Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Ленинградский институт авиационного приборостроения

В.А.Лексаченко, С.А.Попырко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ (СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ)

Учебное пособие

Ленинград
1986

УДК 62.505 621.391

Излагаются основные положения математической теории стохастических систем непрерывного и дискретного типов. Рассмотрение ведется на основе описания систем в пространстве состояний.

Пособие предназначено для студентов специальности "Радиотехника", подготовлено кафедрой прикладной математики и рекомендовано к изданию редакционно-издательским Советом Ленинградского института авиационного приборостроения.

Библиогр. - 6 назв.

Рецензенты: кафедра высшей математики Ленинградского электротехнического института им. В.И.Ульянова (Ленина); доктор технических наук профессор С.А.Попов

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств и условий работы различных систем, осуществляющих преобразование некоторой входной переменной $u(t)$ в выходную переменную $y(t)$ позволяет различать две основные ситуации.

В условиях первой из них состояние $x(t_1)$ системы в любой момент t_1, входное воздействие $u(\tau)$ на интервале $(t_1 < \tau \leq t)$ и характеристики системы могут быть заданы столь определенно, что это позволяет однозначно определить ее состояние $x(t)$ и выход $y(t)$ в любой последующий момент $t\,(t > t_1)$. Системы такого типа, точнее - рассматриваемые в таких условиях, называются детерминированными ("вполне определенными" [1]).

В другой ситуации описание указанных исходных данных возможно лишь с некоторой степенью неопределенности, так что состояние $x(t)$ и выход $y(t)$ системы в последующий момент t нельзя определить достоверно, а можно рассматривать лишь некоторые их вероятностные характеристики (распределения вероятностей, математические ожидания, дисперсии и т.п.); величины $x(t)$ и $y(t)$ являются случайными. Система, обладающая такими свойствами, и изучение которой возможно лишь в рамках и терминах соответствующих вероятностных характеристик, называется стохастической.

Такая ситуация определяется следующими возможными обстоятельствами:

- входное воздействие $u(t)$ является случайной функцией аргумента t;

- случайными являются характеристики самой системы (например, ее параметры - случайные величины);

- случайно начальное состояние системы.

Как видно, свойство стохастичности связано не только со свойствами собственно системы, но и с характеристиками ее возможных состояний и внешних воздействий.

В этих условиях задача анализа стохастической системы заключается в определении вероятностных характеристик переменных состояния $x(t)$ и выхода $y(t)$ по аналогичным характеристикам входа $u(t)$ самой системы и ее начального состояния $x(t_0)$

Как известно, наиболее полное описание перечисленных случайных величин дается соответствующими распределениями вероятностей. Однако нахождение этих распределений в общем случае, даже для линейных систем, оказывается довольно сложной задачей, в то время, как важные в прикладных задачах моментные характеристики (математическое ожидание, дисперсия, корреляционные моменты) могут быть определены более простыми средствами. Вместе с тем, в случаях, когда исходные распределения являются нормальными, переменные на выходе линейной системы также имеют нормальное распределение, полностью определяемое указанными моментными характеристиками.

Поэтому широкое применение находит рассмотрение стохастических систем в рамках так называемой корреляционной теории, ограничивающейся моментами первого и второго порядка. Именно такой подход составляет содержание настоящего пособия.

Из перечисленных обстоятельств, определяющих стохастичность рассматриваемых задач, основное внимание уделяется случайности входных воздействий $u(t)$ и, в меньшей степени, случайности возможных начальных состояний системы; при этом характеристики самой системы считаются вполне определенными и заданными.

В этих условиях определяются соотношения, связывающие моментные характеристики входа $u(t)$ и выхода $x(t)$ в общей нестационарной задаче. Самостоятельно рассматривается стационарная задача (с помощью Z - преобразования), а также частный случай, когда стационарно только случайное входное воздействие $u(t)$.

Приводятся примеры использования полученных формул.

Изложение основного материала проводится последовательно для дискретных и непрерывных систем. Этому предпосылается краткое описание методов представления векторных случайных функций, их основных математических моделей. Необходимые общие сведения приводятся в Приложении. В части математического описания рассматриваемых систем и определения их характеристик изложение следующего ниже материала в значительной степени опирается на учебное пособие [I] при ссылках на него в необходимых случаях указываются соответствующие номера страниц и формул.

В заключение приводится список литературы, которая может быть использована дополнительно при изучении материала.

I. ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

I.I. Уравнения дискретной стохастической системы

Будем исходить из уравнений дискретной системы, представляющих собой векторно-матричные разностные уравнения относительно переменных входа, состояния и выхода ([I] (I.26))

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\,\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\,\mathbf{u}(k), \end{aligned}\right\} \tag{I.I}$$

в которых

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_p \end{pmatrix} \tag{I.2}$$

- векторы (матрицы-столбцы) переменных входа, состояния и выхода соответственно: $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ - матрицы соответствующих размеров, при которых определены необходимые алгебраические операции (значения аргумента k отвечают рассматриваемым дискретным значениям переменной t, имеющей смысл времени).

В детерминированных задачах вход $\mathbf{u}(k)$ имеет, главным образом, смысл управляющего воздействия и считается неслучайной функцией своего аргумента. Рассмотрение входа $\mathbf{u}(k)$ как случайной функции и связанный с этим переход к стохастической схеме возникают, прежде всего, при необходимости учета различных возмущающих воздействий (помех), не поддающихся в реальных условиях детерминированному описанию. Учет таких воздействий соответствует введению в уравнения (I.I) некоторых дополнительных случайных функций. Вместе с тем, принцип суперпозиции, свойственный линейным системам, позволяет независимым образом рассматривать реакции системы (I.I) на отдельные составляющие входа – неслучайные и случайные. Относя рассмотрение первой из составляющих к решению соответствующей детерминированной задачи (см. [I]), будем рассматривать задачу определения только случайной составляющей. Этому отвечает использование тех же уравнений (I.I), но в условиях, когда функция $u(k)$ является случайной.

В стохастических задачах имеются основания различать случайные воздействия в уравнениях состояния (первое из уравнений (I.I)) и в уравнениях выхода (второе уравнение). При этом на первом этапе исследования второе из уравнений может рассматриваться независимо от первого, что позволяет на этом этапе считать $D(k)=0$

Уравнения (I.I) в одинаковой степени описывают стохастическую систему при любых свойствах случайной функции $u(k)$ Однако наиболее едиными и простыми необходимые расчетные формулы получаются при дополнительном условии, что $u(k)$ является случайной функцией типа дискретного белого шума (см.подразд. I.2). Основанием для принятия такого условия является возможность представления произвольной случайной функции $u(k)$ линейным преобразованием некоторой случайной функции $w(k)$, принадлежащей к указанному типу. Тогда, вводя это линейное представление $u(k)$ в уравнения (I.I), можно привести их к виду, для которого выполняются указанные условия относительно случайного воздействия (см.подразд. I.2). Дополнительными основаниями могут служить практические соображения о возможной независимости значений возмущения в различные моменты k_1 и k_2.

