орасида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу эгри чизик 79- расмда тасвирланган формага эга эканлиги қуйида кўрсатилди (V боб, 12- § га қаранг). Бу эгри чизик a радиусли айлана бўйича сирпан-



79- расм.

май юмаланувчи $\frac{a}{4}$ радиусли иккинчи айланадаги бирор нуқтанинг траекторияси сифатида чиқарилиши мумкин (бунда кичик айлана доимо катта айлана ичида қолади; 79- расмга қаранг).

2- изоҳ. (4) тенгламалар ва (5) тенглама биргина $y = f(x)$ функцияни аниқлаб қолмайди. Улар $-a \leq x \leq +a$ кесмада узлуксиз иккита функцияни аниқлайди. Улардан бири манфий бўлмаган қийматлар, иккинчиси мусбат бўлмаган қийматлар қабул қилади.

18- §. Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи

Фараз қилайлик, x нинг функцияси y ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу функциялар ҳосилаларга эга ва $x = \varphi(t)$ функция ҳосиласига эга бўлган $t = \Phi(x)$ тескари функцияга эга деб фараз қиламиз. У ҳолда параметрик тенгламалар билан аниқланган $y = f(x)$ функцияни мураккаб функция деб қарамоқ мумкин:

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x),$$

t — оралиқдаги аргумент.

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасига мувофиқ

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t) \Phi'_x(x). \quad (2)$$

Тескари функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремага асосан

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Охирги ифодани (2) тенгликка қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

ёки

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (\text{XXI})$$

Чиқарилган формула унинг x га бевосита боғланишининг ифодасини топилай туриб, параметрик берилган функциянинг y'_x ҳосиласини топишга имкон беради.

1- мисол. x нинг функцияси y ушбу параметрик тенгламалар билан берилган:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \end{aligned} \right\} \quad (0 < t < \pi).$$

1) t нинг исталган қийматида, 2) $t = \frac{\pi}{4}$ қийматда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила топилисин.
Е ч и ш.

$$1) y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t,$$

$$2) (y'_x)_{t = \frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

2- мисол. Ихтиёрий $(0 < t < 2\pi)$ нуқтада ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$$

циклоидага уринманинг бурчак коэффициентини топилисин.

Е ч и ш. Уринманинг ҳар бир нуқтадаги бурчак коэффициентини y'_x ҳосиланинг бу нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аmmo

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t.$$

Демак,

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Демак, циклоиданинг ҳар бир нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициентини $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$ га тенг, бу ерда t — параметрнинг шу нуқтага мос қиймати.

Аммо, бунинг маъноси уринманинг Ox ўқиға α оғиш бурчаги $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ га тенг демакдир (t нинг $-\pi$ ва π орасидаги қийматлари учун*).

19- §. Гиперболик функциялар

Математик анализнинг кўпгина татбиқларида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ва $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ кўринишдаги кўрсаткичли функцияларнинг комбинациялари учрайди. Бу комбинациялар янги функциялар сифатида қаралади ва қуйидагича белгиланади:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бу (1) функциялардан биринчиси *гиперболик синус*, иккинчиси *гиперболик косинус* дейилади. Бу функциялар ёрдами билан яна иккита $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ ва $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ функцияни аниқлаш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \text{гиперболик тангенс}, \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \text{гиперболик котангенс}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ функциялар x нинг барча қийматлари учун аниқланган. Функция $\operatorname{cth} x$ эса $x = 0$ нуқтадан бошқа ҳамма ерда аниқланган. Гиперболик функцияларнинг графиклари 80, 81 ва 82- расмларда берилган.

$\operatorname{sh} x$ ва $\operatorname{ch} x$ функцияларнинг (1) формулалар таърифларидан тригонометрик функциялар орасидаги муносабатлар каби муносабатлар келиб чиқади:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (2)$$

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad (3)$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \quad (3')$$

*) Ҳақиқатан бурчак коэффициенти уринманинг Ox ўқиға α -оғиш бурчагининг тангенсига тенг. Шунинг учун $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ ва t нинг $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ айрма 0 ва π орасида ётадиган қийматлари учун $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

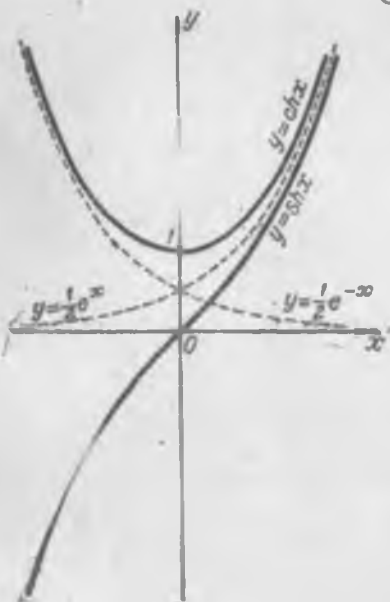
Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

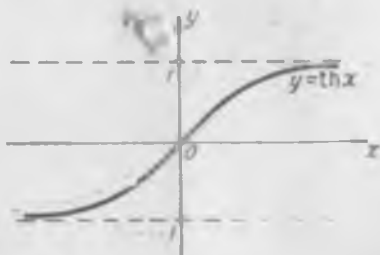
Сўнгра,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

эканини назарга олиб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:



80- расм.



81- расм.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a-b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b).\end{aligned}$$

(3') муносабатнинг тўғрилиги ҳам шунинг сингари исботланади.

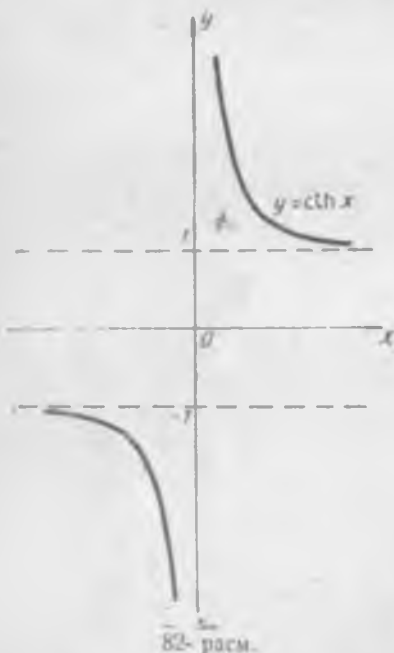
„Гиперболик функциялар“ дейишнинг сабаби шу билан изоҳланадики,

$$x^2 + y^2 = 1$$

айланани параметрик тасвирлаш учун $\sin t$ ва $\cos t$ тригонометрик функциялар қандай роль ўйнаса,

$$x^2 - y^2 = 1$$

гиперболани параметрик тасвирлаш учун $\operatorname{sh} t$ ва $\operatorname{ch} t$ функциялар ҳам шундай роль ўйнайди.



Ҳақиқатан,

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

тенгламалардан t параметрни йўқотиш билан

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

ёки

$$x^2 + y^2 = 1$$

(айлана тенгламаси) тенгликни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш

$$x = \operatorname{ch} t,$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

тенгламалар гиперболанинг параметрик тенгламаларидир.

Ҳақиқатан, бу тенгламаларни ҳадма-ҳад квадратга кўтариб, биринчисидан иккинчиси айланилса, ушбу тенглик ҳосил қилинади:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Унг томондаги ифода, (2) формулага асосан, бирга тенг, демак,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

бу эса гиперболанинг тенгламасидир.

Ушбу

$$x^2 + y^2 = 1$$

тенглама билан ифодаланган айланани текшираемиз (83- расм). $x = \cos t$, $y = \sin t$ тенгламаларда t параметр сон жиҳатдан АОМ марказий бурчакка ёки АОМ сектор юзи S нинг иккиланганига тенг, чунки $t = 2S$.

Гиперболанинг

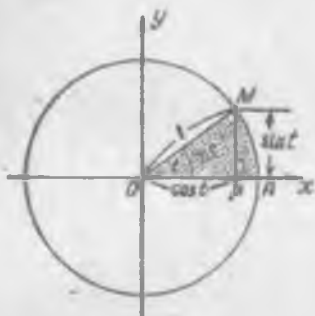
$$x = \operatorname{ch} t,$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

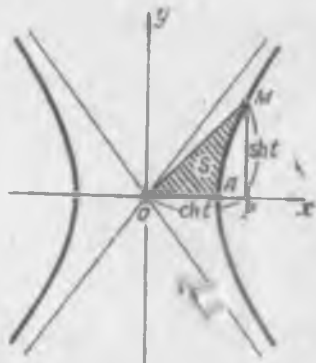
параметрик тенгламаларида t параметр ҳам сон жиҳати н АОМ гиперболик сектор^{*} юзининг иккиланганига тенгликни исботсиз қайд этамиз (84- расм).

Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари гиперболик функцияларнинг таърифларидан келиб чиқадиган ушбу

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, & (\operatorname{ct} h x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXII})$$



83- расм.



84- расм.

формулалар билан аниқланади; масалан, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функция учун

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

20- §. Дифференциал

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада дифференциалланадиган бўлсин. Бу функциянинг $[a, b]$ кесмага тегишли бирор x нуқтадаги ҳосиласи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

тенглик билан аниқланади. $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат маълум

$f'(x)$ сонга интилади ва, демак, $f'(x)$ ҳосиладан чексиз кичик миқдорга фарқ қилади:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

бу ерда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$.

Охирги тенгликнинг барча ҳадларини Δx га кўпайтириб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Умумий ҳолда $f'(x) \neq 0$, шунинг учун ўзгармас x ва ўзгарувчи $\Delta x \rightarrow 0$ да $f'(x) \Delta x$ кўпайтма Δx га нисбатан биринчи тартибли чексиз кичик миқдордир. $\alpha \Delta x$ кўпайтма эса Δx га нисбатан доимо юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Шундай қилиб, функциянинг Δy орттирмаси иккита қушилувчидан иборат бўлиб, булардан орттирманинг бош бўлаги деб аталадиган биринчиси $[f'(x) \neq 0$ да] Δx орттирмага нисбатан чизиқлидир. $f'(x) \Delta x$ кўпайтма функциянинг *дифференциали* деб аталади ва dy ёки $df(x)$ билан белгиланади.

Шундай қилиб, агар $y = f(x)$ функция x нуқтада $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг аргумент орттирмаси Δx билан кўпайтмаси функциянинг *дифференциали* деб аталади ва dy символ билан белгиланади:

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (2)$$

$y = x$ функциянинг дифференциалини топамиз; бу ҳолда $y' = (x)' = 1$, демак, $dy = dx = \Delta x$. Шундай қилиб, эркин ўзгарувчи x нинг дифференциали dx унинг орттирмаси Δx билан бир хил бўлар экан. $dx = \Delta x$ тенгликни ҳам эркин ўзгарувчи дифференциалининг таърифи деб қаралганда текширилган мисол, функция дифференциалининг таърифига бунинг зид келмаслигини курсатар эди. Ҳар қандай ҳолда (2) формулани бундай ёза оламиз:

$$dy = f'(x) dx.$$

Аммо, бу муносабатдан ушбу тенглик келиб чиқади:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Демак, $f'(x)$ ҳосилани функция дифференциалини эркин ўзгарувчининг дифференциалига нисбати деб қараш мумкин.

(1) нифодага қайтамыз ва уни, (2) ни ҳисобга олган ҳолда, бундай ёзамиз:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \quad (3)$$

Шундай қилиб, функция орттирмаси функция дифференциалидан Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади. Агар $f'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha \Delta x$ кўпайтма dy га нисбатан ҳам юқори тартибли чексиз кичик миқдордир ва

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(x) \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Шунинг учун тақрибий ҳисоблашларда баъзан ушбу

$$\Delta y \approx dy \quad (4)$$

тақрибий тенгликдан ёки ёйиқроқ кўринишдаги

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x \quad (5)$$

тақрибий тенгликдан фойдаланилади, бу эса ҳисоблашни қисқартиради.

1- мисол. $y = x^2$ функциянинг dy дифференциали ва Δy орттирмаси топилиши:

1) x ва Δx нинг ихтиёрий қийматларида;

2) $x = 20$, $\Delta x = 0,1$ бўлганда.

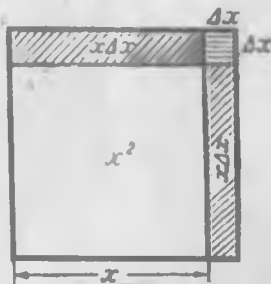
Ечиш. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$,

$$dy = (x^2)' \Delta x = 2x \Delta x.$$

2) Агар $x = 20$, $\Delta x = 0,1$ бўлса,
 $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01$,
 $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00$.

Δy ни dy билан алмаштиришдаги хато 0,01 га тенг. Кўпинча уни $\Delta y = 4,01$ га нисбатан оз деб ҳисоблаб, уни эътиборга олмаслик мумкин.

Текширилган масала 85- расм билан равшан кўрсатилади.



85- расм.

Тақрибий ҳисоблашларда (5) дан чиқариладиган ушбу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x \quad (6)$$

тақрибий тенгликдан ҳам фойдаланилади.

2- мисол. $f(x) = \sin x$ бўлсин, у ҳолда $f'(x) = \cos x$.

Бу ҳолда (6) тақрибий тенглик мана бу кўринишни олади:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x. \quad (7)$$

$\sin 46^\circ$ нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз. $x = \frac{\pi}{4}$ деб фараз қиламиз

(бу 45° бурчакка тўғри келади). $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (бу 1° бурчакка тўғри келади),

$x + \Delta x = \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{180}$ деб фараз қиламиз. Бу қийматларни (7) га қўйсак,

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4}$$

ёки

$$\sin 46^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 = 0,7194.$$

3-мисол. Агар (7) формулада $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ десак, қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha \approx \alpha.$$

4-мисол. Агар $f(x) = \operatorname{tg} x$ бўлса, у вақтда (6) формула бўйича қуйидаги тақрибий тенгликни оламиз:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x,$$

$x = 0$, $\Delta x = \alpha$ бўлганда:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha.$$

5-мисол. Агар $f(x) = \sqrt{x}$ бўлса, (6) формула

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x,$$

ни беради. $x = 1$, $\Delta x = \alpha$ фараз қилиб,

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз.

Функциянинг дифференциалини топиш масаласи унинг ҳосиласини топиш билан барабар, чунки ҳосилани аргументнинг дифференциалига кўпайтириш билан функциянинг дифференциалини ҳосил қиламиз. Демак, ҳосиллага тегишли теоремалар ва формулаларнинг кўпчилиги дифференциаллар учун ҳам ўз кучини сақлайди. Масалан:

Иккита дифференциалланувчи u ва v функциялар йиғиндисининг дифференциали шу функциялар дифференциалларининг йиғиндисига тенг:

$$d(u + v) = du + dv.$$

Иккита дифференциалланувчи u ва v функциялар кўпайтмасининг дифференциали ушбу

$$d(uv) = u dv + v du$$

формула билан аниқланади.

Масалан, охирги формулани исботлайлик. Агар $y = uv$ бўлса, y ҳолда

$$dy = y'dx = (uv' + vu') dx = uv'dx + vu'dx,$$

аммо

$$v'dx = dv, \quad u'dx = du,$$

шунинг учун

$$dy = u dv + v du.$$

Бошқа формулалар ҳам шунга ўхшаш исботланади, масалан, бўлинманинг дифференциалини аниқловчи формула:

Агар $y = \frac{u}{v}$ бўлса, $dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ бўлади.

Функциянинг дифференциалини ҳисоблашга доир бир неча мисол ечамиз.

6-мисол. $y = \lg^2 x, \quad dy = 2 \lg x \cdot \frac{1}{x} dx.$

7-мисол. $y = \sqrt{1 + \ln x}, \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx.$

Мураккаб функция дифференциалининг ифодасини топамиз. Фараз қилайлик,

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x), \quad \text{ёки} \quad y = f[\varphi(x)]$$

бўлсин. U ҳолда мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасига мувофиқ.

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \varphi'(x),$$

демак,

$$dy = f'_u(u) \varphi'(x) dx,$$

лекин $\varphi'(x) dx = du$, шунинг учун

$$dy = f'(u) du.$$

Шундай қилиб, *оралиқ аргумент u эркин ўзгарувчи бўлган ҳолда функциянинг дифференциали қандай кўринишда бўлган бўлса, мураккаб функциянинг дифференциали шундай кўринишда бўлади.* Бошқача айтганда, *дифференциалнинг формаси функциянинг аргументи эркин ўзгарувчи ёки бошқа аргументнинг функцияси бўлишига боғлиқ эмас. Дифференциал формасининг инвариантлиги деб аталадиган бу муҳим хоссадан бундан буён кенг равишда фойдаланилади.*

8-мисол. $y = \sin \sqrt{x}$ функция берилган. dy топилсин.

Ечиш. Берилган функцияни мураккаб шаклда ёзамиз: $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$ ва дифференциаллаймиз.

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

яъни $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, шунинг учун бундай ёзиш мумкин:

$$dy = \cos u du \quad \text{ёки} \quad dy = \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

21-§. Дифференциалнинг геометрик маъноси

Биз

$$y = f(x)$$

функцияни ва унга тегишли эгри чизиқни текшираемиз (86-расм).

Тенгласи $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта олиб, бу нуқтада эгри чизиққа уринма ўтказамиз ва бу уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагини α билан белгилаймиз*). Эркин узгарувчига Δx орттирмани берамиз; y ҳолда функция $\Delta y = NM_1$ орттирмани олади. $y = f(x)$ эгри чизиқда $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ қийматларга $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқта мос келади.

MNT учбурчакдан

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha,$$

лекин

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

шунинг учун

$$NT = f'(x) \Delta x;$$

яъни дифференциалнинг таърифига мувофиқ $f'(x) \Delta x = dy$. Шундай қилиб,

$$NT = dy.$$

Охирги тенглик $f(x)$ функциянинг берилган x ва Δx қийматларига тегишли дифференциали $y = f(x)$ эгри чизиқнинг берилган x нуқтасидаги уринма ординатасининг орттирмасига тенг эканини билдиради.

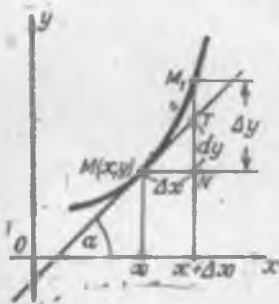
86-расмдан бевосита

$$M_1T = \Delta y - dy$$

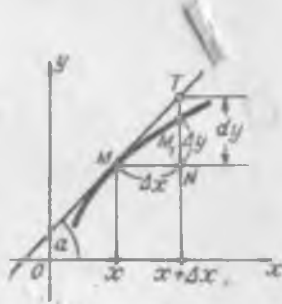
*) $f(x)$ функция x нуқтада чеқди ҳосилга эга деб фарз қилиб, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

эканлиги чиқади. Илгари исбот қилинганига кўра $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{M_1 T}{NT} \rightarrow 0$. Δy орттирма доимо dy дан катта деб ўйлаш ярамайди. Чунончи, 87- расмда

$$\Delta y = M_1 N, \quad dy = NT, \quad \text{бунда } \Delta y < dy.$$



86- расм.



87- расм.

22- §. Турли тартибли ҳосилалар

$y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлсин. $f'(x)$ ҳосиланинг қийматлари, умуман айтганда, x га боғлиқ, яъни $f'(x)$ ҳосила ҳам x нинг функциясидан иборат. Бу функцияни дифференциаллаб, $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталадиган ҳосилани топамиз.

Биринчи ҳосиладан олинган ҳосила *иккинчи тартибли ҳосила* ёки бошланғич функциянинг *иккинчи ҳосиласи* дейилади ва y'' ёки $f''(x)$ символ билан белгиланади:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Масалан, $y = x^5$ бўлса, y ҳолда

$$y' = 5x^4, \quad y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

Иккинчи ҳосиланинг ҳосиласи *учинчи тартибли ҳосила* ёки *учинчи ҳосила* дейилади ва y''' ёки $f'''(x)$ билан белгиланади.

Умуман $f(x)$ функциянинг n - тартибли ҳосиласи деб, унинг $(n-1)$ - тартибли ҳосиласининг (биринчи тартибли) ҳосиласига айтилади ва $y^{(n)}$ ёки $f^{(n)}(x)$ симболи билан белгиланади:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(Ҳосиланинг тартиби даража кўрсаткичи деб тушуниладиган учун қавс ичига олинади.)

Тўртинчи, бешинчи ва ундан юқори тартибли ҳосилалар рим рақамлари билан белгиланади; y^{IV} , y^V , y^{VI} , ... Бундай ҳолда ҳосиланинг тартибини қавсиз ёзиш мумкин. Масалан, агар $y = x^6$ бўлса, y ҳолда $y' = 6x^5$, $y'' = 20x^4$, $y''' = 60x^3$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^V = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0$.

1- мисол. $y = e^{kx}$ функция ($k = \text{const}$) берилган. Унинг исталган n - тартибли ҳосиласининг ифодаси топилади.

Ечиш. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

2- мисол. $y = \sin x$ бўлса, $y^{(n)}$ топилади.

Ечиш.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right).$$

.....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Баъзи бир элементар функцияларнинг исталган тартибли ҳосилалари учун ҳам формулалар шундай чиқарилади. Ҳақиқатан $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$ функцияларнинг n - тартибли ҳосилалари учун формулаларни ўзи топмоғи мумкин.

Исталган тартибли ҳосилалар учун 7- § даги 2 ва 3- теоремаларда кўрсатилган қоидалар осонгина умумлаштирилади.

Бу ҳолда ўз-ўзидан тушунарли ушбу формулалар ўринлидир:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Икки функция кўпайтмаси $u(x) v(x)$ нинг n - тартибли ҳосиласини ҳисоблашга имкон берувчи (Лейбниц формуласи деб аталган) формулани чиқарамиз. Бу формулани чиқариш учун олдин бир неча ҳосилани топамиз, сунгра исталган тартибли ҳосилаларни ҳисоблаш учун ярайдиган умумий қонунни аниқлаймиз:

$$y = uv,$$

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u'v'' + 2u'v'' + u'v''' + uv''' = \\ = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$$

Ҳосилалар тузиш қонуни исталган тартибли ҳосилалар учун сақланади ва қуйидагидан иборат:

$(u + v)^n$ ифодани Ньютон биноми формуласига мувофиқ ёйиш ва ҳосил бўлган ёйилмада u ва v нинг даража кўрсаткичларини ҳосилалар тартибининг кўрсаткичлари билан алмаштириш керак, шу билан бирга ёйилманинг ҳар би ҳадларига кирувчи ноль даражаларни ($u^0 = v^0 = 1$) функцияларнинг ўзларин билан (яъни „нолинчи тартибли ҳосилалар“ билан) алмаштириш керак:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = (u)^{(n)} v + nu^{(n-1)} v' + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Бу эса *Лейбниц формуласидир*.

Формуланинг қатъий исботини тўла математик индукция методи билан бериш (яъни бу формуланинг n - тартиб учун тўғрилигидан унинг $(n+1)$ - тартиб учун ҳам тўғрилиги келиб чиқишини исботлаш) ҳам мумкин.

3- мисол. $y = e^{ax} x^2$. $y^{(n)}$ ҳосила топилисин.
Ечиш.

$$\begin{aligned} u &= e^{ax}, & v &= x^2, \\ u' &= ae^{ax}, & v' &= 2x, \\ u'' &= a^2 e^{ax}, & v'' &= 2, \\ &\dots & & \\ u^n &= a^n e^{ax}, & v''' &= v^{IV} = \dots = 0, \\ y^{(n)} &= a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1} e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} e^{ax} \cdot 2, \end{aligned}$$

ёки

$$y^{(n)} = e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1} x + n(n-1) a^{n-2}].$$

23- §. Турли тартибли дифференциаллар

Биз $y = f(x)$ функцияга эга бўлайлик, бу ерда x — эркин ўзгарувчи. Бу функциянинг дифференциали

$$dy = f'(x) dx$$

x нинг бирор функциясидир, аммо x га фақат биринчи купайтувчи $f'(x)$ боғлиқ бўлиши мумкин, иккинчи купайтувчи (dx) эса эркин ўзгарувчи x нинг орттирмасидан иборат бўлиб, ўзгарувчининг қийматига боғлиқ эмас. dy ўзи x нинг функцияси бўлганликдан, биз бу функциянинг дифференциали ҳақида гапирмоққа ҳақлимиз.

Функция дифференциалининг дифференциали бу функциянинг *иккинчи дифференциали* ёки *иккинчи тартибли дифференциали* дейилади ва d^2y билан белгиланади:

$$d(dy) = d^2y$$

Иккинчи дифференциалнинг ифодасини топамиз. Дифференциалнинг умумий таърифига асосан:

$$d^2y = [f'(x) dx]' dx.$$

dx ўзи x га боғлиқ эмас, шунинг учун дифференциаллашда dx ҳосила ишорасидан ташқарига чиқарилади ва биз

$$d^2y = f''(x) (dx)^2$$

ни ҳосил қиламиз. Дифференциалнинг даражасини ёзишда қавсларни тушириб қолдириш қабул қилинган; масалан, $(dx)^2$ ўрнига dx^2 ёзиш қабул қилинган, бундан dx ифоданинг квадрати тушунилади; $(dx)^3$ ўрнига dx^3 ёзилади ва ҳоказо.

Учинчи дифференциал ёки функциянинг *учинчи тартибли дифференциали* деб унинг иккинчи дифференциалининг дифференциалига айтилади:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x) dx^2]' dx = f'''(x) dx^3.$$

Умуман n -*тартибли дифференциал* деб $(n-1)$ -тартибли дифференциалнинг биринчи дифференциалига айтилади:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x) dx^{n-1}]' dx,$$

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (1)$$

Турли тартибли дифференциаллардан фойдаланган ҳолда, изталган тартибли ҳосилани тегишли тартибли дифференциалларнинг нисбати шаклида бериш мумкин:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (2)$$

Изоҳ. (1) ва (2) тенгликлар ($n > 1$ да) x фақат эркин ўзгарувчи булган ҳол учунгина туғридир. Ҳақиқатан, ушбу мураккаб функцияни олайлик:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x). \quad (3)$$

Биз u нинг эркин ўзгарувчи ёки x нинг функцияси бўлишига қарамай, биринчи тартибли дифференциал инвариант формада бўлишини кўрдик:

$$dy = F'_u(u) du. \quad (4)$$

Иккинчи дифференциал ва ундан кейинги дифференциаллар бу хоссага эга эмас.

Ҳақиқатан, (3) ва (4) формулаларга асосан:

$$d^2 y = d(F'_u(u) du).$$

Лекин бу ерда $d(u) = \varphi'(x) dx$ ўзи x га боғлиқ шунинг учун

$$d^2 y = d(F'_u(u) du + F''_u(u) d^2 u)$$

ёки

$$d^2 y = F''_{uu}(u) (du)^2 + F''_{uu}(u) d^2 u, \text{ бунда } d^2 u = \varphi''(x) (dx)^2. \quad (5)$$

$d^2 y$ ва ҳоказолар ҳам шунинг сингари топилади.

1-мисол. Ушбу $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$ мураккаб функциядан dy ва $d^2 y$ топилисин.

Ечиш.

$$dy = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Сўнгра (5) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} d^2 y &= -\sin u (du)^2 + \cos u d^2 u = -\sin u (du)^2 + \cos u \cdot u'' (dx)^2 = \\ &= -\sin u \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 (dx)^2 + \cos u \left(-\frac{1}{4x^{3/2}} \right) (dx)^2. \end{aligned}$$

24-§. Ошкормас функцияларнинг ва параметрик берилган функцияларнинг турли тартибли ҳосилалари

1. Ошкормас функциялардан турли тартибли ҳосилаларни топиш усулини мисолда кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, x нинг ошкормас функцияси y ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

тенглик билан аниқлансин. Бу тенгликнинг барча ҳадларини, y бунда x нинг функцияси эканлигини эсда тутган ҳолда, x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

бундан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (2)$$

Охирги тенгликни яна x бўйича (x нинг функцияси y эканлигини назарда тутиб) дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2 y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Бу ерда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила ўрнига унинг ифодасини (2) тенгликдан олиб қўйсак,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2 y + x \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}}{y^3},$$

ёки соддалаштиргандан сўнг

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

(1) тенгламадан

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

чиқади, шунинг учун иккинчи ҳосилани

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

кўринишда ёзнш мумкин. Охирги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топамиз ва ҳоказо.

2. Энди параметрик берилган функциялардан юқори тартибли ҳосилалар топиш масаласини қараб чиқамиз.

Фараз қилайлик, x нинг функцияси y ушбу параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

бунда $x = \varphi(t)$ функция $[t_0, T]$ кесмада $t = \Phi(x)$ тесқари функцияга эга бўлсин.

Бу ҳолда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (4)$$

тенглик билан аниқланиши 18-§ да исботланган эди.

Иккинчи ҳосила $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топиш учун x нинг функцияси t эканлигини назарда тутиб, (4) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \frac{dt}{dx}, \quad (5)$$

аммо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Охирги ифодани (5) формулага қўйиб, шунинг ҳосили қиламиз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

Бу формулага қўйидаги ихчамроқ шаклни бериш мумкин:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \psi''(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Шунга ўхшаш

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

ва ҳоказо ҳосилаларни ҳам топиш мумкин.

Мисол. x нинг функцияси y параметрик тарзда берилган:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ҳосилалар топилисин.}$$

Е ч и ш.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{(-a \sin t)^3} = -\frac{b}{a^3} \frac{1}{\sin^3 t}$$

28-§. Иккинчи ҳосиланинг механик маъноси

Ўлгарилама ҳаракат қилувчи жисмнинг ўтган s йўли t вақт-га боғланишда

$$s = f(t) \quad (1)$$

формула билан ифодаланади.

Маълумки (III боб, 1- § га қаранг), жисмининг берилган моментдаги v тезлиги йўлнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласига тенг, яъни

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Бирор t моментда жисмининг тезлиги v га тенг бўлсин. Агар ҳаракат текис бўлмаса, у ҳолда t пайтдан кейин ўтган Δt вақт ораллиғида тезлик ўзгаради ва Δv орттирмани олади.

Тезлик орттирмаси Δv нинг вақт орттирмаси Δt га нисбати Δt вақтдаги ўртача тезланиш дейилади:

$$a_{\text{ор}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вақт орттирмаси нолга интилган ҳолда тезлик орттирмасининг вақт орттирмасига нисбатининг limiti берилган моментдаги тезланиш дейилади:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

бошқача айтганда, берилган моментдаги тезланиш тезликнинг вақт бўйича ҳосиласига тенг:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

яъни $v = \frac{ds}{dt}$, демак,

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

яъни тугри чизиqli ҳаракат тезланиши йўлнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласига тенг. (1) тенгликка асосан:

$$a = j''(t).$$

Мисол. s масофанинг t вақтга боғланиши ушбу

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \quad (3)$$

формула билан берилган бўлса, эркин тушувчи жисмининг v тезлиги ва a тезланиши топилисин, бу ерда $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ер тортишининг тезланиши, $s_0 = s_{t=0}$ эса s нинг $t = 0$ даги қиймати.

Еч и ш. Дифференциаллаб, шунини топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = g t + v_0; \quad (4)$$

бу формуладан $v_0 = (v)_{t=0}$ эканлиги чиқади.

Яна бир марта дифференциаллаб,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

ни тошамиз. Аксинча, агар бирор ҳаракатнинг тезлашиши u эгармас ва g га тенг бўлса, u ҳолда $(v)_{t=0} = v_0$ ва $(s)_{t=0} = s_0$ шартларда тезлик (4) тенглик билан, масофа эса (3) тенглик билан ифодаланишини қайд этамиз.

26- §. Уринма ва нормал тенгламалари. Уринма ости ва нормал ости узунликлари

Тенгламаси

$$y = f(x)$$

бўлган эгри чизиқни текшираимиз. Бу эгри чизиқда $M(x_1, y_1)$ нуқтани оламиз (88- расм) ва бу нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринма ордината ўқига параллел эмас деб фараз қилиб, бу уринма тенгламасини ёзамиз.

M нуқтадан ўтувчи k бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламаси

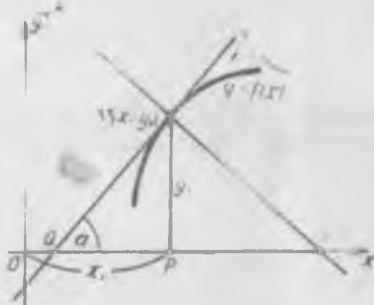
$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

қўринишга эга. Уринма учун (3- § га қаранг)

$$k = f'(x_1),$$

шунинг учун уринманинг тенгламаси

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$



88- расм.

қўринишни олади. Эгри чизиққа унинг берилган нуқтасидаги уринма билан бир қаторда нормални ҳам қараш жуда кўп учрайди.

Таъриф. Эгри чизиққа берилган нуқтада *нормал* деб, берилган нуқтадан ўтувчи ва шу нуқтадаги уринмага перпендикуляр тўғри чизиққа айтилади.

Нормалнинг таърифидан, унинг бурчак коэффициенти k_n уринманинг бурчак коэффициенти k_t билан

$$k_n = -\frac{1}{k_t}$$

яъни

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

тенглик билан боғланганлиги чиқади.

Демак, $y = f(x)$ эгри чизиққа $M(x_1, y_1)$ нуқтадаги нормал тенгламаси

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

кўринишга эга.

1-ми со л. $y = x^3$ эгри чизиққа унинг $M(1, 1)$ нуқтасида уринма ва нормалнинг тенгламалари ёзилсин.

Ечиш. $y' = 3x^2$ бўлгани учун уринманинг бурчак коэффициенти $(y')_{x=1} = 3$ га тенг.

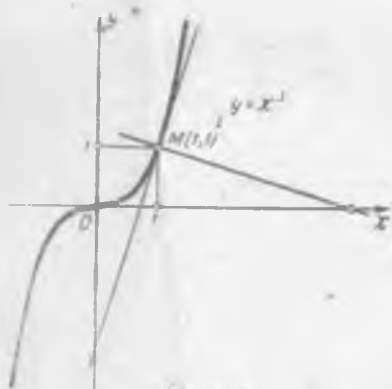
Демак, уринма тенгламаси

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ ёки } y = 3x - 2.$$

Нормал тенгламаси:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \text{ ёки } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(89- расмга қаранг).



89- расм.

Уринманинг уриниш нуқтаси билан Ox ўқ орасидаги QM кесмасининг (88- расм) T узунлиги уринманинг узунлиги дейилади. Бу кесманинг Ox ўқдаги проекцияси, яъни QP кесма уринма ости дейилади; уринма ости узунлиги S_T билан белгиланади. MR кесманинг N узунлиги нормал узунлиги дейилади, RM кесманинг Ox ўқдаги RP проекцияси эса нормал ости дейилади; нормал ости узунлиги S_N билан белгиланади.

$y = f(x)$ эгри чизиқ билан $M(x_1, y_1)$ нуқта учун T, S_T, N, S_N миқдорларни топамиз.

88- расмдан кўринганидек,

$$QP = |y_1 \operatorname{ctg} \alpha| = \left| \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right|,$$

шунинг учун

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right|,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y'_1} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|.$$

Сўнгра, шу расмнинг ўзидан

$$PR = |y_1 \operatorname{tg} \alpha| = |y_1 y'_1|$$

ёканлиги равшан, шунинг учун

$$S_N = |y_1 y'_1|,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y'_1)^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

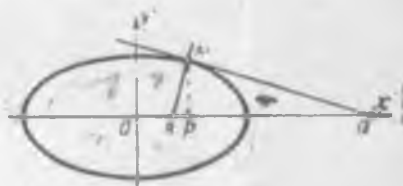
Бу формулалар $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$ фараз қилиб чиқарилди. Аммо улар ушбу ҳолда ҳам сақланади.

2-мисол.

$x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (1) эллипс

учун $t = \frac{\pi}{4}$ бўлган $M(x_1, y_1)$ нуқтада (90-расм) уринма ва нормал тенгламалари, уринма ва уринма ости узунликлари, нормал ва нормал ости узунликлари топилсин.

Е қ и ш. (1) тенгламадан қуйидагиларни топамиз:



90-расм.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Уриниш нуқтаси M нинг координаталарини топамиз:

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Уринманинг тенгламаси:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ёки

$$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Нормал тенгламаси:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ёки

$$(ax - by) \sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Уринма ости ва нормал ости узунликлари:

$$S_T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad S_N = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{b}} \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Уринма ва нормал узунликлари:

$$r = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$N = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

27- §. Радиус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласининг геометрик маъноси

Эгри чизиқнинг қутб координаталардаги

$$\rho = f(\theta) \quad (1)$$

тенгламасига эга бўлайлик. Қутб координаталаридан тўғри бурчакли Декарт координаталарига ўтиш формулаларини ёзамиз:

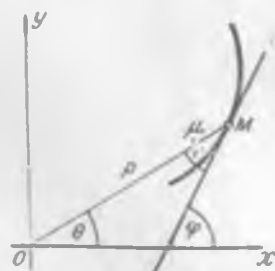
$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Бу ерда ρ уринга унинг θ орқали ифодасини (1) тенгламадан олиб қўямиз:

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \quad (2)$$

Бу (2) тенгламалар берилган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаларидир, бунда параметр қутб бурчаги θ дир (91- расм).

Агар эгри чизиқнинг бирор $M(\rho, \theta)$ нуқтасидаги уринманинг абсцисса ўқининг мусбат йуналиши билан ташкил қилган бурчагини φ билан белгиласак, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:



91- расм.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

ёки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} \quad (3)$$

Радиус-вектор йуналиши билан уринма орасидаги бурчакни μ билан белгилаймиз: $\mu = \varphi - \theta$.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}$$

эканлиги равшан. Бу ерда $\operatorname{tg} \varphi$ урнига унинг (3) ифодасини қўйиб ва ихчамлаштириб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \cos \theta - (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \sin \theta}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \cos \theta + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ёки

$$\rho_0 = \rho \operatorname{ctg} \mu. \quad (4)$$

Шундай қилиб, радиус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласи радиус-вектор узунлигининг радиус-вектор ва эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги уринма орасидаги бурчак котангенси билан купайтмасига тенг.

Мисол. $\rho = e^{a\theta}$ логарифмик спиралга уринма радиус-вектор билан ўзгармас бурчак остида кесишганлиги кўрсатилсин.

Ечиш. Спираль тенгламасидан

$$\rho' = ae^{a\theta}$$

ни топамиз. (4) формулага асосан

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ яъни } \mu = \operatorname{arccotg} a = \operatorname{const.}$$

III бобга машқлар

Ҳосиланинг таърифидан бевосита фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1. $y = x^3$. Жав. $3x^2$.
2. $y = \frac{1}{x}$. Жав. $-\frac{1}{x^2}$.
3. $y = \sqrt{x}$. Жав. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Жав. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
5. $y = \sin^2 x$. Жав. $2 \sin x \cos x$.
6. $y = 2x^2 - x$. Жав. $4x - 1$.

Эгри чизиқларга уринмалар оғиш бурчакларининг тангенслари аниқлансин:

7. $y = x^3$. а) $x = 1$ да. Жав. 3. б) $x = -1$ да. Жав. 3; чизма ясалсин.
8. $y = \frac{1}{x}$. а) $x = \frac{1}{2}$ да. Жав. $-\frac{1}{4}$. б) $x = 1$ да. Жав. -1 ; чизма ясалсин.
9. $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ да. Жав. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 5$. Жав. $y' = 4x^3 + 6x$. 11. $y = 6x^3 - x^2$. Жав. $y' = 18x^2 - 2x$. 12. $y = \frac{x^b}{a+b} - \frac{x^a}{a-b} - x$. Жав. $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$.
 13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Жав. $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$. 14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{6} + c$. Жав. $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{6}$. 15. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$. Жав. $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$.
 16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. Жав. $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$. 17. $y = \frac{(x+1)^3}{x^{1/2}}$. Жав. $y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{3/2}}$. 18. $y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$.
 Жав. $y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y = \sqrt[3]{x^3} - 2\sqrt{x} + 5$. Жав. $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. Жав. $y' = \frac{5}{3} ax^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} bx^{-5/2} + \frac{1}{6} x^{-7/2}$. 21. $y = (1+4x^3)(1+2x^3)$. Жав. $y' = 4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y = x(2x-1)(3x+2)$. Жав. $y' = 2(9x^2+x-1)$. 23. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. Жав. $y' = 6x^2-26x+12$. 24. $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$.
 Жав. $y' = \frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 25. $y = \frac{a-x}{a+x}$. Жав. $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$. Жав. $f'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$. Жав. $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y = \frac{x^3+2}{x^3-x-2}$. Жав. $y' = \frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+2}{(x^3-x-2)^2}$.
 29. $y = \frac{x^p}{x^m-a^m}$. Жав. $y' = \frac{x^{p-1}[(p-m)x^m - pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y = (2x^2-3)^3$. Жав. $y' = 8x(2x^2-3)$. 31. $y = (x^3+a^2)^3$. Жав. $y' = 10x(x^3+a^2)^2$. 32. $y = \sqrt{x^2+a^2}$. Жав. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y = (a+x) \cdot \sqrt{a-x}$. Жав. $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Жав. $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. 35. $y = \frac{2x^2-1}{x^2+1+x^2}$. Жав. $y' = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y = \sqrt[3]{x^3+x+1}$. Жав. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}}$. 37. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. Жав. $y' = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

$$\textcircled{38} y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]. \quad 39. y = \sin^2 x. \quad \text{Жас. } y' = \sin 2x.$$

$$40. y = 2 \sin x + \cos 3x. \quad \text{Жас. } y' = 2 \cos x - 3 \sin 3x. \quad 41. y = \operatorname{tg}(ax + b).$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{a}{\cos^2(ax + b)}. \quad 42. y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$43. y = \sin 2x \cos 3x. \quad \text{Жас. } y' = 2 \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x.$$

$$44. y = \operatorname{ctg}^3 5x. \quad \text{Жас. } y' = -10 \operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{cosec}^2 5x. \quad 45. y = t \sin t + \cos t.$$

$$\text{Жас. } y' = t \cos t. \quad 46. y = \sin^3 t \cos t. \quad \text{Жас. } y' \sin^3 t (3 \cos^2 t - \sin^2 t).$$

$$47. y = a \sqrt{\cos 2x}. \quad \text{Жас. } y' = -\frac{a \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}. \quad 48. r = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}. \quad \text{Жас. } r' =$$

$$= a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}. \quad 49. y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}. \quad \text{Жас. } y' = -\frac{2(x \cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}.$$

$$50. y = a \sin^4 \frac{x}{2}. \quad \text{Жас. } y' = 2a \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}. \quad 51. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \operatorname{tg} x \sec^2 x. \quad 52. y = \ln \cos x. \quad \text{Жас. } y' = -\operatorname{tg} x. \quad 53. y = \ln \operatorname{tg} x. \quad \text{Жас. } y' = \frac{2}{\sin 2x}.$$

$$54. y = \ln \sin^2 x. \quad \text{Жас. } y' = 2 \operatorname{ctg} x. \quad 55. y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}. \quad \text{Жас. } y' = \sin x +$$

$$+ \cos x. \quad 56. y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{1}{\cos x}. \quad 57. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{1}{\cos x}. \quad 58. y = \sin(x + a) \cos(x + a). \quad \text{Жас. } y' = \cos 2(x + a). \quad 59.$$

$$f(x) = \sin(\ln x). \quad \text{Жас. } f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}. \quad 60. f(x) = \operatorname{tg}(\ln x). \quad \text{Жас. } f'(x) =$$

$$= \frac{\sec^2(\ln x)}{x}. \quad 61. f(x) = \sin(\cos x). \quad \text{Жас. } f'(x) = -\sin x \cos(\cos x).$$

$$62. r = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \varphi. \quad \text{Жас. } \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi. \quad 63. f(x) = (x \operatorname{ctg} x)^2. \quad \text{Жас.}$$

$$f'(x) = 2x \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x - x \operatorname{cosec}^2 x). \quad 64. y = \ln(ax + b). \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{a}{ax + b}. \quad 65. y = \log_a(x^2 + 1). \quad \text{Жас. } y' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln a}. \quad 66. y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{2}{1 - x^2}. \quad \textcircled{67} y = \log_3(x^2 - \sin x). \quad \text{Жас. } y' = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}.$$

$$68. y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{4x}{1 - x^4}. \quad 69. y = \ln(x^2 + x). \quad \text{Жас. } y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$$

$$70. y = \ln(x^2 - 2x + 5). \quad \text{Жас. } y' = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x + 5}. \quad 71. y = x \ln x. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \ln x + 1. 72. y = \ln^3 x. \text{ Жас. } y' = \frac{3 \ln^2 x}{x}. 73. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. 74. y = \ln(\ln x). \text{ Жас. } y' = \frac{1}{x \ln x}. 75. f(x) =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \text{ Жас. } f'(x) = \frac{1}{1-x^2}. 76. f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1-x^2}.$$

$$\text{Жас. } f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}. 77. y = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}. 78. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}. \text{ Жас. } y' =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}. 79. y = -\frac{\cos x}{2 \sin^3 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \text{ Жас. } y' = \frac{1}{\sin^3 x}. 80. y =$$

$$= \frac{\sin x}{2 \cos^3 x}. \text{ Жас. } y' = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos^3 x}. 81. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x. \text{ Жас. } y' = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$82. y = e^{ax}. \text{ Жас. } y' = ae^{ax}. 83. y = e^{4x+5}. \text{ Жас. } y' = 4e^{4x+5}. 84. y = a^{x^3}.$$

$$\text{Жас. } y' = \ln 2x a^{x^3} \ln a. 85. y = 7^{x^2+2x}. \text{ Жас. } y' = 2(x+1)7^{x^2+2x} \ln 7. 86. y =$$

$$= c^{a-x^2}. \text{ Жас. } y' = -2xc^{a-x^2} \ln c. 87. y = ae^{\sqrt{x}}. \text{ Жас. } y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}.$$

$$88. r = a^{\theta}. \text{ Жас. } r' = a^{\theta} \ln a. 89. r = a^{\ln \theta}. \text{ Жас. } \frac{dr}{d\theta} = \frac{a \ln^2 \ln a}{\theta}. 90. y =$$

$$= e^x (1 - x^2). \text{ Жас. } y' = e^x (1 - 2x - x^2). 91. y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \text{ Жас. } y' =$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}. 92. y = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}. \text{ Жас. } y' = \frac{1}{1 + e^x}. 93. y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{x}{a} \right). 94. y = e^{\sin x}. \text{ Жас. } y' = e^{\sin x} \cos x. 95. y = a^{\operatorname{tg} nx}.$$

$$\text{Жас. } y' = na^{\operatorname{tg} nx} \sec^2 nx \ln a. 96. y = e^{\cos x} \sin x. \text{ Жас. } y' = e^{\cos x} (\cos x -$$

$$- \sin^3 x). 97. y = e^x \ln \sin x. \text{ Жас. } y' = e^x (\operatorname{ctg} x + \ln \sin x). 98. y = x^n e^{\sin x}.$$

$$\text{Жас. } y' = x^{n-1} e^{\sin x} (n + x \cos x). 99. y = x^x. \text{ Жас. } y' = x^x (\ln x + 1).$$

$$100. y = x^{\frac{1}{x}}. \text{ Жас. } y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right). 101. y = x^{\ln x}. \text{ Жас. } y' = x^{\ln x - 1} \ln x.$$

$$102. y = e^{x^x}. \text{ Жас. } y' = e^{x^x} (1 + \ln x) x^x. 103. y = \left(\frac{x}{n} \right)^{nx}. \text{ Жас. } y' =$$

$$= n \left(\frac{x}{n} \right)^{nx} \left(1 + \ln \frac{x}{n} \right). 104. y = x^{\sin x}. \text{ Жас. } y' = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right).$$

$$105. y = (\sin x)^x. \text{ Жас. } y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x). 106. y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$\text{Жас. } y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x). 107. y = \operatorname{tg} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}. \text{ Жас. } y' =$$

$$= -\frac{2e^x}{(1+e^x)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{1+e^x}}. \quad 108. \quad y = \sin \sqrt{1-2^x}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= -\frac{\cos \sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}} 2^x \ln 2. \quad 109. \quad y = 10^{\lg x}. \quad \text{Жас. } y' = 10^{\lg x} \lg 10 \left(\lg x + \frac{x}{\cos^2 x} \right).$$

Қуйидаги функцияларни олдин логарифмлаб, сўнгга ҳосилалари топил-

$$\text{син: } 110. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{x-1} \right). \quad 111. \quad y = \frac{(x+1)^4 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right). \quad 112. \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4 (x+3)^5}. \quad 113. \quad y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{-161x^2+480x-271}{60 \sqrt[5]{(x-1)^2} \sqrt[3]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}}. \quad 114. \quad y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 115. \quad y = x^6 (a+3x)^3 (a-2x)^2. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= 5x^4 (a+3x)^2 (a-2x) (a^2+2ax-12x^2). \quad 116. \quad y = \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad 117. \quad y = (\arcsin x)^2. \quad \text{Жас. } y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 118. \quad y =$$

$$= \arctg (x^2+1). \quad \text{Жас. } y' = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}. \quad 119. \quad y = \arctg \frac{2x}{1-x^2}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2}. \quad 120. \quad y = \arccos (x^2). \quad \text{Жас. } y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 121. \quad y = \frac{\arccos x}{x}.$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{-(x+\sqrt{1-x^2} \arccos x)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \quad 122. \quad y = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}. \quad 123. \quad y = x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' = 2 \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$124. \quad y = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \quad 125. \quad u = \arctg \frac{v+a}{1-av}$$

$$\text{Жас. } \frac{du}{dv} = \frac{1}{1+v^2}. \quad 126. \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

$$127. \quad y = x \arcsin x. \quad \text{Жас. } y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 128. \quad f(x) = \arccos (\ln x).$$

$$\text{Жас. } f'(x) = -\frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}. \quad 129. \quad f(x) = \arcsin \sqrt{\sin x}. \quad \text{Жас. } f'(x) =$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^3 x}} \quad 130. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad (0 < x < \pi). \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1}{2}. \quad 131. y = e^{\operatorname{arctg} x}. \text{Жас. } y' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}. \quad 132. y = \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \text{Жас.}$$

$$y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \quad 133. y = x^{\operatorname{arctg} x}. \text{Жас. } y' = x^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{\ln x}{1 + x^2} \right).$$

$$134. y = \arcsin(\sin x).$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{ва IV чорақларда} \\ -1 & \text{I ва III чорақларда} \end{cases}. \quad 135. y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3 + 5 \cos x}.$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{4}{5 + 3 \cos x}. \quad 136. y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}. \text{Жас. } y' = \frac{2a^2}{x^2 - a^2}.$$

$$137. y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \text{Жас. } y' = \frac{x^3}{1-x^4}. \quad 138. y = \frac{3x^3 - 1}{3x^3} +$$

$$+ \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x. \text{Жас. } y' = \frac{x^6 + 1}{x^4 + x^2}. \quad 139. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \text{Жас. } y' = \frac{1}{x^3 + 1}. \quad 140. y = \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} +$$

$$+ 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}. \text{Жас. } y' = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^2}. \quad 141. y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$\text{Жас. } y' = -\frac{2n|x|^{2n}}{x(x^{2n} + 1)}.$$

Ошкормас функцияларни дифференциаллаш

Қуйидаги функциялар учун $\frac{dy}{dx}$ топилсин: $\sqrt{142. y^3 = 4px}. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{2p}{y}. \quad 143. x^2 + y^2 = a^2. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad 144. b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} =$$

$$= -\frac{b^2x}{a^2y}. \quad 145. y^3 - 3y + 2ax = 0. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{3(1-y^2)}. \quad 146. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}. \quad 147. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \quad 148. y^2 -$$

$$- 2xy + b^2 = 0. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}. \quad 149. x^3 + y^3 - 3axy = 0. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}. \quad 150. y = \cos(x+y). \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}. \quad 151. \cos$$

$$(xy) = x. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}.$$

Қуйидаги параметрик берилган функциялар учун $\frac{dy}{dx}$ топилсин: $\sqrt{152. x =}$

$$= a \cos t, y = b \sin t. \text{Жас. } \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t. \quad 153. x = a(t - \sin t), y = a(1 -$$

$-\cos t$). Жав. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$. 154. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$. Жав. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$. 155. $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^3}{1+t^2}$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$. 156. $u = 2 \ln \operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Бунда $\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$ эканлиги курсатилсин.

Эгри чизикларга уринмалар огиш бурчакларининг тангенслари топилсин:

157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ учун $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ нуқтада. Чизма ясалсин. Жав. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 158. $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ учун $x = 1$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ нуқтада. Чизма ясалсин. Жав. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 159. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ учун $t = \frac{\pi}{2}$ да. Чизма ясалсин. Жав. 1. 160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ учун $t = \frac{\pi}{4}$ да. Чизма ясалсин. Жав. -1. 161. Горизонтга α бурчак остида отилган жисм давосиз фазода тортиш кучи таъсири остида тенгламалари $x = (v_0 \cos \alpha) t$, $y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}$ ($g = 9,8$ м/сек²) бўлган эгри чизик (парабола) чизган. $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50$ м/сек. эканини билган ҳолда, ҳаракат йўналиши аниқлансин: 1) $t = 2$ секундда; 2) $t = 7$ секундда. Чизма ясалсин. Жав. 1) $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134,3^\circ$.

Функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

162. $y = (a^2 - x^2)^3$. Жав. $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. 163. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Жав. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 164. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. Жав. $dy = \sec^4 x dx$.

165. $y = \frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. Жав. $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Функцияларнинг орттирмалари ва дифференциаллари ҳисоблансин:

166. $y = 2x^3 - x$; $x = 1$, $\Delta x = 0,01$ да. Жав. $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$.

167. $y = x^3 + 2x$ берилган. $x = -1$, $\Delta x = 0,02$ да Δy ва dy топилсин.

Жав. $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$. 168. $y = \sin x$ берилган. $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{18}$ да

dy топилсин. Жав. $dy = \frac{\pi}{36} = 0,0873$. 169. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$;

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ эканини билган ҳолда $\sin 60^\circ 3'$ ва $\sin 60^\circ 18'$ нинг тақрибий қийматлари топилсин. Натижалар жадвалдаги қийматлар билан таққослансин. Жав. $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,868643$. 170. $\operatorname{tg} 45^\circ 4' 30''$ нинг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 1,00262. 171. $\log_{10} 200 = 2,30103$ ни билган ҳолда $\log_{10} 200,2$ нинг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 2,30116.

- Турли тартибли ҳосилалар. 172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. y'' топилисин.
- Жав. $18x - 4$. 173. $y = \sqrt[5]{x^3}$. y''' топилисин. Жав. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. 174. $y = x^3 \cdot y^{(4)}$ топилисин. Жав. 6!.
175. $y = \frac{C}{x^3}$. y'' топилисин. Жав. $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. 176. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. y'' топилисин. Жав. $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. 177. $y = 2\sqrt{x}$. $y^{(4)}$ топилисин. Жав. $-\frac{15}{8\sqrt{x^5}}$.
178. $y = ax^3 + bx + c$. y''' топилисин. Жав. 0.
179. $f(x) = \ln(x+1)$. $f^{(4)}(x)$ топилисин. Жав. $-\frac{6}{(x+1)^3}$. 180. $y = \lg x$. y''' топилисин. Жав. $6 \sec^2 x - 4 \sec^4 x$.
181. $y = \ln \sin x$. y''' топилисин. Жав. $2 \operatorname{ctg} x \times \times \operatorname{cosec}^3 x$. 182. $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. $f''(x)$ топилисин. Жав. $f''(x) = 3 [f(x)]^5 - f(x)$.
183. $y = \frac{x^3}{1-x}$. $f^{(4)}(x)$ топилисин. Жав. $\frac{4!}{(1-x)^5}$. 184. $p = (q^2 + a^2) \times \times \operatorname{arctg} \frac{q}{a}$. $\frac{d^2 p}{dq^2}$ топилисин. Жав. $\frac{4a^2}{(a^2 + q^2)^3}$.
185. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилисин. Жав. $\frac{y}{a^2}$.
186. $y = \cos ax$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $a^n \cos \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right)$.
187. $x = a^x$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $(\ln a)^n a^x$. 188. $y = \ln(1+x)$. y^n топилисин. Жав. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.
189. $y = \frac{1-x}{1+x}$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.
190. $y = e^x x$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $e^x(x+n)$.
191. $y = x^{n-1} \ln x$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $\frac{(n-1)!}{x}$.
192. $y = \sin^3 x$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $-2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right)$.
193. $y = x \sin x$. $y^{(n)}$ топилисин. Жав. $x \sin \left(x + \frac{\pi}{2} n \right) - n \cos \left(x + \frac{\pi}{2} n \right)$.
194. Агар $y = e^x \sin x$ бўлса, $y'' - 2y' + 2y = 0$ эканлиги исботлансин.
195. $y^2 = 4ax$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилисин. Жав. $-\frac{4a^2}{y^3}$.
196. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ва $\frac{d^2 y}{dy^2}$ топилисин. Жав. $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$; $-\frac{3b^4 x}{a^4 y^3}$.
197. $x^2 + y^2 = r^2$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилисин. Жав. $-\frac{r^2}{y^3}$.
198. $y^3 - 2xy = 0$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилисин. Жав. 0.
199. $\rho = \lg(\varphi + \rho)$. $\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$ топилисин. Жав. $-\frac{2(5 + 8\rho^2 + 3\rho^4)}{\rho^5}$.
200. $\sec \varphi \cdot \cos \rho = C$. $\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$ топилисин. Жав. $\frac{\lg^2 \rho - \lg^3 \varphi}{\lg^2 \rho}$.
201. $e^x + x = e^y + y$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилисин.

Жав. $\frac{(1 - e^x + y)(e^x - e^y)}{(e^y + 1)^2}$. 202. $y^2 + x^2 - 3axy = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

Жав. $-\frac{2a^2xy}{(y^2 - ax)^2}$. 203. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

Жав. $-\frac{1}{4a \sin^4 \left(\frac{t}{2}\right)}$. 204. $x = a \cos 2t$, $y = b \sin^2 t$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ эканлиги кўр-

сатилсин. 205. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин. Жав. $-\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$

206. $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$ эканлиги кўрсатилсин.

Уринма ва нормал тенгламалари.

Уринма ости ва нормал ости узуниклари

207. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ эгри чизиққа унинг $M(3, 2)$ нуқтасида уринма ва нормал тенгламалари ёзилсин. Жав. Уринма $8x - y - 22 = 0$; нормал $x + 8y - 19 = 0$.

208. $x^2 + y^2 = r^2$ айлананинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасида уринма ва нормал тенгламалари, уринма ости ва нормал ости узуниклари топилсин. Жав. Уринма

$$xx_1 + yy_1 = r^2; \text{ нормал } x_1y - y_1x = 0; s_T = \left| \frac{y_1^2}{x_1} \right|; s_N = |x_1|.$$

209. Исталган нуқтада $y^2 = 4px$ параболанинг уринма ости парабола учи билан тенг иккига бўлиниши ва нормал ости ўзгармас ҳам $2p$ га тенг бўлиши кўрсатилсин. Чизма ясалсин.

210. $M(x_1, y_1)$ нуқтада уринма тенгламаси топилсин: а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

эллипс учун. Жав. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола учун.

Жав. $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

211. $y = \frac{8a^2}{4a^2 + x^2}$ „сулфинг“ $x = 2a$ нуқтасидаги уринма ва нормал тенгламалари топилсин. Жав. Уринма $x + 2y = 4a$; нормал $y = 2x - 3a$.

212. $3y = 6x - 5x^2$ эгри чизиқнинг $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ нуқтасига ўтказилган нормал координаталар бошидан ўтиши кўрсатилсин.

213. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ эгри чизиққа унинг $M(a, b)$ нуқтасидаги уринма $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ эканлиги кўрсатилсин.

214. $y^2 = 20x$ параболага шундай уринма тенгламаси топилсинки, у Ox ўқи билан 45° ли бурчак ҳосил қилсин. Жав. $y = x + 5$ [(5, 10) нуқтада].

215. $x^2 + y^2 = 52$ айланага $2x + 3y = 6$ тўғри чизиққа параллел бўлган уринмалар тенгламалари топилсин. Жав. $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. $4x^2 - 9y^2 = 36$ гиперболога $2y + 5x = 10$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган уринмалар тенгламалари топилсин. *Жав.* Бундай уринмалар йўқ.

217. $xy = m$ гиперболога уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси уриниш нуқтаси билан тенг иккига бўлиниши кўрсатилсин.

218. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ астроидага уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси ўзгармас узунликка эга бўлиши исботлансин.

219. $y = a^x$ ва $y = b^x$ эгри чизиқлар қандай a бурчак остида кесишади?
Жав. $\lg a = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. $\theta = \frac{\pi}{2}$ нуқтада $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ циклоиданинг уринма ости, нормал ости, уринма ва нормал узунликлари топилсин. *Жав.* $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. $x = 4a \cos^3 t$, $y = 4a \sin^3 t$ астроида учун s_T , s_N , T ва N миқдорлар топилсин. *Жав.* $s_T = |4a \sin^2 t \cos t|$; $s_N = |4a \sin^3 t \lg t|$; $T = 4a \sin^2 t$; $N = |4a \sin^2 t \lg t|$.

Турли масалалар

Функцияларнинг ҳосилалари топилсин: 222. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} - \frac{1}{2} \ln \lg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

Жав. $y' = \frac{1}{\cos^3 x}$. 223. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. *Жав.* $y' = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$.

224. $y = \arcsin(\sin x)$. *Жав.* $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$. 225. $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times$

$\times \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \lg \frac{x}{2} \right)$ ($a > 0$, $b > 0$). *Жав.* $y' = \frac{1}{a+b \cos x}$. 226. $y = |x|$.

Жав. $y' = \frac{x}{|x|}$. 227. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, *Жав.* $y' = -\frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}}$. 228.

Шарнинг ҳажми ва сирти формулалари $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ ва $s = 4\pi r^2$ дан $\frac{dv}{dr} = s$

келиб чиқади. Бу натижанинг геометрик маъноси тушунтирилсин. Доира юзи билан айлана узунлиги орасида шунга ўхшаш муносабат топилсин. 229. ABC учбурчакда a томон бошқа b , c томонлар ва улар орасидаги A бурчак орқали $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ формула билан ифодаланади. b ва c томонлар

ўзгармас бўлганда a томон A бурчакнинг функциясидр. $\frac{da}{dA} = h_a$ бўлиши кўрсатилсин, бу ерда h_a учбурчакнинг a асосига туширилган баландлиги. Бу натижани геометрик мулоҳазалар билан тушунтиринг. 230. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб,

$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$

тақрибий формулаларнинг келиб чиқиши аниқлансин, бу ерда $|b|$ сони a га нисбатан кичик. 231. Маятникнинг тебраниш даври $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ га тенг.

1) Маятникнинг l узунлигини; 2) Тортиш кучи тезланиши g ни ўлчашдаги 1 % хато T даврини ҳисоблашдаги хатога қандай таъсир этади? *Жавоб:* 1) $\approx 1/2$ %; 2) $\approx 1/2$ %. 232. Трактриса шундай хоссага эгаки, унинг исталган нуқтаси учун уринманинг T кесмаси ўзгармас узунлигини сақлайди. Буни 1) трактрисанинг

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \quad (a > 0)$$

формадаги тенгламасига асосан исботланг;

2) эгри чизик

$$x = a \left(\ln \lg \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t$$

параметрик тенгламаларига асосан исботланг.

233. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ функция $y'' + 3y' + 2y = 0$ тенгламани қаноатлантириши исботлансин (бу ерда C_1 ва C_2 ўзгармаслар).

234. $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$ фараз қилиб, $y'' = 2x$, $z'' = -2y$ тенгликлар исботлансин.

235. $y = \sin(m \arcsin x)$ функция $(1 - x^2) y'' - xy' + m^2 y = 0$ тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

236. Агар $(a + bx) e^{\frac{y}{x}} = x$ бўлса, y ҳолда $x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2$ бўлишини исботлансин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДА БАЪЗИ ТЕОРЕМАЛАР

1-§. Ҳосиланинг илдизлари ҳақида теорема (Ролль теоремаси)

Ролль теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, бу кесманинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса-ю, $x=a$ ва $x=b$ учларда нолга айлansa $[f(a)=f(b)=0]$, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида ҳеч бўлмаганда шундай бир $x=c$, $a < c < b$ нуқта мавжудки, бу нуқтада $f'(x)$ ҳосила нолга айланади, яъни $f'(c)=0$ бўлади*).

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун бу кесмада у энг катта M қийматга ва энг кичик m қийматга эга.

Агар $M=m$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ўзгармас, яъни x нинг барча қийматларида $f(x)=m$ ўзгармас қийматга эга бўлади. Аммо у ҳолда кесманинг исталган нуқтасида $f'(x)=0$ бўлади ва теорема ҳам исботланган бўлади.

Энди $M \neq m$ деб фараз қиламиз. У ҳолда бу сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас.

Аниқлик учун $M > 0$ ва $x=c$ да функция ўзининг энг катта қийматига эга, яъни $f(c)=M$ деб фараз қиламиз. Бунда c миқдор a га ҳам, b га ҳам тенг эмаслигини кураимиз, чунки шартга кўра $f(a)=0$, $f(b)=0$. Функциянинг энг катта қиймати $f(c)$ бўлгани учун, $\Delta x > 0$ да ҳам, $\Delta x < 0$ да ҳам $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$

Бундан чиқадики,

$$\Delta x > 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0, \quad (1')$$

$$\Delta x < 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0. \quad (1'')$$

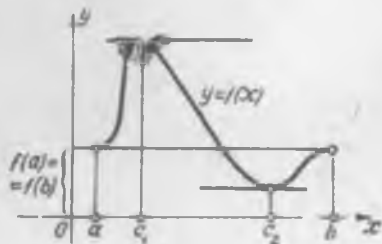
Теореманинг шартига кўра $x=c$ да ҳосила мавжуд, шунинг учун $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, шуни ҳосил қиламиз:

*) Агар $f(c)=0$ бўлса, c сони $f(x)$ функциянинг илдизи дейилади.

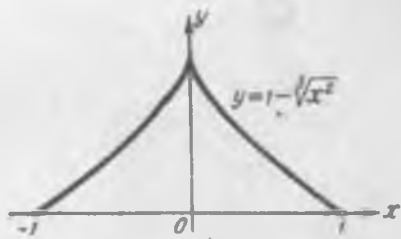
$$\Delta x > 0 \text{ да } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) < 0,$$

$$\Delta x < 0 \text{ да } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) > 0.$$

Лекин $f'(c) < 0$ ва $f'(c) > 0$ муносабатлар фақат $f'(c) = 0$ бўлган ҳолдагина ўринлидир. Демак, $[a, b]$ кесма ичида шундай c нуқта борки, унда $f'(x)$ ҳосила нолга тенг.



92- расм.



93- расм.

Ҳосиланинг илдишлари ҳақидаги теорема содда геометрик маънога эга: агар ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлган узлуксиз эгри чизиқ абсциссалари a ва b бўлган нуқталарда Ox ўқни кесиб ўтса, y ҳолда бу эгри чизиқда c абсциссали, $a < c < b$, шундай бир нуқта топиладики, бу нуқтада уринма Ox ўққа параллел бўлади.

1- изоҳ. Исботланган теорема $[a, b]$ кесманинг учларида нолга айланмайдиган, лекин $f(a) = f(b)$ тенг қийматларни қабул қиладиган дифференциалланувчи функция учун ҳам тўғри бўлади (92- расм). Бу ҳолда ҳам исботлаш худди олдингидагидек олиб борилади.

2- изоҳ. $f(x)$ функция шундай бўлсаки, $[a, b]$ кесма ичидаги ҳамма нуқталарда ҳам ҳосиласи мавжуд бўлавермаса, y ҳолда теореманинг тасдиқи нотўғри бўлиб чиқиши мумкин (яъни бу ҳолда $[a, b]$ кесмада $f'(x)$ ҳосила нолга айланадиган c нуқта бўлмай қолиши мумкин).

Масалан,

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

функция (93- расм) $[-1, 1]$ кесмада узлуксиз ва кесма учларида нолга айланади, бироқ оралиқ ичида

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



94- расм

ҳосила нолга айланмайди. Бу шундан келиб чиқадики, ораліқ ичида $x = 0$ нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқтада ҳосила мавжуд эмас (чексизликка айланади).

94- расмда тасвирланган график ҳосиласи $[0, 2]$ кесмада нолга айланмайдиган функциянинг яна бир мисолини беради.

Бу функция учун ҳам Ролль теоремасининг шартлари бажарилмаган, чунки $x = 1$ нуқтада функция ҳосиллага эга эмас.

2- §. Чекли орттирмалар ҳақида теорема (Лагранж теоремаси)

Лангранж теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва бу кесманинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида ҳеч бўлмаганда шундай бир c , $a < c < b$ нуқта топиладики, унда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1)$$

бўлади.

Исбот. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ сонни Q ҳарфи билан белгилаймиз, яъни

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2)$$

деб фараз қиламиз ва

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot Q \quad (3)$$

тенглик билан аниқланган ёрдамчи $F(x)$ функцияни текширамиз.

Бу $F(x)$ функциянинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Бунинг учун AB ватарнинг (95- расм) бурчак коэффициенти $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$ эканлигини ва у $(a; f(a))$ нуқтадан ўтишини ҳисобга олиб, олдин бу ватарнинг тенгламасини ёзамиз:

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

бундан

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Аммо $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Демак, x нинг ҳар бир қиймати учун $F(x)$ функция, бир хил абсциссали нуқталар

учун $y = f(x)$ эгри чизиқ билан $y = f(a) + Q(x - a)$ ватар ординаталарининг айирмасига тенг.

$F(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, бу кесма ичида дифференциалланувчи эканини ва кесма учларида нолга эйланишини, яъни $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ эканлигини куриш осон. Демак, $F(x)$ функцияга Ролль теоремасини қўллаш мумкин. Бу теоремага мувофиқ кесма ичида шундай $x = c$ нуқта мавжудки, унда

$$F'(c) = 0.$$

Аммо

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Демак,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

бундан

$$Q = f'(c).$$

Q нинг қийматини (2) тенгликка қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (1')$$

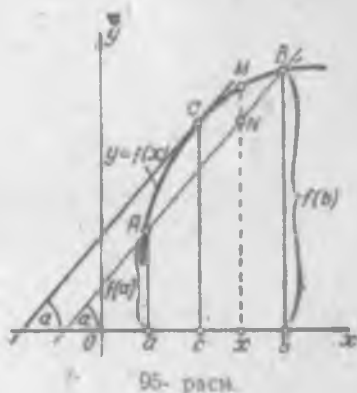
бундан бевосита (1) формула чиқади. Шундай қилиб, теорема исботланди.

Лагранж теоремасининг геометрик маъносини аниқламоқ учун 95-расмга мурожаат қиламиз. Расмдан бевосита равшанки, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ миқдор графикнинг a ва b абсциссали A ва B нуқталаридан ўтувчи ватар оғиш бурчаги α нинг тангенсидан иборат.

Иккинчи томондан, $f'(c)$ — эгри чизиққа c абсциссали нуқтада уринма оғиш бурчагининг тангенсидир. Шундай қилиб, (1') тенгликнинг ёки унга эквивалент булган (1) тенгликнинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат бўлади: агар AB ёйнинг барча нуқталарида уринма мавжуд бўлса, у ҳолда бу ёйда A ва B нуқталар орасида шундай C нуқта топиладики, унда уринма A ва B нуқталарни туташтирувчи ватарга параллел бўлади.

Энди қуйидагини кураимиз, c қиймат $a < c < b$ шартни қаноатлантирганликдан, $c - a < b - a$ ёки

$$c - a = \theta(b - a),$$



θ бу ерда 0 билан 1 орасида ётувчи бирор сон, яъни

$$0 < \theta < 1.$$

Аммо у ҳолда

$$c = a + \theta(b - a),$$

ва (1) формулага қуйидаги кўринишни бериш мумкин:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (1'')$$

3- §. Икки функция орттирмаларининг нисбати ҳақида теорема (Коши теоремаси)

Коши теоремаси. Агар иккита $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва унинг ичида дифференциалланувчи бўлса, шу билан бирга $\varphi'(x)$ шу кесма ичининг ҳеч қаерида нолга айланимаса, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида шундай $x = c$, $a < c < b$ нуқта топиладики, унда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (1)$$

Исбот. Q сонни

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (2)$$

тенглик билан аниқлаймиз. $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ эканлигини қайд этамиз, чунки акс ҳолда $\varphi(b)$ билан $\varphi(a)$ тенг бўлар ва у ҳолда Ролль теоремасига биноан кесма ичида $\varphi'(x)$ ҳосила нолга айланиб, теореманинг шартига зид бўлар эди.

Ушбу ёрдамчи функцияни тузамиз:

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

$F(a) = 0$ ва $F(b) = 0$ эканлиги равшан, бу $F(x)$ функциянинг ва Q соннинг таърифидан келиб чиқади. $F(x)$ функция $[a, b]$ кесмада Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиришини пайқаб, a ва b орасида шундай $x = c$ ($a < c < b$) қиймат мавжудки, унда $F'(c) = 0$ бўлади, деган хулосани чиқарамиз. Аммо, $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, демак,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

бундан

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Q нинг қийматини (2) тенгликка қўйиб, (1) тенгликни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Биринчи қарашда мумкин бўлиб кўринганидек, Коши теоремасини

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

касрнинг сурат ва махражига Лагранж теоремасини қўллаш билан исботламоқ мумкин эмас. Ҳақиқатан, биз бу ҳолда (касрни $b - a$ га қисқартгандан сўнг) ушбу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)}$$

формулани ҳосил қилар эдик, бунда $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Аммо, умуман айтганда, $c_1 \neq c_2$, шунинг учун чиққан натижа ҳозирча Коши теоремасини бермайди.

4- §. Иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг limiti („ $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ноаниқликни очиш“)

Фараз қилайлик, бирор $[a, b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирсин ва бу кесманинг $x = a$ нуқтасида нолга айлансин, яъни $f(a) = 0$ ва $\varphi(a) = 0$ бўлсин.

Бу $x = a$ қийматда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбат аниқланмаган, аммо $x \neq a$ қийматларда тула аниқ маънога эга. Демак, $x \rightarrow a$ да бу нисбатнинг лимитини топиш масаласи қўйилиши мумкин. Бу типдаги лимитларни ҳисоблаш одатда „ $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш“ дейилади.

Бу хилдаги масала билан биз илгари ҳам, масалан, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ лимитни текширишда, элементар функциялардан ҳосилалар топишда учрашган эдик. $x = 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ ифода маънога эга эмас, яъни $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ функция $x = 0$ да аниқланмаган, аммо биз $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ ифоданинг лимити мавжуд ва 1 га, тенглигини кўрган эдик.

Теорема. (Лопиталь қоидаси). *Айтайлик, бирор $[a, b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирсин ва унинг бирор $x = a$ нуқтасида нолга айлансин, яъни $f(a) = \varphi(a) = 0$ бўлсин; у*

ҳолда агар $x \rightarrow a$ да $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатнинг limiti мавжуд бўлса, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳам мавжуд бўлади, шу билан бирга

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Исбот. $[a, b]$ кесмада бирор $x \neq a$ нуқтани олампиз. Коши формуласини қўлланиб, ушбу тенгликни ёза олампиз:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)}.$$

ξ бу ерда a ва x орасида ётади. Аммо шартга кўра $f(a) = \varphi(a) = 0$, демак,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (1)$$

Агар $x \rightarrow a$ бўлса, у ҳолда $\xi \rightarrow a$, чунки ξ нинг қиймати a билан x орасида ётади. Бунда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ бўлса, у ҳолда

$\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ ҳам мавжуд ва A га тенг. Бундан равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

охирги натижа:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

1-изоҳ. Агар $x = a$ да $f(x)$ ёки $\varphi(x)$ функциялар аниқланмаган, лекин

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

булган ҳолда ҳам теорема ўринлидир.

Бу ҳолни илгари текширилган ҳолга келтириш учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни $x = a$ нуқтада узлуксиз бўлаган қилиб аниқлаб олампиз. Бунинг учун

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

фараз қилиш кифоя, чунки $x \rightarrow a$ да $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбатнинг limiti $x = a$ нуқтада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланганми-йўқми эканлигига боғлиқ эмаслиги равшан.

2-изоҳ. Агар $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ ва теорема шартларида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларга қўйилган шартларни $f'(x)$ ва $\varphi'(x)$ ҳосилалар ҳам қаноатлантирса, у ҳолда $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатга Лопиталь қондасини қўлланиб, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ формулага келамиз ва ҳоказо.

3-Изоҳ. Агар $\varphi'(a) = 0$ лекин $f'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда теорема $x \rightarrow a$ да нолга интиладиган $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ тескари нисбатга қўлланарли бўлади. Демак, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбат чексизликка интилади.

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

3-мисол.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Бу ерда Лопиталь қондасини уч марта қўлланишга тўғри келди, чунки биринчи, иккинчи ва учинчи ҳосилаларнинг нисбатлари $x = 0$ да $\frac{0}{0}$ ноаниқликка олиб келади.

4-изоҳ. Лопиталь қондаси

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$$

бўлган ҳолда ҳам қўлланилади.

Ҳақиқатан, $x = \frac{1}{z}$ фараз қилиб, $x \rightarrow \infty$ да $z \rightarrow 0$ эканини кўрамиз, демак,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Лопиталь қондасини $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ нисбатга қўлланиб, шунини ҳосил қилишимиз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\end{aligned}$$

бу эса талаб қилинган исботдир.

4-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

5-§. Иккита чексиз катта миқдор нисбатининг limiti
 („ $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ноаниқликни очиш“)

Энди $x \rightarrow a$ билан (ёки $x \rightarrow \infty$ билан) чексизликка интилувчи иккита $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар нисбатининг limiti ҳақидаги масалани текшираимиз.

Теорема. *Фараз қилайлик, a нуқта атрофидаги барча $x \neq a$ нуқталарда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлсин, шу билан бирга $\varphi'(x)$ ҳосила нолга айланмасин; сўнгра*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$$

ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (1)$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (2)$$

Исбот. Текширилаётган a нуқта атрофида $a < x < a$ (ёки $a < x < a$) бўладиган иккита a ва x нуқта оламиз. Коши теоремасига биноан

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (3)$$

бу ерда $a < c < x$. (3) тенгликнинг чап томонини бундай алмаштирамиз:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}. \quad (4)$$

(3) ва (4) муносабатлардан:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}.$$

Бундан:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}. \quad (5)$$

(1) шартдан шу чиқадики, ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ да a ни a га шундай яқин қилиб танлаб олиш мумкинки, барча $x = c$ учун

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

ёки

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \quad (6)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $a < c < a$. Сўнгра

$$\frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}$$

касрни текшираамиз.

(6) тенгсизлик ўринли бўлиши учун a ни тайинлаб қўйиб, x ни a га яқинлаштираамиз.

$x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow \infty$ ва $\varphi(x) \rightarrow \infty$ бўлгани учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} = 1$$

ва, демак, илгари танланган $\varepsilon > 0$ да a га етарли яқин x учун

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} \right| < \varepsilon$$

ёки

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} < 1 + \varepsilon \quad (7)$$

(6) ва (7) тенгсизликларнинг мос ҳадларини бир-бирига кўпайтирсак,

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$$

ёки (5) тенгликка асосан

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$$

келиб чиқади, x ни a га етарли даражада яқин қилиб олганда ε ихтиёрий кичик сон бўлгани учун, охириги тенгсизликлардан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

ёки (1) га асосан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

келиб чиқади, бу эса талаб қилинган исботдир.

1-и з о ҳ. Агар (1) шартда $A = \infty$, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$$

бўлса, унда (2) тенглик бу ҳолда ҳам тўғри бўлади. Ҳақиқатан, олдинги ифодадан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0$$

чиқади. У ҳолда исботланган теоремага асосан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

бундан

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

2-изоҳ. Исботланган теорема $x \rightarrow \infty$ ҳол учун ҳам осонгина умумлаштирилади. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ва

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (8)$$

Исботи, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги нозаниқлик ҳолда шундай шартларда қилинганидек, $x = \frac{1}{z}$ алмаштириш йўли билан ўтказилади (4-§ даги 4-изоҳга қаралсин).

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

3-изоҳ. Агар (2) ва (8) формулаларнинг ўнг томонидаги лимит (чекли ёки чексиз) мавжуд бўлса, фақат шу ҳолдагина улар тўғри бўлишини яна бир марта таъкидлаймиз. Шундай ҳол юз бериши ҳам мумкинки, ўнг томондаги лимит мавжуд бўлмаган бир вақтда, чап томондагиси мавжуд бўлади. Мисол келтирамиз. Фараз қилайлик,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

ни топиш керак бўлсин. Бу лимит мавжуд ва 1 га тенг. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Аmmo, ҳосилаларнинг нисбати

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

$x \rightarrow \infty$ да ҳеч қандай лимитга интилмайди, балки 0 билан 2 орасида тебранади.

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + b}{cx^2 + d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax^2}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

3-мисол.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3 \frac{(-1)}{1} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3.
 \end{aligned}$$

4-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Умуман, исталган бутун $n > 0$ да

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 1}{e^x} = 0.$$

Символик тарзда

а) $0 \cdot \infty$, б) 0^0 , в) ∞^0 , г) 1^∞ , д) $\infty - \infty$

кўринишда ёзиладиган бошқа ноаниқлик ҳоллари бундан олдинги ҳолларга келтирилади ва маъноси қуйидагидан иборат бўлади.

а) Фараз қилайлик, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ бўлсин;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)]$$

ни топиш талаб қилинади. Бу $0 \cdot \infty$ типдаги ноаниқлик.

Агар изланаётган ифодани

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

кўринишда ёки

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ёзсак, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ноаниқлик келиб чиқади.

5-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

б) Фараз қилайлик,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

ни топиш, яъни 0^0 кўринишдаги ноаниқликни очиш талаб қилинади.

Бунда

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

фараз қилиб, бу тенгликнинг иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\ln y = \varphi(x) [\ln f(x)].$$

Ўнг томонда $x \rightarrow a$ да $0 \cdot \infty$ кўринишдаги ноаниқликни ола-
миз. $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$ ни топиб, сўнгра $\lim_{x \rightarrow a} y$ ни топиш осон. Ҳақи-
қатан, логарифмик функциянинг узлуксизлигига асосан,
 $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$ ва $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ бўлса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} y = e^b$.
Агар жумладан, $b = +\infty$ ёки $b = -\infty$ бўлса, y ҳолда мос
равишда $\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty$ ёки 0 бўлади.

6-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ни топиш талаб қилинади. $y = x^x$ фараз қилиб,
 $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$ ни топаемиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

демак, $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, бундан $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

Бошқа ҳолларда ҳам лимитлар шунга ўхшаш йўл билан топилади.

Бундан коэффициентларнинг қийматларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(a), \\ C_3 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a), \quad \dots, \quad C_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ ларнинг топилган қийматларини (2) формулага қўйиб, изланган кўпҳадни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \\ &+ \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{aligned} \quad (5)$$

Берилган $f(x)$ функция билан тузилган $P_n(x)$ кўпҳад қийматларининг айирмасини $R_n(x)$ орқали белгилаймиз (96- расм):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

бундан

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ёки ёйилган кўринишда

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \end{aligned} \quad (6)$$

$R_n(x)$ қолдиқ ҳад дейилади. x нинг қолдиқ ҳад $R_n(x)$ жуда кичик бўладиган қийматлари учун $P_n(x)$ кўпҳад $f(x)$ функциянинг тақрибий тасвирини беради.

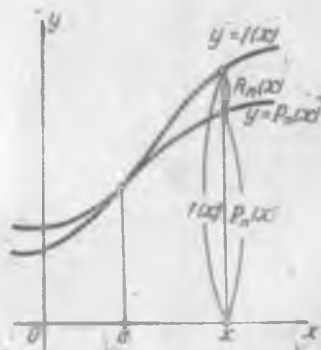
Шундай қилиб, (6) формула $y = f(x)$ функцияни, қолдиқ ҳад $R_n(x)$ қийматига тенг бўлган тегишли даражадаги аниқликда $y = P_n(x)$ кўпҳад билан алмаштиришга имкон беради.

Эндиги вазифамиз x нинг турли қийматларида $R_n(x)$ миқдорни баҳолашдан иборат.

Қолдиқ ҳадни

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x) \quad (7)$$

формада ёзамиз, бу ерда $Q(x)$ — аниқланиши керак бўлган бирор функция. Бунга мослаб (6) формулани қайтадан ёзамиз:



96- расм.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (6')$$

x ва a нинг тайин қийматларида $Q(x)$ функция маълум қийматга эга; уни Q билан белгилаймиз.

Сўнгра t га боғлиқ (t нинг қиймати a билан x орасида ётади) ёрдамчи

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots \\ \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

функцияни текшираемиз, бу ерда Q (6') муносабат билан аниқланган қийматга эга; бунда a ва x ни аниқ сонлар деб ҳисоблаймиз.

Энди $F'(t)$ ҳосилани топамиз:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \\ - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

ёки қисқартиргандан кейин:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (8)$$

Демак, a абсциссали нуқта ($a < x$ да $a < t \leq x$ ва $a > x$ да $a \geq t \geq x$) яқинида ётувчи барча t нуқталарда $F(t)$ функция ҳосилага эга.

Сўнгра [(6') формулага асосан]

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0$$

эканлигини кўраемиз. Шунинг учун $F(t)$ функцияга Ролль теоремаси қўлланса бўлади, демак, a ва x орасида ётувчи шундай $t = \xi$ қиймат мавжудки, бу қийматда $F'(\xi) = 0$ бўлади. Бундан (8) муносабатга асосан:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

бундан

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Бу ифодани (7) формулага қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Бу — қолдиқ ҳад учун *Лагранж формаси* дейилади.
 Ё миқдор x ва a орасида ётгани учун уни

$$\xi = a + \theta(x - a)$$

формада*) тасвирлаш мумкин, бу ерда θ 0 билан 1 орасида ётувчи сон, яъни $0 < \theta < 1$; у ҳолда қолдиқ ҳад формуласи

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

кўринишини олади.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \end{aligned} \quad (9)$$

формула $f(x)$ функция учун *Тейлор формуласи* дейилади.

