

070-1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СЕНЧУК Ю.Ф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Часть II

Учебное пособие

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 1 от 05.04.2006г.

ХАРЬКОВ НТУ «ХПИ» 2006

## Предисловие

Настоящее учебное пособие является продолжением первого тома книги Ю.Ф. Сенчука "Математический анализ для инженеров". В эту часть включены следующие разделы высшей математики: криволинейные и поверхностные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, основы математической теории поля, обыкновенные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье и интеграл Фурье. Для углубленного изучения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и приближенных методов их решения могут быть полезными главы XVII, XXIV. В качестве примеров приложения интеграла Фурье и преобразования Фурье следует рассматривать главу XXIII "Элементы спектральной теории сигналов".

Материал, представленный в этом томе, посвящен рассмотрению теоретических вопросов математического анализа с хорошей иллюстрацией на конкретных примерах. Достаточно четко и понятно для будущих инженеров проведено доказательство всех сформулированных теорем. Сохраняется строгая последовательность и логика изложения материала с подробным графическим изображением. Представленное пособие может быть классифицировано как конспект лекций по указанным выше разделам высшей математики.

Мы обращаем внимание пользователей этой книги на то, что она составлена на основе материалов, подготовленных Юрием Федоровичем Сенчуком, для чтения лекций по математическому анализу и курсу "Дифференциальные уравнения" для специальности "Прикладная математика". Тем не менее, это пособие будет чрезвычайно полезным для студентов всех технических специальностей. Мы также надеемся на то, что второй том этого пособия, как и первый, поможет преподавателям, особенно начинающим, читать лекции по курсу высшей математики, планировать изложение лекций, выделять главные вопросы и учить студентов глубоко их осмысливать.

Хочется выразить особую признательность и благодарность сотрудникам кафедры прикладной математики проф. Михлину Ю.В.; ст. преп., к.т.н. Ярошенко А.Р.; ст. преп. Кашуба Ж.Б.; аспирантам: Курилову Е.А., Пилыгун Г.В., Тимченко Г.Н. за активное участие в подготовке данного учебного пособия к изданию, рецензентам проф. О.М. Литвину, проф. Е.Г. Голоскокову.

Заведующая кафедрой  
прикладной математики НТУ «ХПИ»  
доктор технических наук, профессор

Курпа Л.В.

*Книга посвящается светлой памяти  
прекрасного педагога –  
сотрудника Национального  
Технического Университета «ХПИ»  
Сенчука Юрия Федоровича*



**(1930-2003)**

## XII. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности

### 1. Криволинейные интегралы 1-го рода и их вычисление

Рассмотрим функцию  $f(x, y)$ , заданную в области  $S$  плоскости  $xOy$ , и некоторую непрерывную дугу  $L$ , целиком лежащую в  $S$  (рис.12.1). Разобьем  $L$  на  $n$  частей  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ . На каждой элементарной дуге  $\Delta s_k$  возьмем произвольную точку  $M_k(\xi_k, \eta_k)$  и вычислим  $f(\xi_k, \eta_k)$ . Составим сумму  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ .

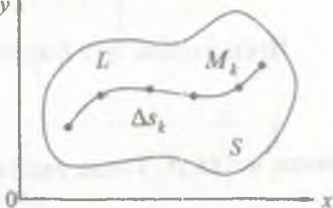


Рис. 12.1

Пусть теперь  $\delta = \max \Delta s_k \rightarrow 0$ . Если

существует  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ , не зависящий от способа дробления дуги  $L$  и выбора точек  $M_k$  (это будет, например, если функция  $f(x, y)$  непрерывна на дуге  $L$ ), то он называется криволинейным интегралом 1-го рода функции  $f(x, y)$  по дуге  $L$  и обозначается  $\int_L f(x, y) ds$ .

Очевидно, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления интегрирования. Кроме того, для него, разумеется, верны обычные свойства интегралов.

Рассмотрим правила вычисления криволинейных интегралов 1-го рода.

Пусть  $y = \varphi(x)$  – уравнение дуги  $L$ , причем  $a \leq x \leq b$ . Далее, пусть  $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$  и  $A_k(x_k, y_k)$  – начало и конец дуги  $\Delta s_k$  (рис.12.2). Как было показано раньше длина дуги  $\Delta s_k$  определяется как

$$\Delta s_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx,$$

или, в силу теоремы о среднем,

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + (\varphi'(\xi_k))^2} \Delta x_k,$$

где  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ . Положим  $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ . Точка

$(\xi_k, \eta_k)$  принадлежит дуге  $A_{k-1}A_k$ , и возьмём её в качестве точки  $M_k$ . Тогда получим

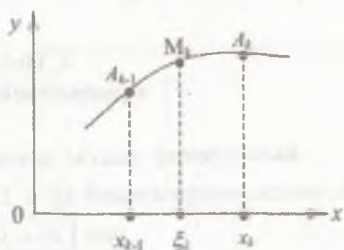


Рис. 12.2



$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \sqrt{1 + (\varphi'(\xi_k))^2} \Delta x_k \quad (12.1)$$

Справа стоит интегральная сумма для функции  $f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}$  в интервале  $[a, b]$ . Поэтому при  $\delta \rightarrow 0$  в пределе из (12.1) получим

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad (12.2)$$

Пусть теперь дуга  $L$  задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

причем  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Тогда, рассуждая совершенно аналогично, будем иметь

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Переходя к пространственному случаю, определим точно так же интеграл  $\int_L f(x, y, z) ds$ , где  $L$  – некоторая пространственная дуга. Если она задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

причем  $\alpha \leq t \leq \beta$ , то

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

## 2. Некоторые применения криволинейных интегралов 1-го рода

**Вычисление массы неоднородной кривой.** Пусть  $\rho(x, y)$  – линейная плотность материальной дуги  $L$ . Тогда, очевидно, масса этой дуги равна

$$m = \int_L \rho(x, y) ds.$$

**Пример 12.1.** Вычислим массу материальной кривой, совпадающей с эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , если  $\rho = xy$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  (рис.12.3). Уравнение заданной дуги

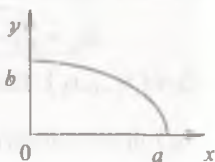


Рис. 12.3

имеет вид

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

откуда

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

а значит

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} dx = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2} dx = \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2} dx = -\frac{2b}{3a} \frac{1}{2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \left[ a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 \right]^{3/2} \Big|_0^a = \\ &= -\frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left( a^3 - \sqrt{\left( a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) a^2 \right)^3} \right) = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} \end{aligned}$$

**Вычисление моментов инерции кривых.** Пусть дуга  $L$  имеет плотность  $\rho(x, y)$ . Тогда момент инерции этой дуги относительно начала координат, очевидно, равен

$$J_0 = \int_L \rho(x, y) (x^2 + y^2) ds.$$

Если дуга – пространственная, то ее момент инерции, например, относительно оси  $Ox$  равен

$$J_x = \int_L \rho(x, y) (y^2 + z^2) ds.$$

**Вычисление площади цилиндрической поверхности.** Вычислим площадь цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью  $xOy$  и поверхностью  $z = f(x, y)$ , если направляющей цилиндра служит дуга  $L$ , а образующая параллельна оси  $Oz$  (рис.12.4). Если  $f(x, y) \geq 0$ , то площадь  $\Delta S_k$  элементарной полоски заданной цилиндрической поверхности приближенно определяется как

$$\Delta S_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k,$$

Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, получим формулу для вычисления всей поверхности, т.е.

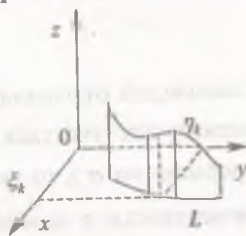


Рис. 12.4

$$S = \int_L f(x, y) ds.$$

**Пример 12.2.** Определим площадь боковой поверхности цилиндра  $y = \frac{3}{8}x^2$ , ограниченного плоскостями  $x=0$ ,  $z=0$ ,  $z=x$  и  $y=6$  (рис. 12.5).

Поскольку

$$y' = \frac{3}{4}x,$$

то

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} dx = \frac{1}{\frac{9}{16} \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{16}x^2\right)^3} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{16}{27} (\sqrt{1000} - 1) = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

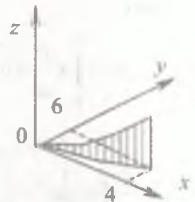


Рис. 12.5

### 3. Интегралы по поверхности 1-го рода

Пусть на некоторой поверхности  $\sigma$  задана функция  $f(x, y, z)$  (рис. 12.6). Разобьем  $\sigma$  на  $n$  частей  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , площади поверхности полученных участков обозначим как:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ .

На каждой площадке  $\Delta s_k$  возьмем произвольную точку  $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  и вычислим в ней значение функции

$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Составим сумму  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\sigma_k$ .

Пусть теперь каждая элементарная площадка стягивается в точку таким образом, что  $\delta = \max \Delta\sigma_k \rightarrow 0$ . Если существует

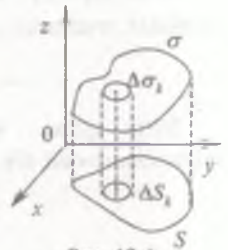


Рис. 12.6

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\sigma_k,$$

не зависящий от способа дробления поверхности  $\sigma$  и выбора точек  $P_k$  на элементарных участках (это будет, в частности, если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $\sigma$ ), то он называется интегралом 1-го рода функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $\sigma$  и обозначается  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ .

Если  $f(x, y, z)$  трактовать как плотность материальной поверхности

$\sigma$ , то интеграл  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$  численно равен массе этой поверхности.

Пусть  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\sigma$ , а  $S$  – проекция  $\sigma$  на плоскость  $xOy$ . Тогда, как было показано ранее площадь  $\Delta\sigma_k$  участка поверхности может быть вычислена как

$$\Delta\sigma_k = \iint_{\Delta S_k} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \Delta S_k.$$

Положим  $\zeta_k = \varphi(\xi_k, \eta_k)$ . Очевидно, точка  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  принадлежит  $\Delta\sigma_k$ . Беря ее в качестве точки  $P_k$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varphi(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \Delta S_k, \end{aligned}$$

т.е.

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_S f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} dS \quad (12.3)$$

Подобно тому, как формула (12.2) выражает криволинейный интеграл через определенный интеграл, формула (12.3) выражает интеграл по поверхности через двойной интеграл.

**Пример 12.3.** Вычислим момент инерции пластины, совпадающей с частью плоскости  $x + y + z = 1$ , расположенной в первом октанте (рис. 12.7), относительно начала координат, если  $\rho(x, y, z) = 1$ .

Из равенства  $z = 1 - x - y$  имеем

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3},$$

а поэтому

$$\begin{aligned} J_0 &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2) \sqrt{3} dS = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1) dy dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left( 2x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + xy^2 - 2xy - y^2 + y \right) \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \left( 2x^2 - 2x^3 + \frac{2}{3} - \right. \end{aligned}$$

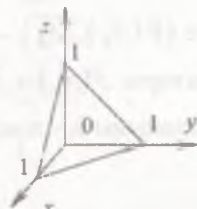


Рис. 12.7



$$\begin{aligned}
 & -2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x - 2x^2 + x^3 - 2x + 2x^2 - 1 + 2x - x^2 + 1 - x \Big) dx = \\
 & = \sqrt{3} \int_0^1 \left( -\frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) dx = \sqrt{3} \left( -\frac{5}{12}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \\
 & = \sqrt{3} \left( -\frac{5}{12} + 1 - 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

#### 4. Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть в каждой точке дуги  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  лежащей в плоскости  $xOy$  задана вектор-функция  $\vec{F}(x, y)$  (рис. 12.8). Разобьём дугу  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  на  $n$  частей точками  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , после чего обозначим  $A$  через  $M_0$ , а  $B$  через  $M_n$ . Кроме того, введём обозначение  $\overline{M_{k-1}M_k} = \overline{\Delta s_k}$ .

На каждой дуге  $\overset{\curvearrowright}{M_{k-1}M_k}$  возьмём произвольную точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  и вычислим  $\vec{F}(N_k)$ .

Составим сумму

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}(N_k), \overline{\Delta s_k} \right),$$

где  $\left( \vec{F}(N_k), \overline{\Delta s_k} \right)$  – скалярное произведение векторов  $\vec{F}(N_k)$  и  $\overline{\Delta s_k}$ .

Обозначим  $\lambda = \max_k |\overline{\Delta s_k}|$  и предположим, что  $\lambda \rightarrow 0$ . Если существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left( \vec{F}(N_k), \overline{\Delta s_k} \right),$$

не зависящей от способа дробления дуги  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  и выбора точек  $N_k$ , то он называется криволинейным интегралом 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}(x, y)$  по дуге  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  и обозначается  $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right)$ .

Выясним физический смысл этого интеграла. Пусть  $\vec{F}(x, y)$  – сила, действующая на точку  $M$  при её движении по дуге  $\overset{\curvearrowright}{AB}$ . Тогда работа этой

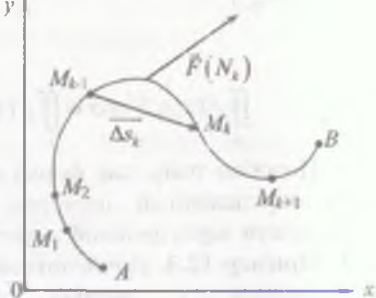


Рис. 12.8

силы на пути  $M_{k-1}M_k$  приближённо равна

$$|\vec{F}(N_k)| |\overline{\Delta s_k}| \cos \left( \vec{F}(N_k), \overline{\Delta s_k} \right) = \left( \vec{F}(N_k), \overline{\Delta s_k} \right).$$

Поэтому интеграл  $\int_{AB} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right)$  в данном случае представляют собой

работу силы  $\vec{F}(x, y)$  на пути  $\overline{AB}$ .

При изменении направления интегрирования каждый из векторов  $\overline{\Delta s_k}$  меняет знак, а значит меняет знак и интегральная сумма и её предел-интеграл. Итак, в отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, здесь мы имеем

$$\int_{BA} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right) = - \int_{AB} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right).$$

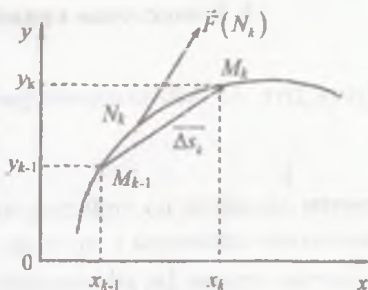


Рис. 12.9

Пусть  $x_k$  и  $y_k$  — координаты точки  $M_k$ . Тогда  $\overline{\Delta s_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$  (рис.12.9).

Далее, пусть

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j},$$

откуда следует, что

$$\vec{F}(N_k) = P(\xi_k, \eta_k) \vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k) \vec{j}.$$

Получаем

$$\int_{AB} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$$

В связи с этим пишут, что

$$\int_{AB} \left( \vec{F}(x, y), \overline{ds} \right) = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (12.4)$$

Правую часть называют скалярной формой криволинейного интеграла 2-го рода.

Совершенно аналогично вводится криволинейный интеграл 2-го рода вектор-функции

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \quad \text{по}$$

пространственной дуге  $\overline{AB}$

$$\int_{AB} \left( \vec{F}(x, y, z), \overline{ds} \right) = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (12.5)$$

**Примечание.** Очевидно, что правую часть равенства (12.4) можно переписать так

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy \quad (12.6)$$

Аналогичное замечание касается и формулы (12.5).

## 5. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода

Пусть дуга  $\overset{\cup}{AB}$  задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

причем движение по этой дуге от точки  $A$  к точке  $B$  отвечает монотонному изменению параметра  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ . Будем считать, что функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют на отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  (это значит, что дуга  $\overset{\cup}{AB}$  — гладкая). О функциях же  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  предположим, что они непрерывны на дуге  $\overset{\cup}{AB}$ .

Пусть  $t_k$  — значение  $t$ , отвечающее точке  $M_k$ , т.е.  $\varphi(t_k) = x_k$ ,  $\psi(t_k) = y_k$ . Точке же  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  пусть отвечает значение  $t = \tau_k$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})),$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k^*) \Delta t_k$$

где  $\tau_k^* \in (t_{k-1}, t_k)$ . На основании теоремы о квазиинтегральной сумме, отсюда получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$$

т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

Совершенно аналогично будем иметь

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt.$$

Складывая оба результата, получим, в силу (12.6),

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt + \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt. \quad (12.7)$$

Эта формула легко обобщается на случай интеграла вида (12.5).

**Пример 12.4.** Вычислим работу упругой силы  $\vec{F} = -k\vec{r}$  при перемещении точки  $M$  по первой четверти эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{Рис. 12.10}).$$

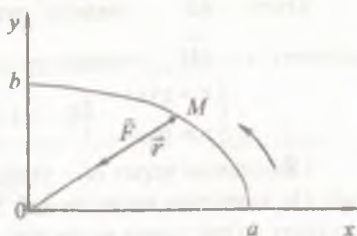


Рис. 12.10

Поскольку

$$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}) = -kx\vec{i} - ky\vec{j},$$

то

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-ka \cos t (-a \sin t) - kb \sin t b \cos t) dt = \\ &= k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{k(a^2 - b^2)}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} k(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

Пусть теперь дуга  $\overset{\cup}{AB}$  задана уравнением  $y = f(x)$ , причем  $a \leq x \leq b$ . Тогда из (12.7) сразу будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx \end{aligned}$$

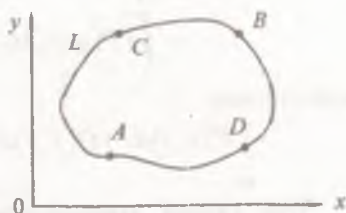


Рис. 12.11

**Примечание.** Возьмём вместо дуги  $\overset{\cup}{AB}$  замкнутый контур  $L$  в плоскости  $xOy$  (рис. 12.11). Тогда криволинейный интеграл 2-го

рода обозначают  $\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$ , при этом положительный обход контура  $L$

предполагается против часовой стрелки, т.е.

$$\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = \int_{ADB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) + \int_{BCA} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}). \quad (12.8)$$



Если изменить направление интегрирования на противоположное, очевидно, рассматриваемый интервал изменит свой знак.

## 6. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода

Пусть  $\overset{\cup}{AB}$  – гладкая дуга (рис. 12.12). Взяв в качестве параметра величину  $s = \overset{\cup}{AM}$ , запишем уравнения дуги так

$$\begin{cases} x = g(s) \\ y = h(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq s_{\overset{\cup}{AB}})$$

Обозначим через  $\alpha$  – угол, образованный с осью  $Ox$  вектором касательной  $\vec{\tau}$ , направленным в сторону возрастания величины  $s$ . Тогда

$$dx = ds \cdot \cos \alpha, \quad dy = ds \cdot \sin \alpha$$

т.е.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

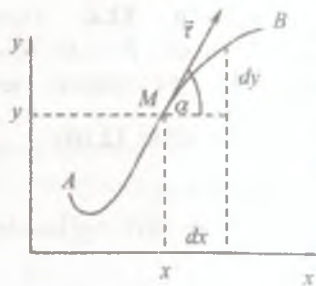


Рис. 12.12

Поэтому в случае непрерывных на дуге  $\overset{\cup}{AB}$  функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , получим, в силу (12.7),

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_0^{s_{\overset{\cup}{AB}}} (P(g(s), h(s))g'(s) + Q(g(s), h(s))h'(s)) ds = \\ &= \int_0^{s_{\overset{\cup}{AB}}} (P(g(s), h(s))\cos \alpha + Q(g(s), h(s))\sin \alpha) ds \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overset{\cup}{AB}} (P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\sin \alpha) ds$$

Тем самым криволинейный интеграл 2-го рода выражен через криволинейный интеграл 1-го рода по той же дуге. Благодаря аддитивности интеграла, этот результат легко обобщить и на случай кусочно-гладкой дуги.

Далее, для пространственной дуги  $AB$  с уравнениями

$$\begin{cases} x = g(s) \\ y = h(s) \\ z = k(s) \end{cases} \quad \left( 0 \leq s \leq s_{AB} \right)$$

точно так же получим

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{AB} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{\tau}$  касательной, направленного в сторону возрастания дуги  $AM = s$ .

## 7. Формула Грина-Римана

Пусть область  $D$  ограничена контуром  $L$ , составленным из двух линий:  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) (рис. 12.13).

Будем считать, что функции  $P(x, y)$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны в области  $\bar{D} = D \cup L$ . Тогда

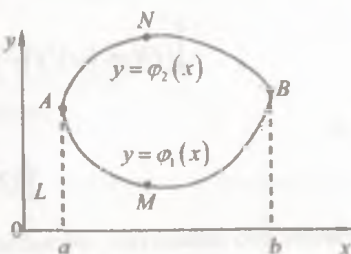


Рис. 12.13

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_{AMB} P(x, y) dx + \int_{BNA} P(x, y) dx = \\ &= \int_{AMB} P(x, y) dx - \int_{ANB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = \\ &= - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = - \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned}$$

т.е.

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx$$

Легко видеть, что этот результат верен и в случае, когда контур  $L$  содержит в себе и отрезки, параллельные оси  $Oy$  (рис. 12.14).

Действительно, в этом случае, очевидно,

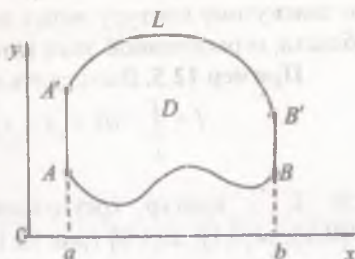


Рис. 12.14

$$\int_{BB'} P(x, y) dx = \int_{A'A} P(x, y) dx = 0.$$

Предположим теперь, что контур  $L$  составлен из линий:  $x = \psi_1(y)$  и  $x = \psi_2(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ), а функции  $Q(x, y)$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $\bar{D}$  (рис. 12.15).

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L Q(x, y) dy &= \int_{ANB} Q(x, y) dy + \int_{BMA} Q(x, y) dy = \\ &= \int_{ANB} Q(x, y) dy - \int_{AMB} Q(x, y) dy = \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy$$

т.е.

$$\oint_L Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} ds,$$

причем это равенство, очевидно, верно и тогда, когда контур  $L$  содержит в себе и отрезки, параллельные оси  $Ox$ .

Предположим, наконец, что контур  $L$  и функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  удовлетворяют одновременно условиям 1-го и 2-го случаев. Тогда, складывая оба полученных результата, будем иметь

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds \quad (12.9)$$

Эту формулу называют формулой Грина-Римана. Она выражает криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

**Пример 12.5.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  — контур треугольника с вершинами  $O(0,0)$ ,  $A(0,1)$ ,  $B(1,0)$  (рис. 12.16).

Вычисляя интеграл непосредственно, имеем:

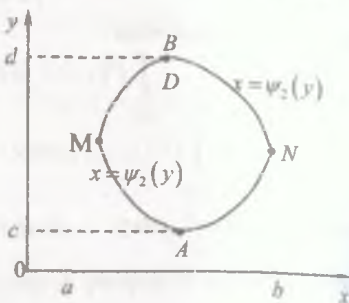


Рис. 12.15

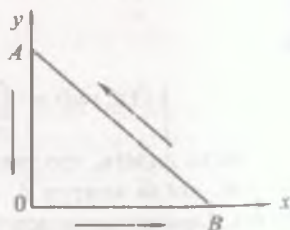


Рис. 12.16

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{AO} y^2 dx + (x+y)^2 dy + \int_{OB} y^2 dx + (x+y)^2 dy + \int_{BA} y^2 dx + (x+y)^2 dy = \\
 &= \int_0^1 (0+y)^2 dy + \int_1^0 \left[ (1-x)^2 + 1^2(-1) \right] dx = - \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 (2x - x^2) dx = \\
 &= - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Вычисляя тот же интеграл по формуле Грина-Римана, получим

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D [2(x+y) - 2y] ds = 2 \iint_D x ds = 2 \int_0^1 \left( x \int_0^{1-x} dy \right) dx = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

### 8. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Предположим, что интеграл  $\int_{AB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги

$AB$ , а зависит только от положения точек  $A$  и  $B$ .  
Тогда

$$\int_{ANB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = \int_{AMB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}),$$

т.е.

$$\int_{ANB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) - \int_{AMB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$$

или

$$\int_{ANB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) + \int_{BMA} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0,$$

т.е.

$$\oint_{ANBMA} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0,$$

Легко убедиться в том, что эти рассуждения верны и тогда, когда дуги  $AMB$  и  $ANB$  имеют более двух общих точек.

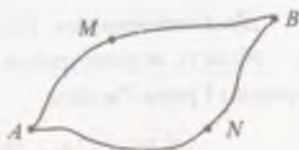
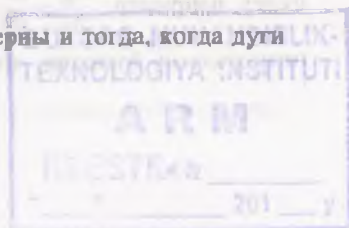


Рис. 12.17





Итак, если интеграл  $\int_{AB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги  $AB$ , то при любом замкнутом контуре  $L$  будет справедливо равенство

$$\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$$

Повторяя рассуждения в обратном порядке, получим, что и, наоборот, если  $\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$  по любому замкнутому контуру  $L$ , то интеграл

$\int_{AB} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги  $AB$ . Таким образом, независимость

интеграла от формы дуги равносильна равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру.

**Теорема 12.1.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $D$ , ограниченной одним замкнутым контуром. Тогда для независимости интеграла  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  от формы дуги  $AB \in \bar{D}$

необходимо и достаточно, чтобы при всех  $(x, y) \in \bar{D}$  выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (12.10)$$

**Достаточность.** Пусть  $L$  – произвольный замкнутый контур в  $D$ , а  $D_1$  – область, ограниченная контуром  $L$ . Поскольку  $\bar{D}_1 \subset \bar{D}$ , то, на основании формулы Грина-Римана

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \iint_{D_1} 0 \cdot ds = 0,$$

что и требовалось доказать.

**Необходимость.** Дано, что  $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  по любому замкнутому контуру  $L \in \bar{D}$ . Докажем, что тогда для всех  $(x, y) \in \bar{D}$  выполняется равенство (12.10).

Предположим противное, т.е. пусть в некоторой точке  $M(x_1, y_1) \in \bar{D}$  будет, например,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ . Так как на основании условия,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  есть непрерывная функция, то, в силу леммы о сохранении знака, существует



такая окрестность  $C_\varepsilon(M)$ , что неравенство  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$  выполняется всюду в области  $D_1 = C_\varepsilon(M) \cap \overline{D_1}$ . Возьмем в этой области произвольный замкнутый контур  $L_1$ , ограничивающий область  $D_2 \subset D_1$ . Поскольку  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$  всюду в  $D_2$ , то и

$$\iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0,$$

а значит, в силу формулы (12.9),

$$\oint_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy > 0,$$

что противоречит условию. Тем самым доказана необходимость.

**Пример 12.6.** Возьмем интеграл  $I = \int_{\overset{\circ}{AB}} y dx + (x + y) dy$ , где  $\overset{\circ}{AB}$  — дуга с началом в точке  $A(1, 1)$  и с концом в точке  $B(3, 2)$ . Поскольку в данном случае  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = x + y$ , то справедливо равенство

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial(x + y)}{\partial x}.$$

Поэтому интеграл  $I$  не зависит от формы дуги

$\overset{\circ}{AB}$ , а зависит только от положения точек  $A$  и  $B$ , в связи с чем его записывают просто так:

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,2)} y dx + (x + y) dy.$$

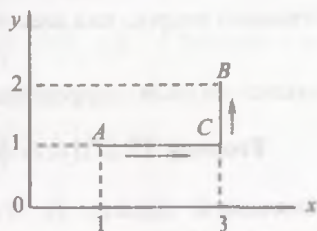


Рис. 12.18

Беря в качестве дуги  $\overset{\circ}{AB}$  линию  $\overset{\circ}{ACB}$ , состоящую из отрезков, параллельных осям координат, (рис. 12.18), получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\overset{\circ}{AC}} y dx + (x + y) dy + \int_{\overset{\circ}{CB}} y dx + (x + y) dy = \\ &= \int_1^3 1 \cdot dx + 0 + \int_1^2 (3 + y) dy = \end{aligned}$$

$$= x \Big|_1^3 + \left( 3y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3 - 1 + 6 - 2 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}.$$

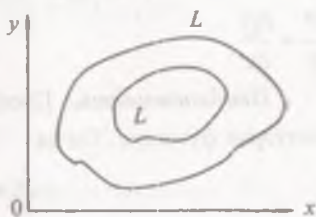


Рис. 12.19

**Примечание.** В доказательстве теоремы 12.1 использовалось, что

область  $D$  ограничена именно одним контуром  $L$ , а не несколькими. В этом случае, какой бы контур  $L_1$  в области  $\bar{D}$  мы не взяли, область, ограниченная этим контуром, также принадлежит области  $\bar{D}$  (рис. 12.19). Ниже дано понятие о связности области.

Область, ограниченная одним замкнутым  $y$  контуром, называется односвязной. Если же  $\partial D$  состоит из нескольких замкнутых контуров (в этом случае  $\partial D$  называют еще сложным контуром), то область  $D$  называется многосвязной.

Например, на чертеже 12.20 приведена  $0$  трехсвязная область.



Рис. 12.20

## 9. Условие полного дифференциала

Если  $z = F(x, y)$ , то  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  также есть, вообще говоря, функции от  $x$  и  $y$ , а значит, полный дифференциал функции  $z$  имеет вид

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Возникает вопрос: каждое ли выражение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (12.11)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $z = F(x, y)$ ?

**Теорема 12.2.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в односвязной области  $\bar{D}$ . Тогда для того, чтобы выражение (12.11) было полным дифференциалом некоторой функции  $z = F(x, y)$ , необходимо и достаточно, чтобы для всех  $(x, y) \in \bar{D}$  выполнялось равенство (12.10)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Необходимость.** Пусть  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dz$ , где  $z = F(x, y)$  — некоторая функция. Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

а значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (12.12)$$

Поскольку условия теоремы Шварца (см. главу X) выполнены, то из (12.12) и

следует, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  всюду в  $\bar{D}$ .

**Достаточность.** Пусть равенство (12.10) выполнено всюду в области  $\bar{D}$ . Возьмем в ней произвольную, но фиксированную точку  $A(x_0, y_0)$  и переменную  $y$  (текущую) точку  $B(x, y)$  (рис. 12.21). Введем в рассмотрение функцию.

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (12.13)$$

интеграл справа, в силу предыдущей теоремы, не зависит от формы дуги  $\overset{\curvearrowright}{AB}$ . Вычислим  $\frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

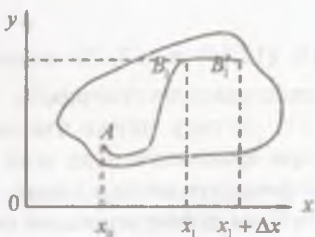


Рис. 12.21

Пусть  $B_1(x_1, y_1)$  – некоторая фиксированная точка области  $\bar{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) &= \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Второй интеграл справа возьмем по произвольной дуге  $AB_1$ , а первый – по дуге  $AB_1B_2$ . Получим

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{B_1B_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

а так как  $\int_{B_1B_2} Q(x, y) dy = 0$ , то

$$\Delta_x F(x_1, y_1) = \int_{B_1B_2} P(x, y) dx = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y) dx = P(\xi, y_1) \Delta x,$$

где  $\xi \in (x_1, x_1 + \Delta x)$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta_x F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(\xi, y_1).$$

Отсюда в пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$ , в силу непрерывности функции  $P(x, y)$ , получим

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

Поскольку  $B_1(x_1, y_1)$  – произвольная точка области  $\bar{D}$ , то всюду в  $\bar{D}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad (12.14)$$

Совершенно аналогично доказывается, что для всех  $(x, y) \in \bar{D}$  будет

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (12.15)$$

Из (12.14) и (12.15) вытекает равенство  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF$ , что и доказывает достаточность.

В силу только что доказанной теоремы, теорема 12.2 утверждает, что (при предположениях этой теоремы) криволинейный интеграл не зависит от формы дуги тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции.

### 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Пусть выражение (12.11) есть полный дифференциал некоторой функции  $F(x, y)$ . Тогда эту функцию называют первообразной выражения (12.11). Равенство (12.13) фактически дает способ нахождения первообразной, т.е. нахождения функции по ее полному дифференциалу.

Поскольку интеграл в (12.13) не зависит от формы дуги, соединяющей точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x, y)$ , то, беря в качестве этой дуги, например, линию  $ACB$  (рис. 12.22), получим из (12.13)

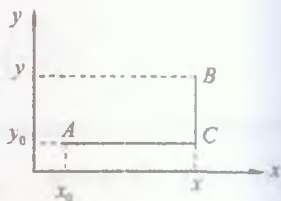


Рис. 12.22

$$F(x, y) = \int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

т.е.

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy. \quad (12.16)$$

**Пример 12.7.** Пусть  $dz = ydx + (x + y)dy$  (выполнение условия (12.10) было проверено в примере 12.6.). Тогда (рис. 12.23)

$$z = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x + y)dy = xy + \frac{y^2}{2}.$$

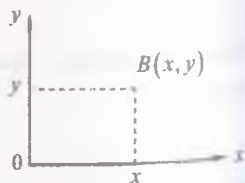


Рис. 12.23

**Примечание.** Функция, найденная по формуле (12.16), зависит от выбора точки  $A(x_0, y_0)$ . Беря в качестве  $A$  другую точку области  $D$ , получим другую первообразную  $\Phi(x, y)$ . Она отличается от  $F(x, y)$  на



постоянное число. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x, y) - F(x, y)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) - P(x, y) = 0,$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi(x, y) - F(x, y)) = 0.$$

Таким образом,  $\Phi(x, y) - F(x, y)$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ , т.е.

$$\Phi(x, y) - F(x, y) \equiv C, \quad (12.17)$$

где  $C = \text{const}$ .

В равенстве (12.17) положим  $(x, y) = (x_0, y_0)$ . Получим  $C = \Phi(x_0, y_0)$ , а значит

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Подставляя это в (12.13), находим

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Этот результат записывают обычно так

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \Phi(B) - \Phi(A). \quad (12.18)$$

Поскольку здесь  $\Phi(x, y)$  — любая первообразная подынтегрального выражения, то формулу (12.18) естественно назвать формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода.

## 11. Интегралы по поверхности 2-го рода

Пусть в каждой точке гладкой поверхности  $\Sigma$  задана вектор-функция  $\vec{F}(x, y, z)$  (рис. 12.24). Разобьем  $\Sigma$  на элементарные части  $\Delta\Sigma_1, \Delta\Sigma_2, \dots, \Delta\Sigma_n$ . На каждой из площадок  $\Delta\Sigma_k$  возьмем произвольную точку  $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  и вычислим  $\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Введем вектор  $\vec{\Delta\sigma}_k$ , направленный по нормали к площадке  $\Delta\Sigma_k$  в точке  $M_k$  и численно равный по длине площади  $\Delta\Sigma_k$  площадки  $\Delta\Sigma_k$ . Составим сумму  $\sum_{k=1}^n (\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \vec{\Delta\sigma}_k)$ , где  $(\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \vec{\Delta\sigma}_k)$

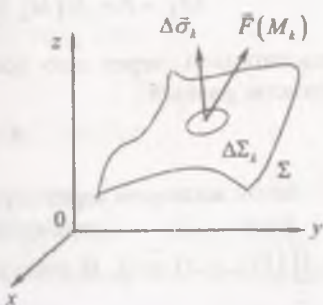


Рис. 12.24



есть скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$ .

Обозначим через  $\lambda$  наибольший из диаметров площадок  $\Delta\sigma_k$ . Предположим теперь, что  $\lambda \rightarrow 0$ , т.е. что каждая из площадок стягивается в соответствующую точку  $M_k$ . Если существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\sigma_k}),$$

не зависящий от способа дробления поверхности  $\Sigma$  и выбора точек  $M_k$ , то он называется интегралом 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначается  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$ .

При таком определении молча предполагается, что на всех площадках  $\Delta\sigma_k$  векторы  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  направлены по одну сторону от поверхности  $\Sigma$ , в связи с чем, эта поверхность считается односторонней. Если же одновременно направления всех нормалей поменять на противоположные, то интеграл изменит знак. Поэтому интеграл по поверхности 2-го рода определяется с точностью до знака. Знак же такого интеграла зависит от того, по какой стороне поверхности ведется интегрирование.