В результате в качестве исходных уравнений стохастической системы ниже рассматриваются уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k)+B(k)w(k), \\ y(k) &= C(k)x(k), \end{aligned}\right\} \qquad (I.3)$$

в которых $\mathcal{W}(k)$ является случайной функцией типа дискретного белого шума.

При этом матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ считаются неслучайными, а учет возможной случайности начального состояния системы сводится к рассмотрению начальных значений соответствующих переменных как величин случайных.

I.2. Математические модели случайных воздействий

При изучении стохастических систем существенную роль играет рациональное математическое описание рассматриваемых входных воздействий. В частности, приведение уравнений системы к стандартной форме (I.3) связано, как указывалось в предыдущем параграфе, с возможностью представления входа $\mathcal{U}(k)$ линейным преобразованием некоторого случайного процесса $\mathcal{W}(k)$ типа белого шума.

Векторный дискретный белый шум есть случайный процесс $\mathcal{W}(k)$, корреляционная функция $\mathbf{K}_{\mathcal{W}}(k_1, k_2)$ которого определяется выражением (см. п п. II, I2 Приложения)

$$\mathbf{K}_{\mathcal{W}}(k_1, k_2) = \mathbf{D}_{\mathcal{W}}(k_1)\delta_{k_1 k_2}, \tag{I.4}$$

где $\mathbf{D}_{\mathcal{W}}(k)$ - дисперсионная функция;

$\delta_{k_1 k_2}$ - скалярный множитель (символ Кронекера), определяемый равенством

$$\delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 1, & (k_1 = k_2), \\ 0, & (k_1 \neq k_2). \end{cases} \tag{I.5}$$

Из определения (I.4) следует, что каждая из скалярных составляющих $\mathcal{W}_i(k)$ вектора $\mathcal{W}(k)$ есть процесс с некоррелированными (при $k_1 \neq k_2$) значениями.

Стандартным белым шумом называется процесс $w_0(k)$ указанного типа при дополнительном условии, что его дисперсионная функция является единичной матрицей

$$D_w(k) = E. \tag{I.6}$$

Теорема I.I. Если $w(k)$ дискретный белый шум и $C(k)$ неслучайная матрица, то процесс $v(k)$, определяемый равенством

$$v(k) = C(k)\,w(k), \tag{I.7}$$

также является белым шумом.

Действительно, вычисляя корреляционную функцию линейного преобразования (I.7) с помощью формулы (П.20) Приложения и подставляя туда выражение (I.4), последовательно находим

$$\begin{aligned} K_v(k_1,k_2) &= C(k_1)\,K_w(k_1,k_2)\,C^T(k_2) = \\ &= C(k_1)\,D_w(k_1)\,\delta_{k_1k_2}\,C^T(k_2) = \\ &= C(k_1)\,D_w(k_1)\,C^T(k_1)\,\delta_{k_1k_2} = D_v(k_1)\,\delta_{k_1k_2}, \end{aligned} \tag{I.8}$$

что при сопоставлении с определением (I.4) доказывает необходимое.

Введение стандартного процесса (I.6) не ограничивает общности рассмотрения, ибо процесс, получаемый из него преобразованием

$$w(k) = C(k)\; w_0(k),$$

является также белым шумом (по Теореме I.I) и в соответствии с выражением (I.8) имеет дисперсионную функцию

$$D_w(k) = C(k)\,E\,C^T(k) = C(k)\,C^T(k). \tag{I.9}$$

Следовательно, выбирая матричный множитель $C(k)$ можно получать белый шум и с нестандартными характеристиками (I.6). Возможно и решение обратной задачи - определения $C(k)$ по заданной дисперсионной функции $D_w(k)$ (см., например, [3], с.103, 307-309).

Приведение уравнений стохастической системы к стандартной форме (I.3) возможно, если для случайного воздействия $u(k)$ существует представление аналогичной формы через процесс $w(k)$ в качестве входного воздействия.

Пусть случайный процесс $u(k)$ представлен уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} x_2(k+1) &= A_2(k)x_2(k)+B_2(k)w(k), \\ u(k) &= C_2(k)x_2(k), \end{aligned}\right\} \qquad (I.10)$$

в которых $x_2(k)$-новая, промежуточная переменная; $w(k)$ - дискретный белый шум; $A_2(k)$, $B_2(k)$, $C_2(k)$-неслучайные матрицы.

Систему, описываемую уравнениями (I.10), называют формирующей процесс $u(k)$ из белого шума $w(k)$.

Пусть в свою очередь исходная система, на вход которой поступает воздействие $u(k)$, описывается уравнениями вида (I.3)

$$\left.\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_1(k)\,x_1(k)+B_1(k)\,u(k), \\ y_1(k) &= C_1(k)\,x_1(k). \end{aligned}\right\} \qquad (I.11)$$

Рассмотрим теперь уравнения (I.10) совместно с исходными уравнениями (I.I), вводя новые векторные переменные

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ --- \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ --- \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Объединенная система указанных уравнений для этих переменных теперь представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\,\boldsymbol{w}(k),\\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}(k)\,\boldsymbol{x}(k), \end{aligned}\right\} \tag{I.12}$$

совпадающем со стандартной формой (I.3). Матрицы этой системы представляются блочным образом через матрицы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1$ исходной системы (I.II) и матрицы $\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \boldsymbol{C}_2$ формирующей системы (I.I0) следующими выражениями:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B} \end{array}\right), \quad \mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array}\right). \tag{I.13}$$

Описание (I.12) соответствует представлению этой системы как последовательного соединения систем (I.I0) и (I.II).

Во многих случаях представление воздействия $\boldsymbol{u}(k)$ в виде (I.I0) может быть упрощено путем сохранения только первого из уравнений. В этом случае

$$\boldsymbol{x}_2(k) = \boldsymbol{u}(k), \qquad \boldsymbol{C}_2(k) = \mathbf{E}$$

и указанное уравнение принимает вид

$$\boldsymbol{u}(k+1) = \mathbf{A}_2(k)\,\boldsymbol{u}(k) + \mathbf{B}_2(k)\,\boldsymbol{w}(k). \tag{I.14}$$

При этом

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{C}_1 \,\middle|\, \mathbf{0}\right),$$

и второе из уравнений (I.12) совпадает с соответствующим из уравнений (I.I).