Агар Тейлор формуласида $a = 0$ фараз қилинса, у ҳолда формула

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ &\dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \end{aligned} \quad (10)$$

кўринишда ёзилади, θ бу ерда 0 билан 1 сонлари орасида. Тейлор формуласининг бу хусусий ҳоли баъзан *Маклорен формуласи* дейилади.

7- §. $e^x, \sin x, \cos x$ функцияларни Тейлор формуласи бўйича ёйиш

1. $f(x) = e^x$ функцияни ёйиш. $f(x)$ дан кетма-кет ҳосиллар олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1, \\ &\dots & & \\ f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Бу ифодаларни 6- § нинг (10) формуласига қўямиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

*) Шу бобнинг 2- § охирига қаранг.

Агар $|x| \leq 1$ бўлса, $n = 8$ деб олиб, қолдиқ ҳадни баҳолаймиз:

$$R_8 < \frac{1}{9!} \cdot 3 < 10^{-5}.$$

$x = 1$ да e соннинг тақрибий қийматини топишга имкон берадиган ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!};$$

бунда ҳисоблашни олтинта*) каср хонали унли касрлар билан бажариб, сунгра натижани бешта унли каср рақамигача яхлитлаб, e учун ушбу қийматни топамиз:

$$e = 2,71828.$$

Бу ерда хато $\frac{3}{9!}$ дан ёки 0,00001 дан ошмайди.

Шуни қайд этамизки, x қандай бўлмасин, $n \rightarrow \infty$ да қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0.$$

Ҳақиқатан, $\theta < 1$ бўлгани учун, x нинг тайин қийматида $e^{\theta x}$ миқдор чекланган ($x > 0$ да e^x дан кичик ва $x < 0$ да 1 дан кичик).

Тайин сон x қандай бўлмасин

$$n \rightarrow \infty \text{ да } \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

ни исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Агар x тайин сон бўлса, у ҳолда шундай бутун мусбат n сон топиладики,

$$|x| < N$$

бўлади.

$\frac{|x|}{N} = q$ белгилашни киритамиз; у вақтда $0 < q < 1$ ни эътиборга олиб, $n = N + 1, N + 2, N + 3$ ва ҳоказо қийматларда бундай ёза оламиз:

*) Бошқача айтганда яхлитлаш хатосининг йиғиндиси R_8 дан анча ошиб кетиши мумкин (масалан, қўшилувчилар саноги 10 га бўлганда бу хато миқдори $5 \cdot 10^{-5}$ га етиши мумкин).

Энди $\left| \sin \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leq 1$ булгани учун x нинг барча қийматларида

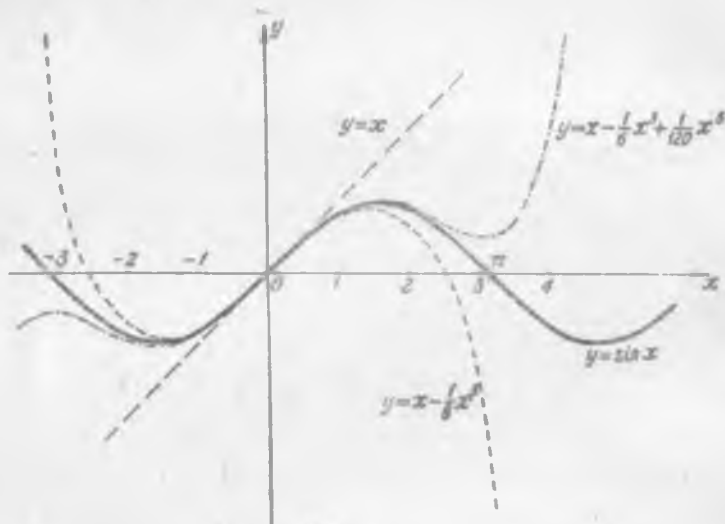
$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Чиққан формулани $\sin 20^\circ$ ни тақрибий ҳисоблаш учун татбиқ қиламиз. $n=3$ деб фараз қиламиз, яъни ёйилманинг биринчи иккита ҳади билан чекланамиз:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 = 0,342.$$

Қилинган хатони ва қолдиқ ҳадга тенг хатони баҳолаймиз:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \sin(\xi + 2\pi) \right| \leq \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} = 0,00062 < 0,001.$$



97- расм.

Демак, хато 0,001 дан кичик, яъни 0,001 гача аниқлик билан $\sin 20^\circ = 0,342$.

97- расмда $f(x) = \sin x$ функциянинг графиги ва унинг биринчи учта

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

яқинлашмаларининг графиклари берилган.

3. $f(x) = \cos x$ функцияни ёйиш. $f(x) = 0$ функциянинг $x = 0$ даги кетма-кет ҳосилаларини топиш ва Маклорен формуласига қўйиш билан ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{\pi}{2} + \\ &+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left(\frac{\pi}{2} + (n+1) \frac{\pi}{2} \right), \\ &|\xi| < |x|.\end{aligned}$$

Бу ерда ҳам x нинг барча қийматларида $\lim_{x \rightarrow 0} R_n(x) = 0$.

IV бобга машқлар

Қуйидаги функциялар учун Ролль теоремасининг тўғрилиги текшириб кўрилин: 1. $[1, 2]$ кесмада $y = x^2 - 3x + 2$. 2. $[0, 1]$ кесмада $y = x^3 + 5x^2 - 6x$. 3. $[1, 3]$ кесмада $y = (x-1)(x-2)(x-3)$.

4. $[0, \pi]$ кесмада $y = \sin^2 x$. 5. $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ функция 1 ва -1 илдизларга эга. $f'(x)$ ҳосиланинг Ролль теоремасида гапирладиган илдизи топилин. 6. $y = \sqrt{x^3 - 5x + 6}$ функциянинг илдизлари орасида унинг

ҳосиласининг илдизи борлиги текшириб кўрилин. 7. $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$ кесмада $y = \cos^2 x$ функция учун Ролль теоремасининг тўғрилиги текшириб кўрилин.

8. $[-1, 1]$ кесманинг учларида $y = 1 - \sqrt{x^4}$ функция нолга айланади. Бу функциянинг ҳосиласи $(-1, 1)$ интервалнинг ҳеч қаерида нолга айланимаслигига ишонч ҳосил қилинсин. Нима учун бу ерда Ролль теоремасининг қўлланмаслиги тушунтирилсин. 9. $[x_1, x_2]$ кесмада $y = \sin x$ функция учун Лагранж формуласи тузилсин. Жав. $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1) \cos c$,

$x_1 < c < x_2$. 10. $[0, 1]$ кесмада $y = 2x - x^2$ функция учун Лагранж формуласининг тўғрилиги текшириб кўрилин. 11. Қандай нуқтада $y = x^n$ эгри чизиқ уринмаси $M_1(0, 0)$ ва $M_2(a, a^n)$ нуқталарни тартиб турувчи ватарга параллел бўлади? Жав. Абсиссаси $c = \frac{a}{\sqrt[n]{n}}$ нуқтада. 12. Қандай нуқтада

$y = \ln x$ эгри чизиқ уринмаси $M_1(1, 0)$ ва $M_2(e, 1)$ нуқталарни тартиб турувчи ватарга параллел бўлади? Жав. Абсиссаси $c = e - 1$ бўлган нуқтада.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб, тенгсизликлар исботлансин: 13. $e^x > 1 + x$ 14. $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$). 15. ($b > a$ да) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$. 16. $\arctg x < x$. 17. $[1, 2]$ кесмада $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ функциялар учун Коши формуласи ёзилсин ва c топилин.

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин: 18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Жав. $\frac{1}{n}$.

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin x}$. Жав. 2. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - x}{x - \sin x}$. Жав. 2. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}$.

Жав. -2 . 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Жав. Лимит мавжуд эмас. ($x \rightarrow +0$ да

$\sqrt{2}$, $x \rightarrow -0$ да $-\sqrt{2}$). 23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(n-2x)^2}$. Жав. $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

- Жав. $\ln \frac{a}{b}$. 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$. Жав. $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.
 Жав. $\cos a$. 27. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. Жав. 2. 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^3 + x^5}$. Жав. $\frac{1}{3}$.
 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$. Жав. $\frac{3}{2}$. 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (бу ерда $n > 0$). Жав. 0.
 31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arcsin \frac{1}{x}}$. Жав. 1. 32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x}{x-1}}$. Жав. -1. 33. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{ay}}$. Жав. $a > 0$
 да 0, $a < 0$ да ∞ . 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Жав. 1. 35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$. Жав. 1.
 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \lg 7x}{\ln \lg 2x}$. Жав. 1. 37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - x}{\lg \frac{\pi}{2x}}$. Жав. 0. 38. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg \frac{\pi}{2}$.
 Жав. $\frac{2}{\pi}$. 39. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right]$. Жав. $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} \right]$.
 Жав. -1. 41. $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \tan \varphi)$. Жав. 0. 42. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$.
 Жав. $\frac{1}{2}$. 43. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$. Жав. $\frac{1}{2}$. 44. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$. Жав. ∞ . 45. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
 Жав. $\frac{1}{e}$. 46. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{t^2}$. Жав. 1. 47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x}$. Жав. 1. 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$.
 Жав. e^a . 49. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Жав. $\frac{1}{e}$. 50. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$. Жав. 1.
 51. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Жав. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 52. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lg \frac{\pi x}{4} \right)^{\lg \frac{\pi x}{2}}$. Жав. $\frac{1}{e}$. 53. $x^4 -$
 $- 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ кўпхад $x - 2$ даражаси бўйича ёйилсин. Жав.
 $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$. 54. $x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1$ кўп-
 ҳад $x + 1$ даражаси бўйича ёйилсин. Жав. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 +$
 $+(x+1)^5$. 55. $a = 1$, $n = 3$ да $y = \sqrt{x}$ функция учун Тейлор формуласи
 ёзилсин. Жав. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{8} -$
 $-\frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} [1 + \theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$, $0 < \theta < 1$. 56. $n = 2$ да $y = \sqrt{1+x}$
 функция учун Маклорен формуласи ёзилсин. Жав. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x -$
 $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0 < \theta < 1$. 57. Олдинги нисол натижасидан фойда-

ланиб, $x = 0.2$ да $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ тақрибий тенгликнинг хатоси баҳолансин. Жав. $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$ дан кичик.

x нинг кичикроқ қийматларида қуйидаги тақрибий тенгликларнинг келиб чиқиши изоҳлансин ва бу тенгликларнинг хатолари баҳолансин: 58. $\ln \cos x \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$. 59. $\lg x \approx x + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^3}{15}$. 60. $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}$. 61. $\arctg x \approx x - \frac{x^3}{3}$. 62. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. 63. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{6}$.

Тейлор формуласидан фойдаланиб, ифодаларнинг лимитлари ҳисоблансин: 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3 - 1 - x - \frac{x^3}{2}}$. Жав. 1. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Жав. 0. 66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\lg x - \sin x) - x^3}{x^5}$. Жав. $\frac{1}{4}$. 67. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$. Жав. 0. 68. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$. Жав. $\frac{1}{3}$. 69. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$. Жав. $\frac{2}{3}$.

ФУНКЦИЯНИ ТЕКШИРИШ

1- §. Масаланинг қўйилиши

Табиатда бўладиган турли ҳодисаларнинг миқдорий томонини ўрганиш шу ҳодисада иштирок этадиган ўзгарувчи миқдорлар орасидаги функционал боғланишни топиш ва ўрганишга келтирилади. Агар шундай функционал боғланишни аналитик равишда, яъни бир ёки бир неча формула шаклида ифодалаш мумкин бўлса, биз бу функционал боғланишни математик анализ воситалари билан текшириш имконига эга бўламиз. Масалан, снаряднинг бўшлиқда учиш ҳодисасини текширганда учиш узоқлиги R нинг кўтарилиш бурчаги α билан бошланғич v_0 тезлигига боғлиқлигини кўрсатадиган ушбу формула ҳосил бўлади:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(g — оғирлик кучи тезланиши).

Бу формулани ҳосил қилгандан сўнг, α нинг қандай қийматида R узоқлик энг катта бўлишини, қандай қийматида энг кичик бўлишини, α бурчак катталашганда узоқлик ҳам катталашуви учун қандай шартлар кераклиги ва шу сингари масалаларни аниқлаш имкониятига эга бўламиз.

Бошқа бир мисол кўрайлик. Рессор устидаги (автомобиль, танк) юкнинг тебранишини текшириш натижасида юкнинг мувозанат ҳолатдан четланиши (чиқиши) у нинг t вақтга қандай боғланишини кўрсатувчи ушбу формула ҳосил қилинган:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Бу формулага кирган k , A , B , ω миқдорлар берилган тебранувчи система учун аниқ қийматларга эга (улар рессорнинг эластиклигига, юкнинг миқдorigа ва ҳоказоларга боғлиқ бўлиб, аммо t вақтнинг ўтиши билан ўзгармайдн), шунга кўра биз уларни ўзгармас миқдорлар деб қараймиз.

Келтирилган формулага асосланиб t нинг қандай қайматларида t нинг ўсиши билан y четланиш ортади, энг катта четланишнинг миқдори вақтга боғлиқ равишда қандай ўзгаради, t нинг қийматлари қандай бўлганда четланиш энг катта бўлади, t нинг қийматлари қандай бўлганда юк энг катта тезлик билан ҳаракат қилади ва шу каби қатор масалаларни аниқлашимиз мумкин.

Айтилган масалаларнинг ҳаммаси „функцияни текшириш“ тушунчасига киради. Равшанки, бу масалаларни (II бобда қилганимиз каби) функциянинг айрим нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш йўли билан аниқлаш жуда қийин. Бу бобнинг мақсади функцияни текширишнинг умумийроқ усулларини топишдир.

2- §. Функциянинг ўсиши ва камайиши

I бобнинг 6- § да ўсувчи ва камаювчи функцияларнинг таърифи берилган эди. Энди ҳосила тушунчасини функциянинг ўсиши ва камайишини текширишга татбиқ қиламиз.

Теорема. 1) Агар $[a, b]$ кесмада ҳосиллага эга бўлган $f(x)$ функция шу кесмада ўсувчи бўлса, унинг ҳосиласи $[a, b]$ кесмада манфий бўлмайди, яъни $f'(x) \geq 0$.

2) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) оралиқда дифференциалланувчи бўлса ва $a < x < b$ учун $f'(x) > 0$ бўлса, бу функция $[a, b]$ кесмада ўсади.

Исбот. Аввал теореманинг биринчи қисмини исбот қиламиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўсади деб фараз қиламиз. x аргументга Δx орттирмани берамиз ва

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

нисбатни қараймиз.

$f(x)$ ўсувчи функция, шунга кўра

$$\Delta x > 0 \text{ бўлганда } f(x + \Delta x) > f(x)$$

ва

$$\Delta x < 0 \text{ бўлганда } f(x + \Delta x) < f(x)$$

Иккала ҳолда ҳам

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad (2)$$

демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

яъни $f'(x) > 0$, шуни исботлаш талаб қилинган эди. [Агар $f'(x) < 0$ бўлса, Δx нинг етарли даражада кичик қийматларида (1) нисбат манфий бўлар эди, бу эса (2) муносабатга зиддир].

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. x нинг $[a, b]$ оралиқдаги ҳамма қийматларида $f'(x) > 0$ деб фараз қиламиз.

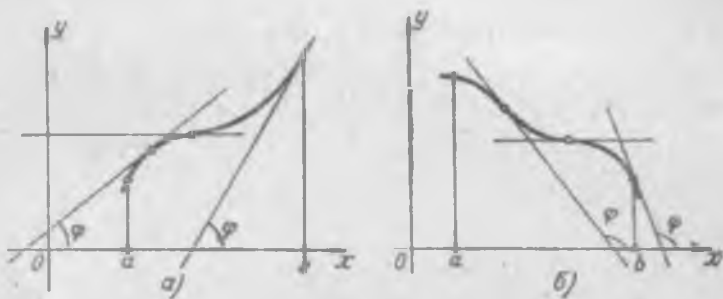
$[a, b]$ кесмага тегишли иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 ($x_1 < x_2$) қийматни қараймиз.

Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасига биноан ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Шартга кўра $f'(\xi) > 0$ демак, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, бу эса $f(x)$ усувчи функция деган сўздир.

Камаювчи (дифференциалланувчи) функция учун ҳам шунга ухшаш теоремани айтиш мумкин, яъни:



98- расм.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада камайса, шу кесмада $f'(x) \leq 0$ бўлади. Агар (a, b) оралиқда $f'(x) < 0$ бўлса $[a, b]$ кесмада $f(x)$ камаяди. [Албатта, бу ерда ҳам функция $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида узлуксиз ва (a, b) оралиқнинг ҳамма нуқталарида дифференциалланувчи деб фараз қиламиз].

Изоҳ. Исботланган теорема ушбу геометрик фактни ифодалайди. Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция ўсса, шу кесманинг ҳар бир нуқтасида $y = f(x)$ эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан φ утк ир бурчакни ҳосил қилади ёки — айрим нуқталарда — горизонтал бўлади; бу бурчакнинг тангенсини манфий бўлмайди: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (98- а расм). Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция камайса, уринма Ox ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилади (ёки айрим нуқталарда уринма горизонтал бўлади); бу бурчакнинг

тангенс мусбат бўлмайди (98-б расм). Теореманинг иккинчи қисми ҳам шу каби. тасвирланади. Теорема ҳосиланинг ишорасига қараб функциянинг ўсиши ёки камайишини аниқлашга имкон беради.

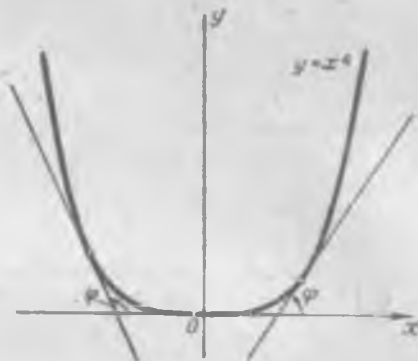
Мисол. Ушбу функциянинг ўсиш ва камайиш соҳалари аниқлансин:

$$y = x^4.$$

Ечиш. Ҳосилани топамиз:

$$y' = 4x^3;$$

$x > 0$ бўлганда $y' > 0$ бўлади — функция ўсади; $x < 0$ бўлганда $y' < 0$ бўлади — функция камаяди (99-расм).



99-расм.

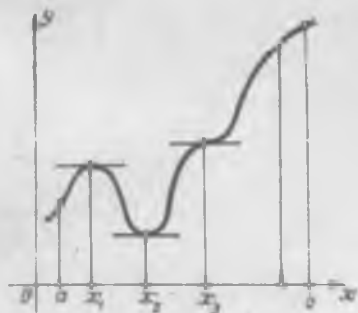
3- §. Функциянинг максимуми ва минимуми

Максимумнинг таърифи. Агар $f(x)$ функциянинг x_1 нуқтадаги қиймати x_1 ни ўз ичига олган биронта интервалнинг ҳамма нуқталаридаги қийматларидан катта бўлса, $f(x)$ функция x_1 нуқтада **максимум** (maximum) га эга бўлади. Бошқача айтганда, агар абсолют миқдори бўйича етарли даражада кичик бўлган ҳар қандай (мусбат ва манфий) Δx учун $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ бўлса, $f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада **максимумга** эга бўлади*).

Масалан, графиги 100-расмда тасвирланган $y = f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга.

Минимумнинг таърифи. Агар абсолют миқдори бўйича етарли даражада кичик бўлган ҳар қандай (мусбат ва манфий) Δx учун

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$



100-расм.

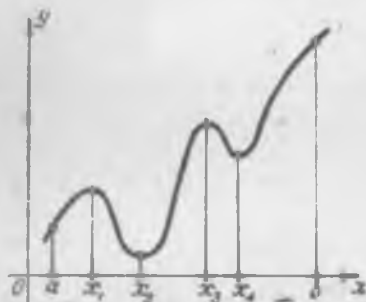
* Баъзан бу таъриф бундай ифодаланади: агар x_1 нуқтанинг шундай (α, β) атрофини ($\alpha < x_1 < \beta$) топниш мумкин бўлсаки, шу атрофнинг x_1 дан бошқа ҳамма нуқталари учун $f(x) < f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_1 нуқтада **максимумга** эга дейилади.

булса, $f(x)$ функция $x = x_2$ нуқтада *минимум* (minimum) га эга бўлади (100- расм).

Масалан, утган параграф охирида қаралган $y = x^4$ функция (99- расмга қаралсин) $x = 0$ нуқтада минимумга эга, чунки $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ва x нинг бошқа қийматларида $y > 0$.

Максимум ва минимум таърифлари муносабати билан қуйидаги ҳолларга эътибор қилиш лозим.

1. Кесмада аниқланган функция x нинг фақат қаралаётган кесманинг ичидаги қийматларида максимал ва минимал қийматларга етиши мумкин.



101- расм.

2. Функциянинг максимуми ва минимумини қаралаётган кесмада унинг энг катта ва энг кичик қийматлари деб қараш хато бўлади. Функциянинг максимум нуқтадаги қиймати шу максимум нуқтага етарли даражада яқин турган ҳамма нуқталардаги қийматларига нисбатангина энг катта бўлади, минимум нуқтадаги қиймати эса шу минимум нуқтага етарли даражада яқин турган нуқталардаги қийматларига нисбатангина энг кичик бўлади.

101- расмда $[a, b]$ кесмада аниқланган функция тасвирланган, бу функция

$x = x_1$ ва $x = x_2$ нуқталарда максимумга эга;

$x = x_2$ ва $x = x_4$ нуқталарда минимумга эга, лекин функциянинг $x = x_4$ даги минимуми $x = x_1$ даги максимумидан катта. Функциянинг $x = b$ даги қиймати қаралаётган кесмадаги максимумларнинг ҳар биридан каттадир.

Функциянинг максимум ва минимумлари функциянинг *экстремумлари**) ёки *экстремаль қийматлари* деб аталади.

Функциянинг экстремаль қийматлари ва уларнинг $[a, b]$ кесмада жойланиши аргументнинг ўзгариши билан боғланишда функциянинг ўзгаришини маълум даражада характерлайди.

Қуйида экстремаль қийматларни топиш методи кўрсатилади.

1- теорема (экстремум мавжудлигининг зарур шarti). Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада максимумга ёки минимумга эга булса, унинг ҳосиласи шу нуқтада нолга айланади, яъни $f'(x_1) = 0$ бўлади.

*) Extremum — четки деган сўз (латинча).

Исбот. Аниқлик учун $x = x_1$ нуқтада функция максимумга эга деб фараз қиламиз. Бу ҳолда x_1 га абсолют қиймат жиҳатидан етарли даражада кичик Δx ($\Delta x \neq 0$) орттирма бериб, ушбу тенгсизликни ёзиш мумкин:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

яъни

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Лекин бундай ҳолда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

нисбатнинг ишораси Δx нинг ишораси билан белгиланади, яъни:

$$\Delta x < 0 \text{ бўлганда } \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0,$$

$$\Delta x > 0 \text{ бўлганда } \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0.$$

Ҳосиланинг таърифига мувофиқ:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Агар $f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, унғ томондаги лимит Δx нинг қандай (мусбат ёки манфийлигича қолган ҳолда) нолга интилишига боғлиқ бўлмайди.

Аммо Δx манфийлигича қолган ҳолда нолга интилса, у ҳолда

$$f'(x_1) \geq 0.$$

Агар Δx мусбатлигича қолган ҳолда нолга интилса, у ҳолда

$$f'(x_1) \leq 0.$$

$f'(x_1)$ нинг қиймати Δx нинг қандай ҳолда нолга интилишига боғлиқ бўлмаган аниқ сон бўлгани учун сўнгги икки тенгсизлик фақат

$$f'(x_1) = 0$$

бўлгандагина биргаликда бўлади.

Функциянинг минимуми бўлган ҳол учун ҳам теорема шу равишда исботланади.

Исботланган теоремага ушбу равшан кўриниб турган геометрик факт мос келади: агар $f(x)$ функция максимум ва минимум нуқталарда ҳосилага эга бўлса, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг шу нуқталарида утказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади. Ҳақиқатан, $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$ тенгликдан, бу ерда φ — уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчак, $\varphi = 0$ эканлиги келиб чиқади (100- расм).

1- теоремадан бевосита ушбу натижа чиқади: агар аргумент x нинг қаралаётган ҳамма қийматларида $f(x)$ функция ҳосиллага эга булса, у ҳолда функция x нинг фақат ҳосилани нолга айлантирадиган қийматларидагина экстремумга (максимум ёки минимумга) эга бўлади. Бунга тескари хулоса тўғри эмас: ҳосилани нолга айлантирадиган ҳар қандай қийматда албатта максимум ёки минимум мавжуд бўлвермайди. Масалан, 100- расмда тасвирланган функциянинг ҳосиласи $x = x_3$ нуқтада нолга айланади (уринма горизонтал),

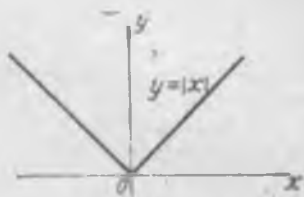
лекин бу нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмас. Худди шунингдек, $y = x^3$ функциянинг ҳосиласи (102- расм) $x = 0$ нуқтада нолга тенг:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

аммо бу нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмас. Ҳақиқатан, x



102- расм.



103- расм.

нуқта O нуқтага ҳар қанча яқин булса ҳам ҳамма вақт $x < 0$ булганда $x^3 < 0$ ва $x > 0$ булганда $x^3 > 0$ бўлади.

Биз биронта кесманинг ҳамма нуқталарида функция ҳосиллага эга булган ҳолни текширдик. Ҳосила мавжуд булмаган нуқталарда аҳвол қандай бўлади? Бундай нуқталарда ё максимум ёки минимум бўлиши, аммо на униси ва на буниси бўлмаслиги мумкинлигини мисолларда кўрсатамиз.

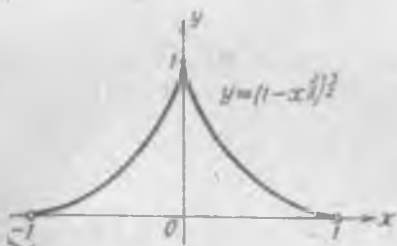
1- мисол. $y = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосиллага эга эмас (бу нуқтада эгри чизик уринмага эга эмас), аммо берилган функция шу нуқтада минимумга эга, чунки $x = 0$ булганда $y = 0$ ва нолдан бошқа ҳар қандай x нуқта учун эса $y > 0$ (103- расм).

2- мисол. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосиллага эга эмас,

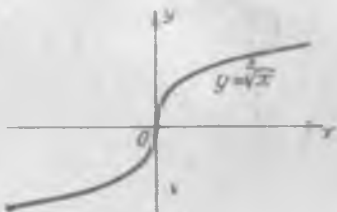
чунки $y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$ ҳосила $x = 0$ нуқтада чексизликка айланади, аммо функция бу нуқтада максимумга эга: $f|0| = 1$, x ноль булмаган нуқтада $f(x) < 1$ бўлади (104- расм).

3- мисол. $y = \sqrt[3]{x}$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас ($x \rightarrow 0$ да $y' \rightarrow \infty$). Бу нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас: $f(0) = 0$; $x < 0$ бўлганда $f(x) < 0$; $x > 0$ бўлганда $f(x) > 0$ бўлади (105- расм).

Шундай қилиб, функция фақат икки ҳолда: ҳосила мавжуд ва нолга тенг бўлган нуқталарда ёки ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталарда экстремумга эга бўлиши мумкин.



104- расм.



105- расм.

Агар биронта нуқтада ҳосила мавжуд бўлмаса (аммо яқин нуқталарда мавжуд бўлса), шу нуқтада ҳосила уз или ш и н и кўра миз.

Аргументнинг ҳосила нолга айланадиган ёки узиладиган қийматлари критик нуқталар ёки критик қийматлар дейилади.

Юқорида айтилганлардан ҳар қандай критик қийматда функция максимумга ёки минимумга эга бўлавермаслиги келиб чиқади. Лекин, агар функция биронта нуқтада максимумга ёки минимумга эришса, у нуқта шубҳасиз критик нуқта бўлади. Шунга кўра функциянинг экстремумларини топиш учун бундай қилинади: ҳамма критик нуқталар топилади, сўнгра ҳар бир критик нуқтани айрим текшириб, у нуқтада функциянинг максимуми ёки минимуми бўлиши ёки на максимуми ва на минимуми бўлмаслиги аниқланади.

Функцияни критик нуқталарда текшириш ушбу теоремага асосланади.

2- теорема (экстремум мавжудлигининг етарли шартлари). $f(x)$ функция критик нуқта x_1 ни ўз ичига олган биронта интервалда узлуксиз ва шу интервалнинг ҳамма (балки x_1 нуқтанинг ўзидан бошқа) нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин. Агар шу нуқтанинг чап томонидан унғ томонига ўтишда ҳосиланинг ишораси плюстан минусга ўзгарса, функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга бўлади. Агар чапдан x_1 нуқта орқали унғга ўтишда ҳоси-

ланинг ишораси минусдан плюсга узгарса, функция шу нуқтада минимумга эга бўлади.

Шундай қилиб,

$$\text{агар а) } \begin{cases} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0, \\ x > x_1 \text{ „ } f'(x) < 0 \end{cases}$$

бўлса, функция x_1 нуқтада максимумга эга;

$$\text{агар б) } \begin{cases} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) < 0, \\ x > x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0 \end{cases}$$

бўлса, функция x_1 нуқтада минимумга эга бўлади. Бунда шунинг назарда тутиш лозимки, а) ва б) шартлар x нинг x_1 га етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматларида, яъни x_1 критик нуқтанинг етарли даражада кичик атрофининг ҳамма нуқталарида бажарилиши керак.

Исбот Аввало ҳосиланинг ишораси плюсдан минусга узгаради, яъни x нинг x_1 нуқтага етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматлари учун ушбу:

$$\begin{aligned} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0, \\ x > x_1 \text{ „ } f'(x) < 0 \end{aligned}$$

тенгсизликларга эгамиз деб фараз қиламиз.

$f(x) - f(x_1)$ айирмага Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

бу ерда ξ x ва x_1 орасидаги нуқта.

1) $x < x_1$ бўлсин; у ҳолда

$$\xi < x_1, f'(\xi) > 0, f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

ва демак,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

ёки

$$f(x) < f(x_1). \quad (1)$$

2) $x > x_1$ бўлсин, у ҳолда

$$\xi > x_1, f'(\xi) < 0, f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

ва, демак,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

ёки

$$f(x) < f(x_1). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгсизликлар x нинг x_1 га етарли даражада яқин ҳамма қийматларида $f(x)$ функциянинг қийматлари x_1 нуқта-

даги қийматидан кичик эканини кўрсатади. Демак, x_1 нуқтада $f(x)$ функция максимумга эгадир.

Теореманинг минимум учун етарли шарт ҳақидаги иккинчи қисми ҳам шу равишда исбот қилинади.

106- расм 2- теореманинг маъносини кўргазмалли тасвирлайди.

$x = x_1$ нуқтада $f'(x_1) = 0$ ва x нинг x_1 нуқтага етарли даражада яқин ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар

$$x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0,$$

$$x > x_1 \quad \text{,} \quad f'(x) < 0$$

бажарилади деб фараз қилайлик.

Бу ҳолда $x < x_1$ бўлганда эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўткир бурчак ҳосил қилади — функция ўсади; $x > x_1$ бўлганда эса, уринма Ox ўқ билан утмас бурчак ҳосил қилади — функция камаёди; $x = x_1$ бўлганда функция ўсишдан камайишга ўтади, яъни максимумга эга бўлади.

Агар x_2 нуқтада $f'(x_2) = 0$ ва x нинг x_2 нуқтага етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар

$$x < x_2 \text{ бўлганда } f'(x) < 0,$$

$$x > x_2 \text{ бўлганда } f'(x) > 0$$



106- расм.

бажарилса, бу ҳолда $x < x_2$ бўлганда эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилади — функция камаёди; $x > x_2$ бўлганда эса эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўткир бурчак ҳосил қилади — функция ўсади. $x = x_2$ бўлганда функция камайишдан ўсишга ўтади, яъни минимумга эга бўлади.

Агар x_3 нуқтада $f'(x_3) = 0$ ва x нинг x_3 га етарли даражада яқин ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар.

$$x < x_3 \text{ бўлганда } f'(x) > 0,$$

$$x > x_3 \quad \text{,} \quad f'(x) > 0$$

бажарилса, бу ҳолда $x < x_3$ бўлганда ҳам, $x > x_3$ бўлганда ҳам функция ўсади. Демак, $x = x_3$ бўлганда функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Худди шундай ҳол $y = x^3$ функция учун $x = 0$ нуқтада рўй беради.

Ҳақиқатан ҳосила $y' = 3x^2$, демак,

$$(y')_{x=0} = 0,$$

$$(y')_{x < 0} > 0,$$

$$(y')_{x > 0} > 0,$$

~~*~~

бу эса $x = 0$ бўлганда функция на максимумга ва на минимумга эга эмас деган сўздир (юқоридаги 102- расмга қаралсин).

4- §. Дифференциалланувчи функцияни биринчи ҳосила ёрдами билан максимум ва минимумга текшириш схемаси

Ўтган параграфда айтилганларга асосан дифференциалланувчи $y = f(x)$ функцияни максимум ва минимумга текшириш қондасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

1. Функциянинг биринчи ҳосиласини, яъни $f'(x)$ ни топамиз. Аргумент x нинг критик қийматларини топамиз; бунинг учун:

а) биринчи ҳосилани нолга тенглаймиз ва ҳосил бўлган $f'(x) = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдиэларини топамиз;

б) x нинг $f'(x)$ ҳосила узилишга дучор бўладиган қийматларини топамиз.

3. Ҳосиланинг критик нуқтадан чапдаги ва ўнгдаги ишорасини текшираимиз. Иккита критик нуқта оралиғидаги интервалда ҳосиланинг ишораси ўзгармайди, шунга кўра, масалан, x_2 критик нуқтанинг (106- расм) чап ва ўнг томонида ҳосила ишорасини текшириш учун ҳосиланинг α ва β нуқталардаги ишорасини аниқлаш кифоя ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, бу ерда x_1 ва x_3 энг яқин критик нуқталар).

4. Аргументнинг ҳар бир критик қиймати учун $f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз.

Шундай қилиб, мумкин бўлган ҳолларнинг қуйидаги схематик тасвирини ҳосил қиламиз:

Критик нуқта x_1 дан ўтишда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси:			Критик нуқтанинг характери
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	—	Максимум нуқтаси
—	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	+	Минимум нуқтаси
+	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	+	Максимум ҳам, минимум ҳам йўқ (функция ўсади)
—	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	—	Максимум ҳам, минимум ҳам йўқ (функция камаяди)

1-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

Функция максимум ва минимумга текширилсин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ҳосиланинг ҳақиқий илдизларини топамиз.

Демак,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Ҳосила ҳамма нуқталарда узлуксиз. Демак, бошқа критик нуқталар йўқ.

3) Критик қийматларни текширамиз ва текшириш натижаларини 107-расмда кўрсатамиз.

Биринчи критик нуқта $x_1 = 1$ ни текширамиз. $y' = (x-1)(x-3)$, шунга кўра

$$x < 1 \text{ бўлганда } y' = (-) \cdot (-) > 0;$$

$$x > 1 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (-) < 0.$$

Демак, $x_1 = 1$ қийматдан (чапдан ўнгга) ўтишда ҳосиланинг ишораси плюстан минусга ўзгаради. Демак, $x = 1$ нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

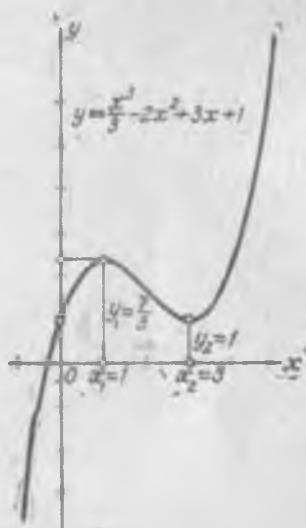
Энди иккинчи критик нуқта $x_2 = 3$ ни текширамиз:

$$x < 3 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (-) < 0;$$

$$x > 3 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (+) > 0.$$

Демак, $x_2 = 3$ нуқтадан ўтишда ҳосиланинг ишораси минусдан плюсга ўзгаради. Шунга кўра $x_2 = 3$ нуқтада функция минимумга эга, унинг қиймати

$$y_{x=3} = 1.$$



107- расм.

Ўтказилган текширишга асосан функциянинг графигини чизамиз (107-расм).

2-мисол. Ушбу функция

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^3}$$

максимум ва минимумга текширилсин.

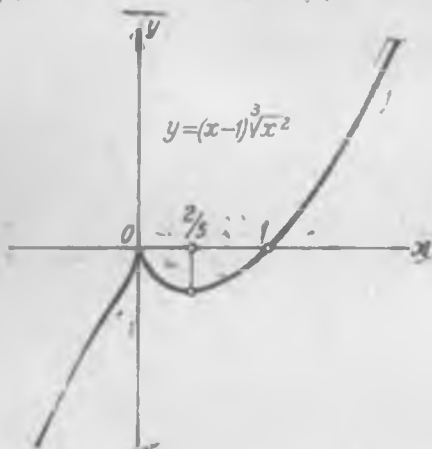
Е ч и ш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = \sqrt[3]{x^3} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Аргументнинг критик қийматларини топамиз: а) ҳосила нолга айланадиган нуқталарни топамиз:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) ҳосиланинг узилиш (бизнинг мисолимизда чексизликка айланадиган) нуқтасини топамиз. Бундай нуқта



108- расм.

$$x_2 = 0$$

нуқтадир. ($x_2 = 0$ нуқтада функциянинг ўзи аниқланган ва узлуксиз эканини қайд қилиб ўтамиз.)

Бошқа критик нуқталар йўқ.

3) Топилган критик нуқталарнинг характерини текшираемиз. $x_1 = \frac{2}{5}$ нуқтани текшираемиз. Вунда

$$(y')_{x < \frac{2}{5}} < 0, \quad (y')_{x > \frac{2}{5}} > 0$$

эканлигини эътиборга олиб, функция $x = \frac{2}{5}$ нуқтада минимумга эга деган хулосага келамиз. Минимум нуқтада функциянинг қиймати:

$$(y)_{x = \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Иккинчи критик нуқта $x = 0$ ни текшираемиз:

$$(y)_{x < 0} > 0, \quad (y)_{x > 0} < 0$$

эканини кўриб, $x = 0$ нуқтада функция максимумга эга деган хулосага келамиз. Бу максимум нуқтада функциянинг қиймати

$$(y)_{x = 0} = 0$$

булади. Текширилаётган функциянинг графиги 108- расмда тасвирланган.

5- §. Функцияни максимум ва минимумга иккинчи ҳосила ёрдамида текшириш

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи $x = x_1$ нуқтада нолга айланади, яъни $f'(x_1) = 0$ деб фараз қиламиз. Бундан ташқари, иккинчи ҳосила $f''(x)$ мавжуд ва x_1 нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз булсин. У ҳолда ушбу теорема тўғри булади.

Теорема. $f'(x_1) = 0$ бўлсин; у вақтда $f''(x_1) < 0$ бўлса, функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга, $f''(x_1) > 0$ бўлса, функция $x = x_1$ нуқтада минимумга эга бўлади.

Исбот. Аввал теореманинг биринчи қисмини исботлаймиз.

$$f'(x_1) = 0 \text{ ва } f''(x_1) < 0$$

бўлсин.

Шартга кўра $x = x_1$ нуқтанинг бирор атрофиди $f''(x)$ узлуксиз бўлгани учун, $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган бирор кичик кесма топиш мумкинки, унинг ҳамма нуқталарида иккинчи ҳосила $f''(x)$ манфий бўлади.

$f''(x)$ га биринчи ҳосиладан биринчи ҳосила $f''(x) = (f'(x))'$ деб қараш мумкин. Шунга кўра $(f'(x))' < 0$ шартида $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган кесмада $f'(x)$ нинг камайиши маълум бўлади (V боб 2- §). Аммо $f'(x_1) = 0$, демак, шу кесмада $x < x_1$ бўлганда $f'(x) > 0$ бўлади, $x > x_1$ бўлганда эса $f'(x) < 0$ бўлади, яъни $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси $x = x_1$ нуқтадан ўтишда плюстан минусга ўзгаради; бу эса x_1 нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга деган суздир. Шу билан теореманинг биринчи қисми исботланди.

Теореманинг иккинчи қисми ҳам шу тарнқа исботланади, яъни: агар $f''(x) > 0$ бўлса, $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган биронта кесманинг ҳамма нуқталарида $f''(x) > 0$ бўлади, лекин у ҳолда шу кесмада $f''(x) = (f'(x))' > 0$ ва, демак, $f'(x)$ ўсади. $f'(x_1) = 0$ бўлгани учун x_1 нуқтадан ўтишда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси минусдан плюсга ўзгаради, яъни $x = x_1$ нуқтада $f(x)$ функция минимумга эга бўлади.

Агар критик нуқтада $f''(x_1) = 0$ бўлса, $x = x_1$ нуқтада ё максимум, ёки минимум бўлиши, ёки на максимум ва на минимум бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда текширишни биринчи усул билан олиб бориш керак (V боб 4- § га қаралсин).

Функцияни иккинчи ҳосила ёрдамида экстремумга текшириш схемасини ушбу жадвалда тасвирлаш мумкин:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Критик нуқтанинг характери
0	—	Максимум нуқтаси
0	+	Минимум нуқтаси
0	0	Номаълум

1- мисол. Ушбу

$$y = 2 \sin x + \cos 2x$$

функциянинг максимум ва минимуми бор-йўқлиги текширилсин.

Ечиш. Берилган функция даври 2π бўлган даврий функция бўлгани учун текширишни $(0, 2\pi)$ кесмада ўтказиш kifoya.

1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 (\cos x - 2 \sin x \cos x) = \\ = 2 \cos x (1 - 2 \sin x).$$

2) Аргументнинг критик қийматларини топамиз:

$$2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Иккинчи ҳосилани топамиз:

$$y'' = -2 \sin x - 4 \cos 2x.$$

4) Ҳар бир критик нуқтанинг характерини текширамиз:

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Демак, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — максимум нуқта; бу нуқтада функциянинг қиймати:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Сўнгра

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$$

Демак, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ нуқтада минимумга эгамиз:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

$x_3 = \frac{5\pi}{6}$ нуқтани текширамиз:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Демак, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ нуқтада функция максимумга эга:

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Нижоят,

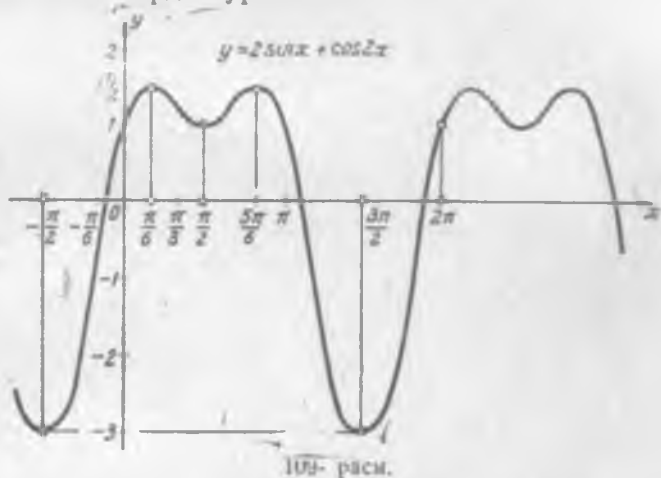
$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Демак, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ нуқтада функция минимумга эга:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

Текширилган функциянинг графиги 109- расмда тасвирланган.

Биронта $x = x_1$ нуқтада $f'(x_1) = 0$ ва $f''(x_1) = 0$ бўлса, бу нуқтада $f(x)$ функция ё максимумга, ё минимумга эга бўлиши, ё бўлмаса на максимумга ва на минимумга эга бўлмаслигини қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.



2- мисол. Ушбу

$$y = 1 - x^4$$

функция максимум ва минимумга текшириласин.

Ечиш. 1) Критик нуқталарни топамиз:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Иккинчи ҳосиланинг $x = 0$ нуқтадаги ишорасини аниқлаймиз:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Демак, бу мисолда иккинчи ҳосила ишораси ёрдами билан критик нуқтанинг характерини аниқлаб бўлмайди.

3) Критик нуқта характерини биринчи усулда текшираемиз (V боб 4- § га қаралсин):

$$(y')_{x < 0} > 0, \quad (y')_{x > 0} < 0.$$

Демак, $x = 0$ нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

Текширилган функциянинг графиги 110- расмда тасвирланган.

3- мисол. Ушбу

$$y = x^6$$

функция максимум ва минимумга текшириласин.

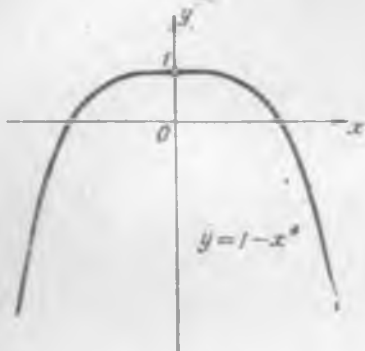
Ечиш. Иккинчи усул билан текшираемиз:

$$1) y' = 6x^5, y' = 6x^5 = 0, x = 0; \quad 2) y'' = 30x^4, (y'')_{x=0} = 0.$$

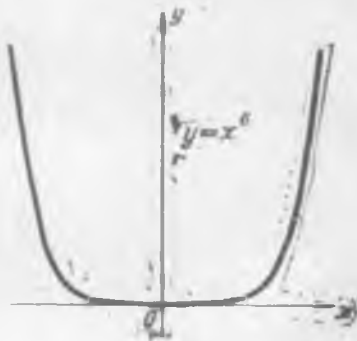
Демак, иккинчи усул жавоб бермайди. Биринчи усул билан текшираемиз:

$$(y')_{x < 0} < 0, \quad (y')_{x > 0} > 0.$$

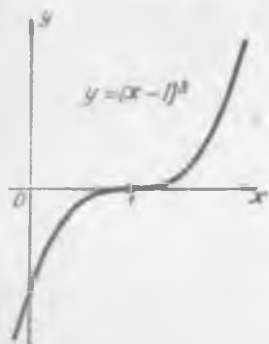
Демак, $x = 0$ бўлганда функция минимумга эга (111- расм).



110- расм.



111- расм.



112- расм.

4- мисол. Ушбу

$$y = (x - 1)^3$$

функция максимум ва минимумга текширилемиз.
Ечиш. Иккинчи усул:

$$y' = 3(x - 1)^2, \quad 3(x - 1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x - 1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$

шундай қилиб, иккинчи усул жавоб бермайди.
Биринчи усул билан топамиз:

$$(y')_{x < 1} > 0, \quad (y')_{x > 1} > 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмас (112- расм).

6- §. Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида узлуксиз деб фараз қилайлик. Бу ҳолда шу кесмада функция энг катта қийматга эга бўлади (II боб 10- § га қаранг). $f(x)$ функциянинг берилган кесмадаги критик нуқталарининг сони чекли деб фараз қиламиз. Агар энг катта қиймат $[a, b]$ кесма ичида бўлса, у қиймат (агар бир неча максимум бўлса) максимумлардан биттаси, яъни энг катта максимум бўлади. Лекин

энг катта қиймат кесма четларининг бирида булиши ҳам мумкин.

Шундай қилиб, функция $[a, b]$ кесмада ўзининг энг катта қийматига кесманинг ё бош нуқтасида, ё охириги нуқтасида, ё бўлмаса функция учун максимум бўлган ички нуқтасида етиши мумкин.

Функциянинг энг кичик қиймати ҳақида ҳам шундай дейиш мумкин: функция ўзининг энг кичик қийматига кесманинг ё бошида, ё охирида, ё бўлмаса функция учун минимум нуқта бўлган ички нуқтада етиши мумкин.

Айтилганлардан ушбу қоида келиб чиқади: агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциянинг шу кесмада энг катта қийматини топиш талаб этилса, ушбу амалларни бажариш керак:

1) Функциянинг кесмадаги ҳамма максимум ва минимумлари топилади;

2) кесманинг бош ва охириги нуқталарида функциянинг қийматлари аниқланади, яъни $f(a)$ ва $f(b)$ ҳисобланади;

3) Функциянинг юқорида топилган ҳамма қийматлари орасидан энг каттаси танлаб олинади; ана шу қиймат функциянинг берилган кесмадаги энг катта қиймати бўлади.

Функциянинг берилган кесмадаги энг кичик қийматини топишда ҳам шундай ишлар бажарилади.

Мисол. Ушбу $y = x^3 - 3x + 3$ функциянинг $[-3; \frac{3}{2}]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматлари аниқлансин.

Ечиш. 1) Функциянинг $[-3; \frac{3}{2}]$ кесмадаги максимум ва минимумларини топамиз:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3, & 3x^2 - 3 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= -1, \\ y'' &= 6x, & \text{у ҳолда} & & (y'')_{x=1} &= 6 > 0. \end{aligned}$$

Демак, $x = 1$ нуқта минимум нуқта экан;

$$(y)_{x=1} = 1$$

Иккинчи критик нуқтани текшираимиз:

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Демак, $x = -1$ нуқта максимум нуқта экан;

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Кесманинг бош ва охириги нуқталарида функциянинг қийматини аниқлавимиз:

$$(y)_{x=-\frac{3}{2}} = \frac{15}{8}, \quad (y)_{x=\frac{3}{2}} = -\frac{15}{8}.$$

Шундай қилиб, текшириладётган функциянинг $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ кесмадаги энг катта қиймати

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

энг кичик қиймати эса

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = -15.$$

Текширилган функциянинг графиги 113- расмда тасвирланган.

7- §. Функциялар максимуми ва минимуми назариясининг масалалар ечишга татбиқи

Максимум ва минимум назарияси ёрдами билан геометрия, механика ва ҳоказоларга доир кўпгина масалалар ечилади. Шундай масалалардан баъзиларини кўрамиз.

1- масала. Горизонтга φ бурчак билан қиялатиб қўйилган тўпдан v_0 бошлангич тезлик билан отилган ўқнинг бўшлиқда учуш узоқлиги $R = OA$ (114- расм)

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

формула билан аниқланади (g — оғирлик кучининг тезланиши). Берилган v_0 бошлангич тезликда ўқнинг учуш узоқлиги R энг катта бўлиши учун φ бурчак қандай бўлиши аниқлансин.

Е ч и ш. R миқдор ўзгарувчи φ бурчакнинг функцияси. Шу функцияни $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ кесмада максимумга текширамыз:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}, \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0,$$

критик қиймат $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}, \quad \left(\frac{d^2 R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

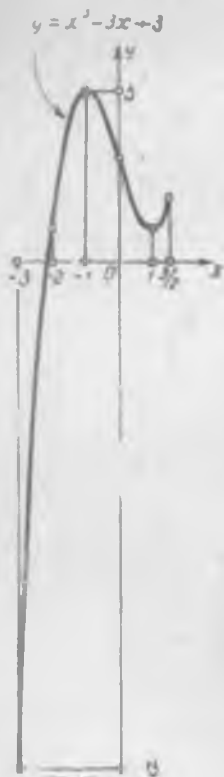
Демак, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ қийматда R функция

$$(R)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}$$

максимумга эга.

R функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесманинг учларида ушбу қийматларга эга бўлади:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$



113- расм.

Шундай қилиб, топилган максимум R функциянинг энг катта қийматидир.

2-м а с а л а. Берилган v ҳажмидаги цилиндрнинг тўла сирти S энг кичик бўлиши учун цилиндрнинг ўлчовлари қандай бўлиши керак?

Е ч и ш. Цилиндр асосининг радиусини r билан, цилиндрнинг баландлигини h билан белгилаб, тўла сирти учун ушбу ифодага эга бўламиз:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Цилиндрнинг ҳажми v маълум, шунинг учун r берилганда h нинг миқдори ушбу

$$v = \pi r^2 h$$

формула билан аниқланади, бундан

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

h нинг бу ифодасини S нинг формуласига қўямиз;

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}.$$

ёки

$$S = 2 \left(\pi r^2 + \frac{v}{r} \right).$$



114-расч.

Бу ерда v — маълум сон. Шундай қилиб, S ни фақат биргина эркли ўзгарувчи r нинг функцияси каби ифодаладик.

Бу функциянинг $0 < r < \infty$ оралиқдаги энг кичик қийматини топамиз:

$$\frac{dS}{dr} = 2 \left(2\pi r - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2} \right)_{r=r_1} = 2 \left(2\pi + \frac{2v}{r^3} \right)_{r=r_1} > 0.$$

Демак, $r = r_1$ нуқтада S функция минимумга эга. Айни вақтда $\lim_{r \rightarrow 0} S = \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} S = \infty$, яъни r нолга ёки чексизликка интилганда S чексиз катталашади. Демак, $r = r_1$ нуқтада S функция энг кичик қийматга эга бўлади.

Лекин $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ бўлса, у ҳолда

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Шундай қилиб, маълум v ҳажмидаги цилиндрнинг тўла сирти S энг кичик бўлиши учун, цилиндрнинг баландлиги диаметрига тенг бўлиши керак.

8- §. Тейлор формуласи ёрдами билан функцияни максимум ва минимумга текшириш

Агар биронта $x = a$ нуқтада $f'(a) = 0$ ва $f''(a) = 0$ бўлса, уша нуқтада ё максимум, ё минимум бўлиши, ёки униси ҳам, буниси ҳам бўлмаслиги мумкинлиги V бобнинг 5- § да кўрилган эди. Бу ҳолда масалани ечиш учун текширишни биринчи усулда олиб бориш, яъни $x = a$ нуқтадан чапда ва ўнгда биринчи ҳосиланинг ишорасини текшириш йўли билан олиб бориш кераклиги кўрсатилган эди.

Энди бу ҳолда текширишни IV бобнинг 6- § да чиқарилган Тейлор формуласи ёрдами билан ўтказиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Умумийлик учун $f(x)$ функциянинг фақат $f''(x)$ гина эмас, балки n -тартибгача (n -тартибни ҳам қўшиб) ҳамма ҳосилалари $x = a$ нуқтада нолга айланади деб фараз қиламиз:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^n(a) = 0, \quad (1)$$

лекин

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Сунгра $f(x)$ функция $x = a$ нуқта артофида $(n+1)$ -тартибгача $[(n+1)$ - тартибни ҳам қўшиб] узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

$f(x)$ функция учун (1) тенгликни эътиборга олган ҳолда Тейлор формуласини ёзамиз:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2)$$

бу ерда ξ a билан x орасидаги сон.

$f^{(n+1)}(x)$ функция a нуқта атрофида узлуксиз ва $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ бўлгани учун шундай кичик мусбат h сон топиш мумкинки, x нинг $|x-a| < h$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳар қандай қиймати учун $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ бўлади. Бунда, агар $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, $(a-h, a+h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида $f^{(n+1)}(x) > 0$ бўлади; агар $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, шу интервалнинг ҳамма нуқталарида $f^{(n+1)}(x) < 0$ бўлади.

(2) формулани ушбу шаклда ёзамиз:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

ва турли хусусий ҳолларни қараб чиқамиз.

Биринчи ҳол. $n = 0$ тоқ сон.

а) $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлсин. Бу ҳолда ҳамма нуқталарида $(n+1)$ -ҳосила манфий бўладиган $(a-h, a+h)$ интервал топилади.

Агар x шу интервалнинг нуқтаси бўлса, ξ ҳам $a - h$ билан $a + h$ орасида бўлади ва, демак, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ бўлади. $n + 1$ жуфт сон, шунга қўра, $x \neq a$ да $(x - a)^{n+1} > 0$, шунинг учун $(2')$ формуланинг ўнг томони манфий бўлади.

Демак, $x \neq a$ да $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида

$$f(x) - f(a) < 0,$$

бу эса $x = a$ нуқтада функция максимумга эга демакдир.

б) $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлсин. Бу ҳолда h нинг етарлича кичик қийматида $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма x нуқталарида $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Демак, $(2')$ формуланинг ўнг томони мусбат бўлади, яъни $x \neq a$ да уша интервалнинг ҳамма нуқталарида

$$f(x) - f(a) > 0$$

бўлади, бу эса $x = a$ нуқтада функция минимумга эга деган сўздир.

Иккинчи ҳол. n — жуфт сон.

Бу ҳолда $n + 1$ тоқ сон ва $(x - a)^{n+1}$ миқдор $x < a$ ва $x > a$ бўлишига қараб ҳар хил ишорага эга бўлади.

Агар h абсолют миқдор жиҳатдан етарли даражада кичик бўлса, $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида $(n + 1)$ ҳосиланинг ишораси унинг $x = a$ нуқтадаги ишораси каби бўлади. Демак, $f(x) - f(a)$ айирма $x < a$ ва $x > a$ бўлишига қараб ҳар хил ишорага эга бўлади. Бу эса $x = a$ нуқтада максимум ҳам, минимум ҳам йўқлигини кўрсатади.

Агар n — жуфт сон бўлганда $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, бу ҳолда $x < a$ учун $f(x) < f(a)$ бўлади, $x > a$ учун эса $f(x) > f(a)$ бўлади.

Агар n — жуфт сон бўлганда $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, бу ҳолда $x < a$ учун $f(x) > f(a)$ бўлади, $x > a$ учун эса $f(x) < f(a)$ бўлади.

Эришилган натижаларни бундай ифодалаш мумкин.

Агар $x = a$ бўлганда

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^n(a) = 0$$

бўлса ва нолга айланмайдиган биринчи ҳосила $f^{(n+1)}(a)$ жуфт тартибли ҳосила бўлиб, a нуқтада

$f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, $f(x)$ максимумга эга;

$f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, $f(x)$ минимумга эга.

Агар нолга айланмайдиган биринчи ҳосила $f^{(n+1)}(a)$ тоқ тартибли бўлса, a нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Бунда

$f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, $f(x)$ ўсади;

$f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, $f(x)$ камаяди.

Мисол. Ушбу функция

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

максимум ва минимумга текширилсин.

Ечиш. Функциянинг критик қийматларини топамиз:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Мана бу

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

теңламадан ягона критик нуқтани топамиз:

$$x = 1$$

(чунки теңлама биттагина ҳақиқий илдиэга эга).

$x = 1$ критик нуқтанинг характерини текшираимиз:

$$x = 1 \text{ бўлганда } f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0,$$

$$x = 1, \quad f'''(x) = 24x - 24 = 0,$$

$$\text{ҳар қандай } x \text{ учун } f^{IV}(x) = 24 > 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада $f(x)$ функция минимумга эгадир.

9- §. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Бурилиш нуқта

Бир қийматли дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг те-
кисликдаги графиги бўлган $y = f(x)$ эгри чизиқни қараймиз.

1- таъриф. Агар (a, b) интервалда эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари унинг ҳар қандай уринмасидан пастда бўлса, шу интервалда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган деймиз.

Агар (b, c) интервалда эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари унинг ҳар қандай уринмасидан юқорида бўлса, шу интервалда эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга йўналган деймиз.

Қавариқлиги юқорига қараган эгри чизиқни қавариқ эгри чизиқ, қавариқлиги пастга қараган эгри чизиқни ботиқ эгри чизиқ деб атаймиз.

115- расмда (a, b) интервалда қавариқ ва (b, c) интервалда ботиқ эгри чизиқ кўрсатилган.

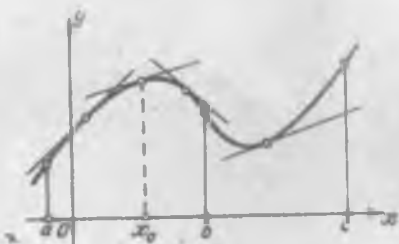
Эгри чизиқ қавариқлигининг йўналиши эгри чизиқ шакли-
нинг муҳим характеристикасидир. Бу параграф $y = f(x)$ функ-

цияни текшириб, графигининг турли интервалларда кавариқлигининг йўналиши ҳақида фикр ҳосил бўладиган белгилар топишга бағишланган.

Ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Агар (a, b) интервалнинг ҳамма нуқталарида $f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи манфий, яъни $f''(x) < 0$ бўлса, шу интервалда $y = f(x)$ эгри чизиқнинг кавариқлиги юқорига қараган (эгри чизиқ кавариқ) бўлади.

Исбот. (a, b) интервалда ихтиёрӣ $x = x_0$ нуқтани оламиз (115-расм) ва эгри чизиққа унинг абсциссаси $x = x_0$ бўлган нуқтасида уринма утказамиз. Агар эгри чизиқнинг (a, b) интервалдаги ҳамма нуқталари шу уринмадан пастда ётганини, яъни $y = f(x)$ эгри чизиқ исталган нуқтасининг ординатаси уринманинг ўша x қийматдаги ординатаси бўлган u дан кичиклигини аниқласак, теорема исботланган бўлади.



115-расм.

Эгри чизиқ тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y = f(x). \quad (1)$$

Эгри чизиққа унинг $x = x_0$ нуқтасидаги уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\bar{y} = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ёки

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалардан абсцисса x нинг бир қийматига мос эгри чизиқ ва уринма нуқталари ординаталарининг айирмаси

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

эканлиги келиб чиқади.

$f(x) - f(x_0)$ айирмага Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбу тенгликни топамиз:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(c нуқта x_0 билан x орасида ётади) ёки

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

$f'(c) - f'(x_0)$ айирмага яна Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

(c_1 нуқта x_0 билан c орасида ётади).

Аввало $x > x_0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $x_0 < c_1 < c < x$; бунда

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

ва ундан ташқари, шартга кўра

$$f''(c_1) < 0,$$

шунинг учун (3) тенгликдан $y - \bar{y} < 0$ эканлиги келиб чиқади.

Энди $x < x_0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $x < c < c_1 < x_0$ ва $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ бўлади ва шартга кўра $f''(c_1) < 0$ бўлгани учун (3) тенгликдан

$$y - \bar{y} < 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, (a, b) интервалда x ва x_0 нинг ҳар қандай қўйматларида эгри чизиқнинг исталган нуқтаси шу эгри чизиққа ўтказилган уринма нуқтасидан пастда ётганлигини исботладик. Бу эса эгри чизиқ қавариқ деган сузидир. Теорема исботланди. Ушбу теорема ҳам шу тарзда исботланади.

1'- теорема. Агар (b, c) интервалнинг ҳамма нуқталарида $f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x) > 0$ бўлса, шу интервалда $y = f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга йўналган (ботиқ) бўлади.

Изоҳ. 1 ва 1'- теоремаларнинг мазмунини геометрик тасвирлаш мумкин. (a, b) интервалда қавариқ бўлган $y = f(x)$ эгри чизиқни қарайлик (116- расм). $f'(x)$ ҳосила эгри чизиққа унинг абсциссаси x бўлган нуқтасидаги уринманинг Ox ўққа оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг, яъни $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Шунинг учун $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]'_x$. Агар (a, b) интервалда ҳамма x учун $f''(x) < 0$ бўлса, бунинг маъноси x нинг ўсиши билан $\operatorname{tg} \alpha$ камаяди демакд-р. x нинг ўсиши билан $\operatorname{tg} \alpha$ камайганда тегишли эгри чизиқнинг қавариқ бўлиши шаклда равшан кўриниб турибди. 1- теореманинг ўзи шу фактнинг аналитик исботидир.

1'- теорема ҳам шунинг сингари геометрик усулда тасвирланади (117- расм).

1- мисол. Ушбу

$$y = 2 - x^3$$

тенглама билан берилган эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

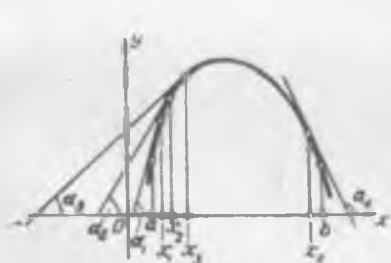
Е чи ш. Иккинчи ҳосила x нинг ҳама қийматлари учун манфий, яъни:

$$y'' = -2 < 0.$$

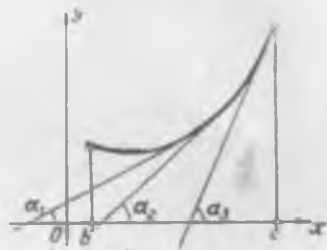
Демак, ҳама ерда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган (118- расм).

2- м и с о л. Эгри чизиқ ушбу тенглама билан берилган:

$$y = e^x.$$



116- расм.

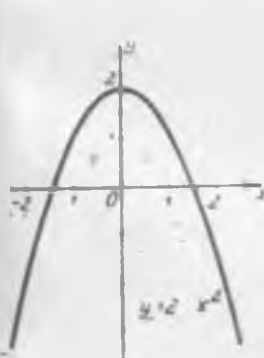


117- расм.

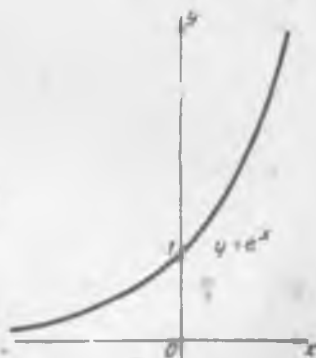
Е чи ш. Иккинчи ҳосила x нинг ҳама қиймати учун мусбат:

$$y'' = e^x > 0,$$

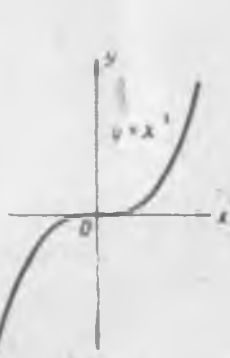
демак, эгри чизиқ ҳама ерда ботиқ, яъни қавариқлиги пастга қараган (119- расм).



118- расм.



119- расм.



120- расм.

3- м и с о л. Эгри чизиқ ушбу тенглама билан аниқланган:

$$y = x^3.$$

Иккинчи ҳосила

$$y'' = 6x,$$

шунинг учун, $x < 0$ бўлганда $y'' < 0$ ва $x > 0$ бўлганда $y'' > 0$. Демак, $x < 0$ бўлганда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган, $x > 0$ бўлганда эса қавариқлиги пастга қараган (120- расм).

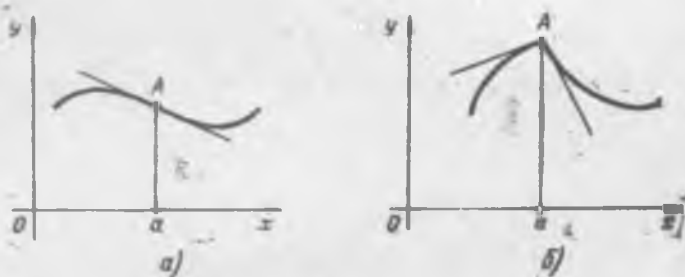
2- таъриф. Узлуксиз эгри чизиқнинг қавариқ қисмини ботиқ қисмидан ажратган нуқта *эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси* деб аталади.

120, 121 ва 122- расмлардаги O , A ва B нуқталар бурилиш нуқталардир.

Равшанки, бурилиш нуқтадаги уринма эгри чизиқни қесиб у тади, чунки бу нуқтанинг бир томонида эгри чизиқ уринма остида бўлса, иккинчи томонида уринма устида бўлади.

Энди берилган нуқта эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлиши учун етарли шартларни аниқлаймиз.

2- теорема. *Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан аниқланган бўлсин. Агар $f''(a) = 0$ бўлса ёки $f''(a)$ мавжуд бўлмаса ва $x = a$ нуқтадан утишда $f''(x)$ нинг ишораси ўзгарса, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқта бўлади.*



121- расм.

Исбот. 1) $x < a$ бўлганда $f''(x) < 0$ ва $x > a$ бўлганда $f''(x) > 0$ бўлсин.

У вақтда $x < a$ бўлганда эгри чизиқ қавариқ ва $x > a$ бўлганда ботиқ бўлади. Демак, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқтадир (121- расм).

2) Агар $x < b$ да $f''(x) > 0$ ва $x > b$ да $f''(x) < 0$ бўлса, $x < b$ да эгри чизиқ ботиқ, $x > b$ да эса қавариқ бўлади. Демак, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = b$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқтадир (122- расм).

4- мисол. Ушбу

$$y = e^{-x^3} \text{ (Гаусс эгри чизиги)}$$

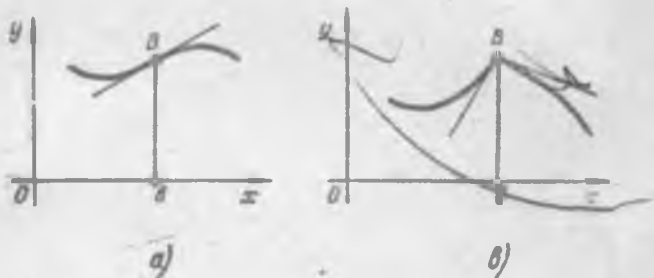
эгри чизиқнинг бурилиш нуқталари топилсин ҳамда қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

$$\begin{aligned}y' &= -2xe^{-x^2} \\ y'' &= 2e^{-x^2}(2x^3 - 1).\end{aligned}$$

2) Биринчи ва иккинчи ҳосила ҳамма нуқталарда мавжуд. x нинг $y'' = 0$ бўладиган қийматларини топамиз:

$$\begin{aligned}2e^{-x^2}(2x^3 - 1) &= 0, \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\end{aligned}$$



122- расм.

3) Топилган қийматларни текшираимиз:

$$\begin{aligned}x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } y'' > 0, \\ x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } y'' < 0;\end{aligned}$$

x_1 нуқтадан ўтишда иккинчи ҳосила ишорасини ўзгартиради. Демак, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ бўлганда эгри чизиқда бурилиш нуқта бор; унинг координаталари: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ бўлади;

$$\begin{aligned}x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } y'' < 0, \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } y'' > 0.\end{aligned}$$

Демак, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ бўлганда ҳам эгри чизиқда бурилиш нуқта бор; унинг координаталари: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Иккинчи бурилиш нуқтанинг мавжудлиги эгри чизиқнинг Оу ўққа нисбатан симметрик эканидан бевосита келиб чиқади.

4) Юқоридагидан ушбу натижа чиқади:

$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда эгри чизик ботик;

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда эгри чизик қаварик;

$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ бўлганда эгри чизик ботик.

5) Биринчи ҳосила

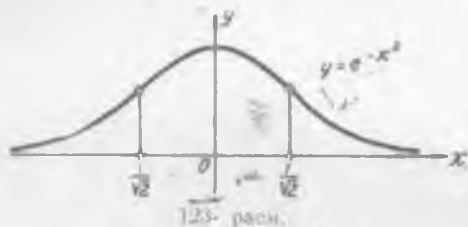
$$y' = -2xe^{-x^2}$$

ифодасидан ушбу натижалар чиқади:

$x < 0$ бўлганда $y' > 0$, яъни функция ўсади;

$x > 0$ " $y' < 0$, камаяди;

$x = 0$ " $y' = 0$.



Бу нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати; $y = 1$.
Утказилган текширишга асосан эгри чизик графигини чизиш осон (123- расм).

5- мисол. Ушбу

$$y = x^3$$

эгри чизикнинг бурилиш нуқталари топилсин.

Е ч и ш. 1) Иккинчи ҳосилани топамиз;

$$y'' = 12x^2.$$

2) $y'' = 0$ бўладиган нуқталарни аниқлаймиз;

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Топилган $x = 0$ қийматни текшираимиз;

$x < 0$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизик ботик;

$x > 0$ " $y'' > 0$ —

Демак, эгри чизикнинг бурилиш нуқталари йўқ (124- расм).

6- мисол. Ушбу

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

эгри чизикнинг бурилиш нуқталари топилсин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

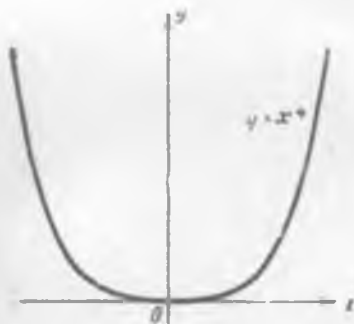
$$y' = \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9} (x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) Иккинчи ҳосила ҳеч бир нуқтада нолга айланмайди, лекин $x = 1$ бўлганда y'' мавжуд эмас ($y'' = \pm \infty$).

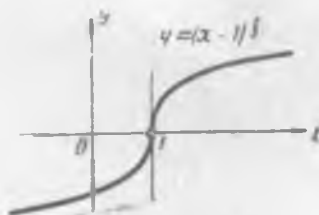
3) $x = 1$ қийматни текшираимиз:

$x < 1$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизиқ ботиқ;

$x > 1$. $y'' < 0$ — эгри чизиқ қавариқ.



124- расм.



125- расм.

Демак, $x = 1$ бўлганда бурилиш нуқтаси мавжуд; бу $(1; 0)$ нуқтадир.

$x = 1$ бўлганда $y' = \infty$, яъни бу нуқтада эгри чизиқ вертикал уринмага эга (125- расм).

10- §. Асимптоталар

Кўпинча $y = f(x)$ эгри чизиқнинг шаклини текширишда тўғри келади, бунинг учун эса, ўзгарувчи нуқта абсциссаси ёки ординатаси, ёки абсциссаси ва ординатаси бир вақтда (абсолют қиймати бўйича) чексиз ўсганда тегишли функциянинг ўзгариш характерини текширишга тўғри келади. Бунда текшириляётган эгри чизиқ, унинг ўзгарувчи нуқтаси чексиз*) узоқлашганда, биронта тўғри чизиққа чексиз яқинлашадиган ҳоли мўҳим хусусий ҳолдир.

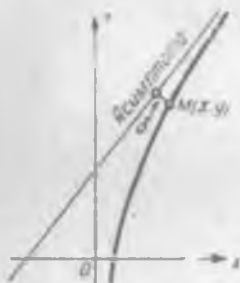
Таъриф. Агар эгри чизиқнинг ўзгарувчи M нуқтаси чексиз узоқлашганда унинг бирон A тўғри чизиқдан масофаси 0 нолга интилса, A тўғри чизиқ эгри чизиқнинг *асимптотаси* деб аталади (126- ва 127- расмлар).

Бундан буён *вертикал* (яъни ордината ўқига параллел) ва *оғма* (яъни ордината ўқига параллел бўлмаган) асимптоталарни бир-биридан фарқ қиламиз.

*) Агар ўзгарувчи M нуқта эгри чизиқ устида шундай ҳаракат қилсаки, у нуқтанинг координаталар бошидан масофаси чексиз ўсса, бу ҳолда ўзгарувчи нуқта эгри чизиқ бўйича чексизликка ҳаракат қилгани деймиз.

1. Вертикал асимптоталар

Асимптотанинг таърифидан, агар $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, у ҳолда $x=a$ тўғри чизиқ $y=f(x)$



126- расм.

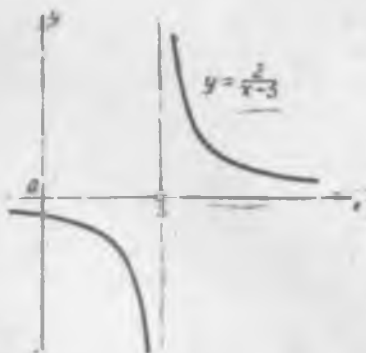


127- расм.

эгри чизиқнинг асимптотаси эканлиги чиқади; ва аксинча, агар $x=a$ тўғри чизиқ асимптота бўлса, ёзилган тенгдиклардан бири бажарилади.

Демак, $y=f(x)$ эгри чизиқнинг вертикал асимптоталарини топиш учун абсциссанинг шундай $x=a$ қийматларини топиш ке-

ракки, x шу сонларга яқинлашганда $y=f(x)$ функция чексизликка интилсин. Бу ҳолда $x=a$ тўғри чизиқ берилган эгри чизиқнинг вертикал асимптотаси бўлади.



128- расм.

1- мисол. $y = \frac{2}{x-5}$ эгри чизиқ $x=5$ вертикал асимптотага эга, чунки $x \rightarrow 5$ бўлганда $y \rightarrow \infty$ бўлади (128-расм).

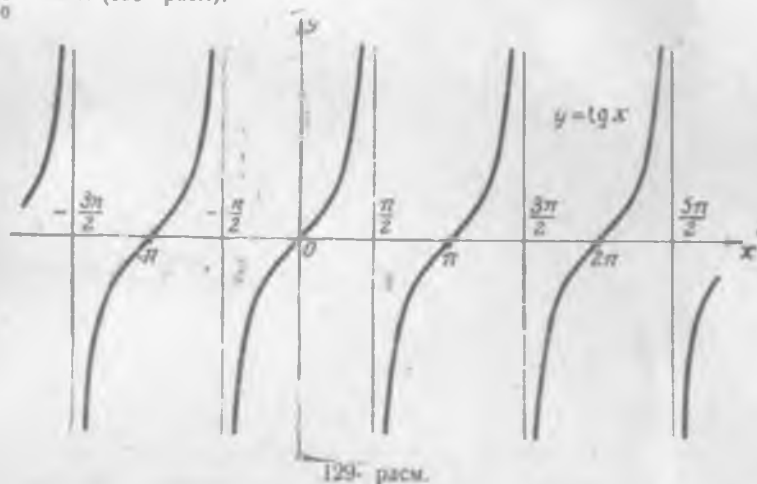
2- мисол. $y = \lg x$ эгри чизиқ чексиз кўп вертикал асимптоталарга эга:

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{2},$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Бу эса $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$, ёки $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$ қийматларга инти-
ганда $(\lg x)$ нинг чексизликка $(\lg x \rightarrow \infty)$ интилишидан келиб чиқади
(129- расм).

3- мисол. $y = e^{\frac{1}{x}}$ эгри чизик $x = 0$ вертикал асимптотага эга, чунки
 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (130- расм).



II. Оғма асимптоталар. $y = f(x)$ эгри чизик оғма
асимптотага эга бўлиб, унинг тенгламаси

$$y = kx + b \quad (1)$$

бўлсин, k ва b сонларни аниқлаймиз (131- расм). Фараз қилай-
лик, $M(x, y)$ — эгри чизикда ётган нуқта ва $N(x, y)$ — асимп-
тотада ётган нуқта бўлсин. MP кесманинг узунлиги M нуқта-
дан асимптотагача бўлган масофага тенг. Шартга кўра

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} MP = 0. \quad (2)$$

Агар асимптотанинг Ox ўққа оғиш бурчагини φ билан белги-
ласак, NMP учбурчакдан:

$$NM = \frac{MP}{\cos \varphi}$$

бўлади. φ — ўзгармас $(\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлмаган) бурчак, шунинг
учун олдинги тенгликдан

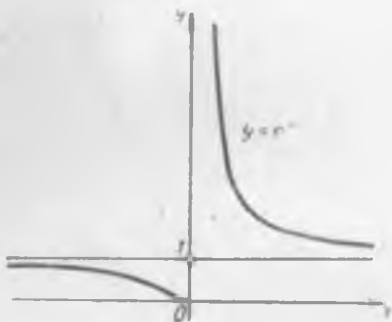
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} NM = 0 \quad (2')$$

келиб чиқади, ва аксинча, (2') тенгликдан (2) тенглик келиб чиқади. Лекин

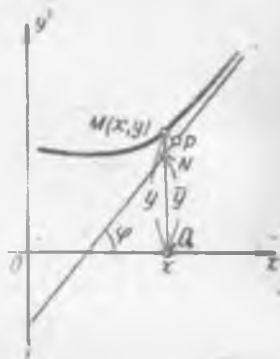
$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

ва (2') тенглик

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad (3)$$



130- расм.



131- расм.

қурилишга келади. Шундай қилиб, (1) тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлса, (3) тенглик бажарилади, ва аксинча, k, b — ўзгармас сонлар бўлганда (3) тенглик бажарилса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади. Энди k ва b ни топамиз. Бунинг учун (3) тенгликда x ни қавсдан ташқарига чиқариб, ушбу шаклда ёзамиз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Биринчи купайтувчи x чексизликка интилади ($x \rightarrow +\infty$), шунга кўра ушбу тенглик бажарилиши керак:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

b ўзгармас бўлганда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0,$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

k ни топгандан сўнг, (3) тенгликдан b ни топамиз:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (5)$$

Демак, агар $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлса, k ва b (4) ва (5) формулалардан топилади. Аксинча, агар (4) ва (5)- лимитлар мавжуд бўлса, (3) тенглик бажарилади ва $y = kx + b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади. Агар (4) ва (5)- лимитлардан биттаси мавжуд бўлмаса, y ҳолда эгри чизиқ асимптотага эга бўлмайди.

Биз текширишни 131- расмга тўғри келадиган $x \rightarrow +\infty$ ҳол учун ўтказдик, лекин муҳокамамининг барчаси $x \rightarrow -\infty$ ҳол учун ҳам тўғридир.

4- мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

эгри чизиқнинг асимптоталари топилсин.

Е ч и ш. 1) Вертикал асимптоталарни ахтарамиз:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow -0 \text{ бўлганда } y \rightarrow +\infty, \\ x &\rightarrow +0 \quad , \quad y \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Демак, $x = 0$ тўғри чизиқ берилган эгри чизиқнинг вертикал асимптотасидир.

2) Оғма асимптоталарни ахтарамиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right] = 1,$$

яъни

$$\begin{aligned} k &= 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2, \end{aligned}$$

яъни

$$b = 2.$$

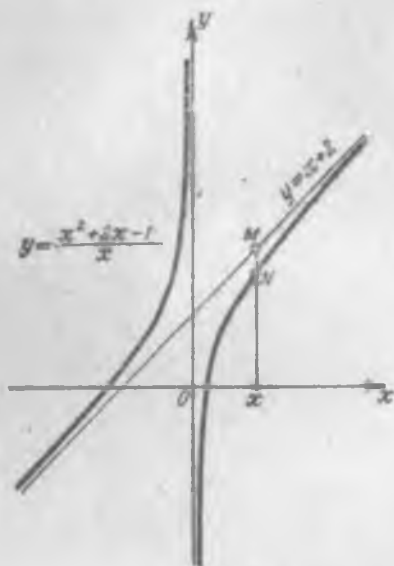
Демак,

$$y = x + 2$$

тўғри чизиқ берилган эгри чизиқнинг оғма асимптотасидир.

Эгри чизиқ билан асимптотанинг бир-бирига нисбатан турган ҳолатини текшириш учун x нинг битта қийматига тегишли эгри чизиқ нуқтасининг ординатаси билан асимптота нуқтасининг ординатаси орасидаги айирмани қараймиз:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$



132- расм.

Берилган эгри чизик $x \rightarrow -\infty$ да асимптоталарга эга бўлмайди. Ҳақиқатан, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x}$ мавжуд эмас, чунки

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1.$$

(Бу ифодада $x \rightarrow -\infty$ да биринчи қўшилувчи чексиз ўсади ва, демак, лимитга эга эмас.)

11- §. Функцияларни текширишнинг умумий плани ва графиклар яшаш

“Функцияни текшириш”дан одатда қуйидагиларни:

- 1) Функция мавжудлигининг табиий соҳасини,
- 2) функциянинг узилиш нуқталарини,
- 3) функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини,
- 4) максимум ва минимум нуқталарни, шунингдек функциянинг максимал ва минимал қийматларини,
- 5) графикнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини, бурилиш нуқталарини,
- 6) функция графиксининг асимптоталарини топиш тушунилади.

$x > 0$ бўлганда бу айirma манфий, $x < 0$ бўлганда эса мусбат; демак, $x > 0$ бўлганда эгри чизик асимптотадан пастда, $x < 0$ бўлганда асимптотадан юқорида бўлади (132- расм).

5- мисол. Ушбу

$$y = e^{-x} \sin x + x$$

эгри чизикнинг асимптоталарни топишсин.

Ечиш. 1) Вертикал асимптоталарнинг йўқлиги қўрилиб турибди.

2) Огма асимптоталарни излаймиз:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0. \end{aligned}$$

Демак, $y = x$ тўғри чизик $x \rightarrow +\infty$ да огма асимптотадир.

Ўтказилган текширишга асосан функциянинг графиги яса-лади (баъзан, текшириш давомида график элементларини бел-гилаб бориш фойдали бўлади).

1-изоҳ. Агар текшириладиган функция $y = f(x)$ *жуфт*, яъни аргументнинг ишораси ўзгарганда функциянинг қиймати ўзгармаса, яъни

$$f(-x) = f(x)$$

булса, функциянинг аниқланиш соҳасида аргументнинг фақат мусбат қийматларида функцияни текшириш ва графигини ясаш кифоя. Аргументнинг манфий қийматлари учун функция гра-фигини ясашда жуфт функция графиги ордината ўқига нисба-тан симметрик бўлишидан фойдаланилади.

1-мисол. $y = x^2$ жуфт функция, чунки $(-x)^2 = x^2$ (5-расмга қаранг).

2-мисол. $y = \cos x$ жуфт функция, чунки $\cos(-x) = \cos x$ (16-расмга қаранг).

2-изоҳ. Агар $y = f(x)$ *тоқ* функция, яъни аргумент ишо-раси ўзгарганда функциянинг ишораси ҳам ўзгарса, яъни $f(-x) = -f(x)$ булса, бу функцияни аргументнинг фақат мусбат қийматлари учун текшириш кифоя. Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

3-мисол. $y = x^3$ тоқ функция, чунки $(-x)^3 = -x^3$ (7-расмга қа-ранг).

4-мисол. $y = \sin x$ тоқ функция, чунки $\sin(-x) = -\sin x$ (15-расм-га қаранг).

3-изоҳ. Функциянинг бир неча хоссасини билиш унинг бошқа хоссалари ҳақида хулоса чиқаришга имкон беради, шу-нинг учун баъзан текшириш тартибини берилган функциянинг конкрет хусусиятларига қараб белгилаш мақсадга мувофиқ бў-лади. Масалан, агар функциянинг узлуксиз ва дифференциал-ланувчи эканини аниқлаган ҳамда унинг максимум ва минимум нуқталарини топган бўлсак, шу билан функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини ҳам аниқлаган бўламиз.

5-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

функция текширилсин ва графиги ясалсин.

Ечиш. 1) Функциянинг мавжудлик соҳаси $-\infty < x < \infty$ интервал-дир, $x < 0$ бўлганда $y < 0$ бўлади, $x > 0$ бўлганда эса $y > 0$ бўлади.

2) Функция ҳамма ерда узлуксиз.