Для выяснения физического смысла интеграла по поверхности 2-го рода предположим, что  $\vec{v}(x, y, z)$  — скорость частиц жидкости в точке  $M(x, y, z)$  (рис. 12.25), а  $\Sigma$  — воображаемая поверхность в этой жидкости. Тогда за единицу времени через площадку  $\Delta\sigma_k$  протекает объем жидкости, приближенно равный

$$\Delta V_k = \Delta\sigma_k |\vec{v}(M_k)| \cos(\vec{v}(M_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k}) = (\vec{v}(M_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k}).$$

Следовательно, через всю поверхность  $\Sigma$  за время  $t=1$  протекает объем жидкости, равный

$$V = \iint_{\Sigma} (\vec{v}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$$

( $V$  — поток жидкости через эту поверхность).

Если  $\Sigma$  — замкнутая поверхность, то интеграл обозначают  $V = \oiint_{\Sigma} (\vec{v}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$ . В этом случае, если не оговорено противное, векторы  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  принято направлять наружу.

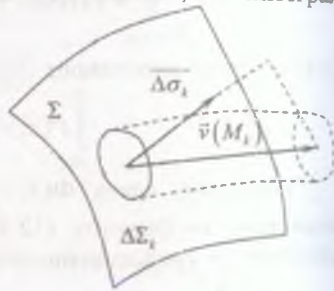


Рис. 12.25

**Пример 12.8.** Пользуясь определением, вычислить поверхностный интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{r}, d\vec{\sigma})$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки, а  $\Sigma$  — полная поверхность тела, ограниченного конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и плоскостью  $z = h$ . (Рис. 12.26)

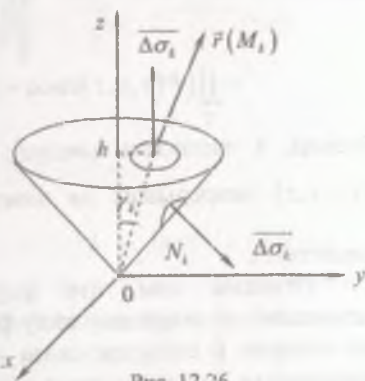


Рис. 12.26

Имеем

$$\iint_{\Sigma} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_{\text{бок}}} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) + \iint_{\Sigma_{\text{осн}}} (\vec{r}, d\vec{\sigma}),$$

где  $\Sigma_{\text{бок}}$  — боковая поверхность тела,  $\Sigma_{\text{осн}}$  — поверхность основания.

Поскольку  $\vec{r}(N_k) \perp \Delta\vec{\sigma}_k$  всюду на  $\Sigma_{\text{бок}}$ , то

$$\iint_{\Sigma_{\text{бок}}} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) = 0, \text{ а значит}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) &= \iint_{\Sigma_{\text{осн}}} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{r}(M_k), \Delta\vec{\sigma}_k) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\vec{r}(M_k)| \Delta\sigma_k \cos \gamma_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n h \Delta\sigma_k = h \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  — углы вектора  $\Delta\vec{\sigma}_k$  с осями  $Ox, Oy, Oz$ . Тогда

$$\Delta\vec{\sigma}_k = (\Delta\sigma_k \cos \alpha_k) \vec{i} + (\Delta\sigma_k \cos \beta_k) \vec{j} + (\Delta\sigma_k \cos \gamma_k) \vec{k}.$$

Поэтому, если  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ , то

$$\begin{aligned} (\vec{F}(M_k), \Delta\vec{\sigma}_k) &= (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \alpha_k + \\ &+ Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \beta_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k) \Delta\sigma_k \end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), d\vec{\sigma}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \alpha_k + \\ &+ Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \beta_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k) \Delta\sigma_k \end{aligned} \quad (12.19)$$

Справа стоит интегральная сумма функции  $P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$  для интеграла по поверхности 1-го рода (см. выражение (12.9)). Величины  $\alpha, \beta, \gamma$  являются здесь, очевидно, функциями от  $x, y, z$ . Следовательно, мы получаем формулу, выражающую интеграл по

поверхности 2-го рода через поверхностный интеграл 1-го рода

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma}) &= \\ &= \iint_{\Sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma \end{aligned} \quad (12.20)$$

Отсюда, в частности, следует, что если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  непрерывны на поверхности  $\Sigma$ , то интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma})$  существует.

Отметим еще, что формула (12.20) напоминает по внешнему виду формулу (12.9), что говорит о сходстве связи интегралов по поверхности 2-го и 1-го рода и криволинейных интегралов 2-го и 1-го рода.

Обратимся к формуле (12.20). Проектируя бесконечно малый вектор  $\overline{d\sigma}$  на плоскость  $xOy$ , получим (см. рис. 12.27)

$$d\sigma \cdot \cos \gamma = dS^{(3)},$$

т.е.

$$d\sigma \cdot \cos \gamma = dx dy.$$

Здесь под  $dx dy$  подразумевается элемент площади в плоскости  $xOy$ . Совершенно аналогично получим (в том же смысле)

$$d\sigma \cdot \cos \alpha = dy dz, \quad d\sigma \cdot \cos \beta = dx dz$$

(при этом предполагается, что все три угла:  $\alpha, \beta, \gamma$  – острые).

В связи с этим равенство (12.20) формально записывают так:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma}) = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

Правую часть называют скалярной формой интеграла  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma})$ . Ее

следует рассматривать как сумму трех интегралов, каждый из которых может быть сведен к двойному. Например, если  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\Sigma$ , и  $D^{(1)}$  – ее проекция на плоскость  $xOy$ , то, на основании формул (12.20) и (12.3), имеем

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma =$$

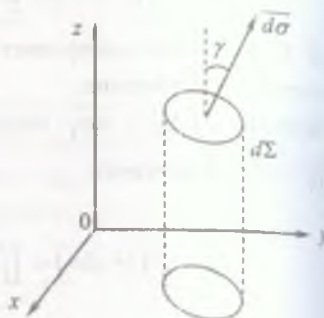


Рис. 12.27

$$= \iint_{D^{(1)}} R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

т.е.

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D^{(1)}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Аналогично, переписав уравнение  $z = \varphi(x, y)$  в виде  $x = \psi(y, z)$  и  $y = \chi(x, z)$  (предполагается, что функции  $\psi(y, z)$  и  $\chi(x, z)$  однозначны и имеют непрерывные частные производные 1-го порядка), будем иметь

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{D^{(1)}} P(\psi(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz = \iint_{D^{(2)}} Q(\chi(x, z), \chi(x, z), z) dx dz,$$

где  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  – проекции поверхности  $\Sigma$  на плоскости  $yOz$  и  $xOz$ . При этом в общем случае каждый из трех интегралов берется со своим знаком или с противоположным – в зависимости от знаков величин  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ .

**Пример 12.9.** Рассмотрим интеграл

$$I = \iint_{\Sigma} xyz dy dz + (x - yz) dx dz + (x^2 y^2 + z) dx dy,$$

где  $\Sigma$  – часть плоскости  $x + 2y + 3z = 6$ , расположенная в 1-м октанте, причем интегрирование ведется по верхней стороне плоскости (рис. 12.28).

Разрешая уравнение плоскости  $\Sigma$  относительно каждой из переменных, получим

$$x = 6 - 2y - 3z, \quad y = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z,$$

$$z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y,$$

а, значит, исходный интеграл равен

$$J = \iint_{D^{(1)}} (6 - 2y - 3z) y z dy dz + \iint_{D^{(2)}} \left( x - \left( 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z \right) z \right) dx dz +$$

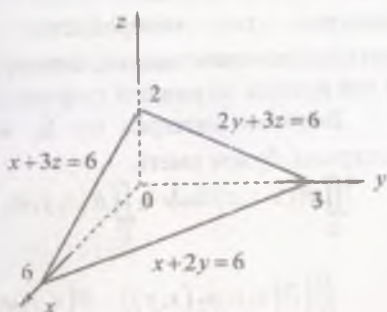


Рис. 12.28



$$\iint_{D^{(3)}} \left( x^2 y^2 + \left( 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \right) \right) dx dy = \int_0^3 y \int_0^{2-\frac{2}{3}y} (6 - 2y - 3z) z dz dy +$$

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \left( x - \left( 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z \right) \right) dx dz + \int_0^3 \left( \int_0^{6-2y} \left( x^2 y^2 + \left( 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \right) \right) dx \right) dy$$

## 12. Формула Остроградского- Гаусса

Пусть  $D$ -пространственная односвязная область, ограниченная снизу и сверху гладкими поверхностями  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  с уравнениями  $z = \varphi_1(x, y)$  и  $z = \varphi_2(x, y)$  соответственно (рис. 12.29). Далее, пусть  $G$ -проекция области  $D$  на плоскость  $xOy$ . Предположим, что

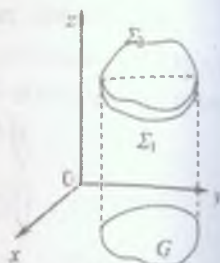


Рис. 12.29

функция  $R(x, y, z)$  и  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны в области  $D$ .

Тогда, обозначив  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ , получим

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy - \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy$$

(интеграл по поверхности  $\Sigma_1$  берется с противоположным знаком, потому, что интегрирование на ней ведется по нижней стороне поверхности).

Выражая интеграл по  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  через двойные интегралы, будем иметь:

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_G R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy =$$

$$\iint_G (R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))) dx dy = \iint_G \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Окончательно

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z} dV \quad (12.21)$$

Очевидно (см. рис. 12.30), что формула (12.21) верна и тогда, когда  $\partial D$  содержит в себе и цилиндрическую поверхность  $\Sigma_3$ , с образующей параллельной оси  $Oz$  (поскольку в этом случае  $\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0$ ).



Рис. 12.30

Аналогично формуле (12.21), получим (при очевидных предположениях)

$$\iiint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} dV$$

$$\iiint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dV.$$

Складывая все три результата, получим

$$\iiint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \quad (12.22)$$

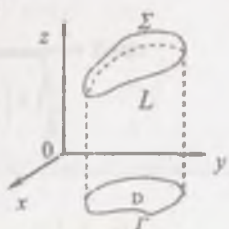


Рис. 12.31

Эту формулу называют формулой Остроградского-Гаусса. Выражая интеграл по замкнутой поверхности через тройной интеграл по области, ограниченной этой поверхностью, она тем самым является пространственным аналогом формулы Грина-Римана.

### 13. Формула Стокса

Пусть  $L$  – не пересекающий сам себя пространственный контур, на который можно натянуть гладкую поверхность  $\Sigma$ , пересекающуюся с любой прямой, параллельной оси  $Oz$ , не более чем в одной точке (рис. 12.32). Далее, пусть  $\Gamma$  – проекция контура  $G$  на плоскости  $xOy$ , а  $D$  – область, ограниченная контуром  $\Gamma$ . Пусть, наконец,  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\Sigma$ , а  $P(x, y, z)$  – функция, имеющая на поверхности  $\Sigma$  непрерывные частные

производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial P}{\partial z}$ .

Имеем

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx$$

или, на основании формулы Грина-Римана,

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy,$$

т.е.

$$\int_L P(x, y, z) = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \quad (12.23)$$

Записав уравнение  $z = \varphi(x, y)$  в виде  $-\varphi(x, y) + z = 0$ , заключаем, что направляющие косинусы нормали этой поверхности равны

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}. \quad (12.24)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \cos \gamma \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma d\sigma, \\ & - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \cos \beta \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta d\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя это в (12.23), получим

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma. \quad (12.25)$$

Точно так же, сделав очевидные предположения, получим формулы

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma \quad (12.26)$$

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma. \quad (12.27)$$

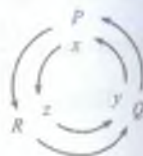


Рис. 12.32

Складывая все три результата, будем иметь

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \quad (12.28) \end{aligned}$$

Эта формула называется формулой Стокса. Ей можно придать следующий символический вид

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

**Примечание.1.** В формуле Стокса направление интегрирования в интеграле слева и сторона поверхности  $\Sigma$ , по которой ведется интегрирование, должны быть согласованы между собой. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Последняя из формул (12.24) означает, что всегда  $\cos \gamma > 0$ . Следовательно, воспользовавшись формулами (12.24), мы имеем дело с интегралами по верхней стороне поверхности  $\Sigma$ . С другой стороны, используя формулу Грина-Римана, мы предполагали, что в интеграле  $\oint_L P(x, y, \varphi(x, y))dx$

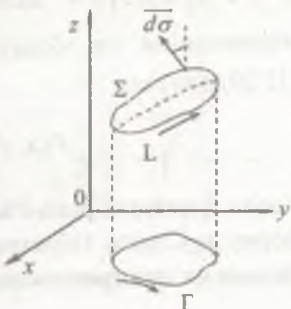


Рис. 12.33

интегрирование ведется против часовой стрелки. Но тогда в интеграле  $\oint_L P(x, y, z)dx$  интегрирование должно вестись так (см. рис. 12.33), чтобы с верхней стороны поверхности  $\Sigma$  оно казалось происходящим против часовой стрелки. Именно при таком условии была выведена формула (12.25).

Если же теперь в интеграле  $\oint_L P(x, y, z)dx$  поменять направление интегрирования на противоположное, то правая часть формулы (12.25) изменит знак, а это будет означать, что в интеграле справа направление нормали изменилось на противоположное. Однако, и в этом случае с конца вектора нормали интегрирование по контуру  $L$  будет казаться происходящим против часовой стрелки. Таким образом, формула (12.25) имеет место, если в интеграле справа вектор нормали к поверхности  $\Sigma$  направлен в ту сторону, откуда направление обхода контура  $L$  кажется происходящим против стрелки часов.

Аналогичное замечание касается и формул (12.26) и (12.27), а значит и всей формулы Стокса.

**Примечание 2.** Если поверхность  $\Sigma$  такова, что “верхняя” нормаль во всех ее точках образует острые углы с осями  $Ox, Oy$  и  $Oz$ , то правую часть формулы Стокса можно представить в виде интеграла по поверхности 2-го рода в скалярной форме, и тогда эта формула запишется так:



$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \iint_D \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (12.29)$$

**Примечание 3.** Предположим, что величины  $P$  и  $Q$  зависят только от  $x$  и  $y$ , а  $R(x, y, z) \equiv 0$ . Далее, пусть контур  $L$  лежит в плоскости  $xOy$ , а  $D$  — ограниченная им область этой плоскости. Тогда  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 0$ , и из (12.29) получим

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

а это — формула Грина-Римана, являющаяся, таким образом, частным случаем формулы Стокса. Обратно, формула Стокса есть обобщение формулы Грина-Римана на пространственный случай.

#### 14. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной дуге от формы дуги

Предположим, что функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$  непрерывны в пространственной области  $\bar{D}$ . Эту область будем считать такой, что на любой замкнутый контур, принадлежащий области  $\bar{D}$ , можно натянуть гладкую поверхность, также полностью принадлежащую этой области. Примером такой области может служить область между двумя концентрическими сферами. Наоборот, шар не является областью указанного типа.

Так же, как и в двумерном случае, легко показать, что равенство нулю интеграла  $\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  по любому гладкому или кусочно-гладкому контуру  $L \in \bar{D}$  равносильно независимости интеграла  $\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  (12.30) от формы дуги  $AB$ .

**Теорема 12.3.** Для того, чтобы интеграл (12.30) не зависел от формы дуги  $AB$ , необходимо и достаточно, чтобы всюду в области  $\bar{D}$  выполнялись равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (12.31)$$

Достаточность условий (12.31) вытекает из формулы Стокса, а необходимость проверяется так же, как и в двумерном случае.

Так же, как и в случае двух независимых переменных, доказывается, что условия (12.31) необходимы и достаточны для того, чтобы выражение

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

было полным дифференциалом некоторой функции  $F(x, y, z)$ . Поэтому предыдущая теорема, как и в двумерном случае, утверждает, что криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной дуге не зависит от формы этой дуги тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции.

Функция  $F(x, y, z)$ , являющаяся первообразной для выражения

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

может быть найдена, как нетрудно сообразить, по формуле (рис. 12.34)

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz.$$

При выполнении условий (12.31) для интеграла (12.30) легко получить формулу Ньютона-Лейбница, аналогичную формуле (12.18).

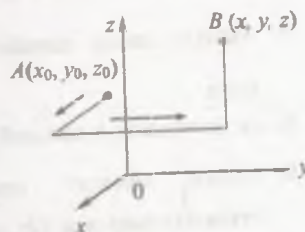


Рис. 12.34

#### Задачи и упражнения к главе XII

1. Найти массу линии  $y = \sqrt{x^3}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ), если плотность в каждой ее точке равна  $\gamma = x$ .
2. Найти массу дуги линии  $y^2 = 4x$  ( $y \geq 0$ ) на участке  $x \in [0, 4]$ , если плотность в каждой точке равна  $\gamma = \sqrt{x}$ .
3. Найти площадь цилиндрической поверхности  $y = \ln x$ , вырезанной плоскостями  $z = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  и поверхностью  $z = x^2$ .
4. Найти боковую поверхность тела, ограниченного плоскостями  $x = 1$ ,  $z = 0$  и поверхностями  $y^2 = x$ ,  $z = \sqrt{x}$ .

5. Найти площадь цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 4$ , вырезанной плоскостью  $z = 0$  и поверхностью  $z = (y + 2)^2$ .
6. Найти площадь части поверхности  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ , вырезанной плоскостями  $z = 0$ ,  $x = 3$  и поверхностью  $z = x^2$ .
7. Найти массу параболической оболочки  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 2$ ) если
8. ее плотность в каждой точке равна  $\gamma = 2$ .
9. Найти момент инерции поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) относительно оси  $Oz$ .
10. Вычислить массу части поверхности  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), если плотность в каждой ее точке равна  $\gamma = |xy|z$ .
11. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x + y, 2x)$  вдоль первой четверти окружности  $x^2 + y^2 = 4$ .
12. Вычислить интеграл  $\int_{AB} \cos y dx + \sin x dy$  для точек  $A(0, \pi)$  и  $B(\pi, 0)$ .
13. Вычислить интеграл  $\int_L \arctg \frac{y}{x} dx$ , где  $L$  - изображенный на чертеже 12.35 контур.

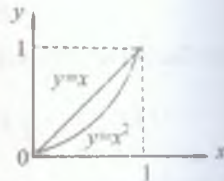


Рис. 12.35

**Непосредственно и при помощи формулы Грина-Римана вычислить интегралы:**

14.  $\oint_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где  $L$  - треугольник с вершинами  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 4)$ .
15.  $\oint_L (x^2 + y) dx - (x + y) dy$ , где  $L$  - контур, образованный линиями  $y = 0$ ,  $x - y = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$

16.  $\oint_L x dx + (x+y)^2 dy$ , где  $L$  – контур, образованный линиями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + y = 1$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

17.  $\oint_L x^2 dy + y^2 dx$  где  $L$  – контур, образованный линиями  $y = 0$ ,  $y = x$  и  $xy = 1$ .

18.  $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

19. Вычислить интеграл  $\oint_L (x+y) dx + (x-y) dy$ , где  $L$  – эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Объяснить результат.

**Вычислить интегралы:**

20.  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x-y) dx + (x-y) dy$ .

21.  $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ .

22.  $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ .

23. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислить интеграл.

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

24. По формуле Ньютона-Лейбница вычислить интеграл

$$\int_{\left(0, \frac{\pi}{4}\right)}^{(\pi, 0)} \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy.$$

25. Вычислить интеграл  $\oint_L (x+y) dx + (x-y) dy$ , где  $L$  – эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



26. Вычислить работу силы  $\vec{F} = \left\{ \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{x} \right\}$  вдоль прямолинейного отрезка соединяющего точки (1,1,1) и (2,4,8).

27. Найти работу силы

$$\vec{F} = \left\{ z, \sqrt{4-y^2}, xy \right\} \text{ вдоль дуги винтовой линии } \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \frac{t}{\pi} \end{cases} \text{ от точки}$$

пересечения с плоскостью  $xOy$  до точки пересечения с плоскостью  $z = 2$ .

28. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислить интеграл

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2 dy - z^3 dz.$$

Найти  $u(x, y, z)$ , если:

$$29. du = 2x \ln z dx + z^2 dy + \left( \frac{x^2}{z} + 2yz \right) dz$$

$$30. du = 2xz dx + 2z^4 dy + (x^2 + 8yz^3) dz$$

$$31. du = 2xz^2 dx + z^3 dy + (2x^2 z + 3yz^2) dz$$

### XIII. Интегралы, зависящие от параметра

#### 1. Определенные интегралы, зависящие от параметра

Пусть  $[a, b]$  – конечный отрезок оси  $Ox$ , а  $E$  – некоторое множество на оси  $Oy$ . Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

Где  $f(x, y)$  при каждом  $y \in E$  есть интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  функция. При переменном  $y$  этот интеграл есть функция, определенная на множестве  $E$ . Итак, рассмотрим функцию:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (13.1)$$

В стоящем справа интеграле переменную  $y$  называют параметром. Будем предполагать, что множество  $E$  имеет по крайней мере одну предельную точку  $y_0$ .

Тогда существует числовая последовательность  $\{y_n\} \in E$ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Предположим, что существует конечный предел:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon, x)$ , что

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

Здесь существенно, что  $\delta$  зависит не только от  $E$ , но и от  $x$ .

Функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  называется сходящейся к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно относительно  $x$  на отрезке  $[a, b]$  если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon)$ , что

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon), \forall x \in [a, b] \quad (13.2)$$

или

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

В этом случае пишут,  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$

**Лемма 13.1.** Если функция  $f(x, y)$  при любом  $y \in E$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  и при этом  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ , то и предельная функция



$\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

■ Выберем в  $E$  произвольную последовательность  $\{y_n\} \rightarrow y_0$ . Тогда при достаточно большом  $n$  будет  $|y_n - y_0| < \delta$ , а значит, на основании (13.2),

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon, x \in [a, b].$$

Поэтому, положив  $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ , получим, что последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  равномерно на отрезке  $[a, b]$  сходится к функции  $\varphi(x)$

$$\{\varphi_n(x)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi(x).$$

Поскольку все функции  $\varphi_n(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , то, на основании теоремы о непрерывности предельной функции функциональной последовательности, функция  $\varphi(x)$  также непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . □<sup>\*</sup>

**Теорема 13.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  при любом  $y \in E$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  и пусть  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \varphi(x)$ . Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (13.3)$$

■ Заметим, что стоящий справа интеграл существует на основании непрерывности функции  $\varphi(x)$ , обеспечиваемой леммой 13.1.

Снова возьмем в  $E$  последовательность  $\{y_n\} \rightarrow y_0$  и положим

$$\varphi_n(x) = f(x, y_n)$$

Тогда  $\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi(x)$ . На основании теоремы об интегрировании последовательности функций, имеем отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ т.о.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Это равенство выполняется для любой последовательности  $\{y_n\} \in E$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , а значит отсюда и следует соотношение (13.3). □

**Примечание.** Поскольку равенство (13.3) можно переписать так:

<sup>\*</sup> Здесь всюду в дальнейшем символы ■ и □ обозначают соответственно начало и конец доказательства.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

то **теорема 13.1** называют теоремой о предельном переходе по параметру под знаком определенного интеграла.

Рассмотрим теперь тот случай, когда  $E = [c, d]$ .

**Теорема 13.2.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Тогда интеграл (13.1) как функция аргумента  $y$  непрерывен на отрезке  $[c, d]$ .

■ На основании теоремы Кантора для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$(|x' - x''| < \delta \cap |y' - y''| < \delta) \Rightarrow (|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon, \forall (x, y) \in D)$$

в частности, для любого  $x \in [a, b]$  будет

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon).$$

Это значит, что  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} f(x, y_0)$ . Но тогда, на основании теоремы 13.1, получим

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0).$$

Поскольку здесь  $y_0$  — произвольная точка отрезка  $[c, d]$ , то теорема доказана. □

**Примечание.** Теорема о предельном переходе под знаком интеграла справедлива для любого промежутка изменения параметра  $y$ , конечного или бесконечного (отрезок, интервал, полуось, вся ось).

Справедлива также теорема, аналогичная **теореме 13.2** для интеграла с переменными пределами.

**Теорема 13.3.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  по совокупности переменных, а функции  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  непрерывны на отрезке  $[c, d]$ . Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

непрерывен на отрезке  $[c, d]$ , т.е.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx$$

для любого  $y_0 \in [c, d]$

**Пример 13.1.** Вычислим величину  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2} dx$

Поскольку функции

$$f(x, y) = \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2}, \varphi(y) = y, \psi(y) = y+1$$

непрерывны всюду, то интеграл  $I(y)$  также непрерывен. В частности, он непрерывен при  $y_0 = 0$ . Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2} dx = I(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

## 2. Дифференцирование и интегрирование определенных интегралов по параметру

**Теорема 13.4.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  (рис. 13.1) и непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  при любой постоянной  $y \in [c, d]$ . Пусть, далее, в области  $D$  существует частная производная  $f'_y(x, y)$ , непрерывная по совокупности переменных. Тогда при любом  $y \in [c, d]$  функция (13.1) дифференцируема и имеет следующую формулу

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (13.5)$$

■ Возьмем произвольно  $y_0 \in [c, d]$ . Тогда

$$\Delta\Phi(y_0) = \Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0) =$$

$$= \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx = \int_a^b (f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)) dx,$$

или, в силу теоремы Лагранжа,

$$\Delta\Phi(y_0) = \int_a^b f'_y(x, \eta) \Delta y dx = \Delta y \int_a^b f'_y(x, \eta) dx, \quad (13.4)$$

где  $\eta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, \eta) dx.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx = \int_a^b (f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)) dx.$$

Поскольку функция  $f'_y(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $D$ , то, на основании теоремы Кантора, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что всюду в  $D$

$$(|x' - x''| < \delta \cap |y' - y''| < \delta) \Rightarrow (|f'_y(x, y') - f'_y(x'', y'')| < \varepsilon).$$

В частности, для любого  $x \in [a, b]$  будет

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f'_y(x, y) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon).$$

Но если  $|\Delta y| < \delta$ , то тем более  $|\eta - y_0| < \delta$ , а значит

$$|f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b |f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)| dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что предел  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y}$  существует и равен  $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ ,

что и доказывает **теорему 13.4**. □

Формула (13.5) выражает т.н. правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру: для того чтобы (при условии **теоремы 13.4**) продифференцировать интеграл по параметру, достаточно продифференцировать по нему подынтегральную функцию.

**Теорема 13.4\* (обобщенное правило Лейбница).** Пусть функции  $f(x, y)$  и  $f'_n(x, y)$  непрерывны в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и кроме того, на отрезке  $[c, d]$  существуют



$\varphi'(y)$  и  $\psi'(y)$ . Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

дифференцируем по  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , и при этом

$$I'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

**Теоремы 13.3 и (13.4\*)** позволяют не только вычислять производные интегралов по параметру, но в отдельных случаях для этих интегралов явные численные выражения.

**Пример 13.2.** Вычислить величину

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

где  $a \geq 1$ .

В данном случае

$$f(x, a) = \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x), \quad f'_a(x, a) = \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Эти функции непрерывны на множестве  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, +\infty)$ . Дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx = \left| t = \operatorname{ctg} x, x = \operatorname{arccot} t, \right. \\ &\quad \left. dx = -\frac{dt}{1+t^2} \right| = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)(1+t^2)} = \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{a^2 + t^2} \right) dt = \frac{2a}{a^2 - 1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+1},$$

а значит

$$I(a) = \pi \ln(a+1) + c.$$

Но

$$I(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \cos^2 x) dx = 0,$$

так что

$$C = -\pi \ln 2.$$

Окончательно

$$I(a) = \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

**Теорема 13.5.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \text{ то}$$

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Утверждение этой теоремы было ранее доказано в теории двойных интегралов.

Мы ее сформулируем сейчас повторно в связи с последующим ее обобщением, которое рассмотрим ниже.

**Пример 13.3.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,$$

где  $a > 0, b > 0$ .

Подынтегральная функция не определена при  $x=0$  и  $x=1$ . Но в этих точках она, как легко видеть, имеет устранимые разрывы. Поэтому ее можно доопределить предельными значениями в этих точках

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$$

Считая функцию доопределенной по непрерывности на всем отрезке  $[0, 1]$ , ее можно представить в виде интеграла, зависящего от параметра  $x$ :

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

Поскольку функция  $f(x, y) = x^y$  непрерывна в прямоугольнике  $[0, 1] \times [a, b]$ , то на основании **теоремы 13.5**.

$$I = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1| \Big|_a^b.$$

Окончательно

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

### 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Напомним, что дискретным аналогом несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad (13.6)$$

является числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (13.7)$$

В частности, аналогом частичной суммы ряда (13.7)  $I_n = \sum_{k=1}^n a_k$  является для интеграла (13.6) определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

где  $b$  – некоторое конечное число, а непрерывным остатком ряда (13.7)

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

является интеграл

$$\int_b^{\infty} f(x) dx.$$

Поэтому (в случае сходимости ряда (13.7) с суммой  $s$ ) будет

$$S = S_n + r_n,$$

а, соответственно, для интеграла (13.6)

$$Q = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx,$$

где  $Q$  – значение интеграла (13.6). Сходимость ряда (13.7), означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

и аналогично, сходимость интеграла (13.6) значит, что

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Будем теперь вместо интеграла вида (13.1) рассматривать интеграл вида:

$$\Phi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad (13.8)$$

хотя результаты, полученные ниже, легко распространяются также на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

В том же смысле, в котором интеграл (13.7) есть непрерывный аналог числового ряда (13.6) интеграл (13.8) можно считать непрерывным аналогом функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (13.9)$$

Если интеграл (13.8) сходится при любом  $y \in E$ , то говорят, что этот интеграл сходится на множества  $E$ . Это значит, что при любом фиксированном  $y \in E$  будет:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y) dx,$$

или, что то же самое:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} f(x, y) dx = 0 \quad (13.10)$$

Для ряда (13.9) соответствующее условие сходимости записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = 0. \quad (13.11)$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда, на основании равенства (13.10), для этого  $\varepsilon$  существует такое  $B(\varepsilon, y)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

■ Интеграл (13.8) называется сходящимся на множестве  $E$  равномерно относительно параметра  $y$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B(\varepsilon)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \forall y \in E. \quad (13.12)$$

Соответственно для функционального ряда (13.9) это соотношение запишется так:

$$(n > N) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом равномерная сходимость интеграла (13.8) относительно параметра аналогична равномерной сходимости функционального ряда (13.9).



**Теорема 13.6.** Пусть существует функция  $g(x)$ , интегрируемая на каждом конечном отрезке  $[a, b]$  и такая, что

1.  $|f(x, y)| \leq g(x)$  для всех  $x \geq a$  и всех  $y \in E$ ;

2. интеграл  $\int_a^\infty g(x) dx$  сходится.

Тогда интеграл (13.8) сходится на множества  $E$  равномерно. Тот факт, что при любом  $y \in E$  интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  сходится (и даже абсолютно), следует из условия 1 и признака сравнения несобственных интегралов. Далее, из условия 1 следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B(\varepsilon)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left| \int_b^\infty g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Но тогда, в силу условия 1, при  $b > B$  тем более будет

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| \leq \int_b^\infty f(x, y) dx \leq \int_b^\infty g(x) dx < \varepsilon,$$

а поскольку  $B$  здесь зависит только от  $\varepsilon$ , т.е. не зависит от  $y$ , то равномерная сходимость интеграла (13.8) – доказана.  $\square$

Легко видеть, что теорема 13.6 аналогична признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. В связи с этим ее также мы будем в дальнейшем называть признаком Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру.

**Пример 13.4.** Рассмотрим интеграл  $\Phi(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+y}$ . Поскольку для всех  $x$  и для всех  $y \geq 0$  будет

$$\frac{1}{1+x^2+y} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

а интеграл  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$  сходится, то интеграл  $\Phi(y)$ , на основании признака Вейерштрасса, сходится равномерно на множестве  $E = [0, \infty)$ .

Ниже мы познакомимся с другими достаточными признаками равномерной сходимости интеграла (13.8).

**Пример 13.5.** Исследуем на равномерную сходимость интеграл

$$\Phi(y) = \int_1^{+\infty} \frac{2y}{x^4+y^2} dx,$$

где  $y \in R$  – произвольное число.

Имеем:

$$|f(x, y)| = \frac{2|y|}{x^4+y^2}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$x^4 + y^2 \geq 2|y|x^2, \text{ а значит}$$

$$|f(x, y)| \leq \frac{2|y|}{2|y| \cdot x^2} = \frac{1}{x^2}, \forall y \in R.$$

Поскольку интеграл  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  сходится, то исходный интеграл, на основании теоремы 13.6 сходится равномерно на всей оси  $Oy$ .

#### 4. Предельный переход по параметру под знаком несобственного интеграла

**Теорема 13.7.** Пусть функция  $f(x, y)$  при  $x \geq 0$  и при  $y \in E$  непрерывна по  $x$ , а  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \varphi(x)$  на любом конечном отрезке  $[a, b]$ . Пусть, далее, интеграл (13.8) сходится на множестве  $E$  равномерно. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dx. \quad (13.13)$$

На основании леммы 13.1, функция  $\varphi(x)$  непрерывна, а значит и интегрируема, на любом конечном отрезке  $[a, b]$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Для него в силу условия найдется такое  $B(\varepsilon)$ , что для всех  $y \in E$  будет

$$(b > B) \Rightarrow \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Возьмем некоторое конечное  $b' > b$ . Тогда

$$\left| \int_{b'}^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, y) dx - \int_{b'}^\infty f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| + \left| \int_{b'}^\infty f(x, y) dx \right|, \text{ т.е.}$$

$$\left| \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon.$$

Поскольку это верно при всех  $y \in E$ , то

$$(b' > B) \Rightarrow \left| \lim_{y \rightarrow y_0} \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| \leq 2\varepsilon,$$

или, на основании **теоремы 13.1**:

$$(b > B, b' > B) \Rightarrow \left| \int_b^{b'} \varphi(x) dx \right| \leq 2\varepsilon. \quad (13.14)$$

Здесь  $b'$  можно взять сколь угодно большим, а поэтому выражение (13.14) можно придать вид:

$$(B < b) \Rightarrow \left| \int_b^{\infty} \varphi(x) dx \right| \leq 2\varepsilon.$$

Последнее означает, что  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} \varphi(x) dx = 0$ , т.е. что интеграл  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$  сходится. Имеем теперь

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx = \left( \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right) + \int_b^{\infty} f(x, y) dx - \int_b^{\infty} \varphi(x) dx,$$

где  $b > 0$  – произвольное число. Отсюда

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| + \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_b^{\infty} \varphi(x) dx \right|.$$

Если  $b > B$ , то 2-ое и 3-е слагаемые справа не превосходят  $2\varepsilon$ . Взяв теперь  $b$  достаточно большим по отношению к  $y_0$ , можно, на основании (13.3) и 1-ое слагаемое справа сделать меньшим, чем  $\varepsilon$ . Таким образом, для взятого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что при  $|y - y_0| < \delta$  будет

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \right| < 5\varepsilon$$

откуда и следует выражение (13.13).  $\square$

### 5. Непрерывность несобственного интеграла по параметру

**Теорема 13.8.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных в области  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  (рис. 13.2) и пусть интеграл (13.8) равномерно сходится относительно параметра  $y$  на отрезке

$[c, d]$ . Тогда этот интеграл как функция аргумента  $y$  непрерывен на этом отрезке.

■ При доказательстве **теоремы 13.2** мы видели, что при изменении  $x$  на конечном отрезке  $[a, b]$  для любого  $y_0 \in [c, d]$  будет

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(x, y_0)$$

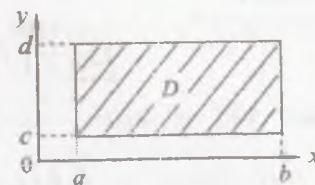


Рис. 13.2

Но тогда, на основании **теоремы 13.7**, в интеграле (13.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла, так что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx,$$

т.е.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0),$$

откуда и следует утверждение теоремы.  $\square$

### 6. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов по параметру

**Теорема 13.9.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна при  $x \geq a$ ,  $c \leq y \leq d$  и интеграл (13.8) сходится равномерно относительно параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , то

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (13.15)$$

Эта теорема обобщает утверждение теоремы (13.4) на случай несобственного интеграла 13.8.

■ Имеем

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx + \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy + \int_c^d \left( \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

или, на основании **теоремы 13.3**.