Требование представления случайной функции $\mathbf{u}(k)$ в виде (I.I0), естественно, ограничивает класс рассматриваемых таким образом воздействий. Вместе с тем, этот класс линейных представлений достаточно широк с точки зрения получения $\mathbf{u}(k)$ с разнообразными корреляционными характеристиками, соответствующими прикладным задачам. Кроме того, он охватывает и ряд общеупотребительных математических моделей случайных процессов, рассматриваемых ниже. Отмеченное ограничение относится к случаям, когда в представлении (I.I0) вектор $\mathbf{x}_2(k)$ рассматривается конечномерным. Переход к бесконечномерному вектору $\mathbf{x}_2(k)$ позволяет представить таким образом любой случайный процесс (см., например, [4]).

Равенство (I.I4) является рекуррентным соотношением, представляющим значение процесса $\mathbf{u}(k+1)$ через его предыдущие значения $\mathbf{u}(k)$ и значения некоррелированных случайных величин $\mathbf{w}(k)$. В соответствии с этим оно охватывает ряд характерных моделей формирования случайных процессов, называемых рекуррентными моделями.

Векторным процессом скользящего среднего называется случайный процесс $\mathbf{u}(k)$, определяемый соотношением вида

$$\mathbf{u}(k+1)=\sum_{j=0}^{r-1}\mathbf{B}_{2j}(k)\,\mathbf{w}(k-j), \qquad (I.I5)$$

в котором $\mathbf{u}(k)=(u_1(k),\dots,u_m(k))^T$, $\mathbf{w}(k)=(w_1(k),\dots,w_\ell(k))^T$ – векторный дискретный белый шум, определяемый выражением (I.4), $\mathbf{B}_{2j}(k)$ – матрица размера $(m\times\ell)$.

Как видно, скользящее среднее рекуррентным образом представляет значение $\mathbf{u}(k+1)$ через предшествующие значения последовательности $\mathbf{w}(k-j)\,(j=0,1,2,\dots,r-1)$ взаимно некоррелированных случайных величин, характеристики которых принимаются одинаковыми

$$M[\mathbf{w}(k)]=0, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{w}}(k)=\mathbf{D}_{\mathbf{w}}=\mathrm{const}. \qquad (I.I6)$$

Получение же необходимых свойств процесса $u(k)$ достигается надлежащим выбором матриц $B_{2j}(k)$.

Для того, чтобы показать что представление (I.I5) охватывается общим уравнением (I.I4) достаточно ввести в рассмотрение вектор (блочную матрицу-столбец)

$$w_r(k) = \begin{pmatrix} w(k) \\ w(k-1) \\ \cdots \\ \cdots \\ w(k-r+1) \end{pmatrix}$$

и блочную матрицу

$$B_2(k) = \left(B_{21}(k) \,\vdots\, B_{22}(k) \,\vdots\, B_{2,r-1}(k) \right).$$

После этого уравнение (I.I5) представляется в виде

$$u(k+1) = B_2(k)\, w_r(k),$$

совпадающем с выражением (I.I4) при $A_2 = 0$.

Частным случаем предыдущего является <u>скалярный процесс скользящего среднего</u>, для которого $u(k)$, $w(k)$ и $B_{2j}(k)$ являются скалярными величинами так, что

$$u(k+1) = \sum_{j=0}^{r-1} b_j(k)\, w(k-j), \tag{I.I7}$$

$$b_j = \left\{ B_{2j} \right\}_{1j}.$$

<u>Замечание I.</u> Первое из условий (I.I6) не является ограничением, так как отличное от нуля математическое ожидание функции $w(k)$ может быть учтено добавлением в правую часть выражения (I.I5) соответствующего детерминированного слагаемого.

Замечание 2. Без нарушения общности представления (I.15) может использоваться белый шум $w_0(k)$ стандартного типа с дисперсионной функцией вида (I.6).

Векторным процессом авторегрессии называется случайный процесс $u(k)$, определяемый соотношением вида

$$u(k+1)=\sum_{i=0}^{q-1} A_{2i}(k)\,u(k-i)+B_{20}(k)\,w(k), \qquad \text{(I.18)}$$

в котором $A_{2i}(k)$ - квадратные матрицы размера $(m\times m)$; B_{20} - матрица размера $(m\times \ell)$; $w(k)$ - векторный дискретный белый шум.

Как видно, процесс авторегрессии рекуррентным образом представляет значение $u(k+1)$ процесса через его же предшествующие значения $u(k-i)$ и значение $w(k)$ процесса с некоррелированными значениями; характеристики последнего определяются теми же выражениями (I.16).

Представление (I.18) процесса авторегрессии может быть сведено к общей форме (I.14), для чего достаточно ввести в рассмотрение векторы (блочные матрицы-столбцы)

$$u_q(k)=\begin{pmatrix} u(k-q+1)\\ \hdashline u(k-q+2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline u(k-1)\\ \hdashline u(k)\end{pmatrix}, \quad w_e(k)=\begin{pmatrix} w\\ \hdashline 0\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline 0\end{pmatrix}$$

размерностей mq и ℓq соответственно.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ A_{20} & A_{21} & \dots & A_{2,q-2} & A_{2,q-1} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{20} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (I.18) представляется в общем виде (I.14)

$$u_q(k+1) = A_2(k)\, u_q(k) + B_2(k)\, w_r(k).$$

Частным случаем предыдущего является скалярный процесс авторегрессии, для которого $u(k), w(k), A_2(k), B(k)$ являются скалярными величинами, так что

$$u(k+1) = \sum_{i=0}^{q-1} a_i\, u(k-i) + b_1(k)\, w(k). \qquad \text{(I.19)}$$

В этом случае для общего векторного представления вида (I.14) имеем

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_{q-1} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Векторный смешанный процесс авторегрессии и скользящего среднего представляет собой объединение двух предыдущих рекуррентных моделей (I.15) и (I.18) и описывается соотношением

$$\mathcal{U}(k+1)=\sum_{i=0}^{q-1} A_{2i}(k)\,\mathcal{U}(k-i)+\sum_{j=0}^{r-1} B_{2j}(k)\,\mathcal{W}(k-j). \qquad (I.20)$$

Выражения для "расширенных" векторов $\mathcal{U}_q(k), \mathcal{W}_\ell(k)$ и соответствующих матриц $A_2(k),\ B_2(k)$ в общем представлении (I.14) такого процесса очевидным образом усматриваются из предыдущих выкладок.

Для скалярного процесса $u(k)$ этого типа имеем

$$u(k+1)=\sum_{i=0}^{q-1} a_i(k)\,u(k-i)+\sum_{j=0}^{r-1} b_j(k)\,w(k-j) \qquad (I.21)$$

с соответствующим упрощением векторов $\mathcal{U}_q(k), \mathcal{W}_\ell(\cdot)$ и матриц $A_2(k),\ B_2(k)$.