3) Функцияни максимум ва минимумга текширамыз. Ушбу

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

тенгликдан критик нуқталарни топамиз:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Критик нуқталарнинг характерини текшираемиз:

$$x < -1 \text{ бўлганда } y' < 0,$$

$$x > -1 \text{ бўлганда } y' > 0.$$

Демак, $x = -1$ нуқтада функция минимумга эга:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0,5.$$

Сўнгра,

$$x < 1 \text{ бўлганда } y' > 0,$$

$$x > 1 \quad . \quad y' < 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада функция максимумга эга:

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0,5.$$

4) Функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини аниқлаймиз:

$$-\infty < x < -1 \text{ бўлганда } y' < 0 \text{ — функция камаяди,}$$

$$-1 < x < 1 \text{ бўлганда } y' > 0 \text{ — функция ўсади,}$$

$$1 < x < \infty \text{ бўлганда } y' < 0 \text{ — функция камаяди.}$$

5) Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини па бурилиш нуқталарини аниқлаймиз, ушбу

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^2} = 0$$

тенгликдан

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

y'' ни x нинг функцияси каби текшириб, қуйидагиларни топамиз:

$$-\infty < x < -\sqrt{3} \text{ бўлганда } y'' < 0 \text{ — эгри чизиқ қавариқ,}$$

$$-\sqrt{3} < x < 0 \text{ бўлганда } y'' > 0 \text{ — эгри чизиқ ботиқ,}$$

$$0 < x < \sqrt{3} \quad . \quad y'' < 0 \text{ — эгри чизиқ қавариқ,}$$

$$\sqrt{3} < x < +\infty \quad . \quad y'' > 0 \text{ — эгри чизиқ ботиқ.}$$

Демак, координаталари: $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ бўлган нуқта бурилиш нуқтадир; худди шунингдек $(0, 0)$ ва $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ нуқталар ҳам бурилиш нуқталардир.

6) Эгри чизиқнинг асимптоталарини аниқлаймиз:

$$x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 0,$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ да } y \rightarrow 0.$$

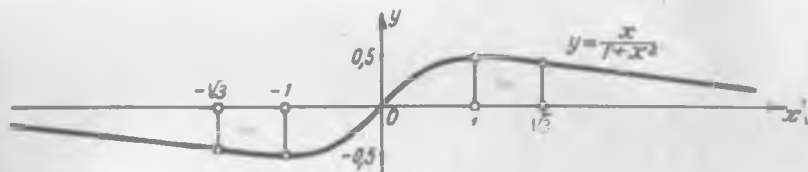
Демак $y = 0$ тўғри чизиқ ягона оғма асимптотадир. Эгри чизиқнинг вертикал асимптотаси йўқ, чунки x нинг ҳеч қандай чекли қийматида функция чексизликка интилмайди.

Текширилган функциянинг графиги 133- расмда тасвирланган.
6- м и с о л. Ушбу функция

$$y = \sqrt[3]{2ax^3 - x^3}$$

текширилсин ва графиги ясалсин.

Е ч и ш. 1) Функция x нинг барча қийматлари учун аниқланган.



133- расм.

2) Функция ҳама ерда узлуксиз.

3) Функцияни максимум ва минимумга текширамыз:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^3 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}$$

Ҳосила ушбу

$$x_1 = 0 \text{ ва } x_2 = 2a$$

икки нуқтадан бошқа ҳама ерда мавжуддир.

Ҳосиланинг $x \rightarrow 0$ ва $x \rightarrow +0$ шартлардаги чегаравий қийматларини текширамыз:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = +\infty;$$

$x < 0$ бўлганда $y' < 0$, $x > 0$ бўлганда $y' > 0$.

Демак, $x = 0$ бўлганда функция минимумга эга. Функциянинг қиймати бу нуқтада нолга тенг.

Энди функцияни иккинчи $x_2 = 2a$ критик нуқтада текширамыз. $x \rightarrow 2a$ да ҳам ҳосила чексизликка интилади. Аммо x нинг $2a$ га яқин ($2a$ дан ҳам чапда ва ҳам ўнгда) бўлган ҳама қийматлари учун ҳосила манфий. Демак, бу нуқтада функция максимумга ҳам эга эмас. $x_2 = 2a$ нуқтада ва унинг яқинидаги нуқталарда функция камаяди; эгри чизиққа шу нуқтадаги уринма вертикалдир.

$x = \frac{4a}{3}$ бўлганда ҳосила нолга айланади. Бу критик нуқтанинг характерини текширамыз. Биринчи ҳосиласининг ифодасини қараб чиқиб, $x < \frac{4a}{3}$ бўлганда $y' > 0$, $x > \frac{4a}{3}$ бўлганда $y' < 0$ бўлишини кўрамыз.

Демак, $x = \frac{4a}{3}$ бўлганда функция максимумга эга:

$$y_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

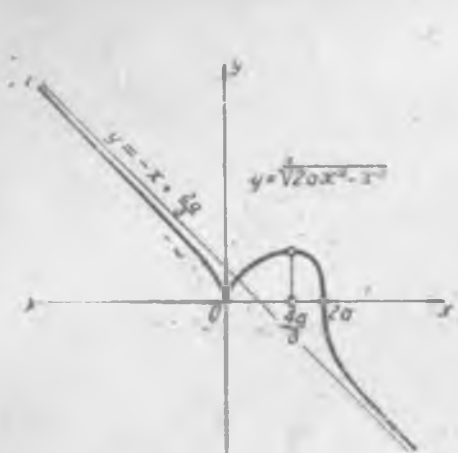
4) Утказилган текширишга асосан функциянинг ўсмиш ва камаядиган соҳаларини ҳосил қиламиз:

$-\infty < x < 0$ да функция камаяди,

$0 < x < \frac{4a}{3}$ да . ўсади,

$\frac{4a}{3} < x < \infty$ да . камаяди.

5) Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини ҳамда бурилиш нуқталарини аниқлаймиз: иккинчи ҳосила



$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{\frac{2}{3}}(2x - x)^{\frac{2}{3}}}$$

ҳеч бир нуқтада нолга айланмайди. Лекин икки нуқта борки, уларда иккинчи ҳосила узилади; улар $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2a$ нуқталардир.

Бу нуқталарнинг ҳар бири яқинида иккинчи ҳосила ишорасини текшираемиз:

$x < 0$ бўлганда $y' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган.

$x > 0$ бўлганда $y'' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган.

Демак, абсциссаси $x = 0$ бўлган нуқта бурилиш нуқта эмас.

$x < 2a$ бўлганда $y'' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган; $x > 2a$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга қараган.

Демак, эгри чизиқнинг $(2a; 0)$ нуқтаси бурилиш нуқтадир.

6) Эгри чизиқнинг асимптоталарини аниқлаймиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x}} - 1 = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$

134-расм.

Демак,

$$y = -x + \frac{2a}{3},$$

тўғри чизик $y = \sqrt{2ax^3 - x^3}$ эгри чизикнинг огма асимптотасидир.
Текширилган функциянинг графиги 134- расмда тасвирланган.

12- §. Параметрик шаклда берилган эгри чизикларни текшириш

Эгри чизик параметрик тенгламалар

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

билан берилган бўлсин. Бу ҳолда эгри чизикни текшириш ва ясаш юқорида

$$y = f(x)$$

тенглама билан берилган эгри чизикда бажарилгани каби ўтказилади. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t). \end{cases} \quad (2)$$

Берилган эгри чизикнинг шундай нуқталарида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (3)$$

ҳосилани ҳисоблаймизки, бу нуқталар яқинида эгри чизик бирор $y = f(x)$ функциянинг графиги бўлсин. t параметрнинг $\varphi'(t)$ ёки $\psi'(t)$ ҳосилалардан биттасини бўлса ҳам нолга айлантирадиган ёки ўзилишга дучор бўлган $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ қийматларини толамиз. (t нинг бундай қийматларини критик қийматлар деб атаيمиз.) (3) формула бўйича $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{k-1}, t_k)$ интервалларнинг ҳар бирида, демак,

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$$

[бу ерда $x_i = \varphi(t_i)$] интервалларнинг ҳар бирида $\frac{dy}{dx}$ нинг ишорасини аниқлаймиз; шу билан функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини аниқлаган бўламиз. Бу шунингдек параметрнинг $t_1, t_2, \dots, t_k$ қийматларига мос нуқталарнинг характерини аниқлашга ҳам имкон беради. Сўнгра $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}. \quad (4)$$

Бу формулага асосан ҳар бир нуқтада эгри чизиқ кавариклигининг йўналишини аниқлаймиз.

Асимптоталарни топиш учун t нинг шундай қийматларини топамизки, уларга яқинлашганда x ёки y чексизликка интилсин ва t нинг яна шундай қийматларини топамизки, уларда ҳам x , ҳам y чексизликка интилсин. Сунгра текширишни одатдаги усул билан ўтказамиз.

Параметрик шаклда берилган эгри чизиқларни текширишда пайдо бўладиган баъзи хусусиятларни мисолларда аниқлаймиз.

1- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (1')$$

тенгламалар билан берилган эгри чизиқ текширилсин.

Ечиш. x ва y миқдорлар t нинг барча қийматлари учун аниқланган. Аммо $\cos^3 t$ ва $\sin^3 t$ функциялар—даврий функциялар ва уларнинг даври 2π бўлгани учун параметр t нинг ўзгаришини 0 дан 2π гача бўлган чегарада қараш kifоя; бунда x нинг ўзгариш соҳаси $[-a, a]$ кесма бўлади ва y нинг ўзгариш соҳаси $[-a, a]$ кесма бўлади. Демак, қаралаётган эгри чизиқнинг асимптоталари йўқ.

$\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Бу ҳосилалар $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ бўлганда нолга айланади. $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t. \quad (3')$$

(2') ва (3') формулаларга асосан ушбу жадвални тузамиз:

t нинг ўзгариш соҳаси	x нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	y нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	$\frac{dy}{dx}$ нинг ншораси	y ни x нинг функцияси $y=f(x)$ сифатида ўзгаришининг характери
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	камаяди
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	ўсади
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	камаяди
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	ўсади

Жадвалдан кўриладики, (1') тенглама $y = f(x)$ кўринишдаги иккита узлуксиз функцияни белгилайди. $0 < t < \pi$ бўлганда $y > 0$ (жадвалнинг биринчи ва иккинчи йўлига қаралсин), $\pi < t < 2\pi$ бўлганда, $y < 0$ (жадвалнинг учинчи ва тўртинчи йўлига қаралсин). (3') формуладан

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dt} = \infty$$

ва

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dt} = \infty$$

эквалиги келиб чиқади. Бу нуқталарда эгри чизикқа уринма вертикал бўлади. Яна ўша (3') формуладан ушбуларни топамиз:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\pi} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2\pi} = 0.$$

Бу нуқталарда эгри чизикқа уринма горизонтал бўлади. Энди $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топамиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

Бундан кўрамизки:

$0 < t < \pi$ бўлганда $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ — эгри чизик ботиқ,

$\pi < t < 2\pi$ бўлганда $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ — эгри чизик қавариқ.

Текшириш натижаларига асосан эгри чизикни ясаймиз (135- расм). Бу эгри чизик *астроиди* деб аталади.

2- м и с о л. Ушбу тенгламалар

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^3}{1+t^3} \quad (1'')$$

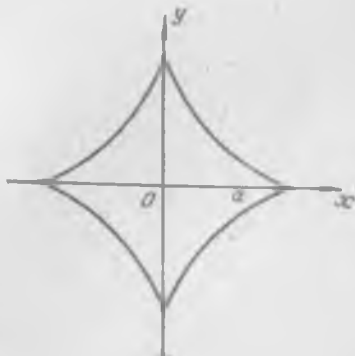
билан берилган эгри чизик ясалсин (*Декарт барги*).

Еч и ш. Функцияларнинг нқкаласи ҳам t нинг, $t = -1$ дан бошқа, ҳамма қийматларида аниқланган. $t \rightarrow -1$ да:

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} x = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} y = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^3}{1+t^3} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} y = +\infty.$$



135- расм.

Сўнгра:

$$\begin{aligned} t=0 & \text{ да } x=0, & y=0, \\ t \rightarrow +\infty & \text{ да } x \rightarrow 0, & y \rightarrow 0, \\ t \rightarrow -\infty & \text{ да } x \rightarrow 0, & y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Энди $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ни топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \quad (2')$$

t учун ушбу критик қийматларни ҳосил қиламиз:

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4 = \sqrt[3]{2}.$$

$\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2} - t^3\right)} \quad (3')$$

(1'), (2'), (3') формулаларга асосан ушбу жадвални тузамиз:

t нинг ўзгариш соҳаси	x нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	y нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	$\frac{dy}{dx}$ нинг ишораси	$y=f(x)$ функцияси ($y=f(x)$) сифатидан ўзгаришининг характери
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	-	камаяди
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	-	камаяди
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	+	ўсади
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	-	камаяди
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	ўсади

(3') формуладан қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0 \\ (x=0, y=0)}} &= 0, & \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ (x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}, y=\frac{a}{\sqrt[3]{2}})}} &= \infty, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=-1 \\ (x=-a, y=a)}} &= 0, & \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ (x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}, y=\frac{a}{\sqrt[3]{2}})}} &= \infty. \end{aligned}$$

Демак, эгри чизиқ координаталар бошини икки марта Ox ўққа параллел уриниш билан ва Oy ўққа параллел уриниш билан кесиб ўтади.

Энди t_3 нуқтани текшираимиз:

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \infty \quad (x = a\sqrt[3]{4}, \quad y = a\sqrt[3]{2}).$$

Бу нуқтада эгри чизиққа уринма вертикал. t_4 нуқтани текшираимиз:

$$t = \sqrt[3]{2} \text{ бўлганда } \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}).$$

Бу нуқтада эгри чизиққа уринма горизонтал. Асимптотанинг мавжудлик масаласини текшираимиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1) \frac{3at}{1+t^3} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Демак, $y = -x - a$ тўғри чизиқ эгри чизиқнинг $x \rightarrow +\infty$ даги тармоғининг асимптотаси бўлади.

Шунинг сингари қуйидагиларни топаимиз:

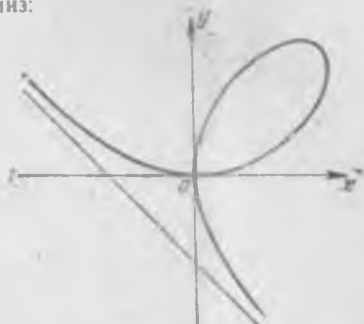
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -a.$$

Демак, топилган тўғри чизиқ эгри чизиқнинг $x \rightarrow -\infty$ даги тармоғининг ҳам асимптотаси бўлади.

Ўтказилган текширишга асосан эгри чизиқни асаймиз (136- расм).

Эгри чизиқларни текшириш билан боғлиқ бўлган баъзи масалалар VIII бобнинг 19- § „Эгри чизиқнинг махсус нуқталари“ да қўшимча равишда қараб чиқилади.



136- расм.

V бобга машқлар

Функцияларнинг экстремумлари топилсин: 1. $y = x^3 - 2x + 3$. Жав. $x=1$ да $y_{\min} = 2$. 2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Жав. $x=1$ да $y_{\max} = \frac{7}{2}$, $x=3$ да $y_{\min} = 1$. 3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. Жав. $x=1$ да $y_{\max} = 10$, $x=5$ да $y_{\min} = -22$. 4. $y = -x^4 + 2x^2$. Жав. $x = \pm 1$ да $y_{\max} = 1$, $x=0$ да, $y_{\min} = 0$. 5. $y = x^4 - 8x^3 + 2$. Жав. $x=0$ да $y_{\max} = 2$, $x = \pm 2$ да $y_{\min} = -14$. 6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160$. Жав. $x = -4$ ва $x=3$ да максимум, $x=-3$ ва $x=4$ да минимум. 7. $y = 2 - (x-1)^{3/2}$. Жав. $x=1$ да $y_{\max} = 2$. 8. $y = 3 - 2(x+1)^{1/3}$. Жав. максимум ҳам, минимум ҳам йўқ. 9. $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 3x + 2}$. Жав. $x = \sqrt[3]{2}$ да минимум, $x = -\sqrt[3]{2}$ да максимум. 10. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

Жав. $x = \frac{12}{5}$ да максимум. 11. $y = 2e^x + e^{-x}$. Жав. $x = -\frac{\ln 2}{2}$ да минимум.

12. $y = \frac{x}{\ln x}$. Жав. $x = e$ да $y_{\min} = e$. 13. $y = \cos x + \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Жав. $x = \frac{\pi}{4}$ да $y_{\max} = \sqrt{2}$. 14. $y = \sin 2x - x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Жав. $x = \frac{\pi}{6}$ да минимум. $x = -\frac{\pi}{6}$ да максимум. 15. $y = x + \lg x$.

Жав. максимум ҳам, минимум ҳам йўқ. 16. $y = e^x \sin x$. Жав. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ да максимум, $x = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$ да минимум. 17. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Жав. $x = 0$ да максимум; $x = -1$ да минимум; $x = 1$ да минимум. 18. $y = (x - 2)^2 \times$

$\times (2x + 1)$. Жав. $x = \frac{1}{8}$ да $y_{\min} \approx -8,24$. 19. $y = x + \frac{1}{x}$.

Жав. $x = 1$ да минимум; $x = -1$ да максимум. 20. $y = x^2 (a - x)^2$.

Жав. $x = \frac{a}{2}$ да $y_{\max} = \frac{a^4}{16}$; $x = 0$ ва $x = a$ да $y_{\min} = 0$. 21. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}$.

Жав. $x = \frac{a^2}{a - b}$ да максимум; $x = \frac{a^2}{a + b}$ да минимум. 22. $y = x + \sqrt{1 - x}$.

Жав. $x = \frac{3}{4}$ да $y_{\max} = \frac{5}{4}$; $x = 1$ да $y_{\min} = 1$. 23. $y = x \sqrt{1 - x} \ (x < 1)$.

Жав. $x = \frac{2}{3}$ да $y_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$. 24. $y = \frac{x}{1 + x^2}$. Жав. $x = -1$ да мини-

мум; $x = 1$ да максимум. 25. $y = x \ln x$. Жав. $x = \frac{1}{e}$ да минимум. 26. $y =$

$= x \ln^2 x$. Жав. $x = e^{-2}$ да $y_{\max} = 4e^{-2}$, $x = 1$ да $y_{\min} = 0$. 27. $y = \ln x -$

$- \operatorname{arctg} x$. Жав. Функция ўсади. 28. $y = \sin 3x - 3 \sin x$. Жав. $x = \frac{\pi}{2}$ да

минимум; $x = \frac{3\pi}{2}$ да максимум. 29. $y = 2x + \operatorname{arctg} x$. Жав. Экстремумлар

йўқ. 30. $y = \sin x \cos^3 x$. Жав. $x = \frac{\pi}{2}$ да минимум; $x = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ да ва

$x = \arccos \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ да максимум. 31. $y = \arcsin(\sin x)$. Жав. $x = \frac{(4m+1)\pi}{2}$

да максимум; $x = \frac{(4m+3)\pi}{2}$ да минимум.

Ушбу функцияларнинг кўрсатилган кесмаларда энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин. 32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1 \ (-2 < x < 2)$. Жав. $x = \pm 1$ да $y = 2$ — энг катта қиймат. $x = \pm 2$ да $y = -25$ — энг кичик қиймат.

33. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \ (-1 < x < 5)$. Жав. $x = 5$ да $y =$

$= \frac{23}{3}$ — энг катта қиймат, $x = -1$ да $y = -\frac{13}{3}$ — энг кичик қиймат. 34. $y =$

$= \frac{x-1}{x+1} \ (0 < x < 4)$. Жав. $x = 4$ да $y = \frac{3}{5}$ — энг катта қиймат, $x = 0$ да $y =$

$= -1$ энг кичик қиймат. 35. $y = \sin 2x - x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Жав. $x =$

$= -\frac{\pi}{2}$ да $y = \frac{\pi}{2}$ — энг катта қиймат, $x = \frac{\pi}{2}$ да $y = -\frac{2}{\pi}$ — энг кичик қиймат.

36. Томони a бўлган квадрат шаклдаги тунукадан мумкин қадар катта ҳажмли усти очик яшнқ ясаш керак. Бунинг учун тунуканинг тўртала бурчагидан тенг квадратлар қирқиб олинади ва четларини буклаб, яшнқнинг ёнлари ҳосил қилинади. Қирқиб олиннадиган квадратлар томонининг узунлиги топилсин. *Жав.* $\frac{a}{6}$.

37. Берилган доирага ички чизилган тўғри тўртбурчаклардан энг катта юзга эга бўлгани квадрат эканлиги исбот қилинсин. Квадратнинг периметри ҳам энг катта бўлиши кўрсатилсин.

38. Доирага ички чизилган тенг ёнли учбурчаклардан энг катта периметрга эга бўлгани тенг томонли учбурчак эканлиги кўрсатилсин.

39. Гипотенузасининг узунлиги h бўлган тўғри бурчакли учбурчаклардан энг катта юзга эга бўлгани топилсин. *Жав.* Ҳар бир катети $\frac{h}{\sqrt{2}}$ га тенг бўлади.

40. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. *Жав.* Баландлиги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ га тенг.

41. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг катта ён сиртга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. *Жав.* Баландлиги $R\sqrt{2}$ га тенг.

42. Радиуси R бўлган шарга ташқи чизилган энг кичик ҳажмли тўғри конуснинг баландлиги топилсин. *Жав.* Баландлиги $4R$ га тенг (конуснинг ҳажми шар ҳажмининг иккитасига тенг).

43. Ости квадрат шаклида бўлиб, усти очик резервуарни (суюқлик сақланадиган идиш) ички томондан қўرғошин билан қоплаш керак. Сигими 32 л бўлган резервуарга энг кам миқдорда қўрғошин сарф бўлиши учун унинг ўлчовлари қандай бўлиши керак? *Жав.* Баландлиги 0,2 м, асосининг томони 0,4 м (яъни асосининг томони баландлигидан икки марта катта бўлиши керак).

44. Тунукачи усти очик тарнов ясамоқчи. Тарнов туби ва ёнларининг кенлиги 10 см дан бўлиб, сигими энг катта бўлиши учун устининг кенлиги қандай бўлиши керак? *Жав.* 20 см.

45. Маълум ҳажмга эга бўлган конус шаклдаги чодирнинг баландлиги асосининг радиусидан $\sqrt{2}$ марта катта бўлганда, унга энг кам материал кетиши исботлансин.

46. Усти очик, девори ва асоси маълум қалинликда бўлган цилиндр ясаш керак. Уни талаб қилинган ҳажмда, энг кам материалдан ясаш учун ўлчовларини қандай олиш керак? *Жав.* Агар R — цилиндр ички асосининг радиуси, h — ички ҳажми бўлса, $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ бўлиши керак.

47. Усти ва остидан ярим сфералар билан тугайдиган цилиндр шаклда ва девори бир хил қалинликда бўлган қозон ясаш керак. Унинг ҳажми v га тенг бўлиб, ташқи сирти энг кичик бўлсин. *Жав.* Қозон шар шаклида бўлиб, ички радиуси $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ бўлиши керак.

48. Юзи S ва периметри энг кичик бўлган тенг ёнли трапеция ясалсин; трапециянинг асосидаги бурчак α га тенг. *Жав.* Ён томонининг узунлиги $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$ га тенг.

49. Радиуси R бўлган шар ичига энг катта ҳажмга эга бўлган мунтазам уч бурчакли призма чизилсин. *Жав.* Призманинг баландлиги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ га тенг.

50. Радиуси R бўлган ярим шарга энг кичик ҳажмли ташқи конус ясаш керак; конуснинг асоси ярим шар асосида бўлади; конуснинг баландлиги топилсин. *Жав.* Конуснинг баландлиги $R\sqrt{3}$ га тенг.

51. Радиуси r бўлган цилиндрга энг кичик ҳажмли ташқи тўғри конус чизилсин; цилиндр ва конус доиравий асосларининг текисликлари ва уларнинг марказлари бир-бирининг устига тушади деб фараз қилинади. *Жав.* Конус асосининг радиуси $\frac{3}{2}r$ га тенг.

52. Радиуси R бўлган доира шаклидаги тунокадан шундай сектор қийиб олинсинки, уни ўраб ясалган воронка энг катта ҳажмга эга бўлсин. *Жав.* Секторнинг марказий бурчаги $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ га тенг.

53. Қирраси a бўлган куб ичига қуйидагича қилиб цилиндрлар ясалган: цилиндрларнинг ўқлари куб диагонали билан устма-уст тушади, асосларининг айланалари кубнинг ёқларига уринади. Шу цилиндрлардан энг катта ҳажмга эга бўлгани топилсин. *Жав.* Цилиндрнинг баландлиги $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ га, асосининг радиуси $\frac{a}{\sqrt{6}}$ га тенг.

54. Тўғри бурчакли координаталар системасининг биринчи квадратида (x_0, y_0) нуқта берилган. Бу нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, у координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан энг кичик юзан учбурчак ҳосил қилсин. *Жав.* Тўғри чизиқ координата ўқларидан $2x_0$ ва $2y_0$ кесмаларни кесади, яъни тенгламаси $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$ бўлади.

55. $y^2 = 2px$ парабола ўқида унинг учидан a масофада бир нуқта берилган; парабола устида шу нуқтага энг яқин турган нуқтанинг абсциссаси топилсин. *Жав.* $x = a - p$.

56. Кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлган ёғочнинг маҳкамчилигини энг ва баландлигининг кубига тўғри пропорционал деб қабул қилиб, диаметри 16 см бўлган гўладан кесиб олиннадиган тўрт қиррали ёғочнинг эни қандай бўлганда, у энг катта маҳкамликка эга бўлишини топинг. *Жав.* Эни 8 см га тенг бўлганда.

57. Миноносец қирғоқнинг энг яқин нуқтасидан 9 км масофада якорда турибди, миноносецдан ҳарбий лагерга хабарчи юбориш керак; лагер қирғоқ бўйлаб миноносецга энг яқин нуқтадан 15 км масофада жойлашган. Агар хабарчи пидеа соатига 5 км юрса, қайиқда эса соатига 4 км йўл босса, лагерга энг қисқа вақтда етиб бориш учун қирғоқнинг қандай нуқтида қайиқдан қирғоққа чиқиши керак? *Жав.* Лагердан 3 км масофада.

58. Нуқта текисликда MN чизикдан ташқари муҳитда U тезлик билан, MN чизиқ бўйлаб U_1 тезлик билан ҳаракат қилади. Энг қисқа вақт ичида A нуқтадан MN чизикдаги B нуқтага етиш учун нуқта қандай йўл билан бориши керак? A нуқтанинг MN чизикдан масофаси h га, A нуқтанинг MN чизикдаги проекцияси a нинг B дан масофаси Q га тенг. *Жав.* Агар нуқтанинг йўли ABC бўлса, $\frac{aB}{AB} > \frac{U_1}{U_2}$ бўлганда $\frac{aC}{AC} = \frac{U_1}{U_2}$ ва $\frac{aB}{AB} < \frac{U_1}{U_2}$ бўлганда $aC = aB$.

59. ω юк ричаг билан кўтарилмоқда; F куч ричагининг бир учига қўйилган, таянч нуқтаси ричагнинг иккинчи учиди. Агар юк таянч нуқтадан a см масофадаги нуқтага осилган, ричаг ўқи узунлигининг ҳар бир сантиметри

метридаги оғирлиги v грамм бўлса, юкни кўтаришга сарф бўладиган куч энг кам бўлиши учун ричагининг узунлиги қандай бўлиши керак? Жав. $x =$

$$= \sqrt{\frac{2aw}{v}} \text{ см.}$$

60. Номатлум x миқдорни n марта ўлчаганда ушбу сонлар топилди: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Агар x учун $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ сон қабул қилинса, ўлчаш хатолари квадратларининг йиғиндиси $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ энг кичик бўлиши кўрсатилсин.

61. Суюқликнинг канал деворига ишқаланишини мумкин қадар камайтириш учун сув тегадиган юз мумкин қадар кичик бўлиши керак. Қўндаланг кесими берилган тўғри тўрт бурчакли очиқ каналнинг эни баландлигидан икки марта катта бўлганда, у энг яхши шаклга эга бўлиши кўрсатилсин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг бурилиш нуқталари, қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

62. $y = x^2$. Жав. $x < 0$ да эгри чизиқ қавариқ; $x > 0$ да эгри чизиқ ботиқ; $x = 0$ бурилиш нуқтаси. 63. $y = 1 - x^2$. Жав. Эгри чизиқ ҳамма ерда қавариқ. 64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Жав. $x = 1$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 65. $y = (x - b)^2$. Жав. $x = b$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 66. $y = x^2$.

Жав. Эгри чизиқ ҳамма ерда ботиқ. 67. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Жав. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ да бурилиш нуқталари бўлади. 68. $y = \lg x$. Жав. $x = 1$ да бурилиш нуқталари бўлади. 69. $y = xe^{-x}$. Жав. $x = 2$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 70. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. Жав. $x = b$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 71. $y = a - \sqrt[5]{x - b}$. Жав. Эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси йўқ.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин:

72. $y = \frac{1}{x - 1}$. Жав. $x = 1, y = 0$. 73. $y = \frac{1}{(x + 2)^2}$. Жав. $x = -2; y = 0$. 74. $y = c + \frac{a^3}{(x - b)^4}$. Жав. $x = b, y = c$. 75. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. Жав. $x = 0; y = 0$. 76. $y = \ln x$. Жав. $x = 0$. 77. $y^2 = 6x^2 + x^3$. Жав. $y = x + 2$. 78. $y^2 = a^3 - x^3$. Жав. $y + x = 0$. 79. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Жав. $x = 2a$. 80. $y^2 (x - 2a) = x^3 - a^3$. Жав. $x = 2a; y = \pm (x + a)$.

Функциялар текширилсин ва графиклари ясалсин: 81. $y = x^4 - 2x + 10$.

82. $y = \frac{8a^2}{x^2 + 4a^2}$. 83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y = \frac{6x}{1 + x^2}$. 85. $y = \frac{4 + x}{x^2}$. 86. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. 87. $y = \frac{x + 2}{x^2}$. 88. $y = \frac{x^2}{1 + x}$. 89. $y^2 = x^3 - x$. 90. $y = \frac{x^2}{3 - x^2}$. 91. $y = \sqrt[3]{x^2} +$

$+ 2$. 92. $y = x - \sqrt[3]{x^2 + 1}$. 93. $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$. 94. $y = xe^{-x}$. 95. $y = x^2 e^{-x^2}$. 96. $y = x - \ln(x + 1)$. 97. $y = \ln(x^2 + 1)$. 98. $y = \sin 3x$. 99. $y = x + \sin x$.

100. $y = x \sin x$. 101. $y = e^{-x} \sin x$. 102. $y = \ln \sin x$. 103. $y = \frac{\ln x}{x}$. 104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Қўшимча масалалар.

- Қуйидаги чизиқларнинг асимптоталарни топилсин: 108. $y = \frac{x^2+1}{1+x}$. Жав. $x = -1$; $y = x - 1$. 109. $y = x + e^{-x}$. Жав. $y = x$. 110. $2y(x+1)^2 = x^3$. Жав. $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$. 111. $y^3 = a^3 - x^3$. Асимптоталар йўқ. 112. $y = e^{-2x} \sin x$. Жав. $y = 0$. 113. $y = e^{-x} \sin 2x + x$. Жав. $y = x$. 114. $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$. Жав. $x = -\frac{1}{e}$; $y = x + \frac{1}{e}$. 115. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. Жав. $x = 0$, $y = x$. 116. $x = \frac{2t}{1-t^2}$; $y = \frac{t^2}{1-t^2}$. Жав. $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
 Қуйидаги функциялар текширилсин ва графиклари ясалсин: 117. $y = |x|$. 118. $y = \ln |x|$. 119. $y^2 = x^3 - x$. 120. $y = (x+1)^2(x-2)$. 121. $y = x + |x|$. 122. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. 123. $y = x^2, \overline{x+1}$. 124. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$. 125. $y = \frac{x^2}{2} \ln x$. 126. $y = \frac{1}{e^x - 1}$. 127. $y = \frac{x}{\ln x}$. 128. $y = x + \frac{\ln x}{x}$. 129. $y = x \ln x$. 130. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. 131. $y = |\sin 3x|$. 132. $y = \frac{\sin x}{x}$. 133. $y = x \arctg x$. 134. $y = x - 2 \arctg x$. 135. $y = e^{-2x} \sin 3x$. 136. $y = |\sin x| + x$. 137. $y = \sin(x^2)$. 138. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. 139. $y = \frac{x+|x|}{2}$. 140. $y = \frac{x-|x|}{2}$. 141. $y = \sin \left(\frac{x+|x|}{2}\right) - \frac{x-|x|}{2} (-\pi < x < \pi)$. 142. $y = \cos \left(\frac{x-|x|}{2}\right) - \frac{x+|x|}{2} \left(-\frac{\pi}{2} < x < 1\right)$. 143. $y = \frac{1}{2}(3x + |x|) + 1$. 144. $y = \frac{1}{2}[3(x-1) + |x-1|] + 1 (0 < x < 2)$.

ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ

1- §. Ёйнинг узунлиги ва унинг ҳосиласи

Эгри чизиқнинг M_0M ёйи (137- расм) (a, b) интервалда аниқланган

$$y = f(x)$$

функциянинг графиги бўлсин. Эгри чизиқ ёйининг узунлигини аниқлаймиз, AB эгри чизиқда

$$M_0, M_1, M_2, \dots, M_{l-1}, M_l, \dots, M_{n-1}, M$$

нуқталарни оламиз. Олинган нуқталарни туташтириб M_0M ёйга ички чизилган $M_0M_1M_2 \dots M_{l-1}M_l \dots M_{n-1}M$ синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ узунлигини P_n билан белгилаймиз.

Агар M_0M ёйга ички чизилган $M_0M_1M_2 \dots M_{l-1}M_l \dots M_{n-1}M$ синиқ чизиқ узунлигининг унинг $M_{l-1}M_l$ кесмаларидан энг каттасининг узунлиги нолга интилгандаги лимити мавжуд бўлса ва у лимит орадаги $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ нуқталарни танлашга боғлиқ бўлмаса, шу лимит (уни s билан белгилаймиз) M_0M эгри чизиқ ёйининг узунлиги деб аталади.



137- расм.

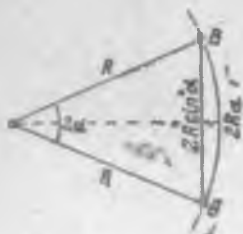
Ихтиёрий эгри чизиқ ёйи узунлигининг бу таърифи айлана узунлигининг таърифига ўхшаш эканини қайд қилиб ўтаемиз.

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция ва унинг $f'(x)$ ҳосиласи узлуксиз бўлса, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $[a, f(a)]$ ва $[b, f(b)]$ нуқталар билан чегараланган ёйи аниқ узунликка эга бўлиши XII бобда исбот қилинади ва шу узунликни ҳисоблаш йўли кўрсатилади. Кўрсатилган шартлар бажарилганда эгри чизиқнинг ҳар қандай ёйи узунлигининг уни тортиб турувчи ватар-

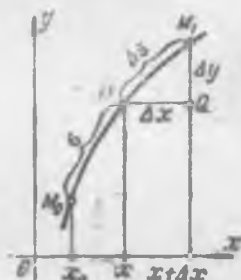
га нисбати, ватар узунлиги нолга интилганда, 1 га интилиши ҳам, яъни

$$\lim_{M_0, M \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_0}}{MM_0} = 1$$

уша ерда (натижа сифатида) аниқланади. Бу теорема айлана учун осонгина исбат қилиниши мумкин*), аммо умумий ҳолда уни ҳозирча исботсиз қабул қиламиз. Қуйидаги масалани қараб чиқамиз. Текисликда тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқ берилган деб фараз қилайлик. $M_0(x_0, y_0)$ — эгри чизиқнинг биронта тайин нуқтаси, $M(x, y)$ — шу эгри чизиқнинг ўзгарувчи нуқтаси бўлсин. M_0M ёйнинг узунлигини s билан белгилаймиз (138- расм).



138- расм.



139- расм.

M нуқтанинг абсциссаси x ўзгарганда ёй узунлиги s ҳам ўзгаради, яъни s x нинг функциясидир, s нинг x бўйича ҳосиласини топамиз.

x га Δx орттирма берамиз. Бунда s ёй $\Delta s = \overline{MM_1}$ узунлигича орттирма олади. $\overline{MM_1}$ — бу ёйни тортувчи ватар бўлсин. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ ни топиш учун қуйидагича киришамиз: $\Delta s = \overline{MM_1}$ дан

$$\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

*) AB ёйни қараймиз (138- расм), унинг марказий бурчаги 2α га тенг. Бу ёйнинг узунлиги $2R\alpha$ га тенг (R — айлананинг радиуси), уни тортиб турувчи ватарнинг узунлиги эса $2R \sin \alpha$ га тенг. Шунга кўра

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{AB} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2R\alpha}{2R \sin \alpha} = 1.$$

Бу тенгликнинг чап томонини Δs^2 га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\left(\frac{\Delta M_1}{\Delta s}\right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Бу тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δx^2 га бўламиз:

$$\left(\frac{\Delta M_1}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ шарти билан чап ва ўнг томонларининг лимитларини топамиз.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M_1}{\Delta s} = 1$ ва $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ эканини эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ёки } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (1)$$

Ёйнинг дифференциали учун ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

ёки*)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2')$$

Эгри чизик $y = f(x)$ тенглама билан берилган ҳол учун ёй узунлигининг дифференциали ифодасини топдик. Лекин эгри чизик параметрик тенгламалар билан берилганда ҳам (2') формула ўз кучини сақлайди.

Агар эгри чизик

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса,

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt$$

бўлади ва (2') ифода ушбу шаклни олади:

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

*) Қатъий айтганда (2') формула $dx > 0$ бўлган ҳолдагина тўғри. Агар $dx < 0$ бўлса, $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Шунинг учун формулани умумий ҳолда $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ шаклда ёзиш тўғрироқ бўлади,

2- §. Эгрилик.

Эгри чизиқ шаклини характерловчи элементлардан бири унинг эгрилик, эгилиш даражасидир.

Бизга берилган эгри чизиқ ўз-ўзини кесмайди ва ҳар бир нуқтасида аниқ уринмага эга деб фараз қиламиз. Эгри чизиққа унинг ихтиёрий иккита A ва B нуқталарида уринмалар ўтказамиз ва шу уринмалар орасида ҳосил бўлган бурчакни — аниқроғи уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги айланиш бурчагини α билан белгилаймиз (140- расм). Бу бурчак AB ёйнинг *қўшнилик бурчаги* деб аталади. Узунликлари бир хил бўлган иккита ёйнинг қайси бирида қўшнилик бурчаги катта бўлса, уша ёй кўпроқ эгилган бўлади (140 ва 141- расмлар).



140- расм.



141- расм.

Иккинчи томондан ҳар хил узунликдаги ёйларни фақат тегишли қўшнилик бурчакларига қараб уларнинг эгриланиш даражасига баҳо бера олмаемиз. Бундан, эгри чизиқнинг эгриланиш даражасининг тула характеристикаси қўшнилик бурчагининг тегишли ёй узунлигига нисбатидан иборат бўлиши келиб чиқади.

1- таъриф. AB ёйнинг ўртача эгрлиги $K_{\text{ур}}$ деб, тегишли қўшнилик бурчаги α нинг ёй узунлигига нисбатига айтилади:

$$K_{\text{ур}} = \frac{\alpha}{AB}.$$

Бир эгри чизиқнинг ҳар хил қисмлари (ёйлари) учун ўртача эгрилик ҳар хил бўлиши мумкин; масалан, 142- расмда кўрсатилган эгри чизиқда AB ва A_1B_1 ёйларнинг узунликлари бир хил бўлса ҳам, уларнинг ўртача эгрликлари ҳар хилдир. Ҳатто ҳар хил нуқталар яқинида эгри чизиқнинг эгриланиши

ҳар хил. Берилган чизиқнинг берилган A нуқтаси яқинида эгрилик даражасини характерлаш учун эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги эгрилик деган тушунчани киритамиз.

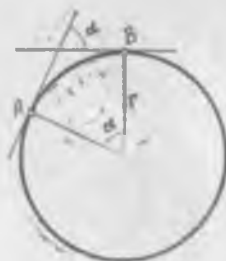
2- таъриф. Эгри чизиқнинг A нуқтасидаги эгрилиги K_A деб, $\widehat{AB}$ ёйи ўртача эгриликнинг ёй узунлиги нолга интилган (яъни B нуқта A га яқинлашган) пайтдаги лимитига айтилади:

$$K_A = \lim_{B \rightarrow A} K_{\widehat{AB}} = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\alpha}{AB}.$$

Мисол. Радиуси r бўлган айлана учун: 1) марказий бурчак α га мос $\widehat{AB}$ ёйнинг ўртача эгрилиги аниқлансин (143- расм); 2) A нуқтадаги эгрилиги аниқлансин.



142- расм.



143- расм.

Е чи ш. 1) Равшанки, $\widehat{AB}$ ёйнинг қўшнилик бурчаги α га тенг, ёйнинг узунлиги αr га тенг. Демак,

$$K_{\widehat{AB}} = \frac{\alpha}{\alpha r}.$$

ёки

$$K_{\widehat{AB}} = \frac{1}{r}.$$

2) A нуқтадаги эгрилик

$$K = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Шундай қилиб, радиуси r бўлган айлана ёйининг ўртача эгрилиги ёйнинг узунлигига ва ҳолатига боғлиқ эмас, ҳамма ёйлар учун $\frac{1}{r}$ га тенг. Айлананинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги ҳам нуқтани танлашга боғлиқ эмас ва $\frac{1}{r}$ га тенг.

*) Лимитнинг миқдори эгри чизиқда ўзгарувчи B нуқтани A нуқтанинг қайси томонида олинганига боғлиқ эмас деб фараз қиламиз.

Изоҳ. Шунинг айтиб ўтиш керакки, ихтиёрий эгри чизикнинг ҳар хил нуқталаридаги эгрилиги, умуман айтганда, ҳар хил бўлади. Бунини қуйида кўрамиз.

3- §. Эгриликни ҳисоблаш

Берилган эгри чизикнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги эгрилигини ҳисоблаш учун формула чиқарамиз. Бунда эгри чизик Декарт координатлари системасида

$$y = f(x) \quad (1)$$

шаклдаги тенглама билан берилган ва $f(x)$ функция узлуксиз иккинчи ҳосиллага эга деб фараз қиламиз.

Эгри чизикқа унинг абсциссалари x ва $x + \Delta x$ бўлган M ва M_1 нуқталарида уринмалар ўтказамиз ва бу уринмаларнинг Ox ўқиға оғиш бурчакларини φ ва $\varphi + \Delta\varphi$ билан белгилаймиз (144- расм).



144- расм.

Эгри чизикнинг биронта ўзгармас M_0 нуқтасидан бошлаб ҳисобланган $\overline{MM_0}$ ёй узунлигини s билан белгилаймиз; унда $\Delta s = \overline{M_0M_1} - \overline{M_0M}$, $|\Delta s| = \overline{MM_1}$ бўлади.

144- расмдан бевосита кўриш мумкинки, $\overline{MM_1}$ ёйга мос қўшнилик бурчаги φ билан $\varphi + \Delta\varphi$ бурчак айирмасининг абсолют қийматига, яъни $|\Delta\varphi|$ га тенг*).

Таърифга мувофиқ эгри чизикнинг $\overline{MM_1}$ қисмидаги ўртача

эгрилик:

$$K_{\text{ор}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

M нуқтадаги эгриликни ҳосил қилиш учун бу нфоданинг $\overline{MM_1}$ ёй узунлиги нолга интилиш шартини топмш керак:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

*) 144- расмда тасвирланган эгри чизик учун $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$ экани равшан, чунки $\Delta\varphi > 0$.

φ ва s миқдорларнинг иккаласи x га боғлиқ (x нинг функцияси) бўлгани учун φ ни s нинг функцияси деб қараш мумкин. Биз бу функцияни параметр x ёрдами билан параметрик шаклда берилган деб ҳисоблай оламиз. Унда

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

демак,

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|. \quad (2)$$

$\frac{d\varphi}{ds}$ ни ҳисоблаш учун параметрик шаклда берилган функцияни дифференциаллаш формуласи

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

дан фойдаланамиз. $\frac{d\varphi}{dx}$ ҳосилани $y = f(x)$ функция орқали ифодалаш учун $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, демак,

$$\varphi = \arctg \frac{dy}{dx}$$

эканини курамиз.

Сўнгги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, ушбунни топамиз:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$\frac{ds}{dx}$ ҳосилани эса VI бобнинг 1- § да топган эдик:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Шунинг учун

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

ёки $K = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|$ бўлгани учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (3)$$

Демак, эгри чизиқнинг иккинчи ҳосила $\frac{d^2y}{dx^2}$ мавжуд ва узлуксиз бўлган ҳар қандай нуқтасида эгриликни ҳисоблаш мумкин. Уни ҳисоблаш учун (3) формула хизмат қилади. Эгри чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаганда махраждаги илдизнинг фақат арифметик (яъни мусбат) қийматини олиш кераклигини ёдда сақлаш лозим; чунки таърифга кура чизиқнинг эгрилиги манфий бўла олмайди.

1- мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг: а) ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги, б) $M_1(0, 0)$ нуқтасидаги, в) $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$ нуқтасидаги эгрилиги аниқлансин.

Еч и ш. $y = \sqrt{2px}$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Топилган ифодаларни (3) формулага қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$а) \quad K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}}.$$

$$б) \quad K_{x=0, y=0} = \frac{1}{p}.$$

$$в) \quad K_{x=p/2, y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

2- мисол. $y = ax + b$ тўғри чизиқнинг ихтиёрий (x, y) нуқтасидаги эгрилиги аниқлансин.

Еч и ш.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

(3) формуладан

$$K = 0$$

эканини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, тўғри чизиқ эгрилиги ноль булган чизиқдир. Бу натижани эгриликнинг таърифидан бевосита ҳосил қилиш мумкин.

4- §. Параметрик шаклда берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш

Эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Унда (III боб 24- § га қаранг):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Бу ифодаларни олдинги параграфдаги (3) формулага қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

Мисол. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг ихтиёрий (x, y) нуқтасидаги эгрилиги эниқлансин.

Еч и ш.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Бу ифодаларни (3) формулага қўйиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} K &= \frac{|a(1 - \cos t)a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2}a(1 - \cos t)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}a(1 - \cos t)^{3/2}} = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|} \end{aligned}$$

5- §. Қутб координаталардаги тенглама билан берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш

Эгри чизиқ

$$\rho = f(\theta). \quad (1)$$

тенглама билан берилган бўлсин.

Қутб координаталардан Декарт координаталарига ўтиш формулаларини ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Бу ифодалардаги ρ ўрнига унинг θ орқали ифодасини, яъни $f(\theta)$ ни қўйсак, ушбу тенгликлар ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Кейинги тенгламаларга (1) эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари деб қараш мумкин, бу ерда параметр θ бўлади.

Бу ҳолда

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dp}{d\theta} \cos \theta - p \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dp}{d\theta} \sin \theta + p \cos \theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2p}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{dp}{d\theta} \sin \theta - p \cos \theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2p}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{dp}{d\theta} \cos \theta - p \sin \theta.$$

Бу ифодаларни бундан олдинги параграфдаги (1) формулага қуйиб, эгри чизиқнинг эгрилигини қутб координаталарда ҳисоблаш учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|p^2 + 2p'^2 - pp''|}{(p^2 + p'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

М и с о л. Архимед спирали $p = a\theta$ ($a > 0$) нукта-сидаги эгрилиги аниқлансин (145-расм).

Е ч и ш.

$$\frac{dp}{d\theta} = a, \quad \frac{d^2p}{d\theta^2} = 0.$$

Демак,

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}$$

θ нинг катта қийматлари учун ушбу тақрибий тенглик-

ларни ёзиш мумкин: $\frac{\theta^2 + 2}{\theta^3} \approx 1$, $\frac{\theta^2 + 1}{\theta^3} \approx 1$; шунинг учун олдинги формулагаги $\theta^2 + 2$ билан ва $\theta^2 + 1$ ни θ^3 га алмаштириб, ушбу тақрибий формулани ҳосил қиламиз (θ нинг катта қийматлари учун):

$$K \approx \frac{1}{a} \frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

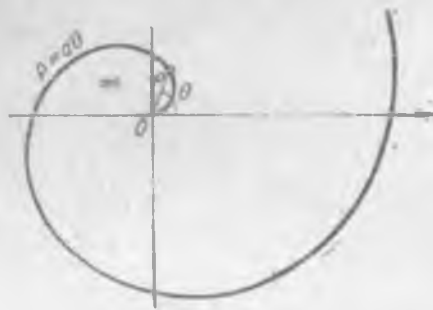
Демак, θ нинг катта қийматларида Архимед спиралининг эгрилиги радиуси $a\theta$ га тенг бўлган айлана эгрилигига тахминан тенг бўлади.

6- §. Эгрилик радиуси ва доираси.

Эгрилик маркази. Эволюта ва эвольвента

Таъриф. Чизиқнинг берилган M нуктасидаги эгрилиги K га тескари бўлган R миқдор шу чизиқнинг берилган нуктасидаги эгрилик радиуси деб аталади:

$$R = \frac{1}{K}. \quad (1)$$



145-расм.

ёки

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \quad (2)$$

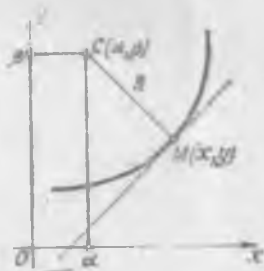
M нуқтада эгри чизиққа унинг ботиқлик томонига йуналган нормал ясаймиз ва шу нормалда M нуқтадаги эгрилик радиуси R га тенг булган MC кесма оламиз. C нуқта берилган эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилик маркази дейилади; радиуси R , маркази C нуқтада булган (айланаси M нуқтадан утадиган) доира эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилик доираси дейилади (146- расм).

Эгрилик доирасининг таърифидан кўринадики, берилган нуқтада эгри чизиқ эгрилиги билан эгрилик доирасининг эгрилиги бир-бирига тенг.

Эгрилик марказининг координаталарини аниқловчи формулаларни чиқарамиз.



146- расм.



147- расм.

Эгри чизиқ тенгламаси

$$y = f(x) \quad (3)$$

булсин.

Эгри чизиқда бир $M(x, y)$ нуқта оламиз ва шу нуқтага тегишли эгрилик маркази координаталари α ва β ни аниқлаймиз (147- расм). Бунинг учун эгри чизиққа M нуқтадаги нормал тенгламасини ёзамиз:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \quad (4)$$

(Бу сзда X ва Y нормал нуқтасининг ўзгарувчи координата-

лари.) $C(\alpha, \beta)$ нукта нормал устида бўлгани учун, унинг координаталари (4) тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(x - \alpha). \quad (5)$$

$C(\alpha, \beta)$ нукта $M(x, y)$ нуқтадан эгрилик радиуси R га тенг масофада туради:

$$(\alpha - x^2) + (\beta - y)^2 = R^2. \quad (6)$$

(5) ва (6) тенгламаларни бирга ечиб, α ва β ни аниқлаймиз:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x^2) = R^2, \quad (x - \alpha)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

бундан:

$$\alpha = x \pm \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} R,$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \text{ бўлгани учун}$$

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Охирги формулаларда каср олдида қайси ишорани олиш масаласини ечиш учун $y'' > 0$ бўлган ҳолни ва $y'' < 0$ бўлган ҳолни қараш керак. Агар $y'' > 0$ бўлса, бу нуқтада эгри чизик ботиқ ва, демак, $\beta > y$ (147- расм), шунга кўра пастки ишораларни олиш керак. Бу ҳолда $|y''| = y''$ эканини эътиборга олганда, эгрилик маркази координаталарининг формулалари бундай бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Шундай йўл билан $y'' < 0$ бўлганда ҳам (7) формулалар ўз кучини сақлашини кўрсатиш мумкин.

Агар эгри чизик

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, эгрилик марказининг координаталарини топиш учун (7) формуладаги y' ва y'' ўрнига уларнинг параметр орқали

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^2_t}$$

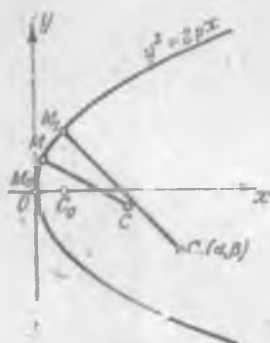
ифодаларини қўйиш керак. Унда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1- мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг: а) ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги, б) $M_0(0, 0)$ нуқтасидаги, в) $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ нуқтасидаги эгрилик марказининг координаталари аниқлансин.

Ечиш. $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{d^2y}{dx^2}$ нинг қийматларини (7) формулага қўйиб, ушбуларни ҳосил қиламиз (148- расм):

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha &= 3x + p, & \beta &= -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}, \\ \text{б) } x &= 0 \text{ бўлганда: } \alpha = p, & \beta &= 0; \\ \text{в) } x &= \frac{p}{2} \text{ бўлганда: } \alpha = \frac{5p}{2}, & \beta &= -p. \end{aligned}$$



148- расм.

Агар берилган чизиқнинг $M_1(x, y)$ нуқтасида эгрилик нолга тенг бўлмаса, бу нуқтага аниқ эгрилик маркази $C_1(\alpha, \beta)$ мос келади. Берилган чизиқнинг ҳамма эгрилик марказлари туплами бирор янги чизиқни ташкил этади, бу чизиқ биринчи чизиққа нисбатан эволюта дейилади.

Шундай қилиб, берилган чизиқ эгрилик марказларининг геометрик ўрни унинг *эволютаси* дейилади. Берилган чизиқ ўзининг эволютасига нисбатан *эвольвента* ёки *инволюта* (ёки *ёйилма*) дейилади.

Агар берилган эгри чизиқ тенгламаси $y = f(x)$, бўлса, (7) тенгламаларни эволютанинг параметрик тенгламалари (параметр x) деб қараш мумкин. Бу тенгламалардан параметр x ни (агар мумкин бўлса) йўқотиб, эволютанинг ўзгарувчи координаталари α ва β орасида бевосита муносабат топамиз. Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ билан берилган бўлса, (7') тенгламалар эволютанинг параметрик тенгламаларини беради (чунки x, y, x', y', x'', y'' миқдорлар t нинг функцияларидир).

2- мисол. $y^2 = 2px$ парабола эволютасининг тенгламаси топилсин.

Ечиш. 1- мисолга асосан параболанинг ҳар қандай (x, y) нуқтаси учун ушбу тенгликларга эгамиз:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3x + p, \\ \beta &= -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардан параметр x ни чиқариб ташлаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

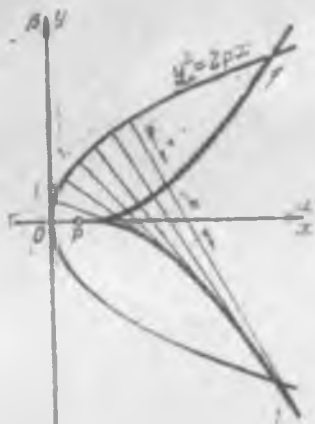
$$\rho^2 = \frac{8}{27\rho} (x - \rho)^2.$$

Бу — призматик парабол тенгласидир (149- расм).
3- м и с о л. Параметрик тенгламалар:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

билан берилган эллипс эволютасининг тенгласи топилсин.
Е ч и ш. x ва y нинг t бўйича ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t, & y' &= b \cos t; \\ x'' &= -a \cos t, & y'' &= -b \sin t. \end{aligned}$$



149- расм.



150- расм.

Ҳосилалар ифодаларини (7') формулаларга қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \alpha &= a \cos t - \frac{b \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \\ &= a \cos t - a \cos t \sin^2 t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t.$$

Шунга ўхшаш:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t.$$

Параметр t ни чиқариб ташлаб, эллипс эволютасининг тенгласини ушбу шаклда ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}$$

Бу ерда a ва b — эволютаниннг ўзгарувчи координаталари (150- расм).
4- м и с о л. Циклоида

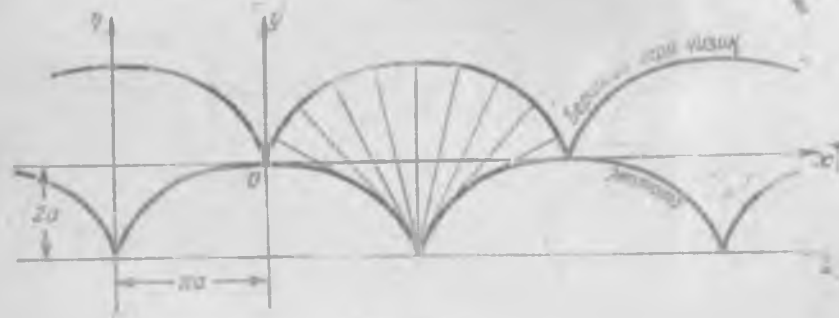
$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

эволютасининг параметрик тенгламалари топилсин.
Е ч и ш.

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - \cos t), & y' &= a \sin t, \\ x'' &= a \sin t, & y'' &= a \cos t. \end{aligned}$$

Бу ифодаларни (7') формулаларга қўйиб, ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \alpha &= a(t + \sin t), \\ \beta &= -a(1 - \cos t). \end{aligned}$$



151- расм.

Энди:

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi - \tau a, \\ \beta &= \eta - 2a, \\ \tau &= t - \pi \end{aligned}$$

деб фараз қилиб, ўзгарувчиларни алмаштирамиз; бунда эволюта тенгламаларини ушбу шаклни олади:

$$\begin{aligned} \xi &= a(\tau - \sin \tau), \\ \eta &= a(1 - \cos \tau); \end{aligned}$$

бу тенгламалар ξ, η координаталар системасида яна ясовчи доирасининг радиуси a бўлган циклоидани белгилайди. Демак, циклоиданиннг эволютаси яна циклоида бўлади, лекин кейинги циклоида аввалгига нисбатан Ox ўқ бўйича — πa қадар ва Oy ўқ бўйича — $2a$ қадар силжиган бўлади (151- расм).

7-§. Эволютанинг хоссалари

1-теорема. *Берилган эгри чизиққа нормал унинг эволютасига уринма бўлади.*

Исбот. Утган параграфнинг (7') параметрик тенгламалари билан аниқланган эволютага уринманинг бурчак коэффициенти ушбуга тенг:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}$$

Уша (7') тенгламаларга асосан:

$$\frac{d\alpha}{dx} = - \frac{3y''^2 y'^2 - y' y''' - y'^2 y'''}{y'^3} = - y' \frac{3y' y''^2 - y'' - y'^2 y'''}{y'^3}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y''^2 y' - y'' - y'^2 y'''}{y'^3} \quad (2)$$

эканини назарга олиб, ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{1}{y'}$$

Лекин y' — эгри чизиққа тегишли нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициенти, шунинг учун ҳосил қилинган муносабатдан эгри чизиққа уринма билан унинг эволютаси тегишли нуқтасидаги уринма бир-бирига перпендикуляр экани келиб чиқади, яъни эгри чизиққа нормал унинг эволютасига уринма бўлади.

2-теорема. *Агар эгри чизиқнинг бирор $M_1 M_2$ қисмида эгрилик радиуси монотон ўзгарса (яъни ё фақат усса, ё фақат камайса), эгри чизиқнинг шу қисмида эволюта ёйи узунлигининг орттирмаси (абсолют қиймат бўйича) берилган эгри чизиқ эгрилик радиусининг мос орттирмасига тенг.*

Исбот. VI бобнинг 1-§ даги (2') формулага асосан ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

бу ерда ds — эволюта ёйи узунлигининг дифференциали; бундан

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Бунга (1) ва (2) ифодаларни қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) \left(\frac{3y' y''^2 - y'' - y'^2 y'''}{y'^3} \right)^2. \quad (3)$$

Энди $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$ ни топамиз. Маълумки,

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \text{ шунинг учун } R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб, тегишли алмаштиришларни бажаргандан сўнг ушбунни ҳосил қиламиз:

$$2R \frac{dR}{dx} = \frac{2(1+y'^2)^2 (3y'y''^2 - y''' - y'^2 y''')}{(y''^2)^2}.$$

тенгликнинг иккала томонини $2R = \frac{2(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ га бўлиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1+y'^2)^{1/2} (3y'y''^2 - y''' - y'^2 y''')}{y''^2}.$$

Квадратга кўтариб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1+y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (4)$$

(3) ва (4) тенгликларни таққослаб, ушбунни топамиз:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

бундан

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

Шартга кўра $\frac{dR}{dx}$ ишораси ўзгармайди (R фақат ўсади ёки фақат камаяди), демак, $\frac{ds}{dx}$ нинг ишораси ҳам ўзгармайди. Аниқлик учун $\frac{dR}{dx} < 0$, $\frac{ds}{dx} > 0$ деб қабул қиламиз (бу 152-расмга мос келади). Демак, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$.

M_1 нуқтанинг абсциссаси x_1 , M_2 нуқтанинг абсциссаси x_2 бўлсин. $[x_1, x_2]$ кесмада $s(x)$ ва $R(x)$ функцияларга Коши теоремасини қўлланамиз:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi} = -1,$$

бу ерда ξ x_1 ва x_2 орасидаги сон ($x_1 < \xi < x_2$).

Ушбу белгилашларни киритамиз (152- расм):

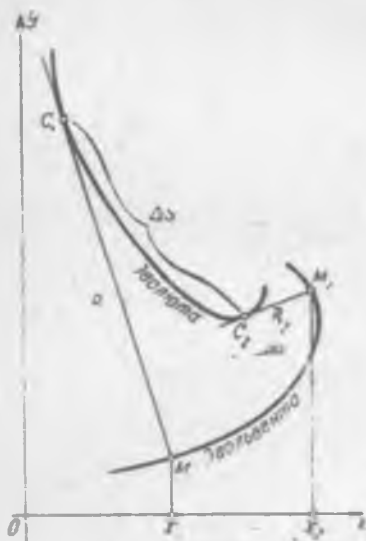
$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1,$$

у ҳолда $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, ёки $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Бу эса

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

демакдир.

Бу тенглик эгрилик радиуси ўсганда ҳам худди шундай исботланади.



152- расм.



153- расм.

1 ва 2- теоремаларни эгри чизиқ ошкор тенглама $y = f(x)$ билан берилган ҳол учун исботладик.

Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, бу теоремалар ўз кучини сақлайди ва уларнинг исботи ҳам худди ўшандай ўтказилади.

Изоҳ. Эгри чизиқни (эвольвентани) ўзининг эволютаси бўйича яшаш учун ушбу содда механик усулни кўрсатамиз.

Эгилувчи линейка эволюта C_0C_5 (153- расм) формаси бўйича эгилган бўлсин. Бир учи C_0 нуқтага боғланган чўзилмайдиган ип ўша линейка бўйлаб ўралган бўлсин. Ипни доим тортилган ҳолатда ёя бошласак, ипнинг иккинчи учи M_5M_0 эгри чизиқни — эвольвентани чизади. „Эвольвента“ — ёйилма ипни

ҳам шундан келиб чиққан. Ҳосил қилинган эгри чизиқ ҳақиқатан эвольвента эканлигининг исботи юқорида аниқланган эволюта хоссаларига асосланиб ўтказилиши мумкин.

Битта эволютага чексиз кўп ҳар хил эвольвенталар мос келишини қайд этиб ўтамиз (153-расм).

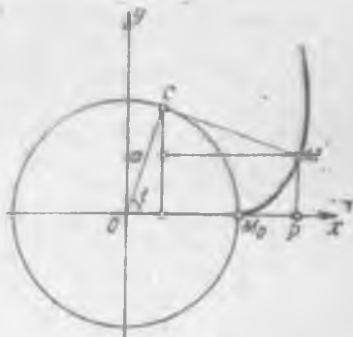
Мисол. Радиуси a бўлган айлана берилган бўлсин (154-расм). Бу айлананинг эвольвенталаридан $M_0(a, 0)$ нуқтадан ўтганини олайлик.

$CM = \overline{CM} = at$ эканини эътиборга олиб, айлана эвольвентаси тенгламасини ҳосил қилиш осон:

$$OP = x = a(\cos t + t \sin t),$$

$$PM = y = a(\sin t - t \cos t).$$

Тишля гилдирак тишининг профили кўпинча доира эвольвентаси шаклида бўлишини қайд қилиб ўтамиз.



154-расм.

8-§. Тенгламанинг ҳақиқий илдизларини тақрибий ҳисоблаш

Функцияни текшириш методлари

$$f(x) = 0$$

тенглама илдизларининг тақрибий қийматларини топишга имкон беради.

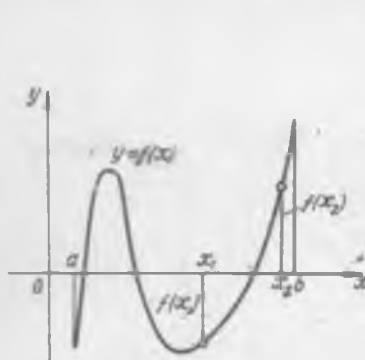
Агар берилган тенглама биринчи, иккинчи, учинчи ёки тўртинчи даражали алгебранк*) тенглама бўлса, у тенглама илдизларини унинг коэффициентлар орқали чекли сондаги қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва илдиш чиқариш амаллари ёрдами билан ифодалашга имкон берадиган формулалар бор. Тўртинчидан юқори даражали тенгламалар учун, умуман айтганда, бундай формулалар йўқ. Аммо, агар ҳар қандай алгебранк ёки алгебранк бўлмаган (трансцендент) тенгламанинг коэффициентлари ҳарфлар билан эмас, сонлар билан берилган бўлса, у ҳолда тенгламанинг илдизларини истаган даражада аниқлик билан тақрибий ҳисоблаш мумкин. Ҳатто алгебранк тенгламанинг илдизлари радикаллар орқали ифодаланадиган ҳолларда ҳам, амалда баъзан тенгламани тақрибий ечиш методини қўлланиш қулай булади. Қуйида тенглама илдизларини тақрибий ҳисоблашнинг баъзи методлари баён қилинади.

*) Агар $f(x)$ кўпқад бўлса, $f(x) = 0$ тенглама алгебранк тенглама дейилади (VII боб, 6-§ га қаранг).

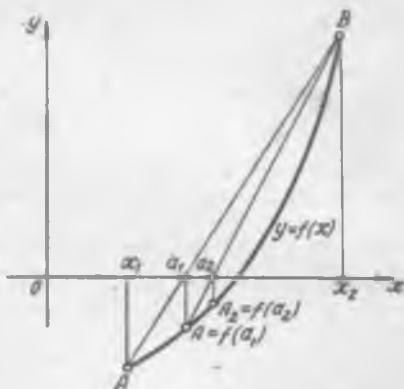
1. Ватарлар усули. Ушбу тенглама

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

берилган бўлиб, бу ерда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $y = f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесма ичида текшириб шундай $[x_1, x_2]$ кесма ажратамизки, бу кесма ичида функция монотон (ё ўсувчи, ёки камаювчи) ва кесма четларида $f(x_1)$ ва $f(x_2)$ функцияларнинг қийматлари ҳар хил ишорали бўлсин. Аниқлик учун $f(x_1) < 0$; $f(x_2) > 0$ деб қабул қиламиз (155-расм). $y = f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун унинг графиги x_1 ва x_2 нуқталар орасидаги биронта нуқтада Ox ўқни кесадн.



155- расм.



156- расм.

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг x_1 ва x_2 абсциссаларга тегишли чегара нуқталарини туташтирувчи AB ватарни ўтказамиз. Бу ватарнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтанинг a_1 абсциссаси илдининг тақрибий қиймати бўлади (156-расм). Бу тақрибий қийматни топиш учун берилган иккита $A(x_1, f(x_1))$ ва $B(x_2, f(x_2))$ нуқтадан ўтувчи AB тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$x = a_1$ бўлганда $y = 0$ бўлгани учун

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

бундан

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (2)$$

Ёки шакл алмаштиргандан кейин:

$$a_1 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (2')$$

Илдизнинг аниқроқ қийматини топиш учун $f(a_1)$ ни аниқлаймиз. Агар $f(a_1) < 0$ бўлса, (2) формулани $[a_1, x_2]$ кесмага қўлиниб, шу усулни такрорлаймиз. Агар $f(a_1) > 0$ бўлса, шу формулани $[x_1, a_1]$ кесмага қўлланамиз. Бу усулни бир неча марта такрорлаб, илдизнинг янада аниқроқ a_1, a_2 ва ғ. к. қийматларини топамиз.

1-мисол.

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

тенглама илдизларининг тақрибий қийматлари топилин.

Ечиш. Даставвал $f(x)$ функция монотон бўладиган оралиқларини топамиз. $f'(x) = 3x^2 - 6$ ҳосилани топиб, $x < -\sqrt{2}$ бўлганда ҳосила мусбат, $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ оралиқда манфий ва $x > \sqrt{2}$ бўлганда яна мусбат эканини курамиз (157-расм). Шундай қилиб, функция учта монотонлик участкага эга; буларнинг ҳар бирида функциянинг биттадан илдизи бор.

Бундан кейинги ҳисоблашларни қулайлаштириш мақсадида бу монотонлик оралиқларини торайтирамиз (лекин ҳар бир оралиқда тегишли илдиз бўлсин). Бунинг учун $f(x)$ ифодага x нинг исталган қийматларини қўйиб, ҳар бир монотонлик оралиғида чегара нуқталарда функция ҳар хил ишорали бўладиган кичикроқ кесмалар ажратамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & f(0) &= 2, \\ x_2 &= 1, & f(1) &= -3, \\ x_3 &= -3, & f(-3) &= -7, \\ x_4 &= -2, & f(-2) &= 6, \\ x_5 &= 2, & f(2) &= -2, \\ x_6 &= 3, & f(3) &= 11. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, илдизлар ушбу интервалларда бўлади:

$$(3; -2), (0; 1), (2; 3).$$

Илдизнинг (0; 1) интервалдаги тақрибий қийматини топамиз; (2) формулага кўра:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Энди

$$f(0.4) = 0.4^3 - 6 \cdot 0.4 + 2 = -0.336, \quad f(0) = 2$$



157-расм.

бўлгани учун илдиз 0 билан 0,4 орасидадир. Шу интервалга яна (2) формулаи қўлланиб, иккинчи аниқроқ тақрибий қийматни топамиз:

$$a_2 = 0 - \frac{(0,4 - 0) \cdot 2}{-0,336 - 2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342 \text{ ва ш. к.}$$

Илдизларнинг бошқа интерваллардаги тақрибий қийматларини ҳам шу равишда топамиз.

2. Уринмалар усули (Ньютон усули). Яна $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ ва $[x_1, x_2]$ кесмада биринчи ҳосиланинг ишораси ўзгармайди деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (x_1, x_2) интервалда $f(x) = 0$ тенглама битта илдизга эга бўлади. Энди яна $[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосиланинг ишораси ҳам ўзгармайди деб фараз қиламиз; бунга илдизни ўз ичига олган интервал узунлигини камайтириш йўли билан эришиш мумкин.

$[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосила ишорасининг ўзгармаслиги эгри чизик $[x_1, x_2]$ участкада ё фақат қавариқ, ё фақат ботиқ эканини кўрсатади.

Эгри чизикқа B нуқтада уринма ўтказамиз (158- расм). Уринманинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасининг абсциссаси a_1 илдизнинг тақрибий қиймати бўлади. Шу абсциссани топиш учун B нуқтадаги уринма тенгламасини ёзамиз:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

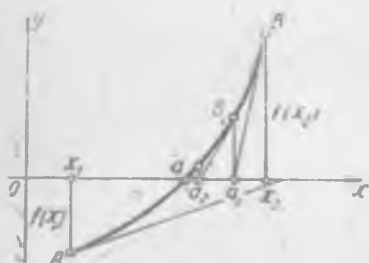
$y = 0$ бўлганда $x = a_1$ бўлишини эътиборга олиб, ушбунни топамиз:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3)$$

Сунгра B_1 нуқтада уринма ўтказиб, шу равишда илдизнинг аниқроқ қиймати a_2 ни топамиз. Бу усулни бир неча марта такрорлаб, илдизнинг исталган аниқликдаги тақрибий қийматини топа оламиз.

Қуйидаги ҳолни айтиб ўтамиз. Агар уринмани B нуқтадан эмас, балки A нуқтадан ўтказганимизда, уринманинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси (x_1, x_2) интервалдан ташқарида қолар эди.

158 ва 159- расмлардан кўринадики, ёйнинг қайси чегара нуқтасида $f(x)$ функция ишораси билан унинг иккинчи ҳосиласининг ишораси бир хил бўлса, ўша нуқтада уринма ўтказиш керак. $[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосила шартга кўра ўз ишорасини сақлайди, шунинг учун чегара нуқталарининг би-

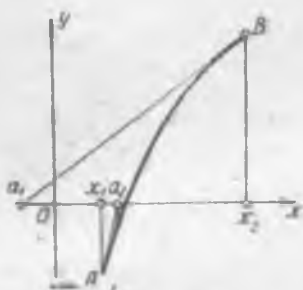


158- расм.

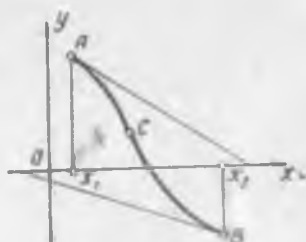
рида функциянинг ишораси билан иккинчи ҳосиласининг ишораси албатта бир хил бўлади. Бу қоида $f'(x) < 0$ бўлганда ҳам ўз кучини сақлайди. Агар уринма интервалнинг чап чегарасидан ўтказилса, (3) формулада x_2 ўрнига x_1 ни қўйиш керак:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3')$$

Агар (x_1, x_2) интервал ичида C бурилиш нуқтаси бўлса, уринмалар усули илдизнинг (x_1, x_2) интервалдан ташқарида ётган тақрибий қийматини бериши мумкин (160- расм).



159- расм.



160- расм.

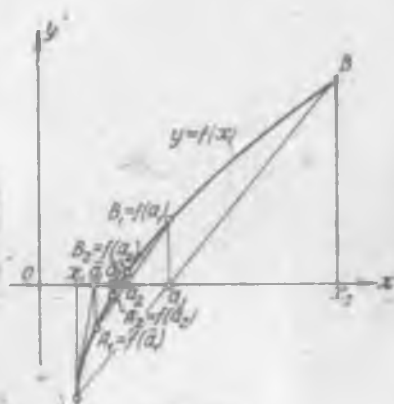
2- мисол. $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$ тенгламанинг $(0; 1)$ интервалдаги илдизини ҳисоблаш учун (3) формулани қўлланамиз.

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6)_{x=0} = -6, \quad f''(x) = 6x > 0,$$

шунга кўра (3) формула бўйича шуни топамиз:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0,333.$$

3. Бирлаштирилган усул (161- расм). Ватарлар усули ва уринмалар усулини $[x_1, x_2]$ кесмада бир вақтда қўлланиб, изланган a илдизнинг икки томонида ётган a_1 ва a_2 нуқталарни топамиз (чунки $f(a_1)$ ва $f(a_2)$ ординаталарнинг ишоралари ҳар хил). Сўнгра $[a_1, a_2]$ кесмада яна ватарлар усулини ва уринмалар усулини қўлланамиз. Натижада илдизнинг қийматига



161- расм.

янада яқинроқ иккита a_2 ва $\bar{a}_2$ сонларни топамиз. Топилган тақрибий қийматлар орасидаги айирма талаб этилган аниқлик даражасидан кичик бўлгунча ишни шу равишда давом эттирамиз. Бирлаштирилган метод билан биз изланган илдишга бир вақтда икки томондан яқинлашамиз (яъни бир вақтда илдишнинг ҳақиқий қийматидан эртиқроқ ва камроқ тақрибий қийматларини топамиз).

Чуқюлчи, юқорида қаралган мисолда ўрнига қўйиш йўли билан

$$f(0,333) > 0, \quad f(0,342) < 0$$

эканинга ишонч ҳосил қиламиз. Демак, илдишнинг қиймати топилган тақрибий қийматлар орасида бўлади:

$$0,333 < x < 0,342.$$

VI бобга машқлар

Эгри чизиқларнинг кўрсатилган нуқталарда эгрилиги топилсин; 1. $b^2x^3 + a^2y^3 = a^2b^2$, (0, b) ва (a, 0) нуқталарда. Жав. (0, b) нуқтада $\frac{b}{a^2}$; (a, 0) нуқтада $\frac{a}{b^2}$. 2. $xy = 12$, (3, 4) нуқтада Жав. $\frac{24}{125}$. 3. $y = x^3$, (x_1, y_1) нуқтада. Жав. $\frac{6x_1}{(1 + 9x_1^2)^{3/2}}$. 4. $16y^3 = 4x^4 - x^3$, (2, 0) нуқтада. Жав. $\frac{1}{2}$. 5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ихтиёрий нуқтада. Жав. $1/(3\sqrt[3]{|axy|})$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг кўрсатилган нуқталарда эгрилик радиуси топилсин; ҳар бир эгри чизиқ чизилсин ва тегишли эгрилик доираси ясалсин. 6. $y^2 = x^3$, (4, 8) нуқтада. Жав. $R = \frac{80\sqrt{10}}{3}$. 7. $x^2 = 4ay$, (0, 0) нуқтада. Жав. $R = 2a$. 8. $b^2x^3 - a^2y^3 = a^2b^2$, (x_1, y_1) нуқтада. Жав. $R = \frac{(b^4x_1 + a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. 9. $y = \ln x$, (1, 0) нуқтада. Жав. $R = 2\sqrt{2}$. 10. $y = \sin x$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ нуқтада Жав. $R = 1$. 11. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, $t = t_1$ бўлганда.

Жав. $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик радиуслари топилсин:

12. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$, $t = 1$ бўлганда. Жав. $R = 6$. 13. Айлана $\rho = a \sin \theta$.

Жав. $R = \frac{a}{2}$. 14. Архимед спирали $\rho = a\theta$. Жав. $R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$. 15. Кар-

дионда $\rho = a(1 - \cos \theta)$. Жав. $R = \frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. 16. Лемниската $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Жав. $R = \frac{a^2}{3}$. 17. Парабола $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. Жав. $R = 2a \sec^3 \frac{\theta}{2}$. 18. $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

Жав. $R = \frac{3}{4} a \sin^2 \frac{\theta}{3}$.

Ушбу эгри чизиқларнинг эгрилик радиуси энг кичик қийматга эга бўлган нуқталари топилсин; 19. $y = \ln x$. Жав. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \ln 2\right)$. 20. $y = e^x$.

Жав. $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Жав. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

22. $y = a \ln \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Жав. $(0, 0)$ нуқтада $R = \frac{a}{2}$.

Ушбу эгри чизиқларнинг ҳар бири учун эгрилик маркази координаталари (α, β) ва эволюта тенгламаси топилсин. 23. $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} = 1$. Жав. $\alpha =$

$-\frac{(a^3 + b^3)x^3}{a^4}$; $\beta = -\frac{(a^3 + b^3)y^3}{b^4}$. 24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Жав. $\alpha = x +$

$+ 3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}$; $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}$. 25. $y^3 = a^3 x$. Жав. $\alpha = \frac{a^4 + 15y^4}{6ay^3}$;

$\beta = \frac{a^4 y - 9y^6}{2a^4}$. 26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^3 - 6. \end{cases}$ Жав. $\alpha = -\frac{4}{3}t^2$; $\beta = 3t^3 - \frac{3}{2}$.

27. $\begin{cases} x = k \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sin t. \end{cases}$ Жав. $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (трактрисса).

28. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$ Жав. $\alpha = a \cos t$; $\beta = a \sin t$. 29. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

Жав. $\alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t$; $\beta = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t$. 30. $x^3 - 4x + 2 = 0$ тенгламанинг илдиэлари 0,001 гача аниқликда топилсин. Жав. $x_1 = 1,675$; $x_2 = 0,539$; $x_3 = -2,214$. 31. $f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0$ тенгламанинг $(1; 1,1)$ интервалдаги илдиэининг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 1,045.

32. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ тенгламанинг илдиэлари 0,01 гача аниқликда ҳисоблансин. Жав. $0,38 < x_1 < 0,39$; $1,24 < x_2 < 1,25$. 33. $x^3 - 5 = 0$ тенглама

тақрибий ечилсин. Жав. $x_1 \approx 1,71$, $x_{2,3} \approx 1,71 \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 34. $x - \operatorname{tg} x = 0$

тенгламанинг 0 ва $\frac{3\pi}{2}$ орасидаги илдиэининг тақрибий қиймати топилсин.

Жав. 4,4935. 35. $\sin x = 1 - x$ тенгламанинг илдиэи 0,001 гача аниқликда ҳисоблансин. Кўрсатма: тенглама $f(x) = 0$ кўринишга келтирилсин. Жав. $0,5110 < x < 0,5111$.

Ҳар хил масалалар.

36. Лемниската $\rho^3 = a^3 \cos 2\varphi$ нинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилик шу нуқтанинг радиус-векторига пропорционал эканлиги кўрсатилсин. 37. $\rho =$

$a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқ эгрилик радиусининг энг катта қиймати топил-

син. Жав. $R = \frac{3a}{4}$. 38. $y = x \ln x$ эгри чизиқнинг $y' = 0$ бўладиган нуқта-

сида эгрилик марказининг координаталари топилсин. Жав. $(e^{-1}, 0)$. 39. Архимед спирали $\rho = a\varphi$ нуқталари учун $\varphi \rightarrow \infty$ да радиус-вектор билан

эгрилик радиуси орасидаги айрма нолга интилиши исботлансин. 40. $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

нуқтада $y = \sin x$ синусоида билан умумий уринма ва эгриликка эга бўлган

$y = ax^2 + bx + c$ парабола топилсин. Графиги ясалсин. *Жав.* $y = -\frac{x^2}{2} +$

$+\frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$. 41. $f(x)$ функция бундай аниқланган:

$-\infty < x < 1$ интервалда $f(x) = x^3$,

$1 < x < \infty$ интервалда $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x)$ чизик ҳамма ерда узлуксиз эгриликка эга бўлмоғи учун a, b, c нинг қийматлари қандай бўлиши керак? Графиги ясалсин. *Жав.* $a = 3, b = -3, c = 1$. 42. Циклоиданинг ҳар қандай нуқтасида эгрилик радиуси шу нуқтадаги нормал узунлигидан икки марта катта эканлиги кўрсатилсин. 43. $y = x^2$ параболанинг $(1, 1)$ нуқтасида эгрилик айланасининг тенгламаси ёзил-

син. *Жав.* $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$. 44. $y = \lg x$ эгри чизигининг $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ нуқ-

тасида эгрилик айланасининг тенгламаси ёзилсин. *Жав.* $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 +$

$+ \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$. 45. Ярим ўқлари a ва b бўлган эллипс эволютасининг

тула узунлиги топилсин. *Жав.* $4(a^2 - b^2) / ab$. 46. $xe^x = 2$ тенглама нидизларининг тақрибий қиймати 0,01 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 0,84$ нидизга эга. 47. $x \ln x = 0,8$ тенглама нидизларининг тақрибий қиймати 0,01 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 1,64$ нидизга эга. 48. $x^2 \arctg x = 1$ тенглама нидизининг тақрибий қиймати 0,001 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 1,096$ нидизга эга.

КОМПЛЕКС СОНЛАР. КЎПҲАДЛАР

1-§. Комплекс сонлар. Дастлабки таърифлар

Комплекс сон деб

$$z = a + ib \quad (1)$$

ифодага айтилади, бу ерда a ва b — ҳақиқий сонлар, i — *мавҳум бирлик*, ушбу тенгликлар билан аниқланади:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ёки} \quad i^2 = -1; \quad (2)$$

a — комплекс сон z нинг *ҳақиқий* қисми, ib — *мавҳум* қисми дейилади. Улар бундай белгиланади: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Агар $a = 0$ бўлса, $0 + ib = ib$ соф *мавҳум* сон дейилади; агар $b = 0$ бўлса, ҳақиқий сон ҳосил бўлади: $a + i \cdot 0 = a$. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган икки комплекс сон: $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ *бир-бирига қўшма* дейилади.

Ушбу икки асосий таъриф қабул қилинади:

1. Агар $z_1 = a_1 + ib$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ дан иборат икки комплекс сонда

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$$

бўлса, яъни ҳақиқий қисмлар ўзаро ва мавҳум қисмлар ўзаро тенг бўлса, у комплекс сонлар тенг дейилади.

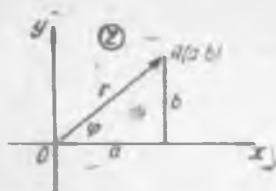
2. Агар $a = 0$, $b = 0$ бўлса, фақат шундагина комплекс сон z нолга тенг бўлади:

$$z = a + ib = 0.$$

1. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири. Ҳар қандай комплекс сон $z = a + ib$ ни Ox у текисликда координаталари a ва b бўлган $A(a, b)$ нуқта шаклида тасвирлаш мумкин. Ақсинча, Ox у текисликдаги ҳар қандай $M(a, b)$ нуқта $z = x + iy$ комплекс сонга мос келади. Ўзида комплекс сон тасвирланадиган текислик ўзгарувчи z нинг *комплекс* текислиги дейилади (162- расм), текисликка доирача ичига z симболи қўйилади.

Ўзгарувчи z комплекс текислигининг Ox ўқда ётувчи нуқталарига ҳақиқий сонлар мос келади ($b = 0$). Оу ўқда ётувчи нуқталар *соф мавҳум сонни* тасвирлайди, чунки бу ҳолда $a = 0$. Шунинг учун комплекс сонларни z нинг комплекс ўзгарувчи текислигида тасвирлаганда Оу ўқ мавҳум сонлар ўқи ёки *мавҳум ўқ*, Ox ўқ эса *ҳақиқий ўқ* дейилади.

$A(a, b)$ нуқтани координаталар боши билан туташтириб, $\vec{OA}$ векторни ҳосил қиламиз. Баъзи ҳолларда $z = a + ib$ комплекс соннинг геометрик тасвирини OA вектор деб қабул қилиш қулай бўлади.



162- расм.