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx + \int_c^d \left( \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Но

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^d \left( \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d 0 \cdot dy = 0,$$



а значит

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

т.е.

$$\int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Формулу (13.15) можно обобщить и на случай, когда  $d = +\infty$ , т.е. когда интегралы по обоим переменным  $x$  и  $y$  — несобственные.

**Теорема 13.10.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в области

$$D = \{(x, y) | x \geq a, y \geq c\}.$$

Если:

1. интеграл  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  равномерно сходится относительно  $y$  на любом конечном отрезке оси  $Oy$ ;
2. интеграл  $\int_c^{\infty} f(x, y) dy$  равномерно сходится относительно  $x$  на любом конечном отрезке оси  $Ox$ ;
3. существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx \right) dy, \quad \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} |f(x, y)| dy \right) dx,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx,$$

т.е.

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx. \quad (13.16)$$

■ Пусть, для определенности, существует интеграл

$$\int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Возьмем произвольное  $t > c$ . Из условия 1 и теоремы 13.9 следует, что

$$\int_c^t \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx. \quad (13.17)$$

Рассмотрим функцию  $F(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$ . В силу теоремы 13.9, она непрерывна по  $x$ , а из условия 2 следует, что она равномерно относительно  $x$  на любом конечном отрезке  $[a, b]$  стремится к интегралу  $\int_c^{\infty} f(x, y) dy$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Далее,

$$|F(x, t)| \leq \int_c^t |f(x, y)| dy \leq \int_c^{\infty} |f(x, y)| dy.$$

Но последний интеграл сходится, а значит интеграл

$$\int_a^{\infty} F(x, t) dx = \int_a^{\infty} \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx$$

сходится равномерно относительно  $t$  (в силу признака Вейерштрасса) на любом конечном отрезке изменения  $t$ .

Итак, для функции  $F(x, t)$  выполняются все условия теоремы 13.7, а значит, на основании этой теоремы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^{\infty} F(x, t) dx = \int_a^{\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(x, t) dx,$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^{\infty} \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Поэтому, совершая в равенстве 13.17 предельный переход при  $t \rightarrow +\infty$ , получим требуемую формулу (13.16).  $\square$

**Примечание:** с геометрической точки в теореме 13.10 область  $D$  (рис. 13.2) заменяется областью  $D$ , изображенной на рис. 13.3.

**Теорема 13.11.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$  при  $x \geq 0$  и  $y \in [c, d]$ , и при этих  $x$  и  $y$  имеет непрерывную  $y$  частную производную  $f'_y(x, y)$ . Пусть, далее, интеграл (13.8) сходится при всех  $y \in [c, d]$ , а интеграл  $\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$  сходится на отрезке  $[c, d]$

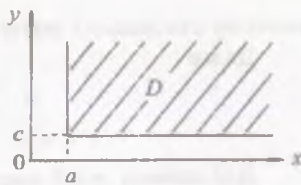


Рис. 13.3

равномерно относительно  $y$ .

Тогда при любом  $y \in [c, d]$  интеграл 13.8 дифференцируем по  $y$ , и

$$\Phi'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx. \quad (13.18)$$

■ Возьмем произвольное  $y \in [c, d]$ . Тогда, на основании *теоремы 13.9*,

$$\int_c^y \left( \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^y f'_y(x, y) dy \right) dx,$$

т.е.

$$\int_c^y \left( \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} f(x, c) dx. \quad (13.19)$$

На основании *теоремы 13.8*, функция  $\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$  непрерывна по  $y$ .

Поэтому дифференцируя по  $y$  обе части равенства (13.19) и используя *теорему Барроу*, получим

$$\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx = \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right)',$$

что равносильно формуле (13.18). □

**Пример 13.6.** Рассмотрим интеграл

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} dx, \quad (13.20)$$

где  $p \geq 0$ . Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{x} = p < \infty,$$

то этот интеграл является несобственным интегралом, только 1-го рода.

При  $x \rightarrow +\infty$  и  $p \geq 0$  имеем

$$\left| \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} \right| \approx \frac{1}{xe^x},$$

а поэтому сходимость интеграла (13.20) очевидна.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} \right) = \frac{xe^{-px}}{xe^x} = \frac{1}{e^{(p+1)x}}. \quad (13.21)$$

Для любого  $p \geq 0$  имеем

$$\frac{1}{e^{(p+1)x}} \leq \frac{1}{e^x},$$

а так как интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  сходится (поскольку он равен единице), то, на

основании признака Вейерштрасса интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{(p+1)x}}$  сходится равномерно

относительно параметра  $p$  на любом конечном отрезке изменения  $p$ .

Таким образом, условия теоремы 13.10 выполнены, и поэтому, используя (13.21), получим

$$\Phi'(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p+1)x} dx = \frac{e^{-(p+1)x}}{p+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+1},$$

откуда

$$\Phi(p) = \ln(p+1) + C \quad (13.22)$$

Из (13.20) непосредственно следует, что  $\Phi(0) = 0$ , а значит из (13.22) получим

$$0 = \ln 1 + C,$$

т.е.  $C = 0$ . Итак:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} dx = \ln(p+1)$$

При получении этого результата мы предполагали, что  $p \geq 0$ . Легко проверить, что этот результат верен и при  $p > -1$ .

**Пример 13.7.** Возьмем интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ , где  $a > 0$  (при  $a < 0$  интеграл, очевидно, расходится).

В качестве параметра возьмем, например,  $b$ , хотя можно было взять и  $a$ . Итак пусть

$$\Phi(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx.$$

Отсюда формально имеем:

$$\Phi'(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \left( \frac{\sin bx}{x} \right)' dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx.$$



Поскольку  $|\cos bx| \leq 1$ , а интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$  сходится (при  $a > 0$ ),

интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx$  сходится равномерно относительно параметра  $b$ .

Следовательно, действительно

$$\Phi'(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx.$$

Но

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{(a+bi)x} dx = \operatorname{Re} \left. \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} \right|_0^{\infty} = \operatorname{Re} \frac{1}{a-bi} = \operatorname{Re} \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Итак,

$$\Phi'(b) = \frac{a}{a^2+b^2},$$

откуда

$$\Phi(b) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + C.$$

Но  $C = \Phi(0) = 0$ , так что  $\Phi(b) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ .

Предположим, что  $b > 0$ . Тогда

$$\lim_{a \rightarrow +0} \Phi(b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx,$$

т.е.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, если  $b > 0$ , то

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (13.23)$$

Эту формулу (мы ее используем позже) называют интегралом Эйлера-Дирихле.

**Примечание.** Рассмотренная теория интегралов, зависящих от параметра, легко переносится на случай двух и большего числа независимых параметров, т.е. на интегралы вида:

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx. \quad (13.24)$$

Например, в случае двух параметров вместо интеграла (13.8) мы имеем дело с интегралом вида

$$\Phi(y, z) = \int_a^{\infty} f(x, y, z) dx,$$

где, например,  $c \leq y \leq d$ ,  $f \leq z \leq h$ . В этом случае в формулировках и доказательствах приведенных выше теорем следует заменить отрезок  $[c, d]$  оси  $Oy$  некоторым  $n$ -мерным параллелепипедом в пространстве точек  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

В частности, к случаю двух независимых параметров  $s$  и  $\omega$  сводится случай комплексного параметра  $p = s + \omega i$ . Таким образом, все рассмотренные теоремы можно считать доказанными и для интегралов вида

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(x, p) dx,$$

где  $p$  — комплексный параметр. Интеграл такого вида составляет содержание одного из важнейших разделов инженерной математики “Операционное исчисление”.

## 7. О других признаках равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру

Признак Вейштрасса (теорема 13.4) является наиболее простым признаком равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру (в сущности, он “списан” с соответствующего признака Вейерштрасса для функционального ряда). Можно доказать, хотя и более сложным образом, следующее утверждение.

**Теорема 13.12.** (Признак Дирихле). Пусть имеется интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx, \quad (13.25)$$

Где  $y \in E$ , и пусть:

1. При всех  $y \in E$  функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $\frac{\partial g}{\partial x}$  непрерывны по  $x$  при всех  $x \geq a$ ;
2. Функция  $F(x, y) = \int_a^x f(x, y) dx$  при любом  $y \in E$  ограничена в промежутке  $[a, +\infty)$ ;
3.  $\frac{\partial g}{\partial x} \leq 0$  при всех  $y \in E$  и всех  $x \geq a$ ;

4. Существует функция  $\psi(x)$ , непрерывная в промежутке  $[a, +\infty)$ , такая, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0 \text{ и } |g(x, y)| \leq \psi(x) \text{ для всех } y \in E \text{ и } x \geq a.$$

Тогда интеграл (13.25) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $E$ .

**Пример 13.8.** Пусть имеется интеграл  $\Phi(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ . В нем функция  $\sin x$  есть первообразная для  $\cos x$ , а при  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$  будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-xy}}{x} \right) = -\frac{e^{-xy}}{x^2} (1 + xy) < 0; \quad \frac{e^{-xy}}{x} \leq \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Все условия **теоремы 13.12** выполнены, а значит интеграл (13.25) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $E = [0, +\infty)$ .

Существуют и некоторые другие признаки равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру.

#### 8. Другие виды несобственных интегралов, зависящих от параметра

До сих пор мы рассматривали зависящие от параметра несобственные интегралы 1-го рода, т.е. интегралы с бесконечными пределами. Можно теперь иметь дело с интегралами вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (13.26)$$

где  $[a, b]$  – конечный отрезок, но функция  $f(x, y)$  имеет на множестве  $E$  одну или несколько точек, в котором она обращается в бесконечность. Примером может служить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Для интеграла вида (13.26) точно так же можно ввести понятие равномерной относительно параметра сходимости, а также сформулировать и доказать теоремы, аналогичные рассмотренным для интегралов вида (13.8). Наконец, можно рассмотреть “объединенный” случай, когда в интеграле (13.26) может быть  $b = +\infty$ , а в промежутке  $[a, +\infty)$  функция  $f(x, y)$  имеет одну или несколько особых точек. В этом случае интеграл (13.26) представляют в виде суммы нескольких несобственных интегралов 1-го и 2-го рода.

#### 9. Гамма-функция и ее основные свойства

Рассмотрим интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ , где  $p$  – некоторое вещественное

число. Если  $x$  велико, то

$$e^{-x} x^{p-1} = \frac{x^{p-1}}{e^x} < \frac{x^{p-1}}{x^{p+1}} = \frac{1}{x^2},$$

а так как  $2 > 1$ , то данный интеграл как несобственный интеграл 1-го рода сходится.

Однако, при  $p < 1$  этот интеграл является несобственным интегралом и 2-го рода, так как при  $p < 1$  в точке  $x = 0$  будет  $e^{-x} x^{p-1} = \infty$ , т.е.  $x = 0$  – особая точка подынтегральной функции. При этом, если  $x \rightarrow +0$ , то  $e^{-x} x^{p-1} \approx \frac{1}{x^{1-p}}$ . Если  $1 - p < 1$ , т.е. если  $p > 0$ , то интеграл сходится и как несобственный интеграл 2-го рода.

Итак, учитывая, что при  $p \geq 1$  рассматриваемый интеграл есть несобственный интеграл только 1-го рода, заключаем, что данный интеграл сходится при всех  $p > 0$ . При этих  $p$  он является функцией параметра  $p$ . Эта функция называется гамма-функцией и обозначается  $\Gamma(p)$ . Таким образом, по определению (при  $p > 0$ )

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (13.27)$$

Например, при  $p = 1$  имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Далее,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}^2} d(\sqrt{x}) = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(мы используем ранее известный результат для интеграла Пуассона).

Заменим  $p$  в формуле (13.27) на  $p + 1$ . Получим, интегрируя по частям

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} -e^{-x} x^p dx = \left| \frac{u=x^p, dv=e^{-x} dx}{dv=px^{p-1} dx, v=-e^{-x}} \right| = x^p e^{-x} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Поскольку  $p > 0$ , то внеинтегральное слагаемое равно нулю, а значит

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (13.28)$$



Эта формула выражает т.н. основное свойство гамма-функции. В частности, из нее находим

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$$

и вообще при любом натуральном  $n$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Последняя формула позволяет обобщить понятие факториала на случай любого числа  $p > -1$  следующим образом

$$p! = \Gamma(p+1)$$

Например,

$$0! = \Gamma(1) = 1.$$

(этот результат использовался нами еще на первых занятиях).

Далее,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## 10. Формула Стирлинга

Мы уже видели, что при  $p > -1$  будет

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx.$$

Исследуем поведение этой величины при  $p \rightarrow +\infty$ . Для этого совершим в интеграле замену переменной по формуле  $x = p(1+\alpha)$ . Получим

$$\Gamma(p+1) = \int_{-1}^{\infty} e^{-p(1+\alpha)} p^p (1+\alpha)^p p d\alpha = e^{-p} p^{p+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-p\alpha} (1+\alpha)^p d\alpha.$$

Последний интеграл для кратности обозначим через  $I(p)$ . Имеем

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} \left( e^{-\alpha + \ln(1+\alpha)} \right)^p d\alpha.$$

Положив

$$u(\alpha) = \alpha - \ln(1+\alpha),$$

будем иметь

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha. \quad (13.29)$$

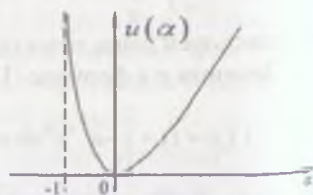


Рис. 13.4

Легко видеть, что график функции  $u(\alpha)$  имеет вид, изображенный на рис. 13.4. Но тогда, при  $p > 0$  вид графика функции  $e^{-pu(\alpha)}$  будет такой, как указано на рис. 13.5. При этом если  $p \rightarrow +\infty$ , то пик этого графика, сохраняя высоту, равную единице, неограниченно суживается. Поэтому основной вклад в интеграл (13.29) дает некоторый малый отрезок  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Но на этом промежутке будет

$$u(\alpha) = a - \left( \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \dots \right) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3} + \dots \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Функция же  $e^{-p\frac{\alpha^2}{2}}$  (рис. 13.6) имеет при больших  $p$  также узкий пик при  $a=0$ , а значит

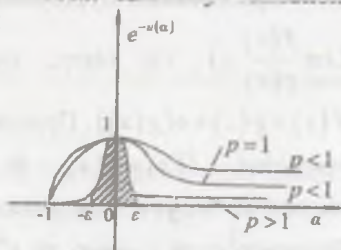


Рис. 13.5

основной вклад в интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$  дает малый отрезок  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

Итак, получаем цепочку приближенных равенств (тем более точных, чем больше  $p$ ):

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-pu(\alpha)} d\alpha \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

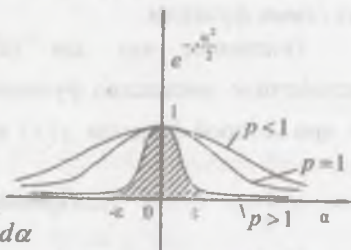


Рис. 13.6

Но

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\alpha\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\alpha\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{p}},$$

а значит при больших  $p$  будет  $\int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}$ .

Способ получения последнего приближенного равенства есть одна из разновидностей общего метода, называемого методом перевала

Итак, если  $p$  велико, то

$$\Gamma(p+1) \approx e^{-p} p^{p+1} \sqrt{\frac{2\pi}{p}},$$

т.е.

$$\Gamma(p+1) \approx e^{-p} p^p \sqrt{2\pi p}. \quad (13.30)$$

Если  $p=n$ , где  $n$  — натуральное число, то приходим к т.н. формуле Стирлинга

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n},$$

позволяющей приближенно вычислять большие числа. Ее относительная погрешность тем меньше, чем больше  $n$ . Например, при  $n = 10$  относительная погрешность формулы Стирлинга составляет 0,08%.

**Примечание.** Пусть имеются функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , такие, что

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , т.е. такие, что при  $x \rightarrow \infty$  будет  $f(x) \approx g(x)$ , а значит

$f(x) = g(x) + o(g(x))$ . Практически это значит, что чем больше  $x$  тем точнее равенство  $f(x) \approx g(x)$ . В этом случае функцию  $g(x)$  называют асимптотическим представлением функции  $f(x)$  на бесконечности. Например, если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $x^4 + x \ln x \approx x^4$ .

В связи с этим формулу (13.30) называют асимптотической формулой для гамма-функции.

Очевидно, что для каждой функции  $f(x)$  можно построить бесконечное множество функций  $g(x)$ . Наиболее удобным следует считать ту, при которой функция  $g(x)$  вычисляется наиболее просто.

### 11. Производная гамма-функции

Из формулы (13.27) формально находим

$$\Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx. \quad (13.31)$$

Для доказательства справедливости этой формулы достаточно проверить, что при  $D < \delta \leq p \leq \rho < \infty$  интеграл (13.31) сходится равномерно относительно параметра  $p$ .

Имеем при  $x > 1$

$$|e^{-x} x^{p-1} \ln x| < e^{-x} x^{p-1} x = e^{-x} x^p \leq e^{-x} x^{\rho}.$$

Но интеграл  $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx$  сходится при любом  $\rho$ , а значит интеграл (13.31), как несобственный интеграл 1-го рода, сходится равномерно относительно  $p$ .

Пусть теперь  $x < 1$ . Поскольку  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \ln x = 0$  при любом  $k > 0$ , то при любом  $k > 0$  и при  $x < 1$  будет  $|\ln x| \leq \frac{1}{x^k}$ . В частности, можно считать, что  $k < \delta$ . Поэтому

$$|e^{-x} x^{p-1} \ln x| = \frac{|\ln x|}{e^x x^{1-p}} \leq \frac{|\ln x|}{e^x x^{1-\delta}} \leq \frac{1}{e^x x^{1-\delta}} \cdot \frac{1}{x^k} = \frac{1}{e^x x^{1-(\delta-k)}}.$$

Но если  $x \rightarrow +0$ , то

$$\frac{1}{e^x x^{1-(\delta-k)}} \approx \frac{1}{x^{1-(\delta-k)}},$$

а так как интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-(\delta-k)}}$  сходится, то интеграл (13.31) как несобственный интеграл 2-го рода сходится равномерно относительно  $p$ .

Итак, мы показали, что функция  $\Gamma(p)$  дифференцируема при любом  $p > 0$ , и ее производная может быть вычислена по формуле (13.31).

### 12. Бэта-функция

Бэта-функция определяется следующей формулой:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (13.32)$$

где  $p > 0$ ,  $q > 1$ . Если  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$ , то интеграл (13.32) собственный. Если же  $p < 1$ , то интеграл есть несобственный интеграл 2-го рода, причем его сходимость очевидна. То же относится и к случаю, когда  $q < 1$ .

Произведем в интеграле (13.32) замену переменной по формуле  $x = 1 - t$ . Получим

$$B(p, q) = - \int_{+1}^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt,$$

т.е.

$$B(p, q) = B(q, p), \quad (13.33)$$

так что бэта-функция симметрична относительно своих аргументов.

Далее, из (13.32) имеем при  $q > 1$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\left(\frac{x^p}{p}\right) = \\ &= \frac{1}{p} (1-x)^{q-1} x^p \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \end{aligned}$$

Но

$$x^p (1-x)^{q-2} = x^{p-1} (1-x)^{q-2} (1-(1-x)) = x^{p-1} (1-x)^{q-2} - x^{p-1} (1-x)^{q-1}.$$

Поэтому



$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx =$$

$$= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q).$$

Отсюда

$$\frac{p+q-1}{p} B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p, q-1),$$

а значит

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

и, в силу (13.33), аналогично

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \quad (13.34)$$

Пусть  $q=n$ , где  $n$  — натуральное число. Тогда, последовательно применяя формулу (13.34), будем иметь

$$B(p, n) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \cdots \frac{1}{p+1} B(p, 1).$$

Но

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p},$$

а поэтому

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}.$$

В частности, если  $p$  есть натуральное число  $m$ , то

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2) \cdots (m+(n-1))},$$

или

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Но мы видели, что  $(m-1)! = \Gamma(m)$ ,  $(n-1)! = \Gamma(n)$ . Следовательно, (13.34) можно переписать так:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Можно показать, что при произвольных  $p$  и  $q$  (не обязательно целых) последняя формула остается в силе, т.е. при любом  $p > 0$ ,  $q > 0$ , будет

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## XIV. Основы математической теории поля

### 1. Понятие скалярного поля

Скалярным полем называют часть пространства, в каждой точке которого задана некоторая скалярная величина. Примерами могут служить: поле температур внутри нагретого тела, поле давлений жидкости в некотором сосуде, поле плотностей в некотором объеме газа и т.п.

Отнесем поле к конкретной системе координат  $Oxyz$ . Рассматриваемую в ней скалярную величину будем обозначать  $u(x, y, z)$ .

Совокупность точек поля, в которых поле  $u(x, y, z)$  имеет постоянное значение  $C$ , называется поверхностью уровня данного поля. Очевидно, ее уравнение:

$$u(x, y, z) = C$$

Придавая константе  $C$  всевозможные значения, получим семейство поверхностей уровня.

**Пример 14.1.** Поверхностями уровня поля плотности земной атмосферы являются — в первом приближении — концентрические сферы с центром в центре Земли. Чем больше радиус сферы, тем, очевидно, меньше  $C$ . (рис. 14.1)



Рис. 14.1

**Пример 14.2.** Поверхностями уровня поля гидростатического давления воды в сосуде являются горизонтальные плоскости. Чем больше глубина плоскости, тем больше  $C$ . (рис. 14.2)



Рис. 14.2

**Пример 14.3.** Возьмем некоторое абстрактное поле

$$u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Его поверхности уровня имеют уравнение

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = C,$$

т.е.

$$z = C(x^2 + y^2).$$

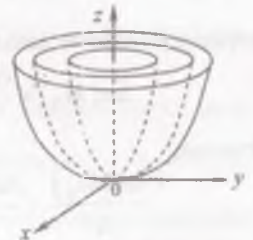


Рис. 14.3

Это — семейство параболоидов вращения с общей осью  $Oz$ . Чем «уже» параболоид, тем больше  $C$ . (рис. 14.3)

## 2. Производная скалярного поля в данном направлении

Пусть поле задано функцией  $u(x, y, z)$ . Возьмем в нем некоторую фиксированную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и «текущую» точку  $M(x, y, z)$  (рис. 14.4). Составим разность

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0),$$

т.е.

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Обозначим  $\Delta \ell = |\overline{M_0 M}|$ , и рассмотрим отношение

$\frac{\Delta u}{\Delta \ell}$ . Оно равно средней скорости изменения поля на

отрезке  $M_0 M$ . Пусть теперь  $\Delta \ell \rightarrow 0$ . Если

существует  $\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell}$ , то он называется

производной поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  в направлении  $\overline{M_0 M}$ , и обозначается

$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ . С физической точки зрения эта величина, очевидно, представляет

собой скорость изменения поля в точке  $M_0$  в направлении точки  $M$ .

Введем обозначения:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$$

Тогда

$$\Delta x = \Delta \ell \cos \alpha, \Delta y = \Delta \ell \cos \beta, \Delta z = \Delta \ell \cos \gamma$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы  $\overline{M_0 M}$ .

Предположим, что функция  $u(x, y, z)$  во всех точках поля имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Тогда эта функция дифференцируема всюду в поле, а это значит, что

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta \ell)$$

Отсюда,

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} + \frac{o(\Delta \ell)}{\Delta \ell},$$

т.е.

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \frac{o(\Delta \ell)}{\Delta \ell}. \quad (14.1)$$

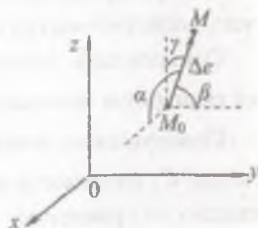


Рис. 14.4

Если  $\Delta \ell \rightarrow 0$ , то, учитывая, что  $\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{o(\Delta \ell)}{\Delta \ell} = 0$ , получим в пределе из равенства (14.1)

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (14.2)$$

Итак, мы не только доказали существование производной  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  при сделанных предположениях, но и вывели формулу для ее вычисления.

**Пример 14.4.** Вычислить производную поля  $u = x^3 - 2y^2 + 4yz$  в точке  $M_0(1, 2, -1)$  в направлении вектора  $\overline{M_0 M_1}$ , где  $M_1(3, 1, 1)$ .

**Решение.** Вычислим частные производные функции  $u$ , т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y + 4z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4y,$$

а, значит

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -12, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 8$$

Далее, в данном случае  $\Delta x = 2$ ,  $\Delta y = -1$ ,  $\Delta z = 2$ , а поэтому

$$\Delta \ell = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3,$$

так что

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, на основании формулы (14.2) получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = 3 \frac{2}{3} + (-12) \left( -\frac{1}{3} \right) + 8 \frac{2}{3} = \frac{34}{3}$$

**Примечание.** Положим  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 90^\circ$ . Тогда из формулы (14.2)

следует, что  $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Таким образом, частную производную

$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$  можно теперь рассматривать, как производную поля  $u(M)$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Аналогичное замечание

касается и производных  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Следовательно, частные производные

функции трех переменных можно считать теперь частными случаями производной по направлению, когда направление дифференцирования параллельно направлениям координатных осей.



### 3. Градиент скалярного поля

Выше отмечалось, что производные поля в одной и той же точке, но в разных направлениях, вообще говоря, различны. Возьмем точку  $M$  в поле  $u(x, y, z)$  и выясним, в каком направлении (т.е. при каких углах  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$ )

величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  будет наибольшей. С этой целью введем вектор

$$\vec{N} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k}, \quad (14.3)$$

а также вектор  $\vec{r} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ , являющийся ортом искомого направления. Тогда формула (14.2) примет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = (\vec{N}, \vec{r})$$

а так как  $|\vec{r}| = 1$ , то

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\vec{N}| \cos(\vec{N}, \vec{r}) \quad (14.4)$$

Отсюда следует, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  примет наибольшее значение, если

угол между  $\vec{N}$  и  $\vec{r}$  равен нулю, т.е.  $(\vec{N}, \vec{r}) = 0$ , т.е.  $\vec{r} \uparrow \uparrow \vec{N}$ , а это значит, что искомым направлением является направление вектора  $\vec{N}$ . Таким образом, в данной точке  $M_0$  поле  $u(x, y, z)$  наиболее быстро возрастает в направлении вектора  $\vec{N}$ , определяемого формулой (14.3). Этот вектор называется градиентом скалярного поля  $u(M)$  в данной точке  $M_0$  и обозначается  $\text{grad } u(M_0)$ .

Итак, по определению,

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k} \quad (14.5)$$

Напомним, что касательная плоскость к поверхности  $u(x, y, z) = C$ , (а это — поверхность уровня поля  $u(x, y, z)$ ) в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет уравнение

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (z - z_0) = 0.$$

Следовательно, величины  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$  есть проекции

нормального вектора этой плоскости. Поэтому равенство (14.5) означает, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня поля в данной точке.

Формулу (14.4) можно теперь переписать так

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\text{grad } u(M_0)| \cos \left( \vec{\tau}, \text{grad } u(M_0) \right). \quad (14.6)$$

Отсюда следует, что производная поля в данном направлении  $\vec{\ell}$  равна проекции градиента поля на это направление (рис. 14.5).

В частности, если направление  $\vec{\ell}$  совпадет с направлением градиента, то  $\left( \vec{\tau}, \text{grad } u(M_0) \right) = 0$ , а значит, в этом случае

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\text{grad } u(M_0)|,$$

т.е.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \sqrt{\left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right)^2}.$$

Итак, из формального определения (14.5) следует, что градиент скалярного поля – это вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания поля и равный по длине скорости этого возрастания.

Если же направление лежит в касательной плоскости к поверхности уровня поля, то  $\left( \vec{\tau}, \text{grad } u(M_0) \right) = 90^\circ$ , и из формулы (14.6) получим, что  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = 0$ .

Этот результат естественен, так как вдоль поверхности уровня поле сохраняет постоянное значение, т.е. имеет скорость изменения равную нулю.

Из последних рассуждений вытекает, что, хотя производная по направлению и градиент скалярного поля выражаются в декартовых координатах формулами (14.2) и (14.5), они не зависят от выбора системы координат, т.е. являются внутренними характеристиками поля. Такие характеристики называют инвариантами поля.

**Пример 14.5.** Возьмем поле  $u = x^3 - 2y^2 + 4yz$  из предыдущего примера и ту же точку  $M_0(1, 2, -1)$ . Тогда, как мы видели,

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -12, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 8,$$

а, значит, из формулы (14.5) следует, что

$$\text{grad } u(M_0) = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Отсюда

$$|\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{9 + 144 + 64} = \sqrt{217}.$$

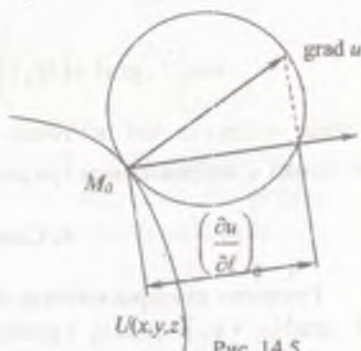


Рис. 14.5

Пусть  $\vec{\ell}$  – направление из точки  $M_0$  к точке  $M(3,1,1)$ . Тогда (см. предыдущий пример).  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{34}{3}$ , а значит,

$$\cos(\vec{\ell}, \text{grad } u(M_0)) = \frac{\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}}{|\text{grad } u(M_0)|} = \frac{34}{3\sqrt{217}} \approx 0,77.$$

Отсюда следует, что в точке  $M(1,2,-1)$  направление к точке  $M(3,1,1)$  составляет с направлением градиента поля угол, приближенно равный  $39^\circ 36'$ .

#### 4. Свойства градиента

Градиент скалярного поля обладает следующими свойствами:

1.  $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2$   
(следует помнить, что стоящая справа сумма – векторная).
2. Если  $c = \text{const}$ , то  $\text{grad } cu = c \text{grad } u$
3.  $\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1$
4. Если  $f(u)$  – дифференцируемая функция, то  $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$ .

Последняя формула позволяет найти градиент сложной функции. Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (14.5), а свойства 3 и 4 легко проверяются. Например, имеем в силу (14.5)

$$\text{grad } f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \vec{k}.$$

Но, согласно формуле для производной сложной функции,

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}.$$

А значит,

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \left( \frac{\partial f(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \vec{k} \right) = f'(u) \text{grad } u,$$

т.е. свойство 4 доказано.

Получим еще одну формулу, полезную при решении задач.

Пусть  $u$  – поле расстояний от начала координат, т. е. пусть  $u = r$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

и, аналогично

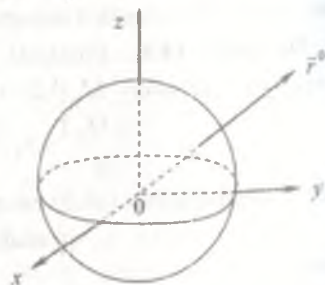


Рис. 14.6



$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Поэтому

$$\text{grad } u = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

т.е.

$$\text{grad } r = \vec{r}^{\circ} \quad (\text{рис. 14.6}) \quad (14.7)$$

В данном случае поверхностями уровня поля являются сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ . И то, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, является очевидным геометрическим фактором.

## 5. О плоскопараллельном поле

Скалярное поле называют плоскопараллельным, если оно не зависит от  $z$ , т.е. если оно имеет вид  $u(x, y)$ . В этом случае все сечения поля плоскостями  $z = \text{const}$  одинаковы, а поэтому можно рассматривать его только в плоскости  $xOy$ , т.е. считать поле двумерным.

Полагая  $u(x, y) = C$  и придавая затем константе  $C$  всевозможные значения, получим семейство линий уровня поля.

Введем в плоскости  $xOy$  направление  $\sigma$ , образующее угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ . Тогда с осями  $Ox$  и  $Oz$  это направление образует углы  $\beta = 90^\circ - \alpha$  и  $\gamma = 90^\circ$ , а значит – на основании формулы (14.2) – для производной поля в точке поля  $M_0$  по направлению  $\sigma$  находим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos(90^\circ - \alpha),$$

т.е.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

Рассуждая так же, как и в трехмерном случае, получим, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma}$  становится наибольшей, если направление  $\sigma$  совпадает с направлением вектора

$$\text{gradu}(M_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \vec{j}.$$

Вектор  $\text{gradu}(M_0)$ , очевидно, нормален по отношению к линии уровня поля, проходящей через точку  $M_0$ .

Считая поле  $u(x, y)$  заданным в плоскости  $xOy$ , будем изображать

величину поля в данной точке  $(x, y)$  в виде координаты  $z$ . Тогда получим поверхность  $z = u(x, y)$ , являющуюся как бы «графиком» данного поля.

Составим отношение  $\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \sigma}$ . Очевидно, оно равно  $\operatorname{tg} \varphi$  и представляет собой среднюю крутизну поверхности в точке  $P_0$  в направлении  $\sigma$ .

Устремляя теперь  $\Delta \sigma$  к нулю, получим, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma}$  представляет собой  $\operatorname{tg} \varphi$ . Эту величину называют крутизной поверхности  $z = u(x, y)$  в точке  $P_0$ . Беря различные направления  $\sigma$ , выходящие из точки  $M_0$ , будем получать различные углы  $\varphi$ , т.е. различную крутизну поверхности в одной и той же точке  $P_0$ . Если в качестве  $\sigma$  взять направление вектора  $\operatorname{gradu}(M_0)$ , то получим направление, в котором поверхность  $z = u(x, y)$  имеет в точке  $P_0$  наибольшую крутизну подъема, равную

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = |\operatorname{gradu}(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\right)^2}.$$

Таков геометрический смысл модуля градиента функции двух переменных.

## 6. Векторное поле

Векторным полем называется пространственная область, в каждой точке  $M(x, y, z)$  которой, задан некоторый вектор  $\vec{a}(x, y, z)$ .

**Пример 14.6.** Классическим примером векторного поля является поле скоростей жидкости, протекающей через некоторую область (течение предполагается стационарным, т.е. не зависит от времени).

**Пример 14.7.** Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$  (рис. 14.7). Напряженность этого поля

равна  $E = \frac{q}{r^2}$ . Введем вектор напряженности поля

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}^0 = E \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Он представляет собой силу взаимодействия заряда  $+q$  с единичным положительным зарядом, помещенным в точке  $M$ .

**Пример 14.8.** Аналогично можно рассматривать поле тяготения, создаваемое материальной точкой массы  $m$ :

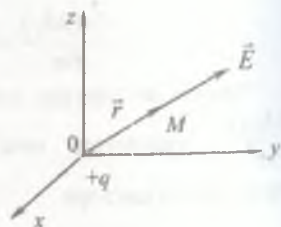


Рис. 14.7

$$\vec{F} = f \frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Здесь  $f$  — постоянная тяготения.

**Пример 14.9.** Рассмотрим поле скоростей точек вращающегося твердого тела. Направим ось  $Oz$  по оси вращения (рис. 14.8). Пусть  $\vec{\omega}$  — вектор угловой скорости. Тогда известная из механики формула Эйлера  $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$  даст

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} = \omega(-y \vec{i} + x \vec{j})$$

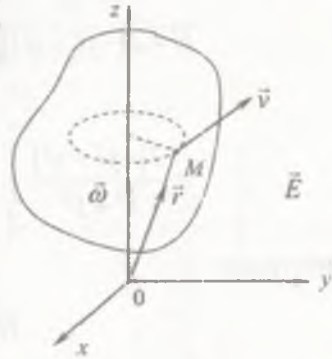


Рис. 14.8

**Пример 14.10.** Пусть по бесконечному прямолинейному проводнику течет ток плотности  $J$ , одинаковой во всех точках проводника (рис. 14.9). Направим ось  $Oz$  по проводнику в направлении тока. Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка вне проводника. Каждый элемент тока  $J \Delta \zeta_k$  создает в ней, согласно закона Био-Савара, магнитное поле

$$\Delta \vec{H}_k = \frac{[\vec{J}, \vec{r}_k]}{r_k^3} \cdot \Delta \zeta_k$$

Поскольку  $\vec{r}_k = x \vec{i} + y \vec{j} + (z - \zeta_k) \cdot \vec{k}$ , то

$$\Delta \vec{H}_k = \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta_k)^2]^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & J \\ x & y & z - \zeta_k \end{vmatrix} \Delta \zeta_k = \frac{J(-y \vec{i} + x \vec{j})}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta_k)^2]^{\frac{3}{2}}} \Delta \zeta_k.$$

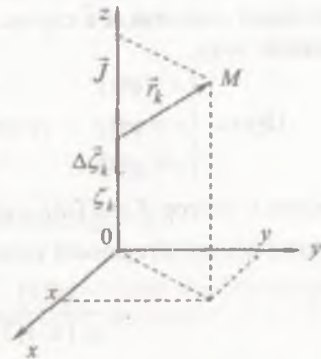


Рис. 14.9

Легко видеть, что векторы  $\Delta \vec{H}_k$ , отвечающие различным  $\Delta \zeta_k$ , коллинеарны и одинаково направлены. Поэтому при суммировании складываются их длины, и мы имеем

$$\vec{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(-y \vec{i} + x \vec{j}) d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} = J(-y \vec{i} + x \vec{j}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$



Положив  $z - \zeta = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} t$ , получим, что

$$\zeta = z - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} t, \quad d\zeta = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 t} dt,$$

тогда

$$\begin{aligned} \bar{H} &= J(-y\bar{i} + x\bar{j}) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cdot \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 t} dt = \\ &= \frac{J(-y\bar{i} + x\bar{j})}{x^2 + y^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{J(-y\bar{i} + x\bar{j})}{x^2 + y^2} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Окончательно

$$\bar{H} = \frac{2J(-y\bar{i} + x\bar{j})}{x^2 + y^2}. \quad (14.8)$$

Пусть векторное поле задано произвольным вектором  $\vec{a}(x, y, z)$ . Линии, в каждой точке которых касательная коллинеарна вектору  $\vec{a}$ , называются векторными линиями этого поля (рис. 14.10). В случае электрического или магнитного полей их называют еще силовыми линиями, а в случае поля скоростей жидкости — линиями тока.