Выбор подходящей математической модели случайного воздействия $\mathcal{U}(k)$ представляет собой самостоятельную сложную задачу, связанную с некоторыми теоретическими построениями либо (в большинстве случаев) со статистической обработкой опытных данных [4]. В данном пособии эти вопросы не затрагиваются и соответствующая модель считается заданной. В связи с тем, что для перечисленных моделей возможно единое математическое описание процесса $\mathcal{U}(k)$ вида (I.14), совпадающего с видом уравнений (I.12) системы в целом, для определения характеристик этого процесса ниже используются те же общие методы, что и для определения соответствующих характеристик переменных состояния и выхода системы.

I.3. Преобразования уравнений системы

При изучении стохастических систем, так же как и в детерминированном случае, возможно преобразование исходных уравнений системы к виду, допускающему более наглядную интерпретацию результатов и облегчающему само решение задачи (см.[I] подразд. 2.3).

Будем исходить из общих уравнений (I.3) системы и уравнений (I.14) формирования воздействия $u(k)$ ограничиваясь первыми - конечно-разностными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_1 x_1(k) + B_1 u(k), \\ u(k+1) &= A_2 u(k) + B_2 w(k), \end{aligned}\right\} \tag{I.22}$$

которые могут быть представлены одним уравнением

$$x(k+1) = A x(k) + B w(k) \tag{I.23}$$

при

$$x = \begin{pmatrix} x \\ --- \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ --- \\ B \end{pmatrix}. \tag{I.24}$$

Содержание рассматриваемого преобразования расширенной системы (I.23) сводится к нахождению такого линейного преобразования переменных

$$x = T v, \tag{I.25}$$

при котором матрица преобразования системы оказывается диагональной (при некоторых дополнительных условиях). В такой постановке задача рассмотрена в работе [I] применительно к первому из уравнений (I.22). Как известно, матрица T преобразующая матрицу A к диагональному виду, имеет своими столбцами собственные векторы S_i матрицы A, определяемые как решения уравнений

$$(A-\lambda_i E)\, s_i = 0 \qquad (i = \overline{1, n+m}), \qquad (I.26)$$

в которых λ_i - собственные значения матрицы;
S_i - собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям;
n и m - размерности векторов x и u соответственно;
$(n \times m)$ - размер квадратной матрицы A.

Расширенная система (I.23) более сложна, чем исходная, определяемая только первым из уравнений (I.22), и ее преобразование является более сложной задачей. Заметим, что рассматриваемые преобразования сводятся к случаю, когда матрицы A_1, A_2, B_1, B_2 постоянны, что и отмечено в записи (I.22) и (I.23).

Вместе с тем, в силу независимости второго из уравнений (I.22) от первого задача построения преобразующей матрицы T обладает особенностями, облегчающими ее решение. Применительно к частному случаю, когда A является матрицей простой структуры эти особенности определяются следующей теоремой.

Теорема I.2. Пусть в уравнении (I.23) все собственные значения λ_i матрицы A различны (A - матрица простой структуры).

Тогда

а) множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots \lambda_{n+m}$ матрицы A совпадает с множеством собственных значений матриц A_1 и A_2 т.е. эти собственные значения являются корнями уравнений

$$|A-\lambda_i E| = 0 \qquad (i = \overline{1, n}), \qquad (I.27)$$

$$|A-\lambda_i E| = 0 \qquad (i = \overline{n+1, n+m}); \qquad (I.28)$$

б) матрица T может быть представлена в виде

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} S_1' & S_2' & \ldots & S_n' & S'_{n+1} & \ldots & S'_{n+m} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & S''_{n+1} & \ldots & S''_{n+m} \end{array}\right); \quad (I.29)$$

при этом, для $i = \overline{1, n}$ составляющие S'_i являются собственными векторами матрицы A_1 и определяются уравнениями

$$(A_1 - \lambda_i E) S'_i = 0; \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (I.30)$$

для $i = \overline{n+1, n+m}$ составляющие S''_i являются собственными векторами матрицы A_2 и определяются уравнениями

$$(A_2 - \lambda_i E) S''_i = 0; \quad (i = \overline{n+1, n+m}), \qquad (I.31)$$

после чего составляющие S'_i находятся по соотношениям

$$S'_i = (A - \lambda_i E)^{-1} B_1 S''_i \quad (i = \overline{n+1, n+m}). \qquad (I.32)$$

<u>Доказательство.</u> Матрица $A - \lambda E$ в соответствии с выражением (I.24) является блочной верхней треугольной матрицей

$$A - \lambda E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda E & B_1 \\ \hline 0 & A_2 - \lambda E \end{array}\right),$$

для которой определитель равен произведению определителей диагональных блоков. Отсюда следует равносильность уравнения

$$|A - \lambda E| = 0,$$

определяющего собственные значения матрицы A уравнением (I.27), (I.28).

Теперь представим собственные векторы S_i матрицы A в виде

$$S_i = \begin{pmatrix} S_i' \\ \hline S_i'' \end{pmatrix} \qquad (i = \overline{1, n+m}),$$

где S_i' и S_i'' векторы (блочные составляющие вектора S_i) размеров n и m соответственно. Тогда уравнения (I.26) принимают вид

$$(A - \lambda_i E) S_i = \left(\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda_i E & B \\ \hline 0 & A_2 - \lambda_i E \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} S_i' \\ \hline S_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1 - \lambda_i E) S_i' + B S_i'' \\ \hline (A_2 - \lambda_i E) S_i'' \end{pmatrix} = 0,$$

что равносильно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &(A_1 - \lambda E) S_i' + B_1 S_i'' = 0, \\ &(A_2 - \lambda_i E) S_i'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.33)}$$

Так как различны все собственные значения матрицы A, то нет совпадающих и среди корней уравнений (I.27) и (I.28). Поэтому для λ_i, являющихся корнями (I.27) и отвечающих $i = \overline{1, n}$, имеет место $|A_2 - \lambda_i E| \neq 0$ и, следовательно, для уравнений (I.33) существуют только тривиальные решения $S_i'' = 0$. Тогда из первого из этих уравнений следует (I.30).

Далее для λ_i, являющихся корнями (I.28) и отвечающих $i = \overline{n+1, n+m}$, существуют нетривиальные решения $S_i'' \neq 0$

уравнений (I.31), подставляя которые в первое из уравнений (I.33), находим выражения (I.32) для составляющих S_i' (при этом обратная матрица $(A-\lambda_i E)^{-1}$ существует, так как для рассматриваемых λ_i $(i=\overline{n+1,n+m})$ $|A-\lambda_i E|\neq 0)$.

Как следует из Теоремы I.2 , процесс определения преобразующей матрицы T сводится к последовательному решению двух задач - преобразованию второго из уравнений (I.22) и использованию выражений (I.32).