2. Комплекс соннинг тригонометрик шакли. Координаталар бошини қутб, Ox ўқининг мусбат йўналишини қутб ўқи деб олиб, $A(a, b)$ нуқтани қутб координаталарини r ва φ ($r > 0$) билан белгилаймиз. Унда ушбу тенгликларни ёзиш мумкин (162- расм):

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

демак, комплекс сон z ни бундай тасвирлаш мумкин:

$$a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi.$$

ёки

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифодада $z = a + ib$ комплекс сон ёзувининг *тригонометрик шакли* деб аталади.

r комплекс сон z нинг *модули* деб аталади. φ комплекс сон z нинг аргументи деб аталади; улар бундай ифодаланади:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \quad (4)$$

r ва φ миқдорлар a ва b орқали бундай ифодаланади:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}.$$

Демак,

$$\left. \begin{aligned} |z| &= |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \arg z &= \arg(a + ib) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Комплекс соннинг аргументи φ бурчак Ox ўқининг мусбат йўналишидан соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда ҳисобланса мусбат, қарама-қарши йўналишда ҳисобланса манфий бўлади. Равшанки, аргумент бир қийматли бўлмасдан, балки

$2k\pi$ қўшилувчигача (k — ихтиёрий бутун сон) аниқликда белгиланади.

Изоҳ. Қўшма комплекс сонлар $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ тенг модуллерга эга: $|z| = |\bar{z}|$, аргументларининг абсолют қийматлари тенг, аммо ишоралари билан фарқ қилади: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Ҳақиқий сон A ни ҳам (3) шаклда ёзиш мумкин, яъни:

$$A > 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$A < 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Нолга тенг бўлган комплекс соннинг модули нолга тенг: $|0| = 0$. Нолнинг аргументи сифатида ҳар қандай φ бурчакни қабул қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳар қандай φ бурчак учун ушбу тенгликни ёзиш мумкин:

$$0 = 0 (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

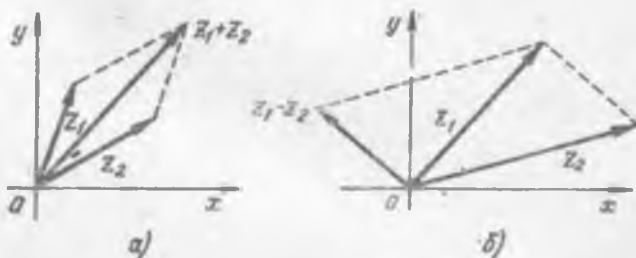
2-§. Комплекс сонлар устида асосий амаллар

1. Комплекс сонларни қўшиш. Икки комплекс сон $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ нинг йиғиндиси деб ушбу

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (1)$$

тенглик билан аниқланган комплекс сонга айтилади.

(1) формуладан векторлар билан тасвирланган комплекс сонларни қўшиш — векторларни қўшиш қондасига мувофиқ бажарилиши келиб чиқади (163-а расм).



163- расм.

2. Комплекс сонларни айириш. Икки $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонларнинг айирмаси деб шундай комплекс сонга айтиладики, унга z_2 комплекс сонни қўшганда z_1 комплекс сон ҳосил бўлади:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \quad (2)$$

Икки комплекс сон айирмасининг модули шу сонларни комплекс ўзгарувчилар текислигида тасвирловчи нуқталар орасидаги масофага тенг (163-б расм):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. Комплекс сонларни кўпайтириш. $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонлар кўпайтмаси деб, уларни икки ҳадлар сингари алгебра қондасига мувофиқ, лекин

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i$ ва ҳ. к., умуман k бутун бўлганда:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

эканлигини эътиборга олиб кўпайтирганда ҳосил бўлган комплекс сонга айтилади.

Шу қондага асосан қуйидаги кўпайтмани ҳосил қиламиз:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

ёки

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \quad (3)$$

Комплекс сонлар тригонометрик шаклда берилган бўлсин:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Бу сонларнинг кўпайтмасини топамиз:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &- \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \\ &+ \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3')$$

яъни икки комплекс сон кўпайтмаси шундай комплекс сонки, унинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг, аргументи эса кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг.

1-изох. $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ қўшма комплекс сонлар кўпайтмаси (3) формулага мувофиқ бундай ифодаланади:

$$z \bar{z} = a^2 + b^2,$$

ёки

$$z \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Қўшма комплекс сонлар кўпайтмаси улардан ҳар бири модулининг квадратига тенг.

4. Комплекс сонларни бўлиш. Комплекс сонларни бўлиш кўпайтиришга тескари амал каби таърифланади:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$$

деб фараз қиламиз. У ҳолда $\frac{z_1}{z_2} = z$ шундай комплекс сонки, унда $z_1 = z_2 z$ бўлади. Агар $\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ бўлса, у ҳолда

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

ёки

$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x);$$

х ва у ушбу

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y$$

тенгламалар системаси билан аниқланади. Бундан:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Ниҳоят, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (4)$$

Комплекс сонларни бўлиш амалда бундай бажарилади: $z_1 = a_1 + ib_1$ ни $z_2 = a_2 + ib_2$ га бўлиш учун булинувчи ва бўлувчини бўлувчига қўшма сонга (яъни $a_2 - ib_2$ га) кўпайтирамиз.

Унда бўлувчи ҳақиқий сон бўлади; унга булинувчининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини бўламиз:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a^2 + b^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Комплекс сонлар тригонометрик шаклда

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

берилган бўлса, ушбунинг ҳосил қиламиз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (5)$$

Бу тенгликни текшириш учун бўлувчини бўлинмага кўпайтириш кифоя:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] = \\ = r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] = r_1 (\cos \varphi_1 + \\ + i \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, *икки комплекс сон бўлинмасининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг бўлинмасига тенг; бўлинманинг аргументи бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмасига тенг.*

2- и з о ҳ. Комплекс сонлар устида амаллар бажариш қондалари шуни кўрсатадики, комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш натижасида яна комплекс сон ҳосил бўлади.

Агар ҳақиқий сонларни комплекс сонларнинг хусусий ҳоли деб қараб, комплекс сонлар устида амаллар бажариш қондалари ҳақиқий сонларга татбиқ этилса, бу қондалар арифметикадан бизга маълум одатдаги амаллар қондаларининг ўзи бўлади.

3- и з о ҳ. Комплекс сонлар йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг таърифларига қайтиб, у ифодаларда ҳар бир комплекс сон унинг қўшмаси билан алмаштирилса, шу амалларнинг натижалари ҳам унга қўшма комплекс сонларга алмашинишини текшириб кўриш осон. Бундан ушбу теорема келиб чиқади:

Теорема. *Кoeffициентлари ҳақиқий сонлар бўлган ушбу*

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

кўпҳадда x ўрнига $a + ib$ сон, сўнгра унга қўшма сон $a - ib$ қўйилса, ўрнига қўйиш натижалари ҳам ўзаро қўшма бўлади.

3-§. Комплекс сонни даражага кўтариш ва комплекс сондан илдиз чиқариш

1. Даражага кўтариш. Бундан олдинги параграфдаги (3) формуладан, агар n бутун мусбат сон бўлса, ушбу формула келиб чиқади:

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Бу *Муавр формуласи* деб аталади. Бундан кўринишидан, *комплекс сонни бутун мусбат даражага кўтаришда модул*

шу даражага кўтарилади, аргумент эса даража кўрсаткичига кўпайтирилади.

Энди Муавр формуласининг яна бир татбиқини қараймиз. Бу формулада $r = 1$ деб фараз қилиб,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Чап томонини Ньютон биномы формуласи бўйича ёйиб, ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаб, $\sin n\varphi$ ва $\cos n\varphi$ ни $\sin \varphi$ ва $\cos \varphi$ нинг даражаларі қорқали ифода қила оламиз. Масалан, $n = 3$ бўлганда:

$$\begin{aligned} \cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi &= \\ &= \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi; \end{aligned}$$

икки комплекс соннинг тенглик шартидан фойдаланиб, ушбу тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \sin 3\varphi &= -\sin^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

2. Илдиэ чиқариш. Комплекс соннинг n -даражати илдиэи деб n -даражага кўтарганда илдиэ остидаги сонга тенг бўладиган комплекс сонга айтилади, яъни

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

бўлса,

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Тенг комплекс сонларнинг модуллари тенг бўлиши керак, аргументлари эса 2π га каррали сонга фарқ қилиши мумкин бўлгани учун

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

Бундан

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

бу ерда k — ихтиёрий бутун сон, $\sqrt[n]{r}$ — мусбат r сон илдиэининг арифметик (яъни ҳақиқий мусбат) қиймати. Демак,

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (2)$$

k га $0, 1, 2, \dots, n-1$ қийматларни бериб, илдиэининг n та ҳар хил қийматларини топамиз. k нинг бошқа қийматларида аргументлар топилган қийматлардан 2π га каррали сонга фарқ

қилади ва демак, топилган илдиэлар аввалгилар билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, комплекс соннинг n - даражали илдиэи n та ҳар хил қийматга эга бўлади.

Нолга тенг бўлмаган ҳақиқий A соннинг n - даражали илдиэи ҳам n та қийматга эга бўлади, ҳақиқий сон комплекс соннинг хусусий ҳолидан иборат бўлгани учун тригонометрик шаклда тасвирланиши мумкин:

$$\text{агар } A > 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$\text{агар } A < 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

1- мисол. Бирнинг куб илдиэининг ҳамма қийматлари топилсин. Ечиш. Бирни тригонометрик шаклда тасвирлаймиз:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

(2) формула бўйича шунн ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{n}.$$

k га 0, 1, 2 қийматларни бериб, илдиэининг учта қийматини топамиз:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Маълумки,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Шунинг учун

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

164- расмдаги A, B, C нуқталар топилган илдиэларнинг геометрик тасвиридир.

3. Икки ҳадли тенгламани ечиш.

$$x^n = A$$

шаклдаги тенглама икки ҳадли тенглама дейилади. Бу тенгламанинг илдиэларини топамиз.

Агар A ҳақиқий мусбат сон бўлса,

$$x = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$



164- расм.

Қавс ичидаги ифода 1 нинг n - даражали илдизининг ҳамма қийматларини беради.

Агар A ҳақиқий манфий сон бўлса,

$$x = \sqrt[n]{|A|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right).$$

Қавс ичидаги ифода — 1 нинг n - даражали илдизининг ҳамма қийматларини беради.

Агар A комплекс сон бўлса, x нинг қийматлари (2) формула бўйича топилади.

2-мисол. $x^4 = 1$ тенглама ечилиши.

Ечиш.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4},$$

k ни 0, 1, 2, 3 га тенглаб, ушбуларни топамиз:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

4-§. Кўрсаткичи комплекс бўлган кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари

$z = x + iy$ бўлсин. Агар x ва y ҳақиқий ўзгарувчилар бўлса, z комплекс ўзгарувчи деб аталади. Комплекс ўзгарувчи z нинг ҳар бир қийматига xOy текислигида (комплекс ўзгарувчи текислигида) маълум нуқта мос келади (162-расмга қаранг).

Таъриф. Комплекс ўзгарувчи z нинг бирор комплекс қийматлар соҳасида ҳар бир қийматига бошқа w комплекс миқдорнинг аниқ қиймати мос келса, w комплекс ўзгарувчи z нинг функцияси бўлади. Комплекс аргументнинг функцияси $w = f(z)$ ёки $w = w(z)$ билан белгиланади.

Бу ерда биз комплекс ўзгарувчининг битта функциясини, яъни кўрсаткичли функция

$$w = e^z \text{ ёки } w = e^{x+iy}$$

ни қараймиз.

w функциянинг комплекс қийматлари бундай белгиланади*):

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

яъни

$$w(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Мисоллар.

$$1. z = 1 + \frac{\pi}{4} i, \quad e^{1 + \frac{\pi}{4} i} = e \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = e \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + ei \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$2. z = 0 + \frac{\pi}{2} i, \quad e^{0 + \frac{\pi}{2} i} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i,$$

$$3. z = 1 + i, \quad e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \sin 1) \approx 0,54 + i \cdot 0,83.$$

4. $z = x$ — ҳақиқий сон, $e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ — одатдагича кўрсаткичли функция.

Кўрсаткичли функциянинг хоссаларн.

1. Агар z_1 ва z_2 — иккита комплекс сон бўлса, унда

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Исбот.

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

бўлсин. У вақтда

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Иккинчи томондан, тригонометрик шаклдаги икки комплекс соннинг кўпайтмаси ҳақидаги теоремага асосан:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + \\ &+ i \sin y_2) = e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) ва (5) тенгликларда унғ томонлар тенг, демак, чап томонлар ҳам тенг бўлади: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

*) Комплекс ўзгарувчининг кўрсаткичли функциясининг бундай белгиланиши мақсадга мувофиқлиги кўйида XIII бобнинг 21- § да ва XVI бобнинг 18- § да ҳам кўрсатилади (II том).

2. Шунинг сингари йўл билан

$$e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \quad (6)$$

формула ҳам исботланади.

3. Агар m бутун сон бўлса,

$$(e^z)^m = e^{mz} \quad (7)$$

бўлади. Агар $m > 0$ бўлса, бу формула (3) формулага асосан осонгина ҳосил бўлади; агар $m < 0$ бўлса, бу формула (3) ва (6) формулаларга асосан ҳосил қилинади.

4. Ушбу айният

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \quad (8)$$

тўғридир.

Ҳақиқатан, (3) ва (1) формулаларга асосан:

$$e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

(8) айниятга асосан, e^z кўрсаткичли функция даври $2\pi i$ га тенг бўлган даврий функция эканлиги чиқади.

5. Энди ушбу комплекс миқдорни қараб чиқамиз:

$$w = u(x) + iv(x),$$

бу ерда $u(x)$ ва $v(x)$ ҳақиқий ўзгарувчи x нинг ҳақиқий функцияларидир. Бу w миқдор — ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функциясидир.

а) Ушбу лимитлар мавжуд бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

У вақтда $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ комплекс ўзгарувчи w нинг лимити дейилади.

б) Агар $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилалар мавжуд бўлса, ушбу

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \quad (9)$$

ифода ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясининг ҳақиқий аргумент бўйича ҳосиласи дейилади.

Энди ушбу

$$w = e^{ax + \beta x} = e^{(a + \beta)x}$$

кўрсаткичли функцияни қараймиз, бу ерда α ва β ўзгармас ҳақиқий сонлар, x ҳақиқий ўзгарувчи. Бу w функция ҳақиқий

ўзгарувчининг комплекс функцияси, уни (1) формулага мувофиқ бундай ёзиш мумкин:

$$w = e^{ix} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

ёки

$$w = e^{ix} \cos \beta x + i e^{ix} \sin \beta x.$$

w_x ҳосилани топамиз. (9) формулага асосан:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{ix} \cos \beta x)' + i (e^{ix} \sin \beta x)' = e^{ix} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \\ &+ i e^{ix} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \alpha [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] + \\ &+ i \beta [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = (\alpha + i\beta) [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta) e^{(i\beta + \alpha)x}. \end{aligned}$$

Демак, агар $w = e^{(i\beta + \alpha)x}$ бўлса, $w' = (\alpha + i\beta) e^{(i\beta + \alpha)x}$ ёки

$$[e^{(i\beta + \alpha)x}]' = (\alpha + i\beta) e^{(i\beta + \alpha)x}. \quad (10)$$

Шундай қилиб, k комплекс сон (хусусий ҳолда ҳақиқий сон) ва x ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда

$$(e^{kx})' = k e^{kx}. \quad (9')$$

Кўрсаткичли функцияни дифференциаллашнинг одатдаги формуласини ҳосил қилдик. Энди

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k (e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

ва ҳар қандай n учун

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Бу формулалар бизга бундан кейин керак бўлади.

5-§. Эйлер формуласи.

Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли

Агар утган параграфнинг (1) формуласида $x = 0$ десак, унда

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (1)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу — кўрсаткичи мавҳум сон бўлган кўрсаткичли функцияни тригонометрик функциялар орқали ифодаловчи *Эйлер формуласидир*.

(1) формулада у ни — у билан алмаштириб,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. (1) ва (2) тенгликлардан $\cos y$ ва $\sin y$ ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сунгги формулалардан фойдаланиб, жумладан, $\cos \varphi$ ва $\sin \varphi$ ни уларнинг ҳар қандай бутун мусбат даражаларини ва шу даражалар кўпайтмасини каррали ёйларнинг синуслари ва косинуслари орқали тасвирлашимиз мумкин.

1-мисол.

$$\begin{aligned} \cos^2 y &= \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) = \\ &= \frac{1}{4} [(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)] = \frac{1}{4} (2 \cos 2y + 2) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2-мисол. } \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли. Комплекс сонни тригонометрик шаклда тасвирлаймиз:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

бу ерда r комплекс соннинг модули, φ комплекс соннинг аргументи. Эйлер формуласига кўра

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Демак, ҳар қандай комплекс сонни ушбу кўрсаткичли шаклда тасвирлаш мумкин:

$$z = re^{i\varphi}.$$

3-мисол. 1, i , -2 , $-i$ сонлар кўрсаткичли шаклда ифодалансин. Ечиш.

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi},$$

$$-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = e^{-\frac{\pi}{2} i}.$$

Кўрсаткичли функциянинг 4- § даги (3), (6) ва (7) хоссаларига асосан кўрсаткичли шаклдаги комплекс сонлар устида амаллар бажариш осон.

Ушбу комплекс сонлар берилган бўлсин:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Бу ҳолда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad (5)$$

бу натижа 2- § даги (3') формула билан бир хил.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (6)$$

бу формула 2- § даги (5) формула билан бир хил.

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}; \quad (7)$$

бу формула 3- § даги (1) формула билан бир хил.

$$\sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1); \quad (8)$$

бу формула 3- § даги (2) формула билан бир хил.

6- §. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш

Маълумки,

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

функция, n бутун мусбат сон бўлганда, кўпҳад (полином) ёки x нинг бутун рационал функцияси деб аталади; n сони кўпҳаднинг даражаси дейилади. Бу ерда $A_0, A_1, \dots, A_n$ коэффициентлар ҳақиқий ёки комплекс сонлар; эркин ўзгарувчи x ҳам ҳақиқий, ҳам комплекс қийматлар олиши мумкин. Ўзгарувчи x нинг кўпҳадни нолга айлантирадиган қиймати кўпҳаднинг илдизи деб аталади;

1- теорема (Безу теоремаси). Кўпҳад $f(x)$ ни $x - a$ айирмага бўлганда $f(a)$ га тенг қолдиқ ҳосил бўлади.

Исбот. $f(x)$ ни $x - a$ га бўлганда бўлинмада даражаси $f(x)$ даражасидан битта кам бўлган $f_1(x)$ кўпҳад ҳосил бўлиб, қолдиқ ўзгармас R бўлади. Шунга кўра бундай тенгликнинг ёзиш мумкин:

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R. \quad (1)$$

Бу тенглик x нинг a га тенг бўлмаган ҳамма қийматлари учун тўғри ($x = a$ бўлганда $x - a$ га бўлишнинг маъноси бўлмайди).

Энди x ни a га интилишга мажбур қиламиз. Унда (1) тенглик чап томонининг лимити $f(a)$ га, ўнг томонининг лимити R га тенг бўлади. $f(x)$ ва $(x - a)f_1(x) + R$ функциялар (ҳамма $x \neq a$ учун) ўзаро тенг бўлгани учун уларнинг $x \rightarrow a$ даги лимитлари ҳам тенг бўлади, яъни $f(a) = R$.

Натижа. Агар a кўпҳаднинг илдизи, яъни $f(a) = 0$ бўлса, $f(x)$ кўпҳад $x - a$ га қолдиқсиз бўлинади, демак, кўпайтма шаклида тасвирланади:

$$f(x) = (x - a)f_1(x),$$

бу ерда $f_1(x)$ — кўпҳад.

1-мисол. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ кўпҳад $x = 1$ да нолга айланади, яъни $f(1) = 0$, шунинг учун бу кўпҳад $x - 1$ га қолдиқсиз бўлинади:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Энди бир x номаълумли тенгламаларни қарашга ўтаемиз.

Тенгламадаги x ўрнига қўйганда тенгламани айниятга айлантирадиган ҳар қандай (ҳақиқий ёки комплекс) сон тенгламанинг илдизи деб аталади.

2-мисол. $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$, $x_3 = \frac{9\pi}{4}$, ..., сонлар $\cos x = \sin x$ тенгламанинг илдизларидир.

Агар тенглама $P(x) = 0$ шаклда бўлиб, бу ерда $P(x)$ n -даражали кўпҳад бўлса, бу тенглама n -даражали алгебраик тенглама дейилади. Таърифдан алгебраик тенглама $P(x) = 0$ нинг илдизлари $P(x)$ кўпҳад илдизларидан иборат эканлиги чиқади.

Ҳар қандай тенглама илдизга эга бўладими? деган савол туғилади.

Тенглама алгебраик бўлмаса, жавоб салбий бўлади: шундай ноалгебраик тенгламалар мавжудки, уларнинг на ҳақиқий, на комплекс ҳеч қандай илдизи бўлмайди, бунга $e^x = 0$ тенглама*) мисол бўла олади.

*) Зотан, агар $x_1 = a + ib$ сон бу тенгламанинг илдизи бўлса эди, ушбу айният $e^{a+ib} = 0$ ёки (Эйлер формуласига биноан) $e^a (\cos b + i \sin b) = 0$ айният ўринали бўлар эди. Лекин a нинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматда нолга тенг бўлмайди; $\cos b + i \sin b$ ҳам нолга тенг эмас (чунки бу соннинг модули b нинг ҳар қандай қиймати учун $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$). Демак, $e^a (\cos b + i \sin b)$ кўпайтма ҳам нолга тенг эмас, яъни $e^{a+ib} \neq 0$, бу эса $e^x = 0$ тенглама илдизга эга эмас деган сўздир.

Аммо алгебраик тенглама булган ҳолда қўйилган саволга жавоб ижобийдир. Бу жавоб алгебранинг ушбу асосий теоремаси билан берилади:

2-теорема (алгебранинг асосий теоремаси). *Ҳар қандай бутун рационал $f(x)$ функция энг камида битта, ҳақиқий ёки комплекс илдизга эгадир.*

Бу теорема олний алгебрада исбот қилинади. Бу ерда биз бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Алгебранинг асосий теоремасидан фойдаланиб, ушбу теоремани исбот қилиш осон:

3-теорема. *n -даражали ҳар қандай кўпҳад $x - a$ шаклдаги n та чизиқли купайтувчига ва x^n олдидаги коэффициентга тенг купайтувчига ажралади.*

Исбот. $f(x)$ ни n -даражали ушбу

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

кўпҳаддан иборат деб фараз қилайлик. Бу кўпҳад асосий теоремага кўра энг камида битта илдизга эга, у илдизни a_1 билан белгилаймиз. Унда кўпҳадни Безу теоремасининг натижасига асосан бундай ёзишимиз мумкин:

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x),$$

бу ерда $f_1(x)$ $n - 1$ -даражали кўпҳад; шунингдек $f_1(x)$ ҳам илдизга эга. Уни a_2 билан белгилаймиз. Унда

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

бу ерда $f_2(x)$ $n - 2$ -даражали кўпҳад. Шунинг сингари

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x).$$

Чизиқли купайтувчиларга ажратиш процессини шундай давом эттириб, ушбу муносабатга келиб етамиз:

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n.$$

бу ерда f_n полинчи даражали кўпҳад, яъни тайин сон. Бу сон x^n олдидаги коэффициентга тенг, яъни $f_n = A_0$.

Ҳосил қилинган тенгликларга асосан, ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$f(x) = A_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n). \quad (2)$$

Бу (2) ажралмадан $a_1, a_2, \dots, a_n$ сонлар кўпҳаднинг илдизлари эканлиги келиб чиқади, чунки $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ ўрнига қўйилганда тенгликнинг унг томони, демак, чап томони ҳам, нолга айланади.

3-мисол. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ купҳад,

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$$

булганда нолга айланади. Демак,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ дан бошқа ҳеч қандай $x = a$ қиймат $f(x)$ купҳаднинг илдизи бўла олмайди, чунки $x = a$ да (2) тенгликнинг ўнг томонидаги купайтувчиларнинг ҳеч бири нолга айланмайди. Бундан ушбу натижа чиқади.

n-даражали купҳад n тадан ортиқ ҳар хил илдизларга эга бўлолмайди.

Аммо бу ҳолда ушбу теоремага ўрин бор:

4-теорема. Агар x нинг $n+1$ та, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ҳар хил қийматларида n -даражали икки $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ купҳаднинг қийматлари бир хил бўлса, у купҳадлар бири-бирига айнан тенгдир.

Исбот. Берилган купҳадлар айирмасини $f(x)$ билан белгилаймиз:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Шартга мувофиқ $f(x)$ даражаси n дан юқори бўлмаган, $a_1, a_2, \dots, a_n$ нуқталарда нолга айланадиган купҳаддир. Демак, уни ушбу шаклда тасвирлаш мумкин:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Аммо шартга кўра $f(x)$ купҳад a_0 нуқтада ҳам нолга айланади. У ҳолда $f(a_0) = 0$ ва бунда ҳам чизиқли купайтувчиларнинг ҳеч бири нолга тенг эмас. Шунинг учун $A_0 = 0$, бундан эса (2) тенгликка мувофиқ $f(x)$ айнан нолга тенглиги келиб чиқади. Демак,

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0 \quad \text{ёки} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

5-теорема. Агар.

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

купҳад айнан нолга тенг бўлса, унинг ҳамма коэффициентлари нолга тенг.

Исбот. Бу купҳадни (1) формула буйича купайтувчиларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} P(x) &= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = \\ &= A_0(x - a_1) \dots (x - a_n). \end{aligned} \quad (1')$$

Агар бу купҳад айнан нолга тенг бўлса, бу ҳолда x нинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ қийматларидан бошқа биронта қийматида ҳам нолга

тенг бўлади. Лекин у вақтда $x - a_1, \dots, x - a_n$ айирмалардан ҳеч бири нолга тенг эмас ва, демак, $A_0 = 0$.

$A_1 = 0, A_2 = 0$ ва ҳоказо эканлиги ҳам шу тариқа исботланади.

6-теорема. Агар икки кўпҳад бир-бирига айнан тенг бўлса, кўпҳадлардан бирикиннг коэффициентлари иккинчисининг мос коэффициентларига тенгдир.

Бу берилган кўпҳадларнинг айирмаси айнан нолга тенг кўпҳад бўлишидан келиб чиқади. Демак, бундан олдинги теоремага асосан, унинг ҳамма коэффициентлари нолга тенгдир.

4-мисол. Агар $ax^3 + bx^2 + cx + d$ кўпҳад $x^3 - 5x$ кўпҳадга айнан тенг бўлса, унда $a = 0, b = 1, c = -5, d = 0$ бўлади.

7-§. Кўпҳаднинг каррали илдизлари ҳақида

Агар n -даражали кўпҳаднинг чизиқли кўпайтувчиларга ажралмаси

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \quad (1)$$

да баъзи чизиқли кўпайтувчилар бир хил бўлса, уларни бирлаштириш мумкин ва унда кўпҳаднинг кўпайтувчиларга ёйилмаси ушбу кўринишда бўлади.

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

Бунда

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Бу ҳолда a_1 илдиз k_1 каррали илдиз, a_2 илдиз k_2 каррали илдиз ва ҳоказо деб аталади.

Мисол. Ушбу кўпҳад $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ қуйидаги чизиқли кўпайтувчиларга ажралади;

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1).$$

Бу ёйилмани бундай ёзиш мумкин;

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 1).$$

$a_1 = 1$ — икки каррали илдиз; $a_2 = 1$ — содда илдиз.

Агар кўпҳад k -каррали a илдизга эга бўлса, кўпҳад k та бир хил илдизга эга деб ҳисоблаймиз. Унда кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш ҳақидаги теоремадан ушбу теорема келиб чиқади.

Ҳар қандай n -даражали кўпҳад расо n та (ҳақиқий ёки комплекс) илдизга эга бўлади.

Изоҳ.

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

кўпҳаднинг илдизлари ҳақида айтилганларнинг ҳаммасини ушбу

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

алгебрлик тенгламанинг илдизлари терминларида ифодалаш мумкин.

Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

Теорема. *Агар a_1 сон $f(x)$ кўпҳаднинг $k_1 > 1$ каррали илдизи бўлса, шу сон $f'(x)$ ҳосила учун $k_1 - 1$ каррали илдиз бўлади.*

Исбот. Агар $x = a_1$ сон $f(x)$ кўпҳаднинг $k_1 > 1$ каррали илдизи бўлса, (1') формуладан

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x)$$

келиб чиқади, бу ерда $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$ кўпайтмис, $x = a_1$ бўлганда нолга айланмайди, яъни $\varphi(a_1) \neq 0$. Дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k_1 (x - a_1)^{k_1-1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) = \\ &= (x - a_1)^{k_1-1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)]. \end{aligned}$$

Бундай белгилаймиз:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

У ҳақда

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \psi(x).$$

Бунда

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

яъни $x = a_1$ сон $f'(x)$ кўпҳаднинг $k_1 - 1$ каррали илдизидир. Теореманинг исботидан, агар $k_1 = 1$ бўлса, a_1 сон $f'(x)$ ҳосиланинг илдизи эмаслиги келиб чиқади.

Исботланган теоремадан яна ушбу натижа чиқади: a_1 сон $f''(x)$ ҳосила учун $k_1 - 2$ каррали илдиз, $f'''(x)$ ҳосила учун $k_1 - 3$ каррали илдиз, $\dots$, $f^{(k_1-1)}(x)$ ҳосила учун бир каррали (яъни содда) илдиз бўлиб, $f^{(k_1)}(x)$ ҳосила учун илдиз бўлмайди, яъни

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

лекин

$$f^{(k_1)}(a_1) \neq 0.$$

8- §. Комплекс илдиэларга эга бўлган кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш

VII боб 7- § (1) формуладаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ илдиэлар ҳақиқий ва комплекс бўлиши мумкин. Ушбу теоремага ўрин бэр.

Теорема. Агар коэффициентлари ҳақиқий бўлган $f(x)$ кўпхад $a + ib$ комплекс илдиэга эга бўлса, шу кўпхад $a - ib$ қўшма комплекс илдиэга ҳам эга бўлади.

Исбот. Агар $f(x)$ кўпхаддаги x ўрнига $a + ib$ комплекс сонни қўйиб, даражаларга кўтаришип бажариб, i иштирок этмаган ҳадларни айрим ва i иштирок этган ҳадларни айрим тупласак, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$f(a + ib) = M + iN,$$

бу ерда M ва N миқдорлар i қатнашмаган ифодалардир. $a + ib$ кўпхаднинг илдиэи бўлгани учун:

$$f(a + ib) = M + iN = 0,$$

буидан

$$M = 0, \quad N = 0.$$

Энди кўпхаддаги x ўрнига $a - ib$ ифодани қўямиз. Натижада (шу бобнинг 2- § охиридаги 3- изохга асосан) $M + iN$ га қўшма бўлган $M - iN$ сон чиқади, яъни

$$f(a - ib) = M - iN.$$

Юқорида айтилганидек $M = 0, N = 0$ бўлгани учун $f(a - ib) = 0$, яъни $a - ib$ комплекс сон кўпхаднинг илдиэидир.

Шундай қилиб,

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

ажралмага комплекс илдиэлар ўзининг қўшмаси билан жуфт ҳолда киради.

Бир жуфт қўшма комплекс илдиэларга мос чизиқли кўпайтувчиларни кўпайтириб, ҳақиқий коэффициентли квадрат учхад ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} [x - (a + ib)][x - (a - ib)] &= [(x - a) - ib][(x - a) + ib] = \\ &= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

бу ерда $p = -2a, q = a^2 + b^2$ ҳақиқий сонлар.

Агар $a + ib$ сон k каррали илдиэ бўлса, унга қўшма бўлган $a - ib$ сон ҳам худди шундай k каррали илдиэ бўлиши керак, яъни кўпхад ажралмасида $x - (a + ib)$ чизиқли кўпайтувчи неча марта учраса, $x - (a - ib)$ чизиқли кўпайтувчи ҳам шунча марта учрайди.

Шундай қилиб, ҳақиқий коэффициентли купҳад тегишли даражадаги чизиқли ва квадрат учҳад шаклидаги ҳақиқий купайтувчиларга ажралади, яъни:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

Бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

9- §. Интерполяциялаш. Лагранжнинг интерполяцион формуласи

Биронта ҳодисани урганишда y ва x миқдорлар орасида шу ҳодисанинг миқдор томонини аниқловчи функционал боғланиш борлиги аниқланган бўлсин; бунда $y = \varphi(x)$ функция номаълум бўлиб, лекин тажриба асосида аргументнинг $[a, b]$ кесмадаги $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларида функциянинг $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари аниқланган бўлсин.

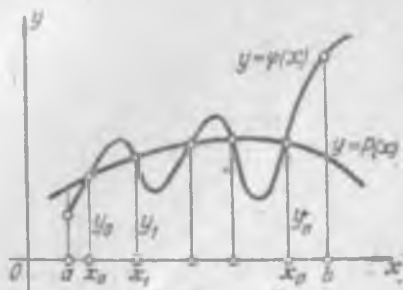
Масала $y = \varphi(x)$ номаълум функцияни $[a, b]$ кесмада аниқ ёки тақрибий тасвирлайдиган, ҳисоблаш учун мумкин қадар қулай (масалан купҳад) шаклида функция топишдан иборат. Шу масалани умумийроқ шаклда бундай айтиш мумкин: $[a, b]$ кесмада номаълум $y = \varphi(x)$ функциянинг $n + 1$ та ҳар хил $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматлари берилган:

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \dots, \quad y_n = \varphi(x_n);$$

$\varphi(x)$ функцияни тақрибий ифодаловчи, даражаси $< n$ бўлган $P(x)$ купҳадни топиш талаб этилади.

Бундай купҳад сифатида $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматлари $\varphi(x)$ функциянинг $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари билан мос равишда бир хил бўлган купҳадни олиш кераклиги табиийдир (165- расм). У вақтда „функцияни интерполяциялаш масаласи“ деб аталадиган бу масала бундай ифодаланади: берилган $\varphi(x)$ функция учун берилган $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларда

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0), \\ y_1 &= \varphi(x_1), \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= \varphi(x_n) \end{aligned}$$



165- расм.

қийматлар қабул қиладиган, даражаси $< n$ бўлган $P(x)$ кўп-
ҳадни топиш керак.

Бундай кўпҳад сифатида n - даражали ушбу шаклдаги кўп-
ҳадни оламиз:

$$P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + C_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots \\ \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (1)$$

ва $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентларни

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_n) = y_n \quad (2),$$

шартлар бажариладиган қилиб аниқлаймиз.

(1) формулада $x = x_0$ деб фараз қиламиз; у вақтда (2) тенг-
ликларни эътиборга олиб, ушбунни топамиз:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

бундан

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Сунгра, $x = x_1$ фараз қилиб, ушбунни топамиз:

$$y_1 = C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n),$$

бундан

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Шу равишда қуйидагиларни топамиз:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)};$$

...

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Топилган қийматларни (1) формулага қўйиб, нзланган кўпҳа-
дни ҳосил қиламиз:

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots \\ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (3)$$

Бу формула *Лагранжнинг интерполяцион формуласи* деб аталади.

Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада $n+1$ -тартибли ҳосилага эга бўлса, $\varphi(x)$ функцияни $P(x)$ кўпхад билан алмаштиришдаги хато, яъни $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ миқдор ушбу тенгсизликни қаноатлантиради:

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Буни исботсиз қабул қиламиз.

Изоҳ. 6-§ даги 4-теоремадан шу келиб чиқадики топилган $P(x)$ кўпхад қўйилган шартларни қаноатлантирадиган бирдан-бир кўпхаддир.

Бошқа интерполяцион формулалар ҳам борлигини курсатамиз. Улардан бири Ньютоннинг интерполяцион формуласи бўлиб, 10-§ да қаралган.

Мисол. Тажриба асосида $y = \varphi(x)$ функциянинг ушбу қийматлари топилган: $x_0 = 1$ бўлганда $y_0 = 3$, $x_1 = 2$ бўлганда $y_1 = -5$, $x_2 = -4$ бўлганда $y_2 = 4$. $y = \varphi(x)$ функцияни 2-даражали кўпхад билан тақрибий тасвирлаш талаб қилинади.

Ечиш. (3) формула бўйича ($n=2$ да) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-1-2)} \cdot 4.$$

ёки

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

10-§. Ньютоннинг интерполяцион формуласи

$y = \varphi(x)$ функциянинг $(n+1)$ -қиймати маълум бўлсин, яъни аргументнинг $n+1$ та $x_0, x_1, \dots, x_n$ қийматларида функциянинг қийматлари $y_0, y_1, \dots, y_n$ бўлсин. Бунда аргументнинг қўшни қийматлари орасидаги айирма ўзгармас бўлсин. Уни h билан белгилаймиз. Шундай қилиб, аргументнинг тегишли қийматларида номаълум $y = \varphi(x)$ функциянинг қийматлари жадвалига эга бўламиз.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$\dots$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Аргумент x нинг тегишли қийматларида даражаси n дан юқори бўлмаган тегишли қийматлар оладиган кўпхад тузамиз. Бу кўпхад тақрибан $\varphi(x)$ функцияни ифодалайди.

Бунинг тўғрилигига тегишли қийматларни ўрнига қўйиб ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шу нфода *Ньютоннинг интерполяцион формуласи* ёки *интерполяцион кўпҳадидир*.

Моҳияти жиҳатидан Лагранж кўпҳади билан Ньютон кўпҳади берилган жадвал учун айнан бир хил бўлиб, улар фақат ёзилиши билан фарқ қилади, чунки x нинг берилган $n + 1$ та қийматларида берилган $n + 1$ та қийматларга эга бўладиган даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳад ягона усулда топилади.

Кўп ҳолларда Ньютоннинг интерполяцион кўпҳади Лагранжнинг интерполяцион кўпҳадига қараганда қулайроқдир. Ньютон кўпҳадининг хусусияти шундан иборатки k - даражали кўпҳаддан $k + 1$ - даражали кўпҳадга ўтишда унинг дастлабки $k + 1$ ҳадлари ўзгармайди, фақат аргументнинг барча олдинги қийматларида нолга тенг бўлган янги бир ҳад ортади, холос.

Изоҳ. Лагранжнинг интерполяцион формуласи (9- § да (3) га қаранг) ва Ньютоннинг интерполяцион формуласи (4) формула (бўйича функциянинг $x_0 < x < x_n$ кесмадаги қийматлари аниқланади. Агар шу формулалар бўйича функциянинг $x < x_0$ даги қиймати аниқланса (бунинг $|x - x_0|$ кичик сон бўлганда қилиш мумкин), уни *жадвални орқага экстраполяция қилиши* дейилади. Агар функциянинг $x > x_n$ даги қиймати аниқланадиган бўлса, *жадвални олдинга экстраполяция қилиш* дейилади.

11- §. Дифференциаллашнинг сонли методи

Бирор номаълум $f(x)$ функциянинг қийматлари 10- § нинг бошида қаралган жадвал билан берилган бўлсин. Шу функциянинг тақрибий ҳосиласини топиш талаб қилинади. Бу масала қуйидагича ечилади. Лагранж ёки Ньютоннинг интерполяцион кўпҳади тузилади ва шу кўпҳаддан ҳосила топилади.

Кўпинча аргументнинг қўшни қийматлари орасидаги айирмалар тенг бўлган жадваллар қаралгани учун биз Ньютоннинг интерполяцион формуласидан фойдаланамиз. Аргументнинг учта x_0, x_1, x_2 қийматида функциянинг учта y_0, y_1, y_2 қийматлари берилган бўлсин. Бу ҳолда 10- § даги (2, кўпҳадни ёзамиз ва уни дифференциаллаймиз. Функция ҳосиласининг $x_0 \leq x \leq x_2$ кесмадаги тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$f'(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1 \right), \quad (1)$$

$x = x_0$ да

$$f'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \quad (2)$$

бўлади.

Агар 3- тартибли кўпқадни (10- § да (3)) қарасак, дифференциаллагандан сўнг унинг ҳосиласи учун ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h} \left[3 \left(\frac{x - x_0}{h} \right)^2 - 6 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) + 2 \right]. \quad (3)$$

Жумладан, $x = x_0$ бўлганда

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \quad (4)$$

Агар 10- § даги (4) формуладан фойдалансак, у ҳолда ҳосиланинг тақрибий ифодаси учун $x = x_0$ да ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \dots \quad (5)$$

Ҳосилаларга эга бўлган функция учун Δy_0 айирма h га нисбатан 1- тартибли чексиз кичик миқдор, $\Delta^2 y_0$ айирма 2-тартибли чексиз кичик миқдор, $\Delta^3 y_0$ айирма 3- тартибли чексиз кичик миқдор ва ҳоказо эканини қайд қилиб ўтамиз.

12- §. Функцияларни кўпқадлар билан энг яхши яқинлаштириш ҳақида. Чебишев назарияси

9 ва 10 параграфда қаралган масалалар муносабати билан ушбу саволни қўйиш табиий бўлади: $[a, b]$ кесмада $\varphi(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Шу функцияни аввалдан берилган ҳар қандай аниқлик даражаси билан $P(x)$ кўпқад шаклида тақрибий тасвирлаш мумкинми? Бошқача айтганда, $\varphi(x)$ ва $P(x)$ орасидаги айирманинг абсолют қиймати $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқтасида олдиндан берилган ϵ мусбат сондан кичик бўладиган $P(x)$ кўпқадни топиш мумкинми? Бу саволга ижобий жавоб*) қўйидаги теоремада берилган, биз буни исботсиз келтирамиз.

*) Лагранжнинг интерполяцион кўпқадни (9- § даги (3) га қаранг) қўйилган саволга жавоб берилади. Унинг қийматлари функциянинг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматларига тенг, лекин $[a, b]$ кесманинг бошқа нуқталарида унинг қийматлари функциянинг тегишли қийматларидан жуда узоқда бўлиши мумкин.

Вейерштрасс теоремаси. Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шу кесманинг ҳамма нуқталарида ушбу

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлиكنи қаноатлантирадиган $P(x)$ кўпхад мавжуддир. Машҳур совет математиги академик С. Н. Бернштейн берилган кесмада узлуксуз $\varphi(x)$ функцияга тақрибий тенг бўлган бундай кўпхадларни бевосита топишнинг қуйидаги усулини берди.

Масалан, $\varphi(x)$ функция $(0, 1)$ кесмада узлуксиз бўлсин. Ушбу ифодани тузамиз:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Бу ерда C_n^m — биномиал коэффициентлар, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — берилган функциянинг $x = \frac{m}{n}$ нуқтадаги қиймати. $B_n(x)$ ифода n - даражали кўпхад; у *Бернштейн кўпхади* деб аталади.

Агар ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлса, шундай Бернштейн кўпхадини топиш (яъни унинг даражаси n ни шундай танлаб олиш) мумкинки, x нинг $[0, 1]$ кесмадаги ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизлик.

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

қаноатланади.

Ҳар қандай $[a, b]$ кесма урнига $[0, 1]$ кесмани қараш умумийликини чегараламайди, чунки $x = a + t[b - a]$ алмаштириш билан ҳар қандай $[a, b]$ кесмани $[0, 1]$ кесмага айлантатириш мумкин. Бунда n - даражали кўпхад яна шу даражали кўпхадга алмашинади.

Функцияларни кўпхадлар билан энг яхши яқинлаштириш назариясининг ижодчиси математика фанининг энг буюк номояндаларидан бири бўлган рус математиги П. Л. Чебишевдир (1821 — 1894). Унинг бу соҳада эришган чуқур натижаларни кейинги математикларнинг ишларига катта таъсир этди. Бу назариянинг Чебишев томонидан барпо қилиниши, унинг машиналарда кенг фойдаланиладиган, шарнирли механизмлар назарияси ҳақидаги асаридан бошланади. Бундай механизмларни урганчиб, у берилган даражадаги бош ҳадининг коэффициенти бирга тенг бўлган ҳамма кўпхадлар орасида шу берилган кесмада нолдан энг кам фарқ қиладиган кўпхадни топиш масаласига келди. У бундай кўпхадларни топди ва кейинчалик олим-

лар уларни Чебишев кўпҳадлари деб атадилар. У кўпҳадлар кўпгина ажойиб хоссаларга ва ҳозирги вақтда математика ва техниканинг кўп масалаларини текширишда кучли қурол бўлиб хизмат қилмоқда.

VII бобга машқлар

1. $(3+5i)(4-i)$ топилсин. Жав. $17+17i$. 2. $(6+11i)(7+3i)$ топилсин. Жав. $9+95i$. 3. $\frac{3-i}{4+5i}$ топилсин. Жав. $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. 4. $(4-7i)^2$ топилсин. Жав. $-524+7i$. 5. $\sqrt{1}$ топилсин. Жав. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. $\sqrt{-5-12i}$ топилсин. Жав. $\pm(2-3i)$. 7. Ушбу ифодалар тригонометрик шаклга келтирилсин: а) $1+i$. Жав. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \sin \frac{\pi}{4}\right)$. б) $1-i$. Жав. $\sqrt{2}\times\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$. 8. $\sqrt[3]{1}$ топилсин. Жав. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}; -i; \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. 9. Қуйидаги ифодалар $\sin x$ ва $\cos x$ даражалари орқали ифодалансин: $\sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \sin 5x, \cos 5x$. 10. Каррали ёйлар синуси ва косинуси орқали ифодалансин: $\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x; \sin^2 x, \sin^3 x, \sin^4 x, \sin^5 x$. 11. $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ кўпҳад $x+4$ га бўлинсин. Жав. $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, яъни бўлинка $x^2-8x+40$; қолдиқ $f(-4)=-161$. 12. $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ кўпҳад $x+3$ га бўлинсин. Жав. $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. $f(x)=x^3-1$ ни $x-1$ га бўлиш керак. Жав. $f(x)=(x-1)(x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+x+1)$.

Ушбу ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар қўпайтувчиларга ажратилсин: 14. $f(x)=x^4-1$. Жав. $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. Жав. $f(x)=(x-2)(x+1)$. 16. $f(x)=x^3+1$. Жав. $f(x)=(x+1)\times(x^2-x+1)$.

17. Тажриба асосида x нинг функцияси y нинг ушбу қийматлари ҳосил қилинган:

$$\begin{array}{ll} x_1=0 & \text{бўлганда } y_1=4, \\ x_2=1 & \quad \quad y_2=6, \\ x_3=2 & \quad \quad y_3=10. \end{array}$$

Функция иккинчи даражали кўпҳад кўринишида тасвирлансин. Жав. x^2+x+4 .

18. $x=1, 2, 3, 4, 5$ бўлганда мос равишда $2, 1, 5, 0$ қийматлар оладиган тўртинчи даражали кўпҳад топилсин. Жав. $-\frac{7}{6}x^4+\frac{79}{6}x^3-\frac{151}{3}x^2+\frac{226}{3}x-35$.

19. $x=2, 4, 5, 10$ бўлганда мос равишда $3, 7, 9, 19$ қийматлар оладиган мумкин қадар қуйи даражали кўпҳад топилсин. Жав. $2x-1$.

20. $y=\sin \pi x$ функция учун $[0, 1]$ кесмада 1-, 2-, 3- ва 4- даражали Бернштейн кўпҳадлари топилсин. Жав. $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$;

$B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.

VIII БОБ

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг таърифи

Бир ўзгарувчининг функциясини қараган пайтда, кўг ҳодисаларни ўрганишда икки ва ундан ортиқ эркин ўзгарувчиларнинг функциялари ҳам учрашини кўрсатган эдик. Бир неча мисол келтирамиз.

1-мисол. Томонларининг узунлиги x ва y га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи S ушбу формула билан ифодаланади:

$$S = xy$$

x ва y нинг ҳар бир қўш қийматига S юзининг аниқ бир қиймати мос келади; S икки ўзгарувчининг функциясидир.

2-мисол. Қирраларининг узунликлари x, y, z га тенг бўлган тўғри тўртбурчакни параллелепипеднинг ҳажми V ушбу формула билан ифодаланади:

$$V = xyz.$$

Бу ерда V учта ўзгарувчи x, y, z нинг функциясидир.

3-мисол. Стволи горизонтга φ бурчак остида олма қилиб қўйилган тўпдан v_0 бошланғич тезлик билан отилган снаряднинг учиб узоқлиги R (ҳавонинг қаршилиги эътиборга олинмаганда) ушбу формула билан ифодаланади:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

Бу ерда g — оғирлик кучининг тезланиши. Бу формула v_0 ва φ нинг ҳар бир қўш қийматида R нинг аниқ қийматини беради, яъни R икки ўзгарувчи v_0 ва φ унинг функциясидир.

4-мисол.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Бу ерда u тўрт ўзгарувчи x, y, z, t нинг функциясидир.

1-таъриф. Агар бир-бирига боғлиқ булмаган n икки ўзгарувчи x ва y нинг бирор D ўзгариш соҳасидаги ҳар бир қўш (x, y) қийматига z миқдорининг аниқ бир қиймати мос келса, z икки эркин ўзгарувчи x, y ва y нинг D соҳада аниқланган функцияси дейилади.

Икки Ҳагарувчининг функцияси символик тарзда бундай ифодаланади:

$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y) \quad \text{ва} \quad x, y, z.$$

Икки Ҳагарувчининг функцияси, масалан, жадвал ёрдами билан берилиши ёки, юқорида қаралган турт мисолдаги каби, аналитик усулда — формула ёрдами билан берилиши мумкин. Формулага асосан эркин Ҳагарувчиларининг баъзи қуш қийматлари учун функция қийматларининг жадвалини тузиш мумкин. Чунончи, биринчи мисол учун ушбу жадвалини тузиш мумкин:

$$S = xy$$

$y \backslash x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Бу жадвалда x ва y нинг тайин қийматларига тегишли сатр ва устуннинг кесилишган ерида S функциянинг мос қиймати қўйилган.

Агар функционал боғланиш $z = f(x, y)$ бирон ҳодисани экспериментал ўрганишда z миқдорни ўлчаш натижасида ҳосил бўлса, z ни икки Ҳагарувчининг функцияси сифатида тасвирловчи жадвал ҳосил бўлади. Бу ҳолда функция фақат жадвал билан бериледи.

Бир Ҳагарувчининг функцияси каби икки Ҳагарувчининг функцияси ҳам, умуман айтганда, x ва y нинг ҳар қандай қийматида мавжуд бўлавермайди.

2-таъриф. $z = f(x, y)$ функция аниқланган x ва y қуш (x, y) қийматларининг туплами функциянинг **аниқлик соҳаси** ёки **мавжудлик соҳаси** деб аталади.

Функциянинг аниқлик соҳаси геометрик тарзда кургазмали тасвирланади. Агар x ва y нинг ҳар бир қуш қийматининг Oxy текисликда $M(x, y)$ нуқта билан тасвирласак, функциянинг аниқлик соҳаси текисликдаги нуқталарининг бирор туплами кўринишида тасвирланади. Нуқталарининг бу тупламининг ҳам функциянинг аниқлик соҳаси деб атаймиз. Функциянинг аниқлик соҳаси, жумладан, бутун текислик бўлиши ҳам мумкин. Бундан бўён асосан текисликнинг чизиқлар билан чегараланган қисмидан иборат бўлган соҳалар билан иш кўраимиз. Берилган соҳани чегараловчи чизиқни соҳанинг **чегараси**

деб атаймиз. Соҳанинг чегарада ётмаган нуқталарининг соҳанинг **ички** нуқталари деб атаймиз. Фақат ички нуқталардан иборат бўлган соҳа **очиқ соҳа** дейилади. Агар соҳага чегаранинг нуқталари ҳам кирса, **соҳа ёпиқ** деб аталади. Агар шундай Ҳагармас C сон мавжуд бўлсаки, координаталар боши O дан соҳанинг исталган M нуқтасигача бўлган масофа C дан кичик, яъни $|OM| < C$ бўлса, соҳа чегараланган деб аталади.

5-Мисол.

$$z = 2x - y$$

Функциянинг табиий аниқлик соҳаси белгилансин.

$2x - y$ аналитик ифода x ва y нинг ҳар қандай қийматида маънога эга. Демак, функциянинг табиий аниқлик соҳаси бутун Oxy текислиги бўлади.

6-мисол.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

z ҳақиқий қийматга эга бўлиши учун, радиал остида номанфий сон туриши, яъни x ва y ушбу тенгсизлиқни қаноатлантириши керак

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \quad \text{ёки} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Координаталари бу тенгсизлиқни қаноатлантирувчи ҳамма $M(x, y)$ нуқталар радиуси 1 га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган доирада ва у доира чегарасида ётади.

7-мисол.

$$z = \ln(x + y).$$

Логарифмлар фақат мусбат сонлар учун аниқланган бўлади, шунинг учун ушбу тенгсизлик қаноатланиши керак:

$$x + y > 0 \quad \text{ёки} \quad y > -x.$$

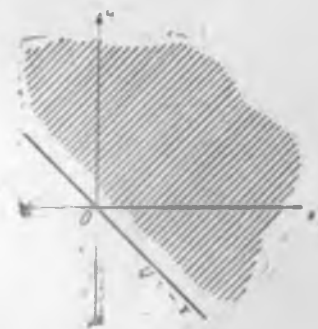
Бу, z функциянинг табиий аниқлик соҳаси $y = -x$ тўғри чизиқдан юқоридаги ярим текислик бўлади деган сўзидир; тўғри чизиқнинг ўзи бу соҳага кирмайди (166-расм).

8-мисол. Учбурчакнинг юзи S — асоси x ва баландлиги y нинг функцияси:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

Бу функциянинг аниқлик соҳаси $x > 0$, $y > 0$ соҳадир (чунки учбурчакнинг асоси ва баландлиги манфий сон ва ноль була олмайди). Бу функциянинг аниқлик соҳаси функцияни белгилловчи аналитик ифоданинг табиий аниқлик соҳасидан фарқ қилади, чунки $\frac{xy}{2}$ ифоданинг табиий аниқлик соҳаси бутун Oxy текислиги бўлиши равшан кўриниб турибди.

Икки Ҳагарувчи функциясининг таърифининг уч ёки undan ортиқ Ҳагарувчи бўлган ҳол учун умумлаштириш осон.



166-расм.

3- таъриф. Агар $x, y, z, \dots, u, t$ ҳагаарувчиларнинг ҳар бир қийматлар тўпламига ҳагаарувчи w нинг аниқ қиймати мос келса, w ни $x, y, z, \dots, u, t$ эрки $уагаарувчиларнинг функцияси$ деб атаймиз ва

$$w = F(x, y, z, \dots, u, t) \text{ ёки } w = f(x, y, z, \dots, u, t)$$

ва ҳ. к. кўринишда ёзамиз.

Икки ҳагаарувчининг функцияси сингари, уч, тўрт ва ундан ортиқ ҳагаарувчилар функциясининг аниқлик соҳаси ҳақида сузлаш мумкин.

Масалан, уч ҳагаарувчининг функцияси учун аниқлик соҳаси уч сон (x, y, z) нинг бирор тўплами булади. Маълумки, ҳар бир учта сон $Q_{хуз}$ фазо координаталар системасида бирор $M(x, y, z)$ нуқтани беради. Демак, уч ҳагаарувчи функциясининг аниқлик соҳаси фазо нуқталарининг бирор тўплами бўлади.

Шунга ўхшаш, тўрт ҳагаарувчи функцияси $u = f(x, y, z, t)$ нинг аниқлик соҳаси тўртта сон (x, y, z, t) нинг бирор тўплами булади дейиш мумкин. Лекин тўрт ва ундан ортиқ ҳагаарувчилар функциясининг аниқлик соҳасини содда геометрик маънода изоҳлаб булмайти.

2- мисолда x, y, z нинг барча қийматларида аниқланган уч ҳагаарувчи функцияси келтирилган.

4- мисолда тўрт ҳагаарувчининг функцияси келтирилган.

9- мисол.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Бу ерда w тўрт ҳагаарувчи x, y, z, u нинг функцияси бўлиб, ҳагаарувчиларнинг ушбу

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 > 0$$

муносабатни қаноатлантирувчи қийматларида аниқланган.

2- §. Икки ҳагаарувчи функциясининг геометрик тасвири

Оху текисликдаги G соҳада (бу соҳа, баъзан; бутун текисликдан иборат бўлиши ҳам мумкин) аниқланган

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

функцияни ва $O_{хуз}$ тўғри бурчакли Декарт координаталари системасини қараймиз (167- расм). G соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан $O_{ху}$ текисликка перпендикуляр ўтказамиз ва унда $f(x, y)$ га тенг кесма ажратамиз.

У ҳолда фазода координаталари

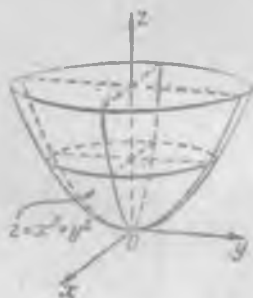
$$x, y, z = f(x, y)$$

бўлган P нуқтани ҳосил қиламиз.

Координаталари (1) тенгламани қаноатлантирадиган P нуқталарнинг геометрик ўрни икки ўзгарувчи функциясининг графиги деб аталади. Аналитик геометрия курсидан биламизки, (1) тенглама фазода бироқ сиртини белгилайди. Шундай қилиб, икки ўзгарувчи функциясининг графиги, Oxy текисликдаги проекцияси функциянинг аниқлик соҳасидан иборат бўлган сирт бўлади. Oxy текисликка перпендикуляр бўлган ҳар бир тўғри чизиқ $z = f(x, y)$ сирт билан бир мартадан ортиқ кесишмайди.



167- расм.



168- расм

Мисол. Геометриядан маълумки, $z = x^2 + y^2$ функциянинг графиги айланish параболоиддан иборатдир. (168- расм.)

Изоҳ. Уч ва undan ортиқ ўзгарувчининг функциясини фазода график ёрдами билан тасвирлаш мумкин: эмас.

3- §. Функциянинг хусусий ва тўла орттирмаси

$z = f(x, y)$ сиртнинг Oxz текисликка параллел, $y = \text{const}$, текислик билан кесишганидан ҳосил бўлган PS чизиқни қараймиз (169- расм).

Бу текисликда y ўзгармас қийматни сақлагани учун, z фақат PS чизиқ бўйлаб x нинг ўзгаришига боғлиқ равишда ўзгаради. Эркин ўзгарувчи x га Δx орттирма берамиз; unda z ҳам орттирма олади, бу орттирма z нинг x бўйича хусусий орттирмаси деб аталади ва $\Delta_x z$ билан белгиланади (шаклда SS' кесма), яъни

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (1)$$

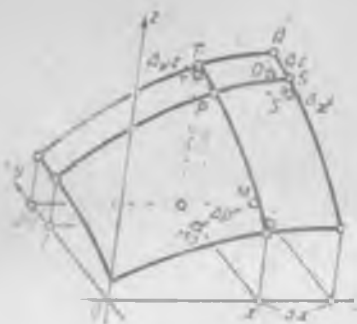
Шунга ўхшаш, агар x ҳаваирмас қиймати сақлаб, y га Δy орттирма берсак, z ҳам орттирма олади, бу орттирма z нинг y бўйича хусусий орттирмаси деб аталади ва $\Delta_y z$ билан белгиланади (шаклда $T'T''$ кесма):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2)$$

Функция $\Delta_y z$ орттирмаси $z = f(x, y)$ сиртини Оуз текисликка параллел $x = \text{const}$ текислик билан кесишган ерида ҳосил бўлган „чизиқ бўйлаб“ олади.

Ниҳоят аргумент x га Δx орттирма ва аргумент y га Δy орттирма бериб, z учун янги орттирма ҳосил қиламиз; бу орттирма функция z нинг *тула орттирмаси* деб аталади ва ушбу формула билан белгиланади:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$



169- расм.

169- расмда Δz орттирма QQ' кесма билан тасвирланган.

Тула орттирма, умуман айт. ганда, хусусий орттирмалар йиғиндисига тенг эмас, яъни

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Мисол. $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy =$$

$$= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad \Delta x = 0,2, \quad \Delta y = 0,3$$

бўлганда

$$\Delta_x z = 0,4, \quad \Delta_y z = 0,3, \quad \Delta z = 0,76.$$

Иккитадан ортиқ ҳаваирувчилар функциясининг хусусий ва тула орттирмалари ҳам шу каби белгиланади. Чунончи уч ҳаваирувчининг функцияси $u = f(x, y, t)$ учун:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

4- §. Бир неча ҳаваирувчи функциясининг узлуксизлиги

Битта муҳим ёрдамчи тушунчани, яъни берилган нуқта атрофи тушунчасини киритамиз.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг r радиусли атрофи деб

$$\sqrt{(x - x_0)^2} + \sqrt{(y - y_0)^2} < r$$

тенгсизликин қаноатлантирадиган ҳамма (x, y) нуқталар тўпламига яъни маркази $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада бўлган r радиусли доира ичида ётган ҳамма нуқталар тўпламига айтилади.

Агар биз $f(x, y)$ функция „ (x_0, y_0) нуқта яқинида“ ёки „ (x_0, y_0) нуқта атрофида“ фалон хоссага эга десак, ундан маркази (x_0, y_0) нуқтада бўлган шундай доира топилдики, унинг ҳамма нуқталарида функция айтилган хоссага эга бўлади деган маънони тушунамиз.

Бир неча ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги тушунчасини қарашдан аввал бир неча ўзгарувчи функциясининг лимити тушунчасини қараймиз*).

Оху текислиkning бирон G соҳасида аниқланган

$$z = f(x, y)$$

функция берилган бўлсин.

G соҳада ёки унинг чегарасида ётган тайин $M_0(x_0, y_0)$ нуқтани қараймиз (170-расм).

1-таъриф. „Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай $r > 0$ сон топилсакки, $MM_0 < r$ тенгсизлик қаноатланадиган барча $M_0(x, y)$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик қаноатланса, ўзгарувчи $M(x, y)$ нуқта $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага интилганда $f(x, y)$ функция A лимитга интилади дейилади.

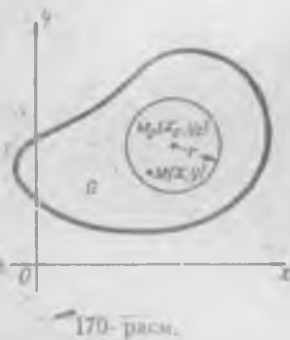
Агар A сон $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити бўлса, бундай ёзилади:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

2-таъриф. $M_0(x_0, y_0)$ нуқта $f(x, y)$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги нуқта бўлсин. Агар $M(x, y)$ нуқта функциянинг аниқланиш соҳасида қолган ҳолда $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага ихтиёрй усулда интилганда ушбу тенглик

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

* Биз асосан икки ўзгарувчи функциясини қараймиз, чунки уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясини қараш ҳеч қандай принципиал ўзгариш киритмайди, лекин қўшимча техник қийинчиликлар келтириб чиқаради.



мавжуд бўлса, $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Агар $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ деб белгиласак, (1) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1')$$

ёки

$$\lim_{\substack{\Delta x \Delta 0 \\ \Delta y \Delta 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \quad (1'')$$

$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деб белгилаймиз. $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ да $\Delta \rho \rightarrow 0$ ва, аксинча, $\Delta \rho \rightarrow 0$ бўлса, $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ бўлади.

(1'') тенгликда квадрат қавслар ичида турган ифода функциянинг тула орттормаси Δz эканини эътиборга олиб, (1') тенгликни бундай шаклда ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (1''')$$

Бирор соҳанинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция шу соҳада узлуксиз дейилади.

Агар бирон $N(x_0, y_0)$ нуқтада (1) тенглик бажарилмаса, $N(x_0, y_0)$ нуқта $z = f(x, y)$ функциянинг узилиш нуқтаси дейилади. (1') шарт, масалан, қуйидаги ҳолларда бажарилмаслиги мумкин:

1) $z = f(x, y)$ функция $N(x_0, y_0)$ нуқта бирор атрофининг барча нуқталарида аниқланган, лекин $N(x_0, y_0)$ нуқтанинг ўзида аниқланмаган;

2) $z = f(x, y)$ функция $N(x_0, y_0)$ нуқта атрофининг барча нуқталарида аниқланган, лекин

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

лимит мавжуд эмас.

3) Функция $N(x_0, y_0)$ нуқта атрофининг барча нуқталарида аниқланган ва $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ лимит ҳам мавжуд, лекин

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$$

1- мисол. $z = x^2 + y^2$ функция x ва y нинг ҳар қандай қийметларида, яъни Оху текислигининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз.

Ҳақиқатан, x ва y , Δx ва Δy нинг ҳар қандай қиймати учун:

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x \Delta x + 2y \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

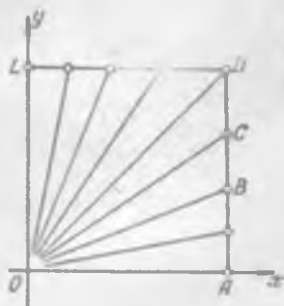
демак,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

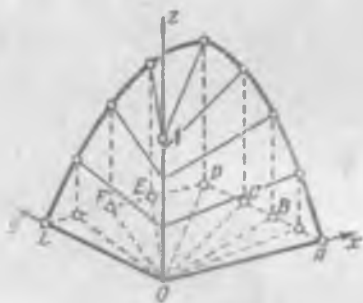
Узилувчи функцияга мисол келтираимиз.
2- мисол.

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

функция $x = 0$ ва $y = 0$ нуқтадан ташқари ҳамма ерда аниқланган (171, 172- расмлар).



171- расм.



172- расм.

z нинг $y=kx$ ($k = \text{const}$) тўғри чизиқ бўйлаб қийматини қараймиз. Бу тўғри чизиқ бўйлаб

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$

яъни z функция координаталар бошидан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқ бўйлаб, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти k га боғлиқ бўлган ўзгармас қийматга эга бўлади. Шунинг учун координаталар бошига ҳар хил йўл билан яқинлашиб, ҳар хил лимит қийматларга эга бўламиз, бу эса (x, y) нуқта O ху текисликда координаталар бошига интилганда $f(x, y)$ функция лимитга эга бўлмайди деган сўздир. Демак, функция бу нуқтада узилган. Бу функцияни координаталар бошида узлуксиз бўладиган қилиб қўшимча белгилаш мумкин эмас. Шу билан бирга бу функциянинг бошқа нуқталарда узлуксиз эканлигини куриш қийин эмас.

Ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз бўлган кўп ўзгарувчи функциянинг бир неча муҳим хоссаларини исботсиз айтиб ўтаимиз. Бу хоссалар кесмада узлуксиз бўлган бир ўзгарувчи функциянинг хоссаларига ўхшашдир (II боб, 10- § га қаралсин).

1- хосса. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, шу D соҳада камида

битта шундай $N(x_0, y_0, \dots)$ нуқта топиладик, соҳанинг бошқа ҳамма нуқталари учун ушбу

$$f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$$

муносабат бажарилади ва камда битта шундай $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots)$ нуқта топиладик, соҳанинг бошқа ҳамма нуқталари учун

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots) \leq f(x, y, \dots)$$

муносабат бажарилади. Функциянинг $f(x_0, y_0, \dots) = M$ қийматини $f(x, y, \dots)$ функциянинг D соҳадаги энг катта қиймати деб, $f(x_0, y_0, \dots) = m$ қийматини эса энг кичик қиймати деб атаймиз.

Бу хосса бундай ҳам таърифланади. Ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз функция камида бир марта энг катта M қийматга ва камида бир марта энг кичик m қийматга эришади.

2- хосса. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган D соҳада узлуксиз бўлса ва M, m сонлар $f(x, y, \dots)$ функциянинг соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари бўлса, у ҳолда $m < \mu < M$ шартни қаноатлантирадиган ҳар қандай μ сон учун шундай $N^*(x_0^*, y_0^*, \dots)$ нуқта топилиши мумкинки, у нуқтада $f(x_0^*, y_0^*, \dots) = \mu$ тенглик бажарилади.

2- хоссадан натижа. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз бўлиб, мусбат ва манфий қийматларга эга бўлса, у ҳолда шу соҳа ичида $f(x, y, \dots)$ функция нолга айланадиган нуқталар топилиши мумкин.

5-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари

Таъриф. $z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб хусусий орттирма $\Delta_x z$ нинг Δx орттирмага нисбати Δx нолга интилишидаги лимитига айтилади.

$z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи ушбу символларнинг бири билан белгиланади:

$$z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Шунга ўхшаш $z = f(x, y)$ функциянинг *у бўйича хусусий ҳосиласи* деб функциянинг *у бўйича хусусий орттирмаси* $\Delta_y z$ нинг Δy га нисбати Δy нолга интилгандаги лимитига айтилади.

Функциянинг *у бўйича хусусий ҳосиласи* ушбу символларнинг бири билан белгиланади:

$$z_y, f_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

$\Delta_x z$ ни ҳисоблашда *у* нинг ўзгармаслигини $\Delta_y z$ ни ҳисоблашда эса *x* нинг ўзгармаслигини эътиборга олиб, хусусий ҳосилаларга бундай таъриф бериш мумкин: $z = f(x, y)$ функциянинг *x бўйича хусусий ҳосиласи* деб, *у* ни ўзгармас фараз қилиб, *x* бўйича топилган ҳосиллага айтилади. $z = f(x, y)$ функциянинг *у бўйича хусусий ҳосиласи* деб *x* ни ўзгармас фараз қилиб, *у* бўйича топилган ҳосиллага айтилади.

Бу таърифдан очиқ кўринаднки, хусусий ҳосилаларни ҳисоблаш қондаси бир ўзгарувчининг функцияси учун кўрсатилган қоида билан бир хил, лекин ҳар гал қайси ўзгарувчи бўйича ҳосилла изланаётганини ёдда тутиш керак бўлади.

1- мисол. $z = x^2 \sin y$ функция берилган; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни топиш талаб қилинади.

Е чи ш.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

2- мисол. $z = x^y$

Бу ерда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ҳар қанча ўзгарувчилар функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам шунга ўхшаш топилади. Чунончи, агар *u* тўртта *x, y, z, t* ўзгарувчининг функцияси бўлса:

$$u = f(x, y, z, t),$$

у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

ва ҳ. к.

3- мисол. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

6- §. Икки ўзгарувчи функцияси хусусий ҳосилаларининг геометрик маъноси

Ушбу тенглама

$$z = f(x, y)$$

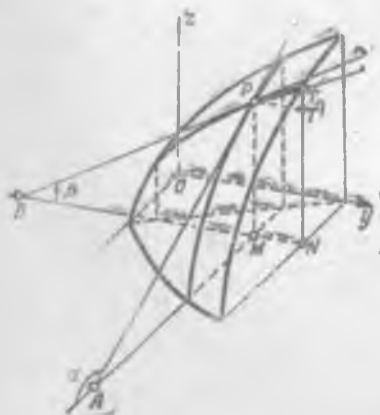
173- расмда тасвирланган сиртнинг тенгламаси бўлсин.

$x = \text{const}$ текислиқни ўтказамиз. Бу текислиқнинг сирт билан кесимида PT эгри чизиқ ҳосил бўлади. Берилган x бўйича

Oxy текислиқда бирор $M(x, y)$ нуқтани қараймиз. M нуқтага $z = f(x, y)$ сиртнинг (x, y, z) нуқтаси мос келади, x ни ўзгармас ҳолда сақлаб, y га $\Delta y = MN = PT'$ орттирма берамиз. Унда z функция $\Delta_y z = TT'$ орттирма олади ($N(x, y + \Delta y)$ нуқтага $z = f(x, y)$ сиртнинг $T(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нуқтаси мос келади).

$\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ нисбат PT кесувчи билан Oy ўқининг мусбат йуналиши орасидаги бурчакнинг тангенсига тенг:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \text{tg } \widehat{TP'T'}$$



173- расм.

Демак,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

лимит PT эгри чиқиқнинг P нуқтасидан ўтган PB уриқма билан Oy ўқнинг мусбат йўналиши орасида ҳосил бўлган β бурчакнинг тангенсига тенг:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

Демак, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосиланинг сон қиймати $z = f(x, y)$ сиртни $x = \operatorname{const}$ текислик билан кесганда ҳосил бўлган эгри чиқиққа уриқма оғиш бурчагининг тангенсига тенг.

Шунингдек $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосиланинг сон қиймати $z = f(x, y)$ сиртнинг $y = \operatorname{const}$ текислик билан кесимига уринманинг оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг.

7-§. Тўла орттирма ва тўла дифференциал

$z = f(x, y)$ функция тўла орттирмасининг таърифига кўра (VIII бобнинг 3-§ га қаранг):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

$f(x, y)$ функция қаралаётган (x, y) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

Δz ни хусусий ҳосилалар орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (1) тенгликнинг ўнг томонига $f(x, y + \Delta y)$ ни қўшамиз ва айирамиз:

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ &\quad + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Иккинчи квадрат қавс ичида турган

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ифодага бир ўзгарувчи y функциясининг (x нинг қиймати ўзгармайди) икки қиймати орасидаги айирма деб қараш мумкин. Бу айирмага Лагранж теоремасини татбиқ қилиб,

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \quad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $\bar{y}$ y билан $y + \Delta y$ орасидаги сон.

Худди шунингдек, (2) тенгликдаги биринчи квадрат қавс ичида турган ифодани биргина x ўзгарувчини функциянинг (иккинчи аргумент шу $y + \Delta y$ қийматни сақлайди) икки қийма-

ти орасидаги айирма деб қараш мумкин. Бу айирмага Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}, \quad (4)$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасидаги сон.

(3) ва (4) ифодаларни (2) тенгликка қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \quad (5)$$

Фаразимишга кўра хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($\bar{x}$ ва $\bar{y}$ мос равишда x билан $x + \Delta x$, y билан $y + \Delta y$ орасида бўлгани учун, $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ да $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ мос равишда x ва y га интилади). (6) тенгликни бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

бу ерда Δx ва Δy нолга интилганда (яъни $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ да) γ_1 ва γ_2 миқдорлар нолга интилади.

(6') тенгликка кўра (5) ифода ушбу кўринишга келади.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \quad (5')$$

Унг томондаги охириги икки қўшилувчининг йиғиндиси $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Ҳақиқатан $\rho \rightarrow 0$ да $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \rightarrow 0$, чунки γ_1 чексиз кичик миқдор, $\frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ — чегараланган ($\left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| < 1$) миқдор. $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \rightarrow 0$ эканлиги ҳам шундай текширилади.

Олдинги икки қўшилувчининг йиғиндиси Δx ва Δy га нисбатан чизиқли ифода. $f'_x(x, y) \neq 0$ ва $f'_y(x, y) \neq 0$ бўлганда бу

ифода орттирманинг бош булагини ташкил этади ва Δz дан $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади.

Таъриф. Тўла орттирмаси Δz берилган (x, y) нуқтада икки ҳўшилувчи: Δx ва Δy га нисбатан чизиқли ифода ва Δr га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор йиғиндисин кўринишида тасвирланиши мумкин бўлган $z = f(x, y)$ функция берилган нуқтада дифференциалланувчи дейилади, орттирманинг чизиқли қисми эса, тўла дифференциал дейилади ва dz ёки df билан белгиланади.

(5') тенгликдан, агар $f(x, y)$ функция берилган нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у функция шу нуқтада дифференциалланувчи ва тўла дифференциалга эга эканлиги келиб чиқади:

$$dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y.$$

(5') тенгликни яна бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

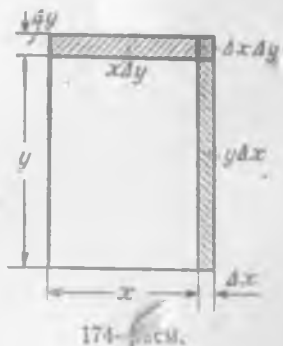
ва Δr га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан ушбу тақрибий тенгликни ёзиш мумкин:

$$\Delta z \approx dz.$$

Эркин ўзгарувчиларнинг орттирмалари Δx ва Δy ни x ва y эркин ўзгарувчиларнинг дифференциаллари деймиз, уларни dx ва dy билан белгилаймиз. Унда тўла дифференциалнинг ифодаси ушбу кўринишни олади:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Шундай қилиб, агар $z = f(x, y)$ функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у функция (x, y) нуқтада дифференциалланувчи ва унинг тўла дифференциали хусусий ҳосилаларнинг тегишли эркин ўзгарувчилар дифференциалларига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.



1-мисол. $z = xy$ функциянинг (2; 3) нуқтада $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$ бўлганда тўла орттирмаси ва тўла дифференциали топилсин.

Ечиш.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy = y \Delta x + x \Delta y.$$

Демак, $\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72$,

$$dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7.$$

174- расмда бу мисолга тасвир берилган.

Юқоридаги муҳокамалар ва таърифлар ҳар қанча аргументнинг функциясига тегишли равишда умумлаштирилади.

Агар кўп ўзгарувчининг ушбу функцияси

$$w = f(x, y, z, u, \dots, t)$$

берилган бўлиб, унинг $(x, y, z, u, \dots, t)$ нуқтадаги ҳамма хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t}$ узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

ифода функция тўла орттирмасининг бош бўлаги бўлади ва тўла дифференциал деб аталади. $\Delta w - dw$ айирманинг $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots + (\Delta t)^2}$ га нисбатан юқори тартибли кичик миқдор эканини исботлаш худди икки ўзгарувчининг функциясидаги каби ўтказилади.

2- мисол. Уч ўзгарувчи x, y, z нинг функцияси $u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$ нинг тўла дифференциали топилсин.

Ечиш. Хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z = e^{x^2+y^2} \sin 2z$$

x, y, z нинг ҳамма қийматларида узлуксиз бўлгани учун

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = e^{x^2+y^2} (2x \sin^2 z dx + 2y \sin^2 z dy + \sin 2z dz).$$

8- §. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи

$z = f(x, y)$ функция (x, y) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу функциянинг тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

бундан

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \quad (i)$$

Биз мапа бу

$$\Delta z \approx dz \quad (2)$$

тақрибий формулага эгамиз, бунда

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

(1) формулада Δz ўрнига dz нинг ёйиқ ифодасини қўйиб, ушбу тақрибий формулани ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (4)$$

Бу формула Δx ва Δy га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик мнқдоргача аниқликда туғридир.

(2) ва (4) формулаларни тақрибий ҳисоблашга қандай қўлланишини кўрсатамиз.

М а с а л а. Ўлчовлари қуйидагича бўлган цилиндрик стакан яшаш учун кетадиган материалнинг ҳажми ҳисоблансин (175- расм):

ички цилиндрнинг радиуси R ,
ички цилиндрнинг баландлиги H ,
стакан ён девори ва тубининг қалинлиги k .

Е ч и ш. Бу масаланинг икки хил: аниқ ва тақрибий ечилишини берамиз.

а) Аниқ ечилиши. Изланган v ҳажм ташқи цилиндр билан ички цилиндр ҳажмларининг айирмасига тенг. Ташқи цилиндрнинг радиуси $R + k$ га ва баландлиги $H + k$ га тенг бўлгани учун,

$$v = \pi (R + k)^2 (H + k) - \pi R^2 H,$$

ёки

$$v = \pi (2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \quad (5)$$

б) Тақрибий ечилиши. Ички цилиндр ҳажмини f билан белгилаймиз, у ҳолда $f = \pi R^2 H$. Бу икки ўзгарувчи R ва H нинг функцияси. Агар R ва H ни k га орттирсак, f функция ҳам Δf орттирма олади; лекин бу изланган v ҳажмнинг ўзи, яъни $v = \Delta f$ бўлади.

(1) тенгликка асосан ушбу тақрибий

$$v \approx df,$$

ёки

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H$$

формулага эгамиз. Лекин

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi R H, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k$$

бўлгани учун:

$$v \approx \pi (2RHk + R^2k). \quad (6)$$



175- расм.

(5) ва (6) тағжизларни солиштириб, улар k га нисбатан иккинчи ва учинчи тартибли кичик ҳадрлардан иборат бўлган $\pi(Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$ миқдорга фарқ қилганини кўрамиз.

Бу формулаларни сонли мисолларга қўлланайлик:

$$R = 4 \text{ см}, \quad H = 20 \text{ см}, \quad k = 0,1 \text{ см бўлсин.}$$

(5) формулани қўлланиб, ушбу аниқ натижани ҳосил қиламиз:

$$v = \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,1^2 + 0,1^3) = 17,881 \pi.$$

(6) формулани қўлланиб, ушбу тақрибий натижани ҳосил қиламиз:

$$v \approx \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,1) = 17,6 \pi.$$

Демак, (6) тақрибий формула $0,3\pi$ дан кичик хатоли натижа беради. Бундаги хато ўлчанган миқдорнинг $100 \cdot \frac{0,3\pi}{17,881\pi} \%$, яъни 2% дан кам.

9- §. Дифференциалнинг ҳисоблашдаги хатони баҳолашга татбиқи

Бирор n миқдор $x, y, z, \dots, t$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлсин:

$$u = f(x, y, z, \dots, t)$$

ва $x, y, z, \dots, t$ ўзгарувчиларнинг қийматларини бирон усул билан аниқлашда $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ хатоларни қилган бўлайлик. У ҳолда аргументларнинг ноаниқ қийматлари бўйича ҳисобланган функциянинг қиймати бундай хато билан ҳосил бўлади:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t).$$

Қуйида $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ хатолар маълум бўлганда Δu хатони баҳолаш билан, шуғулланамиз. $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ миқдорларнинг етарли даражада кичик абсолют қийматлари учун тула орттирмани тақрибан тула дифференциал билан алмаштириш мумкин:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t.$$

Бу ерда хусусий ҳосилалар ва аргумент хатоларининг қийматлари мусбат ва манфий бўлиши мумкин. Уларни абсолют қийматлар билан алмаштириб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|. \quad (1)$$

Агар аргументларнинг *максимал абсолют* хатолари (хатолар қийматларининг абсолют миқдорлари учун чегаралар) тегишинча $|\Delta^* x|, |\Delta^* y|, \dots, |\Delta^* t|$ билан белгиланса, ушбу тенгсизликни қабул қилиш мумкин:

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta^* t|. \quad (2)$$

Мисоллар.

1. $u = x + y + z$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z| \text{ бўлади.}$$

2. $u = x - y$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| \text{ бўлади.}$$

3. $u = xy$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |x| |\Delta^* y| + |y| |\Delta^* x| \text{ бўлади.}$$

4. $u = \frac{x}{y}$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta^* y| = \frac{|y| |\Delta^* x| + |x| |\Delta^* y|}{y^2} \text{ бўлади.}$$

5. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг гипотенузаси ва бир катети тақрибан $c = 75$, $a = 32$ га тенг. Гипотенуза узунлигини ўлчагандаги максимал абсолют хато $|\Delta^* c| = 0,2$, катетни ўлчагандаги абсолют хато $|\Delta^* a| = 0,1$.

A бурчак $\sin A = \frac{a}{c}$ формула бўйича ҳисоблансин; A бурчакни ҳисоблашдаги максимал абсолют хато $|\Delta A|$ аниқлансин.

Еч и ш. $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin \frac{a}{c}$, демак,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

(2) формулани қўлланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta A| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75 \sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 = 0,00273 \text{ радиан} = 9'24''.$$

Шундай қилиб,

$$A = \arcsin \frac{32}{75} \pm 9'24''.$$

6. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг катети $b = 121,56$ м, бурчаги $A = 25^\circ 21' 40''$, b катетни аниқлашдаги максимал абсолют хато $|\Delta^* b| = 0,05$ м. A бурчакни аниқлашдаги максимал абсолют хато $|\Delta^* A| = 12''$.

a катетни $a = b \operatorname{tg} A$ формула бўйича ҳисоблашдаги максимал абсолют хато топилисин.

Еч и ш. (2) формула бўйича

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A| |\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A} |\Delta^* A|$$

вақинини топамиз. Тегишли қийматларни қўйиб ($|\Delta^* A|$ ни радиан билан ифодалашни унутмасдан), қуйидаги қийматни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25^\circ 21' 40'' \cdot 0,05 + \frac{121,56}{\cos^2 25^\circ 21' 40''} \cdot \frac{12}{206265} = 0,0237 + 0,0087 = 0,0324 \text{ м.}$$

Бирор миқдор хатоси Δx нинг ўша миқдорнинг тақрибий қиймати x га нисбати шу *миқдорнинг нисбий хатоси* деб аталади. Уни δx билан белгилаймиз:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

x миқдорнинг *максимал нисбий хатоси* деб максимал абсолют хатонинг x нинг абсолют қийматига нисбатига айтилади ва $|\delta^* x|$ билан белгиланади:

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \quad (3)$$

u функциянинг максимал нисбий хатосини баҳолаш учун (2) тенгликнинг барча ҳадларини $|u| = |f(x, y, z, \dots, t)|$ га бўламиз:

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \frac{|\Delta^* x|}{f} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \frac{|\Delta^* y|}{f} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \frac{|\Delta^* t|}{f}, \quad (4)$$

лекин

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln |f|, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln |f|, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |f|.$$

Шунинг учун (4) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln |f| \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln |f| \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial}{\partial t} \ln |f| \right| |\Delta^* t| \dots, \quad (5)$$

ёки қисқача

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln |f||. \quad (6)$$

(4) формуладан ҳам, (5) формуладан ҳам бундай натижа чиқади: функциянинг максимал нисбий хатоси шу функция логарифмининг максимал абсолют хатосига тенг.

(6) формуладан тақрибий ҳисоблашда қўлланиладиган қондалар келиб чиқади.

1. $u = xy$ бўлсин. 3- мисолнинг натижаларидан фойдаланиб, мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$|\delta^* u| = \frac{|y| |\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x| |\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

яъни кўпайтманинг максимал нисбий хатоси кўпайтувчилар максимал нисбий хатоларининг йиғиндисига тенг.

2. Агар $u = \frac{x}{y}$ бўлса, 4- мисол натижаларидан фойдаланиб, шунини топамиз:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Изоҳ. 2- мисолга асосан ушбу натижа чиқади; агар $u = x - y$ бўлса,

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Агар x ва y нинг қийматлари бир-бирга яқин бўлса, $|\delta^* u|$ нинг қиймати аниқланадиган $x - y$ нинг қийматига қараганда анча катта бўлиши мумкин. Ҳисоблаш ишларини бажаришда бу ҳолни ҳисобга олиш лозим.

7- мисол. Маятникнинг тебраниш даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

бу ерда l — маятник узунлиги, g — оғирлик кучининг тезлиниши.