Рис. 14.10

Пусть  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$  — уравнение одной из векторных линий. Тогда при

каждом  $t$  вектор  $\vec{r} = \varphi'(t)\bar{i} + \psi'(t)\bar{j} + \chi'(t)\bar{k}$  направлен по касательной к этой линии в соответствующей точке, а значит,  $\vec{r} \parallel \vec{a}$ , откуда следует, что

$$\frac{\varphi'(t)}{a_x(x, y, z)} = \frac{\psi'(t)}{a_y(x, y, z)} = \frac{\chi'(t)}{a_z(x, y, z)},$$

т.е.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{a_x(x, y, z)}{a_y(x, y, z)} = \frac{a_z(x, y, z)}{a_x(x, y, z)},$$

или

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

Эти уравнения выполняются для любой векторной линии поля, т.е. мы получили систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрируя которую, найдем двухпараметрическое семейство векторных линий поля  $\vec{a}$ .

**Пример 14.11.** Найдем векторные линии поля (14.8). Имеем

$$H_x = -\frac{2J_y}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{2J_x}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0,$$

а значит,

$$\frac{dx}{-\frac{2J_y}{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{\frac{2J_x}{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{0},$$

т.е.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Откуда

$$\begin{cases} xdx = -ydy \\ dz = 0, \end{cases}$$

и значит

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \\ z = c_2, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1^2 \\ z = c_2. \end{cases}$$

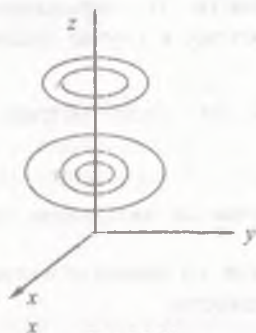


Рис.14.11

Это – семейство окружностей, «нанизанных» на ось  $Oz$  (рис. 14.11).

## 7. Поток векторного поля через поверхность

Пусть  $\vec{V}$  – поле скоростей жидкости, а  $\Sigma$  – некоторая воображаемая поверхность в поле. Тогда, как мы видели (см. главу XII), величина

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{V}, d\vec{\sigma})$$

есть объем жидкости, протекающей через поверхность  $\Sigma$  за единицу времени, которая называется потоком этой жидкости через данную поверхность.

Пусть теперь  $\vec{a}(x, y, z)$  – произвольное поле. По аналогии с предыдущим результатом величину

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma})$$

называют потоком поля  $\vec{a}$  через поверхность  $\Sigma$ . Очевидно, при сложении полей алгебраически складываются их потоки, а при умножении поля на константу на эту же константу умножается и поток поля. Очевидно, что знак потока зависит от того, какое направление нормали к поверхности взято в качестве положительного.

Пусть  $\Sigma$  – замкнутая поверхность (рис.

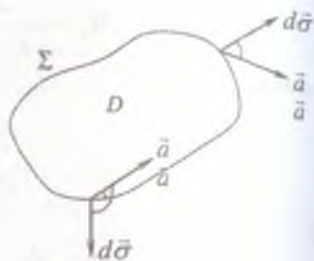


Рис. 14.12

14.12). Тогда векторы  $\vec{d\sigma}$ , как отмечалось, обычно направлены наружу по отношению к области  $D$ , ограниченной поверхностью  $\Sigma$ . Поэтому в случае «вытекания жидкости» угол

$\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right)$  будет острым, а значит скалярное произведение  $\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) > 0$ . В

случае же «втекания» этот угол будет тупым, а значит  $\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) < 0$ . Итак,

поток со знаком «+» отвечает вытеканию, а отрицательный поток – втеканию жидкости.

Предположим, что  $\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma}) > 0$ . Это значит, что для области  $D$

вытекание преобладает над втеканием. Исходя из гидродинамической аналогии, можно утверждать, что в этом случае внутри области  $D$  имеются точки, дополнительно порождающие поле. Их называют источниками поля.

Если  $\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma}) < 0$ , то в области  $D$  имеются так называемые стоки,

поглощающие часть поля.

Легко видеть, что если даже  $\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma}) > 0$ , то существование стоков в

области  $D$  не исключено. Источники и стоки могут существовать одновременно, но источники в данном случае преобладают. Наоборот, если

$\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma}) < 0$ , то преобладают стоки. Если же  $\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma}) = 0$  то источники

и стоки в области  $D$  либо отсутствуют, либо компенсируют друг друга.



**Пример 14.12.** Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$ , помещенного в начало координат (рис. 14.13). Окружим заряд сферой

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{\sigma}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{E}_k, \Delta \vec{\sigma}_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n E_k \Delta \sigma_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{q}{R^2} \Delta \sigma_k = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q \end{aligned}$$

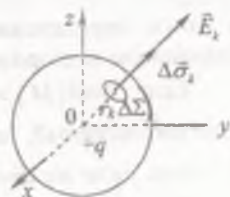


Рис. 14.13

Эта величина не зависит от радиуса сферы и всегда положительна. Это значит, что положительный электрический заряд является источником в поле  $\vec{E}$ .

**Пример 14.13.** Для заряда  $-q$ , очевидно, будем иметь

$$\iint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{\sigma}) = -4\pi q,$$

а значит, отрицательный электрический заряд является стоком в своем поле.

**Пример 14.14.** Аналогично для поля тяготения материальной точки массы  $m$  получим

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, d\vec{\sigma}) = -4\pi fm,$$

а значит, материальная точка также является стоком своего гравитационного поля.

## 8. Дивергенция векторного поля

Возьмем поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем — некоторую точку  $M$ . Окружим эту точку замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , и пусть  $D$  — область, ограниченная этой поверхностью, а  $V$  — ее объем. Вычислим поток поля  $\vec{a}$  через поверхность  $\Sigma$

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma})$$

и составим отношение  $\frac{Q}{V}$ . Оно характеризует среднюю по области  $D$  «производительность» источников и стоков, вместе взятых.

Пусть теперь поверхность  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ ; при этом  $V \rightarrow 0$ .

Если существует  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}$ , не зависящий от способа стягивания  $\Sigma$  в точку  $M$ , то он называется дивергенцией поля  $\vec{a}$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{div} \vec{a}(M)$ .

Итак, по определению

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma})}{V}. \quad (14.9)$$

Из этого определения, в частности, следует, что дивергенция является инвариантом векторного поля.

Если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ , то, очевидно, в точке  $M$  имеется источник, тем более интенсивный, чем больше  $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ . Если же  $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ , то в точке  $M$  — сток. Если же  $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ , то в точке  $M$  нет ни источника, ни стока.

Таким образом, дивергенция поля в данной точке, с физической точки зрения, есть не что иное, как мощность (обильность) источника или стока, находящегося в этой точке.

Легко видеть, что  $\operatorname{div} \vec{a}$  есть скалярная величина. Поэтому можно говорить, что каждое векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  (удовлетворяющее условиям, сформулированным ниже), порождает скалярное поле  $\operatorname{div} \vec{a}(x, y, z)$ , которое характеризует мощности источников и стоков, распределенных в этом поле.

Равенство (14.9) неудобно для вычисления дивергенции. Предположим, что проекции поля:  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$  и  $a_z(x, y, z)$  имеют частные производные  $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial a_y}{\partial y}$  и  $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ , непрерывные в области  $D$ . Тогда, применяя формулу Остроградского-Гаусса<sup>\*)</sup>, получим

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iiint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV.$$

Теорема о среднем даст

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \left[ \frac{\partial a_x(N)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(N)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(N)}{\partial z} \right] V,$$

где  $N$  — некоторая точка внутри области  $D$ .

Подставляя этот результат в (14.9), находим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial a_x(N)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(N)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(N)}{\partial z} \right].$$

Но если  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ , то  $N \rightarrow M$ , а значит в пределе получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z},$$

<sup>\*)</sup> Предполагается, что поверхность  $\Sigma$  удовлетворяет условиям, при которых была выведена формула Остроградского-Гаусса.

или короче

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (14.10)$$

Итак, мы доказали существование дивергенции (при сделанных предположениях) и получили удобную формулу для ее вычисления.

*Дивергенция обладает следующими свойствами:*

1.  $\operatorname{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{div} \vec{a}_1 + \operatorname{div} \vec{a}_2.$

2.  $\operatorname{div}(c\vec{a}) = c \operatorname{div} \vec{a}.$

3. Если  $u(x, y, z)$  – скалярная функция, то

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad} u).$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Проверим свойство 3. В силу (14.10), имеем,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\vec{a}) &= \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} a_x + u \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + u \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} a_z = \\ &= u \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \left( a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad} u) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 14.15.** Пусть  $\vec{a} = \vec{r}$ , где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Тогда

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

**Пример 14.16.** Пусть  $\vec{a} = 3x^2y\vec{i} + (y^3 + xz)\vec{j} + xz\vec{k}$ . Вычислить дивергенцию этого поля в точке  $M = (1, -3, 2)$ . Очевидно, что

$$\operatorname{div} \vec{a} = 6xy + 3y^2 + x,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = -18 + 27 + 1 = 10.$$

Итак, в точке  $M$  поле имеет источник мощностью в 10 единиц.

**Пример 14.17.** В силу свойства 3 дивергенции, учитывая также свойство 4 градиента и формулу (14.6), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[f(r)\vec{r}] &= f(r) \operatorname{div}(\vec{r}) + (\vec{r}, \operatorname{grad} f(r)) = \\ &= 3f(r) + (\vec{r}, f'(r) \operatorname{grad}(r)) = 3f(r) + f'(r) (\vec{r}, \vec{r}^0) = \\ &= 3f(r) + f'(r) \left( \vec{r}, \frac{\vec{r}}{r} \right) = 3f(r) + f'(r) \frac{r^2}{r} = 3f(r) + f'(r)r. \end{aligned}$$

В частности, при  $r \neq 0$



$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left( \frac{q}{r^3} \vec{r} \right) = \frac{3q}{r^3} + \left( -\frac{3q}{r^4} \right) r = 0.$$

Этот результат очевиден и физически, так как предполагается, что вне заряда  $+q$  других зарядов нет.

### 9. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальное поле

Рассмотрим поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем — замкнутую поверхность  $\Sigma$ , окружающую область  $D$ . Тогда, считая условия формулы Остроградского-Гаусса выполненными, получим

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iiint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV.$$

Учитывая формулу (14.10), перепишем это так

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iiint_D \operatorname{div} dV. \quad (14.11)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 14.1.** Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции этого поля по области, ограниченной данной поверхностью.

Эту теорему называют теоремой Остроградского-Гаусса. С физической точки зрения она выражает тот факт, что поток поля через замкнутую поверхность есть суммарный результат производительности всех источников и стоков, расположенных внутри этой поверхности.

При выводе формулы (14.11) предполагалось, что область  $D$  — односвязная.

Легко видеть, что теорема Гаусса-Остроградского верна и в случае, когда область  $V$  имеет две границы — внешнюю и внутреннюю (рис. 14.14), т.е. является двусвязной. При этом

под  $\oiint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{d}\sigma)$  надо подразумевать суммарный

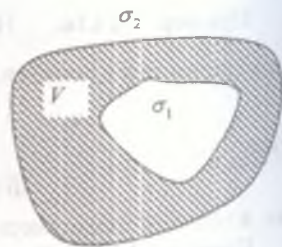


Рис. 14.14

поток через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Однако, поскольку вектор  $\vec{d}\sigma$  должен быть направлен наружу по отношению к  $V$ , то на поверхности  $\sigma_1$  его нужно направлять внутрь по отношению к  $\sigma_1$ . Поэтому формула (14.11) для данного случая запишется так:

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) - \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (14.12)$$

где предполагается, что на каждой из поверхностей векторы  $d\vec{\sigma}$  направлены наружу по отношению к этим поверхностям.

Отсюда легко получается следующая

**Теорема 14.2.** Пусть в точке  $M$  имеется изолированный источник или сток. Тогда поток поля через замкнутую поверхность, окружающую точку  $M$ , не зависит от размеров и формы этой поверхности, если только внутри нее нет других источников или стоков.

Предположим сначала, что поверхность  $\sigma_1$  целиком лежит внутри поверхности  $\sigma_2$  (в отдельных точках она может касаться ее) (рис. 14.15). Пусть  $V$  — область между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Тогда всюду в  $V$  будет  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  (благодаря отсутствию источников и стоков), а значит, в силу (14.12).

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) - \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = 0,$$

т.е.

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}). \quad (14.13)$$

Если же  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются, то, беря поверхность  $\sigma_3$ , находящуюся внутри и  $\sigma_1$ , и  $\sigma_2$  (рис. 14.16), получим, по уже доказанному,

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, d\vec{\sigma}),$$

$$\iint_{\sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, d\vec{\sigma}),$$

откуда снова следует (14.13).

**Примечание.** Доказанная теорема получена нами как следствие теоремы Гаусса-Остроградского. Однако, она совершенно очевидна и физически, так как, в силу отсутствия «посторонних» источников и стоков, поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекают одинаковое число векторных линий (рис. 14.17).



Рис. 14.15

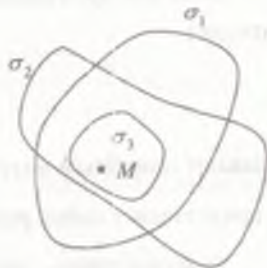


Рис. 14.16



Рис. 14.17

Векторное поле называется соленоидальным (или трубчатым), если в каждой его точке дивергенция равна нулю, т.е. если в ней отсутствуют источники и стоки. Примером такого поля может служить поле  $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$  вне заряда  $+q$ .

Из теоремы Остроградского-Гаусса легко следует, что для того чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы его поток через любую замкнутую поверхность, принадлежащую полю вместе с ограниченной ею областью, был равен нулю.

## 10. Циркуляция и ротор векторного поля

Возьмем произвольное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем – некоторую дугу  $\overset{\curvearrowright}{MN}$ . Интеграл

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{MN}} (\vec{a}, d\vec{s})$$

называют линейным интегралом поля  $\vec{a}$  по дуге  $\overset{\curvearrowright}{MN}$ . В случае силового поля он представляет собой работу этого поля на пути  $\overset{\curvearrowright}{MN}$ .

Заменяем теперь дугу  $\overset{\curvearrowright}{MN}$  замкнутым контуром  $L$ . Величину

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{s})$$

называют циркуляцией поля  $\vec{a}$  по контуру  $L$ .

Пусть  $\Sigma$  – некоторая поверхность, натянутая на контур  $L$  (рис. 14.18), а  $\sigma$  – ее площадь. Возьмем на  $\Sigma$  произвольную точку  $M$ . Вычислим циркуляцию  $C$  поля  $\vec{a}$  по контуру  $L$  и составим отношение  $\frac{C}{\sigma}$ .

Предположим теперь, что контур  $L$  стягивается в точку  $M$ ; при этом  $\sigma \rightarrow 0$ .

Пусть существует предел  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma}$ , не зависящий от

способа стягивания контура  $L$  в точку  $M$ .

Данный предел можно рассматривать как проекцию некоторого вектора на нормаль к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M$ ; при этом вектор нормали  $d\vec{\sigma}$  направляется по ту сторону поверхности  $\Sigma$ , откуда обход контура  $L$  при вычислении циркуляции виден совершающимся против часовой стрелки.

Этот вектор, проекция которого на нормаль к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M$

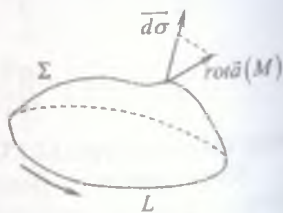


Рис. 14.18



равна  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma}$  (см. замечание дальше), называется ротором (или вихрем поля  $\vec{a}$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{rot} \vec{a}(M)$ ). Итак, по определению,  $\text{rot} \vec{a}(M)$  – это вектор, для которого

$$(\text{rot} \vec{a}(M))_n = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_L (\vec{a}, \vec{ds})}{\sigma} \quad (14.14)$$

Из этого определения, в частности, следует, что ротор поля (если он существует) является инвариантом этого поля.

Получим из выражения (14.14) формулу, удобную для вычисления ротора. Для этого предположим, что проекции поля  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ , и  $a_z(x, y, z)$  и контур  $L$  удовлетворяют условиям, при которых была выведена формула Стокса (12.33). Тогда

$$\oint_L (\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \quad (14.15)$$

Введем вектор  $\vec{N}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ , являющийся, очевидно, ортом вектора  $\vec{ds}$ , а также вектор

$$\vec{b}(x, y, z) = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Тогда получим из (14.15)

$$\oint_L (\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} (\vec{b}, \vec{N}^0) d\sigma.$$

Но

$$(\vec{b}, \vec{N}^0) = |\vec{b}| \cdot |\vec{N}^0| \cos(\vec{b}, \vec{N}^0) = b_n,$$

где  $b_n$  – проекция вектора  $\vec{b}$  на направление вектора  $\vec{d\sigma}$ .

Следовательно,

$$\oint_L (\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} b_n d\sigma,$$

или, по теореме о среднем,

$$\oint_L (\vec{a}, \vec{ds}) = b_n(P) \sigma,$$

где  $P$  – некоторая точка поверхности  $\Sigma$ .

Подставляя этот результат в равенство (14.14), получим

$$[\text{rot} \vec{a}(M)]_n = \lim_{\sigma \rightarrow 0} b_n(P). \quad (14.16)$$

Если поверхность  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ , то и  $P \rightarrow M$ , а так как вектор  $\vec{b}$ , в силу предположенного, непрерывен на поверхности  $\Sigma$ , то в пределе из выражения (14.16) будем иметь

$$[\text{rot} \vec{a}(M)]_n = b_n(M). \quad (14.17)$$

Из равенства проекций двух векторов на некоторое направление, конечно, не следует равенство самих векторов. Но ведь  $\Sigma$  — произвольная поверхность, содержащая точку  $M$ . Поэтому соотношение (14.17) фактически означает, что проекции векторов  $\vec{b}(M)$  и  $\text{rot} \vec{a}(M)$  на любое направление одинаковы, а отсюда следует, что  $\vec{b}(M) = \text{rot} \vec{a}(M)$ , т.е. что для любой точки  $M(x, y, z)$  будет

$$\text{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

или, в символическом виде,

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (14.18)$$

Заметим, что мы одновременно доказали существование (при сделанных предположениях) ротора и вывели удобную формулу для его вычисления.

Теперь можно говорить, что каждое векторное поле  $\vec{a}$  порождает новое векторное поле  $\text{rot} \vec{a}$ , называемое полем вихрей поля  $\vec{a}$ .

Для выяснения физического смысла ротора возьмем поле скоростей вращающегося твердого тела. Поскольку

$$\vec{V} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

то, на основании (14.18),

$$\text{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (\omega + \omega)\vec{k} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Итак, в данном случае ротор поля во всех точках одинаков и равен удвоенному вектору угловой скорости.

По аналогии с этим результатом, говорят, что и в случае произвольного поля  $\vec{a}$  вектор  $\text{rot} \vec{a}$  характеризует так называемую вращательную способность, или «завихренность» поля в данной точке.

**Пример 14.18.** Возьмем магнитное поле бесконечного прямолинейного

проводника

$$\vec{H} = \frac{2J}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Тогда

$$H_x = -\frac{2Jy}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{2Jx}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

Отсюда

$$\text{rot} \vec{H} = 2J \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix},$$

а значит,

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{H})_x &= -2J \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = 0, \quad (\text{rot} \vec{H})_y = -2J \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = 0, \\ (\text{rot} \vec{H})_z &= 2J \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] = \\ &= 2J \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Итак, всюду, кроме точек проводника (где  $x^2 + y^2 = 0$ , и приведенные выше равенства теряют смысл) поле  $\vec{H}$  является безвихревым.

## 11. Свойства ротора. Теорема Стокса

Ротор обладает следующими свойствами:

1.  $\text{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{rot} \vec{a}_1 + \text{rot} \vec{a}_2$  (эта сумма – векторная).
2. Если  $c = \text{const}$ , то  $\text{rot}(c\vec{a}) = c \text{rot}(\vec{a})$ .

Это свойство, как и предыдущее, совершенно очевидно.

3. Если  $u(x, y, z)$  – скалярное поле, то

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} u, \vec{a}]$$

Действительно,



$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ua_x & ua_y & ua_z \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}(u\vec{a}))_x &= \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = \frac{\partial u}{\partial y}a_z + \frac{\partial a_z}{\partial y}u - \frac{\partial u}{\partial z}a_y - \frac{\partial a_y}{\partial z}u = \\ &= u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + ((\operatorname{grad}u)_y a_z - (\operatorname{grad}u)_z a_y) = u(\operatorname{rot}\vec{a})_x + [\operatorname{grad}u, \vec{a}]_x \end{aligned}$$

Аналогично проверяются равенства и для двух других пар проекций. Из равенства проекций следует равенство самих векторов.

4. Для любого поля  $\vec{a}$  будет  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$ , т.е. поле вихрей любого векторного поля соленоидально.

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

5. Для любого скалярного поля  $u(x, y, z)$  будет  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \vec{0}$ .

Действительно,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u))_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0,$$

и аналогично

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u))_y = 0, (\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u))_z = 0,$$

откуда и следует свойство 5.

Возьмем теперь произвольное поле  $\vec{a}$ , и в нем – контур,  $L$ , на который натянем некоторую поверхность  $\Sigma$ . Считая условия формулы Стокса

выполненными, получим равенство (14.15), которое можно теперь переписать так

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{s}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) \quad (14.19)$$

Следовательно, при упомянутых условиях имеет место

**Теорема 14.3.** Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через произвольную поверхность, натянутую на данный контур.

Эту теорему называют теоремой Стокса.

Пусть теперь  $L$  – произвольный контур в поле  $\vec{a}$ . Натянем на него две различные поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  так, чтобы они ограничивали некоторую область  $D$  (рис. 14.19). Тогда, в силу (14.19),

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma})$$

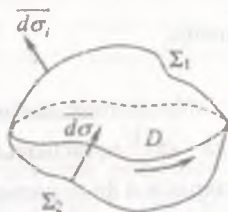


Рис. 14.19

(поскольку оба интеграла равны  $\oint_L (\vec{a}, d\vec{s})$ ). При этом векторы  $d\vec{\sigma}$  на обеих

поверхностях направлены так, чтобы с их концов обход контура  $L$  был виден совершающимся против часовой стрелки. Если же на поверхности  $\Sigma_2$  векторы  $d\vec{\sigma}$  направлены в противоположную сторону, то на всей поверхности  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  вектор  $d\vec{\sigma}$  будет направлен наружу по отношению к области  $D$ . Получим тогда

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) = - \iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}),$$

т.е.

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) + \iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) = 0$$

или

$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}) = 0.$$

Ввиду произвольности поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  отсюда следует, что поле  $\text{rot } \vec{a}$  – соленоидальное, т.е. мы фактически установили физический смысл свойства 4 ротора.

## 12. Потенциальное поле

Векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  называется потенциальным, если существует

такое скалярное поле  $u(x, y, z)$ , что  $\text{grad } u = \vec{a}$ . Функцию  $u(x, y, z)$  в этом случае называют потенциалом поля  $\vec{a}$ .

**Пример 14.19.** Пусть  $\vec{a} = \vec{r}$ . В этом случае  $u = \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ . В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x, \frac{\partial u}{\partial y} = y, \frac{\partial u}{\partial z} = z,$$

а значит,

$$\text{grad } u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}.$$

Потенциальное поле определяется одной скалярной функцией  $u(x, y, z)$ , тогда как произвольное векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  определяется тремя скалярными функциями  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$  и  $a_z(x, y, z)$ .

Пусть  $\vec{a}$  — потенциальное поле, а  $u(x, y, z)$  — его потенциал. Поверхности уровня скалярного поля  $u(x, y, z)$  называют эквипотенциальными поверхностями. Поскольку  $\vec{a} = \text{grad } u$ , то в любой точке поля вектор  $\vec{a}$  нормален к соответствующей эквипотенциальной поверхности. Но вектор  $\vec{a}$  коллинеарен касательной к векторной линии поля. Таким образом, векторные линии потенциального поля пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом.

**Теорема 14.4.** Для того чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

■ **Необходимость.** Пусть  $\vec{a}$  — потенциальное поле с потенциалом  $u(x, y, z)$ . Тогда  $\vec{a} = \text{grad } u$ , и, в силу свойства 5 ротора,  $\text{rot } \vec{a} = \text{rot}(\text{grad } u) = \vec{0}$ . □

■ **Достаточность.** Пусть  $\vec{a}$  — безвихревое поле. Возьмем в нем произвольный контур  $L$  и натянем на него некоторую поверхность  $\Sigma$ . Поскольку  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ , то, на основании теоремы Стокса,

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{s}) = 0. \quad (14.20)$$

В силу произвольности контура  $L$ , из условия (14.18) следует, что выражение  $(\vec{a}, d\vec{s})$  есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y, z)$ . Итак, существует такая функция  $u(x, y, z)$ , что  $(\vec{a}, d\vec{s}) = du$ , т.е.

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = du,$$

а это значит, что

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}, a_y = \frac{\partial u}{\partial y}, a_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

т.е. что  $\vec{a} = \text{grad } u$ , так что поле  $\vec{a}$  – потенциальное. □

**Примечание.** Из доказательства достаточности следует, что если циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то это поле потенциально.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру, полностью принадлежащему полю, может и не равняться нулю. Действительно, равенство (14.20) будет выполнено, в силу теоремы Стокса, если на контур  $L$  можно натянуть поверхность, все точки которой принадлежат полю, а это не всегда возможно.

**Пример 14.20.** Возьмем поле  $\vec{H} = \frac{2J}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ . Мы видели, что

$\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$  всюду вне оси  $Oz$ , а значит везде, кроме точек этой оси, поле  $\vec{H}$  потенциально. Это можно проверить и непосредственно. Для этого рассмотрим функцию  $u = 2J \arctg \frac{y}{x}$ . Имеем для нее

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= 2J \text{grad} \left( \arctg \frac{y}{x} \right) = \\ &= 2J \left( -\frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \vec{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \vec{j} \right) = \frac{2J}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}) = \vec{H} \end{aligned}$$

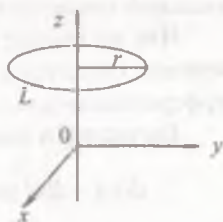


Рис. 14.20

Итак, функция  $u = 2J \arctg \frac{y}{x}$  есть потенциал поля  $\vec{H}$ . Эта функция определена всюду, кроме точек оси  $Oz$ , где не определено и поле  $\vec{H}$ .

Вычислим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по окружности  $L = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = \text{const} \end{array} \right. \right\}$ ,

где  $z$  – любое число. Тогда

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{s}) = 2J \oint_L \frac{1}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}, d\vec{s}) = \frac{2J}{r^2} \oint_L (-ydx + xdy) = \frac{2J}{r^2} \iint_D 2ds = 4\pi J \neq 0$$

Невыполнение равенства (рис. 14.20) здесь связано с невозможностью натянуть на контур  $L$  поверхность, не пересекающую ось  $Oz$ , на котором поле не определено.

Если же контур  $L$  не охватывает оси  $Oz$  (рис. 14.21), то, очевидно,  $\oint_L (\vec{H}, d\vec{s}) = 0$ .

Предположим теперь, что для любого контура  $L$  в поле  $\vec{a}$  выполняется равенство (14.23). Возьмем в

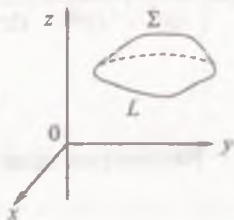


Рис. 14.21



этом потенциальном поле некоторую дугу  $MN$ . На основании (14.23), интеграл

$\int_{MN} (\vec{a}, d\vec{s})$  не зависит от формы дуги  $MN$ , а зависит лишь от положения точек  $M$  и  $N$ . Поэтому его можно обозначить  $\int_M^N (\vec{a}, d\vec{s})$ . Поскольку в этом случае

$(\vec{a}, d\vec{s}) = du$ , то, по ранее доказанной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_M^N (\vec{a}, d\vec{s}) = u(N) - u(M).$$

Этот результат означает теперь, что линейный интеграл в таком потенциальном поле равен разности потенциалов этого поля в конечной и начальной точках пути.

Что же касается нахождения потенциала поля, то оно в общем случае, очевидно, сводится к нахождению функции трех переменных по его полному дифференциалу (см. конец главы XII).

Вычислим в заключение дивергенцию потенциального поля. Имеем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выражение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  называется лапласианом скалярной функции  $u(x, y, z)$  и обозначается  $\Delta u$  (не путать с символом приращения!). Итак,

$$\operatorname{div} \vec{a} = \Delta u. \quad (14.21)$$

**Примечание.** Понятие лапласиана вводят и для векторов. Пусть  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ . Тогда, по определению,

$$\Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{i} + (\Delta a_y) \vec{j} + (\Delta a_z) \vec{k},$$

т.е.

$$\Delta \vec{a} = \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

### 13. Потенциал электрического поля

Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$ :

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

а также функцию  $u = -\frac{q}{r}$ . Имеем

$$\text{grad } u = -q \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -q \left( 1 \frac{1}{r^2} \right) \vec{r} = \frac{q}{r^2} \vec{r} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \vec{E}.$$

Итак, поле  $\vec{E}$  имеет потенциал  $u = -\frac{q}{r}$ . Однако, в теории электричества

принято называть потенциалом поля  $\vec{E}$  функцию  $\varphi = -u = \frac{q}{r}$ .

Пусть теперь имеется  $n$  точечных зарядов:  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ . Тогда, в силу принципа суперпозиции полей, потенциал в точке  $M$  равен

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n},$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — расстояния точки  $M$  от зарядов  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ .

Предположим, наконец, что заряды заполняют некоторую область  $V$  непрерывно (рис. 14.22), и пусть  $\rho(x, y, z)$  —

плотность заряда. Пусть, далее,  $\Delta V$  — элементарная часть области  $V$ . Её заряд равен  $\Delta q = \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta V$ ,

где  $(\xi, \eta, \zeta)$  — некоторая точка области  $\Delta V$ . Этот элементарный заряд создаёт в точке  $M(x, y, z)$  (она может находиться как внутри области  $V$ , так и вне её)

поле с потенциалом  $\frac{\Delta q}{r} = \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \Delta V$ .

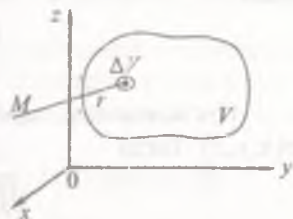


Рис. 14.22

Следовательно, суммарный потенциал в точке  $M$  равен

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} dV,$$

т.е.

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dV.$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет соотношению

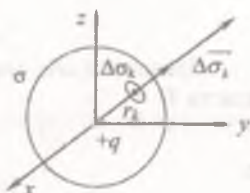


Рис. 14.23

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \quad (14.22)$$

где  $\rho$  — плотность заряда в данной точке  $M(x, y, z)$ . Для этого опять возьмём сначала поле точечного заряда  $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$  и вычислим его поток через сферу

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Поскольку в точке  $O$  поле не определено, то теорема Гаусса-Остроградского неприменима, а поэтому вычисляем поток непосредственно (рис. 14.23). Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \cdot \vec{\Delta\sigma}_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n E_k \cdot \Delta\sigma_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{q}{R^2} \Delta\sigma_k = \\ &= \frac{q}{R^2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q. \end{aligned}$$

По следствию теоремы Гаусса-Остроградского поток поля  $\vec{E}$  через любую поверхность  $\sigma$ , окружающую заряд (рис. 14.24), также равен

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi q \quad (14.23)$$



Рис. 14.24

Если внутри  $\sigma$  имеется  $n$  точечных зарядов  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ , то, очевидно поток суммарного поля через эту поверхность равен

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \sum_{k=1}^n q_k$$

Пусть, наконец, заряд распределён внутри  $\sigma$  непрерывно с плотностью  $\rho(x, y, z)$ . Тогда

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \iiint_V \rho(x, y, z) dV,$$

где  $V$  — область, ограниченная поверхностью  $\sigma$ . С другой стороны, по теореме Гаусса-Остроградского,

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Сравнивая оба выражения для потока, получим, в силу произвольности области  $V$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho,$$

т.е.

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = 4\pi \rho,$$

т.е.

$$-\Delta \phi = 4\pi \rho,$$

откуда и следует (14.22).

Соотношение (14.22) называется уравнением Пуассона.

Если в точке  $M$   $\rho = 0$  (в частности, если  $M$  находится вне области  $V$ ), то в этой точке

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = 0. \quad (14.24)$$

Это равенство называется уравнением Лапласа.

#### 14. Символические операторы теории поля

Как мы видим, величины

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

являются основными характеристиками поля. Все эти выражения можно записать очень компактно, если ввести символический вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \text{ Его называют вектором (или оператором) «набла».$$

Символичность этого оператора состоит в том, что он выражает не некоторую векторную величину, а действие. Применяя это действие к некоторой реальной величине (т.е. формально умножая  $\nabla$  на эту величину), мы получим другую реальную величину.

Например, умножая вектор  $\nabla$  на скаляр  $u(x, y, z)$ , получим вектор

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

т.е.

$$\nabla u = \text{grad } u.$$

Аналогично

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}), \quad \text{rot } \vec{a} = [\nabla, \vec{a}].$$

Введение вектора  $\nabla$  позволяет очень быстро получить многие уже известные результаты. Например,

$$\text{rot}(\text{grad } u) = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = \vec{0} u = \vec{0}.$$

Точно так же

$$\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{a}) = (\vec{0}, \vec{a}) = 0.$$

Далее, мы имели

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u.$$

Теперь это можно переписать так:

$$(\nabla, \nabla u) = \Delta u,$$

т.е.



$$(\nabla, \nabla)u = \Delta u.$$

Поскольку здесь  $u$  произвольно, то

$$(\nabla, \nabla) = \Delta.$$

Левую часть принято обозначать  $\nabla^2$ , так что

$$\nabla^2 = \Delta.$$

Это символическое равенство следует понимать так

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}, \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Линейный дифференциальный оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  называется оператором Лапласа. Применяя его к некоторой функции  $u(x, y, z)$ , получим

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

т.е. получим лапласиан этой функции.

Вычислим символическим методом величину  $\text{rot}(\text{rot } \bar{a})$ . Имеем

$$\text{rot}(\text{rot } \bar{a}) = [\nabla, [\nabla, \bar{a}]] = \nabla(\nabla, \bar{a}) - (\nabla, \nabla)\bar{a} = \nabla(\text{div } \bar{a}) - \nabla^2 \bar{a},$$

т.е.

$$\text{rot}(\text{rot } \bar{a}) = \text{grad}(\text{div } \bar{a}) - \Delta \bar{a}.$$

Следует отметить, что, поскольку  $\nabla$  не является реальным вектором, обращаться с ним нужно осторожно, т.е. формулы, полученные символическим методом, следует проверять обычным путем.

## 15. Произвольные системы ортогональных криволинейных координат

Пусть  $q_1, q_2, q_3$  — некоторые криволинейные координаты точки  $M$ , связанные с ее декартовыми координатами формулами

$$\begin{cases} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (14.25)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} q_1 = \varphi_1(x, y, z) \\ q_2 = \varphi_2(x, y, z) \\ q_3 = \varphi_3(x, y, z). \end{cases} \quad (14.26)$$

Координатные поверхности имеют, следовательно, уравнения

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1, \varphi_2(x, y, z) = c_2, \varphi_3(x, y, z) = c_3.$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3$  — независимые произвольные постоянные.