После того, как преобразующая матрица T определена (в виде (I.29)), подстановка v из выражения (I.25) в уравнение (I.23) дает

$$v(k+1)=\Lambda v(k)+T^{-1}B_1 w(k), \qquad (I.34)$$

где

$$\Lambda = T^{-1}AT \qquad (I.35)$$

матрица, подобная матрице A простой структуры и являющаяся диагональной

$$\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}\}.$$

Ей соответствует каноническая форма уравнений системы, при которой каждое из скалярных уравнений, соответствующих формуле (I.34) содержит только одну из переменных v_i $(i=\overline{1,n+m})$.

2. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.I. Общие сведения

Как уже упоминалось, изучение стохастической системы в рамках корреляционной теории сводится к определению основных моментных характеристик переменных состояния и выхода по аналогичным характеристикам входных случайных воздействий.

Будем исходить из уравнений системы общего вида (1.3)

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ y(k) &= C(k)x(k), \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

в соответствии с которыми поставленная задача может решаться в два этапа – определение характеристик переменной состояния x и последующее определение аналогичных характеристик выходной переменной y. Основными характеристиками, представляющими практический интерес и определяемыми в рамках корреляционной теории, являются математические ожидания, дисперсии и различные корреляционные функции составляющих соответствующих векторных переменных $x(k)$ и $y(k)$.

Поэтому задача анализа стохастической системы сводится к нахождению математических ожиданий $m_x = M[x(k)]$, $m_y = M[y(k)]$, корреляционных функций $K_x(k_1,k_2)$, $K_y(k_1,k_2)$ и дисперсионных функций $D_x(k)$, $D_y(k)$ (см. п.п. (П.15)-(П.18) Приложения); в ряде задач представляют интерес и различные взаимные корреляционные функции. При этом исходными являются аналогичные характеристики случайного воздействия $w(k)$ и другие вероятностные данные задачи.

Этап определения характеристик вектора $x(k)$ связан с решением конечно-разностного уравнения и представляется более сложным, чем второй этап определения характеристик $y(k)$, выражаемого через $x(k)$ конечным матричным соотношением.

Для решения указанной задачи используются два основных подхода:

- определение явных выражений для искомых характеристик с использованием общего решения системы (2.1);

- построение рекуррентных соотношений (разностных уравнений), которым удовлетворяют искомые характеристики.

Первый из подходов дает интересующие результаты в окончательном виде, но в практически содержательных задачах приводит к очень громоздким выкладкам. Второй, требуя также решения некоторых разностных уравнений, вместе с тем дает основу для использования методов математического моделирования, находящих все более широкое применение. Следует подчеркнуть, что описываемые методы в полной мере (с точностью до обозначений) могут быть использованы и для исследования исходной системы (I.3) и системы (I.10) формирования случайного воздействия $u(k)$ и для расширенной системы (I.12).

При использовании любого из указанных подходов фигурируют начальные значения $x(0)$ переменных состояния и $w(k)$ случайного воздействия. Развиваемый далее математический аппарат в принципе позволяет учитывать возможную связь между этими случайными величинами, однако они предполагаются некоррелированными, т.е. считается, что

$$K_{xw}(a,k) = K_{wx}(k,a) = 0. \qquad (2.2)$$

В прикладных задачах начальное состояние системы, как правило, независимо от внешнего воздействия или же не имеется достаточных оснований для принятия определенных характеристик этой связи. Вместе с тем, условие (2.2) существенно упрощает основные соотношения.

2.2. Определение характеристик состояния и выхода с использованием общего решения уравнений системы

<u>Общее решение</u> первого из уравнений системы (2.1)(уравнения состояния)

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k) \qquad (2.3)$$

определим, используя его как рекуррентное соотношение для последовательного вычисления значений $x(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. В результате имеем

$$x(k) = \Phi(k,0)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k,i+1)B(i)w(i), \qquad (2.4)$$

где

$$\Phi(k,i)=\begin{cases}\prod\limits_{j=i}^{k-1} A(j), & (k>i),\\ E, & (k=i),\\ \prod\limits_{j=k-1}^{i} A^{-1}(j), & (k<i),\end{cases} \tag{2.5}$$

называемая переходной функцией состояния (см. [I] подразд.3.5). Она определяет значения $x(k)$ через значения $x(i)$ для однородного уравнения, соответствующего выражению (2.3).

При этом, как следует из выражения (2.5),

$$\Phi(k+1,k)=A(k)$$

и матрица $A(k)$ является функцией перехода из предыдущего состояния x в последующее $x(k+1)$. Как видно из общего решения (2.4), случайность функции $x(k)$ определяется случайностью воздействия $w(k)$ и начального значения $x(0)$.

Математическое ожидание $m_x(k)=M[x(k)]$ случайной функции $x(k)$ находим с помощью выражения (2.4), принимая во внимание свойства математического ожидания и неслучайность матриц $\Phi(k,i)$ и $B(k)$ в следующем виде:

$$m_x(k)=\Phi(k,0)m_x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)B(i)m_w(i). \tag{2.6}$$

В силу линейности преобразования (2.4) выражение (2.6) получается применением того же преобразования к математическому ожиданию $m_w(k)$ внешнего воздействия $w(k)$.

Для нахождения взаимной корреляционной функции $K_{xw}(k_1,k_2)$ случайных функций $x(k)$ и $w(k)$ будем исходить из ее определения (см.П.16 Приложения) и того же общего решения (2.4), принимая во внимание, что последнему удовлетворяют и соответствующие центрированные функции $\mathring{x}(k)$, $\mathring{w}(k)$.

В результате будем иметь

$$K_{xw}(k_1,k_2) = M[\Phi(k_1,0)\overset{\circ}{x}(0)+\sum_{i=1}^{k_1-1}\Phi(k_1,i+1)B(i)\overset{\circ}{w}(i)\overset{\circ}{w}^T(k_2) =$$

$$= \Phi(k_1,0)K_{xw}(0,k_2) \cdot \sum_{i=0}^{k_1-1}\Phi(k_1,i+1)B(i)K_w(i,k_2).$$

Примем теперь во внимание, что $w(k)$ - процесс типа белый шум (процесс с некоррелированными значениями) и в соответствии с выражением (I.4)

$$K_w(i,k_2) = D_w(i)\,\delta_{i,k_2} ,$$

Также выполняются условия (2.2) некоррелированности $x(0)$ с $w(k)$. С учетом всего этого находим

$$K_{xw}(k_1,k_2) = \begin{cases} 0, & (k_2 > k_1-1), \\ \Phi(k_1,k_2+1)B(k_2)D_w(k_2), & (k_2 < k_1-1). \end{cases} \tag{2.7}$$