Агар $\pi \approx 3,14$ (0,005 гача аниқликда), $l = 1$ м (0,01 гача аниқликда), $g = 9,8$ м/сек² (0,02 м/сек² гача аниқликда) деб қабул қилиб, T ни шу формула бўйича ҳисобласак, қандай нисбий хато қилган бўламиз?

Еч и ш. (6) формулага кўра максимал нисбий хато

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Лекин

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2} \ln l - \frac{1}{2} \ln g.$$

$|\Delta^* \ln T|$ ни ҳисоблаймиз. $\pi \approx 3,14$, $\Delta^* \pi = 0,005$, $l = 1$ м, $\Delta^* l = 0,01$ м, $g = 9,8$ м/сек², $\Delta^* g = 0,02$ м/сек² эканини эътиборга олиб, ушбу қийматни ҳисоб қиламиз:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02}{2 \cdot 9,8} = 0,0076.$$

Шундан қилиб, максимал нисбий хато

$$\delta^* T = 0,0076 = 0,76 \, \%.$$

10- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.
Мураккаб функциянинг тўла дифференциал

Ушбу

$$z = F(u, v) \quad (1)$$

тенгламада u ва v миқдорлар x, y эркин ўзгарувчиларнинг функциялари:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y) \quad (2)$$

деб фараз қилайлик. z бу ҳолда x ва y нинг мураккаб функцияси.

Албатта, z ни бевосита x , y орқали ифодалаш мумкин:

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (3)$$

1- мисол. Агар

$$z = u^2 v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1$$

бўлса, унда

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

$F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функциялар ўзларининг барча аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз ва бундай масалани қўямиз: (1) ва (2) тенгламалардан фойдаланиб ва (3) тенгламадан фойдаланмасдан $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар ҳисоблансин.

y нинг қийматини ўзгартирмасдан, аргумент x га Δx орттирма берамиз. y вақтда (2) тенгламалар бўйича u ва v ҳам $\Delta_x u$, $\Delta_x v$ орттирмаларни олади.

Модомики, u , v миқдорлар $\Delta_x u$, $\Delta_x v$ орттирмаларни олса, $z = F(u, v)$ функция ҳам VIII бобнинг 7- § даги (5') формула билан аниқланадиган Δz орттирмани олади:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Бу тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Агар $\Delta x \rightarrow 0$ бўлса, бу ҳолда u ва v функциялар узлуксиз бўлгани учун $\Delta_x u \rightarrow 0$, $\Delta_x v \rightarrow 0$. Унда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилади. $\Delta x \rightarrow 0$ шarti билан лимитга ўтиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_2 = 0$$

ва, демак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

Агар y га Δy орттирма бериб, x ни ўзгартирмасак, шунга ўхшаш муҳокамалар билан ушбунни топар эдик:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4')$$

2- мисал.

$$z = \ln(u^2 + v), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

(4) ва (4') формулалардан фойдаланиб, шуларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (2ue^{x+y^2} + 1).$$

Охирги нфодада u ва v ўрнига мос равишда e^{x+y^2} ва e^{x^2+y} ни қўйиш керак.

Иккидан ортиқ ўзгарувчиларнинг функциялари учун (4) ва (4') формулалар табий равишда умумлаштирилади.

Масалан, $w = F(z, u, v, s)$ тўрт аргумент z, u, v, s нинг функцияси ва буларнинг ҳар бири x ва y га боғлиқ бўлса, (4) ва (4') формулалар ушбу кўринишни олади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Агар $z = F(x, y, u, v)$ функция берилган ва y, u, v ўз навбатида бир аргумент x га боғлиқ, яъни

$$y = f(x), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x)$$

бўлса, ҳақиқатда z фақат бир ўзгарувчи x нинг функцияси бўлади ва $\frac{dz}{dx}$ ҳосилани топиш масаласини қўйиш мумкин.

Бу ҳосила (5) формулаларининг биринчисини билан ҳисобланади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x};$$

лекин y, u, v — фақат биргина x нинг функциялари бўлгани учун хусусий ҳосилалар оддий ҳосилаларга айланади; ундан ташқари $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$; шунинг учун

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Бу формула $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ хусусий ҳосиладан фарқ қилиб $\frac{dz}{dx}$ му-
ла ҳосилани ҳисоблаш формуласи деб аталади.

3- мисол.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Бу ҳолда (6) формула ушбу натижани беради:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x.$$

Энди (1) ва (2) тенгликлар билан белгиланган мураккаб функциянинг тўла дифференциалини топамиз.

(4) ва (4') тенгликлар билан аниқланган $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ифода-
ларини тўла дифференциал формуласи

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (6)$$

га қўямиз.

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенглиkning унig томонida ушбу алмаштиришни қила-
миз:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad (7)$$

Лекин

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy &= du, \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy &= dv. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) ни эътиборга олиб (7) ни бундай ёзиш мумкин:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv \quad (9)$$

ёки

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (9')$$

(6) ва (9') ифодаларни солиштириб, бир неча ўзгарувчи-
ли функция биринчи тартибли тўла дифференциалининг ифодаси

бир хил кўринишда дейишимиз мумкин; яъни u ва v эркли ўзгарувчи бўлса ҳам ёки бошқа ўзгарувчиларнинг функцияси бўлса ҳам дифференциалнинг шакли инвариантдир.

4- мисол. Ушбу

$$z = u^2 v^2, \quad u = x^2 \sin y, \quad v = x^2 e^y$$

мураккаб функциянинг тўла дифференциали топилсин.

Ечиш. (9') формулага кўра:

$$dz = 2uv^2 du + 2u^2 v dv = 2uv^2 (2x \sin y dx + x^2 \cos y dy) + 2u^2 v (2x^2 e^y dx + x^2 e^y dy).$$

Сунгги ифодани бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$dz = (2uv^2 \cdot 2x \sin y + 2u^2 v \cdot 2x^2 e^y) dx + (2uv^2 x^2 \cos y + 2u^2 v x^2 e^y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

11- §. Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи

Бу масалани қарашни бир ўзгарувчининг ошкормас функциясидан бошлаймиз*). x нинг бирор функцияси u ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. Агар x нинг узлуксиз функцияси y

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

тенглама билан ошкормас шаклда берилган бўлиб, бу ерда $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ — координаталари берилган (i) тенгламани қаноатлантирадиган (x, y) нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада узлуксиз функциялар бўлсин; бундан ташқари шу нуқтада $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлсин. У вақтда x нинг y функцияси ушбу ҳосиллага эга бўлади:

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2)$$

Исбот. x нинг бирор қийматига функциянинг y қиймати мос бўлсин. Бунда

$$F(x, y) = 0.$$

*) III бобнинг 11- § да ошкормас функцияни дифференциаллаш ҳақидаги масалани ечган эдик. Лекин у ерда айрим мисолларни қараган ва ошкормас функциянинг ҳар қандай нуқтадаги ҳосиласини берадиган умумий формулани топмаган ҳамда бу ҳосиланинг мавжудлик шартларини аниқламаган эдик.

Эркин ўзгарувчи x га Δx орттирма берамиз. y функция Δy орттирма олади, яъни аргументнинг $x + \Delta x$ қийматига функциянинг $y + \Delta y$ қиймати мос келади. $F(x, y) = 0$ тенгламага асосан

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Демак,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Сўнгги тенгликнинг чап томони икки ўзгарувчи функциясининг тўла орттирмасидан иборат, уни 7- § нинг (5') формуласига асосан бундай ёзиш мумкин:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

бу ерда Δx ва Δy нолга интилганда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилади. Сўнгги ифоданинг чап томони нолга тенг бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Кейинги тенгликни Δx га бўламиз ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Δx ни нолга интитирамыз. Бунда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилиши ва $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ эканини эътиборга олсак, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$y'_x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (2')$$

Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи y'_x мавжудлигини исбот қилдик ва уни ҳисоблаш учун формула топдик.

1- мисол.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида белгилайди. Бу ерда

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Демак, (1) формула бўйича

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{y}.$$

Берилган тенглама иккита ҳар хил функцияни белгилайди (чунки x нинг $(-1, 1)$ оралиқдаги ҳар бир қийматига y нинг иккита қиймати мос келади); лекин y_x нинг топилган қиймати биринчи функция учун ҳам, иккинчи функция учун ҳам тўғридир.

2- мисол. x ва y ни боғловчи

$$e^y - e^x + xy = 0$$

тенглама берилган. Бу ерда $F(x, y) = e^y - e^x + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Демак, (1) формула бўйича:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Энди

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

кўринишдаги тенгламани қараймиз.

Агар x ва y нинг бирор соҳадаги ҳар бир қуш қийматига z нинг (3) тенгламани қаноатлантирадиган бир ёки бир неча қиймати мос келса, бу тенглама x ва y нинг бир ёки бир неча бир қийматли z функциясини ошкормас равишда белгилайди.

Масалан,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

тенглама x ва y нинг иккита узлуксиз функцияси z ни ошкормас равишда белгилайди; бу тенгламани z га нисбатан ечиб, функцияларни ошкор тарзда ифодалаш мумкин; бу ҳолда қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{ва} \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

(3) тенглама билан берилган x ва y нинг ошкормас функцияси z нинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топамиз. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ни излаганда y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз. Шунинг учун x ни эркин ўзгарувчи ва z ни функция деб ҳисобласак, (2) формулани қўлланиш мумкин. Демак,

$$z'_x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Худди шу йўл билан

$$z_y = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ деб фараз қилинади.

Ҳар қанча ўзгарувчиларнинг ошкормас функцияси ҳам шунинг сингари аниқланади ва уларнинг хусусий ҳосилалари топилади.

3- мисол. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2x}{2z} = - \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y}{z}.$$

Бунн (тенгламани z га нисбатан ечгандан сўнг) ошкор функция каби дифференциалласак, яна шу натижани ҳосил қилар эдик.

4- мисол.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Бу ерда

$$F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Изоҳ. Бу параграфдаги ҳамма муҳокамалар $F(x, y) = 0$ тенглама бир ўзгарувчининг бирор функцияси $y = \varphi(x)$ ни белгилайди; $F(x, y, z) = 0$ тенглама икки ўзгарувчининг бирор функцияси $z = f(x, y)$ ни белгилайди деган фаразга суяниб ўтказилади. $F(x, y) = 0$ тенглама бир қийматли $y = \varphi(x)$ функцияни белгилаши учун $F(x, y) = 0$ функция қандай шартни қаноатлантиришини исботсиз келтираимиз:

Теорема. $F(x, y) = 0$ функция (x_0, y_0) нуқта атрофида узлуксиз, ўша ерда узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, бунда $F_y(x, y) \neq 0$ ва $F(x_0, y_0) = 0$ бўлсин. У ҳолда (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олувчи шундай атроф мавжуд бўладики, у ерда $F(x, y) = 0$ тенглама бир қийматли $y = \varphi(x)$ функцияни белгилайди.

$F(x, y, z) = 0$ тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг мавжудлик шarti ҳақида ҳам шунга ўхшаш теоремани айтиш мумкин.

Изоҳ. Ошкормас функцияларни дифференциаллаш қондаларини чиқаришда биз ошкормас функцияларнинг мавжудлигини белгиладиган шартлардан фойдаландик.

12- §. Ҳар хил тартибдаги хусусий ҳосилалар

Икки ўзгарувчининг функцияси

$$z = f(x, y)$$

берилган бўлсин.

Хусусий ҳосилалар $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ ва $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, умуман айтганда, x ва y ўзгарувчиларнинг функциясидир. Шунинг учун улардан яна хусусий ҳосилалар топиш мумкин. Демак, икки ўзгарувчи функциясининг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари тўртта бўлади, чунки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функциялардан ҳар бирини x бўйича ва y бўйича дифференциаллаш мумкин. Иккинчи хусусий ҳосилалар бундай белгиланади:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, бу ерда f кетма-кет икки марта x бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, бу ерда f аввал x бўйича ва сўнггра натижа y бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$, бу ерда f аввал y бўйича ва сўнггра натижа x бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, бу ерда f кетма-кет y бўйича икки марта дифференциалланади.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни қайтадан x бўйича ва y бўйича дифференциаллаш мумкин. Учинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўламиз. Улар саккизта бўлади:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Умуман, n -тартибли хусусий ҳосила $(n-1)$ -тартибли хусусий ҳосиланинг биринчи тартибли хусусий ҳосиласидир.

Масалан, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$, ифода n -тартибли хусусий ҳосила; бу ерда z функция аввал x бўйича p марта дифференциалланган, сўнггра y бўйича $n-p$ марта дифференциалланган.

Истаган сондаги ўзгарувчилар функциясининг юқори тартибли хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш топилади.

1- мисол. $f(x, y) = x^2y + y^3$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари ҳисоблансин.

Ечиш. Кетма-кет шуларни топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

2- мисол. Агар $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$ топилисин.
Е чиш. Кетма-кет қуйидагиларни топамиз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 e^x + 2xy^3, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2 e^x + 2y^3, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} &= 2ye^x + 6y^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^x + 3x^2 y^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 2ye^x + 6xy^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} &= 2ye^x + 6y^2. \end{aligned}$$

3- мисол. Агар $u = z^2 e^x + y^3$ бўлса, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$ топилисин.
Е чиш.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= z^2 e^x + y^3, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= z^2 e^x + y^3, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= 2yz^2 e^x + y^3, \\ & & \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} &= 4yze^x + y^3. \end{aligned}$$

Бир неча ўзгарувчи функциясини дифференциаллаш натижаси ҳар хил ўзгарувчилар бўйича қандай тартибда дифференциаллашга боғлиқ бўладими ёки бошқача айтганда ушбу $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ҳосилалар ёки

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} \text{ ва } \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t \partial x \partial y} \text{ ва Ҳ. К.}$$

ҳосилалар ўзаро тенг бўладими деган савол табиий равишда пайдо бўлади. Бу ҳақда ушбу теоремани айтиш мумкин.

Теорема. Агар $z = f(x, y)$ функция ва унинг хусусий ҳосилалари f_x, f_y, f_{xy} , ва f_{yx} $M(x, y)$ нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлса, бу нуқтада

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (f_{xy} = f_{yx}).$$

Исбот. Исботлаш учун ушбу ифодани қараймиз:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Агар

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

тенглик билан аниқланган $\varphi(x)$ ёрдамчи функцияни киритсак, A ни бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Теореманинг шартига кўра f_x ҳосила (x, y) нуқта атрофида аниқланган, демак, $\varphi(x)$ функция $[x, x + \Delta x]$ кесмада дифференциалланувчидир; бунда Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасида ўзгаради. Лекин

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$$

f'_{xy} ҳосила (x, y) нуқта атрофида аниқлангани учун, f'_x ҳосила $[y, y + \Delta y]$ кесмада дифференциалланувчи, шунга кўра ҳосил қилинган айирмага яна Лагранж теоремасини (ўзгарувчи y бўйича) қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бу ерда $\bar{y}$ y билан $y + \Delta y$ орасида ўзгаради.

Демак, A нинг бошланғич ифодасини

$$A = \Delta x \Delta y f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1)$$

кўринишда ёзсак бўлади. A нинг ифодасида ўртадаги қушилувчиларнинг ўринларини алмаштириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Ушбу ёрдамчи функцияни кiritамиз:

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

у вақтда

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$$

бўлади. Янгидан Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбунини ҳосил қиламиз:

$$A = \Delta y \psi'(\bar{y}),$$

бу ерда $\bar{y}$ y билан $y + \Delta y$ орасида ўзгаради. Лекин

$$\psi'(\bar{y}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}).$$

Яна Лагранж теоремасини (ўзгарувчи x бўйича) қўлланиб, ушбунини ҳосил қиламиз:

$$f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}) = \Delta x f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасида ўзгаради.

Шундай қилиб, A нинг бошланғич ифодасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \Delta y \Delta x \dot{f}_{yx}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликларнинг чап қисмлари A га тенг, демак, ўнг қисмлари ҳам тенг бўлиши керак, яъни

$$\Delta x \Delta y \dot{f}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \Delta x \dot{f}_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бундан

$$\dot{f}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \dot{f}_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Бу тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ бўлганда лимитга утиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \dot{f}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \dot{f}_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

$\dot{f}_{xy}$ ва $\dot{f}_{yx}$ ҳосилалар (x, y) нуқтада узлуксиз бўлгани учун,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \dot{f}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \dot{f}_{xy}(x, y) \text{ ва } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \dot{f}_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = \dot{f}_{yx}(x, y).$$

Ниҳоят ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\dot{f}_{xy}(x, y) = \dot{f}_{yx}(x, y),$$

шунинг исботлаш талаб қилинган эди.

Исботланган теоремадан натижа сифатида ушбунни чиқариш мумкин: агар $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ ва $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлса,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Истаган сондаги ҳзгарувчиларнинг функцияси ҳақида ҳам шундай теоремани айтиш мумкин.

4-мисол. Агар $u = e^{xy} \sin z$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x}$ топилсин; Е.ч.и.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xy e^{xy} \sin z = e^{xy} (1 + xy) \sin z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy} (1 + xy) \cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xe^{xy} \cos z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xy e^{xy} \cos z = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x}$$

(бундан ташқари, шу параграфнинг 1—2- мисолларига қаралсин).

13- §. Юксаклик сиртлари

Фараз қилайлик, (x, y, z) фазода D соҳа бор па бу соҳада

$$u = u(x, y, z) \quad (1)$$

функция берилган бўлсин. Бу ҳолда D соҳада *скаляр майдон* берилган дейилади. Масалан, $u(x, y, z)$ бир $M(x, y, z)$ нуқтадаги температура бўлса, u ҳолда температуранинг скаляр майдони берилган дейилади; агар D соҳа суюқлик ёки газ билан тўлдирилган бўлиб, $u(x, y, z)$ босимни билдирса, бу ҳолда босимнинг скаляр майдони мавжуд бўлади ва ҳоказо,

D соҳанинг $u(x, y, z)$ функция ўзгармас c қийматга эга. яъни

$$u(x, y, z) = c \quad (2)$$

бўлган нуқталарини қараймиз. Бундай нуқталарнинг туплами бирор сиртни ҳосил қилади. Агар c нинг бошқа қийматини олсак, бошқа сирт ҳосил бўлади. Бу сиртлар — *юксаклик сиртлари* деб аталади.

1- мисол.

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

скаляр майдон берилган бўлсин. Бунда юксаклик сиртлари ушбу сиртлар

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

яъни, ярим ўқлари $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ бўлган эллипсоидлар бўлади.

Агар u функция иккита x, y ўзгарувчининг функцияси

$$u = u(x, y)$$

бўлса, бу ҳолда юксаклик „сиртлари“ Oxy текисликдаги

$$u(x, y) = c \quad (2')$$

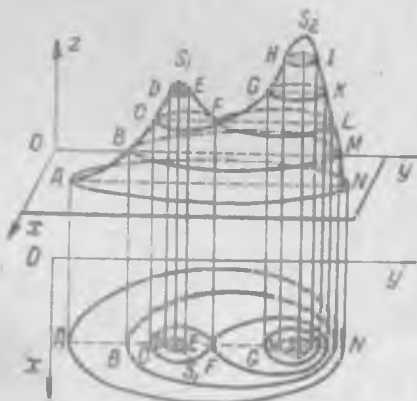
чиизиқларидан иборат бўлади, бу чиизиқлар *юксаклик чиизиқлари* деб аталади.

Агар u нинг қийматларини Oz ўқ бўйлаб қўйсак:

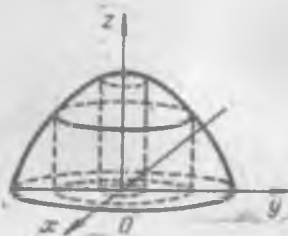
$$z = u(x, y),$$

бу ҳолда $z = u(x, y)$ сирт билан $z = c$ текисликларнинг кесилишгандан ҳосил бўлган чизиқларнинг Oxy текисликдаги проекциялари — юксаклик чизиқлари бўлади (176- расм). Юксаклик чизиқларини билган ҳолда, $z = u(x, y)$ сиртнинг харақтерини текшириш енгил бўлади.

2- мисол. $z = 1 - x^2 - y^2$ функциянинг юксаклик чизиқлари аниқлансин. Тенгламаси $1 - x^2 - y^2 = c$ бўлган чизиқлар юксаклик чизиқлари бўлади. Булар радиуси $\sqrt{1-c}$ бўлган айланалардир (177- расм). Жумладан, $c = 0$ бўлганда $x^2 + y^2 = 1$ айланини ҳосил қиламиз.



176- расм.



177- расм.

14- §. Йўналиш буйича ҳосила

D соҳада $u = u(x, y, z)$ функцияни ва $M(x, y, z)$ нуқтани қараймиз. M нуқтадан йўналтирувчи косинуслари $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ бўлган s векторни ўтказамиз (178- расм). s векторда унинг бошидан Δs масофада $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нуқтани қараймиз.

Шундай қилиб,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

$u(x, y, z)$ функция D соҳада узлуксиз ва ўзининг аргументлари буйича узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

7- § да қилинган каби, функциянинг тула орттирмасини бундай ёзамиз:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \quad (1)$$

бу ерда $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ миқдорлар $\Delta s \rightarrow 0$ да нолга нитилади.

(1) тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δs га бўламиз:

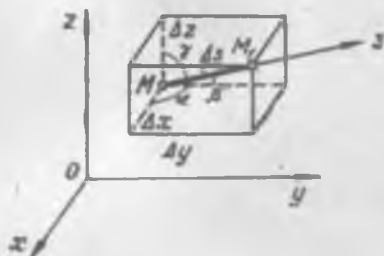
$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (2)$$

Равшанки,

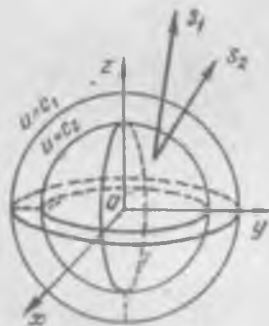
$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos \gamma.$$

Демак, (2) тенгликни бундай ёзиш мумкин

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma. \quad (3)$$



178- расм.



179- расм.

$\frac{\Delta u}{\Delta s}$ нисбатнинг $\Delta s \rightarrow 0$ даги limiti $u = u(x, y, z)$ функциянинг (x, y, z) нуқтада s вектор йўналиши бўйича ҳосиласи деб аталади ва $\frac{\partial u}{\partial s}$ билан белгиланади, яъни

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Шундай қилиб, (3) тенгликда лимитга ўтиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (5)$$

(5) формуладан чиқадики, хусусий ҳосилаларни билган ҳолда истаган S йўналиш бўйича ҳосила топиш енгил бўлади. Хусусий ҳосилаларнинг ўзлари эса йўналиш бўйича ҳосиланинг хусусий ҳолидир. Масалан, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ бўлганда:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Мисол. Функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

берилган. $M(1, 1, 1)$ нуқтада: а) $S_1 = 2i + j + 3k$ вектор йўналиши бўйича
б) $S_2 = i + j + k$ вектор йўналиши бўйича $\frac{\partial u}{\partial s}$ ҳосила топилиши.

Ечиш. а) S_1 векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Хусусий ҳосилалар:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

$M(1, 1, 1)$ нуқтада бундай бўлади:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) S_2 векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Бундан буён $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$ экакини назарда тутамиз (179-расм).

15- §. Градиент

$u = u(x, y, z)$ функция аниқланган D соҳанинг ҳар бир нуқтасига координата ўқларидаги проекциялари хусусий ҳосилалар $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ нинг тегишли нуқтадаги қийматларига тенг бўлган векторни ўтказамиз:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \quad (1)$$

Бу вектор $u(x, y, z)$ функциянинг градиенти деб аталади. Бу ҳолда D соҳада градиентларнинг вектор майдони аниқлан-

ган дейилади. Энди градиент билан йўналиш бўйича ҳосила орасидаги боғланишни аниқловчи ушбу теоремани исботлаймиз.

Теорема. $u = u(x, y, z)$ скаляр майдон берилган ва шу скаляр майдонда

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

градиентлар майдони аниқланган бўлсин. Бирор S вектор йўналиши бўйича олинган $\frac{\partial u}{\partial s}$ ҳосила $\text{grad } u$ векторнинг S вектордаги проекциясига тенг бўлади.

Исбот. S векторга мос S^0 бирлик векторини қараймиз:

$$S^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

$\text{grad } u$ ва S векторларнинг скаляр купайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2)$$

Бу тенгликнинг унг қисмида турган ифода $u(x, y, z)$ функциядан S^0 вектор йўналиши бўйича олинган ҳосиладан иборат. Демак, бундай ёзишимиз мумкин:

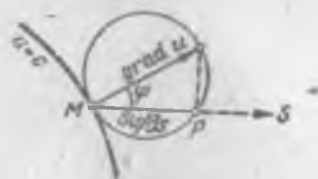
$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Агар $\text{grad } u$ билан S^0 векторлар орасидаги бурчакни φ билан белгиласак (180- расм), бундай ёзишимиз мумкин:

$$|\text{grad } u| \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \quad (3)$$



180- расм.



181- расм.

ёки

$$\text{пр. } S^0 \text{ grad } u = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Теорема исботланди.

Исбот қилинган теоремага асосан градиент билан истаган йўналиш бўйича берилган нуқтадаги ҳосила орасидаги муносабатни кўргазмалли равишда аниқлаш мумкин. Берилган $M(x, y, z)$ нуқтага $\text{grad } u$ векторини ясаймиз (181- расм). $\text{grad } u$ ни

диаметр қилиб сфера ясаймиз. M нуқтадан S векторни ўтказамиз. S векторнинг сфера сирти билан кесишган нуқтани P билан белгилаймиз. Равшанки, агар φ градиент йўналиши билан MP кесма йўналиши орасидаги бурчак (бунда $\varphi < \frac{\pi}{2}$), яъни $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$ бўлса, $MP = |\text{grad } u| \cos \varphi$ бўлади. Агар S векторнинг йўналиши қарама-қаршисига ўзгарса, ҳосиланинг ишораси тескарисига ўзгаради, лекин абсолют қиймати илгаригича қслади.

Градиентнинг баъзи хоссаларини аниқлаймиз.

1) Агар S векторнинг йўналиши градиент йўналиши билан бир хил бўлса, берилган нуқтада S вектор йўналиши бўйича олинган ҳосила энг катта қийматга эга бўлади; ҳосиланинг бу энг катта қиймати $|\text{grad } u|$ га тенг.

Бу тасдиқнинг тўғрилиги (3) тенгликдан бевосита келиб чиқади: $\frac{\partial u}{\partial s}$ нинг энг катта қиймати $\varphi = 0$ бўлганда бўлади, бу ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

2) $\text{grad } u$ векторга перпендикуляр вектор йўналиши бўйича ҳосила нолга тенг.

Бу тасдиқ (3) формуладан келиб чиқади. Ҳақиқатан, бу ҳолда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos \varphi = 0.$$

1- мисол. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция берилган.

а) $M(1, 1, 1)$ нуқтадаги градиентни аниқлаймиз. Бу функциянинг ихтиёрӣ нуқтадаги градиенти бундай бўлади:

$$\text{grad } u = 2xi + 2yj + 2zk.$$

Демак,

$$(\text{grad } u)_M = 2i + 2j + 2k, \quad |\text{grad } u|_M = 2\sqrt{3}.$$

б) u функциянинг $M(1, 1, 1)$ нуқтада градиент йўналиши бўйича ҳосиласини топамиз. Градиентнинг йўналтирувчи косинуслари бундай бўлади:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

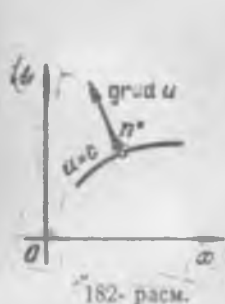
Эъин

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

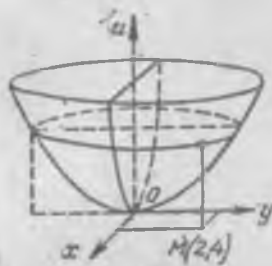
Изоҳ. Агар $u = u(x, y)$ функция икки узгарувчининг функцияси бўлса, вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

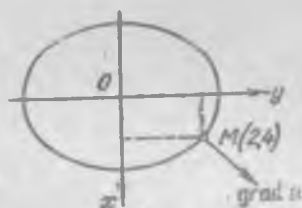
Оху текисликда ётади. Бу ҳолда $\operatorname{grad} u$ Оху текисликда ётган ва тегишли нуқтадан ўтувчи $u(x, y) = c$ юсаклик чизигига перпендикуляр ҳолда йўналганлигини исботлаймиз.



182- расм.



183- расм.



184- расм.

Ҳақиқатан, $u(x, y) = c$ юсаклик чизигига уринманинг бурчак коэффициентлари $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$ бўлади. Градиентнинг бурчак коэффициентлари $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$ бўлади. Равшанки, $k_1 \cdot k_2 = -1$. Бу эса тасдиғимизнинг тўғрилигини исботлайди (182- расм). Уч узгарувчи функцияси градиентнинг шунга ўхшаш хоссаси IX бобнинг 6- § да исбот қилинади.

2- мисол. $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ функциянинг $M(2, 4)$ нуқтадаги градиенти топилин.

Ечнш. Бу ерда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \Big|_M = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3} y \Big|_M = \frac{8}{3}.$$

Демак,

$$\operatorname{grad} u = 2i + \frac{8}{3}j.$$

Берилган нуқтадан ўтган юсаклик чизигининг тенгламаси

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}$$

бўлади (184- расм).

16-§. Икки Ҳагарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи

Икки Ҳагарувчининг

$$z = f(x, y)$$

функцияси узининг $n + 1$ тартибгача барча ҳосилалари (сунг-ги ҳосила ҳам киради) билан бирга $M(a, b)$ нуқтанинг бирон атрофида узлуксиз деб фараз қилайлик. У ҳолда, бир аргументнинг функцияси булган ҳолдаги каби (IV бобнинг 6-§ га қаранг), икки Ҳагарувчининг функциясини $x - a$ ва $y - b$ даражалари бўйича n -тартибли кўпхад билан бирор қолдиқ ҳадининг йиғиндисини кўринишида тасвирлаймиз. Қуйида $n = 2$ булган ҳол учун формула ушбу кўринишда булиши исботланади:

$$f(x, y) = A_0 + D(x - a) + E(y - b) + \frac{1}{2!} [A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2] + R_2, \quad (1)$$

бу ерда A_0, D, E, A, B, C коэффициентлар x ва y га боғлиқ эмас, R_2 — қолдиқ ҳад, бунинг таркибин бир Ҳагарувчи функцияси учун Тейлор формуласи қолдиқ ҳадининг таркибига ухшаш.

x ни Ҳагармас деб ҳисоблаб, биргина y Ҳагарувчининг $f(x, y)$ функциясига Тейлор формуласини қўлланамиз (иккинчи тартибли ҳадлар билан чегараланамиз):

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y - b}{1} f'_y(x, b) + \frac{(y - b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \tau_1), \quad (2)$$

бу ерда $\tau_1 = b + \theta_1(y - b)$, $0 < \theta_1 < 1$. $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ функцияларни $x - a$ нинг даражалари бўйича Тейлор формуласига биноан ажратамиз (учинчи тартибгача аралаш ҳосилалар билан чегараланамиз):

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x - a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

бу ерда $\xi_1 = a + \theta_2(x - a)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x - a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

бу ерда $\xi_2 = x + \theta_2(x - a)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yyx}(\xi_2, b), \quad (5)$$

бу ерда $\xi_3 = x + \theta_4(x - a)$, $0 < \theta_4 < 1$.

(3), (4) ва (5) ифодаларни (2) формулага қўйиб, ана бу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \\ & + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1} \left[f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \right. \\ & \left. + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} \left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta). \end{aligned}$$

Қўшилувчиларни (1) формулада кўрсатилгандек жойлаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) f'_x(a, b) + (y-b) f'_y(a, b) + \\ & + \frac{1}{2!} [(x-a)^2 f''_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b) f''_{xy}(a, b) + \\ & + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b)] + \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \\ & + 3(x-a)^2(y-b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \\ & + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta)]. \quad (6) \end{aligned}$$

Ана шу $n = 2$ бўлган ҳол учун Тейлор формуласидир.

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3(x-a)^2(y-b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta)] \end{aligned}$$

ифода қолдиқ ҳад деб аталади. Энди $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деб белгилаймиз. R_2 ифодасини бундай алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} \left[\frac{\Delta x^3}{\Delta \rho^3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3 \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta \rho^3} f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta \rho^3} f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \frac{\Delta y^3}{\Delta \rho^3} f'''_{yyy}(a, \eta) \right] \Delta \rho^3. \end{aligned}$$

$|\Delta x| < \Delta\rho$, $|\Delta y| < \Delta\rho$ ва учинчи ҳосилалар, шарт бўйича, чегараланган бўлгани учун $\Delta\rho^3$ нинг коэффициенти қаралаётган соҳада чегараланган миқдор бўлади; уни α_0 билан белгилаймиз.

У вақтда бундай ёза оламиз:

$$R_3 = \alpha_0 \Delta\rho^3.$$

Қабул қилинган белгиларда $n=2$ бўлган ҳол учун Тейлорнинг (6) формуласи ушбу кўринишни олади:

$$f(x, y) = f(a, b) + \Delta x f'_x(a, b) + \Delta y f'_y(a, b) + \frac{1}{2!} [\Delta x^2 f''_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a, b)] + \alpha_0 \Delta\rho^3. (6')$$

n ҳар қандай сон бўлганда Тейлор формуласи шуъга ўхшаш кўринишда бўлади.

17- §. Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми

1- таъриф. Агар $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага етарли даражада яқин бўлиб, ундан фарқли ҳамма (x, y) нуқталар учун

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

бўлса, у ҳолда $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада (яъни $x = x_0$ ва $y = y_0$ бўлганда) *максимумга* эга деймиз.

2- таъриф. Худди шунга ўхшаш, агар (x_0, y_0) нуқтадан бошқа ва унга етарлича яқин турган ҳамма (x, y) нуқталар учун

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

бўлса, $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада *минимумга* эга дейилади.

Функциянинг максимуми ва минимуми функциянинг *экстремумлари* дейилади, яъни функция берилган нуқтада максимум ёки минимумга эга бўлса, функция шу нуқтада экстремумга эга дейилади.

1- мисол. Функция

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

$x=1$, $y=2$ да, яъни $(1, 2)$ нуқтада минимумга эришади. Ҳақиқатан, $f(1, 2) = -1$, шунингдек $(x-1)^2$ ва $(y-2)^2$ эса $x \neq 1$, $y \neq 2$ да доим мусбат, демак,

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1,$$

яъни

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

Бу ҳолга мос геометрик кўриниш 185- расмда тасвирланган.

2- мисол. Функция

$$z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$$

$x = 0, y = 0$ да (яъни координаталар бошида) максимумга эришадн (186- расм).

Ҳақиқатан,

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

$x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ айлана ичнда $(0, 0)$ дан фарқли (x, y) нуқта оламиз, у ҳолда

$0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$ да $\sin(x^2 + y^2) > 0$ булади па шунинг учун



185- расм.



186- расм.

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2}.$$

яъни

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

Функциянинг макснмуми ва минимумига юқорида берилган таърифни яна бундай айтиш ҳам мумкин,

$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ деб фараз қиламиз: унда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1. Агар эркли ўзгарувчиларнинг етарлича кичик булган барча орттирмаларида $\Delta f < 0$ бўлса, $f(x, y)$ функция $M(x_0, y_0)$ нуқтада **максимумга** эга булади.

2. Агар эркли ўзгарувчиларнинг етарлича кичик булган барча орттирмаларида $\Delta f > 0$ бўлса, $f(x, y)$ функция $M(x_0, y_0)$ нуқтада **минимумга** эга булади.

Бу таърифларни ҳар қандай сондаги ўзгарувчиларнинг функцияси учун ўзгаринсиз такрорлаш мумкин.

1-теорема (экстремумнинг зарур шартлари). Агар $z = f(x, y)$ функция $x = x_0$, $y = y_0$ да экстремумга эга бўлса, у ҳолда z нинг ҳар бир биринчи тартибли хусусий ҳосиласи аргументларнинг шу қийматларида ё нолга тенг бўлади, ё мавжуд бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, узгарувчи y га бирор аниқ қиймат берамиз, масалан, $y = y_0$ бўлсин. У вақтда $f(x, y_0)$ функция бир узгарувчи x нинг функцияси бўлади. Бу функция $x = x_0$ бўлганда экстремумга (максимумга ёки минимумга) эга бўлади, демак,

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0}$ ё нолга тенг, ёки мавжуд эмас. Худди шунингдек

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0}$ нинг ё нолга тенг бўлишини, ёки мавжуд эмаслигини

нбсботлаш мумкин.

Бу теорема функциянинг экстремал қийматлари ҳақидаги масалани текшириш учун етарли бўлмаса ҳам, лекин максимум ёки минимумнинг мавжудлигига олдиндан ишончимиз бўлган ҳолларда бу қийматларни топишга имкон беради. Акс ҳолда қўшимча текшириш зарур бўлади.



187- расм.

Масалан, $z = x^2 - y^2$ функциянинг ҳосилалари $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ бўлиб, улар $x = 0$ ва $y = 0$ бўлганда нолга айланади. Лекин бу функция шу қийматларда максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас. Ҳақиқатан, бу функция координаталар бошида нолга тенг ва координаталар бошига ҳар қанча яқин нуқталарда мусбат қийматлар ҳам, манфий қийматлар ҳам қабул қилади. Демак, ноль қиймат максимум ҳам, минимум ҳам бўла олмайди (187- расм).

$z = f(x, y)$ функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (ёки мавжуд бўлмаган) ва $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ёки мавжуд бўлмаган) нуқталари унинг критик нуқталари деб аталади. Агар функция бирор нуқтада экстремумга эга бўлса (1-теоремага кўра), бу ҳол фақат критик нуқтадагина юз бериши мумкин.

Икки узгарувчи функциясини критик нуқталарда текшириш учун унинг бу нуқталарда экстремуми бўлишининг етарли шартларини аниқлаймиз.

2-теорема. $f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтани ўз ичига олган бирор соҳада учинчи тартибгача (учинчи тартиблиси ҳам) узгуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин;

ундин ташқари $M_0(x_0, y_0)$ нуқта $f(x, y)$ функциянинг критик нуқтаси, яъни

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

бўлсин. У вақтда $x = x_0$ ва $y = y_0$ бўлганда:

1) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ ва } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$$

булса, $f(x, y)$ функция максимумга эга бўлиди;

2) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ ва } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$$

булса, $f(x, y)$ функция минимумга эга бўлади;

3) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0$$

булса, $f(x, y)$ функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди;

4) агар $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ булса, $f(x, y)$

функция экстремумга эга бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам, мумкин (бу ҳолда текширишни давом эттириш керак бўлади).

Исбот. $f(x, y)$ функция учун иккинчи тартибли Тейлор формуласини ёзамиз (16- § (6) формула). Бунда

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

фараз қилиб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \\ & + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + o(\Delta \rho)^2, \end{aligned}$$

бу ерда $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ва $\Delta \rho \rightarrow 0$ бўлганда o ҳам нолга шитилади.

Шартга мувофиқ

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Демак,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + o_0(\Delta r)^3. \quad (1)$$

Энди иккинчи хусусий ҳосилаларнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қийматларини A, B, C орқали белгилаймиз:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{M_0} = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{M_0} = C.$$

M кесма йуналиши билан (бу ерда $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқта) Ox уқи орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз; у ҳолда

$$\Delta x = \Delta r \cos \varphi, \quad \Delta y = \Delta r \sin \varphi \quad \text{бўлади.}$$

Бу ифодаларни Δf нинг формуласига қўйиб, ушбунни топи-
миз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 [A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + 2\alpha_0 \Delta r]. \quad (2)$$

$A \neq 0$ деб фараз қиламиз.

Ўрта қавс ичидаги ифодани A га қўпайтириб ва бўлиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi}{A} + 2\alpha_0 \Delta r \right]. \quad (3)$$

Энди мумкин бўлган тўрт ҳолни қараб чиқамиз.

1) $AC - B^2 > 0$, $A < 0$ бўлсин. У ҳолда касрнинг суратида иккита манфий бўлмаган миқдорлар йиғиндиси туради. Улар бир вақтда нолга айланмайди, чунки биринчи ҳад $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$ бўлганда, иккинчи ҳад эса $\sin \varphi = 0$ бўлганда нолга айланади.

Агар $A < 0$ бўлса, каср нолга айланмайдиган манфий миқдор бўлади. Уни $-m^2$ билан белгилаймиз; унда

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta r],$$

бу ерда m миқдор Δr га боғлиқ эмас, $\Delta r \rightarrow 0$ да $\alpha_0 \Delta r \rightarrow 0$. Де-
мак, Δr етарлича кичик бўлганда

$$\Delta f < 0$$

ёки

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Лекин у вақтда (x_0, y_0) нуқтага етарлича яқин бўлган ҳамма $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқталар учун ушбу тенгсизликка эга бў-
ламиз:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0),$$

бу эса функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эга бўлишини кўрсатади.

2) $AC - B^2 > 0, A > 0$ бўлсин. У ҳолда, юқоридагига ўхшаш фикр юритиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 [m^2 + 2a_0 \Delta r]$$

Ски

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

яъни $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эга.

3') $(AC - B^2) < 0, A > 0$ бўлсин. Бу ҳолда функция на максимумга ва на минимумга эга бўлмайди. (x_0, y_0) нуқтадан бир йўналишда ҳаракат қилганимизда функция ўсаяди ва иккинчи йўналишда ҳаракат қилганимизда функция камаяди. Ҳақиқатан ҳам $\varphi = 0$ нур бўйича силжиганда ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 [A + 2a_0 \Delta r] > 0;$$

бу нур бўйича ҳаракат қилинганда функция ўсади. Агар $\tan \varphi_0 = -\frac{A}{B}$ бўладиган $\varphi = \varphi_0$ нур бўйича ҳаракат қилинса, $A > 0$ бўлганда

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \sin^2 \varphi_0 + 2a_0 \Delta r \right] < 0$$

бўлади; бу нур бўйича ҳаракат қилинганда эса функция камаяди.

3'') $AC - B^2 < 0, A < 0$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам функция на максимумга ва на минимумга эга бўлмайди. Текшириш 3' ҳолдаги каби ўтказилади.

3''') $AC - B^2 < 0, A = 0$ бўлсин. У вақтда $B \neq 0$ ва (2) тенгликни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 [\sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi) + 2a_0 \Delta r].$$

φ нинг старлича кичик қийматларида кичик қавсдаги ифода ишорасини сақлайди, чунки у $2B$ га яқин, $\sin \varphi$ купайтувчи эса φ нинг нолдан катта ёки кичик бўлишига қараб ишорасини ўзгартиради ($\varphi > 0$ ва $\varphi < 0$ ни танлагандан сунг Δr ни шундай кичик қилиб оламизки, $2a_0$ квадрат қавсдаги ифоданинг ишорасини ўзгартиролмайди). Демак, бу ҳолда ҳам φ нинг, яъни Δx ва Δy нинг ҳар хил қийматларига қараб Δf нинг ишораси ўзгаради, шунга кўра бу ҳолда ҳам максимум ва минимум бўлмайди.

Шундай қилиб, A нинг ишораси қандай бўлмасин доим ушбу ҳолга эга бўламиз:

Агар (x_0, y_0) нуқтада $AC - B^2 < 0$ бўлса, функция бу нуқтада максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Бу ҳолда функциянинг графиги хизматини қилувчи сирт бу нуқта яқинида, масалан, эгар шаклида (187- расмга қаранг) бўлиши мумкин. Функция бу нуқтада *минимаксга* эга дейилади.

4) $AC - B^2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (2) ва (3) формулаларга асосан Δf нинг ишорасини аниқлаб бўлмайди. Масалан, $A \neq 0$ да

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2}{A} + 2x_0 \Delta \rho \right] \quad \text{бўлади;}$$

$\varphi = \arctg \left(-\frac{A}{B} \right)$ бўлганда Δf нинг ишораси $2x_0$ нинг ишорасига қараб аниқланади, бу эса *маҳсус* (масалан, юқорироқ тартибли Тейлор формуласи ёрдами билан ёки бошқа бирон усул билан) текширишнинг талаб қилади. Шундай қилиб, 2- теорема тўла исботланди.

3- мисол.

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

функциянинг максимум ва минимумга эга ёки эмаслиги текшириلسин.

Ечиш. 1) Критик нуқталарни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Ушбу тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

унинг илдизлари

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

2) $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ критик нуқтада иккинчи ҳосилаларни топамиз ва критик нуқтанинг характерини аниқлаймиз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Демак, $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ нуқтада функция минимумга эга, яъни;

$$z_{\min} = -\frac{4}{3}.$$

4- мисол. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциянинг максимум ва минимумининг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги аниқлансин:

Ечиш. 1) Экстремумнинг зарур шартларидан фойдаланиб, критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Бундан иккита критик нуқтани топамиз.

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1 \quad \text{ва} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0.$$

2) Иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Биринчи критик нуқтанинг характерини текшираимиз:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=1, y=1} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{x=1, y=1} = -3, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{x=1, y=1} = 6,$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0; \quad A > 0.$$

Демак, берилган функция (1; 1) нуқтада минимумга эга, яъни:

$$z_{\min} = -1.$$

4) Иккинчи критик нуқта $M_2(0, 0)$ нинг характерини текшираимиз:

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0;$$

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Демак, иккинчи критик нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас (минимакс).

5-мисол. Берилган мусбат a сон шундай учта мусбат қўшилувчига ажратилсинки, уларнинг қўпайтмаси энг катта қийматга эга бўлсин.

Ечиш. Қўшилувчиларни белгилаймиз: биринчи қўшилувчининг x билан, иккинчи қўшилувчининг y билан белгилаймиз; унда учинчи қўшилувчи $a - x - y$ бўлади. Бу қўшилувчиларнинг қўпайтмаси:

$$u = xy(a - x - y).$$

Масаланинг шартига кўра $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, яъни $x + y < a$, $u > 0$. Демак, x ва y $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳага тегишли қийматларга эга бўлиши мумкин.

u функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - 2x - y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - 2y - x).$$

Ҳосилаларни нолга тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$y(a - 2x - y) = 0, \quad x(a - 2y - x) = 0.$$

Бу системани ечиб, критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & M_1(0, 0), \\ x_2 &= 0, & y_2 &= a, & M_2(0, a), \\ x_3 &= a, & y_3 &= 0, & M_3(a, 0), \\ x_4 &= \frac{a}{3}, & y_4 &= \frac{a}{3}, & M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right). \end{aligned}$$

Олдинги учта нуқта соҳанинг чегарасида, тўртинчи нуқта соҳанинг ичида ётади. Соҳанинг чегарасида u функция нолга тенг, соҳанинг ичида эса функция мусбат; демак, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ нуқтада u функция максимумга эга бўлади (чунки бу учбурчак ичидаги бирдан-бир экстремал нуқтадир). Кўпайтманинг максимал қиймати:

$$u_{\max} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Етарли шартлардан фойдаланиб, критик нуқталарнинг характерини текшираемиз. u функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

$M_1(0, 0)$ нуқтада

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Демак, $M_1(0, 0)$ нуқтада на максимум ва на минимум йўқ. $M_2(0, a)$ нуқтада

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$AC - B^2 = -a^2 < 0$. Демак, M_2 нуқтада ҳам на максимум ва на минимум йўқ. $M_3(a, 0)$ нуқтада

$$A = 0, \quad B = -a, \quad C = -2a, \quad AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Демак, M_3 нуқтада ҳам на максимум ва на минимум йўқ. $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ нуқтада

$$A = -\frac{2a}{3}, \quad B = -\frac{a}{3}, \quad C = -\frac{2a}{3},$$

$$AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0, \quad A < 0.$$

Демак, M_4 нуқтада максимумга эгамиз.

Изоҳ. Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумлари назарияси экспериментал маълумотлар асосида функционал боғланишларни тасвирлаш учун формулалар ҳосил қилишнинг бир усулини топишнинг асосидир. Бу масала 19-§ да баён қилинган.

18-§. Берилган тенгламалар билан боғланган бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми (шартли максимумлар ва минимумлар)

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир қўп масалаларда вазифа эркин бўлмаган, балки ўзаро баъзи қўшимча шартлар билан боғланган (масалан, улар берилган тенгламаларни қаноатлантириши керак) бир неча ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумини топишдан иборат бўлади.

Масалан, ушбу масалани қараб чиқамиз.

Юзи 2а га тенг бўлган тунукадан параллелепипед шаклида энг катта ҳажмли ёпиқ қути яшаш керак.

Қутининг узунлиги, эни ва баландлигини x , y , z ҳарфлари билан белгилаймиз. Масала $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ шартида

$$v = xyz$$

функциянинг максимумини топишдан иборат. Бу ерда биз *шартли экстремумга* тегишли масалани оламиз: x , y , z ўзгарувчилар $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ шарти билан боғланган. Бу параграфда бундай масалаларни ечиш усулларини қараймиз.

Аввал ўзаро битта шарт билан боғланган икки ўзгарувчи функциясининг шартли экстремуми ҳақидаги масалани қараймиз.

Ушбу

$$u = f(x, y) \quad (1)$$

функциянинг максимум ва минимумларини топиш керак бўлсин; бунда x ва y мана бу

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

тенглама билан боғланган.

(2) шарт мавжуд бўлганда икки ўзгарувчи x ва y дан фақат биттаси, масалан x эркин ўзгарувчи бўлади, чунки у (2) тенгламадан x нинг функцияси сифатида аниқланади. Агар (2) тенгламани y га нисбатан ечиб, топишдан ифодани (1) тенгликдаги y ўрнига қўйсак, бир ўзгарувчи x нинг функциясини ҳосил қилиб, масалани бир ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумини текшириш ҳақидаги масалага келтирган бўлар эдик.

Лекин қўйилган масалани (2) тенгламани x ёки y га нисбатан ечмасдан ҳам ҳал қилиш мумкин. x нинг u функция максимум ёки минимумга эга бўладиган қийматларида u нинг x бўйича хусусий ҳосиласи нолга айланиши керак.

у х нинг функцияси эканини эсда тутиб, (1) дан $\frac{du}{dx}$ ҳосилани топамиз;

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Демак, экстремум нуқталарида

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

(2) тенгликдан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4)$$

ни топамиз. Бу тенглик (2) тенгламани қаноатлантирадиган x ва y нинг барча қийматларида қаноатланади (VIII бобнинг 11- § га қарап).

(4) тенгламанинг иккала томонини ҳозирча номаълум λ коэф-фициентга кўпайтириб, ҳосил қилинган тенгликни (3) тенглик-ка ҳадлаб қўшиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

ёки

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Бу тенглик барча экстремум нуқталарда бажарилади. λ нинг қийматини шундай танлаймизки, (5) тенгликдаги иккинчи қавс u функцияга экстремум берувчи x ва y қийматларда нолга айланди*):

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Лекин бу ҳолда x ва y нинг шу қийматларида (5) тенгликдан

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, экстремум нуқталарда учта x , y , λ номаълумли учта тенгламанинг қаноатланиши келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бу тенгламалардан x ва y ни ҳамда фақат ёрдамчи ролни бажарган ва бундан кейин керак бўлмайдиган λ ни аниқлаймиз.

*) Аниқлик учун критик нуқталарда $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ деб фараз қиламиз.

ва (8), (9) нинг $m + n$ та тенгламасидан $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни ва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ёрдамчи номаълумларни аниқлаш керак. Икки ўзгарувчининг функциясидаги каби топилган қийматларда функция максимумга ёки минимумга эга бўлиши, ёки на унга ва на бунга эга бўлмаслиги масаласини умумий ҳолда очиқ қолдирамиз. Бу масalani ёрдамчи мулоҳазаларга асосланиб ечимиз.

1-мисол. Бу параграфнинг бошида айтилган масалага қайтамиз:

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0) \quad (10)$$

шарти билан боғланган x, y, z ўзгарувчилар функцияси

$$v = xyz$$

нинг максимуми топилсин. Ёрдамчи функция тузамиз:

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Унинг хусусий ҳосилаларини топамиз ва уларни нолга тенглаймиз:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Масала тўрт (x, y, z, λ) номаълумли тўртта (10) ва (11) тенгламалар системасини ечишга келтирилади. Бу системани ечиш учун (11) тенгламалардан биринчисини x га, иккинчисини y га, учинчисини z га кўпайтирамиз ва уларни қўшамиз; (10) тенгликни эътиборга олиб, $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$ ни топамиз. λ нинг қийматини (11) га қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз

$$yz \left[1 - \frac{3x}{2a} (y + z) \right] = 0,$$

$$xz \left[1 - \frac{3y}{2a} (x + z) \right] = 0,$$

$$xy \left[1 - \frac{3z}{2a} (x + y) \right] = 0.$$

Масаланинг маъносига кўра x, y, z нолдан фарқли бўлгани учун охириги тенгламалардан қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\frac{3x}{2a}(y + z) = 1, \quad \frac{3y}{2a}(x + z) = 1, \quad \frac{3z}{2a}(x + y) = 1.$$

Олдинги икки тенгламадан $x = y$, иккинчи ва учинчи тенгламадан $y = z$. Лекин бундай ҳолда (10) тенгламадан

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

келиб чиқади. Бу x, y ва z нинг максимум ва минимум бўлиши мумкин бўлган ягона қийматлари системасидир.

Ҳосил қилинган ечим максимум беришини исбот қилиш мумкин. Бу масаланинг геометрик мазмунидан ҳам келиб чиқади (масала шартини ўқининг ҳажми чекланмаган ҳолда катта бўла олмайдми; демак, томонларнинг қандай бўлмасин аниқ қийматларида унинг ҳажми энг катта бўлади).

Шундай қилиб, қутининг ҳажми энг катта бўлиши учун, қути қирраси

$\sqrt[n]{\frac{a}{3}}$ га тенг куб бўлиши керак.

2-мисол. Йиғиндисини a га тенг бўлган $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар кўпайтмасининг n - даражали илдинининг энг катта қийматини топишсин. Демак, масала бундай қўйилган: $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0) \quad (12)$$

шарти билан боғланган ҳолда

$$u = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

функциянинг максимумини топиш талаб қилинади. Ердамчи функция тузамиз:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a).$$

Унинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$F'_{x_1} = \frac{1}{n} \frac{x_2 x_3 \dots x_n}{(x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \quad \text{ёки } u = -n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \quad \text{ёки } u = -n\lambda x_2,$$

.....

$$F'_{x_n} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \quad \text{ёки } u = -n\lambda x_n.$$

Охириги тенгликлардан:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

ва (12) тенгламага асосан:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}.$$

Масаланинг маъносига кўра бу қийматлар $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ функциянинг $\frac{a}{n}$ га тенг максимумини беради.

Шундай қилиб, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ тенглик билан боғланган ҳар қандай мусбат $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар учун

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{a}{n} \quad (13)$$

тенгсизлик бажарилади (чунки исбот қилинганига кўра, $\frac{a}{n}$ бу функциянинг энг катта қиймати). Энди (13) тенгсизликдаги a ўрнига (12) тенгликдан унинг қийматини қўйиб, ушбунни топамиз:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (14)$$

Бу тенгсизлик ҳар қандай мусбат $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар учун тўғри. (14) тенгсизлиكنинг чап томонида турган ифода шу сонларнинг ўрта геометрияси деб аталади. Шундай қилиб, бир неча мусбат сонларнинг ўрта геометрияси уларнинг ўрта арифметикасидан катта эмас.

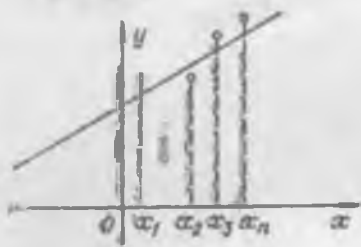
19-§. Функцияни энг кичик квадратлар усули билан тажрибадан олинган маълумотлар асосида ҳосил қилиш

у миқдорнинг x миқдорга функционал боғлиқлиги:

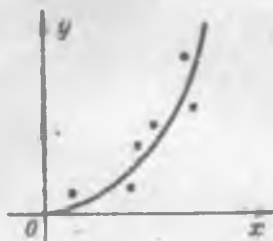
$$y = \varphi(x) \quad (1)$$

ни тажрибага асосан аниқлаш талаб этилсин. Тажриба натижасида аргументнинг n та қийматлари учун функциянинг n та мос қийматлари олинган бўлсин. Натижалар қуйидаги жадвалда ёзилган:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n



188-расм.



189-расм.

$y = \varphi(x)$ функциянинг кўриниши назарий мулоҳазаларга асосан ёки тажрибада олинган қийматларга мос келадиган нуқталарнинг координаталар текислигида қандай жойлашганига қараб аниқланади. (Бу нуқталарни „экспериментал нуқталар“ деб атаймиз.) Масалан, экспериментал нуқталар координаталар текислигида 188-расмда тасвирлагандек жойлашган бўлсин. Тажриба бажарилаётган вақтда озгина бўлсада хато бўлишини ҳисобга олиб, изланган $y = \varphi(x)$ функцияни $y = ax + b$ чизиқли функция кўринишида топиш мумкин.

Агар экспериментал нуқталар координаталар текислигида 189-расмдагидек жойлашган бўлса, у ҳолда изланган $y = \varphi(x)$

функцияни $y = ax^b$ кўринишда топниш табний ва ҳоказо. Функцияни $y = \varphi(x, a, b, c)$ кўринишда танлаб олинган, шу функцияга кирувчи $a, b, c, \dots$ параметрларни шундай танлаш керак бўладики, у ўрганилаётган ҳодисани бирор маънода жуда яхши тарзда акс эттирсин.

Қуйилган масалани ечишда жуда кенг тарқалган усул *энг кичик квадратлар усулидир*. Бу усул қуйидагидан иборат: тажрибада олинган y_i қийматлар билан мос нуқталардаги $\varphi(x, a, b, c)$ функция қийматлари орасидаги айирмалар квадратларининг йиғиндисини қараймиз:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2. \quad (2)$$

$a, b, c, \dots$ параметрларни шундай танлаб оламизки, бу йиғинди энг кичик қиймат қабул қилсин:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2 = \min. \quad (3)$$

Демак, масала $S(a, b, c, \dots)$ функцияни минимумга айлантирадиган $a, b, c, \dots$ параметрлар қийматларини топишга келтирилади.

1- теоремага (17- §) асосан $a, b, c, \dots$ параметрларнинг бу қийматлари қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши лозим:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots, \quad (4)$$

ёки буларни ёйчилган кўринишда ёзсак:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial a} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial b} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial c} &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Бу ерда қанча номаълум бўлса, шунча тенглама бўлади. Ҳар қайси конкрет ҳолда (5) тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва $S(a, b, c, \dots)$ функциянинг минимумга эғалиги масаласи текширилади. $y = \varphi(x, a, b, c, \dots)$ функцияни аниқлашнинг бир неча ҳолини қараб чиқамиз.

1. $y = ax + b$ бўлсин. Бу ҳолда $S(a, b)$ функция қуйидаги кўринишда бўлади ((2) ифодага қаранг):

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (6)$$

Бу функция иккита a ва b ўзгарувчили функциядир (x_i ва y_i —берилган сонлар; 322-бетдаги жадвалга қаранг). Демак,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0, \end{aligned} \right\}$$

яъни (5) тенгламалар системаси бу ҳолда қуйидаги кўриниш-ни олади:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Икки a ва b номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу системанинг маълум ечимга эга эканлиги, a ва b параметрларнинг топилган қийматларида ҳамда $S(a, b)$ функция минимумга эга бўлиши равшан*).

II Биз аппроксимацияланувчи функция учун иккинчи даражали уч ҳадни олайлик:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Бу ҳолда (2) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \quad (8)$$

*) Бу етарли шартларга асосан ҳам осонгина аниқланади (17-§ даги 2-теоремага қаранг). Ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4 \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 > 0; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Бу учта ўзгарувчининг функциясидир. (5) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ёки ёйилган кўринишда ёзсак:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i^4 - b \sum_{i=1}^n x_i^3 - c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^3 - b \sum_{i=1}^n x_i^2 - c \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i - cn &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

a, b, c номаълумларни топиш учун чизиқли тенгламалар системаси ҳосил қиламиз. Масала характеридан система аниқ ечимга эга эканлиги, a, b, c параметрларнинг олинган қийматларида $S(a, b)$ функция минимумга эга эканлиги кўриниб турибди.

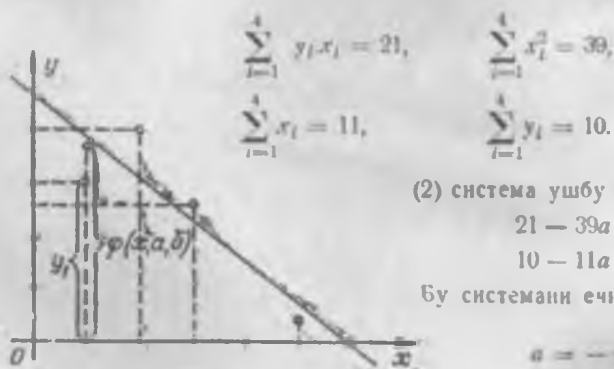
Мисол. Аргументнинг тўртта қийматида ($n=4$) изланган функциянинг тажрибага асосан тўртта қиймати олинган бўлсин; улар ушбу жадвалга ёзилган:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Ҳ функцияни $y = ax + b$ чизиқли функция кўринишда топамиз, $S(a, b)$ учун ифода тузамиз:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^4 [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

(7) системани тузиш учун ҳамда a ва b коэффициентларини аниқлаш учун олдин қуйидагиларни ҳисоблаймиз:



190- расм.

(2) система ушбу кўринишни олади.

$$\begin{cases} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, a ва b ни топамиз.

$$a = -\frac{26}{35}, \quad b = \frac{159}{35}.$$

Изоланган тўғри чизиқ қуйидагича бўлади (190- расм):

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

20- §. Эгри чизиқнинг махсус нуқталари

Хусусий ҳосила тушунчасидан эгри чизиқларини текширишда фойдаланилади.

Эгри чизиқ

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин.

Эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

формула билан аниқланади (VIII боб 11- § га қаранг).

Агар эгри чизиқнинг берилган $M(x, y)$ нуқтасида хусусий ҳосилалар $\frac{\partial F}{\partial x}$ ёки $\frac{\partial F}{\partial y}$ дан энг камида биттаси нолга айланмаса, шу нуқтада $\frac{dy}{dx}$ ёки $\frac{dx}{dy}$ тула аниқланади. $F(x, y) = 0$ эгри чизиқ бундай нуқтада аниқ уринмага эга бўлади. Бу ҳолда $M(x, y)$ нуқта *оддий нуқта* деб аталади.

Агар бирор $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \quad \text{ва} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$$

булса, у ҳолда уринманинг бурчак коэффиценти ноаниқ бўлиб қолади.

Таъриф. Агар $F(x, y) = 0$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида $\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларнинг иккаласи нолга айланса, бундай нуқта эгри чизиқнинг *махсус нуқтаси* деб аталади. Демак, эгри чизиқнинг махсус нуқтаси

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

тенгламалар системаси билан аниқланади.

Ҳар қандай эгри чизиқ махсус нуқтага эга бўлавермаслиги табиий. Масалан,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

эллипс учун

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилалар фақат $x = 0$, $y = 0$ нуқтада нолга айланади, лекин x ва y нинг бу қийматлари эллипс тенгламасини қаноатлантирмайди. Демак, эллипснинг махсус нуқталари йўқ.

Эгри чизиқнинг махсус нуқта яқинида кўринишини батафсил текширишга киришмасдан, махсус нуқталари бўлган бир неча эгри чизиқ намуналарини қараймиз.

1-мисол. Ушбу

$$y^4 - x(x - a)^2 = 0 \quad (a > 0)$$

эгри чизиқнинг махсус нуқталари текширилсин.

Ечиш. Бу мисолда $F(x, y) = y^4 - x(x - a)^2$, шунинг учун

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x - a)(a - 3x); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3.$$

Учта тенглама:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ни бирга ечиб, x ва y нинг бу системани қаноатлантирадиган қийматларини толаймиз:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Демак, $M_0(a, 0)$ нуқта эгри чизиқнинг махсус нуқтасидир.

Эгри чизиқнинг махсус нуқта яқинида жойлашганини текшираемиз ва эгри чизиқни ясаймиз. Берилган тенгламани ушбу шаклда ёзамиз:

$$y = \pm (x - a) \sqrt{x}.$$

Бу формуладан кўринадики, эгри чизиқ: 1) фақат $x > 0$ қийматларда аниқланган; 2) Ox ўққа нисбатан симметрик; 3) Ox ўқни $(0, 0)$ ва $(a, 0)$ нуқталарда кеседи. Кейинги нуқта, юқорида аниқланганидек, махсус нуқтадир.

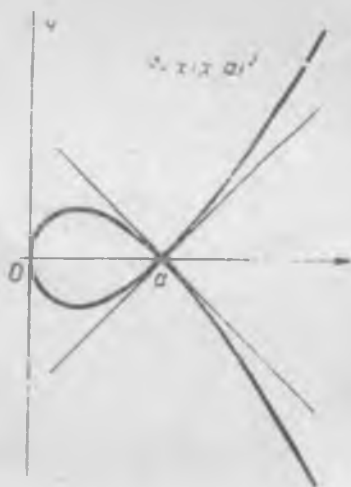
Аввал эгри чизиқнинг тенгламадаги $+$ ишорага мос қисмини текширамыз:

$$y = (x - a)\sqrt{x}.$$

y нинг x бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \frac{3x - a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x + a}{4x\sqrt{x}}.$$

$x = 0$ бўлганда $y' = \infty$. Демак, эгри чизиқ координаталар бошида Oy ўққа ўринади. $x = \frac{a}{3}$ бўлганда $y' = 0$, $y'' > 0$, яъни $x = \frac{a}{3}$ бўлганда y функция минимумга эга:



191- расм.

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$0 < x < a$ кесмада $y < 0$ бўлади; $x > \frac{a}{3}$ бўлганда $y' > 0$; $x \rightarrow \infty$ да, $y \rightarrow \infty$, $x = a$ бўлганда $y' = \sqrt{a}$, яъни махсус $M_1(a, 0)$ нуқтада эгри чизиқнинг $y = +(x - a)$, x тармоғи $y = \sqrt{a}(x - a)$ уринмага эга бўлади.

Эгри чизиқнинг иккинчи тармоғи $y = -(x - a)\sqrt{x}$ биринчи тармоғига Ox ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун, эгри чизиқ иккинчи уринмага (иккинчи тармоққа) эга:

$$y = -\sqrt{a}(x - a).$$

Эгри чизиқ махсус нуқтадан икки марта ўтади. Бундай нуқта *туғун нуқта* аталади.

Текширилган эгри чизиқ 191- расмда тасвирланган.

2- мисол.

$$y^2 - x^3 = 0$$

эгри чизиқ (ярим кубик парабола) нинг махсус нуқталари бор-йўқлиги текширилсин.

Е ч и ш. Махсус нуқталарнинг координаталари ушбу тенгламалар системасидан топилади:

$$y^2 - x^3 = 0, \quad 3x^2 = 0, \quad 2y = 0.$$

Демак, $M_0(0, 0)$ — махсус нуқта.

Берилган тенгламани

$$y = \pm \sqrt{x^3}$$

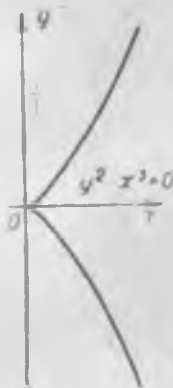
кўринишда ёзамиз. Эгри чизиқнинг графигини яшаш учун аввал эгри чизиқнинг тенгламадаги плюс ишорага мос тармоғини текширамыз, чунки минус ишорага мос тармоғи биринчи тармоққа Ox ўққа нисбатан симметрикдир.

y функция фақат $x > 0$ бўлганда аниқланган бўлиб, маъний эмас ва x нинг ўсиши билан ўсади.

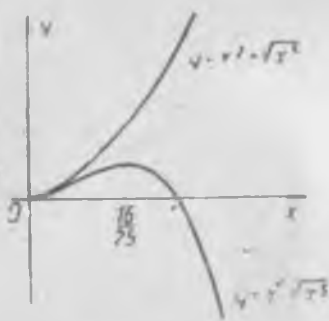
$y = \sqrt{x^3}$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}, \quad y'' = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$ бўлади. Демак, эгри чизикнинг қаралаётган тармоғи координаталар бошида $y = 0$ уринмага эга. Эгри чизикнинг иккинчи $y = -\sqrt{x^3}$ тармоғи ҳам координаталар бошидан ўтади ва ўша $y = 0$ уринмага эга бўлади. Шундай қилиб, эгри чизикнинг иккита турли тармоғи координаталар бошида учрашади, умумий бир уринмага эга ва уринмадан турли томонга жойлашган бўлади. Бундай махсус нуқта *биринчи тур қайтиш нуқтаси* деб аталади (192- расм).



192- расм.



193- расм.

Изоҳ. $y^2 - x^3 = 0$ эгри чизикни $y^2 = x(x-a)^2$ (1- мисолда қаралган) эгри чизикнинг $a \rightarrow 0$ даги лимит ҳоли сифатида қараш мумкин; ҳақиқатан $a \rightarrow 0$ да эгри чизик сиртмоғи бир нуқтага айланади.

3- м и с о л.

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

эгри чизик текширилсин.

Е ч и ш. Махсус нуқталарнинг координаталари

$$-4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \quad 2(y - x^2) = 0$$

тенгламалар системасидан топилади; бу система ягона ечимга эга: $x = 0$, $y = 0$. Демак, координаталар боши махсус нуқта экан.

Берилган тенгламани $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ кўринишда ёзамиз:

Бу тенгламадан кўринадики, x 0 дан $+\infty$ гача қийматлар қабул қила олади.

Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2} \sqrt{x^3}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x}.$$

Эгри чизиқнинг плюс ва минус ишораларга мос тармоқларини айрим текшираемиз. $x = 0$ бўлганда иккала ҳолда ҳам $y = 0$, $y' = 0$, яъни Ox ўқ иккала тармоқ учун ҳам уринма бўлади. Аввал

$$y = x^2 + \sqrt{x^3}$$

тармоқни қараймиз. x 0 дан ∞ гача ўсганда y 0 дан ∞ гача ўсади. Иккинчи тармоқ

$$y = x^2 - \sqrt{x^3}.$$

Ox ўқни $(0, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарда кеседи.

$x = \frac{16}{25}$ бўлганда $y = x^2 - \sqrt{x^3}$ функция максимумга эга. Агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса, $y \rightarrow -\infty$ бўлади.

Шундай қилиб, бу ҳолда координаталар бошида эгри чизиқнинг икки тармоғи учрашади; иккала тармоқ умумий уринмага эга ва уриниш нуқтасининг яқинида иккала тармоқ уринманинг бир томонига жойлашган. Бундай нуқта *иккинчи тур қайтиш нуқтаси* дейилади. Кўриган функциянинг графиги 193-расимда тасвирланган.

4-мисол. $y^3 - x^4 + x^6 = 0$ эгри чизиқ текширилсин.

Ечиш. Координаталар боши махсус нуқтадир. Эгри чизиқни бу нуқта яқинида текшириш учун эгри чизиқ тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Эгри чизиқнинг тенгламасида ўзгарувчилар фақат жуфт даражада, шунинг учун эгри чизиқ координата ўқларига қисбатан симметрик ва, демак, эгри чизиқни x ва y нинг мусбат қийматларига мос қисмини текшириш kifoya. Охириги тенгламадан кўринадики, x 0 дан 1 гача, яъни $0 < x < 1$ кесмада ўзгариши мумкин.

Эгри чизиқнинг $y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}$ тенгламанинг графиги бўлган тармоғи учун биринчи ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$x = 0$ булганда $y = 0$, $y' = 0$. Демак, эгри чизиқ координаталар бошида Ox ўққа уринади.

$x = 1$ бўлганда $y = 0$, $y' = \infty$ бўлади; демак $(1, 0)$ нуқтада уринма Oy ўққа параллел бўлади. $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ бўлганда функция максимумга эга бўлади (194-расм).

Координаталар бошида (махсус нуқтада) эгри чизиқнинг радикал олдидаги плюс ва минус ишораларга мос тармоқлари ўзаро уринади. Бундай махсус нуқта *ёпишиш нуқтаси* дейилади.

5-мисол. Ушбу эгри чизиқ текширилсин:

$$y^3 - x^2(x - 1) = 0.$$

Ечиш. Махсус нуқтани аниқловчи тенгламалар системасини ёзамиз:

$$y^3 - x^2(x - 1) = 0, \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Бу система $x = 0$, $y = 0$ ечимга эга. Демак, $(0, 0)$ нуқта эгри чизиқнинг махсус нуқтасидир. Берилган тенгламани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$y = \pm x \sqrt{x - 1}.$$

Бундан кўринадики, x 1 дан ∞ гача ўзгариши ва 0 қийматга эга бўлиши ҳам мумкин (кейинги ҳолда $y = 0$ бўлади).

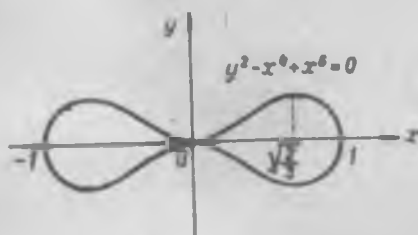
Эгри чизиқнинг радикал олдидаги плюс ишорага мос тармоғини текшириниз. x 1 дан ∞ гача ўсганда y 0 дан ∞ гача ўсади. Ҳосила

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

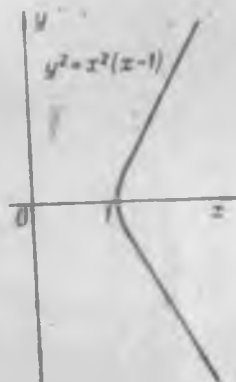
$x = 1$ бўлганда $y' = \infty$, демак, $(1, 0)$ нуқтада уринма Oy ўққа параллел бўлади.

Эгри чизиқнинг минус ишорага мос тармоғи биринчи тармоққа Ox ўққа нисбатан симметрикдир.

$(0, 0)$ нуқтанинг координатлари эгри чизиқ тенгламасини қаноатлантирадн, демак, y эгри чизиққа тегишли нуқта, лекин унинг яқинида эгри чизиқнинг бошқа нуқталари йўқ (195- расм). Бундай махсус нуқта *яккаланган махсус нуқта* дейилади.



194- расм.



195- расм.

VIII бобга машқлар

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин:

1. $z = x^2 \sin^2 y$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$.
2. $z = xy^2$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$.
3. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$. Жав. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$.
4. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Жав. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
5. $z = \arctg(xy)$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$.
6. $z = \arctg \frac{y}{x}$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.
7. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ э. } u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}, \quad \text{Жав. } \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}. \quad 9. \quad z = \arcsin(x + y).$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad 10. \quad z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}. \quad \text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^4 - y^4}}.$$

Қуйидаги функциялардан тула дифференциал топилисин:

$$11. \quad z = x^2 + xy^2 + \sin y. \quad \text{Жав. } dz = (2x + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy.$$

$$12. \quad z = \ln(xy). \quad \text{Жав. } dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad 13. \quad z = e^{x^2 + y^2}. \quad \text{Жав. } dz = 2e^{x^2 + y^2} \times$$

$$\times (x dx + y dy). \quad 14. \quad u = \lg(3x - y) + 6^{y+z}. \quad \text{Жав. } du = \frac{3dx}{\cos^2(3x - y)} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{\cos^2(3x - y)} + 6^{y+z} \ln 6 \right) dy + 6^{y+z} \ln 6 dz. \quad 15. \quad w = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$\text{Жав. } dw = \frac{y dx - x dy}{|y| \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$16. \quad f(x, y) = x^2 + y^3 \text{ бўлса, } f'_x(2, 3) \text{ ва } f'_y(2, 3) \text{ ҳисоблансин.}$$

$$\text{Жав. } f'_x(2, 3) = 4. \quad f'_y(2, 3) = 27.$$

$$17. \quad \text{Агар } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ бўлса, } x = 1, \quad x = 0; \quad dx = \frac{1}{2}, \quad dy = \frac{1}{4}$$

$$\text{бўлганда } df(x, y) \text{ ҳисоблансин. Жав. } \frac{1}{2}.$$

$$18. \quad x, y \text{ ва } z \text{ миқдорларнинг кичик абсолют қийматларида } \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$$

$$\text{учун тақрибий ифода тузилсин. Жав. } 1 + \frac{1}{2}(x - y - z).$$

$$19. \quad \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}} \text{ учун ҳам шу масала ечилсин. Жав. } 1 + \frac{1}{2}(x - y - z).$$

$$20. \quad \text{Агар } z = u + v^2, \quad u = x^2 + \sin y, \quad v = \ln(x + y) \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{топилисин. Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 \frac{\ln(x+y)}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2 \frac{\ln(x+y)}{x+y}.$$

$$21. \quad \text{Агар } z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}, \quad u = -\cos x, \quad v = \cos x \text{ бўлса, } \frac{dz}{dx} \text{ топилисин.}$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

$$22. \quad \text{Агар } z = e^{u-2v}, \quad u = \sin x, \quad v = x^2 + y^2 \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ топилисин.}$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2 \cdot 2y) = -4ye^{u-2v}.$$

23. Ушбу функцияларнинг тўла ҳосилалари топилсин: $z = \arcsin(u + v)$,
 $u = \sin x \cos \alpha$, $v = \cos x \sin \alpha$. Жав. Агар $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,
 бўлса, $\frac{dz}{dx} = 1$, агар $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\frac{dz}{dx} = -1$.
 24. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$. Жав. $\frac{du}{dx} = e^{ax} \sin x$. 25. $z =$
 $= \ln(1-x^4)$, $x = \sqrt{\sin \theta}$. Жав. $\frac{dz}{d\theta} = -2 \operatorname{tg} \theta$.

Куйидаги тенгламалар билан берилган x нинг ошқормас функцияларининг ҳосилалари топилсин:

26. $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - 1 = 0$. Жав. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^3 x}{a^3 y}$. 27. $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} = 1$. Жав. $\frac{dy}{dx} =$
 $= -\frac{b^3 x}{a^3 y}$. 28. $y^x = x^y$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$. 29. $\sin(xy) - e^{xy} -$
 $- x^3 y = 0$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}$. 30. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва
 $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$. 31. $u - v \operatorname{tg} cw = 0$; $\frac{\partial w}{\partial u}$ ва
 $\frac{\partial w}{\partial v}$ топилсин. Жав. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{av}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2aw}$. 32. $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$;
 $x^3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$ экани кўрсатилсин. 33. $\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; F — ҳар қандай
 дифференциалланувчи функция бўлса, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ экани кўрса-
 тилсин.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар ҳисоблансин:

34. $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$. Жав. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.
 35. $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$. Жав. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} +$
 $+\frac{\cos y}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x$.
 36. Агар $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ бўлиши ис-
 ботлансин.
 37. Агар $z = \frac{x^2 y^3}{x+y}$ бўлса, $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$ бўлиши исботлансин.
 38. Агар $z = \ln(x^2 + y^2)$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ бўлиши исботлансин.
 39. Агар $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ ва φ, ψ ҳар қандай икки марта
 дифференциалланувчи функциялар бўлса, $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ бўлиши исбот-
 лансин.

40. $z = 3x^4 - xy + y^3$ функциянинг $M(1, 2)$ нуктада Ox ўқ билан 60° ли бурчак ҳосил қилувчи йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

Жав. $5 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$. 41. $z = 5x^3 - 3x - y - 1$ функциянинг $M(2, 1)$ нук-

тада шу нуктадан $N(5, 5)$ нуктага борадиган йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин. Жав. 9,4.

42. $f(x, y)$ функциянинг: 1) Oxy координат бурчаги биссектрисасининг йўналиши бўйича, 2) Ox ярим ўқнинг манфий йўналиши бўйича ҳосилалари топилсин. Жав. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)$; 2) $-\frac{\partial f}{\partial x}$. 43. $f(x,$

$y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^3$. $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ нуктада ҳар қандай йўналиш бўйича

ҳосил нолга тенг (функция стационар) эканлиги кўрсатилсин. 44. Периметри $2p$ бўлган ҳамма учбурчаклардан энг катта юзга эга бўлган аниқлансин. Жав. Тенг томонли учбурчак. 45. Тўла сирти S берилганда энг катта ҳажми эга бўлган тўғри тўрт бурчакли параллелепипед топилсин. Жав. Қир-

раси $\sqrt{\frac{S}{6}}$ бўлган куб. 46. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ бўлган фазода-

ги икки тўғри чизиқ орасидаги масофа топилсин. Жав. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Қуйидаги функциялар максимум ва минимумга текширилсин. 47. $z = -x^2y^2(a - x - y)$. Жав. $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$ бўлганда z максимумга эга.

48. $z = x^2 + xy + y^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Жав. $x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ бўлганда z минимумга

эга. 49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$. Жав. $x =$

$= y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда z максимумга эга бўлади. 50. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$

$(0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$. Жав. $x = y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда z максимумга эга.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг махсус нукталари топилсин; уларнинг характери текширилсин ва бу нукталардаги уринмаларнинг тенгламалари тузилсин. 51. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $x = 0$, $y = 0$ уринмаларнинг тенгламалари. 52. $a^4y^3 = x^4(a^2 - x^2)$. Жав. Уриниш нуктаси

координаталар бошида; $y^3 = 0$ — қуш уринма. 53. $y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$. Жав. $M_0(0,$

$0)$ — биринчи тур қайтиш нуктаси; $y^3 = 0$ — уринма. 54. $y^2 = x^2(9 - x^2)$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $y = \pm 3x$ — уринмалар тенгламалари.

55. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^3 = 0$. Жав. $M_0(0, 0)$ — иккинчи тур қайтиш нуктаси; $y^2 = 0$ — қуш уринма. 56. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $y = \pm x$ — уринмалар тенгламалари. 57. $b^2x^3 + a^2y^3 = x^2y^2$. Жав. $M_0(0, 0)$ — яққаланган нукта. 58. $y = x \ln x$ эгри чизиқ координаталар бошида тугалувчи нуктага эга бўлиб, Oy ўқи уринма экани кўрсатилсин.

59. $y = \frac{x}{1 + e^x}$ эгри чизиқ координаталар бошида тугун нуктага эгаллиги

ва бу нуктада уринмалар ўнгдан $y = 0$, чапдан $y = x$ бўлиши кўрсатилсин.

IX Б О В

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ ФАЗОДАГИ ГЕОМЕТРИЯГА ТАТВИҚИ

1- §. Фазодаги эгри чизиқ тенгламаси

$\overline{OA} = \mathbf{r}$ векторни қараймиз; бу векторнинг боши координаталар бошида, охири эса бирор $A(x, y, z)$ нуқтада бўлсин (196- расм). Бундай вектор радиус-вектор деб аталади.

Бу векторни координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1)$$

$\mathbf{r}$ векторнинг проекциялари бирор t параметрнинг функциялари бўлсин:

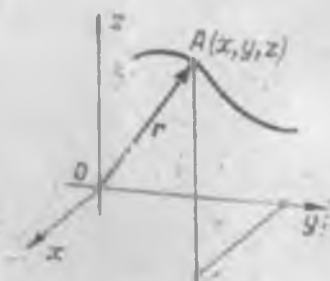
$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

У ҳолда (1) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \quad (1')$$

ёки қисқача

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1'')$$



196- расм.

t ўзгарганда x, y, z ҳам ўзгаради ва $\mathbf{r}$ векторнинг охири A нуқта фазода бирор эгри чизиқ чизади; бу эгри чизиқ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ векторнинг *годографи* деб аталади. (1') ёки (1'') тенгламалар фазодаги чизиқнинг *векториал тенгламалари* деб аталади. (2) тенгламалар фазодаги эгри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* дейилади. Бу тенгламалар ёрдами билан t нинг ҳар бир қиймати учун эгри чизиқнинг унга мос нуқтасининг координаталари x, y, z аниқланади.

Изоҳ. Фазодаги эгри чизиқ икки сирт кесншган нуқталарининг геометрик ўрни сифатида ҳам таърифланиши мумкин.

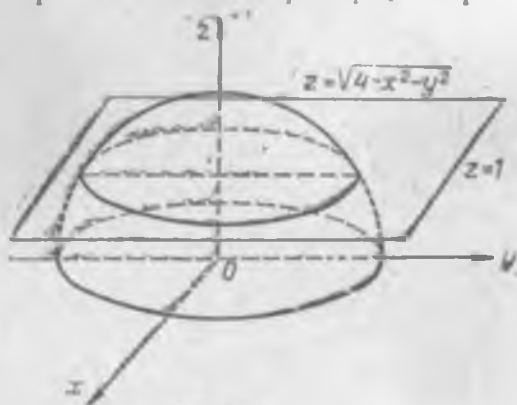
Демак, бундай эгри чизик икки сиртнинг икки тенгламаси билан берилиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Масалан, ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1$$

тенгламалар сфера билан текисликнинг кесишганидан ҳосил булган айланаларнинг тенгламаларидир (197- расм).



197- расм.

Шундай қилиб, фазодаги эгри чизик ё параметрик тенгламалар (2) билан, ёки иккита сиртнинг тенгламалари (3) билан берилиши мумкин.

Агар (2) тенгламалардан t параметрни йўқотсак ва x, y, z ни боғловчи иккита тенглама ҳосил қилсак, шу билан эгри чизикнинг параметрик усулда берилишидан сиртлар ёрдами билан берилиш усулига ўтган бўламиз. Аксинча, агар $x = \varphi(t)$ деб фараз қилсак [$\varphi(t)$ ихтиёрий функция] ва y билан z ни t нинг функцияси сифатида ушбу

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z] = 0, \quad \Phi_2[\varphi(t), y, z] = 0$$

тенгламалардан топсак, эгри чизикнинг сиртлар ёрдами билан берилишидан параметрик усулда берилишига ўтган бўламиз.

1- мисол.