Линия пересечения координатных поверхностей называется координатной линией. Очевидно, вдоль нее изменяется только одна из величин  $q_1, q_2, q_3$ , а две других — постоянны (рис. 14.25). Например, координатной линией координаты  $\varphi$  в сферической системе координат является окружность ( $\varphi$ ) с центром на оси  $Oz$ , параллельная плоскости  $xOy$  (рис. 14.26).

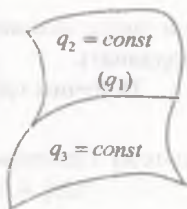


Рис. 14.25

Будем рассматривать только такие системы, в которых все три координатные линии, проходящие через каждую точку, взаимно перпендикулярны. Такие системы называют ортогональными.

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — орты касательных к линиям  $(q_1), (q_2), (q_3)$ , направленные в сторону возрастания соответствующих координат. Будем считать, что векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  образуют правую тройку (в противном случае мы перенумеровали бы координаты  $q_1, q_2, q_3$ ) (рис. 14.27).

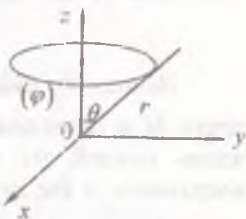


Рис. 14.26

Возьмем линию  $(q_1)$ . Вдоль нее будет  $q_2 = \text{const}$  и  $q_3 = \text{const}$ , и тогда уравнения (14.25) можно считать параметрическими уравнениями этой линии. Поэтому дифференциал дуги линии  $(q_1)$  равен

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}\right)^2} dq_1.$$

Аналогично получаются  $ds_1$  и  $ds_2$ .

Обозначим

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1,$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = H_2,$$

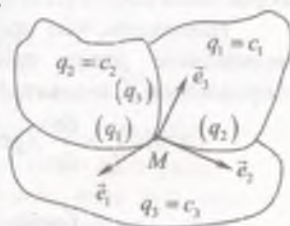


Рис. 14.27

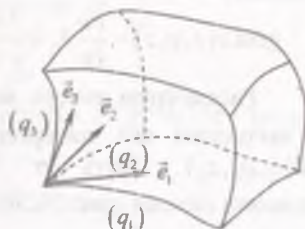


Рис. 14.28

<sup>\*)</sup> Рансе, в гл. XI, до введения ортогональности, мы вместо (14.25) и (14.26) писали соответственно (11.19) и (11.18).

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = H_3$$

(эти числа называют коэффициентами Ламе данной криволинейной системы координат).

Получим теперь

$$ds_1 = H_1 dq_1, ds_2 = H_2 dq_2, ds_3 = H_3 dq_3.$$

Поэтому элементы площади координатных поверхностей равны

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, d\sigma_2 = H_1 H_3 dq_1 dq_3, d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

а элемент объема равен

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

## 16. Вычисление градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в цилиндрических координатах

Начнем со скалярного поля  $u(r, \varphi, z)$ . Возьмем в нем произвольную точку  $M$  и проведем через нее линии  $(r)$ ,  $(\varphi)$  и  $(z)$ , вдоль каждой из которых меняется лишь одна координата, а две другие постоянные. Пусть  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  и  $\vec{e}_z$  — орты этих линий, направленные в сторону возрастания соответствующих координат (рис. 14.29).

Напомним, что проекция градиента на данное направление равна производной поля по этому направлению. Следовательно,

$$(\text{grad } u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, (\text{grad } u)_\varphi = \frac{\partial u}{\partial s(\varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$(\text{grad } u)_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

а значит,

$$\text{grad } u(r, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (14.27)$$

Рассмотрим теперь векторное поле  $\vec{a}(r, \varphi, z)$  и вычислим его дивергенцию в данной точке  $M(r_0, \varphi_0, z_0)$ . Пусть  $\sigma$  — полная поверхность элемента объема (рис. 14.30). Тогда

$$\iiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} = \left( \iiint_{MQQ'M'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} + \iiint_{NPP'N'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} \right) +$$

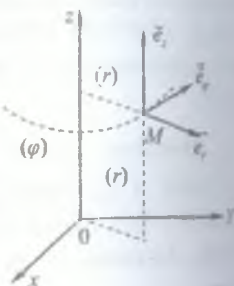


Рис. 14.29

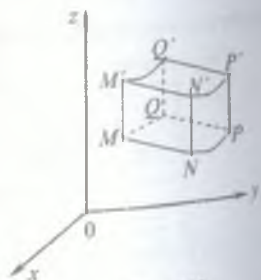


Рис. 14.30

$$+ \left( \iint_{MNN'M'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} + \iint_{QPP'Q'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} \right) + \\ + \left( \iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} + \iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} \right) = Q_r + Q_\varphi + Q_z.$$

Но

$$\iint_{MQQ'M'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} = \iint_{MQQ'M'} (a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z) \cdot (-\vec{e}_r) d\sigma = - \iint_{MQQ'M'} a_r(r, \varphi, z) d\sigma = \\ = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left[ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} r_0 a_r(r_0, \varphi, z) dz \right] d\varphi.$$

Аналогично

$$\iint_{NPP'N'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left[ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} (r_0 + \Delta r) a_r(r_0 + \Delta r, \varphi, z) dz \right] d\varphi.$$

Поэтому

$$Q_r = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left\{ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} [(r_0 + \Delta r) a_r(r_0 + \Delta r, \varphi, z) - r_0 a_r(r_0, \varphi, z)] dz \right\} d\varphi = \\ = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left\{ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \Delta r dz \right\} d\varphi = \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \varphi=\varphi_0 \\ z=z_0}} \Delta r \Delta \varphi \Delta z = \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{M_1} \Delta r \Delta \varphi \Delta z,$$

где  $M_1$  — некоторая внутренняя точка параллелепипеда. Мы применили здесь теорему Лагранжа, а затем — теорему о среднем для двойного интеграла.

**Примечание.** Скалярное поле называется осевым, если оно зависит только от расстояния до некоторой оси (обычно принимаемой в качестве оси Oz), т.е. если  $u = u(r)$ . Примером может служить поле температур вокруг бесконечной равномерно нагретой проволоки. В этом случае

$$\text{grad } u = \frac{du}{dr} \vec{e}_r, \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

Вычислим, наконец,  $\oint \vec{a}(r, \varphi, z)$ . Пусть  $L_r$  — контур  $MQQ'M'M$ . Тогда

$$\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{MQ} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{QQ'} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{Q'M'} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{M'M} \vec{a} \cdot \vec{ds}.$$

Но

$$\int_{MQ} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{MQ} a_\varphi(r, \varphi, z) ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z_0) d\varphi;$$



$$\int_{Q'M'} \vec{a} \cdot \vec{ds} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z_0 + \Delta z) d\varphi,$$

значит,

$$\begin{aligned} \int_{MQ} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{Q'M'} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 [a_\varphi(r_0, \varphi, z_0 + \Delta z) - a_\varphi(r_0, \varphi, z_0)] d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \frac{\partial a_\varphi(r_0, \varphi, \zeta)}{\partial z} \Delta z d\varphi = -r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta z, \end{aligned}$$

где  $M_1$  — некоторая внутренняя точка фигуры  $MQQ'M'$ . Точно так же

$$\begin{aligned} \int_{QQ'} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{M'M} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= \int_{QQ'} a_z(r, \varphi, z) dz + \int_{M'M} a_z(r, \varphi, z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} a_z(r_0, \varphi_0 + \Delta \varphi, z) dz - \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} a_z(r_0, \varphi_0, z) dz = \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \frac{\partial a_z(r_0, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Delta \varphi dz = \\ &= \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta z \end{aligned}$$

следовательно,

$$\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \left[ \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial z} \right] \Delta \varphi \Delta z,$$

значит

$$\frac{\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\sigma_r} = \left[ \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial z} \right] \frac{\Delta \varphi \Delta z}{\sigma_r},$$

так как  $\sigma_2 = r_0 \Delta \varphi \Delta z$ , то в пределе находим

$$[\text{rot } \vec{a}(M)]_r = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\partial a_z(M)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M)}{\partial z} \right]. \quad (14.28)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_{NM} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{M'N'} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= \int_{NM} a_r(r, \varphi, z) dr + \int_{M'N'} a_r(r, \varphi, z) dr = \\ &= - \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0) dr + \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0 + \Delta z) dr = \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} \frac{\partial a_r(r, \varphi_0, \zeta)}{\partial z} \Delta z dr = \\ &= \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} \Delta z \Delta r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_z(r_0, \varphi_0, z) dz - \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_z(r_0 + \Delta r, \varphi_0, z) dz = - \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{\partial a_z(\rho, \varphi_0, z)}{\partial z} \Delta r dz = \\
&= - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r} \Delta r \Delta z.
\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\iint_{MNN'M'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= - \iint_{MNN'M'} (a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\varphi d\sigma = - \iint_{MNN'M'} a_\varphi(r, \varphi, z) d\sigma = \\
&= - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_\varphi(r, \varphi_0, z) dz \right] dr
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\iint_{QPP'Q'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_\varphi(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z) dz \right] dr,$$

а поэтому

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left\{ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} [a_\varphi(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z) - a_\varphi(r_0, \varphi, z)] dz \right\} dr = \\
&= \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{\partial a_\varphi(r, \psi, z)}{\partial \varphi} \Delta \varphi dz \right] dr = \frac{\partial a_\varphi(M_2)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta z \Delta r.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
\iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= - \iint_{MNPQ} a_z(r, \varphi, z) d\sigma = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} r a_z(r, \varphi, z_0) dr \right] d\varphi, \\
\iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} r a_z(r, \varphi, z_0 + \Delta z) dr \right] d\varphi,
\end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned}
Q_z &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left\{ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} [r a_z(r, \varphi, z_0 + \Delta z) - r a_z(r, \varphi, z_0)] dr \right\} d\varphi = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \frac{r \partial a_z}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \Delta z dr \right] d\varphi = \frac{\partial (r a_z)}{\partial z} \Big|_{M_3} \Delta z \Delta r \Delta \varphi.
\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \left[ \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \right]_{M_1} + \left[ \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]_{M_2} + \left[ \frac{\partial (r a_z)}{\partial z} \right]_{M_3} \Delta r \Delta \varphi \Delta z.$$

Отсюда

$$\frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma}}{\Delta V} = \left[ \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{M_1} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_{M_2} + \frac{\partial(r a_z)}{\partial z} \Big|_{M_3} \right] \frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{\Delta V}, \quad (14.29)$$

Если элемент объема стягивается в точку  $M$ , то

$$\frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{\Delta V} = \frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{r_0 \Delta r \Delta \varphi \Delta z + o(\Delta V)} \rightarrow \frac{1}{r_0},$$

а поэтому в пределе из (14.29) получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_M + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_M + \frac{\partial(r a_z)}{\partial z} \Big|_M \right].$$

Заменяя точку  $M(r_0, \varphi_0, z_0)$  на текущую точку  $(r, \varphi, z)$ , будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r a_z)}{\partial z} \right].$$

Отсюда, в силу формулы (14.27), находим

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

т.е.

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (14.30)$$

Отсюда

$$\oiint_{L_\varphi} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \left[ \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r} \right] \Delta r \Delta z,$$

а значит,

$$\frac{\oiint_{L_\varphi} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\sigma_\varphi} = \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r},$$

и в пределе:

$$[\operatorname{rot} \vec{a}(M)]_\varphi = \frac{\partial a_r(M)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M)}{\partial r}. \quad (14.31)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{MN}{\curvearrowright}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{PQ}{\curvearrowright}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{\overset{MN}{\curvearrowright}} a_r(r, \varphi, z) dr + \int_{\overset{PQ}{\curvearrowright}} a_r(r, \varphi, z) dr = \\ & = \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0) dr - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} a_r(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z_0) dr = - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \frac{\partial a_r(r, \varphi, z_0)}{\partial z} \Delta \varphi dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial a_r(M_5)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta r; \\
 \int_{NP} \vec{a} \cdot d\vec{s} + \int_{QM} \vec{a} \cdot d\vec{s} &= \int_{NP} a_\varphi(r, \varphi, z) ds + \int_{QM} a_\varphi(r, \varphi, z) ds = \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} (r_0 + \Delta r) a_\varphi(r_0 + \Delta r, \varphi, z_0) d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z) d\varphi = \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \Delta r d\varphi = \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_0} \Delta r \Delta \varphi.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\oint_{L_1} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_6} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \Big|_{M_5} \right) \Delta r \Delta \varphi,$$

а значит

$$\frac{\oint_{L_1} \vec{a} \cdot d\vec{s}}{\sigma_z} = \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_6} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \Big|_{M_5} \right) \frac{\Delta r \Delta \varphi}{\sigma_z}. \quad (14.32)$$

Если фигура  $MNPQ$  стягивается в точку  $M$ , то

$$\frac{\Delta r \Delta \varphi}{\sigma_z} = \frac{\Delta r \Delta \varphi}{r_0 \Delta r \Delta \varphi + o(\sigma_z)} \rightarrow \frac{1}{r_0},$$

и в пределе из (14.32) получим

$$(\text{rot } \vec{a}(M))_z = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_M - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \Big|_M \right). \quad (14.33)$$

Сводя воедино формулы (14.30), (14.31) и (14.33) и заменяя в них фиксированную точку  $(r_0, \varphi_0, z_0)$  текущей точкой  $(r, \varphi, z)$ , будем иметь окончательно

$$\text{rot } \vec{a}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z,$$

$$\text{или, в параметрическом виде, } \text{rot } \vec{a}(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$



Если поле является плоскопараллельным, т.е. если  $\vec{a} = a_r(r, \varphi) \vec{e}_r + a_\varphi(r, \varphi) \vec{e}_\varphi$ , то формулы для дивергенции и ротора принимают следующий вид

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \operatorname{rot} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

В еще более частном случае так называемого осевого поля  $\vec{a} = a_r(r) \vec{e}_r$  получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r}, \quad \operatorname{rot} \vec{a}(r) = 0.$$

### 17. Градиент, дивергенция, лапласиан и ротор в сферических координатах

Рассмотрим скалярное поле  $u(r, \theta, \varphi)$ . Проведем линии  $(r)$ ,  $(\theta)$  и  $(\varphi)$  и построим орты  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  и  $\vec{e}_\varphi$  (рис. 14.31). Имеем

$$(\operatorname{grad} u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (\operatorname{grad} u)_\theta = \frac{\partial u}{\partial s_{(\theta)}} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

$$(\operatorname{grad} u)_\varphi = \frac{\partial u}{\partial s_{(\varphi)}} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

а значит,

$$\operatorname{grad} u(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Рассмотрим теперь векторное поле  $\vec{a}(r, \theta, \varphi)$ . Имеем (рис. 14.32):

$$\begin{aligned} & \iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \\ &= \iint_{M'N'P'Q'} (a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_r d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{M'N'P'Q'} a_r(r, \theta, \varphi) d\sigma = \iint_{M'N'P'Q'} a_r(r, \theta, \varphi) r d\theta r \sin \theta d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta \theta} (r_0 + \Delta r)^2 \sin \theta \cdot a_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) d\theta \right) d\varphi \end{aligned}$$

и аналогично

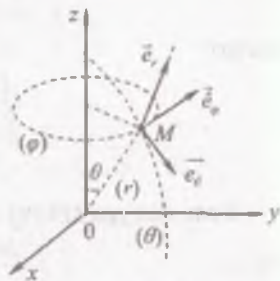


Рис. 14.31

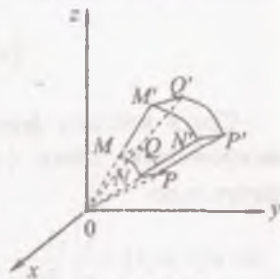


Рис. 14.32

$$\iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0^2 \sin\theta \cdot a_r(r_0, \theta, \varphi) d\theta \right) d\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_r &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \sin\theta \left( (r_0 + \Delta r)^2 a_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) - r_0^2 a_r(r_0, \theta, \varphi) \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \Delta r d\theta \right) d\varphi = \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Точно так же получим (выкладки мы опускаем ввиду их полной аналогии с предыдущими)

$$Q_\theta = \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi; \quad Q_\varphi = \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_3} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi.$$

Здесь  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  — некоторые внутренние точки элемента объема. Итак,

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} + \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} + \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_3} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi,$$

а значит,

$$\frac{\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma}}{\Delta V} = \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} + \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} + \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_3} \frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{\Delta V}.$$

Если элементы объема стягиваются в точку  $M$ , то из последнего соотношения следует

$$\frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{\Delta V} = \frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{r_0^2 \sin\theta \cdot \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi + o(\Delta V)} \rightarrow \frac{1}{r_0^2 \sin\theta},$$

заменяя точку  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  на точку  $(r, \theta, \varphi)$ , получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Учитывая ещё формулу (12.26), будем иметь

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Пусть скалярное поле зависит только от расстояния до некоторой точки, т.е.  $u = u(r)$ . Такое поле называется сферическим, или центральным.

Примером может служить поле температур в однородной среде, создаваемое точечным источником тепла. Для сферического поля получим

$$\operatorname{grad} u(r) = \frac{du}{dr}, \quad \Delta u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right).$$

Вычислим, наконец,  $\operatorname{rot} \vec{a}(r, \theta, \varphi)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{NP} \vec{a} ds &= \int_{NP} a_\varphi(r, \theta, \varphi) ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \cdot a_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) d\varphi; \\ \int_{QM} \vec{a} ds &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \sin \theta_0 a_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned} \int_{NP} \vec{a} ds + \int_{QM} \vec{a} ds &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 (\sin(\theta_0 + \Delta\theta) a_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) - \sin \theta_0 a_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi)) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_0 + \Delta\theta} \Delta\theta d\varphi = r_0 \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_0 + \Delta\theta} \Delta\theta d\varphi = \left( r \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \right)_{M_1} \Delta\theta \Delta\varphi \end{aligned}$$

где  $M_1$  — некоторая внутренняя точка фигуры  $ABCD$ . Далее,

$$\begin{aligned} \int_{MN} \vec{a} ds &= \int_{MN} a_\theta(r, \theta, \varphi) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) d\theta; \\ \int_{PQ} \vec{a} ds &= - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{откуда} \quad \int_{MN} \vec{a} ds + \int_{PQ} \vec{a} ds &= - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 (a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) - a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0)) d\theta = \\ &= - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 \frac{\partial a_\theta(r_0, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi d\theta = - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \Delta\varphi \Delta\theta. \end{aligned}$$

$$\text{Итак,} \quad \oint_{L_1} \vec{a} ds = \left( \left( r \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \right)_{M_1} - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \right) \Delta\theta \Delta\varphi,$$

$$\oint_{L_2} \vec{a} ds = \left( \left( r \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \right)_{M_1} - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \right) \Delta\theta \Delta\varphi$$

а значит

$$\frac{\oint_{L_2} \vec{a} ds}{\sigma_{L_2}} = \frac{\oint_{L_1} \vec{a} ds}{\sigma_{L_1}} \quad (14.34)$$

Но

$$\sigma_r = S_{MNPQ} = MN \cdot PQ + O(\sigma_r) = r_0 \Delta \theta \cdot r_0 \sin \theta_0 \Delta \varphi + O(\sigma_r) = r_0^2 \sin \theta_0 \Delta \theta \Delta \varphi + O(\sigma_r)$$

а поэтому при стягивании контура  $L_r$  в точку  $M$  будет

$$\frac{\Delta \theta \Delta \varphi}{\sigma_r} \rightarrow \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0}$$

Следовательно, из (14.34) в пределе получим

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(M))_r = \frac{\left( \left( r \frac{\partial (\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} \right) - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \right)_M}{r_0^2 \sin \theta_0}$$

Совершенно аналогично находим

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(M))_\theta = \frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{\partial (r \sin \theta \cdot a_\varphi)}{\partial r} \right)_M;$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(M))_\varphi = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial (r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)_M$$

Тогда, заменяя точку  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  точкой  $(r, \theta, \varphi)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta a_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Этот результат можно записать и в символическом виде:

$$\operatorname{rot} \vec{a}(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \vec{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\theta & \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix}$$

В случае центрального поля  $\vec{a}(r) = a_r(r) \vec{e}_r$ , имеем

$$\operatorname{div} \vec{a}(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d(r^2 a_r)}{dr}; \quad \operatorname{rot} \vec{a}(r) = 0.$$



легко убедиться, что ему удовлетворяют функции  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{2}{x}$ ,  $-\frac{3}{x}$ , и вообще всякая функция  $y = \frac{C}{x}$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

Возьмем другое уравнение

$$y' = 4x - 2y.$$

Проверим, что ему удовлетворяет функция  $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ , где  $C$  – любое число.

Действительно, для данной функции будет

$$y' = -2Ce^{-2x} + 2 = 4x - 2(Ce^{-2x} + 2x - 1) = 4x - 2y,$$

в чем и требовалось убедиться.

Можно показать, что решение произвольного уравнения вида (15.3) в общем случае может быть записано так

$$y = \varphi(x, C),$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Поэтому функцию  $y = \varphi(x, C)$  называют общим решением уравнения (15.3).

Придавая  $C$  некоторое конкретное значение  $C^*$ , получим конкретное решение  $y = \varphi(x, C^*)$ . Оно называется частным решением данного уравнения.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения есть совокупность всех его частных решений.

Для того чтобы из общего решения выделить нужное частное решение, задают дополнительные условия, называемыми начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (15.5)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – некоторые известные числа. Тогда, полагая в общем решении  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , получим

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Из этого равенства находим искомое  $C$ , после подстановки которого в общее решение, находим искомое частное решение.

Общее решение уравнения (15.3) геометрически представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения. Проинтегрировать уравнение при начальном условии (15.5) – это значит выбрать из множества интегральных кривых ту, которая проходит через данную точку  $(x_0, y_0)$ .

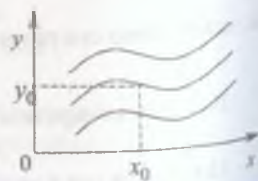


Рис. 15.3

**Пример 15.1.** Общее решение уравнения (15.4), как было показано, имеет вид

$$y = \frac{C}{x}.$$

Это – семейства гипербол. Зададим начальное условие

$$y|_{x=3} = 2.$$

Получаем

$$2 = \frac{C}{3},$$

откуда

$$C = 6,$$

а значит, искомое частное решение:

$$y = \frac{6}{x}.$$

Зададим теперь такое условие:

$$y|_{x=0} = 4. \quad (15.6)$$

Получим

$$4 = \frac{C}{0},$$

откуда следует, что соответствующее  $C$  найти нельзя, а значит такое начальное условие для данного уравнения не является допустимым. Геометрически это выражает тот факт, что ни одна из интегральных кривых не проходит через точку  $(0,4)$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 15.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  в уравнении (15.3) непрерывна в области  $D$  плоскости  $xOy$  вместе со своей производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in D$  существует и единственно частное решение уравнения (15.3), удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=0} = y_0$ .

Эту теорему называют теоремой Коши о существовании и единственности решения.

**Пример 15.2.** Возьмем уравнение (15.4). Для него  $f(x, y) = -\frac{y}{x}$ , и при  $x=0$  функция  $f(x, y)$  не существует. Именно этим и вызвана недопустимость начального условия (15.6).

Теперь можно уточнить определение общего решения уравнения 1-го порядка.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1) При каждом конкретном  $C = C^*$  функция  $y = \varphi(x, C^*)$  удовлетворяет этому уравнению.

2) Для каждой точки  $(x_0, y_0) \in D$  (где  $D$  – область, в которой выполняются условия теоремы Коши) найдется такое значение  $C = C^*$ , что функция  $y = \varphi(x, C^*)$  будет удовлетворять начальному условию  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

**Примечание.** При выполнении условий существования и единственности решения каждому начальному условию отвечает одно единственное частное решение уравнения. Однако, поскольку каждая кривая  $y = \varphi(x, C^*)$  состоит из бесчисленного множества точек, то двум различным начальным условиям может отвечать и одно частое решение.

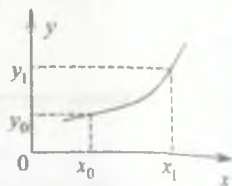


Рис. 15.4

#### 4. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение (15.3) для случая, когда  $f(x, y)$  может быть представлена в виде двух сомножителей, один из которых зависит только от  $x$ , а другой – только от  $y$ . Тогда уравнение можно записать так

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad (f_2(y) \neq 0),$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)},$$

откуда

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \quad (15.7)$$

т.е. переменные  $x$  и  $y$  разделились. Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(y)$  – первообразные функций  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ . Тогда (15.7) означает, что

$$dF_2(y) = dF_1(x),$$

а значит

$$F_2(y) = F_1(x) + C.$$

Это – общий интеграл исходного уравнения.

**Пример 15.3.** Обратимся к уравнению (15.1) и перепишем его так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

а значит

$$\ln y = 2 \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$y = Cx^2.$$

Итак, поставленной ранее задаче 1 удовлетворяет бесчисленное множество изображенных на рис. 15.5 парабол. При этом начальному условию  $y|_{x=0} = 0$  удовлетворяет бесчисленное множество частных решений (а именно: все частные решения). Это объясняется

тем, что в данном случае  $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ , а значит, в

точке  $(0, 0)$  функция  $\frac{\partial f}{\partial y}$  разрывна, т.е. не выполнены

условия теоремы о существовании и единственности решения.

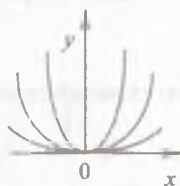


Рис. 15.5

**Примечание.** Уравнение с разделяющимися переменными можно записать и в так называемой дифференциальной форме:

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0.$$

Действительно, это можно переписать так

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)Q(y)}{R(x)S(y)},$$

т.е.

$$y' = - \frac{\frac{P(x)}{R(x)}}{\frac{S(y)}{Q(y)}}.$$

## 5. Уравнения, однородные в смысле Эйлера

Уравнение  $y' = f(x, y)$  называется однородным в смысле Эйлера, если  $f(x, y)$  может быть представлена как некоторая функция, зависящая только от  $\frac{y}{x}$ , т.е., если  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Примером может служить уравнение

$$xy^2 dx + (x^3 - y^3) dy = 0.$$



Действительно, переписав его в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{y^3 - x^3},$$

замечаем, что в данном случае  $f(x, y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 1}$ .

Другой пример однородного уравнения:

$$\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (15.8)$$

(это становится очевидным, если переписать уравнение так:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}). \quad (15.9)$$

Возьмем произвольное однородное в смысле Эйлера уравнение

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (15.10)$$

и положим в нем  $\frac{y}{x} = z$ , где  $z(x)$  – новая неизвестная функция. Тогда

$$y = xz,$$

откуда

$$y' = z + x \frac{dz}{dx},$$

и уравнение (15.10) принимает вид

$$z + x \frac{dz}{dx} = g(z).$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Действительно,

$$x \frac{dz}{dx} = g(z) - z,$$

откуда, после деления переменных, получаем

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$F(z) = \ln x + C,$$

т.е.

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + C,$$

а это – общий интеграл уравнения.

**Пример 15.4.** Возьмем уравнение (15.8). Записав его в виде (15.9) и положив  $\frac{y}{x} = z$ , получим

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + \operatorname{tg} z,$$

т.е.

$$x \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z.$$

Разделяем переменные:

$$\operatorname{ctg} z dz = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln |C|,$$

т.е.

$$\sin z = Cx,$$

или

$$\sin \frac{y}{x} = Cx.$$

Окончательно:

$$y = x \cdot \arcsin Cx.$$

## 6. Линейные уравнения 1-го порядка

Линейным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \quad (15.11)$$

где  $A(x)$ ,  $B(x)$  и  $C(x)$  – некоторые функции, непрерывные вместе со своими производными. Очевидно, такое уравнение, разделив его на  $A(x)$ , всегда можно привести к виду

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (15.12)$$

Под линейностью такого уравнения подразумевается его линейность относительно  $y$  и  $y'$ .

Если в уравнении (15.12)  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = 0 \quad (15.13)$$

и называется линейным уравнением без правой части, или линейным однородным уравнением, причем однородность здесь понимается не в смысле Эйлера, а в смысле отсутствия «свободного члена», т.е. слагаемого, не содержащего  $y$  и  $y'$  (ср. с понятием однородной системы линейных алгебраических уравнений).

Чтобы найти общее решение уравнения (15.12) с общим решением уравнения (15.11), обозначим последнее через  $u$ . Тогда уравнение (15.13) следует записать так:

Отсюда 
$$u' + p(x)u = 0.$$

и переменные разделяются:

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx,$$

так что

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx,$$

т.е.

$$\ln u = -\int p(x)dx + \ln C,$$

Будем искать теперь общее решение уравнения (15.12) в таком же виде,

$$u = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (15.14)$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная, а  $y$  — неизвестная функция. Подберем ее так, чтобы  $y$ , определяемое формулой (15.15), удовлетворяло уравнению (15.12). Имеем

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (15.15)$$

Подставим  $y$  в (15.12), получим

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot [-p(x)] = q(x).$$

т.е.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad (15.16)$$

откуда

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x),$$

а значит, искомая функция  $C(x)$  равна

$$C(x) = Q(x)e^{\int p(x)dx},$$

Подставив в (15.15), получим общее решение уравнения (15.12).

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \bar{C}, \quad \bar{C} = \text{const}.$$

Описанный метод интегрирования линейного уравнения с правой частью называется методом вариации произвольной постоянной. Заметим, что для его применения уравнение (15.11) вовсе не обязательно приводить к виду (15.12).

**Пример** Возьмем уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$u' - \frac{u}{x} = 0; 0,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x},$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln u = \ln x + \ln C,$$

$$u = Cx.$$

Ищем теперь общее решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)x.$$

После подстановки в исходное уравнение получим:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + \frac{1}{x},$$

$$C'(x)x = x + \frac{1}{x},$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x^2},$$

$$C(x) = x - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Итак } y = x^2 - 1 + Cx.$$

## 7. Уравнение Бессернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

где  $\alpha$  — произвольное число, не равное 0 и 1, называется уравнением Бессернулли. Перепишем уравнение так:

к 2-е и 3-е слагаемое в левой части равенства (15.16) всегда взаимно сокращаются, то на практике их можно вообще не писать.



$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x) \frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x),$$

и введем новую неизвестную функцию  $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ . Тогда  $z' = \frac{1-\alpha}{y^\alpha} y'$ , и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x)z = q(x),$$

т.е. сводится к линейному уравнению.

**Пример 15.6.** Возьмем уравнение

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Приводим его к виду

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

и полагаем  $\sqrt{y} = z$ . Тогда получим

$$2z' - \frac{4}{x}z = x.$$

Полученное линейное уравнение интегрируем методом вариации произвольной постоянной. Имеем

$$2u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

т.е.

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{x},$$

а значит,

$$\ln u = 2 \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$u = Cx^2.$$

Теперь полагаем

$$z = C(x)x^2.$$

Получим

$$2C'(x)x^2 = x.$$

Следовательно,

$$C'(x) = \frac{1}{2x},$$

а значит

$$C(x) = \frac{1}{2} \ln x + \bar{C}, \quad \bar{C} = \text{const}.$$

Таким образом,

$$z = x^2 \left( \frac{1}{2} \ln x + \bar{C} \right),$$

а так как  $y = z^2$ , то окончательно имеем

$$y = x^4 \left( \frac{1}{2} \ln x + \bar{C} \right)^2.$$

## 8. Геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка

Рассмотрим уравнение  $y' = f(x, y)$ . Возьмем некоторую точку  $(x_0, y_0)$  и вычислим  $f(x_0, y_0)$ . Обозначим производную в этой точке через  $y'_0$ . Очевидно, это есть угловой коэффициент касательной в точке  $(x_0, y_0)$  к той интегральной кривой уравнения, которая проходит через эту точку. Берем теперь другую точку  $(x_1, y_1)$  и вычислим  $y'_1 = f(x_1, y_1)$ . Это есть угловой коэффициент касательной в точке  $(x_1, y_1)$  к проходящей через эту точку интегральной кривой (вообще говоря, это будет уже другая интегральная кривая). Поступая аналогично с новыми точками, получим угловые коэффициенты касательных для новых интегральных кривых. Итак, уравнение  $y' = f(x, y)$ , с геометрической точки зрения, показывает, в каком направлении проходит через каждую данную точку соответствующая интегральная кривая. В связи с этим говорят, что дифференциальное уравнение 1-го порядка задает поле направлений интегральных кривых.

## 9. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему решению

Пусть

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (15.17)$$

— общий интеграл некоторого дифференциального уравнения. Покажем, как составить это уравнение. Для этого продифференцируем равенство (15.17) по  $x$ . Получим

$$\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0 \quad (15.18)$$

Составить дифференциальное уравнение — это значит найти связь между  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для всех его решений. Для этого достаточно исключить  $C$  из уравнений (15.17) и (15.18). Получим

$$F(x, y, y') = 0.$$

Это и есть искомое уравнение. С геометрической точки зрения его называют дифференциальным уравнением семейства кривых, описываемого уравнением (15.17).

**Пример 15.7.** Пусть семейство окружностей  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$  (рис. 15.6) является общим решением некоторого дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, продифференцируем по  $x$  данное решение, тогда

$$2(x - C) + 2yy' = 0,$$

откуда

$$x - C = -yy'; \quad C = x + yy',$$

а значит, искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^2 y' + y^2 = x^2 + 2xyy' + y^2 y'^2,$$

или

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

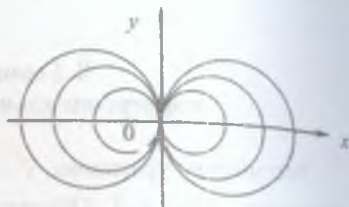


Рис. 15.6

## 10. Нахождение ортогональных траекторий семейств кривых

Пусть семейство кривых задано уравнением (15.17). Найдем семейство его ортогональных траекторий.

Исключая  $C$  из уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0 \end{cases},$$

получим дифференциальное уравнение семейства (15.17),

$$F(x, y, y') = 0 \quad (15.19)$$

Условие ортогональности двух кривых в точке их пересечения совпадает с условием ортогональности соответствующих касательных (рис. 15.7), т.е. имеет вид:

$$y'_{\text{орт.тр.}} = -\frac{1}{y'},$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{y'_{\text{орт.тр.}}}.$$

Поэтому если  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для кривых семейства (15.17) удовлетворяют соотношению (15.19), то  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для ортогональных траекторий удовлетворяют соотношению

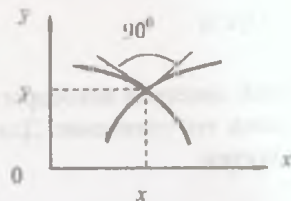


Рис. 15.7

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Это — дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий. Его общий интеграл

$$I(x, y, C) = 0$$

является искомым уравнением этого семейства.

**Пример 15.8.** Найдите ортогональные траектории семейства  $y = Cx^2$ . Имеем из уравнения семейства

$$y' = 2Cx,$$

откуда

$$C = \frac{y'}{2x}.$$

Подставляя это в уравнение семейства, получим

$$y = \frac{y'}{2x} x^2,$$

т.е.

$$y = \frac{xy'}{2},$$

или

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение семейства  $y = Cx^2$ \*). Заменяя в нем  $y'$  на  $-\frac{1}{y'}$ , получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x},$$

т.е.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Разделяем переменные:

$$y^2 dy = -\frac{x^2}{4} dx.$$

Отсюда

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{4} + C,$$



Рис. 15.8

\* Мы могли написать этого, поскольку  $y = Cx^2$  является, как было показано в п.1, общим решением уравнения (15.1).



или

$$\frac{x^2}{(2C)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}C)^2} = 1.$$

Это – семейство подобных эллипсов (рис. 15.8).

## 11. Особое решение уравнения 1-го порядка

Теорема Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$  утверждает, что если в некоторой области функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны, то через каждую точку этой области проходит только одна интегральная кривая этого уравнения. Точки, в которых не выполняются условия теоремы Коши, называются **особыми точками дифференциального уравнения**. Линию, все точки которой являются особыми, называют особой линией уравнения. Если особая линия является в то же время интегральной для уравнения, то она называется особой интегральной линией или особым решением.