Рассуждая аналогичным образом, получим выражение для другой взаимной корреляционной функции

$$K_{wx}(k_1,k_2) = \begin{cases} D_w(k_1)B^T(k_1)\Phi^T(k_2,k_1+1), & k_2 > k_1+1, \\ 0, & k_2 < k_1+1. \end{cases} \tag{2.8}$$

В частности, для взаимной дисперсионной функции имеем

$$D_{xw}(k) = D_{wx}(k) = 0 . \tag{2.9}$$

<u>Корреляционную функцию</u> случайной функции $x(k)$ - вычисляем

исходя из ее определения (П.17 Приложения) и проводя выкладки, аналогичные предыдущим. Учитывая те же свойства воздействия $w(k)$ в окончательном виде находим

$$K_x(k_1,k_2) = M[\mathring{x}(k_1)\,\mathring{x}(k_2)] =$$

$$= \Phi(k_1,0)D_x(0)\Phi^T(k_2,0) + \sum^{\min(k_1-1,\,k_2-1)} \Phi(k_1,i+1)B(i)D_w(i)B^T(i)\Phi^T(k_2,i+1). \tag{2.10}$$

(верхний предел суммирования определяется наименьшим из значений k_1-1 или k_2-1 в соответствии со свойством (I.5) символа Кронекера).

Отсюда для дисперсионной функции $D_x(k)$ получаем

$$D_x(k) = K_x(k,k) =$$

$$= \Phi(k,0)D_x(0)\Phi^T(k,0) + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)B(i)D_w(i)B^T(i)\Phi^T(k,i+1). \tag{2.11}$$

Представляется удобной возможность выражения корреляционной функции (2.10) через соответствующую дисперсионную функцию (2.11) в том рассматриваемом случае, когда $w(k)$ является белым шумом. Для вывода необходимого соотношения рассмотрим сначала случай $k_2 > k_1$ и представим $x(k_2)$ тем же общим решением (2.4), принимая в качестве начального значение $x(k_1)$. Тогда имеем

$$K_x(k_1,k_2) = M[\mathring{x}(k_1)(\Phi(k_2,k_1)\mathring{x}(k_1) + \sum_{i=0}^{k_2-1}\Phi(k_2,i+1)B(i)w(i))^T] =$$

$$= D_x(k_1)\Phi^T(k_2,k_1) + \sum_{i=0}^{k_2-1} K_{xw}(k_1,i)B^T(i)\Phi^T(k_2,i).$$

При принятом условии $k_2 > k_1$ в силу первого из равенств (2.7) слагаемое, содержащее сумму, обращается в нуль, и искомая корреляционная функция определяется первым слагаемым. Аналогичным образом получается решение и для $k_2 \leq k_1$, что позволяет объединить оба результата в следующем виде:

$$K_x(k_1,k_2)=\begin{cases} D_x(k_1)\Phi^T(k_1,k_2), & (k_2>k_1),\\ \Phi(k_1,k_2)D_x(k_2), & (k_2\leq k_1). \end{cases} \tag{2.12}$$

Удобство использования полученных формул (2.12) заключается в возможности вычисления корреляционной функции $K_x(k_1,k_2)$ случайной функции $x(k)$ по ее дисперсионной функции, получаемой различными и более простыми средствами.

Вторым этапом анализа является <u>определение характеристик выходной переменной</u> $y(k)$, определяемой вторым из уравнений (2.1) (уравнением выхода)

$$y(k) = C(k)\,x(k) \tag{2.13}$$

Отсюда домножением на матрицу $C(k)$ выражения (2.4) для $x(k)$ находим

$$y(k)=C(k)\Phi(k,0)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}C(k)\Phi(k,i+1)B(i)w(i). \tag{2.14}$$

Связанная с этим решением функция

$$h_y(k,i)=\begin{cases} C(k)\,\Phi(k,i+1)\,B(i), & (k>i)\\ 0, & (k\leq i). \end{cases} \tag{2.15}$$

является импульсной характеристикой системы (см. [1] подразд. 4.3).

Из соотношения (2.13) следует выражение для математического ожидания

$$m_y(k) = C(k)\, m_x(k) \tag{2.16}$$

Для корреляционной и дисперсионной функций последовательно находим

$$K_y(k_1, k_2) = C(k_1) K_x(k_1, k_2)\, C^T(k_2), \tag{2.17}$$

$$D_y(k) = C(k)\, D_x(k)\, C^T(k). \tag{2.18}$$

Использование выражений (2.6), (2.10)-(2.12) для соответствующих характеристик $x(k)$ решает поставленную задачу.

Понятие импульсной характеристики $h(k,i)$ может быть использовано для представления не только выходной переменной $y(k)$ (выражения (2.14), (2.15)), но и переменной состояния $x(k)$ а также - воздействия $u(k)$

В первом случае импульсная характеристика $h_x(k,i)$ определяется в соответствии с (2 13) формулой

$$h_x(k,i) = \begin{cases} \Phi(k, i+1)\, B(i), & (k>i), \\ 0, & (k< i). \end{cases} \tag{2.19}$$

Во втором случае, учитывая уравнения (1.14) формирующей системы, находим импульсную характеристику $h_u(k, i)$ для воздействия

$$h_u(k,i) = \begin{cases} \Phi_u(k, i+1)\, B_2(i), & (k>i), \\ 0, & (k< i), \end{cases} \tag{2.20}$$

где
$$\Phi_u(k,i)=\prod_{j=1}^{k-1} A_2(j) .$$

Определенные таким образом вероятностные характеристики векторных переменных $x(k)$ и $y(k)$ позволяют найти аналогичные характеристики их соответствующих скалярных составляющих.

2.3. Рекуррентные соотношения для характеристик состояния

Второй из упоминавшихся ранее в подразд. 2.I подходов к определению вероятностных характеристик переменных $x(k)$ и $y(k)$ связан с построением и использованием рекуррентных соотношений (разностных уравнений), которым эти характеристики удовлетворяют. В основе такого подхода лежит не общее решение (2.4), а исходное уравнение системы (2.3).

Рекуррентное соотношение для математического ожидания найдем, вычисляя математические ожидания от обеих частей равенства (2.3) в следующем виде:

$$m_x(k+1)=A(k)m_x(k)+B(k)m_w(k). \tag{2.21}$$

Начальным условием, необходимым для проведения последовательных вычислений $m_x(i)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ является $m_x(0)$, фигурирующее и в прежнем решении (2.6). Как видно, $m_x(k)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и сама случайная функция $x(k)$, а общий вид решения, естественно, совпадает с формулой (2.6).