$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

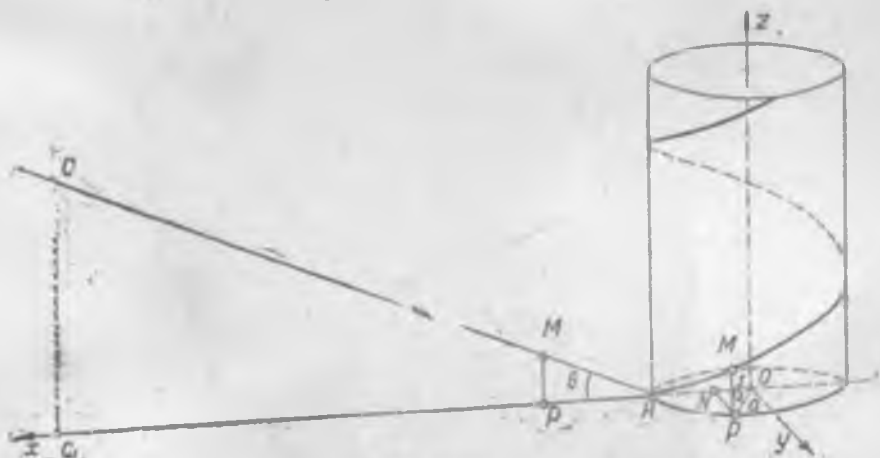
тенгламалар тўғри чизикнинг параметрик тенгламаларидир. Параметр t ни йўқотиб, иккита тенглама ҳосил қиламиз, улардан ҳар бири текисанк тенгламаси бўлади. Масалан, биринчи тенгламадан иккинчи ва учинчи тенгла-

маларни ҳадлаб айирсак, $x - y - z = -3$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар биринчи тенгламадан иккинчининг тўртга қўпайтмасини айирсак, $x - 4z = -3$ тенгламани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган тўғри чизиқ $x - y - z + 3 = 0$ ва $x - 4z + 9 = 0$ текисликларнинг кесишиш чизигидир.

2-мисол. Радиуси a га тенг ва ўқи Oz ўқ билан устма-уст тушган тўғри доиравий цилиндрни қараймиз (198-расм). Бу цилиндрга C_1AC тўғри бурчакли учбурчакни, унинг A учи цилиндр ясовчисининг Ox ўқи билан кесишган нуқтага тушадиган ва AC , катети цилиндрнинг Ox текислигида ётган доиравий кесимга ўраладиган қилиб цилиндрга ўраймиз. У вақтда учбурчакнинг гипотенузааси цилиндрнинг ён сиртида винт чизиқ деб аталадиган чизиқни ҳосил қилади.

Винт чизиқнинг тенгламасини ёзмаиз, бунинг учун чизиқнинг ўзгарувчи M нуқтасининг координаталарини x , y ва z билан ва AOP бурчакни t билан белгилаймиз (198-расмга қар.). Унда

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = PM = AP \operatorname{tg} \theta$$



198-расм.

бўлади, бу ерда θ билан C_1AC учбурчакнинг ўткир бурчаги белгиланган $\overline{AP} = at$ (чунки $\overline{AP}$ — радиуси a бўлган доиранинг t марказий бурчагига мос ёйдир). $\operatorname{tg} \theta$ ни m билан алмаштириб, винт чизиқнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

(бу ерда t — параметр) ёки вектор шаклда:

$$\mathbf{r} = ia \cos t + ja \sin t + kamt.$$

Винт чизиқнинг параметрик тенгламаларидан параметр t ни йўқотиш осон; олдинги иккита тенгламани квадратга қўтариб ва уларни қўшиб, $x^2 + y^2 = a^2$ ни ҳосил қиламиз. Бу — винт чизиқ жойлашган цилиндрнинг тенгламасидир. Сўнгра иккинчи тенгламани биринчига ҳадлаб бўлиб ва ҳосил бўлган тенгламада t ўрнига унинг учинчи тенгламадан топилган қийматини қўйиб, винт чизиқ жойлашган бошқа сиртнинг тенгламасини топамиз:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}$$

Бу эса *винт сирт (геликоид)* деб аталадиган сиртдир. Бу сиртнинг Ox текисликка параллел ва учини Oz ўқдан булган ярим тўғри чизигининг ҳаракатидан ҳосил булган из деб қараш мумкин; бунда ярим тўғри чизик ўзгармас бурчак тезлик билан Oz ўқ атрофида айланади ва ўзгармас тезлик билан шундай юқорига кўтариладигани, унинг учини Oz ўқ бўйлаб силжийди. Винт чизик шу икки сиртнинг кесишиш чизигидир. Шунинг учун уни икки тенглама билан бериш мумкин:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

2-§. Скаляр аргумент вектор функциясининг лимити ва ҳосиласи. Эгри чизикқа уринманинг тенгламаси. Нормал текислик тенгламаси

Аввалги параграфдаги (1') ва (1'') формулаларга қайтамыз:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$$

ёки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

t ўзгарганда умуман $\mathbf{r}$ векторнинг миқдори ва йўналиши ўзгаради. $\mathbf{r}$ вектор скаляр аргумент t нинг *вектор функцияси* деб аталади. Қуйидагича фараз қиламиз:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t) = \chi_0.$$



199- расм.

У вақтда $\mathbf{r}_0 = \varphi_0\mathbf{i} + \psi_0\mathbf{j} + \chi_0\mathbf{k}$ вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *векторнинг лимити* дейилади ва бундай ёзилади (199- расм):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$

Охирги тенгликдан ушбу тенгликлар келиб чиқади:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

ва

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}_0|.$$

Энди скаляр аргумент вектор функциясининг

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

ҳосиласи ҳақидаги масалага ўтамиз; $r(t)$ векторнинг боши координаталар бошида деб фараз қиламиз. Охирги тенглама бирон фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси эканини биламиз.

t нинг эгри чизиқдаги маълум бир M нуқтага мос келадиган бирор тайин қийматини олиб, унга Δt орттирма берамиз; у вақтда мана бу векторни ҳосил қиламиз:

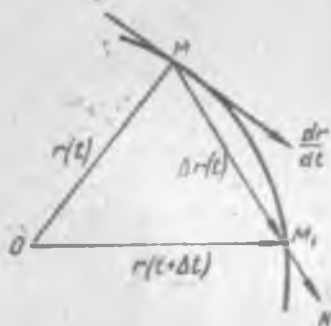
$$r(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t)i + \psi(t + \Delta t)j + \chi(t + \Delta t)k,$$

бу вектор эгри чизиқда бирор M_1 нуқтани аниқлайди (200- расм). Вектор орттирмасини толамиз:

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t) = [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]i + [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]j + [\chi(t + \Delta t) - \chi(t)]k.$$

200- расмда $\overline{OM} = r(t)$, $\overline{OM}_1 = r(t + \Delta t)$ ва бу орттирма $\overline{MM}_1 = \Delta r(t)$ вектор билан тасвирланади.

Вектор функция орттирмасининг скаляр аргумент орттирмасига нисбатини, яъни $\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ нисбатни қараймиз; бу $\Delta r(t)$ векторга коллинеар вектор бўлади, чунки унинг ўзи $\Delta r(t)$ ни $\frac{1}{\Delta t}$ скалярга кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу векторни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:



200- расм.

$$\frac{\Delta r(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}i + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}j + \frac{\chi(t + \Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}k.$$

Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ функциялар t нинг олинган қийматида ҳосилга эга бўлса, i , j , k векторлар олдидаги кўпайтувчиларнинг $\Delta t \rightarrow 0$ даги лимитлари $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ ҳосилаларга айланади. Демак, бу ҳолда $\Delta t \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ нинг лимити мавжуд ва $\varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k$ векторга тенг:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k.$$

Охирги тенглик билан белгиланган вектор $r(t)$ векторнинг скаляр аргумент t бўйича ҳосиласи деб аталади. Ҳосила $\frac{dr}{dt}$ ёки r' символ билан белгиланади.

Шундай қилиб,

$$\frac{dr}{dt} = r' = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k. \quad (2)$$

ёки

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \quad (2')$$

$\frac{dr}{dt}$ векторнинг йўналишини аниқлаймиз.

$\Delta t \rightarrow 0$ да M , нуқта M нуқтага яқинлашади, шунинг учун MM_1 кесувчининг йўналиши натижада уринманинг йўналишини беради. Демак, $\frac{dr}{dt}$ ҳосила вектор M нуқтада эгри чизикқа уринма бўйича йўналган. $\frac{dr}{dt}$ векторнинг узунлиги ушбу

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади*).

Ҳосил қилинган натижаларга асосан эгри чизик тенгламасида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ эканини эътиборга олиб,

$$r = x i + y j + z k$$

эгри чизикқа $M(x, y, z)$ нуқтада уринманинг тенгламасини ёзиш осон. $M(x, y, z)$ нуқтадан ўтган тўғри чизик тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p},$$

бу ерда X, Y, Z — тўғри чизик ўзгарувчи нуқтасининг координатлари, m, n, p — шу тўғри чизикнинг йўналтирувчи косинусларига (яъни тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори проекцияларига) пропорционал миқдорлар.

Иккинчи томондан

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

вектор уринма бўйича йўналганлигини аниқладик. Шунинг учун бу векторнинг проекциялари уринманинг йўналтирувчи косинусларига, демак, m, n, p сонларга ҳам пропорционал сонлардир. Демак, уринманинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}} \quad (4)$$

* Қаралаётган нуқталарда $\left| \frac{dr}{dt} \right| \neq 0$ деб фараз қиламиз.

1-мисол. t нинг ихтиёрий ва $t = \frac{\pi}{4}$ қийматларида

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

винт чизиққа уринманинг тенгламаси ёзилсин.

Еч и ш.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

(4) формула бўйича:

$$\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - amt}{am}.$$

Жумладан, $t = \frac{\pi}{4}$ бўлганда:

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}$$

ёки

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{Z - \frac{\pi am}{4}}{m\sqrt{2}}.$$

Текис эгри чизиқда бўлгани каби, уринмага перпендикуляр ва уриниш нуқтасидан ўтган тўғри чизиқ фазовий эгри чизиққа унинг шу нуқтасида *нормал* деб аталади. Фазовий эгри чизиқнинг берилган нуқтасидан унга саноқсиз кўп нормал тўғри чизиқлар ўтказиш мумкин. Уларнинг ҳаммаси уринма тўғри чизиққа перпендикуляр текисликда ётади. Бу текислик *нормал текислик* деб аталади.

Нормал текисликнинг (4) уринмага перпендикуляр бўлиш шартидан нормал текисликнинг ушбу тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt} (X - x) + \frac{dy}{dt} (Y - y) + \frac{dz}{dt} (Z - z) = 0 \quad (5)$$

2-мисол. Винт чизиққа $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада нормал текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

Еч и ш. 1-мисолга ва (5) формулага асосан ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$-\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\sqrt{2} \left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ёки

$$-X + Y + m\sqrt{2} Z = am^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{2}.$$

Энди фазовий эгри чизик

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

тенгламалар билан берилганда унга уринма тўғри чизик ва нормал текислик тенгламаларини чиқарамиз.

Бу эгри чизикнинг x, y, z координаталарини бирор t параметрнинг функцияси каби ифодалаймиз:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (7)$$

$\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ функцияларни t бўйича дифференциалланувчи функциялар деб фараз қиламиз.

(6) тенгламаларда x, y, z ўрнига уларнинг эгри чизик нуқтаси учун t орқали ифодаланган қийматларини қўйиб, ушбу икки айниятни ҳосил қиламиз:

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \quad (8a)$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0. \quad (8b)$$

(8a) ва (8b) айниятларни t бўйича дифференциаллаб, шуларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Бу тенгламалардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}. \quad (10)$$

Бу ерда $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \neq 0$ деб фараз қиламиз, лекин охириги (11) ва (12) (қуйида чиқарилган) формулалар уларда иштирок этган детерминантлардан бирортаси нолдан фарқли бўлганда ўз кучини сақлашини исбот қилиш мумкин.

(10) тенгликлардан шуларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

Демак, (4) формулага асосан уринма тўғри чизик тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

ёки детерминантлардан фойдалансак:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y-y & Z-z \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z-z \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Нормал текислик ушбу тенгламага эга бўлади:

$$(X-x) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y-y) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (Z-z) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Бу формулалар, уларда иштирок қилган детерминантлардан камидан биттаси нолдан фарқли бўлгандагина, маънога эга бўлади. Агар эгри чизиқнинг бирор нуқтасида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

детерминантларнинг учаласи нолга тенг бўлса, бу нуқта фазовий эгри чизиқнинг *махсус нуқтаси* деб аталади. Фазовий эгри чизиқ бу нуқтада, текис эгри чизиқларда бўлгани каби, ҳеч қандай уринмага эга бўлмаслиги мумкин (VIII бобнинг 20- § га қаранг).

3-мисол. $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ сфера билан $x^2 + y^2 = 2ry$ цилиндр кесишиш чизигининг $M(r, r, r\sqrt{2})$ нуқтасида (201-расм) унга уринма тўғри чизиқ ва нормал текислик тенгламалари топилсин.

Е ч и ш.

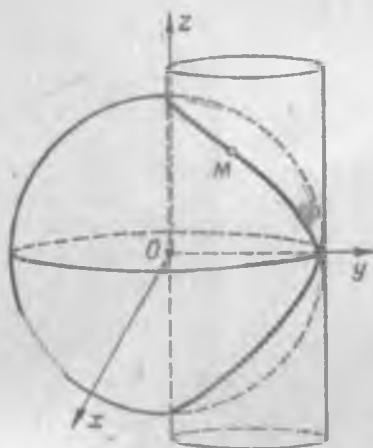
$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Ҳосилаларнинг берилган M нуқтадаги қийматлари:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$



201-расм.

Шунинг учун уринма тўғри чизик тенгламаси бундай бўлади:

$$\frac{X-r}{0} = \frac{Y-r}{\sqrt{2}} = \frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}.$$

Нормал текислик тенгламаси:

$$\sqrt{2}(Y-r) - (Z-r\sqrt{2}) = 0 \text{ ёки } \sqrt{2} Y - Z = 0.$$

3- §. Векторларни (вектор функцияларни) дифференциаллаш қоидалари

Юқорида кўрганимиздек,

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k, \quad (1)$$

вектор ҳосиласининг таърифига кўра,

$$r'(t) = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k. \quad (2)$$

Бундан, дифференциаллашнинг асосий қоидалари векторлар учун ҳам ўз кучида қолиши келиб чиқади. Биз қуйида вектор функцияларни дифференциаллашнинг баъзи формулаларини кўрамиз. Бу формулалар бундан буён бизга керак бўлади.

1. Векторлар йиғиндисининг ҳосиласи қўшилувчи векторлар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг.

Масалан, ушбу икки вектор берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} r_1(t) &= \varphi_1(t)i + \psi_1(t)j + \chi_1(t)k, \\ r_2(t) &= \varphi_2(t)i + \psi_2(t)j + \chi_2(t)k; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

буларнинг йиғиндис:

$$r_1(t) + r_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]k.$$

Ўзгарувчи вектор ҳосиласининг таърифига кўра:

$$\frac{d(r_1(t) + r_2(t))}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'k$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d(r_1(t) + r_2(t))}{dt} &= [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)]i + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)]j + [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)]k \\ &= [\varphi_1'(t)i + \psi_1'(t)j + \chi_1'(t)k] + [\varphi_2'(t)i + \psi_2'(t)j + \chi_2'(t)k] = r_1'(t) + r_2'(t). \end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{d[r_1(t) + r_2(t)]}{dt} = \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}. \quad (I)$$

II. Векторларнинг скаляр купайтмасидан олинган ҳосила ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(r_1 r_2)}{dt} = \frac{dr_1}{dt} r_2 + r_1 \frac{dr_2}{dt}. \quad (II)$$

Ҳақиқатан, агар $r_1(t)$, $r_2(t)$ векторлар (3) формулалар билан ифодаланса, маълумки, уларнинг скаляр купайтмаси мана бунга тенг:

$$r_1(t) r_2(t) = \varphi_1 \varphi_2 + \psi_1 \psi_2 + \chi_1 \chi_2.$$

Шунинг учун

$$\begin{aligned} \frac{d(r_1 r_2)}{dt} &= \varphi_1' \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2' + \psi_1' \psi_2 + \psi_1 \psi_2' + \chi_1' \chi_2 + \chi_1 \chi_2' = \\ &= (\varphi_1' \varphi_2 + \psi_1' \psi_2 + \chi_1' \chi_2) + (\varphi_1 \varphi_2' + \psi_1 \psi_2' + \chi_1 \chi_2') = \\ &= (\varphi_1' i + \psi_1' j + \chi_1' k) (\varphi_2 i + \psi_2 j + \chi_2 k) + (\varphi_1 i + \psi_1 j + \chi_1 k) \times \\ &\quad \times (\varphi_2' i + \psi_2' j + \chi_2' k) = \frac{dr_1}{dt} r_2 + r_1 \frac{dr_2}{dt}. \end{aligned}$$

Теорема исботланди.

(II) формуладан ушбу муҳим натижа чиқади.

Натижа. Агар e вектор бирлик вектор, яъни $|e| = 1$ бўлса, унинг ҳосиласи, унга перпендикуляр вектор бўлади.

Исбот. Агар e бирлик вектор бўлса,

$$ee = 1.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан t бўйича ҳосила оламиз:

$$e \frac{de}{dt} + \frac{de}{dt} e = 0$$

ёки

$$2e \frac{de}{dt} = 0,$$

яъни скаляр купайтма

$$e \frac{de}{dt} = 0$$

бу эса $\frac{de}{dt}$ вектор e векторга перпендикуляр эканини билдиради.

III. Агар $f(t)$ скаляр функция ва $r(t)$ вектор функция бўлса, $f(t)r(t)$ кўпайтманинг ҳосиласи ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(fr)}{dt} = \frac{df}{dt} r + f \frac{dr}{dt}. \quad (III)$$

Исбот. Агар $r(t)$ вектор (1) формула билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$f(t)r(t) = f(t)\varphi(t)i + f(t)\psi(t)j + f(t)\chi(t)k.$$

(2) формулага кўра мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(t)r(t))}{dt} &= \left(\frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}\right)i + \left(\frac{df}{dt}\psi + f\frac{d\psi}{dt}\right)j + \\ &+ \left(\frac{df}{dt}\chi + f\frac{d\chi}{dt}\right)k = \frac{df}{dt}(\varphi i + \psi j + \chi k) + f\left(\frac{d\varphi}{dt}i + \right. \\ &\left. + \frac{d\psi}{dt}j + \frac{d\chi}{dt}k\right) = \frac{df}{dt}r + f\frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

IV. Ўзгармас сон кўпайтувчини ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$\frac{d(a \cdot r(t))}{dt} = a \frac{dr}{dt} = ar'(t). \quad (IV)$$

Агар $f(t) = a = \text{const}$ бўлса, бу формула III формуладан келиб чиқади. Демак, $\frac{df}{dt} = 0$.

V. $r_1(t)$ ва $r_2(t)$ векторларнинг вектор кўпайтмасининг ҳосиласи ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(r_1 \times r_2)}{dt} = \frac{dr_1}{dt} \times r_2 + r_1 \times \frac{dr_2}{dt}. \quad (V)$$

(II) формулага ўхшаш исботланади.

4-§. Векторнинг ёй узунлиги бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалари. Эгри чизиқнинг эгрилиги. Бош нормал. Нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатдаги тезлиги ва тезланиши.

Фазовий эгри чизиқ ёйи $\widehat{M_0 A} = s$ нинг узунлиги*) ҳам текисликдаги эгри чизиқлар узунлиги каби аниқланади (202- расм). Ўзгарувчи нуқта $A(x, y, z)$ эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилганда ёй узунлиги s ўзгаради ва аксинча, s ўзгарганда эгри чизиқ устидаги A нуқтанинг координаталари x , y ва z ўзгаради.

*) Фазовий эгри чизиқ ёйининг узунлиги текис эгри чизиқ ёйининг узунлиги каби аниқланади (VI боб 1-§ ва XII боб 3-§ га қаранг).

Демак, ўзгарувчи A нуқтанинг координаталарини x, y, z ни ёй узунлиги s нинг функцияси деб қараш мумкин:

$$x = \varphi(s),$$

$$y = \psi(s),$$

$$z = \chi(s).$$

Эгри чизиқнинг бу параметрик тенглачаларида параметр ёйнинг узунлиги s дир.

Вектор $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$ бундай ифодаланади:

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k}$$

ёки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (1)$$

яъни $\mathbf{r}$ вектор ёй узунлиги s нинг функциясидир.

$\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ҳосиланинг геометрик маъносини аниқлаймиз.

Қуйидаги тенгликлар уринли бўлиши 202- расмдан кўринади:

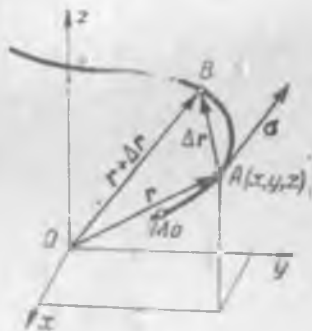
$$\overline{M_0A} = s, \quad \overline{AB} = \Delta s, \quad \overline{M_0B} = s + \Delta s,$$

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}(s), \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{r}(s + \Delta s),$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s),$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}.$$

2- параграфда $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ вектор эгри чизиққа A нуқтадаги уринма бўйича s нинг ўсиш томонига йўналганини кўрган эдик. Иккинчи томондан $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} \right| = 1$ (ватар узунлигининг ёй узунлигига нисбатининг лимити^{*)}). Демак, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — уринма бўй-



202- расм.

^{*)} VI бобнинг 1- § да бу муносабатни текис эгри чизиқ учун кўрсатган эдик. Агар $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ функциялар бир вақтда ҳаммаси нолга айланимайдиган узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, фазовий эгри чизиқ $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$ учун ҳам шу муносабат мавжуд бўлади.

йича йуналган бирлик вектордир; уни $\bar{\sigma}$ билан белгилаймиз:

$$\frac{dr}{ds} = \bar{\sigma}. \quad (2)$$

Агар r вектор

$$r = xi + yj + zk$$

проекциялари билан берилган бўлса, унда

$$\bar{\sigma} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k}, \quad (3)$$

аммо

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Энди вектор функциянинг иккинчи ҳосиласи $\frac{d^2r}{ds^2}$ ни, яъни $\frac{dr}{ds}$ нинг ҳосиласини қараймиз ва унинг геометрик маъносини ёритамиз. (2) формуладан ушбу натижа чиқади:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{dr}{ds} \right] = \frac{d\bar{\sigma}}{ds}.$$

Демак, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\sigma}}{\Delta s}$ ни топишимиз керак.

203- расмдан ушбуларни кўрамиз: $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \bar{\sigma}$, $\overline{BK} = \bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}$. B нуқтадан $\overline{BL_1} = \bar{\sigma}$ векторни ўтказамиз. BKL_1 учбурчакдан

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

ёки

$$\bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma} = \bar{\sigma} + \overline{L_1K}.$$

Демак, $\overline{L_1K} = \Delta \bar{\sigma}$. Ишотланганига асосан $\bar{\sigma}$ векторнинг узунлиги ўз-

гармайди, шунинг учун $|\bar{\sigma}| = |\bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}|$; демак, BKL_1 учбурчак тенг ёнлидир.

Шу учбурчак учидаги $\Delta \varphi$ бурчак эгри чизиққа уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги бурилиш бурчаги бўлади, яъни ёй узунлигининг Δs орттирмасига мос келади. BKL_1 учбурчакдан:

$$L_1K = |\Delta \bar{\sigma}| = 2|\bar{\sigma}| \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|$$

(чунки $|\bar{\sigma}| = 1$).



203- расм.

Охирги тенгликнинг иккала томонини Δs га бўламиз:

$$\left| \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta s} \right| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Сўнгги тенгликнинг иккала томонида $\Delta s \rightarrow 0$ шарғи билан лимитга ўтамиз. Чап томонда:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{s}}{ds} \right|.$$

Биз $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ лимит мавжуд бўлган ва, демак, $\Delta s \rightarrow 0$ да $\Delta \varphi \rightarrow 0$ бўладиган эгри чизиқни қараётганимиз учун

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| = 1.$$

Шундай қилиб, лимитга ўтгандан сўнг

$$\left| \frac{d\vec{s}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \quad (4)$$

ҳосил бўлади. Уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги бурилиш бурчаги $\Delta \varphi$ нинг AB ёй узунлиги Δs га нисбатининг абсолют қиймати, текис эгри чизиқдаги каби, берилган эгри чизиқнинг AB участкадаги *ўртача эгрилиги* деб аталади:

$$\text{ўртача эгрилик} = \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

ўртача эгриликнинг $\Delta s \rightarrow 0$ даги лимити чизиқнинг A нуқтадаги *эгрилиги* деб аталади ва K ҳарфи билан белгиланади:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Лекин бу ҳолда (4) тенгликдан $\left| \frac{d\vec{s}}{ds} \right| = K$, яъни уринманинг бирлик векторидан ёй узунлиги бўйича олинган ҳосиланинг узунлиги*) эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилигига тенг бўлади. $\vec{s}$ вектор бирлик вектор бўлгани учун, унинг $\frac{d\vec{s}}{ds}$ ҳосиласи унга перпендикуляр бўлади (IX бобнинг 3- § натижага қаранг).

*) Векторнинг ҳосиласи вектор бўлишини ва шунинг учун ҳосиланинг узунлиги ҳақида гапиришимиз мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Шундай қилиб, $\frac{d\vec{s}}{ds}$ вектор узунлиги эгри чизиқнинг эгри-
лигига тенг, йўналиши эса уринма векторга перпендикулярдир.

Таъриф. $\frac{d\vec{s}}{ds}$ вектор йўналишига эга бўлган ва эгри чи-
зиқнинг тегишли нуқтасидан ўтган тўғри чизиқ эгри чизиқнинг
шу нуқтасидаги *бош нормали* деб аталади. Бу йўналишнинг
бирлик векторини $\vec{n}$ билан белгилаймиз.

$\frac{d\vec{s}}{ds}$ векторнинг узунлиги эгри чизиқ эгрилиги K га тенг бўл-
гани учун

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = K\vec{n}.$$

Эгриликка тескари бўлган миқдор эгри чизиқнинг берил-
ган нуқтасидаги *эгрилик радиуси* деб аталади ва R ҳарфи
билан белгиланади, яъни $\frac{1}{K} = R$. Шунга кўра бундай ёзиш
мумкин:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}. \quad (5)$$

Бу формуладан ушбу натижа чиқади:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^2. \quad (6)$$

Лекин

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}.$$

Демак,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}. \quad (6')$$

Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган
булиб, уларда параметр ёй узунлиги s бўлса (яъни берилган
эгри чизиқ узгарувчи нуқтасининг радиус-вектори ёй узунлиги-
нинг функцияси каби ифодаланган бўлса), охириги формула э-
гри чизиқнинг ҳар қандай нуқтасида эгриликни ҳисоблашга им-
кон беради.

Радиус-вектор $\vec{r}$ ихтиёрий t параметрнинг функцияси

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда ёй узунлиги s ни параметр
 t нинг функцияси деб қараймиз. Бу вақтда эгрилик қуйидаги-
ча ҳисобланади:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (7)$$

Эндн

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = 1^*)$$

бўлгани учун

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (8)$$

Бу тенгликнинг ўнг ва чап томонларини дифференциаллаб ва иккига қисқартирсак, шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (9)$$

Сўнгра (7) формулага кўра

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

Охирги тенгликнинг иккала томонини s бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3} - \frac{dr}{dt} \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3};$$

$\frac{d^2r}{ds^2}$ учун ҳосил қилинган ифодани (6) формулага қўйиб, мана буни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3} - \frac{dr}{dt} \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3} \right]^2 = \\ &= \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - 2 \frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right)^2}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^6}. \end{aligned}$$

*) Бу тенглик $\left| \frac{dr}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right|$ дан келиб чиқади. Лекин Δr — ёй узунлиги Δs ни тартиб турувчи ватар, шунинг учун $\Delta s \rightarrow 0$ да $\left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right|$ нисбат 1 га интилади.

$\frac{ds}{dt}$ ва $\frac{d^2s}{dt^2}$ нинг (8) ва (9) формулалар бўйича $r(t)$ нинг ҳосилалари орқали ифодалаб, ушбунни ҳосил қиламиз*):

$$\frac{1}{K^2} = \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3} \quad (10)$$

(10) формулани бундай ёзиш мумкин**):

$$K^2 = \frac{1}{K^2} = \frac{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \quad (11)$$

Эгри чизиқ ихтиёрий параметрик тенглама билан берилганда унинг исталган нуқтасидаги эгрилигини ҳисоблашга имкон берадиган формулани ҳосил қилдик.

Агар хусусий ҳолда эгри чизиқ текис бўлиб, Оху текисликда ётса, унинг параметрик тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = 0.$$

x, y, z нинг бу ифодаларини (11) формулага қўйиб, илгари (VI бобда) чиқарилган ва параметрик шаклда берилган текис эгри чизиқ эгрилигини ифодаловчи формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Мисол. $r = la \cos t + ja \sin t + kamt$ винт чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги ҳисоблансин.

Еч иш.

$$\frac{dr}{dt} = -la \sin t + ja \cos t + kam, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -la \cos t - ja \sin t,$$

*) Махражни бундай алмаштирамиз: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^2 = \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^2$. Бу ерда $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ деб ёзиш мумкин эмас. $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ дан $\frac{dr}{dt}$ векторнинг скаляр квадрати тушунилади. $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^2$ дан $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ соннинг учинчи даражаси тушунилади. $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ ифоданинг эса маъноси йўқ.

**) Биз $a^2b^2 - (ab)^2 = (a \times b)^2$ айниниятдан фойдаландик, бунинг тўғрилигига ишониш учун, айниниятни $a^2b^2 - (ab \cos \varphi)^2 = (ab \sin \varphi)^2$ кўринишда ёзиш кифоя.

$$\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = i a^2 m \sin t - j a^2 m \cos t + k a^3,$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 = a^4 (m^2 + 1),$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2 = a^2 (1 + m^2).$$

Демак,

$$\frac{1}{R^3} = \frac{a^4 (m^2 + 1)}{[a^2 (1 + m^2)]^3} = \frac{1}{a^3 (1 + m^2)^3},$$

бундан

$$R = a (1 + m^2) = \text{const.}$$

Шундай қилиб, винт чизик ўзгармас эгрилик радиусига эга.

Изоҳ. Агар эгри чизик текисликда ётган бўлса, умумийликни бузмасдан, уни *Oxy* текисликда ётади деб фараз қилиш мумкин (координатларни алмаштириш йўли билан бунга доим эришиш мумкин). Агар эгри чизик *Oxy* текисликда ётса, $z = 0$ бўлади, Унда эса $\frac{dz}{ds} = 0$, демак, n вектор ҳам *Oxy* текисликда ётади. Бундан ушбу хулоса чиқади: агар эгри чизик текисликда ётса, унинг бош нормали ҳам шу текисликда ётади.

Эгри чизикли ҳаракатда нуқтанинг тезлиги. Ҳаракатланувчи нуқта вақтнинг t моментнда радиус-вектори $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$ билан белгиланган M нуқтада (200-расмга қаранг), $t + \Delta t$ моментда эса $\overline{OM}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ радиус-вектор билан белгиланган M_1 нуқтада бўлсин. Унда $\overline{MM}_1$ вектор нуқтанинг *кўчиш вектори* дейилади. Кўчиш вектори $\overline{MM}_1$ нинг вақт орттирмаси Δt га нисбати *нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги* дейилади:

$$v_{\text{орта}} = \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

Ўртача тезлик вектори ҳам $\overline{MM}_1$ ватари бўйлаб нуқтанинг ҳаракати томонига (339-бетдаги 200-расмга қаранг) йўналган (тўғри чизикли ҳаракатда у траектория бўйича йўналган) бўлади.

Нуқтанинг берилган моментдаги тезлиги бундай аниқланади:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{\text{орта}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

яъни

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (12)$$

Шундай қилиб: *Нуқтанинг берилган моментдаги тезлиги нуқта радиус-векторининг вақт бўйича биринчи ҳосиласига тенг* дейиш мумкин.

Тезликнинг координата ўқларидаги проекциялари 2- § даги (2') формулага асосан бундай бўлади:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тезликнинг модули 2- § даги (3) формула бўйича аниқланади:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (13)$$

Агар бу параграфнинг бошида қилганимиздек ёй узунлиги s ни киритсак ва ёй узунлиги s ни t вақтнинг функцияси деб қарасак, у ҳолда (12) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \bar{\sigma} v, \quad (14)$$

бу ерда $v = \frac{ds}{dt}$ — тезликнинг абсолют қиймати, $\bar{\sigma}$ — уринма бўйича ҳаракат томонга йўналган бирлик вектор.

Эгри чизиқли ҳаракатда нуқтанинг тезланиши. III бобнинг 25- § да таърифлангани каби эгри чизиқли ҳаракатда нуқтанинг тезланиши $\mathbf{w}$ деб, тезлик векторининг вақт бўйича ҳосиласига айтилади:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (15)$$

Лекин $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, демак,

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (16)$$

Агар (14) формулани эътиборга олсак, мана буни ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\sigma} v)}{dt}.$$

Сўнгги ҳосилани 3- § даги (III) формула бўйича ёйсак, ушбу нфодан ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt} \bar{\sigma} + v \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \quad (17)$$

$\frac{dv}{dt}$ ҳосилани (7) ва (5) формулалардан фойдаланиб алмашти-
раемиз:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \bar{\sigma}.$$

Бунн (17) тенгликка қўйиб, ушбу охирги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt} \vec{\sigma} + v^2 \frac{\vec{n}}{R}. \quad (18)$$

Бу ерда $\vec{\sigma}$ — уринма бўйича ҳаракат томонга йўналган бирлик вектор, $\vec{n}$ — бош нормал бўйича йўналган бирлик вектор. (18) формула сўз билан бундай ифодаланади.

Нуқта тезланишининг уринмадаги проекцияси тезликининг абсолют қийматидан олинган биринчи ҳосилга тенг, тезланишининг бош нормалдаги проекцияси эса тезлик квадратининг траектория берилган нуқтасидаги эгрилик радиусига бўлинмасига тенг.

$\vec{\sigma}$ ва $\vec{n}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлгани учун, тезланиш модули ушбу формула билан аниқланади:

$$w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (19)$$

5-§. Ёпишма текислик. Бинормал. Буралиш

1-таъриф. Берилган эгри чизиқнинг A нуқтасидаги уринма чизиқ ва бу чизиққа бош нормал бўйича ўтган текислик A нуқтада *ёпишма текислик* деб аталади.

Текис эгри чизиқ учун ёпишма текислик эгри чизиқ ётган текислик устига тушади. Агар эгри чизиқ фазовий бўлса, унинг устида иккита P ва P_1 нуқта олиб, иккита ўзаро икки ёқли μ бурчак ташкил этадиган ёпишма текислик ҳосил қиламиз. μ бурчак қанча катта бўлса, эгри чизиқнинг шакли текис эгри чизиқдан шунча кўпроқ фарқ қилади. Бунн аниқлаш учун яна бир таъриф киритамиз.

2-таъриф. Эгри чизиққа нормал ва ёпишма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ *бинормал* деб аталади.

Бинормал устида b бирлик вектор оламиз ва уни шундай йўналтирамизки, $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$, b векторлар координата ўқларида ётувчи, i , j , k бирлик векторлар билан бир хил йўналишда бўлган ўқлик ташкил қилсин (204, 205-расмлар).

Векторларнинг вектор ва скаляр қўлайтмаларининг таърифларига кўра:

$\frac{db}{ds}$ ҳосилани топамиз. 3-§ даги (IV) формула бўйича

$$b = \vec{\sigma} \times \vec{n}; \quad bb = 1. \quad (1)$$

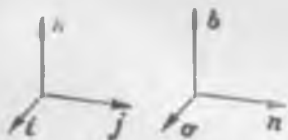
$$\frac{db}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}. \quad (2)$$

Лекин $\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ (4- § га қаранг), шунинг учун

$$\frac{d\vec{s}}{ds} \times \vec{n} = \frac{1}{R} \vec{n} \times \vec{n} = 0$$

ва (2) формула ушбу кўринишга келади:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}. \quad (3)$$



204- расм.



205- расм.

Бундан (вектор кўпайтманинг таърифига асосан) $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{\sigma}$ уринма векторга перпендикуляр эканлиги чиқади. Иккинчи томондан $\vec{b}$ бирлик вектор, шунинг учун $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{b}$ векторга перпендикулярдир (3- § даги натижага қаранг).

Демак, $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{\sigma}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр, яъни $\vec{n}$ векторга коллинеар бўлади.

$\frac{d\vec{b}}{ds}$ векторнинг узунлигини $\frac{1}{|T|}$ билан белгилаймиз, яъни

$$\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \frac{1}{|T|}$$

деб фарз қиламиз; у вақтда

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n}. \quad (4)$$

$\frac{1}{T}$ миқдор берилган эгри чизиқнинг *буралиши* деб аталади.

Эгри чизиқнинг икки нуктасига тегишли ёпишма текисликлар орасидаги икки ёқли μ бурчак бинормаллар орасидаги бурчакка тенг. 4- параграфдаги (4) формула сингари бундай ёзиш мумкин:

$$\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Шундай қилиб, эгри чизиқнинг A нуқтадаги буралиши абсолют қиймат жиҳатидан A нуқтадан ва унга яқин турган B нуқтадан ўтказилган епишма текисликлар орасидаги бурчанинг AB ёй узунлиги $|\Delta s|$ га нисбатининг $\Delta s \rightarrow 0$ да нтирилгандаги лимитига тенг.

Агар эгри чизиқ текис эгри чизиқ бўлса, епишма текислик ўз йўналишини ўзгартирмайди, ва демак, буралиш нолга тенг бўлади.

Буралишнинг таърифидан очиқ кўринадики, у фазовий эгри чизиқ текис эгри чизикдан четланишининг ўлчови бўлади.

T миқдор эгри чизиқ буралишининг радиуси деб аталади.

Буралишни ҳисоблаш учун формула топамиз. (3) ва (4) формулалардан ушбу тенглик чиқади:

$$\frac{1}{T} n = \bar{\sigma} \times \frac{dn}{ds}.$$

Иккала томоннинг n векторга скаляр кўпайтмасини топамиз:

$$\frac{1}{T} nn = n \left(\bar{\sigma} \times \frac{dn}{ds} \right).$$

Сўнгги тенгликнинг ўнг томонида учта n , $\bar{\sigma}$ ва $\frac{dn}{ds}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси ҳосил бўлади. Маълумки, бундай кўпайтмада кўпайтувчиларнинг ўринларини айланма тартибда алмаштириш мумкин. Бундан ташқари $nn = 1$ эканини эътиборга олиб, сўнгги тенгликни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{1}{T} = \bar{\sigma} \left(\frac{dn}{ds} \times n \right)$$

ёки

$$\frac{1}{T} = -\bar{\sigma} \left(n \times \frac{dn}{ds} \right). \quad (5)$$

Лекин $n = R \frac{d^2 r}{ds^2}$ бўлгани учун,

$$\frac{dn}{ds} = R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2}$$

ва

$$\begin{aligned} \left(n \times \frac{dn}{ds} \right) &= R \frac{d^2 r}{ds^2} \times \left(R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} \right) = \\ &= R^2 \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) + R \frac{dR}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right), \end{aligned}$$

векторнинг ўз-ўзига вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлгани учун

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$n \times \frac{dn}{ds} = R^2 \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right).$$

$\vec{o} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ эканини эътиборга олиб ва (5) тенгликка қайтиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{T} = -R^2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right). \quad (6)$$

Агар $\mathbf{r}$ вектор ихтиёрий t параметрнинг функцияси каби ифодаланган бўлса, бундан олдинги параграфда қилинганидек ўшбу тенгликни исботлаш мумкин*):

*) Ҳақиқатан

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Бу тенгликни яна бир марта t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Яна t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right) \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{d^3 s}{dt^3} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} = \\ &= \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3}. \end{aligned}$$

энди уч векторнинг аралаш кўпайтмасини тузамиз:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} \right) = \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \times \left[\frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} \right] \right]. \end{aligned}$$

Бу кўпайтмани кўпхадларни кўпайтириш қондаси бўйича очиб ва иккита бир хил кўпайтувчи векторга эга бўлган ҳадларнинг ҳаммасини ташлаб (учта векторнинг аралаш кўпайтмасида икки кўпайтувчи бир хил бўлса, кўпайтма нолга тенг бўлади) қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^6.$$

Ниҳоят,

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^3 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \text{ ёки } \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = \left(\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right)^3$$

эканини эътиборга олиб, талаб қилинган тенгликни ҳосил қиламиз.

$$\frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \frac{\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right)}{\left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^3 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Бу ифодани (6) формулага қўйиб ва R^3 ни унинг 4- § даги (11) формуласи бўйича алмаштириб, ушбу охирги формулани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{T} = - \frac{\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right)}{\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2} \quad (7)$$

Бу формула эгри чизиқ ихтиёрий t параметр иштирок этган параметрик тенгламалар билан берилганда унинг ҳар қандай нуқтасидаги буралишни ҳисоблашга имкон беради.

$\bar{a}$, b , n векторларнинг ҳосилаларини ифодаловчи формула Серре-Френе формулалари деб аталади:

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = \frac{n}{R}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{n}{T}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\bar{a}}{R} - \frac{b}{T}.$$

Булардан охиргиси бундай ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned} n &= b \times \bar{a}, \\ \frac{dn}{ds} &= \frac{d(b \times \bar{a})}{ds} = \frac{db}{ds} \times \bar{a} + b \times \frac{d\bar{a}}{ds} = \frac{n}{T} \times \bar{a} + b \times \frac{n}{R} = \\ &= \frac{1}{T} n \times \bar{a} + \frac{1}{R} b \times n; \end{aligned}$$

лекин

$$n \times \bar{a} = -b; \quad b \times n = -\bar{a},$$

шунинг учун

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{T} - \frac{\bar{a}}{R}.$$

Мисол. Винт чизиқнинг буралиши ҳисоблансин:

$$r = ta \cos t + ja \sin t + kamf.$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right) &= \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m, \\ \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 &= a^4 (1 + m^2) \quad (4- § даги мисолга қаранг). \end{aligned}$$

Демак,

$$T = - \frac{a^4 (1 + m^2)}{a^3 m} = - \frac{a (1 + m^2)}{m}.$$

6-§. Сиртга уринма текислик ва нормал

Сирт ушбу

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

куринишдаги тенглама билан берилган бўлсин.

Қуйидаги таърифларни киритамиз:

1-таъриф. Агар тўғри чизиқ сирт устида ётган бирор эгри чизиққа унинг $P(x, y, z)$ нуқтасида уринма бўлса, бу тўғри чизиқ сиртга P нуқтада *уринма* дейилади.

P нуқтадан сирт устида ётган чексиз кўп эгри чизиқлар утади, шунинг учун умуман айтганда бу нуқтадан сиртга чексиз кўп уринмалар ўтиши мумкин.

$F(x, y, z) = 0$ сиртнинг махсус ва оддий нуқталари ҳақида тушунча киритамиз.

Агар $M(x, y, z)$ нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларнинг учаласи нолга тенг бўлса, ёки улардан бирортаси мавжуд бўлмаса, M нуқта сиртнинг *махсус нуқтаси* деб аталади.

Агар $M(x, y, z)$ нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларнинг учаласи мавжуд ва узлуксиз бўлиб, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, M нуқта сиртнинг *оддий нуқтаси* деб аталади. Энди қуйидаги теоремани айтишимиз мумкин.

Теорема. Берилган (1) сиртнинг P оддий нуқтасидаги ҳамма уринмалар бир текисликда ётади.

Исбот. Сиртда ётган ва шу сиртнинг берилган P нуқтасидан ўтган бирор L чизиқни қараймиз (206-расм). Бу эгри чизиқ ушбу параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

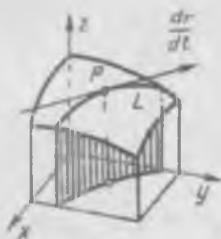
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (2)$$

Эгри чизиққа уринма сиртга ҳам уринма бўлади. Бу уринманинг тенгламаси мана бу шаклни олади:

$$\frac{X - Y}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Агар (2) ифодалар (1) тенгламага қўйилса, бу тенглама t га нисбатан айниятга айланади, чунки (2) эгри чизиқ (1) сиртда ётади. Уни t буйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (3)$$



206-расм.

тенгликни ҳосил қиламиз*). Сўнгра P нуқтадан ўтадиган N ва $\frac{dr}{dt}$ векторларни қараймиз:

$$N = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k. \quad (4)$$

Бу векторнинг $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ проекциялари P нуқтанинг x , y , z координаталарига боғлиқ; P оддий нуқта бўлгани учун бу проекциялар P нуқтада бир вақтда нолга айланмайди ва шунинг учун

$$|N| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Вектор

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \quad (5)$$

P нуқтадан ўтади ва шу сиртда ётган эгри чизиққа уринма бўлади. (2) тенгламага асосан бу векторнинг проекциялари t параметрнинг P нуқтага мос қиймати бўйича ҳисобланади. N ва $\frac{dr}{dt}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз, у бир исмли проекциялар кўпайтмаларининг йигиндисига тенг:

$$N \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода (3) тенгликка асосан нолга тенг, демак,

$$N \frac{dr}{dt} = 0.$$

Сўнгги тенгликдан N вектор ва (2) эгри чизиққа уринма $\frac{dr}{dt}$ вектор унинг P нуқтасида бир-бирга перпендикуляр экани келиб чиқади. Ўтказилган муҳокама P нуқтадан ўтувчи ва сирт устида ётувчи ҳар қандай (2) эгри чизиқ учун туғридир. Демак, сиртнинг P нуқтасида унга уринма бўлган туғри чизиқларнинг ҳар бири N векторга перпендикуляр ва бу уринмаларнинг ҳаммаси N векторга перпендикуляр бўлган бир текисликда ётади. Теорема исботланди.

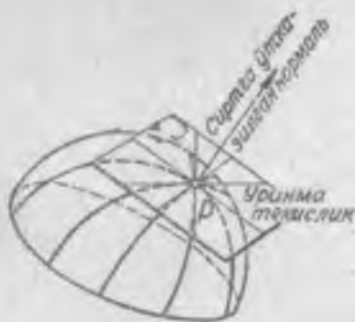
*) Бу ерда биз уч ўзгарувчи мураккаб функциясини дифференциаллаш қондасини қўллабамиз. Қаралаётган ҳол учун бу қондани қўлланиш мумкин, чунки шартга кўра $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар узлуксиздир.

2-таъриф. Эгри сиртнинг берилган P нуқтасидан утувчи сирт устида ётган эгри чизиқларга уринма жойлашган текислик сиртга P нуқтада *уринма текислик* деб аталади (207-расм).

Сиртнинг махсус нуқталарида уринма текислик мавжуд бўлмаслиги мумкин. Бундай нуқталарда сиртга уринма тўғри чизиқлар бир текисликда ётмаслиги мумкин. Масалан конус сиртнинг учи махсус нуқтадир. Бу нуқтада конус сиртга уринма тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди (уларнинг узлари конус сиртни ҳосил қилади).

Оддий нуқтада (1) сиртга уринма текислик тенгламасини ёзамиз. Бу текислик (4) векторга перпендикуляр бўлгани учун унинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \quad (6)$$



207-расм.

Агар сиртнинг тенгламаси $z = f(x, y)$ ёки $z - f(x, y) = 0$ шаклда берилган бўлса,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

бўлади ва бу ҳолда уринма текислик тенгламаси ушбу кўринишда олади:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \quad (6')$$

Изоҳ. Агар (6') формулада $X - x = \Delta x$, $Y - y = \Delta y$ деб фарз қилсак, бу формула ушбу кўринишга келади:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y;$$

бу тенгликнинг унги томони $z = f(x, y)$ функциянинг тула дифференциалидан иборат. Демак, $Z - z = dz$. Шундай қилиб, икки ўзгарувчи функциясининг $M(x, y)$ нуқтадаги эркин ўзгарувчилар x ва y нинг Δx ва Δy орттирмаларига мос тула дифференциали берилган функциянинг графиги бўлган сиртга уринма текислик аппликатаи (z) нинг унга мос орттирмасига тенг.

3-таъриф. (1) сиртнинг $P(x, y, z)$ нуқтаси орқали уринма текисликка перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ сиртга *нормал* деб аталади (207-расм).

Нормалнинг тенгламасини ёзамиз. Унинг йўналиши N векторнинг йўналиши билан бир хил бўлгани учун, унинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (7)$$

Агар сиртнинг тенгламаси $z = f(x, y)$ ёки

$$z - f(x, y) = 0$$

шаклда берилган бўлса, нормал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{1}.$$

Изоҳ. $F(x, y, z) = 0$ сирт уч ўзгарувчининг бирон функцияси $u = u(x, y, z)$ учун юсаклик сирти бўлсин, яъни

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

(4) формула билан аниқланган $F = u(x, y, z) - C = 0$ юсаклик сиртига нормал бўйича йўналган N вектор бундай ифодаланади:

$$N = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

яъни

$$N = \text{grad } u.$$

Шу билан биз $u(x, y, z)$ функциянинг градиенти берилган нуқтадан ўтувчи юсаклик сиртига нормал бўйича йўналган бўлишини исбот қилдик.

Мисол. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ шар сиртининг $P(1, 2, 3)$ нуқтасида уринма текислик тенгламаси ва нормал тенгламаси ёзилсин.

Ечиш.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

$x = 1, y = 2, z = 3$ бўлганда:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ ёки } x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

ёки

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

IX бобга машқлар

Векторларнинг ҳосилалари топилсин:

1. $r = t \operatorname{ctg} t = j \operatorname{arctg} t$ Жав. $r' = -\frac{1}{\sin^2 t} t + \frac{1}{1+t^2} j$. 2. $r = te^{-t} + j2t + k \ln t$. Жав. $r' = -te^{-t} + 2j + \frac{k}{t}$. 3. $r = t^2 i - \frac{j}{t} + \frac{k}{t^2}$. Жав. $r' = 2ti + \frac{j}{t^2} - \frac{2k}{t^3}$. 4. $r = ti + tj + tk$ эгри чизиққа (3, 9, 27) нуқтада уринма вектор, уринма тенгламаси ва нормал текислик тенгламаси топилсин. Жав. $r' = i + j + k$; уринма: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; нормал текислик: $x + 6y + 27z = 786$.

5. $r = i \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{2} j \sin t + k \sin \frac{t}{2}$ эгри чизиққа уринма вектор, уринма тенгламаси ва нормал текислик тенгламаси топилсин. Жав. $r' = -\frac{1}{2} i \sin t + \frac{1}{2} j \cos t + \frac{1}{2} k \cos \frac{t}{2}$; уринма тенгламаси: $\frac{X - \cos^2 \frac{t}{2}}{-\sin \frac{t}{2}} = \frac{Y - \frac{1}{2} \sin t}{\cos t} = \frac{Z - \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}$; нормал текислик тенгламаси: $+X \sin t - Y \cos t - Z \cos \frac{t}{2} = x \sin t - y \cos t - z \cos \frac{t}{2}$, бу ерда x, y, z эгри чизиқнинг нормал текислик ўтказилган нуқтасининг координаталарини (яъни $x = \cos^2 \frac{t}{2}$, $y = \frac{1}{2} \sin t$, $z = \sin \frac{t}{2}$). 6. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ эгри чизиққа уринма тенгламаси ва уринманинг координата ўқларин билан ясалган бурчақларининг косинуслари топилсин. Жав. $\frac{X-X_0}{\sin \frac{t_0}{2}} = \frac{Y-Y_0}{\cos \frac{t_0}{2}} = \frac{Z-Z_0}{\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}}$, $\cos \alpha = \sin^2 \frac{t_0}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2} \sin t_0$, $\cos \gamma = \cos \frac{t_0}{2}$. 7. $z = x^2 - y^2$, $y = x$ эгри чизиққа координаталар бошида нормал текислик тенг-

ламаси топилсин. Кўрсатма. Эгри чизик тенгламаси параметрик шаклда ёзилсин. Жав. $x + y = 0$. 8. $r = l(\cos t + \sin^2 t) + j \sin t(1 - \cos t) - k \cos t$

эгри чизик учун $t = \frac{\pi}{2}$ нуқтада $\bar{a}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ топилсин. Жав. $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i + j + k)$,

$\bar{n} = \frac{-5i - 4j - k}{\sqrt{42}}$, $\bar{b} = \frac{i - 2j + 3k}{\sqrt{14}}$. 9. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ эгри чизикқа (x_0, y_0, z_0) нуқтада бош нормал ва бинормал тенгламалари топилсин. Жав. $\frac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \frac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \frac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0}$, $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-2t_0} = \frac{z - z_0}{t_0^2}$.

10. $y^2 = x$, $x^2 = z$ эгри чизикқа $M(1, 1, 1)$ нуқтада ёпишма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$ тенгламалар билан берилган эгри чизик учун эгрилик радиуси топилсин. Жав. $R = 2$.

12. $r = l \cos t + j \sin t + k \sin t$ эгри чизикнинг буралиш радиуси топилсин. Жав. $T = -\operatorname{ch} t$.

13. $r = t^2 i + 2t^3 j$ эгри чизикнинг эгрилик радиуси ва буралиш радиуси топилсин. Жав. $R = \frac{2}{3} t(1 + 9t^2)^{3/2}$, $T = \infty$.

14. $r = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1)i + (a_2 t^2 + b_2 t + c_2)j + (a_3 t^2 + b_3 t + c_3)k$ эгри чизикнинг текис эгри чизик эканлиги исботлансин. Жав. $r''' \equiv 0$, шунинг учун буралиш нолга тенг.

15. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ эгри чизикнинг эгрилиги ва буралиши топилсин. Жав. Эгрилик $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$ га тенг; буралиш $\frac{\sqrt{2}}{(x-y)^2}$ га тенг.

16. $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$, $z = e^{-t}$ эгри чизикнинг эгрилиги ва буралиши топилсин. Жав. Эгрилик $\frac{\sqrt{2}}{3} e^t$ га тенг; буралиш $-\frac{1}{3} e^t$ га тенг.

17. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоидга (x_1, y_1, z_1) нуқтада уринма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1$.

18. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ сиртга $(2, 2, 3)$ нуқтада нормал тенгламаси топилсин. Жав. $y + 4x = 10$; $3x - z = 3$.

19. $z = 2x^2 + 4y^2$ сиртга $M(2, 1, 12)$ нуқтада уринма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $8x + 8y - z = 12$.

20. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ сиртга $x - y + 2z = 0$ текисликка параллел булган уринма текислик ўтказилсин. Жав. $x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$

Х БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

III бобда бундай масалани қараган эдик: $F(x)$ функция берилган; унинг ҳосиласини, яъни $f(x) = F'(x)$ функцияни топиш талаб қилинади.

Бу бобда тескари масалани қараймиз: $f(x)$ функция берилган; шундай $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $f(x)$ га тенг, яъни

$$F'(x) = f(x)$$

булсин.

1- таъриф. Агар $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, $F(x)$ функция шу кесмада $f(x)$ функцияга нисбатан бошланғич функция деб аталади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функцияга нисбатан бошланғич функция топилисин.

Бошланғич функция таърифига кўра, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функция бошланғич экани чىқади, чунки $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Агар $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд булса, бу бошланғич ягона булмаслигини кўриш осон. Чунончи, юқоридаги мисолда бошланғич учун ушбу функцияларни олиш мумкин эди: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ёки умуман $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас сон), чунки

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Иккинчи томондан, $\frac{x^3}{3} + C$ кўринишдаги функция x^2 функциядан топиладиган ҳамма бошланғич функцияларни ўз ичига олишини исботлаш мумкин. Бу эса ушбу теоремадан келиб чиқади:

Теорема. Агар $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ функциялар $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада бошлангич функциялар булса, улар орасидаги айирма ўзгармас сонга тенг булади.

Исбот. Бошлангич функциянинг таърифига кўра x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қийматида

$$\left. \begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тенгликларга эга бўламиз.

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

деб белгилаймиз. Унда (1) тенгликларга асосан x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қийматида

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ёки

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = 0.$$

Лекин $\varphi'(x) = 0$ тенгликдан $\varphi(x)$ нинг ўзгармас сон экани келиб чиқади.

Ҳақиқатан, $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва дифференциалланувчи экани равшан бўлган $\varphi(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўлланамиз (IV боб 2- § га қаранг).

x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қиймати учун Лагранж теоремасига кўра

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a) \varphi'(\xi)$$

га эга бўламиз (бу ерда $a < \xi < x$).

$\varphi'(\xi) = 0$ бўлгани учун,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ёки

$$\varphi(x) = \varphi(a). \quad (3)$$

Шундай қилиб, $[a, b]$ кесманинг ҳар қандай x нуқтасида $\varphi(x)$ функция $\varphi(a)$ қийматини сақлайди, бу эса $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзгармас сон деган сўздир. $\varphi(a)$ ўзгармас сонни C билан белгилаб (2) ва (3) тенгликлардан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Исбот қилинган теоремадан бундай натижа чиқади: агар берилган $f(x)$ функция учун қандай бўлмасин бирон $F(x)$

бошланғич функция топилган бўлса, $f(x)$ функция учун ҳар қандай бошқа бошланғич функция $F(x) + C$ курунишга эга булади (бу ерда $C = \text{const}$).

2-таъриф. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич бўлса, $F(x) + C$ ифода $f(x)$ функциядан *аниқмас интеграл* деб аталади ва ушбу $\int f(x) dx$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра, агар

$$F'(x) = f(x)$$

бўлса,

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Бунда $f(x)$ функция—*интеграл остидаги функция*, $f(x) dx$ — интеграл *остидаги ифода*, $\int$ ишора — *интеграл ишораси* деб аталади.

Шундай қилиб, аниқмас интеграл $y = F(x) + C$ функциялар тупламидан иборатдир.

Геометрия нуқтан назаридан қараганда аниқмас интеграл эгри чизиклар тупламидан (оиласидан) иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири эгри чизиклардан биттасини ўз-ўзига параллел ҳолда юқорига ёки пастга, яъни Оу ўқ бўйлаб силжитиш йўли билан ҳосил қилинади.

Бундай савол пайдо булади: ҳар қандай $f(x)$ функция учун ҳам бошланғич функция (демак, аниқмас интеграл) мавжуд бўлаверадими? Текширишлар ҳар қандай функция учун бошланғич функция мавжуд бўлавермаслигини кўрсатади. Лекин ушбу теоремани исботсиз айтиб ўтамиз; агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу функция учун бошланғич функция (демак, аниқмас интеграл) мавжуд булади.

Бу боб элементар функцияларнинг баъзи классларидан бошланғич функцияни (ва аниқмас интегрални) қандай усуллар ёрдами билан топишни аниқлашга бағишланган.

Берилган $f(x)$ функция бўйича унинг бошланғич функциясини топиш $f(x)$ функцияни *интеграллаш* дейилади.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, агар элементар функциянинг ҳосиласи доим элементар функция бўлса, элементар функциянинг бошланғичи чекли сондаги элементар функциялар ёрдами билан тасвирланмаслиги ҳам мумкин. Бу масалага шу бобнинг охирида яна қайтамиз.

2-таърифдан қуйидагилар чиқади:

1. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи *интеграл остидаги функцияга тенг*, яъни $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда

$$(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (4)$$

Сунгги тенгликни ҳар қандай бошланғич функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг деган маънода тушуниш керак.

2. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx. \quad (5)$$

Бу формула (4) формулага асосан ҳосил қилинади.

3. Бирон функция дифференциалининг аниқмас интегралли шу функция билан ихтиёрий ўзгармас соннинг йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Сунгги тенгликнинг тўғрилигини дифференциаллаш билан текшириш мумкин (тенгликнинг иккала томондан олинган дифференциал $dF(x)$ га тенг).

2-§. Интеграллар жадвали

Интеграллаш методларини баён қилишга ўтишдан аввал энг содда функцияларнинг интеграллари жадвалини келтирамиз.

Х бобнинг 1-§ да берилган 2-таъриф ва (III бобнинг 15-§ да келтирилган) ҳосилалар жадвалидан интеграллар жадвали бевосита келиб чиқади. (Жадвалда келтирилган тенгликларнинг тўғрилигини дифференциаллаш йўли билан текшириш, яъни тенгликнинг ўнг томонидаги функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенглигини аниқлаш осон.)

✓ 1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1).$ (Бу ерда ва бундан кейинги формулаларда C ихтиёрий ўзгармас миқдор деб тушунилади.)

✓ 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

✓ 3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

✓ 4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

✓ 5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

✓ 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Х Б О Б

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

III бобда бундай масалани қараган эдик: $F(x)$ функция берилган; унинг ҳосиласини, яъни $f(x) = F'(x)$ функцияни топиш талаб қилинади.

Бу бобда тескари масалани қараймиз: $f(x)$ функция берилган; шундай $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $f(x)$ га тенг, яъни

$$F'(x) = f(x)$$

булсин.

1- таъриф. Агар $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, $F(x)$ функция шу кесмада $f(x)$ функцияга нисбатан *бошланғич* функция деб аталади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функцияга нисбатан бошланғич функция топилсин.

Бошланғич функция таърифига кўра, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функция бошланғич экани чиқади, чунки $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Агар $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд бўлса, бу бошланғич ягона бўлмаслигини кўриш осон. Чунончи, юқорндаги мисолда бошланғич учун ушбу функцияларни олиш мумкин эди: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ёки умуман $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас сон), чунки

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Иккинчи томондан, $\frac{x^3}{3} + C$ кўринишдаги функция x^2 функциядан топиладиган ҳамма бошланғич функцияларни ўз ичига олишини исботлаш мумкин. Бу эса ушбу теоремадан келиб чиқади:

Демак,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Бу формулани X боб 9- § нинг умумий натижаларидан чиқариш ҳам мумкин.

14- формулада:

$$\left(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Бу формулани 10- § нинг умумий натижаларидан ҳам чиқариш мумкин.

11' ва 13' формулалар ҳам шулар сингарн текшириладн. Бу формулалар кейинроқ 11- ва 13- формулалардан чиқарилади (4- § даги 3- ва 4- мисолларга қаранг).

3- §. Аниқмас интегралнинг баъзи хоссалари

1. теорема. *Икки ёки бир неча функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интегралн, шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (1)$$

Исботлаш учун бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилаларини топамиз. 1- параграфдаги (4) формулага суяниб ушбуни топамиз:

$$\begin{aligned} \left(\int [f_1(x) + f_2(x)] dx \right)' &= f_1(x) + f_2(x), \\ \left(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right)' &= \left(\int f_1(x) dx \right)' + \left(\int f_2(x) dx \right)' = \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (1) тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилалари узаро тенг, яъни чап томонда турган ҳар қандай бошланғич функциянинг ҳосиласи ўнг томонда турган ҳар қандай функциянинг ҳосиласига тенг. Демак, X бобнинг 1- параграфдаги теоремага кўра (1) тенгликнинг чап томонидаги ҳар қандай функция ўнг томонидаги ҳар қандай функциядан ўзгармас қўшилувчи билан фарқ қилади. (1) тенгликни шу маънода тушуниш керак.

2-теорема. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл ишораси остидан чиқариш мумкин, яъни $a = \text{const}$ бўлса,

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (2)$$

Бу тенгликни исботлаш учун унинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \left(\int a f(x) dx \right)' &= a f(x), \\ \left(a \int f(x) dx \right)' &= a \left(\int f(x) dx \right)' = a f(x). \end{aligned}$$

Чап ва ўнг томонларининг ҳосилалари ўзаро тенг, демак, (1) тенгликдаги каби чап ва ўнг томонларда турган иккита ҳар қандай функциянинг айирмаси ўзгармас миқдор. (2) тенгликни шу маънода тушуниш керак.

Аниқмас интегралларни ҳисоблаганда қуйидаги қоидаларни назарда тутиш фойдали.

I. Агар

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлса,

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \quad (3)$$

Ҳақиқатан (3) тенгликнинг чап ва ўнг томонларини дифференциаллаб, шуларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \left(\int f(ax) dx \right)' &= f(ax), \\ \left(\frac{1}{a} F(ax) \right)' &= \frac{1}{a} (F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax) a = F'(ax) = f(ax). \end{aligned}$$

Чап ва ўнг томонларнинг ҳосилалари ўзаро тенг. Шунини исботлаш керак эди.

II. Агар

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлса,

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C. \quad (4)$$

III. Агар

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлса,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (5)$$

(4) ва (5) тенгликлар шу тенгликларнинг ўнг ва чап қисмларини дифференциаллаш билан исботланади.

1-мисол.

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx &= \int 2x^3 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx = \\ &= 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + \\ &+ 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

2-мисол.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4 \sqrt{x} \right) dx &= 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{4}} dx = \\ &= 3 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + \\ &+ \frac{4}{9} x^3 \sqrt[4]{x} + C.\end{aligned}$$

3-мисол.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| + C.$$

4-мисол.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C.$$

5-мисол.

$$\int \sin (2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos (2x-6) + C.$$

4-§. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан ёки ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш

Ушбу

$$\int f(x) dx$$

интегрални топиш талаб қилинсин; бунда $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд эканлиги бизга маълум бўлса ҳам, уни бевосита танлай олмадик деб фараз қилайлик.

$$x = \varphi(t)$$

(1)

деб олиб, интеграл остидаги ифодада ўзгарувчини алмаштирамиз; бу ерда $\varphi(t)$ узлуксиз функция бўлиб, узлуксиз ҳосиллага ва тескари функцияга эга. У вақтда $dx = \varphi'(t) dt$; бу ҳолда ушбу тенглик тўғри бўлишини исботлаймиз:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Бу ерда интеграллашдан сўнг тенгликнинг ўнг томонида t ўрнига унинг (1) тенгликка асосан x орқали ифодаси қўйилади деб тушунилади.

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларида турган ифодаларнинг юқорида айтилган маънода бир хил эканини аниқлаш учун уларнинг x бўйича ҳосилалари ўзаро тенг эканини исботлаш керак. Чап томонининг ҳосиласини топамиз.

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x).$$

(2) тенгликнинг ўнг томонини x бўйича мураккаб функция каби дифференциаллаймиз, t оралиқ аргумент бўлади. t нинг x га боғлиқлиги (1) тенглик билан ифодаланади, бунда $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ ва тескари функцияни дифференциаллаш қондаси бўйича.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \frac{dt}{dx} = \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Демак, (2) тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг x бўйича ҳосилалари ўзаро тенг; талаб қилинган исбот шу эди.

$x = \varphi(t)$ функцияни шундай танлаш керакки, (2) тенгликнинг ўнг томонида турган аниқмас интегрални ҳисоблаш мумкин бўлсин.

Изоҳ. Интеграллашда ўзгарувчини алмаштиришни баъзан $x = \varphi(t)$ кўринишда эмас, балки $t = \psi(x)$ кўринишда танлаш маъқулроқ бўлади. Бунини мисолда кўрсатамиз. Ушбу

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)}$$

кўринишдаги интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. Бу ерда

$$\psi(x) = t$$

деб қабул қилиш қулай, у вақтда

$$\psi'(x) dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Ўзгарувчини алмаштириш ёрдами билан интеграллашга доир бир неча мисол келтирамыз.

1- мисол. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = ?$ Бунда $t = \sin x$ алмаштиришни қиламыз; У ҳолда $dt = \cos x dx$, демак, $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C.$

2- мисол. $\int \frac{x dx}{1+x^2} = ?$ Бунда $t = 1+x^2$ деб қабул қиламыз; у вақтда $dt = 2x dx$ ва $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

3- мисол.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Бунда $t = \frac{x}{a}$ деб эътибор қиламыз; у ҳолда $dx = a dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

4- мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$ Бунда $t = \frac{x}{a}$ деб қабул қиламыз; у вақтда

$$dx = a dt \text{ ва } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} t + C = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0 \text{ деб фараз қилинади}).$$

(8- ва 4- мисолларда жадвалда келтирилган (2- § га қarang) 11' ва 13' номерли интеграллар чиқарилди.

5- мисол. $\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = ?$ $t = \ln x$ деб фараз қиламыз; унда $dt = \frac{dx}{x},$

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

6- мисол. $\int \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ $t = x^2$ деб фараз қиламиз; у вақтда $dt = 2x dx$,

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$$

Ўзгарувчиларни алмаштириш усули аниқмас интегралларни ҳисоблашнинг асосий усулларида биридир. Ҳатто бирор бошқа усул билан интеграллаганимизда ҳам, кўпинча орадаги ҳисоблашларда ўзгарувчиларни алмаштириш тўғри келади. Интеграллашдаги муваффақият ўзгарувчиларни берилган интегрални соддалаштирадиган функция билан алмаштиришни топа олишимизга анчагина боғлиқдир. Қисқа қилиб айтганда, интеграллаш усулларини ўрганиш — интеграл остидаги ифода-нинг кўринишига қараб ўзгарувчини қандай алмаштириш кераклигини аниқлашдан иборатдир.

5- §. Квадрат учҳад қатнашган баъзи функцияларни интеграллаш

1. Ушбу интегрални қараймиз:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Аввал махраждаги квадрат учҳадни квадратлар йиғиндиси ёки айирмаси кўринишига келтирамиз:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

бу ерда

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Плюс ёки минус ишорани тенгликнинг чап томонидаги ифода мусбат ёки манфий бўлишига, яъни $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг нлдизлари комплекс ёки ҳақиқий бўлишига қараб олинадн.

Шундай қилиб, I_1 интеграл ушбу кўринишни олади:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Сўнгги интегралда ўзгарувчини бундай алмаштирамиз:

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

у вақтда

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

ҳосил бўлади.

Бу эса жадвалдаги интеграллардир (11' ва 12 формулаларга қаранг).

1-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Е чи ш.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}. \end{aligned}$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз: $x + 2 = t$, $dx = dt$. Бунини интеграл остидаги ифодага қўйиб, жадвалдаги интегрални ҳосил қиламиз:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

t нинг ўрнига унинг x орқали ифодасини қўйиб, охириги жавобни топамиз:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Умумийроқ кўринишдаги интегрални қараймиз:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Интеграл остидаги функцияни бундай алмаштирамиз:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Сўнгги интегрални икки интегралнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаймиз:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Бундаги охириги интеграл I_1 интегралнинг ўзи, уни ҳисоблашни биламиз. Биринчи интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b) dx = dt.$$

Демак,

$$\int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Шундай қилиб, жавобни топамиз:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

2- мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$I = \int \frac{x+3}{x^3-2x-5} dx.$$

Юқоридаги усулни қўлланамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{x^3-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}2\right)}{x^3-2x-5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2) dx}{x^3-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^3-2x-5} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^3-2x-5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^3-6} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^3-2x-5| + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C. \end{aligned}$$

III. Ушбу интегрални қараймиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

I пунктда кўрсатилган алмаштиришлар ёрдами билан бу интеграл a нинг ишорасига қараб, жадвалда бўлган ушбу кўринишдаги интегралга келтирилади:

$a > 0$ бўлганда $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ ёки $a < 0$ бўлганда $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$, булар интеграллар жадвалида қараб чиқилган (13' ва 14 формулаларга қаранг).

IV. Ушбу кўринишдаги интеграл

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

II пунктда қаралган алмаштиришлар ёрдами билан ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган интегралларнинг биринчисида ушбу алмаштиришни қўлланамиз:

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt,$$

бунда шуни ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C.$$

Иккинчи интегрални шу параграфнинг III пунктда қараган эдик.

3-мисол.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = \\ &= 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln |x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 + 6}| + C = \\ &= 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}| + C. \end{aligned}$$

6-§. Бўлаклаб интеграллаш

u ва v функциялар x бўйича дифференциалланувчи икки функция бўлсин. Унда, маълумки, uv купайтманинг дифференциали ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Бундан, интеграллаб

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ёки

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (I)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади. Бу формула кўпинча интеграл остидаги ифодани u билан dv нинг кўпайтмаси кўринишида тасвирлаганда dv дифференциалдан v функцияни топиш билан $\int v du$ интегрални ҳисоблаш $\int u dv$ интегрални бевосита ҳисоблашдан осонроқ бўлган ҳолларда қўлланилади. Интеграл остидаги ифодани u ва dv кўпайтувчиларга маъқул тарзда ажратишни билиш маҳорати масалалар ечиш процессида ҳосил бўлади, бунинг қандай қилинишини бир неча мисолда кўрсатамиз.

1- мисол. $\int x \sin x dx = ?$ Бундай фараз қиламиз:

$$u = x, \quad dv = \sin x dx;$$

у вақтда

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Демак,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Изоҳ. dv дифференциал бўйича v ни белгилашда истаган ихтиёрый ўзгармасни олишимиз мумкин, чунки у охиригى натижага кирмайди (буни (1) тенгликда v ўрнига $v + C$ ни қўйиб текшириб кўриш осон). Шунинг учун бу ўзгармасни нолга тенг деб ҳисоблаш қулайдир.

Бўлаклаб интеграллаш қондаси кўп ҳолларда қўлланилади. Чунончи, ушбу кўрнинишдаги интеграллар:

$$\begin{aligned} \int x^k \sin ax dx, \quad \int x^k \cos ax dx, \\ \int x^k e^{ax} dx, \quad \int x^k \ln x dx, \end{aligned}$$

тескари тригонометрик функциялар иштирок қилган баъзи интеграллар бўлаклаб интеграллаш ёрдами билан ҳисобланади.

2- мисол. $\int \arctg x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бундай белгилаймиз:

$$u = \arctg x, \quad dv = dx, \quad \text{у ҳолда } du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x. \quad \text{Демак,}$$

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

3-мисол. $\int x^2 e^x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бундай белгилаймиз: $u = x^2$, $dv = e^x dx$; у вақтда $du = 2x dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Охирги интегрални яна бўлаклаб интеграллаймиз. Бундай белгилаймиз:

$$\begin{aligned} u_1 &= x, & du_1 &= dx, \\ dv_1 &= e^x dx, & v_1 &= e^x. \end{aligned}$$

У вақтда

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Охирги натижа:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

4-мисол. $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бунда $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x dx$ деб фараз қиламиз; у вақтда

$$du = (2x + 7) dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} dx.$$

Охирги интегралда $u_1 = \frac{2x + 7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x dx$ белгилашни киритиб, бўлаклаб интеграллашни қўлланамиз, у вақтда

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 7}{2} \sin 2x dx &= \frac{2x + 7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= -\frac{(2x + 7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

Шунинг учун охирги натижа:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx &= (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \\ &- \frac{\sin 2x}{4} + C = (2x^2 + 14x - 11) \frac{\sin x}{4} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

$$5\text{-мисол. } I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$$

Аввал бундай азамштирамиз. Интеграл остидаги функцияни $\sqrt{a^2 - x^2}$ га жупайтирамиз ва бўламиз:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.\end{aligned}$$

Охирги интегрални бўлаклар, интеграллаймиз. Бундай белгилаймиз;

$$\begin{aligned}u &= x & du &= dx \\ dv &= \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & v &= -\sqrt{a^2 - x^2};\end{aligned}$$

у вақтда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Сўнгги натижани берилган интеграл учун аввал топилган натижага қўйиб, ушбунини топамиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Интегрални чапдан ўнгга ўтказиб, содда азамштиришдан сўнг ушбу охирга натижага эга бўламиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

6- мисол. Ушбу интеграллар ҳисоблансин:

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx \quad \text{ва} \quad I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Биринчи интегралга бўлаклар интеграллаш методини қўлланиб, шуларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}u &= e^{ax}, & du &= ae^{ax} dx, \\ dv &= \cos bx dx, & v &= \frac{1}{b} \sin bx,\end{aligned}$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Сўнгги интегралга яна бўлаклар интеграллаш методини қўлланамиз:

$$\begin{aligned}u &= e^{ax}, & du &= ae^{ax} dx, \\ dv &= \sin bx dx, & v &= -\frac{1}{b} \cos bx,\end{aligned}$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Ҳосил қилинган ифодани оддинги тенгликка қўйиб, шунини ҳосил қиламиз:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx,$$

Бу тенгликдан I_1 ни топамиз:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) + C \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right).$$

бундан

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Шунга ўхшаш йўл билан I_2 ни топамиз:

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

7-§. Рационал касрлар. Энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш

Қуйида ҳар қандай элементар функция элементар функциялар билан ифодаланадиган интегралга эга бўлавермаслигини кўрамиз. Шунинг учун интеграллари элементар функциялар орқали ифодаланадиган функциялар синфларини ажратиш катта аҳамиятга эга. Бу синфлардан энг соддаси — рационал функциялар синфидир.

Ҳар қандай рационал функцияни рационал каср курунишида, яъни икки кўпхаднинг нисбати курунишида тасвирлаш мумкин:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Муҳокаманинг умумийлигини чекламасдан, бу кўпхадлар умумий илдизга эга эмас деб фараз қиламиз.

Агар суратнинг даражаси махражнинг даражасидан паст бўлса, каср *тўғри каср* деб аталади, акс ҳолда *нотўғри каср* деб аталади.

Агар каср нотўғри бўлса, суратни махражга (кўпхадни кўпхадга бўлиш қондаси бўйича) бўлиб, берилган касрни кўпхад билан бирор тўғри касрнинг йиғиндиси курунишида тасвирлаш мумкин:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

бу ерда $M(x)$ — кўпхад, $\frac{F(x)}{f(x)}$ — тўғри каср.

1-мисол. Нотўғри рационал каср берилган бўлсин:

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1}.$$

Суратини махражига (кўпхадларни бўлиш қондаси бўйича) бўлиб, шунинг ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1} = x - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^3 + 2x + 1}.$$

Кўпхадларни интеграллаш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмагани учун, рационал касрларни интеграллашдаги асосий қийинчилик туғри рационал касрларни интеграллашдан иборатдир:

Таъриф. Ушбу кўранишдаги туғри рационал касрлар:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k — бутун мусбат сон ≥ 2).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (махражнинг илдизлари комплекс сонлар, яъни $\frac{p^2}{4} - q < 0$).

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k — бутун мусбат сон ≥ 2 ; махражнинг илдизлари комплекс сонлар), I, II, III ва IV типдаги энг содда касрлар деб аталади.

Сўнгра ҳар қандай рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндисини кўринишида тасвирлаш мумкинлиги исботланади (8-§ га қarang). Шунинг учун биз аввал энг содда касрларнинг интегралларини қараб чиқамиз.

I, II ва III типдаги энг содда касрларни интеграллашда катта қийинчиликка учрамаймиз, шунинг учун уларнинг интегралларини ҳеч қандай изоҳсиз келтирамиз:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$
 $= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2+px+q} dx =$
 $= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$
 $= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} =$
 $= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

(5-§ га қarang).

IV типдаги энг содда касрларни интеграллаш мураккаброқ ҳисоблашни талаб қилади. Шу типдаги интеграл берилган бўлсин:

$$\text{IV. } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx.$$

Қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}. \end{aligned}$$

Биринчи интеграл $x^2 + px + q = t$, $(2x + p) dx = dt$ алмаштириш ёрдами билан олинади:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Иккинчи интегрални (унинг I_k билан белгиларимиз) ушбу қуришнида ёзамиз:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k},$$

бу ерда

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

деб фараз қиламиз (махражнинг илдизлари фаразга қура комплекс сонлар, демак, $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Энди қуйидагича киришамиз:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Сўнгги интегрални бундай алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} &= \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Бўлаклаб интеграллаб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Бу ифодани (1) тенгликка қўйсак, қуйидаги ҳосил булади:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ўнг томонда I_k типдаги интеграл бор, лекин интеграл остидаги функция махражининг даража курсаткичи унинг даража курсаткичидан битта бирлик паст ($k-1$); шундай қилиб, I_k ни I_{k-1} орқали ифодаладик.

Шу йул билан давом этиб, маълум интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \arctg \frac{t}{m} + C$$

га етиб борамиз. Сўнгра t ва m ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб, IV интегралнинг x ва берилган A, B, p, q сонлар орқали ифодасини топамиз.

2-мисол.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)} - \\ &\quad - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Охирги интегралга $x+1=t$ алмаштиришни қўлланамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Охирги интегрални қараймиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(ихтиёрий ўзгармасни ҳозирча ёзмаймиз; уни фақат охирги натижада ҳисобга оламиз).

Демак,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]$$

Охирги натижа бундай бўлади:

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

8-§. Рационал касрни энг содда касрларга ажратиш

Энди ҳар қандай тўғри рационал касрни энг содда касрлар йиғиндисига ажратиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Ушбу тўғри рационал каср

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

берилган бўлсин.

Бу касрга кирган кўпхадларнинг коэффициентлари ҳақиқий сонлар ва берилган каср қисқармайдиган каср деб фараз қиламиз (бу эса сурат ва махраж умумий илдизга эга эмас деган сўздир).

1-теорема. $x = a$ махражнинг k каррали илдизи, яъни $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$ бўлсин, бу ерда $f_1(a) \neq 0$ (VII боб, 6-§ га қаранг); у ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри касрни бошқа икки тўғри каср йиғиндиси шаклида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (1)$$

бу ерда A нолга тенг бўлмаган ўзгармас сон, $F_1(x)$ кўпхад, бунинг даражаси $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ махражнинг даражасидан паст.

Исбот. Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \quad (2)$$

(бу айният ҳар қандай A учун тўғри) ва ўзгармас A учун шундай қиймат топамизки, $F(x) - A f_1(x)$ кўпхад $x-a$ га бўлинсин. Бунинг учун Безу теоремасига кўра

$$F(a) - A f_1(a) = 0$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли. $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$ бўлгани учун A сони

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$$

тенгликдан бир қийматли равишда аниқланади. A нинг шундай қиймати учун

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a)F_1(x)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $F_1(x)$ купҳад, бунинг даражаси $(x-a)^{k-1}f_1(x)$ купҳаднинг даражасидан паст. (2) формуладаги касрни $x-a$ га қисқартириб, (1) формулани ҳосил қиламиз.

Натижа. (1) тенгликдаги

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$$

туғри касрга юқоридагидек муҳокамани қўллаш мумкин. Шундай қилиб, махраж k каррали $x=a$ илдизга эга бўлса, ушбу тенгликни ёзиш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

бу ерда $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ қисқармайдиган туғри каср. Агар $f_1(x)$ бошқа ҳақиқий илдизларга эга бўлса, охириги касрга ҳам ҳозиргина исбот қилинган теоремани қўллаш мумкин.

Энди махраж комплекс илдизларга эга бўлган ҳолни қараймиз. Ҳақиқий коэффицентларга эга бўлган купҳаднинг комплекс илдизлари иккитадан ўзаро қўшма бўлишини эслатиб утамиз (VII боб 8-§ га қаранг). Купҳадни ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратганда ҳар икки қўшма комплекс илдизга $x^2 + px + q$ кўринишдаги ифода мос келади. Агар комплекс илдизлар μ каррали бўлса, уларга $(x^2 + px + q)^\mu$ ифода мос келади.

2-теорема. Агар $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$ бўлса (бу ерда $\varphi_1(x)$ купҳад $x^2 + px + q$ га бўлинмайди), $\frac{F(x)}{f(x)}$ туғри рационал касрни бошқа икки туғри касрнинг йиғиндиси кўринишида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)}, \quad (3)$$

бу ерда $\Phi_1(x)$ — купҳад, бунинг даражаси махражсидаги $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)$ купҳаднинг даражасидан паст.

Исбот. Ушбу айнияти ёзамиз:

$$\frac{F(x)}{J(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (Mx + N)\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)}. \quad (4)$$

бу айният ҳар қандай M ва N учун туғри; M ва N нинг шундай қийматини топамизки, унда $F(x) - (Mx + N)\Phi_1(x)$ купҳад $x^2 + px + q$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$F(x) - (Mx + N)\Phi_1(x) = 0$$

тенглама ҳам $x^2 + px + q$ нинг $\alpha \pm i\beta$ илдиэларига тенг илдиэларга эга бўлиши зарур ва етарлидр. Демак,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\Phi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ёки

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Лекин $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}$ аниқ бир комплекс сон, буни $k + iL$ кўринишида ёзиш мўмкин, бу ерда K ва L ҳақиқий сонлар. Шундай қилиб,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

бундан

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

ёки

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

M ва N нинг шу қийматларида $F(x) - (Mx + N)\Phi_1(x)$ купҳад $\alpha + i\beta$ илдиэга, демак, $\alpha + i\beta$ қўшма илдиэга ҳам эга бўлади. Бу ҳолда купҳад $x - (\alpha + i\beta)$ ва $x - (\alpha - i\beta)$ айирмаларга, демак, уларнинг купайтмасига, яъни $x^2 + px + q$ га қолдиқсиз бўлинади. Вўлинмани $\Phi_1(x)$ билан белгилаб, бундай ёза оламиз:

$$F(x) - (Mx + N)\Phi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

(4) тенгликдаги охирги касрни $x^2 + px + q$ га қисқарттириб, (3) тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $\Phi_1(x)$ нинг даражаси махражнинг даражасидан паст экани равшан. Шунинг исбот қилиш керак эди.

Энди $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри касрга 1- ва 2-теоремаларнинг натижаларини қўлланиб, $f(x)$ махражнинг ҳамма илдизларига мос энг содда касрларни кетма-кет ажратиш мумкин. Шундай қилиб, юқорида айтилганлардан ушбу натижа чиқади:

Агар

$$f(x) = (x - a)^a (x - b)^b \dots (x^2 + px + q)^p \dots (x^2 + lx + s)^s$$

бўлса, $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср қуйидаги кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A}{(x-a)^a} + \frac{A_1}{(x-a)^{a-1}} + \dots + \frac{A_{a-1}}{x-a} + \\ & \dots + \frac{B}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \\ & + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^p} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{p-1}} + \dots + \frac{M_{p-1}x+N_{p-1}}{x^2+px+q} + \\ & \dots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^s} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{s-1}} + \dots + \frac{P_{s-1}x+Q_{s-1}}{x^2+lx+s} \end{aligned} \right\} 5$$

$A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ коэффициентларни қуйидаги мулоҳазалардан аниқлаш мумкин. Ёзилган тенглик айниятдан иборат, шунинг учун касрларни умумий махражга келтириб, икки томондаги суратларда айнан бир хил кўпхадлар ҳосил қиламиз. Бир хил даражадаги x ларнинг коэффициентларини тенглаштириб, номуалум $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар системаси ҳосил қиламиз.

Шу билан бир қаторда коэффициентларни топишда ушбу изоҳдан фойдаланиш мумкин: касрларни умумий махражга келтиргандан сўнг тенгликнинг ўнг ва чап қисмларида ҳосил бўлган кўпхадлар айнан тенг бўлиши керак, шунга кўра улар x нинг ҳар қандай хусусий қийматларида ҳам тенгдир. x га хусусий қийматлар бериб, коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, ҳар қандай тўғри рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин эканини кўрдик.