Пусть  $y = \varphi(x, C)$  – общее решение уравнения  $y' = f(x, y)$ . Предположим, что семейство  $y = \varphi(x, C)$  имеет огибающую  $y = F(x)$ . Тогда она также является интегральной кривой уравнения. Действительно, функция  $y = F(x)$  является решением данного дифференциального уравнения, так как для любой точки  $M(x, y)$  на огибающей величины  $x$ ,  $y$  и  $y'$  – те же, что и для проходящей через эту точку интегральной кривой семейства  $y = \varphi(x, C)$  (рис. 15.9), а значит, и соотношение между  $x$ ,  $y$  и  $y'$  будет тем же.

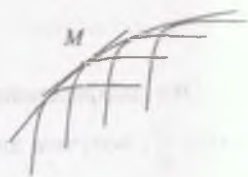


Рис. 15.9

Так как огибающая не входит в семейство, то решение  $y = F(x)$  не может быть получено из общего решения  $y = \varphi(x, C)$  ни при каком значении  $C$ , т.е. это не есть частное решение. Его называют особым решением.

**Пример 15.9.** Возьмем уравнение  $y^2(1 + y'^2) = 1$ . Имеем из него

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1 - y^2}{y^2},$$

т.е.

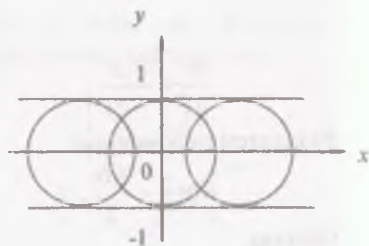


Рис. 15.10

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{1-y^2} = \mp(x+C),$$

т.е.

$$1-y^2 = (x+C)^2,$$

или

$$(x+C)^2 + y^2 = 1.$$

Это — общий интеграл исходного уравнения. Геометрически он изображается семейством окружностей. Это семейство имеет огибающую  $y = \pm 1$ . Легко видеть, что  $y = 1$  и  $y = -1$  есть решения данного уравнения. Следовательно, это — его особые решения.

**Примечание.** Поскольку далеко не всякое семейство линий имеет огибающую, то не всякое уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет особое решение. Например, уравнение  $y' = x^2 + y^2$  заведомо не имеет особых решений, так как функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  и ее частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$  непрерывна всюду на плоскости  $xOy$ , т.е. выполнены условия единственности решения. Если же уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет особое решение  $F(x)$ , то в каждой точке линии  $y = F(x)$  нарушается условие единственности, поскольку через эту точку проходят по крайней мере две интегральные кривые уравнения: кривая семейства  $y = \varphi(x, C)$  и огибающая этого семейства.

## 12. Общие сведения о дифференциальных уравнениях высших порядков

Возьмем уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Ему удовлетворяют функция  $y = \cos x$ , функция  $y = \sin x$  и вообще любая функция вида  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Аналогично, уравнению

$$y''' - y' = 0$$

удовлетворяют функции  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 1$  и вообще всякая функция вида  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — любые числа.

Возьмем простейшее уравнение 4-го порядка:

$$y^{(4)} = 1.$$

Имеем из него

$$y''' = x + C_1,$$

$$y'' = \frac{x^2}{2} + C_1 + C_2,$$

$$y' = \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

а значит

$$y = \frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4.$$

Общее решение произвольного уравнения  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (15.20)$$

записывается в общем случае так:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (15.21)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные. Придавая последним конкретные значения  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ , получим конкретное решение  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ . Оно называется частным решением уравнения.

Для нахождения из (15.21) нужного частного решения задаются начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0 \quad (15.22)$$

(их число всегда равно порядку уравнения). Дифференцируя (15.21)  $n-1$  раз и полагая  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $y' = y'_0, \dots$ ,  $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$ , получим систему  $n$  уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y^{(n-1)}_0 \end{cases}$$

из которой и находятся нужные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Всегда ли разрешима (и если да, то единственным ли образом) эта система? Ответ на это дает теорема Коши.

**Теорема 15.2.** Пусть функция  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  и ее частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

непрерывны в некоторой области  $D$  изменения аргументов  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ .

Тогда для всякой точки  $M(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in D$  этого  $(n+1)$ -мерного пространства существует и единственно частное решение уравнения (15.20), удовлетворяющее начальным условиям (15.22), и определенное в некоторой окрестности точки  $M$ .

Общим решением уравнения (15.20) называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , удовлетворяющая условиям:

1) При любых значениях  $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \dots, C_n = C_n^*$  функция  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$  есть решение этого уравнения.

2) Для любой точки  $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in D$  найдутся, и притом единственным образом, такие числа  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$  будет удовлетворять начальным условиям (15.22).

### 13. Простейшие случаи понижения порядка уравнений

Рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

и исследуем два частных случая.

**I.** Уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y'),$$

т.е. в него явно не входит  $y$ . Положим  $y' = t(x)$ . Тогда уравнение примет вид

$$t' = f(x, t),$$

а это – уравнение 1-го порядка. Пусть  $t = \varphi(x, C_1)$  – его общее решение. Это значит, что

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

поэтому

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

**Пример 15.10.** Возьмем уравнение  $y'' - \frac{y'}{x} = x$ . Полагая  $y' = t(x)$ ,



получим линейное уравнение 1-го порядка

$$t' - \frac{1}{x}t = x.$$

Имеем

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x},$$

т.е.

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

а значит

$$\ln u = \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$u = Cx.$$

Поэтому полагаем

$$t = C(x)x.$$

Получим

$$C'(x)x = x.$$

Отсюда

$$C'(x) = 1,$$

а значит

$$C(x) = x + C_1,$$

так что

$$t = x^2 + C_1x.$$

Но тогда

$$y = \int (x^2 + C_1x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

II. Уравнение имеет вид  $y'' = f(y, y')$ , т.е. оно не содержит явно  $x$ . Положим  $y' = t$ , где  $t(y)$  – новая неизвестная функция. Тогда

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = t \frac{dt}{dy}.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$t \cdot t'(y) = f(y, t),$$

а это – уравнение 1-го порядка. Пусть  $t = \varphi(x, C_1)$  – его общее решение. Это значит, что

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = dx,$$

а значит

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)}.$$

**Пример 15.11.** Возьмем уравнение  $y'^2 + 2yy'' = 0$ . Полагая  $y' = t$ ,  $y'' = t \frac{dt}{dy}$ , получим

$$t^2 + 2yt \frac{dt}{dy} = 0; \quad (15.23)$$

т.е.

$$t = -2y \frac{dt}{dy}; \quad (15.24)$$

или

$$-\frac{dt}{t} = \frac{dy}{2y},$$

откуда

$$-\ln t + \ln C_1 = \frac{1}{2} \ln y,$$

т.е.

$$\frac{C_1}{t} = \sqrt{y},$$

а значит

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \text{или} \quad \sqrt{y} dy = C_1 dx.$$

Получаем

$$\frac{2}{3} y \sqrt{y} = C_1 x + C_2,$$

или, что то же самое,

$$y \sqrt{y} = C_1 x + C_2.$$

Окончательно

$$y^3 = (C_1 x + C_2)^2. \quad (15.25)$$

**Примечание.** При переходе от (15.23) к (15.24) мы молча предполагали, что  $t \neq 0$ . Но если  $t \equiv 0$ , то  $y' \equiv 0$ , а значит,  $y = \text{const}$ , что содержится и в

(15.25) при  $C_1 = 0$ . Таким образом, «потери» решения при сокращении на  $t$  в данном случае не происходит.

#### 14. Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Линейное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + D(x) = 0,$$

где  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  и  $D(x)$  – некоторые непрерывные функции. Путем почленного деления на  $A(x)$  это уравнение всегда можно привести к виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Если  $f(x) \equiv 0$ , уравнение называется уравнением без правой части, или однородным уравнением. Если  $f(x) \neq 0$ , уравнение называется неоднородным.

Будем рассматривать сначала только однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (15.26)$$

**Теорема 1.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – решения уравнения (15.26), то и  $y_1(x) + y_2(x)$  есть его решение.

Действительно, по условию

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0.$$

Суммируя эти два тождества, получим то, что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Если  $y(x)$  – решение уравнения (15.26), то  $Cy(x)$ , где  $C = \text{const}$ , также есть его решение.

По условию

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \equiv 0.$$

Умножая это тождество на  $C$ , получим

$$(Cy)'' + p(x)(Cy)' + q(x)(Cy) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются линейно независимыми, если  $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const}$ .

Если же  $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv \text{const}$ , т.е. если  $y_2 \equiv Cy_1$ , то эти функции называются линейно зависимыми.

**Определитель**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (15.27)$$

называется определителем Вронского, или вронскианом, функций  $y_1$  и  $y_2$ .

**Теорема 3.** Если функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен нулю.

Действительно, по условию  $y_2 = Cy_1$ , а значит

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & Cy_1 \\ y_1' & Cy_1' \end{vmatrix} = 0.$$

**Теорема 4 (обратная теореме 3).**

Если  $W(x) \equiv 0$ , то соответствующие функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно зависимы. По условию, в силу (15.27),

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0. \quad (15.28)$$

Отсюда

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv 0, \quad (15.29)$$

т.е.

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' \equiv 0,$$

а значит

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv \text{const},$$

что и требовалось доказать.

**Примечание.** При переходе от (15.28) к (15.29) молча предполагалось, что  $y_1(x)$  не обращается в нуль. Можно показать, что теорема остается в силе и без этого условия.

Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – решения уравнения (15.26). Тогда

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Умножая 1-е тождество на  $y_2$ , 2-е – на  $y_1$  и вычитая 1-е из 2-го, имеем

$$y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + p(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) \equiv 0. \quad (15.30)$$

Поскольку  $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ , то

$$W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Поэтому (15.30) принимает вид

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$



Отсюда

$$\frac{dW}{dx} = -p(x)W.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx.$$

Интегрируя это от произвольного  $x_0$  до текущего  $x$ , получим

$$\ln|W(x)| \Big|_{x_0}^x = - \int_{x_0}^x p(x)dx,$$

т.е.

$$\ln|W(x)| = - \int_{x_0}^x p(x)dx + \ln|W(x_0)|,$$

откуда

$$W(x) = W(x_0) e^{- \int_{x_0}^x p(x)dx}. \quad (15.31)$$

Здесь  $W(x_0)$ , ввиду произвольности  $x_0$ , играет роль постоянной интегрирования.

Формула (15.31) называется формулой Остроградского-Лиувилля.

**Теорема 5.** Если  $y_1$  и  $y_2$  — линейно независимые частные решения уравнения (15.26), то их вронскиан ни в одной точке не обращается в нуль.

Предположим противное, т.е. пусть существует такое  $x_0$ , что  $W(x_0) = 0$ . Тогда, в силу (15.31), будет  $W(x) \equiv 0$ , а отсюда, на основании теоремы 4, следует, что если  $y_1$  и  $y_2$  — решения уравнения (15.26), то их вронскиан либо тождественно равен нулю (в случае линейно зависимых решений), либо, наоборот, ни при одном  $x$  не обращается в нуль (если  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы).

**Теорема 6.** Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — линейно независимые частные решения уравнения (15.26), а  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Тогда  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  есть общее решение уравнения.

То, что функция  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  есть решение уравнения (15.26), следует из теорем 1 и 2. Докажем, что это решение — общее. Для этого надо доказать, что при любых начальных условиях

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

найдутся такие  $C_1$  и  $C_2$ , что  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  будет удовлетворять этим условиям.

Поскольку  $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$ , то начальные условия запишутся так

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases} \quad (15.32)$$

Определитель этой системы равен

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0),$$

и, в силу линейной независимости  $y_1$  и  $y_2$ , всегда отличен от нуля. Но тогда система (15.32) имеет единственное решение, т.е. нужные  $C_1$  и  $C_2$  находятся, и притом единственным образом.

Общего метода интегрирования уравнения (15.26) нет, т.е. в общем случае найти решение этого уравнения в конечном виде нельзя. Однако, имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.** Если известно нетривиальное частное решение уравнения (15.26), то второе частое решение, линейно независимое от первого, может быть найдено при помощи действия интегрирования.

Перепишем формулу (15.31) так

$$W(x) = C e^{-\int p(x) dx}, \quad \text{или} \quad \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}, \quad \text{т.е.}$$

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}.$$

Отсюда

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx,$$

а значит

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx.$$

Поскольку  $y_2$  линейно независимо от  $y_1$  при  $C \neq 0$ , то можно взять  $C = 1$ . Тогда окончательно получим

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx. \quad (15.33)$$

Из доказанной теоремы следует, что знание одного частного решения уравнения (15.26) позволяет найти его общее решение.

**Пример 15.12.** Возьмем уравнение

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Легко видеть, что оно имеет частное решение  $y_1 = x$ . Для нахождения  $y_2$  приведем сначала уравнение к виду (15.26):

$$y'' - \frac{2x}{(1+x^2)} y' + \frac{2}{(1+x^2)} y = 0.$$

Теперь формула (15.33) дает

$$\begin{aligned} y_2 &= x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(1+x^2)} dx = x \int \frac{1}{x^2} (1+x^2) dx = x \int \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \\ &= x \left( -\frac{1}{x} + x \right) = -1 + x^2. \end{aligned}$$

Общее решение:

$$y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1).$$

## 15. Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Возьмем уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (15.34)$$

где  $p = \text{const}$  и  $q = \text{const}$ .

Нетрудно видеть, что уравнению вида (15.34) может удовлетворять далеко не всякая функция. Например, такие функции, как  $x^a$ ,  $\text{tg} x$ ,  $\ln x$ , очевидно, не могут превратить это уравнение в тождество. Для того, чтобы функция  $y(x)$  удовлетворяла уравнению (15.34), вид  $y'$  и  $y''$  должен быть аналогичен виду самого  $y(x)$ ; только в этом случае возможно тождество  $y'' + py' + qy \equiv 0$ . Такой функцией является экспоненциальная функция.

В связи с этим будем искать решение уравнения (15.34) в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где  $\lambda = \text{const}$ . Подставляя это в уравнение, получим

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0,$$

а так как  $e^{\lambda x} \neq 0$ , то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (15.35)$$

Итак, для того, чтобы  $y = e^{\lambda x}$  было решением уравнения (15.34), число  $\lambda$  должно удовлетворять квадратному уравнению (15.35). Оно называется характеристическим уравнением для уравнения (15.34).

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения. Возможны следующие случаи.

I. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – вещественные и разные. Тогда получаем два частных решения:  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  и  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . Они линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{const}.$$

Поэтому сразу можно написать общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

**Примеры. 1)** Возьмем уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

а значит, общее решение:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2) Для уравнения  $y'' + y' = 0$  характеристическое уравнение запишется так:

$$\lambda^2 + \lambda = 0,$$

откуда следует, что  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ , а значит

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

3) Обратимся к ранее полученному уравнению (15.2):

$$x'' - \omega^2 x = 0.$$

Характеристическое уравнение для него:

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = \omega$ ,  $\lambda_2 = -\omega$ , а значит

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

Зададим начальные условия:

$$x|_{t=0} = a, \quad x'|_{t=0} = 0.$$

Это значит, что в начальный момент шарик находился на расстоянии  $a$  от оси и был неподвижен относительно трубки.

Поскольку  $x' = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}$ , то, полагая  $t = 0$  в  $x(t)$  и  $x'(t)$ , получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ \omega(C_1 - C_2) = 0 \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2},$$

а значит

$$x = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}), \text{ т.е. } x = a \cosh \omega t.$$



II. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и равны между собой:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . В этом случае имеем вначале только одно частое решение:  $y_1 = e^{\lambda x}$ . Для нахождения  $y_2$ , линейно независимого от  $y_1$ , используем формулу (15.33). Получим

$$y_2 = e^{\lambda x} \int \frac{1}{e^{2\lambda x}} e^{-\lambda x} dx = e^{\lambda x} \int \frac{1}{e^{2\lambda x}} e^{-\lambda x} dx.$$

Но, в силу теоремы Виета, в данном случае  $2\lambda = -p$ , а значит

$$y_2 = e^{\lambda x} \int dx,$$

т.е.

$$y_2 = e^{\lambda x} x,$$

а значит, общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

III. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексно сопряженные, т.е.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Поскольку в данном случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то формально можно применить формулу случая I:

$$\begin{aligned} y &= \bar{C}_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + \bar{C}_2 e^{(\alpha - \beta i)x} = \\ &= \bar{C}_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \bar{C}_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} \left( (\bar{C}_1 + \bar{C}_2) \cos \beta x + (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) i \sin \beta x \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = C_1, \quad (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) i = C_2. \quad (15.36)$$

Тогда получим

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (15.37)$$

**Примечание.** Из обозначений (15.36) может показаться, что произвольная постоянная  $C_2$  — мнимая. Покажем, что если начальные условия — вещественные, то и числа  $C_1$  и  $C_2$  в (15.37) вещественны. Действительно, в данном случае

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Это — вещественные функции. Поэтому при вещественном  $x_0$  числа  $y_1(x_0)$  и  $y_2(x_0)$  также будут вещественными. По условию, вещественны и числа  $y_0$  и  $y'_0$ . Но тогда система (15.32), из которой находятся  $C_1$  и  $C_2$ , не может иметь комплексного решения.

**Примеры.** 1) Возьмем уравнение  $y'' + 4y' + 5y = 0$ . Имеем

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

откуда

$$\lambda = -2 + i,$$

а значит,

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2) Для уравнения  $y'' + 9y = 0$  характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Его корни:  $\lambda = \pm 3i$ , т.е. они не произвольные комплексные, а чисто мнимые. Поэтому (15.37) дает

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

## 16. Общие теоремы о неоднородных линейных уравнениях 2-го порядка

Будем рассматривать уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (15.38)$$

**Теорема 15.3.** Если функции  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  есть решения уравнений  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  и  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  соответственно, то функция  $v_1(x) + v_2(x)$  есть решение уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ .

Действительно, по условию

$$v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1 = f_1(x), \quad v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2 = f_2(x).$$

Складывая эти тождества, получим

$$(v_1 + v_2)'' + p(x)(v_1 + v_2)' + q(x)(v_1 + v_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 15.4.** Пусть комплексная функция  $v(x) = v_1(x) + iv_2(x)$  есть решение уравнения (15.38) с комплексной правой частью  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ . Тогда функции  $v_1(x) = \operatorname{Re} v(x)$  и  $v_2(x) = \operatorname{Im} v(x)$  являются решениями уравнений  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  и  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  соответственно.

Действительно, по условию

$$(v_1 + iv_2)'' + p(x)(v_1 + iv_2)' + q(x)(v_1 + iv_2) = f_1(x) + if_2(x),$$

т.е.

$$(v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1) + (v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2)i = f_1(x) + if_2(x).$$

Приравнявая отдельно вещественные и мнимые части этого тождества, получим

$$v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1 = f_1(x), \quad v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2 = f_2(x),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 15.5.** Общее решение неоднородного уравнения (15.38) равно

сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть  $v(x)$  – частное решение уравнения (15.38), а  $u(x)$  – общее решение соответствующего уравнения (15.26). Тогда

$$u'' + p(x)u' + q(x)u \equiv 0, \quad v'' + p(x)v' + q(x)v \equiv f(x).$$

Складывая эти тождества, получим

$$(u+v)'' + p(x)(u+v)' + q(x)(u+v) \equiv f(x).$$

Таким образом, функция  $y = u(x) + v(x)$  есть решение уравнения (15.38). Докажем теперь, что это есть именно общее решение.

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения уравнения (15.26). Тогда  $u = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , а значит  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + v$ . Надо доказать, что для любых начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

найдутся такие  $C_1$  и  $C_2$ , что функция  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + v$  будет удовлетворять этим начальным условиям.

Имеем

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' - v'.$$

Полагая  $x = x_0$  в  $y$  и  $y'$ , получим, в силу начальных условий,

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + v(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + v'(x_0) = y'_0 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - v(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0 - v'(x_0) \end{cases}.$$

Из этой системы нужно определить  $C_1$  и  $C_2$ . Но определитель этой системы есть  $W(x_0)$  и, в силу линейной независимости функций  $y_1$  и  $y_2$ , он всегда отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение, т.е., нужные  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены, и притом единственным образом.

## 17. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Возьмем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (14.39)$$

где  $p = \text{const}$  и  $q = \text{const}$ . Поскольку общее решение  $u(x)$  соответствующего

однородного уравнения (15.34) находится моментально, то интегрирование уравнения (15.39) фактически сводится к нахождению какого-нибудь частного решения этого уравнения. Оказывается, что при некоторых видах правой части соответствующее  $v(x)$  находится очень легко.

1. Пусть  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , где  $P_n(x)$  — многочлен  $n$ -й степени. Возможны три случая.

а) Число  $a$  не есть корень характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . В этом случае частное решение уравнения (15.39) ищется в виде

$$v = e^{ax} Q_n(x),$$

где  $Q_n(x)$  — неизвестный многочлен  $n$ -й степени. Имеем

$$v' = ae^{ax} Q_n(x) + e^{ax} Q_n'(x), \quad v'' = a^2 e^{ax} Q_n(x) + 2ae^{ax} Q_n'(x) + e^{ax} Q_n''(x).$$

Подставляя  $v$ ,  $v'$  и  $v''$  в (15.39), получим

$$a^2 e^{ax} Q_n(x) + 2ae^{ax} Q_n'(x) + e^{ax} Q_n''(x) + pae^{ax} Q_n(x) + pe^{ax} Q_n'(x) + qe^{ax} Q_n(x) = e^{ax} P_n(x),$$

т.е.

$$(a^2 + pa + q)Q_n(x) + (2a + p)Q_n'(x) + Q_n''(x) = P_n(x). \quad (15.40)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим  $n+1$  линейных уравнений, из которых и найдем  $n+1$  неизвестных коэффициентов многочлена  $Q_n(x)$ .

**Пример 15.13.** Возьмем уравнение  $y'' + y = 4xe^x$ . Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни равны  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , а значит

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Далее, правая часть исходного уравнения имеет здесь вид:

$$f(x) = e^x P_1(x).$$

Поскольку  $\lambda_1 \neq 1$  и  $\lambda_2 \neq 1$ , то ищем  $v(x)$  в виде

$$v = e^x Q_1(x),$$

т.е. полагаем

$$v = (Ax + B)e^x.$$

Отсюда

$$v' = Ae^x + (Ax + B)e^x, \quad v'' = 2Ae^x + (Ax + B)e^x.$$

Подставляя все это в уравнение и сразу сокращая на  $e^x$ , получим

$$2A + Ax + B + Ax + B = 4x.$$

Таким образом, приходим к системе



$$\begin{cases} 2A \approx 4 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

откуда  $A = 2$ ,  $B = -2$ , а значит,

$$v = (2x - 2)e^x$$

Итак, общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2(x - 1)e^x.$$

б) Число  $a$  — простой корень характеристического уравнения. Тогда  $a^2 + pa + q = 0$ , и равенство (15.40) примет вид

$$(2a + p)Q'_n(x) + Q''_n(x) = P_n(x) \quad (15.41)$$

Теперь оно не может быть тождеством, так как степень левой части равна уже не  $n$ , а  $n-1$ . Для того, чтобы и левая часть имела  $n$ -ю степень, нужно положить  $v = e^{ax}Q_{n+1}(x)$ . Тогда вместо (15.41) получим

$$(2a + p)Q'_{n+1}(x) + Q''_{n+1}(x) = P_n(x) \quad (15.42)$$

В это равенство не входит свободный член неизвестного многочлена  $Q_{n+1}(x)$ , а значит, он может быть произвольным. Поэтому положим его равным нулю. Но в этом случае будет  $Q_{n+1}(x) = Q_n(x)x$ .

Итак, в рассматриваемом случае можно с самого начала положить

$$v = e^{ax}Q_n(x)x.$$

**Пример 15.14.** Найдем общее решение уравнения  $y'' + y' - 2y = e^x$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , а поэтому

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Далее, поскольку здесь  $f(x) = e^x P_0(x)$  и при этом  $1 = \lambda_1 \neq \lambda_2$ , то полагаем  $v = e^x Q_0(x)x$ , т.е.

$$v = Ae^x x.$$

Тогда

$$v' = Ae^x x + Ae^x, \quad v'' = Ae^x x + 2Ae^x.$$

Подставляя все это в уравнение и сокращая на  $e^x$ , будем иметь

$$Ax + 2A + Ax + A - 2Ax = 1, \quad (15.43)$$

т.е.

$$3A = 1,$$

откуда  $A = \frac{1}{3}$ , а значит

$$v = \frac{1}{3}e^x x.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x x.$$

**Примечание.** В левой части равенства (15.43) слагаемые, содержащие  $x^1$ , обязаны были уничтожиться, так как в противном случае тождество было бы невозможно.

в) Число  $a$  — двукратный корень характеристического уравнения. Тогда, по теореме Виета,  $2a = -p$ , т.е.  $2a + p = 0$ , и равенство (15.42) примет вид

$$Q''_{n+1}(x) = P_n(x),$$

т.е. теперь оно уже не может быть тождеством, поскольку степень левой части равна  $n-1$ , а не  $n$ . Следовательно, вместо  $Q_{n+1}(x)$  надо взять  $Q_{n+2}(x)$ , и тогда получим

$$Q''_{n+2}(x) = P_n(x).$$

Сюда не входят свободный член и коэффициент при  $x^1$  многочлена  $Q_{n+2}(x)$ . Поэтому они могут быть любыми. Полагая их равными нулю, получим, что  $Q_{n+2}(x) = Q_n(x)x^2$ , а значит, в этом случае  $v$  следует искать в виде

$$v = e^{ax} Q_n(x) x^2.$$

**Примечание.** Если правая часть уравнения (15.39) является суммой нескольких слагаемых вида  $e^{ax} P_n(x)$ , то надо воспользоваться теоремой 1 предыдущего параграфа.

**Пример 15.15.** Возьмем уравнение  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} - 4$ .

Имеем

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$

а значит

$$u = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x.$$

Слагаемому  $e^{2x}$  в правой части соответствует частное решение  $v_1 = Ae^{2x}x^2$ , а слагаемому  $-4$  — частное решение  $v_2 = B$  (или имеет здесь место сочетание случаев в) и а)). Поэтому

$$v = Ae^{2x}x^2 + B.$$

Отсюда

$$v' = 2Ae^{2x}x^2 + 2Ae^{2x}x, \quad v'' = 4Ae^{2x}x^2 + 8Ae^{2x}x + 2Ae^{2x}.$$

Подставляя все это в уравнение (здесь уже нельзя сокращать на  $e^{2x}$ ), будем иметь

$$4Ae^{2x}x^2 + 8Ae^{2x}x + 2Ae^{2x} - 8Ae^{2x}x^2 - 8Ae^{2x}x + 4Ae^{2x}x^2 + 4B = e^{2x} - 4, \text{ т.е.} \\ 2Ae^{2x} + 4B = e^{2x} - 4.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4B = -4 \end{cases}$$

т.е.

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, \text{ а значит}$$

$$v = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - 1.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - 1.$$

II. Пусть  $f(x) = P_n(x)e^{ax}\sin x$ . Это значит, что  $f(x) = \operatorname{Im}(P_n(x)e^{(a+li)x})$ .

Введем вспомогательное уравнение с комплексной правой частью:

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{(a+li)x}. \quad (15.44)$$

Формально мы имеем здесь случай I.

а) Пусть  $a + li$  не есть корень характеристического уравнения. Тогда частное решение уравнения (15.44) имеет вид

$$\tilde{v} = Q_n(x)e^{(a+li)x}.$$

Многочлен  $Q_n(x)$  имеет, вообще говоря, комплексные коэффициенты, а значит

$$Q_n(x) = S_n(x) + iT_n(x),$$

где  $S_n(x)$  и  $T_n(x)$  — многочлены с вещественными коэффициентами (при этом степень одного из многочленов может быть и меньше, чем  $n$ ). Итак,

$$\tilde{v}(x) = (S_n(x) + iT_n(x))e^{(a+li)x}.$$

В силу теоремы 2 предыдущего параграфа, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$v = \operatorname{Im} \tilde{v} = \operatorname{Im}((S_n(x) + iT_n(x))e^{(a+li)x}) = \operatorname{Im}((S_n(x) + iT_n(x))e^{ax} \times$$

$$\times (\cos x + i \sin x)) = e^{ax} \operatorname{Im}((S_n(x) + iT_n(x))(\cos x + i \sin x)), \text{ т.е.}$$

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin x + T_n(x)\cos x). \quad (15.45)$$

б) Если  $a + li$  — корень характеристического уравнения, то

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin x + T_n(x)\cos x)x. \quad (15.46)$$

**Примечание.** Если  $f(x) = P_n(x)e^{ax}\cos x$ , то, очевидно, вид формул

(15.45) и (15.46) сохраняется. Если же  $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos lx + Q_n(x)\sin lx)$ , то все равно, например, в случае а) будет

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx),$$

где  $n$  — высшая из степеней многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$ .

Заметим также, что на практике при интегрировании конкретных уравнений удобнее не пользоваться формулами (15.45) и (15.46), а каждый раз, как это было сделано для общего случая, вводить вспомогательное уравнение с комплексной правой частью<sup>\*</sup>.

**Пример 15.16.** Рассмотрим уравнение  $y'' + y' - 2y = e^x \cos 2x$ . Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Далее,  $e^x \cos 2x = \operatorname{Re} e^{(1+2i)x}$ . Вводим поэтому вспомогательное уравнение

$$y'' + y' - 2y = e^{(1+2i)x}. \quad (15.47)$$

Поскольку ни одно из чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не равно  $1+2i$ , то для уравнения (15.47) будет

$$\tilde{v} = A e^{(1+2i)x},$$

откуда

$$\tilde{v}' = A(1+2i)e^{(1+2i)x}, \quad \tilde{v}'' = A(1+2i)^2 e^{(1+2i)x} = A(-3+4i)e^{(1+2i)x}.$$

Подставляя  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{v}'$  и  $\tilde{v}''$  в (15.47) и попутно сокращая на  $e^{(1+2i)x}$ , получим

$$A(-3+4i) + A(1+2i) - 2A = 1, \text{ т.е.} \\ (-4+6i)A = 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{-4+6i} = \frac{-4-6i}{52} = -\frac{2+3i}{26}.$$

Итак,

$$\tilde{v} = -\frac{2+3i}{26} e^{(1+2i)x},$$

а значит, для исходного уравнения:

$$v = \operatorname{Re} \left( -\frac{2+3i}{26} e^{(1+2i)x} \right) = -\frac{1}{26} \operatorname{Re} \left( (2+3i)e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \right) = \\ = -\frac{1}{26} e^x (2 \cos 2x - 3 \sin 2x).$$

<sup>\*</sup> Исключение составляет лишь случай, когда  $a=0$  и когда проще искать  $v(x)$  (например, для случая а)) сразу в виде

$$v = S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx.$$



## 18. Исследование простейших колебательных процессов

**1. Свободные колебания без сопротивления.** Пусть на материальную точку с массой  $m$  действует упругая сила  $F = -cx$ . Тогда уравнение движения запишется так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx.$$

Положив  $\frac{c}{m} = k^2$ , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

Поскольку  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ , то общее решение:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (15.48)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий.

Перепишем (15.48) так

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin kt \right).$$

Обозначим

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi.$$

Последние два обозначения допустимы, так как, во-первых,

$$\left| \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right| \leq 1,$$

и, во-вторых,

$$\left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 + \left( \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 = 1.$$

Получаем теперь

$$x = A \sin(kt + \varphi).$$

Это – простое гармоническое колебание с амплитудой  $A$ , частотой  $k$  и начальной фазой  $\varphi$ .

**2. Свободные колебания в среде с сопротивлением.** Пусть на точку, кроме упругой силы, действует сила сопротивления среды  $R = \beta v$ . Тогда уравнение движения примет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - cx.$$

Полагая  $\frac{c}{m} = k^2$ ,  $\frac{\beta}{m} = 2h$ , будем иметь

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Обычно  $h$  бывает мало, т.е.  $h^2 - k^2 < 0$ . Обозначая  $\sqrt{k^2 - h^2} = \alpha$ , получим

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \alpha i,$$

а значит

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t), \text{ т.е.}$$

$$x = Ae^{-ht} \sin(\alpha t + \varphi).$$

Итак, точка совершает затухающие колебания с амплитудой, убывающей по экспоненциальному закону, и с постоянной частотой (рис. 15.11).

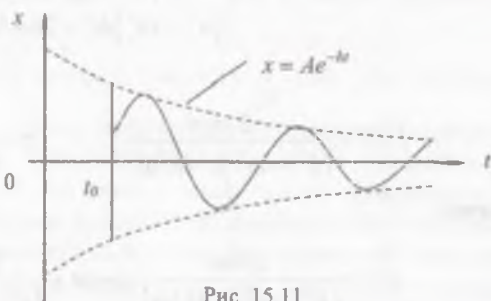


Рис. 15.11

**Примечание.** Если  $h > k$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и различны, а значит, в этом случае

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Движение в этом случае не является колебательным, но, поскольку, очевидно,  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$ , также затухает.

Если же  $h = k$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$ , а значит

$$x = C_1 e^{-ht} + C_2 t e^{-ht},$$

т.е. движение также затухает (хотя и с меньшей скоростью благодаря множителю  $t$ ), но не является колебательным.

**3. Колебания при наличии синусоидальной внешней силы.** Пусть, кроме упругой силы и силы сопротивления среды, на точку действует внешняя сила, равная  $P \sin(\omega t + \psi)$ . Обозначая  $\frac{P}{m} = p$  и полагая для простоты записи  $\psi = 0$ , получим уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = p \sin \omega t. \quad (15.49)$$

Очевидно, что  $x = u + v$ , причем  $u = Ae^{-ht} \sin(\alpha t + \varphi)$ . Функцию  $v$  ищем в виде

$$v = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

Тогда

$$v' = \omega(-M \sin \omega t + N \cos \omega t), \quad v'' = -\omega^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t),$$

и подстановка в уравнение дает

$$-\omega^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t) + 2h\omega(-M \sin \omega t + N \cos \omega t) + k^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t) = p \sin \omega t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2h\omega M + (k^2 - \omega^2)N = p \\ (k^2 - \omega^2)M + 2h\omega N = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$M = \frac{-2ph\omega}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2}, \quad N = \frac{p(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2},$$

а значит

$$v = -\frac{2ph\omega}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{p(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2} \sin \omega t. \quad (15.50)$$

Это — простое гармоническое колебание с амплитудой, равной  $\sqrt{M^2 + N^2}$ , и с начальной фазой, равной  $\arctg \frac{M}{N}$ .

Движения, описываемые слагаемыми  $u$  и  $v$ , называют соответственно свободными и вынужденными колебаниями. Поскольку  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u = 0$ , то при больших  $t$  движение описывается практически только вынужденными колебаниями. Их частота равна частоте внешней силы.

Предположим, что сопротивление отсутствует, т.е.  $h = 0$ . Тогда  $u = A \sin(kt + \varphi)$ , а

$$v = \frac{p}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (15.51)$$

В этом случае свободные колебания не затухают, и общее движение точки есть сумма двух простых гармонических колебаний с частотами  $k$  и  $\omega$ .

Пусть  $\omega \rightarrow k$ . Тогда из (15.51) следует, что амплитуда вынужденных колебаний делается бесконечно большой. Исследуем предельный случай, когда  $\omega = k$ . Поскольку  $h = 0$ , то  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ , и равенство  $\omega = k$  указывает на то, что  $v$  надо искать в виде

$$v = (M \cos kt + N \sin kt) t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2kM = p \\ -2kN = 0 \end{cases},$$

т.е.

$$M = -\frac{p}{2k}, \quad N = 0, \text{ т.е. значит}$$

$$v = -\frac{p}{2k} t \cos kt,$$

т.е. амплитуда вынужденных колебаний растет пропорционально времени, рис. 15.12. Это явление называется резонансом.

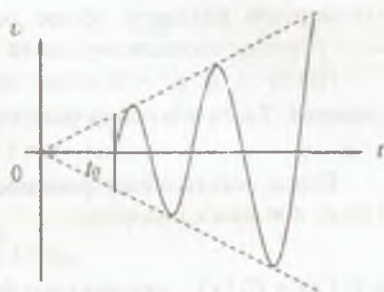


Рис. 15.12

Если же  $h \neq 0$ , то из (15.50) следует, что  $v = -\frac{p}{2k} \cos kt$ , т.е. резонанса при  $\omega = k$  в этом случае нет. Итак, теоретически при наличии сопротивления резонанс невозможен. Однако, практически при малых  $h$  амплитуда вынужденных колебаний при  $\omega = k$  все равно становится слишком большой.