В частности, когда

$$m_w=0 ,$$

математическое ожидание $m_x(k)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$m_x(k+1)=A(k)m(k) .$$

Для взаимной корреляционной функции $K_{xw}(k_1,k_2)$ имеем

$$K_{xw}(k_1+1,k_2)=M[A(k_1)\mathring{x}(k_1)+B(k_1)\mathring{w}(k_1)\mathring{w}^T(k_2)]=$$

$$=A(k_1)K_{xw}(k_1,k_2)+B(k_1)K_{w}(k_1,k_2)]$$

или, принимая во внимание выражения (2.7),

$$K_{xw}(k_1+1,k_2)=\begin{cases}A(k_1)K_{xw}(k_1,k_2), & (k_2\leq k_1-1),\\ 0, & (k_2>k_1-1).\end{cases}$$

Аналогичным образом для K_{wx} находим

$$K_{wx}(k_1+1,k_2)=\begin{cases}0, & (k_2<k_1+1),\\ A(k_1)K_{wx}(k_1,k_2), & (k_2\geqslant k_1+1).\end{cases}$$

Определяя уравнение для <u>дисперсионной функции</u> $D_x(k)$ последовательно находим

$$D_x(k+1)=M[(A(k)\mathring{x}(k)+B(k)w(k))(A(k)x(k)+B(k)\mathring{w}(k))^T]=$$
$$=A(k)D_x(k)A^T(k)+B(k)D_{wx}(k)A^T(k)+A(k)D_{wx}(k)B^T(k)+B(k)D_w(k)B^T(k)$$

Теперь, учитывая выражения (2.20),(2.21), окончательно получим

$$D_x(k+1)=A(k)D_x(k)A^T(k)+B(k)D_w(k)B^T(k). \quad (2.22)$$

Начальным условием для решения этого уравнения является значение $D_x(0)$

Соотношения такого типа могут быть совершенно аналогичным путем построены и для корреляционной функции $K_x(k_1,k_2)$. Однако более удобным представляется ее вычисление по уже найденной дисперсионной функции $D_x(k)$ посредством соотношений (2.12), в которых переходная функция $\varphi(k_2,k_1)$ формулой (2.5) выражается через матрицы $A(k)$ исходного уравнения (2.3).

Естественно, решения уравнений (2.21),(2.22) имеют форму, полученную в подразд. 2.2. Однако рекуррентная форма этих уравнений делает их более пригодными для посроения алгоритмов вычислений и иных методов моделирования.

Переход от найденных характеристик переменной состояния $x(k)$ к характеристикам выходной переменной $y(k)$ осуществляется с помощью соотношений (2.16) - (2.18) предыдущего параграфа.

2.4. Анализ стохастической системы в стационарном случае

При изучении стохастических систем под стационарной понимается задача, в которой вход и выход системы являются стационарными случайными функциями. При таком понимании стационарность задачи определяется не только стационарностью самой системы, но и свойствами воздействия $w(k)$. Как известно, случайная функция $w(k)$ называется стационарной (в широком смысле), если выполняются условия

$$m_w = \text{const}, \quad K_w(k_1,k_2) = R_w(n), \quad (n = k_2 - k_1), \tag{2.23}$$

следствием чего является

$$D_w = \text{const}.$$

В свою очередь, стационарной является система, импульсная характеристика которой удовлетворяет условию

$$h(k,i) = h(k-i) = h(n), \qquad (n = k-i) ; \tag{2.24}$$

в уравнениях (2.1) для стационарной системы матрицы A, B и C постоянны так, что эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Импульсную характеристику (2.15) такой системы, учитывая выражение (2.5) для переходной функции состояния $\Phi(k,i)$ и условия физической осуществимости, можно записать в виде

$$h_y(k-i) = \begin{cases} CA^{k-i-1}B, & (k>i), \\ 0, & (k \leq i). \end{cases} \qquad (2.26)$$

При этих условиях общее решение (2.14) для стационарной системы может быть предоставлено в следующей форме:

$$y(k) = h_y(k-k_0)B^{-1}x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} h_y(k-i)w(i).$$

<u>Условия стационарности задачи</u> устанавливаются следующей теоремой.

<u>Теорема 2.1.</u> Пусть для рассматриваемой системы выполняются условия:

а) условие стационарности системы (2.24);

б) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |h_y(j)| < \infty$

и для случайной функции $w(k)$ выполняются условия (2.23) стационарности при

в) $D_w \leq D_0 < \infty$.

Тогда частное решение

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_y(k-i)w(i) \qquad (2.27)$$

является стационарной случайной функцией (в смысле условий (2.23)).

Доказательство. Для математического ожидания $m_y(k)$ функции (2.27), вводя переменную суммирования $j = k - i$ и учитывая условие а), имеем

$$m_y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_y(j) m_w(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_y(j)\, m_w.$$

В силу условия в) существует матрица $h_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)$, следовательно,

$$m_y = h_0 m_w = const.$$

Вычисляя корреляционную функцию $K_y(k_1, k_2)$ выходной переменной, определяемой (2.27)

$$K_y(k_1,k_2) = M[\dot{y}(k_1)\dot{y}^T(k_2)] = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} h_y(k_1-i_1) \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} R_w(i_2-i_1) h_y^T(k_2-i_2),$$

введем переменные $j_1 = k_1 - i_1,\ j_2 = k_2 - i_2,\ n = i_2 - i_1$, после чего получим

$$K_y(k_1,k_2) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} h_y(j_1) \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} R_w(n - j_2 + j_1)\, h_y^T(j_2).$$

Отсюда видно, что после суммирования по индексам j_1 и j_2 результат оказывается зависящим только от $n = k_2 - k_1$, т.е.

$$K_y(k_1, k_2) = R_y(n), \qquad (n = k_2 - k_1).$$

Следовательно, случайная функция (2.27) удовлетворяет требованиям стационарности (2.23).

Рассматриваемое решение (2.27) является предельным при удалении точек k от начальной k_0 (изменение верхнего индекса суммирования на ∞ несущественно в силу условия (2.26) физической осуществимости).

Из доказательства следуют формулы для математического ожидания выходной переменной

$$m_y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_y(j)\, m_w \quad , \tag{2.28}$$

ее корреляционной функции

$$R_y(n)=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty} h_y(j_1)\sum_{j_2=-\infty}^{\infty} R_w(n-j_2+j_1)\,h_y^T(j_2) \qquad (2.29)$$

и дисперсионной матрицы

$$D_y=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty} h_y(j_1)\sum_{j_2=-\infty}^{\infty} h_y(j)\,D_w\,h_y^T(j) \, . \qquad (2.30)$$

Замечание. Как видно условия стационарности задачи и полученные формулы справедливы при любой стационарной функции $w(k)$, не обязательно являющейся белым шумом.