Мисол. Ушбу $\frac{x^3+2}{(x+1)^3(x-2)}$ каср энг содда касрларга ажратилсин.
(5) формулага асосан касрни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Умумий махражга келтириб ва суратларни тенглаштириб, ушбунини ҳосил қиламиз:

$$x^3+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3, \quad (6)$$

$$x^3+2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B).$$

x^3, x^2, x^1, x^0 (озод ҳад) ёнидаги коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентларни аниқлаш учун ушбу тенгламалар системасини топамиз:

$$0 = A_2 + B,$$

$$1 = A_1 + 3B,$$

$$0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B,$$

$$2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$$

Бу системани ечиб, мана буларни топамиз:

$$A = -1, \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{2}{9}, \quad B = \frac{2}{9}.$$

Коэффициентлардан баъзиларни x га нисбатан айниятдан иборат бўлган (6) тенгликда x га хусусий қийматлар беришдан ҳосил бўладиган тенгламалардан топиш ҳам мумкин.

Чунончи, $x = -1$ фараз қилиб, $3 = -3A$ ёки $A = -1$ ни ҳосил қиламиз;

$x = 2$ фараз қилиб, $6 = 27B$; $B = \frac{2}{9}$ ни ҳосил қиламиз. Агар бу икки тенгламага бир хил даражали x лар ёнидаги коэффициентларни тенглашдан ҳосил бўладиган яна иккита тенгламани бирлаштирсак, тўртта номаълум коэффициентни топиш учун тўртта тенглама ҳосил қиламиз. Натижада ушбу ажралмага эга бўламиз:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

9-§. Рационал касрларни интеграллаш

$\frac{Q(x)}{f(x)}$ рационал касрнинг интегралини, яъни

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

Агар берилган каср нотўғри каср бўлса, уни $M(x)$ кўп-ҳад билан $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри рационал каср йиғиндиси шаклида ифо-

далашимиз мумкин (7- параграфга қаранг). Тўғри касрни эса 8- параграфдаги (5) формулага асосан энг содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз. Шундай қилиб, ҳар қандай рационал касрни интеграллаш кўпхадни ва бир неча энг содда касрларни интеграллашга келтирилади.

8- параграфдаги натижалардан энг содда касрларнинг кўриниши функция махражининг илдизлари билан аниқланиши келиб чиқади. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

I ҳол. Махражнинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил, яъни

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I типдаги энг содда касрларга ажралади:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}$$

ва бу тенгликнинг иккала томонини интегралласак:

$$\begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C. \end{aligned}$$

II ҳол. Махражнинг илдизлари ҳақиқий ва улардан баъзилари каррали:

$$f(x) = (x-a)^n(x-b)^p\dots(x-d)^k.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I ва II типдаги энг содда касрларга ажралади.

I- мисол. (X боб 8- § даги мисолга қаранг).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} dx &= - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \\ &+ \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C = \\ &= - \frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III ҳол. Махражнинг илдизлари орасида такрорланмайдиган (яъни турлича) комплекс илдизлар бор:

$$f(x) = (x^2+px+q)\dots(x^2+lx+s)(x-a)^n\dots(x-d)^k.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I, II, III типдаги соддароқ касрларга ажралади.

2- мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Интеграл остидаги касрни соддароқ касрларга ажратамиз (X боб 8- § (Б) формулага қаранг):

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}.$$

Демак,

$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1).$$

$$x = 1 \text{ деб фараз қилсак: } 1 = 2C, C = \frac{1}{2},$$

$$x = 0 \text{ деб фараз қилсак: } 0 = -B + C, B = \frac{1}{2}.$$

x^2 олдидаги коэффициентларни тенглаб, $0 = A + C$ тенгликни ҳосил қиламиз, бундан $A = -\frac{1}{2}$. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x^2 + 1| + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

IV ҳо л. Махражнинг илдиэлари орасида, каррали комплекс илдиэлар бор:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^p \dots (x^2 + lx + s)^r (x - a)^n \dots (x - d)^k.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ касрни соддароқ касрларга ажратиш IV типдаги содда касрларни ҳам ўз ичига олади.

3- мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб этилади.

Е ч и ш. Касрни соддароқ касрларга ажратамиз:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

бундан

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= \\ &= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3) + E(x^2 + 2x + 3)^2. \end{aligned}$$

Юқорида кўрсатилган коэффициентларни аниқлаш усулларини комбинациялаб,

$$A = 1, B = -1, C = 0, D = 0, E = 1$$

эканини топамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} dx &= \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx + \int \frac{dx}{x + 1} = \\ &= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \ln|x + 1| + C. \end{aligned}$$

Унг томондаги биринчи интеграл X боб 7- параграфдаги 2- мисолда қаралган эди. Иккинчи интеграл бевосита ҳисобланади.

Юқорида баён этилганларнинг ҳаммасидан, ҳар қандай рационал функциядан олинган интеграл охирида элементар функциялар орқали ифода этилиши мумкин эканлиги келиб чиқади, чунончи:

1) I типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — логарифмлар билан;

2) II типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — рационал функциялар билан;

3) III типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — логарифмлар ва арктангенслар билан;

4) IV типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — рационал функциялар ва арктангенслар билан чекли шаклда ифода этилади.

10- §. Иррационал функцияларнинг интеграллари

Ҳар қандай иррационал функциядан олинган интеграл элементар функциялар орқали ифодаланавермайди. Бу ва бундан кейинги параграфларда интеграллари ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдами билан рационал функциялар интегралларига келтириладиган иррационал функцияларни қараймиз, демак, бундай функциялар охиригача интегралланади.

1. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$ интегрални қараймиз, бунда R — ўз аргументларига нисбатан рационал функция*).

*) $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ ёзув $x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}$ миқдорлар устида фақат рационал амаллар бажарилишини кўрсатади.

Бундан буён $R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots\right), R(x\sqrt{ax^2 + bx + c}), R(\sin x, \cos x)$ ва ҳоказо кўринишдаги ёзувларни ҳам худди шундай тушуниш лозим. Масалан, $R(\sin x, \cos x)$ ёзув $\sin x$ ва $\cos x$ устида рационал амаллар бажарилишини кўрсатади.

$\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ касрларнинг умумий махражи k бўлсин. Бундай

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1} dt$$

алмаштиришни бажарамиз.

Бу ҳолда x нинг ҳар бир касрли даражаси t нинг бутун даражаси билан ифода этилади, демак, интеграл остидаги функция t нинг рационал функциясига айланади.

1-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}$$

Ечиш. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ касрларнинг умумий махражи 4 бўлади; шунинг учун $x = t^4, dx = 4t^3 dt$ алмаштиришни бажарамиз; у ҳолда;

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\ &= \frac{4}{3} \left[x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1| \right] + C. \end{aligned}$$

II. Энди $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx$ кўринишдаги интегрални қараймиз. Бу интеграл

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

алмаштириш ёрдами билан рационал функциянинг интегралига келтирилади; бунда k билан $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ касрларнинг умумий махражи белгиланган.

2-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Ечиш. $x+4=t^2$, $x=t^2-4$, $dx=2t dt$ алмаштиришни бажарамиз;
бу ҳолда

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C.\end{aligned}$$

11-§. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ кўринишдаги интеграллар

Ушбу

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \quad (1)$$

кўринишдаги интегрални қараймиз, бунда $a \neq 0$.

Бундай интеграл Эйлернинг қуйидаги алмаштиришлари ёрдами билан янги ўзгарувчи рационал функциясининг интегралга келтирилади.

1. Эйлернинг биринчи алмаштириши. Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a} x + t$$

деб оламиз. Аниқлик учун $\sqrt{a}$ олдидан $+$ ишорани оламиз. Бу ҳолда

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a} xt + t^2,$$

бундан x ни t нинг рационал функцияси каби аниқлаймиз:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

(демак, dx ҳам t билан рационал ифода этилади), демак,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} x + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t,$$

яъни $\sqrt{ax^2+bx+c}$, ифода t нинг рационал функцияси бўлади. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ x ва dx лар t билан рационал ифода этилгани сабабли берилган (1) интеграл t нинг рационал функциясидан олинган интегралга айланади.

1-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансини

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Ечиш. Бу ерда $a=1 > 0$ бўлгани учун $\sqrt{x^2+c} = -x + t$ деб оламиз, бу ҳолда

$$x^2+c = x^2 - 2xt + t^2$$

бундан

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}.$$

Демак,

$$dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + c} = -x + t = -\frac{t^2 - c}{2t} + t = \frac{t^2 + c}{2t}.$$

Дастлабки интегралга қайтамыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 + c}| + C_1$$

(интеграллар жадвалидан 14-формулага қаранг):

2. Эйлернинг иккинчи алмаштириши. Агар $c > 0$ бўлса, бу ҳолда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

деб оламиз; у ҳолда (аниқлик учун $\sqrt{c}$ олдида + ишорани оламиз)

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt \sqrt{c} + c.$$

Бундан x ўзгарувчи t нинг рационал функцияси каби аниқланади:

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}.$$

dx ва $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ҳам t орқали рационал ифода этилгани сабабли x , $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ва dx нинг қийматларини

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ интегралга қўйсак, бу интеграл ҳам t нинг рационал функциясидан олинган интегралга келади.

2-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин.

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Ечн ш. $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$ деб оламиз; бу ҳолда

$$1 + x + x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1-t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1-t^2}; \quad 1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1-t^2}.$$

Ҳосил қилинган ифодаларни дастлабки интегралга қўямиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^3})^2}{x^3 \sqrt{1+x+x^3}} dx &= \int \frac{(-2t^3 + t^2)(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^3-2t+2)}{(1-t^2)^3(2t-1)^2(t-t+1)(1-t^2)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^3}-1)}{x} + \\ &+ \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^3}-1}{x - \sqrt{1+x+x^3}+1} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^3}-1)}{x} + \ln |2x + \\ &+ 2\sqrt{1+x+x^3}+1| + C. \end{aligned}$$

3. Эйлернинг учинчи алмаштириши. $ax^2 + bx + c$ учҳад-нинг ҳақиқий илдизлари α ва β бўлсин, бу ҳолда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$ деб оламиз:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

бўлгани сабабли

$$\begin{aligned} \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} &= (x - \alpha)t, \\ a(x - \alpha)(x - \beta) &= (x - \alpha)^2 t^2, \\ a(x - \beta) &= (x - \alpha)t^2. \end{aligned}$$

Бундан x ни t нинг функцияси каби аниқлаймиз:

$$x = \frac{a\beta - at^2}{a - t^2}.$$

dx ва $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ҳам t билан рационал боғлиқ бўлгани сабабли берилган интеграл t нинг рационал функциясида олинадиган интегралга алмашади.

1- н з о ҳ. Эйлернинг учинчи алмаштириши $a < 0$ бўлгандагина қўлланмасдан, балки $a > 0$ бўлганда ҳам татбиқ этилади, бунда фақат $ax^2 + bx + c$ кўпҳад иккита ҳақиқий илдизга эга бўлса бас.

3- м и с о л. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Е ч и ш. $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ бўлгани сабабли

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t$$

деб оламиз; u ҳолда

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2, \quad x - 1 = (x + 4)t^2,$$

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Дастлабки интегралга қайтамыз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4} &= \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + C. \end{aligned}$$

2-изох. (1) интегрални рационал функциянинг интегралига келтириш учун Эйлернинг биринчи ва учинчи алмаштиришидан фойдаланиш етарли эканини таъкидлаб ўтамыз. $ax^2 + bx + c$ учҳадни қараймиз. Агар $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, учҳаднинг илдизлари ҳақиқий ва, демак, Эйлернинг учинчи алмаштиришини татбиқ қилса бўлади. Агар $b^2 - 4ac \leq 0$ бўлса, бу ҳолда

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + 4ac - b^2]$$

ва, демак, x нинг барча қийматларида учҳаднинг ишораси a нинг ишораси билан бир хил бўлади. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ҳақиқий бўлиши учун учҳад мусбат бўлиши, демак, $a > 0$ бўлиши керак. Бу ҳолда биринчи алмаштиришни татбиқ қилса бўлади.

12-§. Тригонометрик функцияларнинг баъзи синфларини интеграллаш

Ҳозиргача фақат алгебраик (рационал ва иррационал) функцияларнинг интегралларини системали равишда ургандик. Бу параграфда баъзи бир ноалгебраик функциялар, биринчи навбатда тригонометрик функциялар интегралларини қараймиз. Ушбу

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (1)$$

интеграл берилган бўлсин. Бу интеграл

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (2)$$

алмаштириш ёрдами билан ҳамма вақт рационал функциянинг интегралига келтирилиши мумкинлигини кўрсатамиз. $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларни $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ билан, яъни t билан ифодаalaymиз:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Сўнгра

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Шундай қилиб, $\sin x$, $\cos x$ ва dx лар t билан рационал ифодаланади. Аммо рационал функцияларнинг рационал функцияси ўз навбатида яна рационал функция бўлгани учун ҳосил қилинган ифодаларни (1) интегралга қўйиб, рационал функциянинг интегралини ҳосил қиламиз:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

1-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

интегрални қараймиз. Юқорида ёзилган формулаларга асосан:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Курилган алмаштириш $R(\cos x, \sin x)$ кўринишдаги ҳар қандай функцияни интеграллаш учун имкон беради. Шунинг учун уни баъзан „универсал тригонометрик алмаштириш“ деб атайдилар. Лекин практикада бу алмаштириш кўпинча анча мураккаб рационал функцияга олиб келади. Шунинг учун „универсал“ алмаштириш билан бир қаторда баъзи ҳоллар учун мақсадга тез олиб келадиган бошқа алмаштиришларни ҳам билиш фойдалидир.

1) Агар интеграл $\int R(\sin x) \cos x dx$ кўринишда бўлса, у ҳолда $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ алмаштириш бу интегрални $\int R(t) dt$ кўринишга олиб келади.

2) Агар интеграл $\int R(\cos x) \sin x dx$ кўринишда бўлса, у ҳолда $\cos x = t$; $\sin x dx = -dt$ алмаштириш ёрдамида бу интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади.

3) Агар интеграл остидаги функция фақат $\operatorname{tg} x$ га боғлиқ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ алмаштириш

ёрдамида бу интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Агар интеграл остидаги функция $R(\sin x, \cos x)$ курилишда бўлса аммо $\sin x$ ва $\cos x$ фақат жуфт даражаларда кирса, у ҳолда

$$\operatorname{tg} x = t \quad (2')$$

алмаштириш татбиқ этилади, чунки $\sin^2 x$ ва $\cos^2 x$ лар $\operatorname{tg} x$ билан рационал ифодаланади:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin^2 x &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Бундай алмаштиришдан кейин биз рационал функциянинг интегралини ҳосил қиламиз.

2-мисол. Ушбу

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални $\int R(\cos x) \sin x dx$ курилишга келтириш осон. Ҳақиқатан,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx.$$

$\cos x = z$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $\sin x dx = -dz$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - z^2}{2 + z} (-dz) = \int \frac{z^2 - 1}{z + 2} dz = \\ &= \int \left(z - 2 + \frac{3}{z + 2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \ln(z + 2) + C = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

3-мисол. $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечнш. $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \int \frac{dt}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

5) Энди $\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишдаги яна бир интегрални, чунончи интеграл остида $\sin^m x \cos^n x dx$ кўпайтма турган интегрални қараймиз (бунда m ва n бутун сонлар). Бунда уч ҳолни қараймиз:

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралда m ва n дан камда биттаси тоқ сон. Аниқлик учун n т қ сон деб фараз қиламиз.
 $n = 2p + 1$ деб олиб, интегрални алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx. \end{aligned}$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

Янги ўзгарувчини берилган интегралга қуямиз:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt,$$

бу эса t нинг рационал функциясининг интегралидир.
 4-мисол.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Энди

$\sin x = t, \quad \cos x dx = dx$ билан белгилаб, қуйдагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралда m ва n — манфий бўлмаган жуфт сон. $m = 2p, n = 2q$ деб фараз қиламиз. Тригонометриядан маълум формулаларни ёзамиз:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \quad (3)$$

Буларни берилган интегралга қуямиз:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Даражага кўтариб, қавсларни очиб, $\cos 2x$ нинг жуфт ва тоқ даражаларини ўз ичига олган ҳадларни ҳосил қиламиз. Тоқ даражали ҳадлар, а) ҳолда кўрсатилгандек, интегралланади. Даражаларнинг жуфт кўрсаткичларини (3) формулалар

бўйича яна пасайтирамиз. Даража кўрсаткичларини пасайтиришни осон интегралладиган $\int \cos kx dx$ кўринишдаги ҳадлар ҳосил бўлгунча шундай давом эттирамиз.

5- мисол.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ = \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

в) Агар иккала даража кўрсаткичи ҳам жуфт бўлиб, улардан камида биттаси манфий бўлса, юқорида баён қилинган усул мақсадга олиб келмайди. Бунда $\operatorname{tg} x = t$ (ёки $\operatorname{ctg} x = t$) алмаштиришни бажариш лозим бўлади.

6- мисол.

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^5 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 dx.$$

$\operatorname{tg} x = t$ деб оламиз; у ҳолда: $x = \arctg t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, мана буни ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) Энди

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx$$

кўринишдаги интегралларни қараймиз. Булар қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади*) ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

*) Бу формулаларни ушбу усул билан келтириб чиқариш осон:

$$\cos (m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx, \\ \cos (m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб ва иккига бўлиб, юқорида келтирилган учта формуладан биринчисини ҳосил қиламиз. Ҳадлаб айириб ва иккига бўлиб, учинчи формулани ҳосил қиламиз. Агар шунга ўхшаш формулалар $\sin (m+n)x$ ва $\sin (m-n)x$ функциялар учун ҳам ёзилса, сўнгра улар ҳадлаб қўшилса, иккинчи формула ҳам юқоридаги каби келиб чиқади.

Буларни интегралга қўйиб, интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx = \\ &= \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C.\end{aligned}$$

Қолган икки интеграл ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади.

7- мисол.

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

13- §. Баъзи бир иррационал функцияларни тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида интеграллаш

X боб 11- параграфда қаралган

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx \quad (1)$$

интегралга қайтамиз, бу ерда $a \neq 0$ ва $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ ($a = 0$ бўлган ҳолда интеграл 10- § II кўринишга эга бўлади, $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ бўлганда $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ бўлади ва $a > 0$ бўлса, биз рационал функция билан иш кўрамыз, $a < 0$ бўлганда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ функция x нинг ҳеч бир қийматида аниқланмаган). Бу интегрални олдинги параграфда қаралган

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) \, dz \quad (2)$$

кўринишдаги интегралга алмаштириш методини кўрсатамиз. Илдиз остидаги учҳадни ўзгартириб ёзамиз:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}).$$

$x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$ фараз қилиб, ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + (c - \frac{b^2}{4a})}.$$

Мумкин бўлган барча ҳолларни қараймиз:

1. $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ бўлсин, $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$ бўлади.

2. $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2.$$

Демак,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

3. $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ бўлсин, у ҳолда $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ белгилашларни киритамиз. Демак,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}.$$

4. $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ифо-
да x нинг барча қийматларида комплекс сондир.

Шундай қилиб, (1) интеграл қуйидаги интеграллар типла-
рининг бирига келтирилади:

$$\text{I. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt. \quad (3.1)$$

$$\text{II. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt. \quad (3.2)$$

$$\text{III. } \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt. \quad (3.3)$$

(3.1) интеграл $t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$

алмаштириш ёрдами билан (2) кўринишдаги интегралга кел-
тирилади. (3.2) интеграл $t = \frac{n}{m} \sec z$ алмаштириш ёрдами би-

лан (2) кўринишга келтирилади. (3.3) интеграл $t = \frac{n}{m} \sin t$
алмаштириш ёрдами билан (2) кўринишга келтирилади.

Мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Ечиш. Бу интеграл III типдаги интегралдир. $x = a \sin z$ алмаштиришни
бажарамиз, бу ҳолда

$$dx = a \cos z \, dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} =$$

*) $\sqrt{1 - \sin^2 z} = |\cos z|$; биз аниқлик учун фақат $|\cos z| = \cos z$ ҳол ус-
тида тўхталамиз.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \\
 &= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.
 \end{aligned}$$

14- §. Интеграллари элементар функциялар билан ифодаланмайдиган функциялар ҳақида

Х бобнинг 1- параграфида биз (a, b) интервалда узлуксиз бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция бу интервалда бошланғич функцияга эга бўлишини, яъни $F'(x) = f(x)$ тенгликни қаноатлантирувчи $F(x)$ функция мавжуд эканини (исботсиз) айтиб ўтган эдик. Аммо ҳар қандай бошланғич функция, ҳатто бу мавжуд бўлса ҳам, элементар функциялар билан чекли кўринишда ифодаланавермайди.

Қуйидаги

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

интеграллар билан ифодаланган ва бошқа кўпгина бошланғич функцияларни элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайди.

Бунга ўхшаш ҳолларнинг ҳаммасида бошланғич функция чекли сондаги элементар функцияларнинг комбинациясигиз келтирилмайдиган бирор янги функциядан иборат бўлиши равшан.

Масалан, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$ бошланғич функциялардан $x=0$ шартда нолга айланадиганлари *Лаплас функцияси* дейилади ва $\Phi(x)$ билан белгиланади. Шундай қилиб, агар $\Phi(0) = 0$ бўлса,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_1.$$

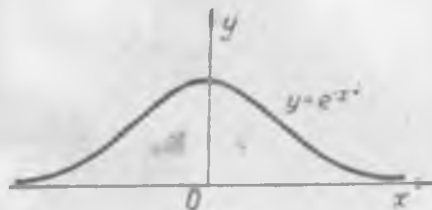
Бу функция яхши ўрганилган. x нинг турли қийматлари учун бу функция қийматларининг мукамал жадваллари тузилган. Бу жадвалларнинг қандай тузилишини биз XVI боб (II том) 21- параграфда кураимиз. Интеграл остидаги $y = e^{-x^2}$ функция ва $y = \Phi(x)$ Лаплас функциясининг графиги 208 ва 209- расмларда тасвирланган. Бошланғич

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C \quad (k < 1)$$

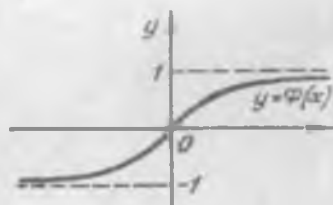
Функциялардан $x=0$ бўлганда нолга айланадигани „эллиптик интеграл“ деб аталади ва $E(x)$ билан белгиланади, агар $E(0)=0$ бўлса,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C_2.$$

x нинг турли қийматлари учун бу функция қийматларининг жадвали ҳам тузилган.



208- расм.



209- расм.

Х бобга машқлар

1. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг: 1. $\int x^5 dx$. Жав. $\frac{x^6}{6} + C$. 2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$. Жав. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. 3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. Жав. $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$. 4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}}$ Жав. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. 5. $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$. Жав. $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Жав. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. 7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$. Жав. $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

- Ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш: 8. $\int e^{5x} dx$. Жав. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$. 9. $\int \cos 5x dx$. Жав. $\frac{\sin 5x}{5} + C$. 10. $\int \sin ax dx$. Жав. $-\frac{\cos ax}{a} + C$. 11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Жав. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. 12. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. Жав. $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + C$. 13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. Жав. $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. 14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. Жав. $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$. 15. $\int \frac{dx}{1-x}$. Жав. $-\ln |1-x| + C$. 16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. Жав. $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$. 17. $\int \operatorname{tg} 2x dx$. Жав. $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$. 18. $\int \operatorname{ctg} (5x-7) dx$. Жав. $\frac{1}{5} \ln |\sin (5x-7)| + C$.

19. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y} \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{1}{3} \ln |\cos 3y| + C.$ 20. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx \cdot \mathcal{Kas.} 3 \ln \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C.$ 21. $\int \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + C.$ 22. $\int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx \cdot \mathcal{Kas.} \ln |\sin e^x| + C.$ 23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg} \frac{S}{4} \right) dS \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{1}{4} \ln |\cos 4S| - 4 \ln \left| \sin \frac{S}{4} \right| + C.$ 24. $\int \sin^3 x \cos x dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\sin^3 x}{3} + C.$ 25. $\int \cos^3 x \sin x dx \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{\cos^4 x}{4} + C.$ 26. $\int \sqrt{x^2+1} x dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C.$ 27. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3}} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C.$ 28. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^3+1}} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C.$ 29. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{1}{\sin x} + C.$ 30. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2 \cos^2 x} + C.$ 31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^3 x} dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$ 32. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C.$ 33. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} \cdot \mathcal{Kas.} 2 \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C.$ 34. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C.$ 35. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}} \cdot \mathcal{Kas.} \sqrt{2 \sin x + 1} + C.$ 36. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos 2x)^2} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C.$ 37. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot \mathcal{Kas.} 2 \sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$ 38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + C.$ 39. $\int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3 \sin 2x)^2} \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{1}{12(2 + 3 \sin 2x)^2} + C.$ 40. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C.$ 41. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\ln^3 x}{3} + C.$ 42. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$ 43. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx}{1+x^2} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$ 44. $\int \frac{\operatorname{arc} \cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx \cdot \mathcal{Kas.} - \frac{\operatorname{arc} \cos^3 x}{3} + C.$ 45. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x dx}{1+x^2} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg}^2 x}{2} + C.$ 46. $\int \frac{x dx}{x^2+1} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$ 47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C.$ 48. $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3} \cdot \mathcal{Kas.} \frac{1}{2} \ln(2 \sin x + 3) + C.$ 49. $\int \frac{dx}{x \ln x} \cdot \mathcal{Kas.} \ln |\ln x| + C.$ 50. $\int 2x(x^2+1)^4 dx \cdot \mathcal{Kas.} \frac{(x^2+1)^5}{5} + C.$

51. $\int \lg^4 x dx$. Жас. $\frac{\lg^3 x}{3} - \lg x + x + C$. 52. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$. Жас. $\ln |\arctg x| + C$. 53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \lg x + 1)}$. Жас. $\frac{1}{3} \ln |3 \lg x + 1| + C$. 54. $\int \frac{\lg^2 x}{\cos^2 x} dx$. Жас. $\frac{\lg^4 x}{4} + C$. 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. Жас. $\ln |\arcsin x| + C$. 56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x} dx$. Жас. $\frac{1}{6} \ln |2+3 \sin 2x| + C$. 57. $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$. Жас. $\sin(\ln x) + C$. 58. $\int \cos(a+bx) dx$. Жас. $\frac{1}{b} \sin(a+bx) + C$. 59. $\int e^{2x} dx$. Жас. $\frac{1}{2} e^{2x} + C$. 60. $\int e^{\frac{x}{3}} dx$. Жас. $3e^{\frac{x}{3}} + C$. 61. $\int e^{\sin x} \cos x dx$. Жас. $e^{\sin x} + C$. 62. $\int a^{x^2} x dx$. Жас. $\frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + C$. 63. $\int e^{\frac{x}{a}} dx$. Жас. $ae^{\frac{x}{a}} + C$. 64. $\int (e^{2x})^2 dx$. Жас. $\frac{1}{4} e^{4x} + C$. 65. $\int 3^x e^x dx$. Жас. $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$. 66. $\int e^{-3x} dx$. Жас. $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$. 67. $\int (e^{2x} + a^{2x}) dx$. Жас. $\frac{1}{5} \left(e^{2x} + \frac{a^{2x}}{\ln a} + C \right)$. 68. $\int e^{x^2+4x+3} \times$
 $\times (x+2) dx$. Жас. $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$. 69. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Жас. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + C$. 70. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$. Жас. $\frac{1}{4} \ln(3+4e^x) + C$. 71. $\int \frac{e^{2x} dx}{2+e^{2x}}$. Жас. $\frac{1}{2} \ln(2+e^{2x}) + C$. 72. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} x) + C$. 73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3} x) + C$. 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. Жас. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$. 75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Жас. $\arcsin \frac{x}{3} + C$. 76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$. Жас. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$. 77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. Жас. $\frac{1}{6} \arctg \frac{3x}{2} + C$. 78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. Жас. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + C$. 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. Жас. $\ln |x+\sqrt{x^2+9}| + C$. 80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$. Жас. $\frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}| + C$. 81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$. Жас. $\frac{1}{a} \ln |ax + \sqrt{b^2 + a^2 x^2}| + C$.

82. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2}$. Жас. $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax - c}{ax + c} \right| + C$. 83. $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^5}$. Жас. $\frac{1}{6\sqrt{5}} \times$
 $\times \ln \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$. 84. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. Жас. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$. 85. $\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$.
Жас. $\frac{1}{2a^4} \arctg \frac{x^2}{a^2} + C$. 86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. Жас. $\arcsin e^x + C$. 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$.
Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + C$. 88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$. Жас. $\frac{1}{a} \arctg \left(\frac{\sin x}{a} \right) +$
 $+ C$. 89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$. Жас. $\arcsin(\ln x) + C$. 90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. Жас.
 $-\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1 - x^2} + C$. 91. $\int \frac{x - \arctg x}{1 + x^2} dx$. Жас. $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) -$
 $-\frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C$. 92. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$. Жас. $\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + C$.
93. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Жас. $\frac{4}{3} \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + C$. 94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.
Жас. $4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$. 95. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$. Жас. $\arctg e^x + C$. 96. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x}}$.
Жас. $3 \sqrt[3]{\sin x} + C$. 97. $\int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \sin 2x dx$. Жас. $-\frac{2}{9} \sqrt{(1 + 3 \cos^2 x)^3} +$
 $+ C$. 98. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$. Жас. $-2 \sqrt{1 + \cos^2 x} + C$. 99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.
Жас. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$. 100. $\int \frac{\sqrt[3]{\lg^2 x}}{\cos^3 x} dx$. Жас. $\frac{3}{5} \sqrt[3]{\lg^5 x} + C$.
101. $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \lg x \right) + C$.
 $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ кўринишдаги интеграллар: 102. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.
Жас. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x + 1}{2} + C$. 103. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{3x - 1}{\sqrt{11}} + C$.
104. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x + 3 - \sqrt{5}}{2x + 3 + \sqrt{5}} \right| + C$. 105. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$.
Жас. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 5}{x - 1} \right| + C$. 106. $\int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1}$. Жас. $\arctg(2z - 1) + C$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$. 108. $\int \frac{(6x-7) dx}{3x^2 - 7x + 11}$.
 Жас. $\ln |3x^2 - 7x + 11| + C$. 109. $\int \frac{(3x-2) dx}{5x^2 - 3x + 2}$. Жас. $\frac{3}{10} \ln(5x^2 - 3x + 2) -$
 $-\frac{11}{5\sqrt{31}} \arctg \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$. 110. $\int \frac{3x-1}{x^2 - x + 1} dx$. Жас. $\frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) +$
 $+\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. 111. $\int \frac{7x+1}{6x^2 + x - 1} dx$. Жас. $\frac{2}{3} \ln(3x-1) +$
 $+\frac{1}{2} \ln(2x+1) + C$. 112. $\int \frac{2x-1}{5x^2 - x + 2} dx$. Жас. $\frac{1}{5} \ln(5x^2 - x + 2) -$
 $-\frac{8}{5\sqrt{39}} \arctg \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$. 113. $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$. Жас. $x^3 - \frac{x^2}{2} +$
 $+\frac{1}{4} \ln |2x^2 - x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C$. 114. $\int \frac{dx}{2\cos^3 x + \sin x \cos x + \sin^3 x}$.
 Жас. $\frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C$.

$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ кўринишдаги интеграллар:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. Жас. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$. 116. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.
 Жас. $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C$. 117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. Жас. $\ln |S +$
 $+a+\sqrt{2aS+S^2}| + C$. 118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C$.
 119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}| + C$.
 120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. Жас. $\arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{17}} + C$. 121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$.
 Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln |10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}| + C$. 122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.
 Жас. $2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$. 123. $\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Жас. $\frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} +$
 $+\frac{5}{4} \ln |2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}| + C$. 124. $\int \frac{(x-3) dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$.

- $\text{Жас. } -\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2} + C. \quad 125. \quad \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}. \quad \text{Жас.}$
 $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4} \arcsin \frac{2x-1}{2} + C. \quad 126. \quad \int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx.$
 $\text{Жас. } \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x} + \frac{23}{4\sqrt{2}} \ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)}) + C.$
 II. Булакланган интеграллаш: $127. \quad \int xe^x dx. \quad \text{Жас. } e^x(x-1) + C.$
 $128. \quad \int x \ln x dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C. \quad 129. \quad \int x \sin x dx. \quad \text{Жас. } \sin x -$
 $-x \cos x + C. \quad 130. \quad \int \ln x dx. \quad \text{Жас. } x(\ln x - 1) + C. \quad 131. \quad \int \arcsin x dx. \quad \text{Жас.}$
 $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad 132. \quad \int \ln(1-x) dx. \quad \text{Жас. } -x - (1-x) \ln(1-x) + C.$
 $133. \quad \int x^n \ln x dx. \quad \text{Жас. } \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \quad 134. \quad \int x \arctg x dx. \quad \text{Жас.}$
 $\frac{1}{2}[(x^2+1) \arctg x - x] + C. \quad 135. \quad \int x \arcsin x dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{4}[(2x^2-1) \arcsin x +$
 $+ x\sqrt{1-x^2}] + C. \quad 136. \quad \int \ln(x^2+1) dx. \quad \text{Жас. } x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + C.$
 $137. \quad \int \arctg \sqrt{x} dx. \quad \text{Жас. } (x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C. \quad 138. \quad \int \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
 $\text{Жас. } 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C. \quad 139. \quad \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$
 $\text{Жас. } x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + C. \quad 140. \quad \int x \cos^2 x dx. \quad \text{Жас. } \frac{x^2}{4} +$
 $+\frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C. \quad 141. \quad \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad \text{Жас. } x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$
 $142. \quad \int \frac{x \arctg x}{(x^2+1)^2} dx. \quad \text{Жас. } \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctg x - \frac{1}{2} \frac{\arctg x}{1+x^2} + C.$
 $143. \quad \int x \arctg \sqrt{x^2-1} dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{2}x^2 \arctg \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C.$
 $144. \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx. \quad \text{Жас. } \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \arcsin x + C.$
 $145. \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \quad \text{Жас. } x \ln|x + \sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1+x^2} + C.$

$$146. \int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \text{Жас. } \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C.$$

Қуйдаги масалаларга тригонометрик алмаштириш татбиқ этилсин:

$$147. \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3} dx. \text{Жас. } -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} - \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad 148. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Жас. } 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4-x^2} + C. \quad 149. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Жас. } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \quad 150. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx. \text{Жас. } \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}. \text{Жас. } \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Рационал касрларни интеграллаш:

$$152. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{(x-2)^2}{x-1} \right| + C. \quad 153. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}. \text{Жас. } \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^2}{5(x+1)} \right| + C.$$

$$154. \int \frac{x^6+x^4-8}{x^3-4x} dx. \text{Жас. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^2}{(x+2)^3} \right| + C.$$

$$155. \int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}. \text{Жас. } \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^3 + \frac{16}{3} \ln |x+2| + C.$$

$$156. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}. \text{Жас. } \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \quad 157. \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^3} + C. \quad 158. \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx. \text{Жас. } \frac{4x+3}{2(x+1)^2} +$$

$$+ \ln \frac{x^2}{(x+1)^3} + C. \quad 159. \int \frac{x^3 dx}{(x+2)^3(x+4)^2}. \text{Жас. } -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} +$$

$$+ \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + C. \quad 160. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}. \text{Жас. } \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} + C.$$

$$161. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx. \text{Жас. } \ln \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.$$

$$162. \int \frac{x^4-6}{x^4+6x^2+8} dx. \text{Жас. } \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$163. \int \frac{dx}{x^3+1}. \text{Жас. } \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$164. \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx. \text{Жас. } \ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C. \quad 165. \int \frac{4 dx}{x^4+1}$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C. \quad 166. \int \frac{x^2}{x^3 - 1} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{3} [x^3 + \ln(x^3 - 1)] + C. \quad 167. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx. \quad \text{Жас. } \frac{2 - x}{4(x^2 + 2)} +$$

$$+ \ln(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 168. \int \frac{(4x^2 - 8x) dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Жас. } \frac{3x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} + \ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} + \arctg x + C. \quad 169. \int \frac{dx}{(x^2 - x)(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| - \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{2x - 1}{3(x^2 - x + 1)} + C.$$

Иррационал функцияларни интеграллаш:

$$170. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1)] + C. \quad 171. \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx. \quad \text{Жас. } \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} -$$

$$- \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C. \quad 172. \int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{6\sqrt{x^7} + \sqrt[4]{x^6}} dx. \quad \text{Жас. } - \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} +$$

$$+ 2 \ln x - 24 \ln(\sqrt[12]{x} + 1) + C. \quad 173. \int \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 4 \sqrt{x} - 6 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[5]{x} - 9 \ln(\sqrt[5]{x} + 1) +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln(\sqrt[3]{x} + 1) + 3 \arctg \sqrt[5]{x} + C. \quad 174. \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}} \right| - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C. \quad 175. \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Жас. } 2 \arctg \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} \right| + C. \quad 176. \int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^6} + \sqrt[14]{x^{16}}} dx.$$

$$\text{Жас. } 14 \left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2} \sqrt[7]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4} \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5} \sqrt[14]{x^5} \right] + C. \quad 177. \int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}} dx.$$

$$\text{Жас. } \sqrt{3x^2 - 7x - 6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2} \right) + C.$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \text{ кўринишдаги интеграллар: } 178. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}}.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C. \quad 179. \int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Жас. } -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C. \quad 180. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}. \\
 & \text{Жас. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C. \quad 181. \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx. \quad \text{Жас. } \sqrt{x^2+2x} + \\
 & + \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C. \quad 182. \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}. \quad \text{Жас. } \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C. \\
 & 183. \int \sqrt{2x-x^2} dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C. \\
 & 184. \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}. \quad \text{Жас. } \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C. \\
 & 185. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}. \quad \text{Жас. } \ln \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C. \\
 & 186. \int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx. \quad \text{Жас. } -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C. \quad 187. \int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx. \\
 & \text{Жас. } \ln \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C. \quad 188. \int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx. \\
 & \text{Жас. } -\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C.
 \end{aligned}$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаш;

$$\begin{aligned}
 & 189. \int \sin^3 x dx. \\
 & \text{Жас. } \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C. \quad 190. \int \sin^5 x dx. \quad \text{Жас. } -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \\
 & - \frac{\cos^5 x}{5} + C. \quad 191. \int \cos^4 x \sin^3 x dx. \quad \text{Жас. } -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \\
 & 192. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx. \quad \text{Жас. } \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C. \quad 193. \int \cos^2 x dx. \\
 & \text{Жас. } \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad 194. \int \sin^4 x dx. \quad \text{Жас. } \frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \\
 & 195. \int \cos^6 x dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C. \\
 & 196. \int \sin^4 x \cos^4 x dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C. \quad 197. \int \operatorname{tg}^3 x dx. \\
 & \text{Жас. } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \quad 198. \int \operatorname{ctg}^5 x dx. \quad \text{Жас. } -\frac{7}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \\
 & + \ln |\sin x| + C. \quad 199. \int \operatorname{ctg}^3 x dx. \quad \text{Жас. } -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C.
 \end{aligned}$$

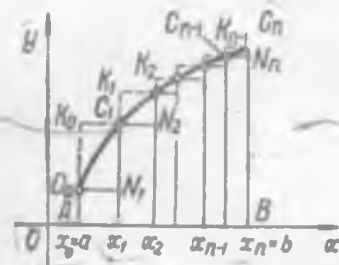
200. $\int \sec^3 x dx$. Жас. $\frac{\lg^2 x}{7} + \frac{3 \lg^4 x}{5} + \lg^3 x + \lg x + C$. 201. $\int \lg^4 x \sec^4 x dx$.
 Жас. $\frac{\lg^7 x}{7} + \frac{\lg^5 x}{5} + C$. 202. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ Жас. $\lg x + \frac{1}{8} \lg^3 x + C$. 203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.
 Жас. $C - \operatorname{cosec} x$. 204. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. Жас. $\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + 3(\cos^{-\frac{1}{3}} x) + C$.
 205. $\int \sin x \sin 3x dx$. Жас. $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. 206. $\int \cos 4x \cos 7x dx$.
 Жас. $\frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C$. 207. $\int \cos 2x \sin 4x dx$. Жас. $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.
 208. $\int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x dx$. Жас. $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C$. 209. $\int \frac{dx}{4-5 \sin x}$.
 Жас. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\lg \frac{x}{2} - 2}{2 \lg \frac{x}{2} - 1} \right| + C$. 210. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$. Жас. $\frac{1}{2} \arctg \left| 2 \lg \frac{x}{2} \right| + C$.
 211. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$. Жас. $\frac{2}{1+\lg \frac{x}{2}} + x + C$. 212. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$. Жас. $x - \lg \frac{x}{2} + C$.
 213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Жас. $\arctg (2 \sin^2 x - 1) + C$. 214. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$.
 Жас. $\frac{1}{2} \lg \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \lg^3 \frac{x}{2} + C$. 215. $\int \frac{dx}{\sin^3 x + \lg^3 x}$. Жас. $-\frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} x + \right.$
 $\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\lg x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$. 216. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^3 x} dx$. Жас. $\sqrt{2} \arctg \left(\frac{\lg x}{\sqrt{2}} \right) -$
 $-x + C$.

ХІ БОБ

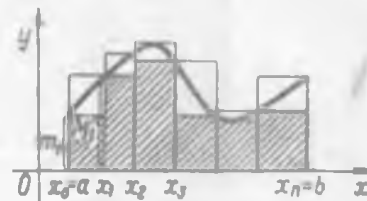
АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1- §. Масаланинг қўйилиши. Қўйи ва юқори интеграл йиғиндилар

Аниқ интеграл математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, математика, физика, механика ва бошқа фанларда текширишнинг энг кучли қуроли ҳисобланади. Эгри чизиклар билан чегараланган юзларни, эгри чизик ёйлари узунликларини, ҳажмларни, ишларни, тезликларни, йўлларни, инерция моментларини ва ҳоказоларни ҳисоблаш ишларининг ҳаммаси аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.



210- расм.



211- расм.

$[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин (210 ва 211- расмлар). Унинг бу кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини m ва M билан белгилаймиз. $[a, b]$ кесмани

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

нуқталар билан n та қисмга ажратамиз, бунда

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

деб ҳисоблаймиз ва

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

деб фараз қиламиз. Сунгра $f(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини

$[x_0, x_1]$ кесмада m_1 ва M_1 билан,

$[x_1, x_2]$ кесмада m_2 ва M_2 билан,

.....

$[x_{n-1}, x_n]$ кесмада m_n ва M_n билан

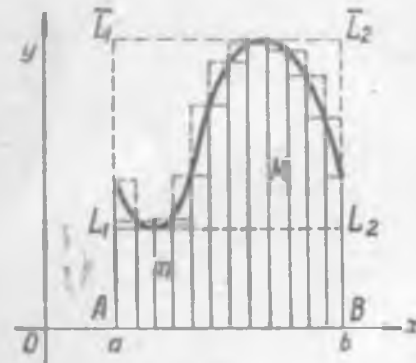
белгилаймиз. Энди

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (1)$$

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad (2)$$

йиғиндиларни тузамиз. $\underline{s}_n$ қуйи интеграл йиғинди деб, $\bar{s}_n$ эса юқори интеграл йиғинди деб аталади.

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда қуйи интеграл йиғиндининг сон қиймати „ички чизилган зинасимон“ шаклнинг



212- расм.

$AC_0N_1C_1N_2 \dots C_{n-1}N_nBA$ синиқ чизик билан чегараланган юзига тенг бўлиб, юқори интеграл йиғиндининг сон қиймати эса, „ташқи чизилган зинасимон“

$AK_0C_1K_1 \dots C_{n-1}K_nC_nBA$ шаклнинг синиқ чизик билан чегараланган юзига тенг.

Юқори ва қуйи интеграл йиғиндиларнинг баъзи хоссаларини кўрсатиб ўтамиз.

а) Ҳар қандай i ($i=1, 2, \dots, n$) учун $m_i \leq M_i$ бўлгани сабабли, (1) ва (2) формулага мувофиқ

$$\underline{s}_n \leq \bar{s}_n, \quad (3)$$

($f(x) = \text{const}$ бўлган ҳолдагина тенглик белгиси бўлади).

б) $m_1 \geq m, m_2 \geq m, \dots, m_n \geq m$ бўлгани учун (бунда m $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик қиймати),

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots + m \Delta x_n = m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m (b - a).$$

Шундай қилиб,

$$\underline{s}_n \geq m (b - a).$$

в) $M_1 \leq M, M_2 \leq M, \dots, M_n \leq M$

(4)

бўлгани сабабли (M бунда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати),

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots + M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b-a).$$

Шундай қилиб,

$$\bar{s}_n \leq M(b-a). \quad (5)$$

Ҳосил қилинган тенгсизликларни биргаликда ёзамиз:

$$m(b-a) \leq s_n \leq \bar{s}_n \leq M(b-a). \quad (6)$$

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, бу тенгсизликлар содда геометрик маънога эга (212- расм), чунки $m(b-a)$ ва $M(b-a)$ кўпайтмаларнинг сон қийматлари мос тартибда „ички чизилган“ AL_1L_2B тўғри тўртбурчак юзига ва „ташқи чизилган“ $A\bar{L}_1\bar{L}_2B$ тўғри тўртбурчак юзига тенг.

2- §. Аниқ интеграл. Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақида теорема

Ўтган параграфдаги масалани текширишни давом эттираемиз. Энди

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

кесмаларнинг ҳар бирида биттадан нуқта оламиз. Бу нуқталарни $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ билан белгилаймиз (213- расм),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Бу нуқталарнинг ҳар бирида функциянинг $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ қийматларини ҳисоблаймиз.

$$s_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

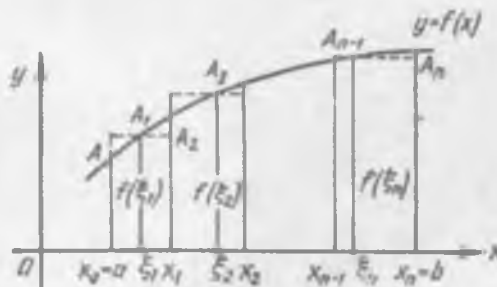
Айгиндини тузамиз. Бу айгинди $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг интеграл айгиндиси деб аталади. $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага тегишли бўлган ҳар қандай ξ_i учун

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

ва барча $\Delta x_i > 0$ бўлганда

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$

27°



213- расм.

демак,

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

ёкин

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n. \quad (2)$$

$f(x) \geq 0$ бўлганда (2) тенгсизликлар геометрик томондан юзи s_n га тенг бўлган шакл „ички чизилган“ ва „ташқи чизилган“ синиқ чизиқ орасида ётувчи синиқ чизиқ билан чегараланган деган маънони билдиради.

s_n йиғиндининг қиймати $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратиш усулига ҳамда ҳосил қилинган кесмачалар ичида ξ_i нуқталарни танлаб олишга боғлиқ.

Энди тах $[x_{i-1}, x_i]$ билан $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ кесмачалар ичидан энг узунини белгилаймиз. $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратишдаги турли усуллардан тах $[x_{i-1}, x_i]$ нолга интиладиган ҳолини қараймиз. Бу ҳолда ажратиладиган кесмачаларнинг сони n чексизликка интилиши равшан. Ҳар бир ажратиш учун ξ_i нинг мос қийматини танлаб олиб,

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

интеграл йиғиндини тузиш мумкин.

$n \rightarrow \infty$ да бўлакчаларга ажратишнинг тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ бўладиган бирор кетма-кетлигини қараймиз. Ҳар бир бўлакчада ξ_i қийматини танлаб оламиз. s_n^* интеграл йиғиндиларнинг бу кетма-кетлиги*) бирор лимитга интилади деб фараз қиламиз, яъни

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = s. \quad (4)$$

Энди ушбу таърифни беришимиз мумкин:

1 - таъриф. Агар $[a, b]$ кесма тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ шартни қаноатлантирадиган ҳар қандай бўлакчаларга ажратилганда ва $[x_{i-1}, x_i]$ кесмада ξ_i нуқтани истаганча танлаб олганда

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5)$$

*) Бу ҳолда йиғинди тартибланган ўзгарувчи миқдордан иборат.

интеграл йиғинди биргина s лимитга интилса, у ҳолда бу лимит $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг *аниқ интеграли* деб аталади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

билан белгиланади.

Шундай қилиб таърифга кўра

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

a сон интегралнинг *қуйи чегараси*, b сон интегралнинг *юқори чегараси* дейилади. $[a, b]$ кесма *интеграллаш кесмаси*, x эса *интеграллаш ўзгарувчиси* дейилади.

2- таъриф. Агар $f(x)$ функция учун (6) лимит мавжуд бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи функция* дейилади.

Қуйи интеграл йиғинди s_n ва юқори интеграл йиғинди $\bar{s}_n$ (5) интеграл йиғиндининг хусусий ҳолларидан нобрат эканлигини кўрамиз, шунинг учун агар $f(x)$ интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда қуйи ва юқори интеграл йиғиндилар бир хил s лимитга интилади ва шунинг учун (6) тенгликка асосан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (7)$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (7')$$

Агар интеграл остидаги $y = f(x)$ функциянинг графинини чизсак, $f(x) \geq 0$ бўлган ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx$$

интегралнинг сон қиймати кўрсатилган эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган *эгри чизиқли трапеция юзига* тенг бўлади (214- расм).

Шунинг учун, агар $y = f(x)$ эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган эгри чизиқ-

ли трапеция юзини ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда бу юз Q ушбу интеграл

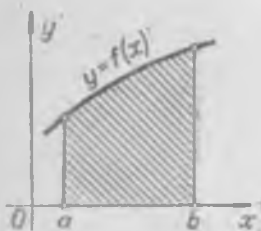
$$Q = \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

ёрдамида ҳисобланади.

Қуйидаги муҳим теоремани исбот қиламиз.

1- теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу кесмада интегралланувчидир.

Исбот. $[a, b]$ кесмани яна $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], [x_{n-1}, x_n]$ кесмачаларга ажратамиз. Қуйи ва юқори интеграл йиғиндиларни тузамиз:



214- расм.

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad (9)$$

$$\bar{s}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad (10)$$

Бундан кейинги ишлар учун юқори ва қуйи интеграл йиғиндиларнинг баъзи бир хоссаларини аниқлаб ўтамиз.

1- хосса. $[a, b]$ кесмани булакчаларга ажратишда янги бўлиниш нуқталарини орттириш йули билан кесмачалар сонини орттирсак, қуйи интеграл йиғинди фақат ўсиши, юқори интеграл йиғинди эса фақат камайиши мумкин.

Исбот. $[a, b]$ кесма янги нуқталар орттириш йули билан n' кесмачаларга ажратилган бўлсин ($n' > n$). Агар бирор $[x_{k-1}, x_k]$ кесмача бир неча кесмачаларга, масалан, p_k кесмачаларга ажратилган бўлса, у ҳолда янги қуйи $s_{n'}$ интеграл йиғиндида $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачага p_k қўшилувчилар тўғри келади, бунини биз $\underline{s}_{p_k}$ билан белгилаймиз. $\underline{s}_{p_k}$ йиғиндида бу кесмага битта $m_k(x_k - x_{k-1})$ қўшилувчи тўғри келади. Лекин $\underline{s}_{p_k}^*$ йиғинди ҳамда $m_k(x_k - x_{k-1})$ миқдор учун 1- § даги (4) тенгсизликка ўхшаш тенгсизлик ўринли. Биз бундай ёзишимиз мумкин.

$$\underline{s}_{p_k}^* \geq m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ҳар бир кесма учун мос тенгсизликни ёзиб ҳамда чап ва ўнг томонларни қўшиб

$$\underline{s}_{p_k} \geq \underline{s}_n \quad (n' > n) \quad (11)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. 1- хосса исботланди.

2- хосса. Қуйи интеграл йиғинди (9) ва юқори интеграл йиғинди (10) янги бўлиниш нуқталар орттириш йули

билан кесмачалар сони чексиз орттирилганда қандайдир s ва $\bar{s}$ лимитларга интилади.

Исбот. 1- § даги (6) тенгсизликка асосланиб ушбунни ёзишимиз мумкин:

$$s_n \leq M(b-a),$$

яъни n ҳар қандай бўлганда ҳам s_n чегараланган. 1- хоссага асосан n ўсиб борганда s_n монотон ўсиб боради. Демак, лимитлар ҳақидаги 7- теоремага (II боб, 5- § га қ.) асосан бу ўзгаришчи миқдор лимитга эга; уни s билан белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s. \quad (12)$$

$\bar{s}_n$ нинг қуйидан чегараланганлиги ва монотон камайиши шунга ўхшаш аниқланади. Демак, $\bar{s}_n$ лимитга эга, уни биз $\bar{s}$ билан белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \bar{s}.$$

3- хосса. Агар $f(x)$ функция ёпиқ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда 2- хоссада аниқланган s ва $\bar{s}$ лимитлар тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ шартида бир-бирига тенг.

Бу умумий лимитни s билан белгилаймиз:

$$s = \bar{s} = s. \quad (13)$$

Исбот. Юқори ва қуйи интеграл йиғиндилар айирмасини қараймиз:

$$\begin{aligned} \bar{s}_n - s_n &= (M_1 - m_1) \Delta x_1 + (M_2 - m_2) \Delta x_2 + \dots + \\ &+ (M_i - m_i) \Delta x_i + \dots + (M_n - m_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Бу бўлақларга ажратишдаги $(M_i - m_i)$ айирмаларнинг энг каттасини ϵ_n билан белгилаймиз:

$$\epsilon_n = \max (M_i - m_i)$$

Агар $f(x)$ ёпиқ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмани ҳар қандай усул билан бўлақларга ажратганимизда фақат тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ бўлса, $\epsilon_n \rightarrow 0$, яъни

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n = 0 \quad (15)$$

бўлишини исботлаш мумкин (бунинг устида тўхталмаймиз). Ёпиқ интервалда узлуксиз функциянинг (15) тенглик билан ифодаланган хоссаси функциянинг текис узлуксизлиги дейилади.

Шундай қилиб, биз ушбу теоремадан фойдаланамиз: *ёпиқ кесмада узлуксиз бўлган функция шу кесмада текис узлуксиздир.*

Энди (14) тенгликка қайтамыз. Унг томондаги ҳар бир $(M_i - m_i)$ айирмани ундан кичик бўлмаган ϵ_n миқдор билан алмаштирамиз. Ушбу тенгсизлиكنи ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \bar{s}_n - \underline{s}_n &\leq \epsilon_n \Delta x_1 + \epsilon_n \Delta x_2 + \dots + \epsilon_n \Delta x_n = \\ &= \epsilon_n (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \epsilon_n (b - a). \end{aligned}$$

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_n - \underline{s}_n) &\leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n (b - a) = \\ &= (b - a) \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

яъни

$$\lim \bar{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \quad (17)$$

ёки $s = \bar{s} = \underline{s}$, исбот ана шу.

4- хосса. $\underline{s}_{n_1}$ ва $\bar{s}_{n_2}$ лар $[a, b]$ кесманинг мос тартибда n_1 ва n_2 кесмачаларга бўлинишига мос қуйи ва юқори интеграл йиғиндилар бўлсин. У ҳолда n_1 ва n_2 нинг ҳар қандай қийматларида ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (18)$$

Исбот. $[a, b]$ кесмани $n_3 = n_1 + n_2$ кесмачаларга ажратиш-ни қарайлик, бундай ажратишда бўлиниш нуқталари биринчи ва иккинчи бўлиниш нуқталарининг ўзлари бўлади.

1- § даги (3) тенгсизликка асосан:

$$\underline{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_3}. \quad (19)$$

1- хоссага асосан:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \underline{s}_{n_3}. \quad (20)$$

$$\bar{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (21)$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади.

(20) ва (21) муносабатлардан фойдаланиб, (19) тенгсизлиكنи кенгайтириш мумкин:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \underline{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_2}$$

ёки

$$\underline{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}.$$

Шуни исбот қилиш керак эдн.

5- хосса. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз булса, у ҳолда $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратишнинг ҳар қандай кетма-кетлигини янги бўлиниш нуқталари орттириш йўли билан тузиш шарт эмас, агар фақат $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ булса, қуйи интеграл йиғинди $\underline{s}_n^*$ ва юқори интеграл йиғинди $\bar{s}_m$ (3- хоссада аниқланган) $\bar{s}$ лимитга интилади.

Исбот. 2- хоссада аниқланган юқори интеграл йиғинди $\bar{s}_n$ кетма-кетлигининг кетма-кет бўлинишларини қараймиз. n ва m нинг ҳар қандай қийматларида ((18) тенгсизликка асосан) бундай ёза оламиз:

$$\underline{s}_m^* \leq \bar{s}_n.$$

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, (15) га асосан қуйидагини ёза оламиз:

$$\underline{s}_m^* \leq \bar{s}.$$

Шунга ўхшаш усул билан $s \leq \bar{s}_m^*$ эканини исбот қиламиз. Шундай қилиб,

$$\underline{s}_m^* \leq s \leq \bar{s}_m^*$$

ёки

$$s - \underline{s}_m^* \geq 0, \quad \bar{s}_m^* - s \geq 0. \quad (22)$$

Айирманинг лимитини қараймиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - \underline{s}_m^*).$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз булгани учун (3- хоссани исбот қилганимизга ўхшаш ушбуни исбот қиламиз ((16) тенгликка қаранг):

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Кейинги муносабатни қуйидагича ёзамиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [(\bar{s}_m^* - s) + (s - \underline{s}_m^*)] = 0.$$

(22) га асосан квадрат қавсдаги айирмаларнинг ҳар бири манфий эмас. Демак,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - s) = 0, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [s - \underline{s}_m^*] = 0.$$

Натижада ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \bar{s}_n = s, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \underline{s}_n = s. \quad (23)$$

Шуни исбот қилиш керак эди.

Энди юқоридаги теоремани исботлаш ва ифодалаш мумкин. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлсин.

Интеграл йиғиндилар $s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ нинг ихтиёрий кетма-кетлигини қараймиз. Бу кетма-кетликда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ бўлсин, ξ_i эса $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий нуқтаси.

Бўлинишларнинг шу кетма-кетлиги учун юқори ва қуйи $\bar{s}_n$ ва $\underline{s}_n$ интеграл йиғиндиларнинг мос кетма-кетлигини қараймиз. Ҳар бир бўлиниш учун (2) муносабатлар ўринли бўлади:

$$\underline{s}_n < s_n < \bar{s}_n.$$

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб ва (23) тенгликлардан ҳамда II боб 5- § даги 4- теоремадан фойдаланиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n = s,$$

бунда s — учинчи хоссада аниқланган лимит.

Бу лимит, юқорида айтилганидек, аниқ интеграл $\int_a^b f(x) dx$ деб айтилади. Шундай қилиб, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (24)$$

Узилувчан функциялар орасида интегралланувчи функциялар ҳам, интегралланмовчи функциялар ҳам бўлишини қайд қилиб ўтаемиз.

1- изоҳ. Аниқ интеграл фақат $f(x)$ функциянинг турига ва интеграллаш чегараларига боғлиқ, аммо ҳар қандай ҳарф билан белгиланиши мумкин бўлган интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ эмас. Шунинг учун аниқ интеграл қийматини ўзгартирмаган ҳолда x ҳарфини ҳар қандай бошқа ҳарф билан алмаштириш мумкин; масалан:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dx = \dots = \int_a^b f(z) dz.$$

2- изоҳ. Биз $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интеграл тушунчасини берганимизда $a < b$ деб фараз қилдик. Агар $b < a$ бўлса, таърифга кўра қуйидагини қабул қиламиз:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (25)$$

Масалан,

$$\int_1^0 x^2 dx = - \int_0^1 x^2 dx.$$

3- изоҳ. Агар $a = b$ бўлса, таърифга кўра, ҳар қандай $f(x)$ функция учун ушбу тенглик ўринали деб фараз қиламиз:

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (26)$$

Бу геометрик нуқтан назардан ҳам табиий. Ҳақиқатан, бу ҳолда эгри чизиқли трапеция асосининг узунлиги нолга тенг ва демак, трапециянинг юзи ҳам нолга тенг.

1- мисол. $\int_a^b kx dx$ ($b > 0$) интеграл ҳисоблансин

Ечиш. Геометрик томондан масала $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган трапециянинг Q юзини ҳисоблашга эквивалентдир (215- расм).

Интеграл ишораси остидаги $y = kx$ узлуксиз функция. Демак, аниқ интегрални ҳисоблаш учун биз, юқорида кўрсатиб ўтилганидек, $[a, b]$ кесмани ихтиёрий усул билан бўлакларга ажратиш ва оралиқдаги ξ_n нуқталарни ҳам ихтиёрий танлаб олишга ҳаққимиз. Аниқ интегралнинг ҳисобланган натижаси интеграл йиғиндини тузиш усулига боғлиқ эмас, лекин бўлиниш қадами нолга интилиши керак.

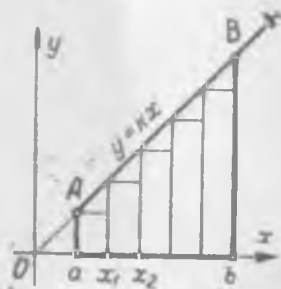
$[a, b]$ кесмани n та тенг кесмачаларга бўламиз.

Ҳар бир қисмий кесмачанинг узунлиги $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; ана шу соннинг ўзи бўлиниш қадами бўлади. Бўлиниш нуқталари қуйидаги координаталарга эга бўлади:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, \quad x_n = a + n\Delta x.$$

ξ_n нуқта учун ҳар бир кесмачанинг чап учини оламиз:

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta x, \quad \xi_3 = a + 2\Delta x, \dots, \quad \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$



215- расм.

(1) интеграл йиғиндиси тузамиз. $f(\xi_i) = k\xi_i$ бўлгани учун:

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1 \Delta x + k\xi_2 \Delta x + \dots + k\xi_n \Delta x = \\ &= k a \Delta x + [k(a + \Delta x)] \Delta x + \dots + [k(a + (n-1)\Delta x)] \Delta x = \\ &= k[a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \dots + [a + (n-1)\Delta x]] \Delta x = \\ &= k[na + [\Delta x + 2\Delta x + \dots + (n-1)\Delta x]] \Delta x = \\ &= k[na + [1 + 2 + \dots + (n-1)] \Delta x] \Delta x, \end{aligned}$$

бунда

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Энди

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(арифметик прогрессия йиғиндиси) эканини ҳисобга олиб,

$$s_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \frac{b-a}{2} \right] (b-a)$$

натижани ҳосил қиламиз. Аммо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

бўлгани учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_a^b kx \, dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Элементар геометрия методи билан $ABba$ юзни (215- раси) ҳисоблаш осон.

Аввалги натижанинг ўзи чиқади.

$$2\text{- мисол. } \int_a^b x^2 \, dx \text{ ҳисоблансин.}$$

Ечиш. Берилган интеграл $y = x^2$ парабола, $x = b$ ордината ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Q юзига тенг (216- раси).

$[0, b]$ кесмани



216- раси.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \dots, \quad x_n = b = n\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b}{n}$$

нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз. ξ_i нуқта учун ҳар бир кесманинг ўнг учини оламиз. Интеграл йиғиндиси тузамиз:

$$\begin{aligned} s_n &= x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x = \\ &= [(\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x] = (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2], \end{aligned}$$

маълумки,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

шунинг учун

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

3- мисол. $\int_a^b m dx$ ҳисоблансин ($m = \text{const}$).

Ечиш.

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \\ &= m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a). \end{aligned}$$

Бунда $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ йигинди $[a, b]$ кесма бўлинганда ҳосил бўлган кесмачалар узунликларининг йигиндиси. Бўлиш қайси усулда бажарилган бўлмасин, бу йигинди $b - a$ кесма узунлигига тенг бўлади.

4- мисол. $\int_a^b e^x dx$ ҳисоблансин.

Ечиш. $[a, b]$ кесмани яна n та тенг кесмачаларга бўламиз:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Ў нукта учун кесмаларнинг чап учларидаги нуқталарни оламиз. Интеграл йигиндини тузамиз:

$$\begin{aligned} s_n &= e^a \Delta x + e^{a+\Delta x} \Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x} \Delta x = \\ &= e^a (1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) \Delta x. \end{aligned}$$

Қавс ичидаги ифода махражи $e^{\Delta x}$ ва биринчи ҳади 1 бўлган геометрик прогрессиядир, шунинг учун

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Сўнгра

$$n\Delta x = b - a, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

(Лопиталь қондасига мувофиқ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$.)

Шундай қилиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = e^a (e^b - e^a - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

яъни

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

4- изоҳ. Юқорида қаралган мисоллар аниқ интегралларни интеграл йиғиндиларнинг лимити деб қараб, бевосита ҳисоблаш катта қийинчиликлар билан боғлиқ эканини кўрсатади. Интеграл остидаги функциялар жуда содда (kx , x^2 , e^x) ҳолларда ҳам бу усул анча оғир ҳисоблашларни талаб этади. Мураккаброқ функциялардан аниқ интеграллар топиш яна ҳам қийинроқ ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун аниқ интегралларни ҳисоблашнинг қулай методини топиш масаласи ўз-ўзидан келиб чиқади. Ньютон ва Лейбниц кашф этган бу метод интеграллаш билан дифференциаллаш орасида мавжуд муносабатдан фойдаланади. Бу бобнинг келгуси параграфлари шу методни баён қилишга ва асослашга бағишланади.

3- §. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари

1- хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисининг ташқарисига чиқариш мумкин: агар $A = \text{const}$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Исбот.

$$\begin{aligned} \int_a^b A f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= A \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

2- хосса. *Бир неча функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқ интегралли қўшилувчилар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг. Масалан, иккита қўшилувчи бўлган ҳолда:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (2)$$

Исбот.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)] \Delta x_i = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i \right] = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i = \\
 &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.
 \end{aligned}$$

Қушилувчилар сони ҳар қанча бўлганда ҳам, шунга ўхшаш исботланади. 1 ва 2- хоссалар фақат $a < b$ бўлган ҳол учунгина исботланган бўлса ҳам, $a \geq b$ бўлган ҳолда ҳам ўз кучини сақлайди.

Аммо қуйидаги хосса фақат $a \geq b$ бўлган ҳолдагина тўғри бўлади.

3- хосса. Агар $[a, b]$ ($a < b$) кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $f(x) \leq \varphi(x)$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3)$$

Исбот. Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta x_i.
 \end{aligned}$$

Бунда ҳар бир айирма нолдан катта:

$$\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0, \quad \Delta x_i \geq 0.$$

Демак, йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси манфий эмас, демак, бутун йиғинди манфий эмас ва унинг limiti ҳам манфий эмас, яъни

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx \geq 0$$

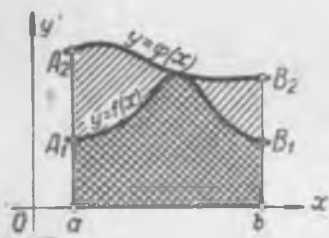
ёки

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

бундан (3) тенгсизлик келиб чиқади.

Агар $f(x) > 0$ ва $\varphi(x) > 0$ бўлса, у ҳолда баён қилинган хосса геометрик усулда кўргазмални тасвир этилади (217- расм).

$\varphi(x) \geq f(x)$ бўлгани учун aA_1B_1b эгри чизиқли трапециянинг юзи aA_2B_2b эгри чизиқли трапециянинг юзидан катта эмас.



217- расм.

4- хосса. Агар m ва M миқдорлар $f(x)$ функциянинг, $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари бўлиб, $a \leq b$ бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (4)$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

(3) хоссага асосан:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx. \quad (4')$$

Аммо

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a)$$

(XI боб 2- параграфдаги 3- мисолга қаралсин). Бу ифодаларни (4') тенгсизликка қўйсак, (4) тенгсизлик ҳосил бўлади.

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда бу хоссани геометрик усулда тасвирлаш осон бўлади (218- расм). Эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг юзи aA_1B_1b ҳамда aA_2B_2b тўғри тўртбурчаклар юзлари орасида ётади.

5- хосса. (Ўрта қиймат ҳақида теорема.) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу кесмада шундай ξ нуқта топилдики, бу нуқта учун

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi) \quad (5)$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. Аниқлик учун $a < b$ бўлган ҳолни қараймиз. Агар m ва M миқдорлар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ҳамда энг катта қийматлари бўлса, у ҳолда (4) формулага мувофиқ

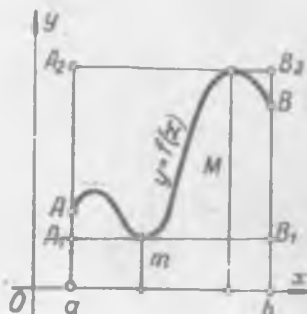
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Бундан

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu, \text{ бунда } m \leq \mu \leq M.$$

$f(x)$ узлуксиз функция бўлгани учун у m ва M орасидаги ҳамма оралиқ қийматларни қабул қилади. Демак, бирор ξ ($a < \xi < b$) қийматда $\mu = f(\xi)$ бўлади, яъни

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a).$$



218- расм.

6- хосса. Агар қуйидаги уч интегралнинг ҳар бири мавжуд бўлса, у ҳолда ҳар қандай учта a, b, c сон учун

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Дастлаб $a < c < b$ деб фараз қиламиз ва $f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмада интеграл йиғиндини тузамиз. Интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ кесмани бўлақларга бўлиш усулига боғлиқ бўлмагани учун $[a, b]$ кесмани майда кесмачаларга шундай бўламызкин, c нуқта бўлиниш нуқтаси бўлсин. Сўнгра

$[a, b]$ кесмага мос $\sum_a^b$ интеграл йиғиндининг иккита: $[a, c]$ кесма-

га мос $\sum_a^c$ йиғиндига ва $[c, b]$ кесмага мос $\sum_c^b$ йиғиндига ажратамиз.

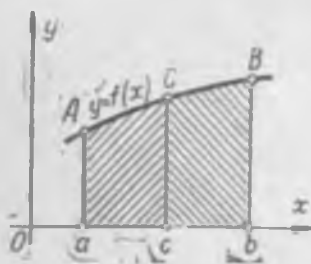
У вақтда

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, (6) муносабатни ҳосил қиламиз.

Агар $a < b < c$ бўлса, исботланган тенгликка асосан:



219- расм.

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx;$$

яъни 2- параграфдаги (4) формулага мувофиқ

$$\int_a^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$$

бўлади, шунинг учун

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

a, b, c нуқталарнинг бошқача ҳар қандай жойланишида ҳам бу хосса шундай исботланади.

219- расмда $f(x) > 0$ ва $a < c < b$ бўлган ҳол учун 6- хоссанинг геометрик тасвири берилган: $aABb$ трапециянинг юзи $aACc$ ва $cCBb$ трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг.

4- §. Аниқ интегрални ҳисоблаш.

Ньютон — Лейбниц формуласи

Ушбу

$$\int_a^b f(x) dx$$

аниқ интегралнинг қуйи чегараси ўзгармас a , юқори чегараси b ўзгарувчи бўлсин. Бу ҳолда интегралнинг қиймати ҳам ўзгарувчи бўлади, яъни интеграл юқори чегарасининг функцияси бўлади.

Одатдаги белгилашлар билан иш кўриш учун юқори чегарани x билан белгилаймиз, интеграллаш ўзгарувчиси билан уни аралаштириб юбормаслик мақсадида, бу ўзгарувчини t орқали белгилаймиз. (Интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишидан интегралнинг қиймати ўзгармайди.) Натижада

$$\int_a^x f(t) dt$$

интегрални ҳосил қиламиз, a ўзгармас сон бўлганда бу интеграл юқори x чегарасининг функцияси бўлади. Бу функцияни $\Phi(x)$ билан белгилаймиз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

Агар $f(t)$ манфий бўлмаган функция бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функциянинг сон қиймати эгри чизиқли $aAXx$ трапециянинг юзига тенг (220- расм). Бу юз x ўзгариши билан ўзгариб бориши ўз-ўзидан равшан.

$\Phi(x)$ функциядан x га нисбатан ҳосила оламиз, яъни (1) аниқ интегралдан юқори чегарасига нисбатан ҳосила оламиз. 1- теорема. Агар $f(x)$ узлуксиз функция ва $\Phi(x) =$

$= \int_a^x f(t) dt$ бўлса, у ҳолда

$$\Phi'(x) = f(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бошқача айтганда, аниқ интегралдан юқори чегараси бўйича олинган ҳосила интеграл остидаги функцияга тенг бўлиб, унда интеграллаш ўзгарувчиси ўрнига юқори чегаранинг қиймати қўйилган (бунда интеграл остидаги функция узлуксиз бўлиши шарт).

Исбот. x аргументга мусбат ёки манфий Δx орттирма берамиз; у ҳолда (аниқ интегралнинг 6- хоссасини эътиборга олиб) мана буни ҳосил қиламиз:

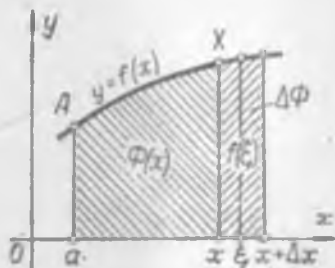
$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

$\Phi(x)$ функциянинг орттирмаси

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt,$$

яъни

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$



220- расм.

Охирги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз (аниқ интегралнинг 5- хоссаси):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

бунда ξ нинг қиймати x билан $x + \Delta x$ орасида ётади.

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини топамиз:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Демак,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Аммо $\Delta x \rightarrow 0$ бўлганда $\xi \rightarrow x$ бўлгани учун, бу ҳолда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

лекин $f(x)$ функция узлуксиз бўлгани сабабли,

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Шундай қилиб, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема исботланди.

Бу теорема геометрик томондан жуда содда тасвирланади (220- расм): $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ орттирма бир асоси Δx бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлиб, $\Phi'(x) = f(x)$ ҳосила эса x кесманинг узунлигига тенг.

Изоҳ. Исбот этилган теоремадан, хусусий ҳолда, *ҳар қандай узлуксиз функция бошланғич функцияга эга деган натижа келиб чиқади*. Ҳақиқатан ҳам, агар $f(t)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, XI бобнинг 2- параграфида кўрсатил-

ганидек, $\int_a^x f(t) dt$ аниқ интеграл мавжуд, яъни

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функция мавжуд. Аммо юқоридан исбот этилганига кўра, бу $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясидир.

2- теорема. Агар $F(x)$ узлуксиз $f(x)$ функциянинг би-
рор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

формула уринлидир. Бу формула *Ньютон — Лейбниц формуласи* дейилади*).

Исбот. $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлсин, 1- теоремага мувофиқ $\int_a^x f(t) dt$ функция ҳам $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Аммо берилган функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функцияси бир-биридан ўзгармас C^* қўшилувчи билан фарқ қилади. Демак, бундай ёзиш мумкин:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C^*. \quad (3)$$

Бу тенглик C^* мос равишда танлаб олинганда x нинг ҳамма қийматлари учун тўғри, яъни айнtimerдир.

Ўзгармас C^* сонни сақлаш учун бу айнtimerда $x = a$ деб оламиз; у ҳолда:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C^*$$

ёки

$$0 = F(a) + C^*,$$

бундан

$$C^* = -F(a).$$

Демак

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Бунда $x = b$ деб олсак. Ньютон — Лейбниц формуласи ҳосил бўлади:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

ёки интеграллаш ўзгарувчисини x билан алмаштирсак:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

* (2) формуланинг бундай аталиши шартли эканини қайд қилиб ўтиш зарур, чунки Ньютонда ҳам, Лейбницада ҳам шундай формула бу сўзнинг том маъносида бўлган эмас. Лекин муҳими шуки, Ньютон билан Лейбниц аниқ интегралларни ҳисоблаш учун қоида тузишга имкон берувчи дифференциаллаш, интеграллаш орасидаги боғланишни биринчи марта аниқлаганлар.

$F(b) - F(a)$ айирма бошланғич $F(x)$ функциянинг танлаб олиншига боғлиқ эмаслигини эслатиб ўтамиз. Чунки ҳамма бошланғич функцияларнинг бир-биридан фарқи ўзгармас миқдордир, улар айланиш вақтида йўқолиб кетади.

Агар

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

белгилашни*) киритсак, у ҳолда (2) формулани

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Интеграл остидаги функциянинг бошланғич функцияси маълум бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбниц формуласи аниқ интегралларни ҳисоблаш учун амалда қулай методни беради. Фақат шу формуланинг кашф этилишигина аниқ интегрални ҳозирги замонда математик анализда тутган ўрнини олишга имкон берган. Аниқ интегрални интеграл йиғиндининг лимити каби ҳисоблашга ўхшаш процесс билан қадим замонлардаёқ (Архимед замонасида) таниш бўлсалар-да, бу усулни интеграл йиғиндини бевосита ҳисоблаш мумкин бўлган энг содда ҳолларгагина татбиқ қилиш билан чегараланиб қолганлар. Ньютон — Лейбниц формуласи аниқ интегралнинг татбиқи соҳасини анча кенгайтирди; чунки математика бу формула ёрдамда хусусий кўринишдаги турли масалаларни ечиш учун умумий усулга эга бўлди; шунинг учун, у аниқ интегрални техникага, астрономияга ва ҳоказога татбиқ қилиш доирасини анча кенгайтирди.

1 - мисол.

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2 - мисол.

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

* $\Big|_a^b$ ифода икки марта ўрнига қўйиш белгиси деб аталади. Адабиётда бу ифода икки хил ёзилади;

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ёки

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Биз бундан кейин иккала хил ёзилишни ҳам ишлатамиз.

3- мисол.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

4- мисол.

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

5- мисол.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

6- мисол.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

5- §. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш

Теорема. $\int_a^b f(x) dx$ интеграл берилган бўлсин, бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция.

$x = \varphi(t)$ формула бўйича янги t ўзгарувчини киритамиз.

Агар

1) $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b,$ 2) $\varphi(t)$ ва $\varphi'(t)$ лар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциялар бўлса,3) $f[\varphi(t)]$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ҳанда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1)$$

бўлади.

Исбот. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (3)$$

Кейинги тенгликнинг туғрилиги унинг иккала томонини t бўйича дифференциаллаш билан текширилади. (Бу тенглик Хоббнинг 4- параграфидagi (2) формуладан ҳам келиб чиқади.) (2) тенгликдан:

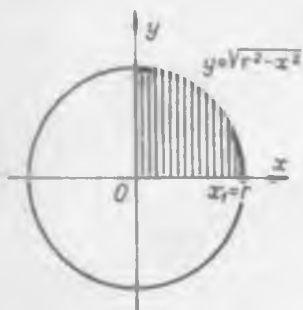
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ёқани келиб чиқади. (3) тенгликдан:

$$\begin{aligned} \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt &= F[\varphi(t)] \Big|_a^b = \\ &= F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

ёқани чиқади. Кейинги ифодаларнинг ўнг томонлари бир-бирига тенг бўлгани учун, чап томонлари ҳам тенг.

Изоҳ. Аниқ интегрални (1) формула бўйича ҳисоблаганда эски ўзгарувчига қайтишнинг зарурати йўқлигини эслатиб ўтамиз. Агар (1) тенгликдаги аниқ интеграллардан иккинчисини ҳисобласак, бирор сон ҳосил бўлади; биринчи интеграл ҳам худди шу сонга тенг.



221- расм.

Мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Еч и ш. Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt.$$

Интеграллашнинг янги чегараларини аниқлаймиз:

$$x = 0 \text{ бўлганда } t = 0,$$

$$x = r \text{ бўлганда } t = \frac{\pi}{2}.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

Ҳисобланган интеграл геометрик томондан $x^2 + y^2 = r^2$ айлана билан чегараланган донра юзининг $\frac{1}{4}$ қисмини тасвирлайди (221- расм).

6- §. Булаклаб интеграллаш

u ва v функциялар x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин. Бу ҳолда:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Бу айниятнинг иккала томонини a дан b гача чегараларда интеграллаймиз:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx. \quad (1)$$

Лекин $\int (uv)' dx = uv + C$ бўлгани сабабли $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$;

Демак, (1) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv \quad \text{ёки} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_u \underbrace{d \cos x}_{dv} = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Танлаб олинган белгилашлар ёрдамида кейинги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Бундан

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (2)$$

тенгликни топамиз. Шундай усул билан

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

тенгликни топамиз. Шунинг учун

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

Шунга ўхшаш алмаштиришларни татбиқ этишни давом эттириб, n нинг жуфт ёки тоқлигига қараб, I_0 ёки I_1 га бориб етамиз.

Икки ҳолни кўриб чиқамиз:

1) n — жуфт сон, $n = 2m$.

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$$

2) n — тоқ сон, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

бирок

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

булганидан

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Бу формулалардан $\frac{\pi}{2}$ сонини чексиз кўпайтма шаклида ифода этупчи *Валлис формуласи* келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, кейинги икки тенгликдан ҳадлаб бўлиш йўли билан

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \quad (3)$$

тенгликни топамиз. Энди

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$$

эканини исботлаймиз.

x нинг $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги барча қийматлари учун

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$$

тенгликлар ўринли. 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача чегараларда интеграллаб,

$$I_{2m-1} > I_{2m} > I_{2m+1}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} > \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} > 1. \quad (4)$$

(2) тенгликдан:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Демак,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

(4) тенгсизликдан

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

3) формулада лимитга ўтиб *Валлис формуласини* ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Бу формулани яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

7- §. Хосмас интеграллар

1. Чегаралари чексиз бўлган интеграллар. $f(x)$ функция x нинг $a \leq x < \infty$ оралиқдаги барча қийматларида аниқланган ва узлуксиз функция бўлсин. Ушбу

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

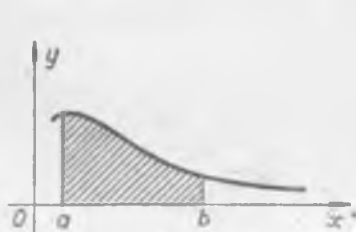
интегрални қарайлик. Бу интеграл ҳар қандай $b > a$ учун маънога эга. b ўзгарганда интеграл ҳам ўзгаради. Бу интеграл b нинг узлуксиз функциясидир. (XI боб 4- параграфга қаранг.)

$b \rightarrow +\infty$ бўлганда бу интегралнинг қандай ўзгаришини қараймиз (222- расм).

Таъриф. Агар чекли лимит

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty]$ интервалдаги *хосмас интеграли* дейилади ва



222- расм.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

символ билан белгиланади. Демак, таърифга кура:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Бу ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл *мавжуд* ёки *яқинлашувчи* дейилади.

Агарда $b \rightarrow +\infty$ да $\int_a^b f(x) dx$ нинг чекли лимити мавжуд бўлмаса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл *мавжуд эмас* ёки *узоқлашувчи* дейилади.

$f(x) > 0$ бўлган ҳолда хосмас интегралнинг геометрик маъносини тушунтириш қийин эмас: агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл $y = f(x)$ чизиқ абсциссалар ўқи ва $x = a$, $x = b$ ординаталар билан чегараланган соҳа юзини ифодаласа, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл $y = f(x)$, $x = a$, чизиқлар ва абсциссалар ўқи орасида қолган чегараланмаган (чексиз) соҳа юзини ифодалайди деб ҳисоблаш табийдир.

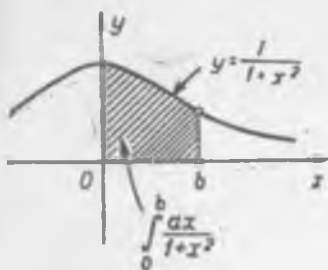
Бошқа чексиз интерваллар учун ҳам хосмас интеграллар шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(x) dx,$$

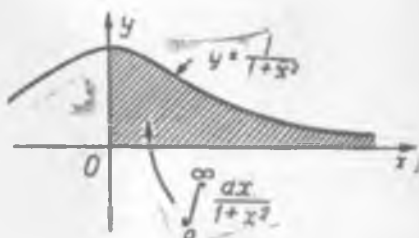
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Кейинги тенгликни бундай тушуниш лозим: агар ўнг томондаги хосмас интегралларнинг ҳар бири мавжуд бўлса, таърифга кура чап томондаги интеграл ҳам мавжуд (яқинлашувчи) бўлади.

1- мисол. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл ҳисоблансин (223- ва 224- расмларга қаралсин).



223- расм.



224- расм.

Е чи ш. Хосмас интегралнинг таърифига мувофиқ қуйдагини топамиз.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Қаралган интеграл 224- расмда штрихланган чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалайди.

2- мисол. α нинг қандай қийматларида (225- расм)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

интеграл яқинлашувчи ва қандай қийматларида узоклашувчи бўлиши текширилсин.

Е чи ш. $\alpha \neq 1$ бўлганда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Бўлаган учун

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$



225- расм.

Демак, қаралабтган интегралга нисбатан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин;

агар $\alpha > 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, яъни интеграл яқинлашувчи;

агар $\alpha < 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$, яъни интеграл узоқлашувчи.

$\alpha = 1$ бўлганда, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \infty$ интеграл узоқлашувчи.

3- м и с о л. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл ҳисоблансин.

Е ч и ш.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Иккинчи интеграл $\frac{\pi}{2}$ га тенг (1- мисолга қаранг). Биринчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = \frac{\pi}{2}.$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Кўп ҳолларда берилган интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини билиш ва унинг қийматини баҳолаш етарли бўлади. Бунинг учун қуйидаги теоремалар фойдали бўлиши мумкин; биз уларни исботсиз келтирамиз, аммо уларнинг татбиқига мисоллар келтирамиз.

1- теорема. Агар барча $x (x \geq a)$ лар учун

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

тенгсизликлар бажарилса ва $\int_a^{+\infty} \varphi(x)$ яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, бунда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

4- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

интеграл яқинлашувчи экани текширилсин.

Ечиш. $1 < x$ бўлганда

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Сўнгра:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Демак, интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

яқинлашувчи бўлиб, унинг қиймати 1 дан кичикдир.