**Примечание.** Мы рассмотрели простейшие механические колебания. Однако, если на клеммы изображенной на чертеже электрической цепи (рис. 15.13) подавать напряжение  $v(t)$ , то сила тока  $i(t)$ , как легко показать, удовлетворяет уравнению

$$L i'' + R i' + \frac{1}{C} i = \frac{1}{L} v'(t).$$

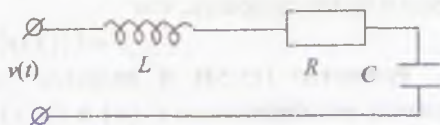


Рис. 15.13

Поэтому если  $v(t)$  меняется синусоидально, то это уравнение совершенно аналогично уравнению (15.49), а значит, в данной цепи имеют место явления, аналогичные только что описанным.

## 19. Интегрирование неоднородных линейных уравнений 2-го порядка методом вариации произвольных постоянных

Возвратимся к уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (15.38)$$

Если его правая часть  $f(x)$  не имеет рассмотренного ранее «специального» вида, то даже в случае постоянных коэффициентов (что в данном параграфе не является обязательным) это уравнение не может быть проинтегрировано методом, описанным выше (его называют методом неопределенных коэффициентов). Мы рассмотрим сейчас более общий метод,



позволяющий находить общее решение уравнения (15.38), если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (15.26).

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения однородного уравнения. Тогда его общее решение имеет вид

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (15.52)$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения (15.38) в таком же виде, а именно, положим

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \quad (15.53)$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – неизвестные функции.

Однако, подставляя (15.53) в уравнение, мы не определим однозначно  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ , так как для нахождения двух неизвестных функций получим только одно условие. Поэтому необходимо еще одно, дополнительное условие, которое можно выбрать произвольно.

Из (15.53) имеем

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2.$$

В то же время из (15.52) следует, что

$$u' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Потребуем теперь, чтобы не только  $y$  выглядело так же, как и  $u$ , но и чтобы  $y'$  выглядело так же, как и  $u'$ . Для этого надо положить

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \quad (15.54)$$

откуда и будет следовать, что

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \quad (15.55)$$

Равенство (15.54) и является упомянутым выше дополнительным условием, наложенным на  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ .

Из (15.55) имеем

$$y'' = C_1(x) y_1'' + C_1'(x) y_1' + C_2(x) y_2'' + C_2'(x) y_2'.$$

Подставляя это, а также (15.55) и (15.53) в (15.38), получаем

$$C_1(x) y_1'' + C_1'(x) y_1' + C_2(x) y_2'' + C_2'(x) y_2' + p(x)(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2') +$$

$$+ q(x)(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2) = f(x), \text{ или}$$

$$C_1(x)(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1) + C_2(x)(y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2) + C_1'(x) y_1' +$$

$$+ C_2'(x) y_2' = f(x)$$

так  $y_1$  и  $y_2$  есть решения уравнения (15.26), то отсюда

$$C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' = f(x).$$

Присоединяя сюда условие (15.54), получим систему

$$\begin{cases} C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = 0 \\ C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' = f(x) \end{cases} \quad (15.56)$$

Определитель этой системы есть  $W(x)$ , а так как  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, то  $W(x) \neq 0$  при всех  $x$ . Поэтому из системы (15.56) можно найти, и притом единственным образом, неизвестные  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ :

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

откуда

$$C_1(x) = \Phi_1(x) + C_1, \quad C_2(x) = \Phi_2(x) + C_2.$$

Подставляя это в (15.53), имеем окончательно

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \Phi_1(x) y_1 + \Phi_2(x) y_2.$$

Описанный метод является обобщением метода, изложенного ранее для линейных уравнений 1-го порядка. Поэтому его также называют методом вариации произвольных постоянных.

**Пример 15.17.** Найдём общее решение уравнения  $y'' + y = \operatorname{tg} x$ .

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение

$$u = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Поэтому полагаем

$$y = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0 \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \operatorname{tg} x \end{cases},$$

из которой находим

$$C_1'(x) = \sin x, \quad C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

а значит

$$C_1(x) = -\cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \left( \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_2.$$

Итак,

$$y = -\sin x \cos x + C_1 \sin x + \sin x \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_2 \cos x,$$

т.е.

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

## 20. Линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (15.57)$$

На него переносятся все определения и, как нетрудно проверить, все свойства, изученные для однородных линейных уравнений 2-го порядка.

Пусть  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_i(x)$  – некоторые функции, а  $C_1, C_2, \dots, C_i$  – постоянные числа. Выражение вида  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_i y_i$  называется линейной комбинацией функций  $y_1, y_2, \dots, y_i$ .

Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)$  называются линейно независимыми, если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных, т.е. если тождество

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_r y_r \equiv 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ .

**Пример 15.18.** Функции  $x, x^2$  и  $x^3$  линейно независимы, так как тождество  $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \equiv 0$  возможно лишь при  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

Функции  $\cos^2 x, \sin^2 x$  и  $\cos 2x$  линейно зависимы, так как

$$\cos 2x = 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \sin^2 x.$$

Заметим, что при  $r=2$  линейная независимость функций  $y_1$  и  $y_2$  означает, что  $y_2 \neq C_1 y_1$ , что совпадает с прежним определением линейной независимости.

Пусть даны функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Их вронскианом называется определитель  $n$ -го порядка

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – частные решения уравнения (15.57). Тогда так же, как и для уравнения 2-го порядка, можно доказать, что либо  $W(x) \equiv 0$  (если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы), либо  $W(x)$  ни при одном  $x$  не обращается в нуль (если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы). Отсюда вытекает, что если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимые частные решения уравнения (15.57), то его общее решение дается формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные. Обратимся к однородному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \quad (15.58)$$

Алгебраическое уравнение  $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$  называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (15.58).

Каждому простому корню  $\lambda$  характеристического уравнения отвечает частное решение  $e^{\lambda x}$ . Если  $\lambda$  —  $k$ -кратный корень характеристического уравнения, то ему отвечают  $k$  линейно независимых частных решений:  $e^{\lambda x}$ ,  $e^{\lambda x}x$ ,  $e^{\lambda x}x^2$ , ...,  $e^{\lambda x}x^{k-1}$ .

Каждой паре простых комплексных корней характеристического уравнения  $\alpha \pm \beta i$  отвечают частные решения  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Если же  $\alpha \pm \beta i$  — пара корней  $k$ -й кратности, то ей отвечают частные решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

**Пример 15.19.** Возьмем уравнение  $y^{IV} + 4y = 0$ . Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4 = 0.$$

Перепишем его так:  $(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4) - 4\lambda^2 = 0$ ,  
т.е.

$$(\lambda^2 + 2)^2 - (2\lambda)^2 = 0,$$

или

$$(\lambda^2 + 2 + 2\lambda)(\lambda^2 + 2 - 2\lambda) = 0.$$

Решая уравнение  $\lambda^2 + 2 + 2\lambda = 0$ , получим

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Аналогично из уравнения  $\lambda^2 - 2 + 2\lambda = 0$  имеем  $\lambda_{3,4} = 1 \pm i$ .

Этим парам простых комплексных корней отвечают частные решения  $e^{-x} \cos x$ ,  $e^{-x} \sin x$ ,  $e^x \cos x$ ,  $e^x \sin x$  соответственно. Поэтому общее решение:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x). \quad (15.59)$$

Его общее решение представляется как  $y = u + v$ , где  $u$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (15.58), а  $v$  — произвольное частное решение уравнения (15.59) (этот факт, конечно, верен и для уравнений с переменными коэффициентами).

1. Пусть  $f(x) = e^{\alpha x} \rho_n(x)$ , где  $\rho_n(x)$  — многочлен  $n$ -й степени. Если  $\alpha$  не есть корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения



(15.59) ищется в виде

$$v = e^{ax} Q_n(x),$$

где  $Q_n(x)$  – многочлен  $n$ -й степени.

Если же  $a - m$  – кратный корень характеристического уравнения, то полагаем

$$v = e^{ax} Q_n(x) x^m.$$

В частности, если  $a$  – простой корень, то  $m = 1$ .

**II.** Пусть  $f(x) = e^{ax}(\rho(x)\cosh bx + Q(x)\sin bx)$ . Если  $a + bi$  и  $a - bi$  не есть корни характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$v = e^{ax}(S_n(x)\cosh bx + T_n(x)\sin bx),$$

где  $n$  – большая из степеней многочленов  $\rho(x)$  и  $Q(x)$ . Если же  $a \pm bi$  – пара  $m$  – кратных корней характеристического уравнения, то полагаем

$$v = e^{ax}(S_n(x)\cosh bx + T_n(x)\sin bx)x^m.$$

**Пример 15.20.** Возьмем уравнение  $y^{IV} - y'' = 2x - e^x + 5e^{2x}$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = -1$ , а значит

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Частное решение ищем в виде

$$v = (Ax + B)x^2 + Ce^x x + De^{2x},$$

т.е.

$$v = Ax^3 + Bx^2 + Ce^x x + De^{2x}.$$

Отсюда

$$v' = 3Ax^2 + 2Bx + Ce^x + Ce^x x + 2De^{2x},$$

$$v'' = 6Ax + 2B + 2Ce^x + Ce^x x + 4De^{2x},$$

$$v''' = 6A + 3Ce^x + Cxe^x + 8De^{2x},$$

$$v^{IV} = 4Ce^x + Cxe^x + 16De^{2x}.$$

Подстановка в уравнение дает

$$4Ce^x + Cxe^x + 16De^{2x} - 6Ax - 2B - 2Ce^x - Ce^x x - 4De^{2x} = 2x - e^x + 5e^{2x},$$

т.е.

$$2Ce^x + 12De^{2x} - 6Ax - 2B = 2x - e^x + 5e^{2x}.$$

Отсюда

$$-6Ax = 2, \quad -2B = 0, \quad 2C = -1, \quad 12D = 5,$$

т.е.

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{5}{12},$$

а значит

$$v = -\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2}e^x + \frac{5}{12}e^{2x}.$$

## XVI. Первичные сведения о системах линейных дифференциальных уравнений

Для описания многих физических процессов или явлений нередко требуется несколько функций. Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Будем обозначать независимое переменное буквой  $t$ , неизвестные функции —  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , а производные функций — как обычно,  $x'_1, \dots, x^{(m_1)}_1, \dots, x'_2, \dots, x^{(m_2)}_2, \dots, x'_n, \dots, x^{(m_n)}_n$ .

**Системой обыкновенных дифференциальных уравнений** называется система уравнений вида:

$$F_i(t, x_1, x'_1, \dots, x^{(m_1)}_1, x_2, x'_2, \dots, x^{(m_2)}_2, \dots, x_n, x'_n, \dots, x^{(m_n)}_n) = 0. \quad (16.1)$$

Наибольшее из чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$  называется порядком системы уравнений (16.1). Например, в систему дифференциальных уравнений первого порядка могут входить лишь переменная  $t$ , неизвестные функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и их первые производные  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , в систему уравнений второго порядка входят еще вторые производные  $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ , и т.д..

**Определение.** Набор функций  $x_i(t)$ , определенных на некотором промежутке  $T$  (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом) оси  $t$ , имеющих на этом промежутке те производные, которые входят в уравнение (16.1), и удовлетворяющих этим уравнениям при всех  $t \in T$ , называется **решением системы уравнений** (16.1).

В дальнейшем независимая переменная  $t$  может быть интерпретирована как время, поскольку величины, характеризующие физические процессы, как правило, зависят от времени.

Для упрощения записи употребляются векторные обозначения. Так, набор функций  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обозначается

$$\bar{x}(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

при этом  $\bar{x}(t)$  называется вектор-функцией скалярного аргумента  $t$ .

Производные вектор-функции определяются как обычно:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\},$$

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \{\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n\}.$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i = \overline{1, l}), \quad (16.2)$$

которая в векторных обозначениях имеет вид

$$F_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0 \quad (i = \overline{1, l}),$$

занимает особое положение среди систем дифференциальных уравнений, так как к ней приводится произвольная система уравнений (16.1) с помощью

введения новых неизвестных функций и увеличения числа уравнений. Например, рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - y = 0 \\ t^3 \frac{dy}{dt} - 2x = 0 \end{cases}$$

Положим

$$x = x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$y = x_3$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = x_3 \\ t^3 \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{2x_1}{t^3} \end{cases}$$

Таким образом, система двух уравнений второго порядка приведена к системе трех уравнений первого порядка.

Рассмотрим одно дифференциальное уравнение  $m$ -го порядка с одной неизвестной функцией:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0$$

Это частный случай системы (16.1), когда  $l = n = 1$ ,  $m_1 = m$ . Вводя новые переменные

$$y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_m = x^{(m-1)},$$

получим систему  $m$  уравнений первого порядка с  $m$  неизвестными функциями

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_{m-1}}{dt} = y_m \end{cases}, \text{ т.е. } F(t, y_1, y_2, \dots, y_m, \dot{y}_m) = 0.$$

Если в (16.2) число уравнений равно числу неизвестных, т.е.  $n = l$ , и сами уравнения можно разрешить относительно  $x'_i$  ( $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ ), то систему

(16.2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (16.3)$$

или сокращенно в векторной форме

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}).$$

Система дифференциальных уравнений (16.3) называется **нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений**. Число неизвестных функций  $n$  иногда называют **порядком нормальной системы дифференциальных уравнений** (16.3)

**Решением системы** (16.3) в интервале  $(a, b)$  называется совокупность любых  $n$  функций  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), или  $\bar{x} = x(t)$ , определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале  $(a, b)$ , если они обращают уравнения системы (16.3) в тождества, справедливые для всех значений  $t \in (a, b)$ .

## 1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

**Задачей Коши** для системы (16.3) называется задача нахождения решения  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0, \quad (16.4)$$

где  $t_0, x_i^0$  — заданные числа ( $i = \overline{1, n}$ ).

**Теорема 16.1.** Пусть имеем нормальную систему дифференциальных уравнений (16.3), и пусть функции  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) определены в некоторой  $(n+1)$ -мерной области  $D$  изменения переменных  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если существует окрестность  $\Omega$  точки  $M_0(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ , в которой функции  $f_i$  а) непрерывны, б) имеют ограниченные частные производные по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то найдется интервал  $t_0 - h < t < t_0 + h$  изменения  $t$ , в котором  $\exists$  решение нормальной системы (16.3), удовлетворяющее начальным условиям (16.4).

Доказательство этой теоремы можно найти в [11]

Система  $n$  дифференцируемых функций

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (16.5)$$

независимой переменной  $t$  и  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  называется **общим решением нормальной системы** (16.3), если:

- 1) при любых допустимых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$  система функций (16.5) обращает уравнения (16.3) в тождества;



2) в области, где выполняются условия теоремы Коши, функции (16.5) решают любую задачу Коши.

## 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (СДУ) путем сведения к одному уравнению более высокого порядка

Один из основных методов интегрирования СДУ заключается в следующем: из уравнений системы и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности, без интегрирования, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Например, рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Дифференцируем одно из уравнений, например, первое. Тогда получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

Учитывая второе уравнение системы, приходим к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x.$$

или

$$x'' - x = 0.$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами и решение его выполняется обычным образом, т.е. составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1.$$

Находим фундаментальную систему решений

$$x_1 = e^t, \quad x_2 = e^{-t}.$$

Составляем общее решение

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

И так как  $y = \frac{dx}{dt}$ , то дифференцируя  $x(t)$ , находим  $y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ .

### 3. Метод интегрируемых комбинаций

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ , но уже легко интегрируемое. Т.е. с помощью подходящих арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) из уравнений системы (16.1) образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. достаточно просто решаемые уравнения вида

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

где  $u$  — некоторая функция от искомых функций. Каждая интегрируемая комбинация дает первый интеграл, т.е. конечное уравнение

$$\Phi_1(t, x_2, \dots, x_n) = C_1,$$

связывающее неизвестные функции и независимые переменные. Итак, первым интегралом  $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$  системы уравнений называется конечное уравнение, обращающееся в тождество при некотором значении  $C$ , если вместо  $x_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) подставлено решение системы (16.1). Если найдено  $k$  интегрируемых комбинаций, то получаем  $k$  первых интегралов:

$$\Phi_1(\dots) = C_1, \Phi_2(\dots) = C_2, \dots, \Phi_k(\dots) = C_k$$

Найденный первый интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через остальные переменные, и тем самым свести задачу к интегрированию системы более низкого порядка. Если найдено  $n$  независимых первых интегралов, то интегрирование закончено. Если предположить, что интегралы  $\Phi_i$  имеют частные производные, то для независимости их относительно  $x_1, \dots, x_n$  необходимо и достаточно, чтобы якобиан функций  $\Phi_i$  по переменным  $x_i$  не обращался тождественно в 0:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

$n$  независимых первых интегралов образуют общий интеграл системы.

**Пример 16.1.** Рассмотрим СДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим, что

$$\frac{d(y+z)}{dx} = 9(y+z),$$

откуда после интегрирования, получим

$$\ln(y+z) = 9x + \ln C_1,$$

т.е. первый интеграл системы имеет вид

$$y+z = C_1 e^{9x}.$$

Вычитая из первого уравнения исходной системы второе, получим вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(y-z)}{dx} = y-z$$

или

$$\frac{d(y-z)}{y-z} = dx.$$

Тогда, после интегрирования, имеем

$$\ln|y-z| = x + \ln C_2,$$

$$y-z = C_2 e^x.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y+z = C_1 e^{9x} \\ y-z = C_2 e^x \end{cases}$$

Откуда следует выражения для неизвестных функций

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(C_1 e^{9x} + C_2 e^x) \\ z = \frac{1}{2}(C_1 e^{9x} - C_2 e^x) \end{cases}$$

При этом первые два интеграла определяются с помощью функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые имеют вид

$$\Phi_1 = (y+z)e^{-9x} = C_1;$$

$$\Phi_2 = (y-z)e^{-x} = C_2.$$

Проверим, что функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  линейно независимы. С этой целью вычислим их якобиан:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-9x} & e^{-9x} \\ e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} e^{-9x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2e^{-x} e^{-9x} \neq 0.$$

**Пример 16.2.** Рассмотрим систему 3-х дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 - y_1 \end{cases}$$

**Решение.** Для нахождения первой интегрируемой комбинации сложим данные уравнения, тогда получим

$$d(y_1 + y_2 + y_3) = 0;$$

откуда имеем первый интеграл:

$$y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Для нахождения второй интегрируемой комбинации умножим первое уравнение на  $y_1$ , второе – на  $y_2$ , третье – на  $y_3$  и сложим. Тогда имеем:

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3' = y_3 y_1 - y_1 y_2 + y_1 y_2 - y_3 y_2 + y_2 y_3 - y_1 y_3 = 0.$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{2} d(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Тогда первых два интеграла запишутся как

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 = C_1 \end{cases}$$

Чтобы получить оставшийся первый интеграл, сложим второе и третье уравнения, тогда получим, что

$$\frac{d(y_2 + y_3)}{dt} = -(y_3 - y_2).$$

Заменяя выражение  $y_3 - y_2$  на  $\frac{dy_1}{dt}$ , пользуясь первым уравнением исходной системы, получим равенство

$$\frac{d(y_2 + y_3)}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$$

или

$$d(y_2 + y_3 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_2 + y_3 - y_1 = C_3$$

Таким образом, окончательно получим ответ:

$$y_1 + y_2 + y_3 = C_1$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_2$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_3.$$



**Пример 16.3.**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

**Решение.** Очевидно, что

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0;$$

Тогда первый интеграл имеет вид:

$$x_1 - x_2 = C_1.$$

Учитывая выражения для  $x_1$ , исходную систему представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t} \\ \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1 \end{cases}$$

Откуда получим, что

$$x_3 = (C_1 + 1)t + C_2;$$

$$x_3 - t = C_1 t + C_2.$$

Тогда

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2};$$

откуда

$$x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3.$$

**Пример 16.4.** Найти решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}; \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x - t} \end{cases}$$

которое удовлетворяет заданным начальным условиям:

$$x|_{t=0} = 1$$

$$y|_{t=0} = 1$$

**Решение.** Имеем

$$\begin{cases} y\left(\frac{dx}{dt}-1\right)=-1 \\ \frac{dy}{dt}(x-t)=1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y\frac{d(x-t)}{dt}=-1 \\ (x-t)\frac{dy}{dt}=1 \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения,

$$y\frac{d(x-t)}{dt}+(x-t)\frac{dy}{dt}=0,$$

затем свернем полученное уравнение как

$$d[y(x-t)]=0,$$

тогда получим, что

$$y(x-t)=C_1.$$

Отсюда

$$x-t=\frac{C_1}{y}.$$

Из второго уравнения системы имеем, что

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{C_1}.$$

Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{C_1},$$

тогда

$$\ln y=\frac{1}{C_1}t+\ln C_2.$$

Таким образом, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y=C_2e^{\frac{t}{C_1}} \\ x=t+\frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{t}{C_1}} \end{cases}$$

#### 4. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений

Для нахождения интегрируемых комбинаций при решении системы

дифференциальных уравнений иногда бывает удобно записать ее в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dt}{1} \quad (16.6)$$

В такой системе переменные  $t, x_1, \dots, x_n$  равноправны, что в некоторых случаях упрощает нахождение интегрируемых комбинаций.

Для решения системы (16.6) берут либо пары отношений, допускающие разделение переменных, либо же используют производные пропорций.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2};$$

$$a_1 b_2 = a_2 b_1;$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2} = \frac{\lambda_1 a_1 b_2 + \lambda_2 a_2 b_2}{\lambda_1 b_1 b_2 + \lambda_2 a_2 b_2} = \frac{\lambda_1 a_2 b + \lambda_2 a_2 b_2}{\lambda_1 b_1 b_2 + \lambda_2 a_2 b_2} = \frac{a_2(\lambda_1 b + \lambda_2 b_2)}{b_2(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)}$$

**Пример 16.5.**

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$$

$$y = C_1 z.$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy},$$

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2)}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy};$$

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln y + \ln C_2;$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2 \\ \frac{y}{z} = C_1 \end{cases}$$

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x};$$

$$\frac{d(t+x+y)}{0} = \frac{dt}{2x};$$

$$t+x+y=C_2;$$

$$\int \ln t dt = -\int 2x dx;$$

$$t \ln t - t = -x^2 + C_1;$$

$$t(\ln t - 1) + x^2 = C_1;$$

## 5. Интегрирование однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Однородной линейной системой с постоянными коэффициентами называется система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k(t) \quad (i=\overline{1,n}) \quad (16.7)$$

где коэффициенты  $a_{ik}$  — постоянные, а  $x_k(t)$  — искомые функции от  $t$ . Систему (16.7) можно коротко записать в виде одного матричного уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (16.8)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}.$$

Одно столбцовая матрица  $Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$  называется частным решением

уравнения (16.8) в интервале  $(a, b)$ , если выполняется тождество:

$$\frac{dY}{dt} = AY(t) \text{ для } a < t < b$$

Система частных решений



$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_1^{(n)}(t) \end{bmatrix}, X_2(t) = \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{bmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

(здесь в записи  $x_i^{(k)}$  – нижний индекс указывает номер решения, верхний – номер функции в решении) называется фундаментальной на интервале  $(a, b)$ , если ее определитель Вронского

$$w(t) = w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\forall t \in (a, b)$$

**Теорема 16.2.** Если система частных решений однородного уравнения (16.8) является фундаментальной, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{X}(t) = c_1 \bar{X}_1(t) + c_2 \bar{X}_2(t) + \dots + c_n \bar{X}_n(t), \quad (16.9)$$

где  $C_i (i=1, \bar{n})$  – произвольные постоянные. Доказательство этой теоремы читатель может выполнить самостоятельно.

Линейные системы можно интегрировать различными способами, рассмотренными ранее, например методом исключения, путем нахождения интегрируемых комбинаций и т.д. Для интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется также метод Эйлера.

Рассмотрим этот метод в применении к системе трёх однородных дифференциальных уравнений (ОДУ).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

Решение системы ищем в виде

$$x = \lambda e^{\pi}, y = \mu \cdot e^{\pi}, z = \nu e^{\pi},$$

$$\lambda, \mu, \nu, r - const$$

Подставляя это решение в систему, получим

$$\lambda r e^{rt} = e^{rt} (3\lambda - \mu + \nu)$$

$$\mu r e^{rt} = e^{rt} (-\lambda + 5\mu - \nu)$$

$$\nu r e^{rt} = e^{rt} (\lambda - \mu + 3\nu)$$

$$\begin{cases} \lambda(3-r) - \mu + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu(5-r) - \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu(3-r) = 0 \end{cases}$$

Система уравнений относительно  $\lambda, \mu, \nu$  имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение называется характеристическим уравнением

$$r^3 - 11r^2 - 36r - 36 = 0.$$

Корням этого уравнения  $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$  соответствуют числа

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 0, \nu_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 1, \mu_2 = 1, \nu_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 1, \mu_3 = -2, \nu_3 = 1.$$

Выписываем частные решения

$$x_1 = e^{2t} \quad y_1 = 0 \quad z_1 = -1e^{2t}$$

$$x_2 = e^{3t} \quad y_2 = e^{3t} \quad z_1 = e^{3t}$$

$$x_3 = e^{6t} \quad y_3 = -2e^{6t} \quad z_1 = e^{6t}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

$$y = C_2 e^{3t} - 3C_3 e^{6t}$$

$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

В принятых ранее обозначениях частные решения запишем как

$$x_1^{(1)} = e^{2t} \quad x_1^{(2)} = 0 \quad x_1^{(3)} = -e^{2t}$$

$$x_2^{(1)} = e^{3t} \quad x_2^{(2)} = e^{3t} \quad x_2^{(3)} = e^{3t}$$

$$x_3^{(1)} = e^{6t} \quad x_3^{(2)} = -2e^{6t} \quad x_3^{(3)} = e^{6t}$$

Здесь верхний индекс совпадает с номером неизвестной функции, а нижний указывает номер решения, т.е.  $x_1^{(1)} = x_1$ ,  $x_1^{(2)} = y_1$ ,  $x_1^{(3)} = z_1$  и т.д. Тогда в векторной форме частные решения  $\vec{X}_i$  представляются как

$$\bar{X}_1 = (e^{2t}, 0, -e^{2t})^T$$

$$\bar{X}_2 = (e^{3t}, e^{3t}, e^{3t})^T$$

$$\bar{X}_3 = (e^{6t}, -2e^{6t}, e^{6t})^T$$

Общее решение  $\bar{X} = \sum C_i \bar{X}_i$ , т.е.

$$\bar{X} = C_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Откуда следует, что

$$x = x^{(1)} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

$$y = x^{(2)} = C_2 e^{3t} - 3C_3 e^{6t}$$

$$z = x^{(3)} = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения комплексные.

**Пример 16.6.** Решить систему:

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y$$

Составим характеристическое уравнение. Система при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} (1-r)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1+r)\mu = 0 \end{cases} \quad (16.10)$$

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -(1+r) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-r^2) + 1 = 0$$

$$r^2 + 9 = 0,$$

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

подставим последовательно найденные корни в полученное характеристическое уравнение (16.10):

$$\begin{cases} (1-3i)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1+3i)\mu = 0 \end{cases}$$

Одно уравнение является следствием другого, т.к.  $\Delta = 0$ .

$$5\mu = (1-3i)\lambda, \\ \text{если } \lambda=5, \text{ то } \mu=1-3i.$$

Тогда первое частное решение запишется так:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5e^{3it} \\ y_1 &= (1-3i)e^{3it} \end{aligned} \quad (16.11)$$

Аналогично подставляя в (16.10) корень  $r_2 = -3i$ , получим:

$$\begin{cases} (1+3i)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1-3i)\mu = 0 \end{cases} \\ \lambda = 5; \mu = 1+3i; \\ x_2 = 5e^{-3it} \\ y_2 = (1+3i)e^{-3it}$$

Перейдем к новой фундаментальной системе решений

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \bar{x}_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2i} \\ \bar{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2}, & \bar{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i} \\ \bar{x}_1 &= 5\cos 3t, & \bar{y}_1 &= \cos 3t + 3\cos 3t \\ \bar{x}_2 &= 5\sin 3t, & \bar{y}_2 &= \sin 3t - 3\cos 3t. \end{aligned}$$

Тогда общим решением системы будет

$$\begin{aligned} x &= c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t \\ y &= c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 = c_1 (\cos 3t + \sin 3t) + c_2 (\sin 3t - 3\cos 3t) \end{aligned}$$

**Примечание.** Найдя первое частное решение (16.11) можно было бы сразу написать общее решение системы, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} x &= C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1 \\ y &= C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$  обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа  $z$ , ( $z = a + bi$ ).

Рассмотрим случай кратных корней.

**Пример 16.7.** Рассмотрим СДУ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases} \quad (16.12)$$

Составим характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{cases} (2-r)\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + \mu(4-r) = 0 \end{cases} \quad (16.13)$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 8+r^2-6r+1 = r^2-6r+9=0.$$

$$r_{1,2}=3.$$

В этом случае решение следует искать в виде:

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t) e^{3t}, \quad y = (\lambda_2 + \mu_2 t) e^{3t} \quad (16.14)$$

Подставляя (16.14) в первое уравнение (16.12) и сокращая на  $e^{3t}$ , получаем:

$$(3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1) = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + \lambda_2 + \mu_2 t.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  приравняем выражения при

$$\left. \begin{array}{l} t \mid 3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2 \\ t^0 \mid 3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right\}, \text{ откуда: } \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1 \\ \mu_2 = \mu_1 \end{cases}.$$

Величины  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  остаются произвольными. Обозначая их через  $C_1$  и  $C_2$ , получаем общее решение системы (16.12):

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t) e^{3t} \\ y &= (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t} \end{aligned}$$

## 6. Неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений (НЛСДУ)

Рассмотрим неоднородную ЛСДУ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k(t) + f_i(t), \quad i=1,2,\dots,n,$$

или в матричном виде:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где  $F$  – одностолбцовая матрица, элементами которой являются функции  $f_i(t)$ .

**Теорема 16.3.** Общее решение  $X(t)$  неоднородной линейной системы равно сумме общего решения  $X_{oo}(t)$  соответствующей однородной системы

$\frac{dX}{dt} = AX$  и любого частного решения  $X_{чн}(t)$  данной неоднородной системы:

$$X(t) = X_{oo}(t) + X_{чн}(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(t) + X_{чн}(t),$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные. Доказательство этой теоремы может быть найдено в учебниках [11].

**Пример. 16.8.** Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

или

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

Соответствующая однородная система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}, \text{ характеристический многочлен } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

При  $\lambda = i$   $\begin{cases} -ib_1 + b_2 = 0 \\ -b_1 - ib_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -ib_1 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = ib_1, (b_1 - \text{любое}).$

Пусть  $b_1 = 1$ , тогда  $b_2 = i$ .

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Вещественная и мнимая части этого решения являются решениями однородной системы, поэтому

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Частное решение будем искать, следуя методу Лагранжа, т.е. применяя метод вариации произвольных постоянных

$$X^*(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$X^{*'}(t) = C_1'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - C_1(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Подставляя  $X^*$  и  $X^{*}'$  в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(t) = -\cos t, \quad C_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

$$C_1(t) = -\int \cos t dt = -\sin t.$$

Тогда

$$C_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = -\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} d(\cos t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

$$X^*(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\cos t \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{\cos t} + \sin t \cos t \\ 1 + \cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix},$$

или

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t$$

$$x_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2.$$

Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами можно искать, не применяя метод вариации, а используя метод неопределённых коэффициентов в том случае, когда функции  $f_k(t)$  имеют вид сумм и произведений функций:  $P_n(t)$ ,  $e^{at}$ ,  $\cos \beta t$ ,  $\sin \beta t$ .

Это делается по тем же правилам что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида со следующими изменениями:

а) Если  $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_k(t) \end{pmatrix}$ , причем  $f_k(t) = P_{nk}(t)e^{\gamma t}$ , где  $P_{nk}$  — многочлен степени

$nk$ , то частное решение системы ищется не в виде  $t^s Q_n(t)e^{\gamma t}$  (как для одного уравнения), а в виде

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

причем

$$x_k^*(t) = Q_{n+s}^{(k)}(x) e^{\gamma t}, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $Q_{n+s}^{(k)}(x)$  — многочлен степени  $n+s$  с неизвестными коэффициентами;  $n = \max n_k$ ,  $s=0$ , если  $\gamma$  не корень характеристического уравнения; если же  $\gamma$  — корень характеристического уравнения кратности  $p$ , то  $s=p$ .

Неизвестные коэффициенты многочленов  $Q_{n+s}^{(k)}(x)$  определяются путём подстановки выражений в данную неоднородную систему и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $t$ .

**Пример. 16.9.** Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 2e^t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + t^2 \end{cases}$$

или в матричном виде,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}, \text{ и характеристический многочлен } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ .

При

$$\lambda_1 = 1 \begin{cases} -b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = b_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 1$ .

При

$$\lambda_2 = -1 \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 = b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_2 = -b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = b_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = -1$ .

$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$  и  $X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$  составляют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение линейной однородной системы

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$



или

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ \bar{y}_2 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Представим правую часть в виде

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} e^{0t} = F_1(t) + F_2(t).$$

Частное решение будет равно соответственно  $X^*(t) = X_1^*(t) + X_2^*(t)$ .

Для первого слагаемого  $\gamma = 1$  и совпадает с простым корнем характеристического уравнения ( $n_1 = 0, n_2 = 0 \Rightarrow n = \max n_k = 0; s = 1$ )

$$X_1^*(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} e^t.$$

Для второго слагаемого  $\gamma = 0$  и не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения ( $n_1 = 0, n_2 = 2 \Rightarrow n = \max n_k = 2; s = 0$ )

$$X_2^*(t) = \begin{pmatrix} a_3 t^2 + l_3 t + d_3 \\ a_4 t^2 + l_4 t + d_4 \end{pmatrix}.$$

В силу принципа суперпозиции решаем две системы:

$$\begin{aligned} X_1^{*'} &= AX_1^* + F_1 \text{ и } X_2^{*'} = AX_2^* + F_2 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 t + l_2 \\ a_1 t + l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 + a_1 \\ a_2 t + l_2 + a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 t + l_2 + 2 \\ a_1 t + l_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t + l_1 + a_1 = a_2 t + l_2 + 2 \\ a_2 t + l_2 + a_2 = a_1 t + l_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в каждом уравнении, получим:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ l_1 + a_1 = l_2 + 2 \\ l_2 + a_2 = l_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + l_1 - l_2 = 2 \\ a_1 - l_1 + l_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a_1 = 2, a_1 = 1, l_1 - l_2 = 1, (l_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $l_1 = 0, \Rightarrow l_2 = -1$ .  $X_1^*(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t$ .

Для второй системы,

$$\begin{pmatrix} 2a_3 t + l_3 \\ 2a_4 t + l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 t^2 + l_3 t + d_3 \\ a_4 t^2 + l_4 t + d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

решение проводим аналогично и получаем:

$$X_2^*(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Окончательно, общее решение системы

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2, \\ y_2 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1) e^t - 2t. \end{aligned}$$

б) если  $f_k(t) = P_{nk}(t) e^{at} \cos \beta t$  или  $f_k(t) = P_{nk}(t) e^{at} \sin \beta t$ , то частное решение системы ищется в виде

$$x_k(t) = e^{at} \left( Q_{n+s}^{(k)}(t) \cos \beta t + Q_{n+s}^{(k)}(t) \sin \beta t \right),$$

где  $s$  определяется так же, как и в случае (а), причем с корнями характеристического уравнения сравнивается число  $\gamma = \alpha + i\beta$ .

**Пример 16.10.** Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}, \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Найдём решение, соответствующее  $\lambda_1 = i$ .

$$\begin{cases} (1-i)b_1 - b_2 = 0 \\ 2b_1 - (1+i)b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1-i)b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = (1-i)b_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1$ , тогда  $b_2 = 1 - i$ . Собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1 = i$ , равен  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ .

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Получено комплекснозначное решение системы. Вещественная и мнимая часть этого решения составляют фундаментальную систему решений.

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Общее решение линейной однородной системы имеет вид

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение линейной неоднородной системы. Правая часть имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} \Rightarrow$$

$\gamma = 0 + i$  — совпадает с простым корнем характеристического уравнения.