2- теорема. Агар барча $x (x \geq a)$ лар учун

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$$

тенгсизликлар бажарилса, шу билан бирга $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ узоқ-

лашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

5- мисол.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$$

интегралнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

эканлигига эътибор берамиз. Аммо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty.$$

Демак, берилган интеграл ҳам узоқлашувчи.

Кейинги икки теоремада манфий бўлмаган функцияларнинг хосмас интеграллари қаралди. Чексиз интервалда ишорасини ўзгартирадиган функциялар учун қуйидаги теорема ўрилли бўлади.

3-теорема. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бу ҳолда кейинги интеграл абсолют яқинлашувчи интеграл дейилади.

Б-мисол.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$$

интегралнинг яқинлашиши текширилсин.

Еч иш. Бу ерда интеграл остидаги функция ишораси ўзгарувчи функциядир.

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| < \left| \frac{1}{x^3} \right|$$

бўлиши маълум. Аммо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Демак, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ интеграл яқинлашувчидир. Бундан берилган интегралнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

2. Узлукли функциянинг интегралли. $f(x)$ функция $a \leq x < c$ бўлганда аниқланган ва узлуксиз бўлсин, $x = c$ бўлганда эса f аниқланмаган, ёки узилишга дучор бўлсин. Бу ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ интегрални интеграл йиғиндининг limiti деб қараш мумкин эмас, чунки $f(x)$ функция $[a, c]$ кесмада узлуксиз эмас ва шунинг учун бу лимит мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

с нуқтада узилишга эга бўлган $f(x)$ функция-
нинг $\int_a^c f(x) dx$ интеграли қуйидагича аниқланади:

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx.$$

Агар унғ томонда турган лимит мавжуд бўлса, у ҳолда интеграл *яқинлашувчи хосмас* интеграл дейилади, акс ҳолда интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесманинг чап учида (яъни $x = a$ нуқтада) узиладиган бўлса, у ҳолда таърифга мувофиқ

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx.$$

Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесма нчидаги бирор $x = x_0$ нуқтада узлукли бўлса, тенгликнинг унғ томонидаги хосмас интегралларнинг иккаласи ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx.$$

7-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2 \sqrt{1-x} \Big|_0^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2(\sqrt{1-b} - 1) = 2. \end{aligned}$$

8-мисол. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Интеграллаш кесмаси нчида интеграл остидаги функциянинг узилиш нуқтаси $x = 0$ мавжуд бўлгани учун интегрални икки қўшилувчининг йигиндиси каби тасвирлаш керак:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{a_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{a_2 \rightarrow +0} \int_{a_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Ҳар қайси лимитни алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\lim_{a_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{a_1} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{a_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{a_1} = - \lim_{a_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Демак, $[-1, 0]$ ораликда интеграл узоқлашади:

$$\lim_{a_1 \rightarrow +0} \int_{a_1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{a_1 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{a_1} \right) = \infty.$$

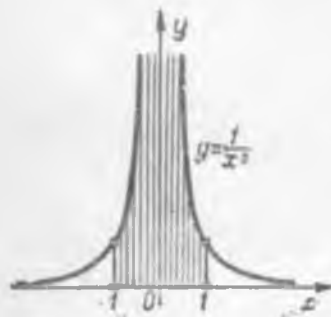
Демак, $[0, 1]$ ораликда интеграл узоқлашади.

Шундай қилиб, берилган интеграл бутун $[-1, 1]$ кесмада узоқлашади.

Агар берилган интегрални интеграл остидаги функциянинг $x = 0$ нуқтадаги узилишига эътибор қилмасдан ҳисоблаганимизда нотўғри натижа ҳосил қилган бўлар эдик. Ҳақиқатан,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

бу эса мумкин эмас (226- расм).



226- расм.

Изоҳ. Агар $[a, b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функция бу кесма ичида чекли сондаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ нуқталарда узилишчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада олинган интеграл қуйидагича аниқланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

бунда тенгликнинг унг томонидаги хосмас интегралларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиши шарт. Агар бу интеграллардан

ҳеч бўлмаганда биттаси узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$

интеграл ҳам узоқлашувчи дейилади.

Узлукли функциялардан олинган хосмас интегралларнинг яқинлашувини аниқлаш ва уларнинг қийматларини баҳолаш учун купинча чегаралари чексиз бўлган интегралларни баҳолагандагига ухшаш теоремалардан фойдаланилади.

I' теорема. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, c]$ кесманинг c нуқтасида узлукли бўлса ва бу кесманинг барча нуқталарида

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$$

тенгсизликлар бажарилиб, $\int_a^c \varphi(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

II' теорема. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, c]$ кес-
манинг с нуқтасида узиловчи бўлса ва бу кесманинг барча
нуқталарида

$$f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$$

тенгсизликлар бажарилса ва $\int_a^c \varphi(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

III' теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесмада ишора ўз-
гартирувчи бўлиб, фақат с нуқтадагина узиловчи бўлса ва
бу функциянинг абсолют қийматида олинган $\int_a^c |f(x)| dx$
хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу функция-
нинг узидан олинган $\int_a^c f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи
бўлади.

Кўпинча хосмас интеграл белгиси остида турган функция
билан таққослаш қулай бўлган функция сифатида $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$

функция олинади. $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^\alpha} dx$ интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқин-
лашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлишини текши-
риш осон.

$\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи эканлигини
текшириб кўриш қийин эмас.

9- м и с о л. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^2}} dx$ интеграл яқинлашувчи бўладими?

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция $[0, 1]$ кесманинг чап учида узилишга
эга. Уни $\frac{1}{\sqrt{x}}$ функция билан таққослаб,

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

эканини биламиз.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$ хосмас интеграл мавжуд. Демак, кичик функциядан олинган хос-

мас интеграл ҳам, яъни $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$ ҳам мавжуддир.

8- §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Х боб охирида ҳар қандай узлуксиз функция учун унинг бошланғич функциясини элементар функциялар орқали ифода-лаб бўлмаслиги кўрсатилган эди. Бу ҳолларда аниқ интегрални Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаш қийин, шунинг учун аниқ интегралларни ҳисоблашда турли тақрибий усул-лар қўлланилади. Ҳозир биз аниқ интегралга йиғиндининг ли-мити деб берилган тушунча асосида тақрибий интеграллашнинг бир неча усулини баён қиламиз.

1. Тўғри тўрт бурчаклар формуласи. $[a, b]$ кес-мада узлуксиз функция $y = f(x)$ берилган. $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш талаб қилинади.

$[a, b]$ кесмани $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ нуқталар билан узунлиги Δx бўлган n та тенг бўлақларга ажратамиз:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Сўнгра $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматларини $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ орқали белгилаймиз, яъни

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1), \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Ушбу йиғиндиларни тузамиз:

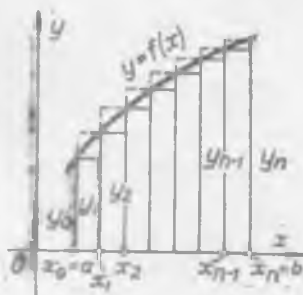
$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x, \\ y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x.$$

Бу йиғиндиларнинг ҳар бири $f(x)$ учун $[a, b]$ кесмада ин-теграл йиғинди бўлади ва шунинг учун $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ифода этади:

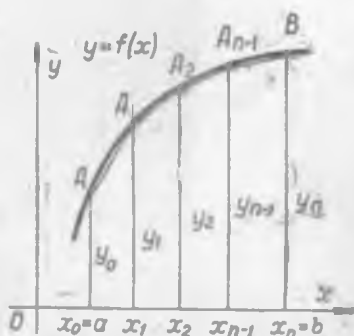
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1')$$

Булар *тўғри тўртбурчаклар* формуласидир. 227-расмдан қуйидагиларни куриш мумкин: агар $f(x)$ мусбат ва ўсувчи функция бўлса, у ҳолда (1) формула „*нчки*“ тўғри тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди, (1') формула эса „*ташқи*“ тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди. Интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи билан ҳисоблашда қилинган хато n сон қанча катта бўлса (яъни бўлиниш қадами $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ қанча кичик бўлса), шунча кичик бўлади.



227- расм.



228- расм.

II. Трапециялар формуласи. Агар берилган $y = f(x)$ эгри чизиқни тўғри тўртбурчаклар формуласида бўлганидек зинапоясимон чизиқ билан алмаштирмасдан, балки *нчки* чизилган синиқ чизиқ билан алмаштирсак, у ҳолда аниқ интегралнинг анча аниқроқ қиймати ҳосил бўлишини кутиш табийдир (228-расм).

Бу ҳолда эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг юзи юқоридан $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ ватарлар билан чегараланган тўғри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Аммо бу трапециялардан биринчисининг юзи $\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x$, иккинчисининг юзи $\frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x$ ва ҳоказо бўлгани сабабли

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x \right)$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

Бу эса *трапециялар формуласидир*.

n сони ихтиёрий танлаб олинади. Бу сон қанча катта бўлса ва демак, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ қадам қанча кичик бўлса, (2) тақрибий тенгликнинг ўнг томонида ёзилган йиғинди шунча катта аниқлик билан интеграл қийматини беради.

III. Парабола лар формуласи (Симпсон формуласи). $[a, b]$ кесмани жуфт сонда $n=2m$ бўлакларга ажратамиз. $[x_0, x_1]$ ва $[x_1, x_2]$ кесмаларга мос ва берилган $y = f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзипи

$$M(x_0, y_0), \quad M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2)$$

учта нуқтадан ўтувчи ва ўқи Оу ўққа параллел бўлган иккинчи даражали парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи билан алмаштирамиз (229-расм). Бундай эгри чизиқли трапецияни *параболик* трапеция деб атаймиз.

Ўқи Оу ўққа параллел бўлган параболанинг тенгламаси

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

куринишда бўлади. A, B ва C коэффициентлар параболанинг берилган уч нуқта орқали ўтиш шартидан бир қийматли равишда аниқланади. Шунга ўхшаган параболаларни кесмаларнинг бошқа жуфтлари учун ҳам ясаймиз. Шундай ясалган параболик трапециялар юзларининг йиғиндиси интегралнинг тақрибий қийматини беради.

Дастлаб битта параболик трапециянинг юзини ҳисоблаймиз.

Лемма. Агар эгри чизиқли трапеция

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

парабола, Ох ўқ ва сралиғи $2h$ га тенг бўлган иккита ордината билан чегараланган бўлса, у ҳолда унинг юзи

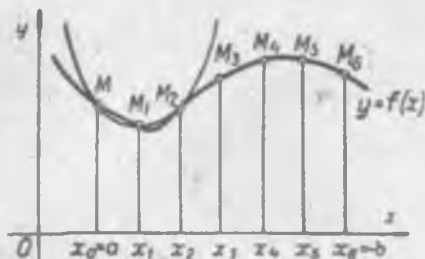
$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \text{ га тенг,} \quad (3)$$

бунда y_0 ва y_2 четдаги ординаталар, y_1 эса эгри чизиқнинг кесма ўртасидаги ординатаси.

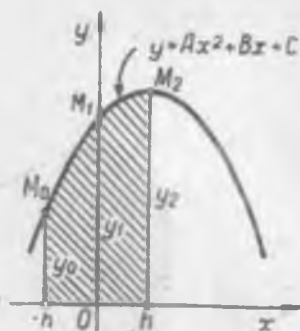
Исбот. Ёрдамчи координаталар системасини 230- расмда кўрсатилгандек жойлаштирамиз.

Параболанинг $y = Ax^2 + Bx + C$ тенгламасидаги коэффциентлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\left. \begin{array}{l} \text{агар } x_0 = -h \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \\ \text{агар } x_1 = 0 \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \\ \text{агар } x_2 = h \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ y_1 = C, \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array} \quad (4)$$



229- расм.



230- расм.

A , B , C коэффицентларни маълум деб ҳисоблаб, параболлик трапециянинг юзини аниқ интеграл ёрдами билан ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h = \\ &= \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C). \end{aligned}$$

Аммо (4) тенгликлардан:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Демак,

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

Биз яна асосий масаламизга қайтамыз (229- расмга қаранг).
(3) формуладан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий тенгликларни ёза оламиз ($h = \Delta x$):

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \end{aligned}$$

Чап ва ўнг томонларни қўшиб, чапда изланаётган интегрални, ўнгда эса унинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots \\ &\dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \end{aligned} \quad (5)$$

ёки

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{6m} \{y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots \\ &\dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\}. \end{aligned}$$

Бу *Симпсон формуласидир*. Бу ерда булиниш нуқталарининг сони $2m$ ихтиёрий, лекин бу сон қанча катта бўлса, (5) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди интеграл қийматини шунча аниқ ифодалайди*).

Мисол. Ушбу

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интеграл тақрибий ҳисоблансин.

*) Интегрални берилган аниқликда ҳисоблаш учун қанча бўлиниш нуқталари олиш кераклигини аниқлашда интегрални тақрибий ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатонини баҳолаш формулаларидан фойдаланиш мумкин. Биз бу ерда бундай баҳолашни келтириб ўтирмаймиз. Китобхон буни анализнинг бирмунча тўлароқ курсларидан, масалан Фихтенгольцнинг „Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси“ китобидан топа олади (II т., IX боб, 5-параграфга қаралсин), „Ўқитувчи“, Тошкент, 1972.

Ечиш. [1, 2] кесмани 10 та тенг бўлакка ажратамиз (231- расм).

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

деб олиб, интеграл остидаги функция қийматлари жадвалини тузамиз:

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$	$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,52632$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,50000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

1. Тўғри тўртбурчакларнинг биринчи (1) формуласини татбиқ этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877.$$

Тўғри тўртбурчакларнинг иккинчи (1') формуласини татбиқ этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

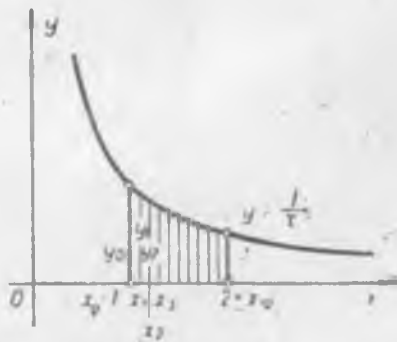
Бу ҳолда «интегралнинг қиймати» биринчи формула ортиги билан, иккинчи формула эса ками билан бериши 231- расмдан бевосита кўриниб турибди.

II. Трапециялар формуласи (2) ни татбиқ этамиз.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left(\frac{1+0,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69377.$$

III. Симпсон формуласи (5) ни татбиқ этамиз:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\approx \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \\ &= \frac{0,1}{3} (1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315. \end{aligned}$$



231- расм.

C_i коэффициентлар мураккаб касрлар билан ифодалангани учун (3) формула узундан-узоқ ва ҳисоблаш учун ноқулайдир.

Чебишев, $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссалар берилмасдан, $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентлар берилган, $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссалар аниқлансин деган тескари масалани қўйди.

C_i коэффициентлар шундай берилиши керакки, (3) формула ҳисоблаш учун иложи борица содда бўлсин. C_i коэффициентларнинг ҳаммаси ўзаро тенг бўлган ҳолдагина шундай бўлади:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n.$$

Агар $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентларнинг умумий қийматини C_n билан белгиласак, у ҳолда (3) формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (5)$$

кўринишни олади. (5) формула умуман тақрибий тенгликни ифодалайди, аммо $f(x)$ даражаси $n-1$ дан ошмаган кўпҳад бўлса, у аниқ тенгликка айланади. Бу ҳол $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ миқдорларни аниқлаш имконини беради.

Интеграллашнинг ҳар қандай оралиғи учун қулай формула ҳосил қилиш мақсадида $[a, b]$ интеграллаш кесмасини $[-1, 1]$ кесмага алмаштирамиз. Бунинг учун

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

деб оламиз; бу ҳолда $t = -1$ бўлганда $x = a$; $t = 1$ бўлганда $x = b$ бўлади.

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt,$$

бунда $\varphi(t)$ билан t нинг интеграл остида турган функцияси белгиланган. Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесмада интеграллаш масаласини ҳар доним бирор бошқа $\varphi(x)$ функцияни $[-1, 1]$ кесмада интеграллаш масаласига келтириш мумкин.

Демак, масала

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (6)$$

формуладаги $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларни шундай танлаб олиш керакки, (6) формула

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (7)$$

кўринишдаги ҳар қандай $f(x)$ функция учун аниқ формула бўлсин. Бунда

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) dx =$$

$$\begin{aligned} \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса, } & \left[2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \right), \right. \\ \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса, } & \left. = 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-2}}{n-1} \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

эканини эслатиб ўтамиз.

Иккинчи томондан, (6) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди (7) га асосан,

$$\begin{aligned} C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots \\ \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})] \quad (9) \end{aligned}$$

га тенг. (8) ва (9) ифодаларни бир-бирига тенглаб, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам ўринли бўлиши керак бўлган тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots \right) = \\ = C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \end{aligned}$$

Тенгликнинг ўнг ва чап томонларидаги $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ларнинг коэффициентларини бир-бирига тенглаймиз:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_n n \quad \text{ёки, } C_n = \frac{2}{n}, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Кейинги n та тенгламадан $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссаларни топамиз. n нинг турли қийматларига доир бу ечилмалар Че-

бишев томонидан топилган. Қуйидаги жадвалда оралиқ нуқталарнинг сони $n=3, 4, 5, 6, 7, 9$ бўлганда Чебишев топган ечимлар келтирилган:

Ординаталар сони n	C_n коэффициент	$x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссаларнинг қийматлари
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Шундай қилиб, $[-1, 1]$ кесмада интегрални тақрибий ҳисоблаш Чебишевнинг қуйидаги формуласи бўйича бажарилди:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

бунда n — жадвалда келтирилган 3, 4, 5, 6, 7 ёки 9 сонлардан бирортаси $x_1, \dots, x_n$ — шу жадвалда берилган сонлар. n га 8 қийматни ёки 9 дан катта қийматни бериб бўлмайди, чунки бу ҳолда (10) тенгламалар системаси мавҳум илдишлар беради.

Берилган интегрални интеграллаш чегаралари a ва b бўлса, у ҳолда Чебишев формуласи

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)]$$

қурилишда бўлади, бунда $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), x_i эса жадвалда кўрсатилган қийматларни олади.

Мисол. $\int_1^2 \frac{dx}{x} (= \ln 2)$ ҳисоблансин.

Ечиш. Дастлаб ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида бу интегрални интеграллаш чегаралари -1 ва $+1$ бўлган янги интегралга алмаштирамиз:

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

У ҳолда

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}$$

$n = 3$ деб олиб, Чебишев формуласига мувофиқ, кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} [f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

Аммо $f(0,707107) = 0,269752$, $f(0) = 0,333333$, $f(-0,707107) = 0,436130$ бўлгани сабабли

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} &= \frac{2}{3} (0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693. \end{aligned}$$

Бу натижани тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича, трапециялар формуласи бўйича ҳамда Симпсон формуласи бўйича (ўтган параграфдаги мисолга қаранг) ҳисобланган натижалар билан таққослаб, биз Чебишев формуласига мувофиқ (учта оралиқ нуқталар билан) ҳосил қилган натижамиз трапециялар формуласи бўйича (тўққизта оралиқ нуқталар билан) ҳосил этилган натижага қараганда интегралнинг ҳақиқий қийматига анча яқин эканини кўрамиз.

Интегралларни тақрибий ҳисоблаш назарияси академик А. Н. Кривов (1863—1945) ишларида ўзининг бундан кейинги ривожини топганлигини қайд этиб ўтамиз.

10- §. Параметрга боғлиқ бўлган интеграллар. Гамма-функция

Параметрга боғлиқ бўлган интегралларни дифференциаллаш.

$$I(a) = \int_a^b f(x, a) dx \quad (1)$$

интеграл берилган бўлсин, бунда интеграл остидаги функция бирор a параметрга боғлиқ. Агар a параметр ўзгарса, у ҳолда аниқ интегралнинг қиймати ҳам ўзгаради. Шундай қилиб, аниқ интеграл a нинг функцияси дир; шунинг учун биз уни $I(a)$ билан белгилашимиз мумкин.

1.

$$c \leq a \leq d \text{ ва } a \leq x \leq b \quad (2)$$

бўлганда $f(x, a)$ ва $f'_a(x, a)$ узлуксиз функциялар деб фараз қиламиз. Интегралдан a параметр бўйича ҳосила топамиз:

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = I'_a(a).$$

Бу ҳосилани топиш учун

$$\begin{aligned} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} &= \frac{1}{\Delta a} \left[\int_a^b f(x, a + \Delta a) dx - \int_a^b f(x, a) dx \right] = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, a + \Delta a) - f(x, a)}{\Delta a} dx \end{aligned}$$

эканини назарга оламиз. Интеграл остидаги функцияга Лагранж теоремасини татбиқ этамиз:

$$\frac{f(x, a + \Delta a) - f(x, a)}{\Delta a} = f'_a(x, a + \theta \Delta a),$$

бунда $0 < \theta < 1$. Аммо $f'_a(x, a)$ ёпиқ (2) соҳада узлуксиз бўлгани сабабли,

$$f'_a(x, a + \theta \Delta a) = f'_a(x, a) + \varepsilon,$$

бунда $x, a, \Delta a$ ларга боғлиқ бўлган ε миқдор $\Delta a \rightarrow 0$ да нолга интилади. Шундай қилиб,

$$\frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = \int_a^b [f'_a(x, a) + \varepsilon] dx = \int_a^b f'_a(x, a) dx + \int_a^b \varepsilon dx.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак*):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(a + \Delta x) - I(a)}{\Delta x} = I'_a(a) = \int_a^b f'_x(x, a) dx$$

ёки

$$\left[\int_a^b f(x, a) dx \right]'_a = \int_a^b f'_x(x, a) dx$$

формула ҳосил бўлади. Сўнгги формула *Лейбниц формуласи* дейилади.

2. Энди (1) интегралда a ва b интеграллаш чегаралари a нинг функциялари деб фараз қиламиз:

$$I(a) = \Phi[a, a(a), b(a)] = \int_{a(a)}^{b(a)} f(x, a) dx. \quad (1')$$

$\Phi[a, a(a), b(a)]$ функция a нинг мураккаб функцияси бўлиб, a ва b эса оралиқ аргументлардир. $I(a)$ дан ҳосила топиш учун кўп аргументли мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасидан фойдаланамиз (VIII боб, 10-параграфга қаранг):

$$I'(a) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{da}{da} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{da}. \quad (3)$$

Аниқ интегрални ўзгарувчининг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремага мувофиқ (4-§ га қаранг):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, a) dx = f[b(a), a],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, a) dx = - \frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, a) dx = -f[a(a), a].$$

Ниҳоят, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ҳосилани ҳисоблаш учун Лейбниц формуласини татбиқ қиламиз:

*) $I = \int_a^b f(x) dx$ интегралда интеграл остидаги функция $\Delta x \rightarrow 0$ да нолга

интилади. Интеграл остидаги функциянинг нолга интилишидан интегралнинг ҳам нолга интилиши ҳамма вақт келиб чиқавермайди. Аммо, берилган ҳолда $\Delta x \rightarrow 0$ да I нолга интилади. Бу фактни биз исботсиз қабул қиламиз.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \int_a^b f'_z(x, z) dx.$$

Ҳосилаларнинг топилган ифодаларини (3) формулага қўйсак,

$$I'_z(a) = \int_{a(a)}^{b(a)} f'_z(x, z) dx + f[b(z), z] \frac{db}{dz} - f[a(z), z] \frac{da}{dz} \quad (4)$$

ифода ҳосил бўлади.

Лейбниц формуласи ёрдами билан баъзи бир аниқ интегралларни ҳисоблаш мумкин.

$$1\text{- мисол } I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin ax}{x} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Дастлаб биз бу интегрални бевосита ҳисоблай олмаслигимизни кўрамиз, чунки $e^{-x} \frac{\sin ax}{x}$ функциянинг бошланғич функцияси элементар функциялар орқали ифода этилмайди. Берилган интегрални ҳисоблаш учун уни a параметрнинг функцияси деб қараймиз. У ҳолда унинг a бўйича ҳосиласи юқорида чиқарилган Лейбниц формуласига мувофиқ топилади*):

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} \frac{\sin ax}{x} \right]'_a dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos ax dx.$$

Лекин кейинги интеграл элементар функциялар ёрдамида осон ҳисобланади; унинг қиймати $\frac{1}{1+a^2}$ га тенг. Шунинг учун $I'(a) = \frac{1}{1+a^2}$. Ҳосил қилинган айниятни интеграллаб, $I(a)$ ни топамиз;

$$I(a) = \arctg a + C. \quad (5)$$

Бундан C ни аниқлаймиз. Бунинг учун

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 \cdot dx = 0$$

эканини эътиборга оламиз. Бундан ташқари $\arctg 0 = 0$. (5) тенгликка $a = 0$ ни қўйиб,

$$I(0) = \arctg 0 + C$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан $C = 0$. Демак, a нинг ҳар қандай қиймати учун $I(x) = \arctg a$ тенглик ўринли, яъни

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin ax}{x} dx = \arctg a.$$

*) Лейбниц формуласи интеграллашнинг a ва b чегаралари чекли деган фараз билан чиқарилган эди. Аммо берилган ҳолда интеграллаш чегараларидан биттаси чексизликка тенг бўлса-да Лейбниц формуласи ўринлидир. Ҳосмас интегрални параметр бўйича дифференциаллаш уринли булиш шартларини Г. М. Фихтенгольцнинг "Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси" китобидан қаранг. "Ўқитувчи", 1970, II т. XIV боб, 3- §.

2-мисол. Гамма-функция.

α параметрга боғлиқ бўлган интегрални қараймиз:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (6)$$

Бу хосмас интегралнинг $\alpha > 0$ да мавжуд (яқинлашувчи) бўлишини кўрсатамиз. Бунинг йўлини кўринишида тасвирлаймиз:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Ўнг томондаги биринчи интеграл яқинлашувчи, чунки

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Иккинчи интеграл ҳам яқинлашувчидир. Ҳақиқатан n шундай мусбат сон бўлсинки, унда $n > \alpha - 1$ бўлсин. Бу ҳолда,

$$0 < \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx < \infty$$

бўлиши равшан. Кейинги интегрални, ҳар қандай бутун мусбат k сонда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad (7)$$

бўлишини ҳисобга олиб, бўлаклаб интеграллаймиз. Шундай қилиб (6) интеграл α нинг бирор функциясини аниқлайди. Бу функция $\Gamma(\alpha)$ билан белгилади ва *гамма-функция* деб аталади:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (8)$$

Бу функциядан кўпинча математиканинг татбиқотларида фойдаланилади. α бутун сон бўлганда $\Gamma(\alpha)$ нинг қийматини топайлик. $\alpha = 1$ бўлса,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1. \quad (9)$$

$\alpha > 1$ бутун сон бўлсин. Бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

ёки (7) ни эътиборга олиб, ушбунни ёзамиз:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1). \quad (10)$$

(10) ҳамда (9) га асосан, $\alpha = n$ бўлганда қуйидагини топамиз:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

11-§. Ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясини интеграллаш

VII бобнинг 4-параграфида ҳақиқий ўзгарувчи x нинг комплекс функцияси $\bar{f}(x) = u(x) + iv(x)$ ва унинг ҳосиласи $\bar{f}'(x) = u'(x) + iv'(x)$ аниқланган эди.

Таъриф. Агар

$$\bar{f}'(x) = \bar{f}(x), \quad (1)$$

яъни

$$U'(x) - i V'(x) = u(x) + iv(x) \quad (2)$$

булса, $\bar{F}(x) = U(x) + iV(x)$ функция ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функцияси $\bar{f}(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

(2) тенгликдан $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, яъни $U(x)$ функция $u(x)$ учун ва $V(x)$ функция $v(x)$ учун бошланғич функциядир.

Берилган таърифдан ва бу изоҳдан агар $\bar{F}(x) = U(x) + iV(x)$ ўзи $\bar{f}(x)$ функция учун бошланғич функция булса, $\bar{f}(x)$ учун бошланғич функция $\bar{F}(x) + C$ кўринишда бўлади, бунда C — комплекс ихтиёрий ўзгармас. $\bar{F}(x) + C$ ифодани ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясининг аниқмас интеграли деймиз ва бундай ёзамиз:

$$\int \bar{f}(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx = \bar{F}(x) + C. \quad (3)$$

Ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функцияси $f(x) = u(x) + iv(x)$ нинг аниқ интегралини бундай аниқлаймиз:

$$\int_a^b \bar{f}(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx. \quad (4)$$

Бундай аниқлаш аниқ интегрални йиғиндининг limiti каби қилинган таърифга зид эмас, балки унга батамом мувофиқ келади.

XI бобга машқлар

1. Интеграл йиғиндиси s_n ни тузиб ва лимитга ўтиш билан $\int_a^b x^2 dx$ аниқ интегралларни ҳисобланг. Кўрсатма. $[a, b]$ кесмани $x_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) нуқталар орқали n та бўлакка ажратинг, бунда $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Жав. $\frac{b^3 - a^3}{3}$. 2. $\int_a^b \frac{bx}{x^2} dx$, бунда $0 < a < b$. Жав. $\ln \frac{b}{a}$. Кўрсатма. $[a, b]$

кесма олдинги мисолдагидек бўлакларга ажратилсин. 3. $\int_a^b \sqrt{x} dx$.

Жав. $\frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2})$. Кўрсатма. 2-мисолга қаранг. 4. $\int_a^b \sin x dx$.

Жав. $\cos a - \cos b$. Кўрсатма. Дастлаб қуйидаги айниятнинг тўғрилигини кўрсатилсин:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin[a+(n-1)h] &= \\ &= \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2 \sin h}. \end{aligned}$$

Бунинг учун чап томоннинг барча ҳадларини $\sin h$ га кўпайтириш ва бўлиш ҳамда синуслар кўпайтмасини косинуслар айирмаси билан алмаштириш керак.

5. $\int_a^b \cos x dx$. Жав. $\sin b - \sin a$.

Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, қуйидаги аниқ интеграл-

ларни ҳисобланг: 6. $\int_0^1 x^4 dx$. Жав. $\frac{1}{5}$. 7. $\int_0^1 e^x dx$. Жав. $e - 1$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Жав. 1. 9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \lg x dx$.

Жав. $\ln 2$. 12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. Жав. 1. 13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$. Жав. $\ln |x|$. 14. $\int_0^x \sin x dx$.

Жав. $2 \sin^2 \frac{x}{2}$. 15. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{a}} dx$. Жав. $\frac{x^3 - a}{3}$. 16. $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$. Жав. $\ln(2z-1)$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$. Жав. $\frac{\pi}{4}$.

Кўрсатилган алмаштиришларни татбиқ қилиб, қуйидаги интегралларни

ҳисобланг: 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$, $\cos x = t$. Жав. $\frac{1}{3}$. 20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2 \cos x}$,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t. \text{ Жас. } \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad 21. \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}, \quad 2+4x=t^2, \text{ Жас. } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$22. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad x = \operatorname{tg} t. \text{ Жас. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \quad 23. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad x-1=t^2.$$

$$\text{Жас. } 2(2 - \operatorname{arctg} 2). \quad 24. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, \quad z = \frac{1}{x}. \quad \text{Жас. } \ln \frac{3}{2}.$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{6-5\sin \varphi + \sin^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = t. \text{ Жас. } \ln \frac{4}{3}.$$

Қуйидаги тенгдикларни исботланг: $26. \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$

$(m > 0, n > 0).$ $27. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$

$$28. \int_a^b f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) dx.$$

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг: $29. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Жас. } 1.$

$$30. \int_0^{\infty} e^{-x} dx. \text{ Жас. } 1. \quad 31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}. \text{ Жас. } \frac{\pi}{2a} (a>0). \quad 32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Жас. } \frac{\pi}{2}. \quad 33. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}. \text{ Жас. } \frac{1}{4}. \quad 34. \int_0^1 \ln x dx. \text{ Жас. } -1. \quad 35. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

Жас. Интеграл узоқлашувчи. $36. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \text{ Жас. Интеграл узоқлашувчи.}$

$$37. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \text{ Жас. } \pi. \quad 38. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \text{ Жас. } \frac{3}{2}. \quad 39. \int_0^3 \frac{dx}{x^2}. \text{ Жас.}$$

Интеграл узоқлашувчи. $40. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \text{ Жас. } \frac{\pi}{2}. \quad 41. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}. \text{ Жас.}$

Интеграл узоқлашувчи. $42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx (a>0). \text{ Жас. } \frac{b}{a^2+b^2}.$

43. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \, (a > 0)$. Жав. $\frac{a}{a^2 + b^2}$.

Қуйидаги интегралларнинг тақрибий қийматларини топинг. 44. $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ интегрални трапециялар формуласи бўйича ва Симпсон формуласи бўйича ҳисобланг ($n = 12$). Жав. 1,6182 (трапециялар формуласи бўйича);

1,6098 (Симпсон формуласи бўйича). 45. $\int_1^{11} x^3 \, dx$ ни трапециялар формуласи ва Симпсон формуласи бўйича ҳисобланг ($n = 10$). Жав. 3690; 3660.

46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$, трапециялар формуласи бўйича ($n = 6$). Жав. 0,8109.

47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, Симпсон формуласи бўйича ($n = 4$). Жав. 0,8111. 48. $\int_1^{10} \lg_{10} x \, dx$, трапециялар формуласи бўйича ва Симпсон формуласи бўйича ($n = 10$). Жав. 6,0656; 6,0896.

49. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ муносабатдан Симпсон формуласини татбиқ этиб ($n = 10$), π нинг қийматини ҳисобланг. Жав. 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$, Симпсон формуласи бўйича ($n = 10$). Жав. 1,371.

51. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$ тенгликка асосланиб, бунда $a > 0$, $n > 0$ бутун сон бўлганда

$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$ интегралнинг қийматини топинг. Жав. $n!$ 52. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} =$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ тенгликка асосланиб, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$ интегралнинг қийматини то-

пинг. Жав. $\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$. 53. $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \, dx$ интегрални ҳисоб-

ланг. Жав. $\ln(1+a)$ ($a > -1$). 54. $\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$ тенгликдан фойдала-

ниб, $\int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^k \, dx$ интегрални ҳисобланг. Жав. $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

Демак,

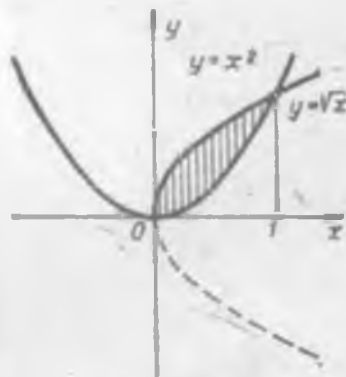
$$Q = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

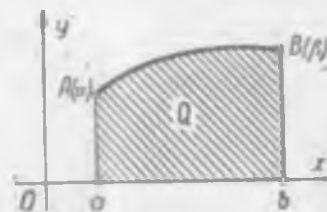
Энди тенгламалари параметрик кўринишда берилган

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (3)$$

бунда $a \leq t \leq \beta$ ва $\varphi(a) = a$, $\varphi(\beta) = b$ эгри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаймиз (236-расм).



235- расм.



236- расм.

(3) тенгламалар $[a, b]$ кесмада бирор $y = f(x)$ функцияни қўқлайди деб фараз қиламиз, у ҳолда эгри чизиқли трапециянинг юзини

$$Q = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

формула билан ҳисоблаш мумкин бўлади.

Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз: $x = \varphi(t)$.

$$dx = \varphi'(t) dt.$$

(3) тенгламаларга асосан: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Демак,

$$Q = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Бу эса параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш формуласидир.

3-мисол. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипс билан чегараланган соҳанинг юзи ҳисоблансин.

Ечиш. Эллипснинг юқори ярим юзини ҳисоблаб, уни иккига кўпайтирамиз. Бу ерда x нинг қиймати $-a$ дан $+a$ гача ўзгаради, демак, t нинг қиймати π дан 0 гача ўзгаради.

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t) (-a \sin t dt) = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

4-мисол. Ох ўқ ва $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир аркаси билан чегараланган юз ҳисоблансин.

Ечиш. t нинг қиймати 0 дан 2π гача ўзгарганда x нинг қиймати 0 дан $2\pi a$ гача ўзгаради.

(4) формулага асосан бу юз қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right]; \\ \int_0^{2\pi} dt &= 2\pi, \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, натижада $Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$ ҳосил бўлади.

2-§. Қутб координаталар системасида эгри чизиқли секторнинг юзи

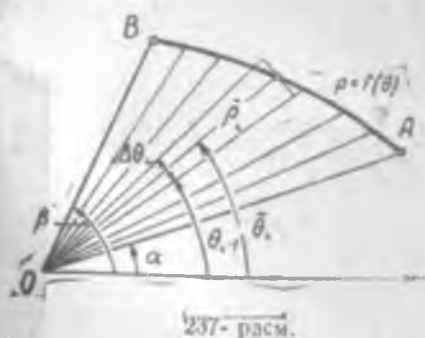
Қутб координаталар системасида эгри чизиқ

$$\rho = f(\theta)$$

теглама билан берилган бўлсин, бу ерда $f(\theta)$ функция $\alpha \leq \theta \leq \beta$ кесмада узлуксиз.

$\rho = f(\theta)$ эгри чизиқ, $\theta = \alpha$ ва $\theta = \beta$ радиус-векторлар билан чегараланган OAB секторнинг юзини топамиз.

Берилган юзи $\alpha = \theta_0$, $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$ радиус-векторлар билан n та бўлакка ажратамиз. Ўтказилган радиус-векторлар



ораларидаги бурчакларни $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ билан белгилаймиз (237- расм).

θ_{i-1} билан θ_i орасидаги бирор $\bar{\theta}_i$ бурчакка мос радиус-векторнинг узунлигини $\bar{\rho}_i$ орқали белгилаймиз. Радиуси $\bar{\rho}_i$ ва марказий бурчаги $\Delta\theta_i$ бўлган доиравий секторни қараймиз. Унинг юзи:

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2} \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i.$$

Ушбу йиғинди

$$Q_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

«зинапоясимон» секторнинг юзини беради.

Бу йиғинди $\alpha \leq \theta \leq \beta$ кесмада $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ функциянинг интеграл йиғиндиси бўлгани сабабли унинг limiti шах $\Delta\theta_i \rightarrow 0$ да

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

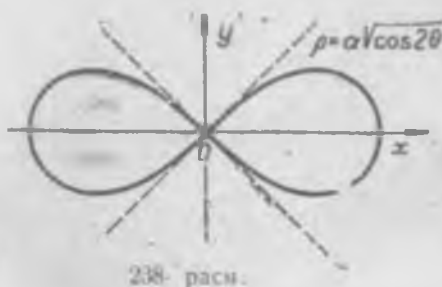
аниқ интегралга тенг. Бу $\Delta\theta_i$ бурчак ичнда қандай $\bar{\rho}_i$ радиус-векторни олишимизга боғлиқ эмас. Бу лимит шаклининг изланган юзи учун қабул қилиниши табийидир*).

Шундай қилиб, OAB секторнинг юзи:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \quad (1)$$

ёки

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta. \quad (1')$$



Мисол. $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ лемниската билан чегараланган юз ҳисоблансин (238- расм).

*) Юзининг бу таърифи билан олдинги берилган таърифи орасида ҳеч қандай зиддик йўқлигини кўрсатиш мумкин; бошқача айтганда, агар эгри чизиқли сектор юзини эгри чизиқли трапециялар ёрдами билан ҳисобласак, яна ўша натижани ҳосил қиламиз.

Е ч и ш. Агар θ бурчак 0 дан $\frac{\pi}{4}$ гача ўзгарса, радиус-вектор изланётган юзнинг чорагини чизади:

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

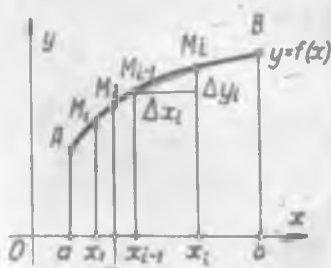
Демак, лемниската билан чегараланган юз $Q = a^2$ га тенг.

3-§. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Текисликда тўғри чизиқли координаталар системасида эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Бу эгри чизиқнинг $x = a$ ва $x = b$ вертикал тўғри чизиқлар орасидаги AB ёйининг узунлигини топамиз (239-расм).

VI боб 1-§ да ёй узунлигининг таърифи берилган эди. Бу таърифни эслатиб ўтамиз. AB ёйда абсциссалари $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$ бўлган $A, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, B$ нуқталарни оламиз ва $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$ ватарларни ўтказамиз, уларнинг узунликларини мос тартибда $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда AB ёй ичига чизилган $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Синиқ чизиқнинг узунлиги



239-расм.

$$s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

s ёйининг узунлиги деб ички чизилган синиқ чизиқнинг энг катта звеноси узунлиги нолга интилгандаги лимитига айтилади:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i. \quad (1)$$

Биз ҳозир, агар $f(x)$ функция ҳамда унинг $f'(x)$ ҳосиласи $a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу лимитнинг мавжудлигини исбот қиламиз. Шу билан бирга ёй узунлигини ҳисоблаш усули ҳам берилади.

$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Лагранж теоремасига асосан:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

бунда $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Демак,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Шундай қилиб, ички чизилган синиқ чизиқнинг узунлиги

$$s_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Шартга кўра $f'(x)$ функция узлуксиз, демак, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функция ҳам узлуксиз. Шунинг учун интеграл йиғиндигининг limiti мавжуд ва у қуйидаги аниқ интегралга тенг:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Шундай қилиб, ёй узунлигини ҳисоблаш учун

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

формулани ҳосил қилдик.

1-изоҳ. Кейинги формулага асосланиб, ёй узунлигидан абсцисса бўйича ҳосила олишимиз мумкин. Агар интегралнинг юқори чегарасини ўзгарурчи деб ҳисобласак ва уни x билан белгиласак (интеграллаш ўзгарувчисини ўзгартрмаймиз), ёй узунлиги s x нинг функцияси бўлади:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Бу интегрални юқори чегараси бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула VI бобнинг биринчи параграфда бошқача фаразлар билан ҳосил қилинган эди.

1-мисол $x^2 + y^2 = r^2$ айлана узунлиги аниқлансин.

Ечнш. Дастлаб айлананинг биринчи квадрантда ётган тўртдан бир қисмининг узунлигини ҳисоблаймиз. У ҳолда AB ёйнинг тенгламаси:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

бундан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Демак,

$$\frac{1}{r} s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}.$$

Бутун айлананинг узунлиги $s = 2\pi r$.

Энди эгри чизиқ тенгламаси

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (a \leq t \leq b) \quad (4)$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, бу эгри чизиқ ёйининг узунлигини топамиз, бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ узлуксиз ҳосилли узлуксиз функциялар, шу билан бирга $\varphi'(t)$ берилган оралиқда нолга айланмайди. Бу ҳолда (4) тенглама бирор $y = f(x)$ функцияни аниқлайди; бу функция узлуксиз бўлиб, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ узлуксиз ҳосиллага эга.

$a = \varphi(a)$, $b = \varphi(b)$ бўлсин. Бу ҳолда (2) интегралда $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ алмаштиришни бажариб,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt$$

ёки

$$s = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (5)$$

формулани ҳосил қиламиз.

2-изоҳ. (5) формула вертикал тўғри чизиқлар билан бирдан ортиқ нуқталарда кесишадиган эгри чизиқлар учун ҳам (жумладан, ёпиқ эгри чизиқлар учун) ўз кучини сақлайди; буни исбот қилиш мумкин, лекин эгри чизиқнинг ҳамма нуқталарида $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ҳосилаларнинг иккаласи ҳам узлуксиз бўлиши керак.

3-мисол. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астронданнинг узунлиги ҳисоблансин.

Ечнш. Эгри чизиқ иккала координата уқларига нисбатан симметрик бўлгани учун, дастлаб унинг биринчи квадрантда жойлашган тўртдан бир

қисмининг узунлигини ҳисоблаймиз. $\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$ ҳосилаларни топамиз. t параметр 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \quad s = 6a. \end{aligned}$$

3- и з о ҳ. Агар эгри чизиқ ф а з о да параметрик тенгламалар

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (6)$$

билан берилган бўлса (бунда $\alpha < t < \beta$), у ҳолда ёйининг узунлиги (текисликдаги ёй узунлиги каби) ички чизилган синиқ чизиқ энг катта звеносининг узунлиги нолга интилгандаги лимити каби аниқланади (IX боб 1- § га қаранг). Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ва $\chi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз ҳамда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, эгри чизиқ аниқ лимитга эга (яъни унинг учун юқорида кўрсатилган лимит мавжуд) бўлиб, у

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt \quad (7)$$

формула билан аниқланади. Кейинги натижани исботсиз қабул қиламиз.

3- м и с о л. t параметр 0 дан 2π гача ўзгарганда винт чизиги

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Е ч и ш. Берилган тенгламалардан: $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $dz = am dt$ эканини топамиз. Буларни (7) формулага қўйиб,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2} dt = 2\pi a \sqrt{1 + m^2}$$

эканини топамиз.

2. Қутб координаталар системасида эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Қутб координаталар системасида эгри чизиқнинг тенгламаси

$$\rho = f(\theta) \quad (8)$$

бўлсин, бунда ρ қутб радиуси, θ қутб бурчаги.

Қутб координаталардан Декарт координаталарига ўтиш формуласини ёзамиз:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Агар бунда ρ ўрнига унинг θ орқали (8) ифодасини қўйсак, у ҳолда

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгламаларга эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари деб қараш ва ёй узунлигини ҳисоблаш учун (5) формулани татбиқ этиш мумкин. Бунинг учун x ва y дан θ параметр бўйича ҳосил оламиз:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Бу ҳолда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Демак,

$$s = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta.$$

4-мисол. $\rho = a(1 + \cos \theta)$ кардиоиданинг узунлиги топилсин (240-расм). θ қутб бурчагини 0 дан π гача ўзгартиб, изланаётган узунлиқнинг ярмини топамиз. Бу ерда $\rho' = -a \sin \theta$. Демак,

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

5-мисол. $a > b$ деб фараз қилиб,

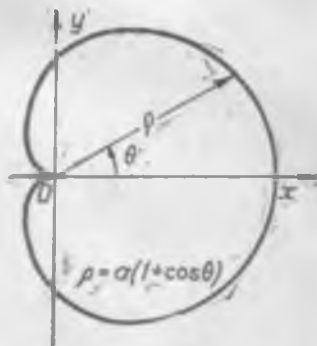
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi$$

эллипсининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечиш. Ҳисоблаш учун (5) формуладан фойдаланамиз. Дастлаб ёй узунлигининг

$\frac{1}{4}$ қисмини, яъни параметрнинг $t = 0$ дан

$t = \frac{\pi}{2}$ гача ўзгаришига мос бўлган ёйнинг узунлигини ҳисоблаймиз:



240-расм.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} dt = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = \\
 &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt,
 \end{aligned}$$

бунда $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. Демак,

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt.$$

Фақат кейинги интегрални ҳисоблашгина қолди. Аммо маълумки, бу интеграл элементар функциялар билан ифодаланмайди (X боб 14- параграфга қаранг). Бу интегрални фақат тақрибий ҳисоблаш методлари билан (масалан, Симпсон формуласи билан) ҳисоблаш мумкин.

Жумладан, агар эллипснинг катта ярим ўқи 5, кичик ярим ўқи 4 бўлса, у ҳолда $k = \frac{3}{5}$ ва эллипснинг узунлиги

$$s = 4 \cdot 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 t} dt.$$

Кейинги интегрални ($[0, \pi/2]$ кесмани тўрт бўлакка бўлиб), Симпсон формуласи бўйича ҳисоблаб, интегралнинг тақрибий қийматини топамиз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{5} \cos^2 t} dt \approx 1,298,$$

демак, бутун эллипс ёйининг узунлиги тақрибан $s \approx 25,96$ узунлик бирлигига тенг.

4- §. Жисмнинг ҳажмини параллел кесимлар юзлари бўйича ҳисоблаш

Бирор T жисм берилган бўлсин. Бу жисмни Ox ўққа перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган ҳар қандай кесимининг юзи маълум деб фараз қиламиз (241-расм). Бу юз кесувчи текислиكنинг вазиятига боғлиқ, яъни x нинг функцияси бўлади:

$$Q = Q(x).$$

$Q(x)$ ни x нинг узлуксиз функцияси деб фараз қилиб, берилган жисм ҳажмини аниқлаймиз. $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots$, $x = x_n = b$ текисликларни ўтказамиз.

Бу текисликлар жисмни қатламларга ажратади.

Ҳар бир $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ қисмий оралиқда нхтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз ва i нинг ҳар бир ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) қиймати учун ясовчиси x лар ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси T жисмни $x = \xi_i$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимнинг контуридан иборат бўлган цилиндрик жисм ясаймиз. Асосининг юзи

$$Q(\xi_i) \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

ва баландлиги Δx_i бўлган бундай элементар цилиндрнинг ҳажми

$Q(\xi_i) \Delta x_i$ га тенг. Ҳамма цилиндрларнинг ҳажми

$$v_n = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i$$

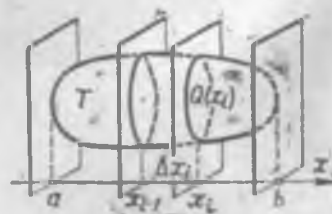
бўлади. $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ да бу йиғиндининг limiti (агар у мавжуд бўлса) берилган жисмнинг ҳажми дейилади:

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i$$

v_n миқдор $a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз $Q(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисидир, шунинг учун кўрсатилган лимит мавжуд ва у

$$v = \int_a^b Q(x) dx \quad (1)$$

аниқ интеграл билан ифодаланади.



241-расм.

демак,

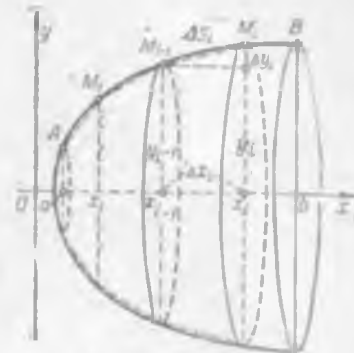
$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Синиқ чизиқ билан чизилган сирт

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

ёки



214-расм.

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \quad (1)$$

Йиғиндига тенг булиб, бу йиғинди синиқ чизиқнинг барча звенолари буйича тарқалгандир. Синиқ чизиқнинг энг катта звеноси Δs_i нолга интилгандаги бу йиғиндининг limiti қаралаётган айланиш сиртининг юзи дейилади. (1) йиғинди

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \quad (2)$$

функция учун интеграл йиғинди бўла олмайди, чунки $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага мос бўлган қушилувчида бу кесманинг бир неча (x_{i-1}, x_i, ξ_i) нуқталари қатнашаётир. Лекин (1) йиғиндининг limiti (2) функция интеграл йиғиндисининг лимитига тенг бўлишини исбот қилиш мумкин, яъни:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \end{aligned}$$

ёки

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (3)$$

Мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг x нинг $x=0$ дан $x=a$ гача ўзгарishiга мос ёйининг Ox атрофида айланишидан ҳосил бўлган параболоиднинг сирти аниқлансин.

Еч и ш.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

(3) формулага асосан:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_a^b \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_a^b \sqrt{2x+p} dx = \\ &= 2\pi \sqrt{p} \left[\frac{2}{3} (2x+p)^{3/2} \right]_a^b = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}]. \end{aligned}$$

7- §. Ишни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш

Бирор F куч таъсири остида M моддий нуқта Os тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилсин, бунда кучнинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлсин. M нуқта $s = a$ вазиятдан $s = b$ вазиятга кўчганда F кучнинг бажарган ишини топиш талаб этилади.

1) Агар F куч ўзгармас бўлса, у ҳолда A иш F куч билан утилган йўл узунлиги кўпайтмаси билан ифодаланади, яъни

$$A = F(b - a).$$

2) F куч моддий нуқтанинг олган урнига қараб ўзлуксиз ўзгаради, яъни $a \leq s \leq b$ кесмада $F(s)$ ўзлуксиз функцияни ифодалайди деб фараз қиламиз.

$[a, b]$ кесмани узунликлари

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$$

бўлган n та ихтиёрий булакка бўламиз, ундан кейин ҳар бир $[s_{i-1}, s_i]$ қисмий кесмада ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз ва $F(s)$ кучнинг

$\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ йўлда бажарган ишини

$$F(\xi_i) \Delta s_i$$

кўпайтма билан алмаштирамиз. Бу эса бир қисмий кесмада биз F кучни ўзгармас миқдор деб қабул қилишимизни, чунончи $F = F(\xi_i)$ деб фараз қилишимизни билдиради. Бундай ҳолда $F(\xi_i) \Delta s_i$ ифода Δs_i етарлича кичик бўлганда F кучнинг Δs_i йўлда бажарган ишининг тақрибий қийматини беради, йигинди

$$A_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta s_i$$

эса F кучнинг бутун $[a, b]$ кесмада бажарган ишининг тақрибий ифодаси бўлади.

A_n йигинди $[a, b]$ кесмада $F = F(s)$ куч учун тузилган интеграл йигинди экани ўз-ўзидан тушунарли. Бу йигиндининг

$\max(\Delta s_i) \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд ва у $F(s)$ кучнинг $s=a$ нуқтадан $s=b$ нуқтагача бўлган йўлда бажарган ишини ифодалайди:

$$A = \int_a^b F(s) ds. \quad (1)$$

1-мисол. Винт пружинасининг S қисилиши унга таъсир этувчи F кучга пропорционал. Агар пружинани 1 см қисмиш учун 1 кг куч керак бўлса, F куч пружинани 5 см қисмиш учун қанча иш бажариши керак бўлиши ҳисоблансин (245- расм).

Ечиш. Шартга кўра F куч ва S силжнш $F = kS$ муносабат орқали боғланган, бунда k ўзгармас сон.

S ни метр билан, F ни килограмм билан ифодалаймиз. $S=0,01$, $F=1$ бўлганда $1=k \cdot 0,01$ бўлади, бундан $k=100$, $F=100S$.

(1) формулага асосан:

$$A = \int_0^{0,05} 100S dS = 100 \frac{S^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кгм.}$$

2-мисол. e_1 электр заряди ўзидан r масофада турган (ишораси бир хил) e_2 зарядни F куч билан итарса, бу куч

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

формула билан ифодаланади, бунда k ўзгармас сон.

e_1 заряд санок бошланган нуқта деб қабул этилган A_0 нуқтага жойлашган деб фарз қилиб, e_2 заряднинг e_1 заряддан r_1 масофа узоқда булган A_1 нуқтадан e_1 заряддан r_2 масофа узоқда бўлган A_2 нуқтага кўчишида F кучнинг бажарган иши аниқлансин.

Ечиш. (1) формулага асосан:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

$r_2 = \infty$ булганда

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2} dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1}$$

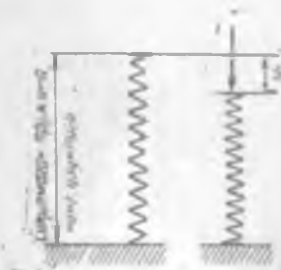
бўлади. $e_2 = 1$ бўлса, $A = k \frac{e_1}{r}$. Кейинги миқдор e_1 заряд ҳосил қилган майдон потенциал дейилади.

8- §. Огирлик марказининг координаталари

Оху текисликда массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ бўлган

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

моддий нуқталар системаси берилган бўлсин.



245- расм.

$x_i m_i$ ва $y_i m_i$ кўпайтмалар m_i массанинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан олинган *статик моментлари* дейилади.

x_c ва y_c орқали берилган системанинг огирлик маркази координаталарини белгилаймиз. Бу ҳолда, баён этилган моддий система огирлик марказининг координаталари:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

формулалар билан аниқланиши механика курсидан маълум. Биз бу формулалардан турли шакл ва жисмларнинг огирлик марказларини топишда фойдаланамиз.

1. Текисликдаги чизиқнинг огирлик маркази. AB эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган ($a \leq x \leq b$) ва бу эгри чизиқ моддий чизиқ булсин.

Бундай моддий эгри чизиқнинг чизиқли зичлигини*) γ деб фараз қиламиз. Чизиқни узунликлари $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ бўлган n та булакка буламиз. Бу булакларнинг массалари уларнинг узунликлари билан (ўзгармас) зичлик кўпайтмасига тенг: $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. Δs_i ёйнинг ҳар бир бўлагида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Энди Δs_i ёйнинг ҳар бир бўлагини массаси $\gamma \Delta s_i$ бўлган $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ моддий нуқта билан тасвирлаб ва (1) ҳамда (2) формулаларда x_i ўрнига ξ_i қийматни, y_i ўрнига $f(\xi_i)$ қийматни, m_i ўрнига (Δs_i булаклар массалари) $\gamma \Delta s_i$ қийматни қўйсак, ёйнинг огирлик марказини аниқлаш учун тақрибий формулалар ҳосил қиламиз:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}$$

Агар $y = f(x)$ узлуксиз функция бўлса ва узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда ҳар бир қисмнинг суратидаги ва махражи-

*) Берилган чизиқ узунлик бирлигининг массаси чизиқли зичлик дейилади. Биз эгри чизиқнинг ҳамма жойида чизиқли зичлик бир хил деб фараз қиламиз.

даги йиғиндилар $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ да мос интеграл йиғиндиларнинг лимитларига тенг бўлган лимитларга эга бўлади. Шундай қилиб, ёй оғирлик марказининг координаталари аниқ интеграллар билан ифодаланади:

$$x_c = \frac{\int_a^b x ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}, \quad (1')$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}. \quad (2')$$

1-мисол. Ox ўқининг юқорисига жойлашган $x^2 + y^2 = a^2$ ярим айлана оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Ечиш. Оғирлик марказининг ординатасини топамиз:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

$$y_c = \frac{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} = \frac{a \int_{-a}^a dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

$x_c = 0$ (чунки ярим айлана Ox ўққа нисбатан симметрикдир).

2. Текис шаклнинг оғирлик маркази. Берилган шакл $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиқлар билан чегараланган бўлиб, моддий текис шаклдан иборат бўлсин. Сирт зичлигини, яъни сирт бирлик юзининг массаси шаклнинг ҳамма бўлаклари учун ўзгармас ва δ га тенг деб ҳисоблаймиз.

Берилган шаклни $x = a$, $x = x_1$, $\dots$, $x = x_n = b$ тўғри чи-зиқлар билан кенглиги Δx_1 , Δx_2 , $\dots$, Δx_n бўлган полоскаларга ажратамиз. Ҳар бир полосканинг массаси полоска юзи билан δ зичлик қўпайтмасига тенг бўлади. Агар ҳар бир полоскани (246-расм) асоси Δx_i ва баландлиги $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ бўлган (бун-

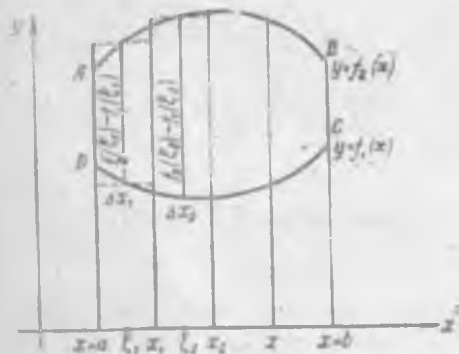
да $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$) тўғри тўртбурчак билан алмаштирсак, у ҳолда полосканинг массаси тақрибан

$$\Delta m_i = \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

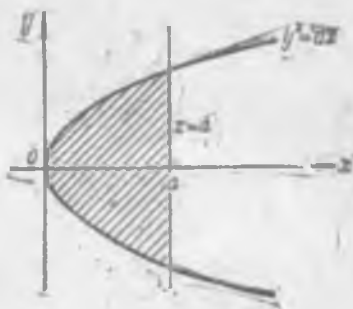
га тенг бўлади.

Бў полосканинг оғирлик маркази тахминан тегишли тўғри тўртбурчакнинг марказида бўлади:

$$(x_i)_c = \xi_i, \quad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$



246- расм.



247- расм.

Энди ҳар бир полоскани массаси тегишли полосканинг массасига тенг бўлган ва шу полосканинг оғирлик марказига тўпланган моддий нуқта билан алмаштириб, бутун шакл оғирлик маркази координаталарининг тақрибий қийматици топамиз [(1) ва (2) формулаларга асосан]:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

$\Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, берилган шакл оғирлик марказининг координаталарини топамиз:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}.$$

Бу формулалар ҳар қандай бир жинсли (яъни ҳамма нуқталарида бир хил зичликка эга бўлган) текис шакллар учун ўринли. Оғирлик марказининг координаталари шаклнинг δ зичлигига боғлиқ эмаслигини кўрдик (ҳисоблаш жараёнида δ қисқариб кетди).

2-иisol. $y^2 = ax$ параболанинг $x = a$ тўғри чизиқ билан кесилишидан ҳосил бўлган сегмент оғирлик марказининг координаталари аниқлансин (247-расм).

Ечиш. Берилган ҳолда $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, шунинг учун

$$x_c = \frac{2 \int_0^a x \sqrt{ax} dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{2 \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a}{2 \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{3} a^2}{\frac{4}{3} a^2} = \frac{3}{5} a,$$

$y_c = 0$ (чунки сегмент Ox ўққа нисбатан симметриkdir).

9-§. Чизиқ, доира ва цилиндрнинг инерция моментини аниқ интеграл ёрдами билан ҳисоблаш

xOy текислигида массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ бўлган

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

моддий нуқталар системаси берилган бўлсин. Бу ҳолда, механикадан маълумки, моддий нуқталар системасининг O нуқтага нисбатан инерция моменти қуйндагича аниқланади:

$$I_O = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i \text{ ёки } I_O = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i, \quad (1)$$

бунда

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

8-§ даги каби, AB эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган, $a \leq x \leq b$ бўлиб, бунда $f(x)$ узлуксиз функция бўлсин. Бу эгри чизиқ *моддий чизиқдан* иборат бўлсин. Эгри чизиқнинг чизиқли зичлиги γ га тенг бўлсин. Чизиқни узунлиги $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ бўлган n та булакларга бўламиз, бунда $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, уларнинг массалари $\Delta m_1 = \gamma \Delta s_1$, $\Delta m_2 = \gamma \Delta s_2, \dots, \Delta m_n = \gamma \Delta s_n$ бўлсин. Ёйнинг ҳар бир қисмида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Бу нуқталарнинг

ординатаси $\eta_i = f(\xi_i)$ бўлади. Ёйнинг O нуқтага нисбатан инерция моменти (1) формулага мувофиқ тақрибан бундай бўлади:

$$I_O \approx \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta s_i. \quad (2)$$

Агар $y = f(x)$ функция ва унинг ҳосиласи $f'(x)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Delta x_i \rightarrow 0$ да (2) йиғинди лимитга эга. Аниқ интеграл билан ифодаланадиган бу лимит моддий чизиқнинг инерция моментини аниқлайди:

$$I_O = \gamma \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3)$$

1. Узунлиги l бўлган ингичка бир жинсли таёқчанинг (стерженнинг) охириги учига нисбатан инерция моменти. Таёқчани Ox уқ кесмаси билан устма-уст жойлаштирамиз $0 \leq x \leq l$ (248- расм). Бу ҳолда $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma \Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ ва (3) формула бундай кўринишни олади:

$$I_{O_c} = \gamma \int_0^l x^2 dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \quad (4)$$



248- расм.

Агар таёқчанинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда $\gamma = \frac{M}{l}$ ва (4) формула бундай кўринишда бўлади:

$$I_{O_c} = \frac{1}{3} M l^2. \quad (5)$$

2. Радиуси r бўлган айлананинг марказига нисбатан инерция моменти. Айлананинг барча нуқталари унинг марказидан бир хил масофада бўлган ва массаси $m = 2\pi r \cdot \gamma$ бўлгани учун, айлананинг инерция моменти бундай бўлади:

$$I_O = m r^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \quad (6)$$

3. Радиуси R бўлган бир жинсли доиранинг марказига нисбатан инерция моменти. δ — доира юзи бирлигининг массаси бўлсин. Доирани n та ҳалқаларга ажратамиз.

Битта ҳалқани олиб қараймиз. (249- расм). Унинг ички радиуси r_i , ташқи радиуси $r_i + \Delta r_i$ бўлсин. Бу ҳалқанинг массаси Δr_i га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$ га тенг бўлади. Бу массанинг

23. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ астроида билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ёғи ва Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{\pi^2}{2}$.

25. $y^2 = 4x$ парабола ва $x = 4$ тўғри чизик билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. 32π .

26. $y = xe^x$ эгри чизик ва $y = 0$, $x = 1$ тўғри чизиклар билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

27. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг битта аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $5\pi^2 a^3$.

28. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг битта аркаси ҳамда Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $6\pi^2 a^3$.

29. 27- масаладаги шакл, циклоиданинг учидан ўтувчи Ox ўққа параллел тўғри чизик атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.

30. 27- масаладаги шакл циклоиданинг учидан ўтувчи Ox ўққа параллел тўғри чизик атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $7\pi^2 a^3$.

31. Асосининг радиуси R бўлган цилиндр асосининг диаметри орқали асос текислиги билан α бурчак ташкил қилиб ўтувчи текислик билан кесилган. Кесиб олинган қисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{2}{3}R^3 \lg \alpha$.

32. $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$ цилиндрлар учун умумий бўлган ҳажмини топинг. Жав. $\frac{16}{3}R^3$.

33. Квадрат диагоналлари кесишган нуқтаси радиуси a бўлган доиранинг диаметри бўйича ҳаракат қилади; бунда квадрат жойлашган текислик ҳамма вақт доира текислигига перпендикулярлигича қолади, квадратнинг икки қарама-қарши учлари эса айлана бўйича ҳаракат қилади (маълумки ҳаракат пайтида квадратнинг катталиги ўзгариб туради). Ҳаракатланувчи квадрат ҳосил қилган жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{8}{3}a^3$.

34. $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ эллиптик параболоидни $x=a$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган сегментнинг ҳажмини ҳисобланг. Жав. $\pi a^3 \sqrt{pq}$.

35. $z = 0$, $y = 0$ текисликлар $x^2 = 2py$ ва $z^2 = 2px$ цилиндрик сиртлар ва $x=a$ текислик билан чегараланган жисмининг ҳажмини ҳисобланг. Жав. $\frac{a^3 \sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (биринчи октантда).

36. Тўғри чизик Oxy ва Oxz текисликларда ўтувчи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсларни кесиб, Oyz текисликка параллел ҳолда ҳаракат қилади. Ҳосил булган жисмининг ҳажмини ҳисобланг. Жав. $\frac{8}{3}abc$.

Ёйларнинг узунликларини ҳисоблаш

37. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ астроиданинг бутун узунлигини топинг. Жав. 6a.

38. $ay^2 = x^3$ ярим кубик парабола ёйининг координаталар бошидан абсциссаси $x = 5a$ нуқтагача бўлган узунлигини ҳисобланг. Жав. $\frac{335}{27} a$.

39. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ занжир чизиқ ёйининг координаталар бошидан (x, y) нуқтагача бўлган узунлигини топинг. Жав. $a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}$.

40. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклонда битта аркасининг узунлигини топинг. Жав. 8a.

41. $y = \ln x$ эгри чизиқ ёйининг $x = \sqrt{3}$ дан $x = \sqrt{8}$ гача бўлган узунлигини топинг. Жав. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

42. $y = 1 - \ln \cos x$ эгри чизиқ ёйининг $x = 0$ дан $x = \frac{\pi}{4}$ гача бўлган узунлигини топинг. Жав. $\ln \lg \frac{3\pi}{8}$.

43. $\rho = a\varphi$ Архимед спиралининг қутбдан биринчи ўрам охиригача бўлган узунлигини топинг. Жав. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

44. $\rho = e^{a\varphi}$ спиралнинг қутбдан (ρ, φ) нуқтагача бўлган узунлигини топинг. Жав. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\varphi} = \frac{\rho}{a} \sqrt{1+a^2}$.

45. $\rho = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқнинг бутун узунлигини топинг. Жав. $\frac{3}{2} \pi a$.

46. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ эллипс эволютасининг узунлигини топинг. Жав. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

47. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ кардионданнинг узунлигини топинг. Жав. 8a.

48. $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$, $y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$ доира эвольвентаси ёйининг $\varphi = 0$ дан $\varphi = \varphi_1$ гача бўлган узунлигини топинг. Жав. $\frac{1}{2} a \varphi_1^2$.

Айланиш жисмлари сиртларининг юзларини ҳисоблаш

49. $y^2 = 4ax$ параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртининг координаталар бошидан абсциссаси $x = 3a$ бўлган нуқтагача оралиқдаги юзи топилин. Жав. $\frac{56}{3} \pi a^2$.

50. $y = 2x$ тўғри чизиқнинг $x = 0$ дан $x = 2$ гача оралиқдаги кесмасининг: а) Ox ўқ атрофида, б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган конус сиртининг юзини ҳисобланг. Жав. а) $8\pi \sqrt{5}$, б) $4\pi \sqrt{5}$.

51. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ доиранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган тор сиртининг юзини топинг ($b > a$). Жав. $4\pi^2 ab$.

52. Кардиоидда $x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$ параметрик тенгламалар билан берилган. Кардионданнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзини топинг. Жав. $\frac{128}{5} \pi a^2$.

53. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида битта аркасининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзини топинг. Жав. $\frac{64\pi a^3}{3}$.

54. Циклоиданинг аркаси Oy ўқ атрофида айланади (53- масалага қаранг). Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $16\pi^2 a^3 + \frac{64}{3}\pi a^3$.

55. Циклоиданинг аркаси унинг учидан ўтган ва Ox ўққа параллел бўлган уринма атрофида айланади (53- масалага қаранг). Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $\frac{32\pi a^3}{3}$.

56. $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ астроида Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $\frac{12\pi a^3}{5}$.

57. $y = \sin x$ синусонданинг ёйи Ox ўқ атрофида $x = 0$ дан $x = 2\pi$ гача айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $4\pi [\sqrt{2} + \ln \sqrt{2} + 1]$.

58. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) эллипс Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $2\pi b^3 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}$, бунда $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Аниқ интегралнинг турли татбиқлари

59. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x > 0$, $y > 0$) эллипс чорак қисми юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $\frac{4a}{3\pi}$; $\frac{4b}{3\pi}$.

60. $x^2 + 4y - 16 = 0$ парабала ва Ox ўқ билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(0; \frac{8}{5})$.

61. Ярим шар ҳажмининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосдан $\frac{3}{8}R$ масофада.

62. Ярим шар сиртининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосидан $\frac{R}{2}$ масофада.

63. Асоснинг радиуси R , баландлиги h бўлган тўғри доиравий конус сиртининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосдан $\frac{h}{3}$ масофада.

64. $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$.

65. $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ параболалар билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(9; 9)$.

66. Марказий бурчаги 2α ва радиуси R бўлган донра сектори юзининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, сектор учидан $\frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ масофада.

67. Агар асоси 8 м , баландлиги 12 м бўлган тўғри тўртбурчак сувга вертикал ҳолда туширилган бўлиб, унинг юқори асоси сувнинг эркин сир-

тига параллел ва 5 м чуқурликда бўлса, тўғри тўртбурчакка бўлган сув босимининг миқдориш топинг. Жав. 1056 т.

68. Томони 8 бўлган квадрат шаклдаги шлюзнинг юқори қирраси сув сиртида ётади. Квадратини унинг бир диагонали билан ажратиб ҳосил қилинган шлюз қисмларининг ҳар бирига бўлган сув босимининг миқдорини аниқланг. Жав. 85 333,33 кг, 170 666,67 кг.

69. Диаметри 20 м бўлган ярим сферик идишдан сувни насос билан тортиб олиш учун керак бўлган иш миқдорини ҳисобланг. Жав. $2,5 \cdot 10^4 \pi$ кгм.

70. Жисм $x = ct^3$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади, бунда x^0 вақтда утилган йўл узунлиги, $c = \text{const}$. Муҳитнинг қаршилиги тезлик квадратига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффиценти k га тенг. Жисмининг $x = 0$ нуқтадан $x = a$ нуқтагача қилган ҳаракатида қаршилиш бажарган ишни топинг. Жав. $\frac{27k}{7} \sqrt{c^2 a^7}$.

71. Зичлиги γ бўлган суюқликни баландлиги H , асосининг радиуси R бўлган ва учи билан пастга қараган конус шаклидаги резервуардан насос билан тортиб олиш учун сарфлаш керак бўлган ишни ҳисобланг.

$$\text{Жав. } \frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}.$$

72. Ёғочдан ясалган қалқовуч цилиндр шаклида бўлиб, асосининг юзи $S = 4000 \text{ см}^2$, баландлиги эса $H = 50 \text{ см}$. Қалқовуч сув юзида сузиб юрибди. Қалқовучни сув сиртига кўтариб чиқариш учун қанча иш сарф қилиш керак? (Ёғочнинг солиштирма оғирлиги 0,8) Жав. $\frac{\gamma H S}{2} = 32 \text{ кгм}$.

73. Устки асоси $a = 6,4 \text{ м}$, остки асоси $b = 4,2 \text{ м}$, баландлиги $H = 3 \text{ м}$ бўлган тенг ёнли трапеция шаклидаги плотинани сув қандай куч билан босишини ҳисобланг. Жав. 22,2 т.

74. Қозоннинг сфера шаклидаги тагига P кг буғ берадиган тўлиқ босмининг ўқдаги ташкил этувчиларини топинг. Қозон цилиндрлик қисмининг диаметри D мм, қозон ичидagi бутуннинг босими P кг/см². Жав. $P = \frac{\pi P D^2}{400}$.

75. Радиуси r бўлган вертикал валнинг тагидан ясси подпятник тутиб туради. Валнинг P оғирлиги таянчнинг бутун сирти бўйича текис тарқалади. Валнинг бир марта айланишида ишқаланиш кучининг бажарган тўла ишнинг ҳисобланг. Ишқаланиш коэффиценти μ га тенг. Жав. $\frac{4}{3} \pi \mu P r$.

76. Вертикал валнинг учи кесик конус шаклидаги пята билан тугайди. Пятанинг подпятникка бўлган солиштирма босими ўзгармас бўлиб, P га тенг. Пятанинг юқори диаметри D , қуйи диаметри d , конус учидagi бурчак 2α , ишқаланиш коэффиценти μ . Валнинг бир айланишида ишқаланиш кучининг бажарган иши топилинсин. Жав. $\frac{\pi^2 P d}{6 \sin \alpha} (D^3 - d^3)$.

77. Узунлиги l бўлган призматик стержень 0 дан P гача секин ўсиб боровчи куч билан шундай чўзила борадики, чўзувчи куч ҳар бир моментда стерженьнинг эластик кучи билан мувозанатда бўлади. Чўзилиш эластиклик чегараларида бўлади деб фараз қилиб, кучнинг чўзиш учун сарф қилган A ишини ҳисобланг. Стержень кўндаланг кесмининг юзи F га, материалнинг эластиклик модули E га тенг.

Кўрсатма. Агар x — стерженьнинг чўзилиши, f — таъсир этувчи куч бўлса, у ҳолда $f = \frac{FE}{l} x$ бўлади. P куч таъсири остидаги чўзилиш $\Delta l = \frac{Dl}{EF}$ га тенг. Жав. $A = \frac{P \Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}$.

78. Призма шаклидаги брус вертикал ҳолатда осилган бўлиб, унинг пастки учига қўзувчи P куч таъсир этади. Агар бруснинг қўзилган ҳолатдаги узунлиги l , қўндаланг кесимининг юзи F , оғирлиги Q ва материалнинг эластиклик модули E га тенг экани берилган бўлса, брус ўз оғирлик кучи ва P куч таъсирида қанча қўзилишини ҳисобланг. Жав. $\Delta l = \frac{(Q + 2P)l}{2EF}$.

79. Призма шаклидаги идишга H баландликкача қуйилган суюқлик тўкилиб тамои бўлиши учун қанча вақт кетади? Идиш қўндаланг кесимининг юзи F , тешикнинг юзи f , оқим тезлиги $v = \mu \sqrt{2gh}$ формула билан аниқланади, бунда μ — ёпишқоқлик коэффициенти, g — оғирлик кучининг тезла-
ниши, h — тешикдан суюқлик сатҳигача бўлган масофа. Жав. $T = \frac{2FH}{\mu f \sqrt{2gH}} =$

$$= \frac{F}{\mu f} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

80. Кесими тўғри тўртбурчак шаклда бўлган оқава иншооти орқали оқиб чиққан Q сув сарфини (вақт бирлиги ичида оқиб чиқадиган сув миқдорини) аниқланг. Иншоотнинг баландлиги h , кенглиги b . Жав. $Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$.

81. Баландлиги a ва кенглиги b бўлган тўғри тўртбурчак шаклида ён томонидаги тешикдан оқиб чиқадиган Q сув сарфини аниқланг. Тешикнинг паст томонидан сув сиртигача бўлган баландлик H .

$$\text{Жав. } Q = \frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3} [H^{3/2} - (H-a)^{3/2}].$$

МУНДАРИЖА

Туққизинчи нашрига сўз боши	3
Бешинчи нашрига сўз боши	5

I боб. Сон. Ўзгарувчи миқдор. Функция

1-§. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонларни сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирлаш	7
2-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати	9
3-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар	10
4-§. Ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси	11
5-§. Тартибланган ўзгарувчи миқдор. Ўсувчи ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар. Чекланган ўзгарувчи миқдор	13
6-§. Функция	14
7-§. Функциянинг берилиш усуллари	15
8-§. Асосий элементар функциялар. Элементар функциялар	17
9-§. Алгебраик функциялар	22
10-§. Кутб координатлари системаси	24
I бобга машқлар	25

II боб. Лимит. Функциянинг узлуксизлиги

1-§. Ўзгарувчи миқдорнинг лимити. Чексиз катта ўзгарувчи миқдор	28
2-§. Функциянинг лимити	31
3-§. Чексизликка интилувчи функция. Чекланган функциялар	34
4-§. Чексиз кичик миқдорлар ва уларнинг асосий хоссалари	37
5-§. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар	41
6-§. $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг лимити	45
7-§. e сони	47
8-§. Натурал логарифмлар	52
9-§. Функцияларнинг узлуксизлиги	53
10-§. Узлуксиз функцияларнинг баъзи бир хоссалари	58
11-§. Чексиз кичик миқдорларни таққослаш	60
II бобга машқлар	63

III боб. Ҳосила ва дифференциал

1-§. Ҳаракат тезлиги	66
2-§. Ҳосиланинг таърифи	68
3-§. Ҳосиланинг геометрик маъноси	70
4-§. Функциянинг дифференциалланувчанлиги	72
5-§. n бутун ва мусбат бўлганда $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи	74
6-§. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларнинг ҳосилалари	76
7-§. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи, ўзгармас миқдор билан функция кўпайтмасининг ҳосиласи, йиғиндининг, кўпайтманиннг, бўлинманиннг ҳосилалари	77
8-§. Логарифмик функциянинг ҳосиласи	82
9-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	83
10-§. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln x $ функцияларнинг ҳосилалари	85

11-§.	Ошкормас функция ва уни дифференциаллаш	87
12-§.	Кўрсаткичи исталган ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг, кўрсаткичли функциянинг, мураккаб кўрсаткичли функциянинг ҳосилалари	89
13-§.	Тескари функция ва уни дифференциаллаш	92
14-§.	Тескари тригонометрик функциялар ва уларни дифференциаллаш	96
15-§.	Дифференциаллашнинг асосий формулалари жадвали	100
16-§.	Функцияларнинг параметрик берилиши	101
17-§.	Баъзи бир эгри чизиқларнинг параметрик формадаги тенгламалари	103
18-§.	Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи	106
19-§.	Гиперболик функциялар	108
20-§.	Дифференциал	111
21-§.	Дифференциалнинг геометрик маъноси	116
22-§.	Турли тартибли ҳосилалар	117
23-§.	Турли тартибли дифференциаллар	119
24-§.	Ошкормас функцияларнинг ва параметрик берилган функцияларнинг турли тартибли ҳосилалари	121
25-§.	Иккинчи ҳосиланинг механик маъноси	123
26-§.	Уринма ва нормал тенгламалари. Уринма ости ва нормал ости узушликлари	125
27-§.	Радиус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласининг геометрик маъноси	128
III бобга машқлар		129

IV боб. Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи теоремалар

1-§.	Ҳосиланинг илдизлари ҳақида теорема (Ролль теоремаси) . . .	140
2-§.	Чекли орттирмалар ҳақида теорема (Лагранж теоремаси) . . .	142
3-§.	Икки функция орттирмаларининг нисбати ҳақида теорема (Коши теоремаси)	144
4-§.	Иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг limiti ($\frac{0}{0}$ кўри- нишдаги ноаниқликни очиш)	145
5-§.	Иккита чексиз катта миқдор нисбатининг limiti ($\frac{\infty}{\infty}$ кўри- нишдаги ноаниқликни очиш)	148
6-§.	Тейлор формуласи	154
7-§.	e^x , $\sin x$, $\cos x$ функцияларни Тейлор формуласи бўйича ёйиш .	157

IV бобга машқлар

V боб. Функцияни текшириш

1-§.	Масаланинг қўйилиши	162
2-§.	Функциянинг ўсиши ва камайиши	163
3-§.	Функциянинг максимум ва минимуми	165
4-§.	Дифференциалланувчи функцияни биринчи ҳосила ёрдами билан максимум ва минимумга текшириш схемаси	172
5-§.	Иккинчи ҳосила ёрдами билан функцияни максимум ва мини- мумга текшириш	174
6-§.	Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари . .	180
7-§.	Функциялар максимуми ва минимуми назариясининг масалалар ечишга татбиқи	182
8-§.	Тейлор формуласи ёрдами билан функцияни максимум ва мини- мумга текшириш	184

9-§. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Бурилиш нуқтаси	186
10-§. Асимптоталар	193
11-§. Функцияларни текширишнинг умумий плани ва графиклар	198
12-§. Параметрик шаклда берилган эгри чизиқларни текшириш	203
V бобга машқлар	207

VI боб. Эгри чизиқнинг эгрилиги

1-§. Ёйнинг узунлиги ва унинг ҳосиласи	213
2-§. Эгрилик	216
3-§. Эгриликни ҳисоблаш	218
4-§. Параметрик шаклда берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш	221
5-§. Кутб координаталардаги тенглама билан берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш	221
6-§. Эгрилик радиуси ва доираси. Эгрилик маркази. Эволюта ва эвольвента	222
7-§. Эволютанинг ҳоссалари	228
8-§. Тенгламанинг ҳақиқий илдиэларини тақрибий ҳисоблаш	231
VI бобга машқлар	236

VII боб. Комплекс сонлар. Кўпҳадлар

1-§. Комплекс сонлар. Дастлабки таърифлар	241
2-§. Комплекс сонлар устида асосий амаллар	241
3-§. Комплекс сонни даражага кўтариш ва комплекс сондан илди чиқариш	241
4-§. Кўрсаткичи комплекс бўлган кўрсаткичли функция ва унинг ҳоссалари	241
5-§. Эйлер формуласи. Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли	252
6-§. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш	256
7-§. Кўпҳаднинг каррали илдиэлари ҳақида	258
8-§. Комплекс илдиэларга эга бўлган кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш	259
9-§. Интерполяциялаш. Лагранжнинг интерполяцион формуласи	261
10-§. Ньютоннинг интерполяцион формуласи	261
11-§. Дифференциаллашнинг сонли методи	261
12-§. Функцияларни кўпҳадлар билан энг яхши яқинлаштириш ҳақида Чебишев назарияси	264
VII бобга машқлар	266

VIII боб. Бир неча ўзгарувчининг функцияси

1-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг таърифи	267
2-§. Икки ўзгарувчи функциясининг геометрик маъноси	270
3-§. Функциянинг тўла орттирмаси	271
4-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги	272
5-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари	276
6-§. Икки ўзгарувчи функцияси хусусий ҳосилаларининг геометрик маъноси	278
7-§. Тўла орттирма, тўла дифференциал	279
8-§. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи	279
9-§. Дифференциалнинг ҳисоблашдаги хатони баҳолашга татбиқи	279
10-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Мураккаб функциянинг тўла ҳосиласи	279

11-§. Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи	291
12-§. Ҳар хил тартибдаги хусусий ҳосилалар	295
13-§. Юксаклик сирти	299
14-§. Йўналиш бўйича ҳосила	300
15-§. Градиент	302
16-§. Икки ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи	306
17-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми	308
18-§. Берилган тенгламалар билан боғланган бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми (шартли максимумлар ва минимумлар)	317
19-§. Функцияни энг кичик квадратлар усули билан тажрибадан олдинган маълумотлар асосида ҳосил қилиш	322
20-§. Эгри чизиқнинг махсус нуқталари	326
III бобга машқлар	331

IX боб. Дифференциал ҳисобнинг фазодаги геометрияга татбиқи

1-§. Фазодаги эгри чизиқ тенгламаси	335
2-§. Скаляр аргумент вектор функциясининг limiti ва ҳосиласи	338
3-§. Секторларни (вектор функцияларни) дифференциаллаш қоидалари	344
4-§. Векторнинг ёй узунлиги бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалари. Эгри чизиқнинг эгрилиги. Бош нормал. Нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатдаги тезлиги ва тезланиши	346
5-§. Ёйишма текислик. Бинормал. Бурилиш	355
6-§. Сиртга уринма текислик ва нормал	360
IX бобга машқлар	364

X боб. Аниқмас интеграл

1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл	366
2-§. Интеграллар жадвали	369
3-§. Аниқмас интегралнинг баъзи ҳоссалари	371
4-§. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан ёки ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш	373
5-§. Квадрат учҳад қатнашган баъзи функцияларни интеграллаш	376
6-§. Бўлаклар интеграллаш	379
7-§. Рационал касрлар. Энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш	383
8-§. Рационал касрни энг содда касрларга ажратиш	387
9-§. Рационал касрларни интеграллаш	391
10-§. Иррационал функцияларнинг интеграллари	394
11-§. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ кўринишдаги интеграллар	396
12-§. Тригонометрик функцияларнинг баъзи синфларини интеграллаш	399
13-§. Баъзи бир иррационал функцияларни тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида интеграллаш	404
14-§. Интеграллар элементар функциялар билан ифодаланмайдиган функциялар ҳақида	406
X бобга машқлар	407

XI боб. Аниқ интеграл

1-§. Масаланинг қўйилиши. Қўйи ва юқори интеграл йигиндилар	418
2-§. Аниқ интеграл. Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақида теорема	419