Частное решение ищем в виде

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \sin t.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \cos t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a_2 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \sin t \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t.$$

Приравниваем коэффициенты при  $t \cos t$ ,  $t \sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\sin t$  слева и справа:

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + l_3 \\ a_2 + l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -l_1 + a_3 \\ -l_2 + a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} a_3 = a_1 - a_2 \\ a_4 = 2a_1 - a_2 \\ -a_1 = a_3 - a_4 \\ -a_2 = 2a_3 - a_4 \\ a_1 + l_3 = l_1 - l_2 \\ a_2 + l_4 = 2l_1 - l_2 \\ -l_1 + a_3 = l_3 - l_4 + 2 \\ -l_2 + a_4 = 2l_3 - l_4 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 0$ ,

$$\begin{aligned} l_1 &= -l_3 + l_4 - 1 \\ l_2 &= -2l_3 + l_4 \end{aligned} \quad (l_3, l_4 - \text{любые}).$$

Выберем  $l_3 = 0$ ,  $l_4 = 1$ . Тогда  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 1$ .

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

И, окончательно,

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

Или

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t + t \sin t,$$

$$x_2(t) = C_1 (\cos t + \sin t) + C_2 (\sin t - \cos t) - 2t \cos t + \cos t + \sin t.$$

## **XVII. Простейшие приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений**

### **1. Общие замечания**

Пусть имеется произвольное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (17.1)$$

Требуется найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

При этом предполагается, что условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений делятся на аналитические, графические и численные. При аналитическом методе интегрирования возможны следующие случаи:

- 1) Решение получено в виде суммы конечного числа функций (элементарных или неэлементарных).
- 2) Решение представлено интегралом от некоторой функции (или несколькими интегралами).
- 3) Решение найдено в виде некоторого функционального ряда. Аналитические решения дифференциальных уравнений принято называть точными. Однако, с точки зрения практики этот термин неудачен. Пусть, например, частное решение некоторого уравнения получено в следующем неявном виде

$$2^x + \cos y = e^y + \ln x.$$

Из подобного равенства найти значения  $y$ , отвечающие данным значениям  $x$ , обычно бывает труднее, чем если с самого начала интегрировать исходное дифференциальное уравнение каким-нибудь численным методом. Иными словами, из такого «точного» решения даже приближенные значения переменной  $y$  найти очень сложно.

Аналитические и графические методы при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений играют вспомогательную роль, а основными являются численные методы.

### **2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов**

Пусть, для определённости, требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение 2-го порядка



$$y'' = f(x, y, y') \quad (17.2)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Будем искать решение в виде ряда Тейлора

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Начальные условия дают

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Далее, из (17.2) имеем

$$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя уравнение (17.2) по  $x$ , получим

$$y''' = f'_x(x, y, y') + f'_y(x, y, y')y' + f'_{y'}(x, y, y')y'', \quad (17.3)$$

Откуда

$$y'''(x_0) = f'_x(x_0, y_0, y'_0) + f'_y(x_0, y_0, y'_0)y'_0 + f'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)y''_0.$$

Дифференцируя теперь равенство (17.3) по  $x$  и полагая

$$x = x_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, y''' = y'''_0,$$

находим  $y^{IV}(x_0)$  и т.д.

При тех значениях  $x$ , при которых полученный ряд сходится, его сумма является решением полученного уравнения.

**Пример 17.1.** Проинтегрируем уравнение

$$y'' = (1 + x^2)y \quad (17.4)$$

при начальных условиях  $y|_{x=0} = -2$ ,  $y'|_{x=0} = 2$ .

Полагаем

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Из начальных условий имеем

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 2.$$

Дифференцируя уравнение (17.4), находим

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y',$$

откуда

$$y'''(0) = 2.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, имеем

$$y^{IV} = 2y + 4xy' + (1 + x^2)y'',$$

откуда

$$y^{IV}(0) = -4 - 2 = -6.$$

Аналогично,

$$y'' = 6y' + 6xy'' + (1+x^2)y''',$$

а значит,

$$y''(0) = 12 + 2 = 14,$$

и т.д.

Итак,

$$y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} + \dots$$

Описанный приём интегрирования называется методом последовательного дифференцирования. Легко видеть, что он применим к произвольному уравнению вида (17.1), независимо от его порядка и от вида функции  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Такие методы называют универсальными. Если уравнение является линейным, т.е. если оно имеет вид

$$y^{(n)} = p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y + f(x), \quad (17.5)$$

то его можно интегрировать и при помощи т. н. метода неопределенных коэффициентов. При этом предполагается, что функции  $p_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и  $f(x)$  разлагаются в ряды Тейлора в окрестности начальной точки  $x_0$ .

Метод неопределенных коэффициентов состоит в следующем. Решение уравнения ищем в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad (17.6)$$

Отсюда находим  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  и подставляем эти результаты в (17.5) вместе с рядами для  $p_i(x)$  и  $f(x)$ . В полученном тождестве приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях  $x-x_0$ . В результате приходим к системе бесконечного числа уравнений с неизвестными  $a_0, a_1, a_2, \dots$  (фактически 7 первых коэффициентов находятся из начальных условий).

Можно показать, что если ряды для функций  $p_i(x)$  и  $f(x)$  сходятся в некотором интервале  $c_R(x_0)$ , то и полученный описанным способом ряд (17.6) сходится в этом интервале. В частности, если все функции  $p_i(x)$  и  $f(x)$  — многочлены, то ряд (17.6) сходится при всех  $x$ .

Предположим, что ряд (17.6) сходится в интервале  $c_R(x_0)$ . Тогда в этом интервале его сумма является искомым решением уравнения. Действительно, во-первых, ряд (17.6) в интервале  $c_R(x_0)$  можно почленно дифференцировать любое число раз. Во-вторых, подставляя выражения для

$y, y', \dots, y^{(n-1)}$  в (17.5), мы умножаем их почленно на ряды для соответствующих функций  $p_i(x)$ , что законно, поскольку степенные ряды внутри интервала сходимости сходятся абсолютно. Наконец, коэффициенты ряда (17.6) вычислены, исходя из того, что левая часть уравнения (17.5) тождественно совпадает с правой.

**Пример 17.2.** Возьмем то же уравнение (17.4)

$$y'' = (1+x^2)y$$

с теми же начальными условиями  $y|_{x=0} = -2$ ,  $y'|_{x=0} = 2$ .

Положим

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

В силу начальных условий,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = 2$ , так что

$$y = -2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

откуда

$$y' = 2 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots,$$

$$y'' = 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots$$

Подставляя это в уравнение, имеем

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots = \\ & = (1+x^2)(-2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots), \end{aligned}$$

т.е.,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots = \\ & = -2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots - 2x^2 + 2x^3 + \dots, \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$1 \cdot 2 a_2 = -2$$

$$2 \cdot 3 a_3 = 2$$

$$3 \cdot 4 a_4 = a_2 - 2$$

$$4 \cdot 5 a_5 = a_3 + 2$$

...

а значит,

$$a_2 = -1, a_3 = 1/3, a_4 = -1/4, a_5 = 7/60, \dots$$

Следовательно,

$$y = -2 + 2x - x^2 + 1/3 x^3 - 1/4 x^4 + 7/60 x^5 + \dots, \quad (17.7)$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным ранее методом последовательного дифференцирования.

В силу сказанного выше, ряд (17.7) сходится при всех  $x$  и,

следовательно, дает решение уравнения (17.4) на всей числовой оси.

Оба описанных метода являются основными среди приближенных методов. Позже мы увидим, что эти методы могут быть использованы как составная часть некоторых численных методов.

### 3. Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка конечно-разностным методом Эйлера

Возьмем уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (17.8)$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Пусть  $y(x)$  – решение этой задачи. Требуется составить таблицу значений функции  $y(x)$  в точках  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h$  и т.д.

В равенстве (17.8) положим  $x = x_n$  и обозначим  $y(x_n) = y_n$ ,  $y'(x_n) = y'_n$ . Получим

$$y'_n = f(x_n, y_n).$$

Заменяем теперь  $y'_n$  отношением  $\frac{\Delta y_n}{h}$ . Тогда приходим к равенству

$$\frac{\Delta y_n}{h} = f(x_n, y_n). \quad (17.9)$$

Это равенство называют конечно-разностным аналогом исходного дифференциального уравнения (17.8).

Перепишем (17.9) так:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

Отсюда

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (17.10)$$

Это – рабочая формула метода Эйлера. Полагая в ней  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (17.11)$$

Поскольку

$$\frac{\Delta y_n}{h} = \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h},$$

то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{h} = y'_n.$$

Следовательно, чем меньше  $h$ , тем точнее дифференциальное уравнение (17.8) заменяется конечно-разностным уравнением (17.9). Поэтому естественно предположить, что чем меньше  $h$ , тем ближе получаемые по формуле (17.10) результаты к истинным значениям неизвестной функции.

**Пример 17.3.** Рассмотрим уравнение  $y' = \sqrt{x+y}$  с начальным условием  $y|_{x=1} = 2$ . Будем интегрировать это уравнение с шагом  $h = 0,1$ . Тогда формула (17.10) запишется так

$$y_{n+1} = y_n + 0,1\sqrt{x_n + y_n}.$$

Вычисления запишем в следующую таблицу

| $x$ | $y$   | $x+y$ | $\sqrt{x+y}$ | $0,1\sqrt{x+y}$ |
|-----|-------|-------|--------------|-----------------|
| 1,0 | 2,000 | 3,000 | 1,732        | 0,173           |
| 1,1 | 2,173 | 3,273 | 1,809        | 0,181           |
| 1,2 | 2,354 | 3,554 | 1,885        | 0,188           |
| 1,3 | 2,542 | 3,842 | 1,960        | 0,196           |
| 1,4 | 2,738 |       |              |                 |

и т.д.

Выясним геометрический смысл метода Эйлера. Для этого запишем уравнение касательной к искомой интегральной кривой в точке  $(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

или в силу (17.8),

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Положим здесь  $x = x_1$ . Получим

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h,$$

а значит

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad (17.12)$$

что совпадает с первым из равенств (17.11).

Итак, на первом шаге метода Эйлера мы заменяем искомую интегральную кривую в интервале  $[x_0, x_1]$  отрезком касательной к ней в точке  $(x_0, y_0)$ . Найдем порядок допускаемой при этом погрешности.

Для этого запишем формулу Тейлора 2-го порядка

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Отсюда получаем (вдоль кривой), полагая  $y'(x_1) = y_1'$ , что

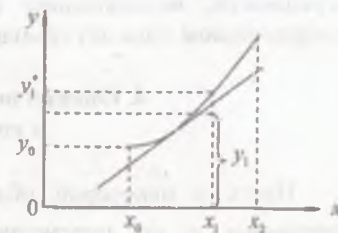


Рис. 17.1



$$y_1^* = y_0 + y_0' h + \frac{y_0''}{2!} h^2 + o(h^2),$$

т.е.

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) + o(h^2).$$

Сравнивая это с (17.12), заключаем, что погрешность, допускаемая на первом шаге, есть  $o(h^2)$ .

Сделаем следующий шаг. Для этого вычислим  $f(x_1, y_1)$ . Это число равно условному коэффициенту касательной в точке  $(x_1, y_1)$  к той интегральной кривой, которая проходит через эту точку. Эта интегральная кривая, вообще говоря, не совпадает с искомой, так как  $y_1$ , найденное по формуле (17.12), вообще говоря, не совпадает с истинным значением  $y_1^*$  величины  $y(x_1)$ . Но так как  $y_1^* = y_1 + o(h^2)$ , то при малых  $h$  будет  $y_1^* \approx y_1$ , а значит<sup>\*)</sup>

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_1, y_1^*),$$

т.е. касательные к интегральным кривым в точках с абсциссой  $x_1$  почти параллельны между собой. Поэтому, полагая

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

мы идем из точки  $(x_1, y_1)$  почти параллельно касательной к искомой интегральной кривой в точке  $(x_1, y_1^*)$ .

Таким образом, на втором шаге погрешность возникает не только вследствие замены интегральной кривой отрезком касательной к ней, но и вследствие неточного знания углового коэффициента этой касательной. То же самое относится и ко всем последующим шагам. При этом, разумеется, к погрешности, возникающей на каждом данном шаге, прибавляется (в алгебраическом смысле) суммарная погрешность всех предыдущих шагов.

#### 4. Оценка погрешности метода Эйлера в конечном интервале

Пусть в некоторой области  $D$  плоскости  $(x, y)$  функция  $f(x, y)$  непрерывна и по переменной  $y$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $K$ , т.е.  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K \|y_2 - y_1\|$ . Кроме того, будем предполагать, что в области  $D$  величина  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y)$  ограничена. Тогда

<sup>\*)</sup> Функция  $f(x, y)$  непрерывна, так как удовлетворяет теореме Коши.

существует такое  $N > 0$ , что для всех  $(x, y) \in D$  будет

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right| \leq N \quad (17.13)$$

Предположим, что, пользуясь формулой (17.10), мы совершили  $n$  шагов и получили результат  $y_n$ . Будем считать, что все точки  $(x, y)$ , фигурирующие ниже, принадлежат области  $D$ .

Тогда, обозначая погрешность вычислений через  $\varepsilon_n$ , запишем

$$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (y_{n+1} - y_{n+1}^*) - (y_n - y_n^*) = (y_{n+1} - y_n) - (y_{n+1}^* - y_n^*).$$

Но если  $y(x)$ -решение уравнения (8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ , то интегрируя это уравнение по  $x$ , получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

а значит,

$$y_n^* = y(x_n) = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} f(x, y(x)) dx$$

и аналогично,

$$y_{n-1}^* = y_0 + \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x, y(x)) dx.$$

Поэтому

$$\Delta \varepsilon_n = y_{n+1} - y_n - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = hf(x_n, y_n) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) d(x - x_{n+1}) = \\ &= f(x, y(x))(x - x_{n+1}) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \frac{df}{dx} dx = \\ &= hf(x_n, y_n^*) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \left( \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f(x, y) \right) dx \end{aligned}$$

(осуществляем здесь интегрирование по частям). Следовательно,

$$\Delta \varepsilon_n = h \left( f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*) \right) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right) dx.$$

Отсюда

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq h \left| f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*) \right| + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |x - x_{n+1}| \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right| dx.$$

Учитывая условие Липшица, а также (17.13), находим

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq hK |y_n - y_n^*| + N \int_{x_n}^{x_{n+1}} |x - x_{n+1}| dx,$$

т.е.

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq hK |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2. \quad (17.14)$$

Поскольку

$$|\Delta \varepsilon_n| = |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| \geq \left| |\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n| \right| \geq |\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n|,$$

то из (17.14) следует, что тем более

$$|\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n| \leq hK |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2,$$

т.е.

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + hK) |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2.$$

Введем промежуточные обозначения

$$1 + hK = a, \quad \frac{1}{2} Nh^2 = b. \quad (17.15)$$

Тогда

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq a |\varepsilon_n| + b.$$

Это значит, что

$$|\varepsilon_1| \leq b,$$

$$|\varepsilon_2| \leq a |\varepsilon_1| + b \leq (a + 1)b,$$

$$|\varepsilon_3| \leq a |\varepsilon_2| + b \leq (a^2 + a + 1)b$$

и т.д. Очевидно, что для любого натурального  $n$  будет иметь

$$|\varepsilon_n| \leq (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b,$$

т.е.,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{a^n - 1}{a - 1} b.$$

Подставляя сюда выражения (17.15), находим

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1+hK)^n - 1}{hK} \cdot \frac{1}{2} \cdot NK h^2,$$

т.е.,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{Nh}{2K} \cdot [(1+hK)^n - 1].$$

Используя то, что при  $u > 0$  будет  $e^u > 1 + u$ , получим

$$|\varepsilon_n| < \frac{Nh}{2K} \cdot (e^{hK_n} - 1).$$

Или окончательно

$$|\varepsilon_n| < \frac{Nh}{2K} \cdot (e^{K(x_n - x_0)} - 1). \quad (17.15^*)$$

Отсюда, в частности, следует, что на любом конечном отрезке при  $h \rightarrow 0$

будет  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , т.е.  $y_n \rightarrow y_n^*$ . Это значит, что при  $y$

указанных выше условиях метод Эйлера является

сходящимся в любом конечном интервале при  $h \rightarrow 0$ .

**Пример 17.4.** Применим полученный результат к рассмотренному выше уравнению  $y' = \sqrt{x+y}$  с

начальным условием  $y|_{x=1} = 2$ . При  $h=0,1$  мы имеем

$y_4 = 2,738$ . Легко видеть, что  $y_5 < 3$ . Поскольку

интервал  $[1,0;1,5]$  достаточно мал, то естественно

предположить, что и  $y_5^* \leq 3$ . Поэтому рассмотрим

область  $D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 1,5; 2 \leq y \leq 3\}$ .

Так как в данном случае

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \sqrt{x+y} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+y}} + 1 \right),$$

то

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) \right| = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{4,5}} + 1 \right) = 0,79.$$

Далее, поскольку  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ , то для константы  $K$  имеем

$$K \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,29.$$

Таким образом, для погрешности результата 5-го шага получаем

$$|\varepsilon_5| < \frac{0,079}{0,58} (e^{0,145} - 1) \approx 0,02.$$

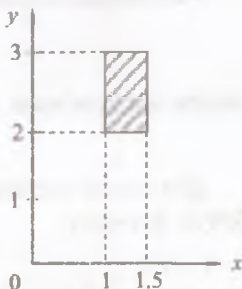


Рис. 17.2



Таким образом, метод Эйлера, являясь наиболее простым из численных методов, оказывается довольно грубым. Для повышения точности приходится брать очень малое  $h$ , а это приводит к увеличению числа необходимых шагов при интегрировании в данном интервале. Поэтому метод Эйлера обычно используется лишь для получения приближенного представления о виде интегральной кривой, да и то в небольшом интервале.

Рассмотрим нормальную систему уравнений 1-го порядка

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y})$$

с начальным условием

$$\bar{y}|_{x=x_0} = \bar{y}_0.$$

Для такой системы, по аналогии с формулой (17.10), можно записать рабочую формулу

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + hf(x_m, \bar{y}_m),$$

или, в скалярной форме,

$$\begin{aligned} y_1^{(m+1)} &= y_1^{(m)} + hf_1(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \\ y_2^{(m+1)} &= y_2^{(m)} + hf_2(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \\ &\vdots \\ y_n^{(m+1)} &= y_n^{(m)} + hf_n(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \end{aligned}$$

(здесь верхние индексы указывают на номер шага, а нижние – на номер координаты  $y_k$  вектор – функции  $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ).

В частности, для системы двух уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad z|_{x=x_0} = z_0$$

имеем

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \end{cases} \quad (17.16)$$

Оценка погрешности для системы производится совершенно аналогично случаю одного уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (17.17)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Снова вводим точки  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots$  Заметим сразу, что, положив  $y = y_1$ ,  $y' = y_2$  и тем самым, сведя уравнение (17.17) к системе

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

мы могли бы сразу воспользоваться формулами (17.16). Но можно поступить и иначе.

Полагая  $x = x_n$ , получим из (17.17)

$$y''_n = f(x_n, y_n, y'_n). \quad (17.18)$$

Если  $h$  мало, то, как было показано, не только  $\frac{\Delta y_n}{h} \approx y'_n$ , но и  $\frac{\Delta^2 y_n}{h^2} \approx y''_n$ .

Поэтому из (17.18) получаем следующий конечно-разностный аналог дифференциального уравнения (17.17)

$$\frac{\Delta^2 y_n}{h^2} = f\left(x_n, y_n, \frac{\Delta y_n}{h}\right),$$

т.е.,

$$\frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} = f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\right).$$

Отсюда

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2 f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\right). \quad (17.19)$$

Это и есть рабочая формула метода Эйлера для уравнения 2-го порядка. Из нее видно, что для заполнения очередной строки таблицы нужно иметь выполненными не одну, а две предыдущих строки. Следовательно, для начала использования формулы (17.19) нужно иметь  $y_0$  и  $y_1$ . Первое из этих чисел даётся 1-м начальным условием. Для приближенного нахождения  $y_1$  используем 2-е начальное условие, которое приближенно запишем так:

$$\frac{\Delta y_0}{h} = y'_0$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = y'_0$$

откуда

$$y_1 = y_0 + h y'_0.$$

Имея  $y_0$  и  $y_1$ , получим из (17.19)

$$y_2 = 2y_1 - y_0 + h^2 + f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h}\right)$$

$$y_3 = 2y_2 - y_1 + h^2 + f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right)$$

и т.д.

Совершенно аналогично применяется метод Эйлера для решения уравнений 3-го порядка и более высоких порядков.

## 6. Интегрирование уравнений 1-го порядка методом Эйлера с полушагом

Будем снова рассматривать уравнение (17.8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Малая точность метода Эйлера связана с тем, что касательная к интегральной кривой по мере удаления от точки касания, вообще говоря, всё больше удаляется от этой кривой. Гораздо естественнее на первом шаге «идти» из точки  $(x_0, y_0)$  в направлении касательной к интегральной кривой не в точке  $(x_0, y_0)$ , а в точке с абсциссой  $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ .

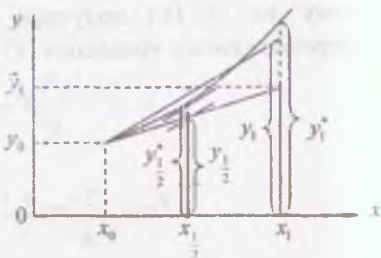


Рис. 17.3

Для приближённого нахождения углового коэффициента этой второй касательной делаем сначала из точки  $x_0$  т.н. полушаг, полагая

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0). \quad (17.20)$$

Поскольку  $y_{1/2} \approx y_{1/2}^*$ , то  $f(x_{1/2}, y_{1/2}) \approx f(x_{1/2}, y_{1/2}^*)$ , т.е. искомый угловой коэффициент приближенно равен  $f(x_{1/2}, y_{1/2})$ .

Теперь «возвращаемся» в точку  $x_0$  и совершаем из неё первый полный шаг, полагая

$$y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}). \quad (17.21)$$

Из чертежа легко видно, что найденное таким путём  $y_1$ , вообще говоря, гораздо ближе к  $y_1^*$ , чем  $y_1$ , найденное обычным методом Эйлера. Мы покажем сейчас, что погрешность, допускаемая на первом шаге описываемого метода, есть  $O(h^3)$ , а не  $O(h^2)$ , как в обычном методе Эйлера.

Введём обозначения

$$hf(x_0, y_0) = K_{10}, \quad hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{10}}{2}\right) = K_{20} \quad (17.22)$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + K_{20} \quad (17.23)$$

Очевидно, что формулы (17.22) и (17.23) совершенно равносильны формулам (17.20) и (17.21).

Возьмём теперь те же формулы (17.22), а формулу (17.23) заменим более общей формулой

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 K_{10} + \alpha_2 K_{20}, \quad (17.24)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — некоторые числа. Если  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ , то приходим к обычному методу Эйлера.

Подберём  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наивыгоднейшим образом, т.е. так, чтобы допускаемая на первом шаге погрешность имела более высокий порядок по сравнению с  $h$ . Из (17.24) и (17.22) имеем

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{10}}{2}\right).$$

В силу формулы Тейлора 2-го порядка для функций двух переменных, получим отсюда

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 hf\left(f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0)\frac{K_{10}}{2} + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\frac{h^2}{4} + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{hK_{10}}{4} + f''_{yy}(x_0, y_0)\frac{K_{10}^2}{4}\right) + O(h^2 + K_{10}^2)\right)$$

Но  $K_{10} = O(h)$ , а значит,

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 h\left(f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0)\frac{K_{10}}{2}\right) + O(h^3),$$



т.е.,

$$y_1 = y_0 + (\alpha_1 + \alpha_2)hf(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2}\alpha_2 h^2 \left( f'_x(x_0, y_0) \frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0) \frac{K_{10}}{2} f(x_0, y_0) \right) + O(h^3). \quad (17.25)$$

С другой стороны, для искомой функции  $y(x)$  имеем

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \\ + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + O((x - x_0)^3).$$

Отсюда, при  $x = x_1$ , получим

$$y_1^* = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2!} h^2 + \frac{y'''_0}{3!} h^3 + O(h^3),$$

или

$$y_1^* = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2} h^2 + O(h^3) \quad (17.26)$$

Но в силу исходного уравнения,  $y'_0 = f'(x_0, y_0)$ . Далее, дифференцируя тождество  $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ , будем иметь

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x),$$

т.е.

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))f(x, y(x)).$$

Отсюда при  $x = x_0$  находим

$$y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0).$$

Следовательно, (17.26) принимает вид

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 \left( f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0) \right) + O(h^3).$$

Сравним это с (17.25) и потребуем, чтобы порядок малости величины  $y_1^* - y_1$  был наивысшим, т.е. чтобы было  $y_1^* - y_1 = O(h^3)$ . Получим для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases},$$

а значит,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Но именно при таких  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  формула (17.24) превращается в формулу (17.23). Следовательно, если  $y_1$  вычисляется по формуле (17.23) (т.е. по формулам (17.20) и (17.21)), то  $y_1^* - y_1 = O(h^3)$ .

После того как 1-й шаг совершён, поступаем аналогично. Сначала

делаем новый полушаг по формуле

$$y_{3/2} = y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1),$$

после чего полагаем

$$y_2 = y_1 + hf(x_{3/2}, y_{3/2})$$

и т.д. Рабочие формулы метода

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

Вводя обозначения

$$hf(x_n, y_n) = K_{1n}, \quad hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{1n}}{2}\right) = K_{2n},$$

получим

$$y_{n+1} = y_n + K_{2n}. \quad (17.27)$$

Заменяя эту формулу более общей формулой

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_{1n} + \alpha_2 K_{2n} \quad (17.28)$$

и потребовав, чтобы погрешность, дополнительно возникающая на  $(n+1)$ -м шаге, составляла  $O(h^3)$ , мы, очевидно, получим, что должно быть  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ , и, таким образом, из (17.28) получим именно формулу (17.27), т.е., формулу метода Эйлера с полушагом.

## 7. Общее описание метода Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты является дальнейшим развитием метода Эйлера с полушагом. Положим

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_{1n} + \alpha_2 K_{2n} + \alpha_3 K_{3n} + \alpha_4 K_{4n}, \quad (17.29)$$

где

$$\begin{cases} K_{1n} = hf(x_n, y_n) \\ K_{2n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{1n}}{2}\right) \\ K_{3n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{2n}}{2}\right) \\ K_{4n} = hf(x_n + h, y_n + K_{3n}) \end{cases} \quad (17.30)$$

После этого преобразуем равенство (17.29) на основании формулы

Тейлора для функций двух переменных и, сравнивая результат с непосредственным разложением  $y(x_n + h)$  по формуле Тейлора, потребуем, чтобы погрешность, дополнительно возникающая на  $(n+1)$ -м шаге, имела наивысший порядок малости относительно  $h$ , т.е. чтобы она составляла  $O(h^5)$ . В результате получим, для  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , систему уравнений, из которой находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{3}, \alpha_4 = \frac{1}{6}.$$

Поэтому формула (17.29) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_{1n} + 2K_{2n} + 2K_{3n} + K_{4n}). \quad (17.31)$$

Формулы (30) и (31) и являются рабочими формулами метода Рунге-Кутты.

Очевидно, что метод Эйлера с полушагом является как бы методом Рунге-Кутты 2-го порядка, а обычный метод Эйлера – методом Рунге-Кутты 1-го порядка. Можно рассматривать методы Рунге-Кутты 3-го, 5-го, ... порядка, но наиболее часто применяют на практике описанный только что метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

**Примечание.** Для метода Рунге-Кутты (как и для метода Эйлера с полушагом) можно вывести формулы, аналогичные формуле (17.15\*) для простого метода Эйлера и позволяющие оценить суммарную погрешность, допускаемую в некотором конечном интервале. Однако, константы, входящие в эти формулы (в формуле (17.15\*) такими константами являются  $K$  и  $N$ ) находятся, как правило, настолько сложно, что практическое использование этих оценок возможно очень редко. Поэтому на практике точность метода чаще всего контролируется в ходе самих вычислений. Для этого сначала вычисляют  $y_{n+1}$  (по известному  $y_n$ ) описанным выше способом. Затем  $y_{n+1}$  вычисляется заново, но уже путём перехода от  $x_n$  к  $x_{n+1}$  не с помощью одного шага длиной  $h$ , а с помощью двух последовательных шагов длиной по  $\frac{h}{2}$ . Если между обоими результатами получается значительное

расхождение (в пределах удерживаемых десятичных знаков), то шаг уменьшают вдвое, после чего снова аналогичным образом производят контроль, и т.д. Именно таким способом автоматически регулируется длина шага при интегрировании уравнения с использованием компьютера.

Методы Рунге-Кутты (произвольного порядка), совершенно аналогично описанному, могут быть применены и к интегрированию нормальных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка, а значит, и к интегрированию уравнений высших порядков.

## 8. Интегрирование дифференциальных уравнений методом Адамса-Штёрмера

Будем снова рассматривать уравнение (17.8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Как и прежде, требуется составить таблицу решения этой задачи с некоторым шагом  $h$ . Предположим, что числа  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  некоторым способом уже найдены. Покажем, как в этом случае найти  $y_4$ .

Составим следующую таблицу

| $x$   | $y$   | $\delta y$ | $y'$   | $\delta y'$   | $\delta^2 y'$   | $\delta^3 y'$   |
|-------|-------|------------|--------|---------------|-----------------|-----------------|
| $x_0$ | $y_0$ |            | $y'_0$ |               |                 |                 |
| $x_1$ | $y_1$ |            | $y'_1$ | $\delta y'_1$ |                 |                 |
| $x_2$ | $y_2$ |            | $y'_2$ | $\delta y'_2$ | $\delta^2 y'_2$ |                 |
| $x_3$ | $y_3$ |            | $y'_3$ | $\delta y'_3$ | $\delta^2 y'_3$ | $\delta^3 y'_3$ |

Здесь  $y'_i$  находятся по формуле  $y'_i = f(x_i, y_i)$  ( $i=0,1,2,3$ ), а все конечные разности вычисляются обычным способом.

Для заполнения следующей строки (будем называть её 4-й) вычислим сначала  $x_4$  по формуле  $x_4 = x_3 + h$ . Далее, имеем

$$\delta y_4 = y_4 - y_3 = \int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx.$$

Этот интеграл вычислим приближённо с помощью 1-й формулы Адамса. Получим

$$\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \delta y'_3 + \frac{5}{12} \delta^2 y'_3 + \frac{3}{8} \delta^3 y'_3 \right) \quad (17.32)$$

Найденное по этой формуле  $\delta y_4$  обозначим  $\delta y'_4$  и запишем в 4-ю строку в графу для  $\delta y$ . После этого полагаем

$$y_4 = y_3 + \delta y_4$$

и результат записываем в графу для  $y$ . Затем вычисляем величину  $y'_4 = f(x_4, y_4)$  и записываем результат в графу для  $y'$ . Наконец обычным способом находим  $\delta y'_4$ ,  $\delta^2 y'_4$ ,  $\delta^3 y'_4$ .

Теперь необходимо уточнить значение  $y_4$ . Для этого снова вычислим интеграл  $\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx$ , но уже не по 1-й, а по более предпочтительной 2-й формуле Адамса (ведь значение  $y'_4$ , хотя и предварительное, теперь



известно!). Итак, полагаем

$$\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx = h \left( y'_4 - \frac{1}{2} \delta y'_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y'_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y'_4 \right). \quad (17.33)$$

Найденное по этой формуле  $\delta y_4$  сравнивается с  $\bar{\delta} y_4$ . Возможны два случая.

1.  $\delta y_4 = \bar{\delta} y_4$  (в пределах данного числа удерживаемых десятичных знаков). Тогда выполнение шага можно считать законченным.

2.  $\delta y_4 \neq \bar{\delta} y_4$ . Тогда вся 4-я строка вычёркивается, и под ней вместо неё заполняется аналогичная строка, но уже не на основании  $\bar{\delta} y_4$ , а на основании  $\delta y_4$ . После этого снова осуществляется контроль с помощью формулы (17.33), в которой фигурируют теперь данные из новой строки, и т.д. Выполнение шага считается законченным лишь тогда, когда результаты вычислений по формулам (17.32) и (17.33) совпадают.

Слишком долгое несовпадение  $\delta y_4$  с  $\bar{\delta} y_4$  обычно свидетельствует о том, что шаг  $h$  взят недостаточно малым. В применяемых нами формулах Адамса используются разности до 3-го порядка включительно. Поэтому  $h$  должно быть взято с самого начала таким, чтобы отбрасываемая разность 4-го порядка оказалась пренебрежительно малой. При соблюдении этого условия контрольное равенство  $\delta y_4 = \bar{\delta} y_4$  будет выполняться, как правило, сразу же или при первом повторном сравнении.

После того, как окончательное заполнение 4-й строки закончено, точно также заполняется 5-я строка и т.д. При этом может оказаться, что на некотором шаге прежняя величина  $h$  делается уже недостаточно малой (т.е. отбрасываемые разности будут уже большими). В этом случае длину шага приходится уменьшать, хотя это и связано с перезаполнением нескольких предыдущих строк.

Можно показать, что при интегрировании уравнения описываемым методом погрешность, возникающая на каждом шаге, составляет  $O(h^4)$ .

Осталось выяснить, каким образом можно вычислить  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ , знание которых необходимо для начала использования метода Адамса-Штермера. Эти числа обычно находятся путём интегрирования исходного уравнения с помощью степенного ряда, поскольку этот ряд наиболее быстро сходится именно в точках, близких к  $x_0$ .

Возьмём теперь уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

с начальными условиями  $y|_{x=x_0} = y_0$ ,  $y'|_{x=x_0} = y'_0$ . Снова находим  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  с помощью степенного ряда. Путём дифференцирования этого ряда находим  $y'_1$ ,  $y'_2$  и  $y'_3$ . После этого составляем таблицу

| $x$   | $y$   | $\delta y$ | $y'$   | $\delta y'$   | $\delta^2 y'$   | $\delta^3 y'$   | $y''$   | $\delta y''$   | $\delta^2 y''$   | $\delta^3 y''$   |
|-------|-------|------------|--------|---------------|-----------------|-----------------|---------|----------------|------------------|------------------|
| $x_0$ | $y_0$ |            | $y'_0$ |               |                 |                 | $y''_0$ |                |                  |                  |
| $x_1$ | $y_1$ |            | $y'_1$ | $\delta y'_1$ |                 |                 | $y''_1$ | $\delta y''_1$ |                  |                  |
| $x_2$ | $y_2$ |            | $y'_2$ | $\delta y'_2$ | $\delta^2 y'_2$ |                 | $y''_2$ | $\delta y''_2$ | $\delta^2 y''_2$ |                  |
| $x_3$ | $y_3$ |            | $y'_3$ | $\delta y'_3$ | $\delta^2 y'_3$ | $\delta^3 y'_3$ | $y''_3$ | $\delta y''_3$ | $\delta^2 y''_3$ | $\delta^3 y''_3$ |

Здесь  $y''_i$  вычислены по формуле  $y''_i = f(x_i, y_i, y'_i)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

Для заполнения 4-й строки сначала находим  $\delta y'_4$  и вписываем в графу для  $\delta y'$ . Затем в графу для  $y'$  вписываем величину  $y'_4 = y'_3 + \delta y'_4$ . После этого обычным способом находим  $\delta^2 y'_4$  и  $\delta^3 y'_4$ .

Теперь в графу для  $\delta y$  вписываем  $\delta y_4$ , найденное по формуле

$$\delta y_4 = h \left( y'_4 - \frac{1}{2} \delta y'_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y'_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y'_4 \right).$$

Таким образом, величину  $\delta y_4$  мы находим не по 1-й, а сразу по 2-й формуле Адамса, так как значения  $y'_4$ ,  $\delta y'_4$ ,  $\delta^2 y'_4$  и  $\delta^3 y'_4$ , хотя и предварительные, уже известны.

Вычислив  $\delta y_4$ , находим  $y_4 = y_3 + \delta y_4$  и  $y''_4 = f(x_4, y_4, y'_4)$ ; результаты записываем в графы для  $y$  и  $y''$ . Затем заполняем графы для  $\delta y''$ ,  $\delta^2 y''$  и  $\delta^3 y''$ .

Теперь производим контроль при помощи формулы

$$\delta y_4 = h \left( y''_4 - \frac{1}{2} \delta y''_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y''_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y''_4 \right)$$

Если  $\delta y_4 = \bar{\delta y}_4$ , то переходим к заполнению следующей строки. В противном случае 4-я строка вычеркивается и заполняется заново на основании  $\delta y_4$  (а не  $\bar{\delta y}_4$ ) и т. д. Вплоть до совпадения  $\delta y_4$  с  $\bar{\delta y}_4$ . Последующие шаги производятся точно также.

Метод Адамса-Штёрмера совершенно аналогично применим и к уравнениям более высоких порядков.