Если же $w(k)$ белый шум и его корреляционная функция определяется выражением (I.4), то из последних двух формул следуют

$$\begin{aligned} R_y(n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_y(j)\,D_w\,h_y^T(n+j) \, , \\ D_y &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_y(j)\,D_w\,h_y^T(j) \, . \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Пользуясь выражением (2.26) для импульсной характеристики, можно те же величины выразить явным образом через матрицы системы (2.25)

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1} B m_w, \\ D_y &= \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1} B D_w B^T (A^{j-1})^T C^T . \end{aligned} \qquad (2.32)$$

Условие в) теоремы 2.I обеспечивает и ограниченность дисперсионной матрицы D_y.

Выражения для m_y и D_y можно получить и из рекуррентных соотношений, которым они удовлетворяют (см.подразд. 2.3). Из соотношений (2.16),(2.19) и условия постоянства m_y следует частное решение для стационарного случая

$$m_y = C\,(E - A)^{-1}\, B m_\omega . \tag{2.33}$$

Также из выражений (2.22) и (2.18) для постоянной дисперсионной матрицы получаем

$$D_x = A D_x A^T + B D_\omega B^T,$$

$$D_y = C D_x C^T . \tag{2.34}$$

Корреляционная функция $R_y(n)$ определяется выражением (2.12) с учетом формулы (2.5)

$$R_x(n) = \begin{cases} D_x\,(A^n)^T, & (n \geq 0), \\ A^{-n}\, D_x, & \end{cases}$$

$$R_y(n) = C R_x(n)\, C^T . \tag{2.35}$$

Установленные условия стационарности и связанные с этим расчетные соотношения могут быть использованы для определения не только характеристик переменных $x(k)$, $y(k)$ в уравнениях системы (2.25), но и переменных $x_1(k)$, $u(k)$ уравнениях (I.10) формирования случайного воздействия. Как легко видеть, сравнивая эти уравнения, все сводится лишь к изменению обозначений матриц уравнений.

Наряду с изучением стационарных систем во временной области, находит, как и для детерминированных систем, применение частотный подход, связанный с использованием методов Z - преобразования.

2.5. Анализ стационарной системы с помощью z - преобразования

Используем Z преобразование для представления связи между стационарным воздействием $w(k)$ и стационарным решением для $y(k)$ вида (2.29). Как известно, z преобразованием $X(z)$ функции $x(k)$ называется функция переменной z, определяемая выражением (подразд. 3.6 [I]; [3]; [6])

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x(k)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} . \tag{2.36}$$

При этом обратное преобразование осуществляется в соответствии с формулой

$$x(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1}\, dz \tag{2.37}$$

(вопросы существования преобразования (2.36), его свойств и способов вычисления обратного преобразования (2.37) рассмотрены в пособиях [3] , [6]).

Применительно к стационарным стохастическим задачам использование z - преобразования связано с введением функции $S_x(z)$, называемой спектральной плотностью дискретной стационарной случайной функции $x(k)$ и определяемой как z - преобразование ее корреляционной функции

$$S_x(z)=\mathcal{Z}\{R_x(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n) z^{-n} . \tag{2.38}$$

В соответствии с выражением (2.37) имеет место обратное представление

$$R_x(n)=\mathcal{Z}\{S_x(z)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} S_x(z) z^{n-1} dz . \tag{2.39}$$

Отсюда для дисперсионной матрицы D_x следует

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi j}\oint S_x(z) z^{-1} dz \qquad (2.40)$$

Основной задачей, как и при анализе во временной области, является определение корреляционной функции $R_y(n)$ и дисперсионной матрицы D_y выходной переменной $y(k)$. В этих условиях применение z - преобразования сводится к использованию формул (2.39), (2.40) с предварительным нахождением $S_y(z)$ по спектральной плотности $S_w(z)$ - входа $w(k)$ и характеристикам системы.

Последние определяются передаточной функцией дискретной системы, являющейся z - преобразованием ее импульсной характеристики

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} . \qquad (2.41)$$

Необходимая связь между спектральными плотностями дается соотношением

$$S_y(z) = H_y(z) S_w(z) H_y^T(z) \qquad (2.42)$$

Для его доказательства будем вычислять $S_y(z)$ по формуле (2.38), используя выражение для

$$R_y(n) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} h_y(i_1) \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} R_w(n-i_2+i_1) h^T(i_2), \qquad (2.43)$$

полученное при доказательстве Теоремы 2.1.

Последовательно будем иметь

$$S_y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_y(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}h_y(i_1)\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}R_{w}(n-i_2+i_1)h_y^{T}(i_2)z^{-n}=$$

$$=\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}h_y(i_1)z^{-i_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_{w}(n-i_2+i_1)z^{-n-i_2+i_1}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}h_y^{T}(i_2)z^{i_2}=$$

$$=H_y(z)S_w(z)H^T(z^{-1}),$$

что и доказывает формулу (2.42).

Для получения расчетных формул найдем передаточную функцию $H_y(z)$ - системы, для чего осуществим Z - преобразование правых и левых частей равенств (2.25), учитывая свойство линейности Z - преобразования и формулу [3] $\mathcal{Z}\{x(k+1)\}=z\mathcal{Z}\{x(k)\}$

$$\left.\begin{aligned} zX(z)&=AX(z)+BW(z),\\ Y(z)&=CX(z).\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$Y(z)=C(zE-A)^{-1}BW(z) \qquad (2.44)$$

Как известно [3], определению (2.4I) передаточной функции эквивалентно ее определение, как отношения Z - преобразований $Y(z)$, $W(z)$ выхода и входа. Следовательно,

$$H_y(z)=C(zE-A)^{-1}B \qquad (2.45)$$

(тот же результат может быть получен с помощью преобразования (2.4I) и выражения (2.26) для импульсной характеристики).

Учитывая выражения (2.39), (2.40) и (2.42), получаем окончательные расчетные формулы

$$R_y(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma} H_y(z)\,S_w(z)\,H_y^{T}(z^{-1})\,z^{n-1}\,dz\,, \qquad (2.46)$$

$$D_y=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma} H_y(z)\,S_w(z)\,H_y^{T}(z^{-1})\,z^{-1}\,dz\,, \qquad (2.47)$$

в которых передаточная функция $H_y(z)$ для выходной переменной $y(k)$ определяется выражением (2.45).

Те же формулы могут быть использованы для определения характеристик переменной состояния $x(k)$ и воздействия $u(k)$. В этих случаях следует исходить из импульсных характеристик (2.19), (2.20) для соответствующих переменных, которым соответствуют передаточные функции

$$H_x(z)=(zE-A)^{-1}B\,. \qquad (2.48)$$

$$H_u(z)=(zE-A_2)^{-1}B_2\,. \qquad (2.49)$$

Как следует из предыдущего, все полученные формулы справедливы для произвольной стационарной функции $w(k)$.

<u>Частный случай</u>, когда стационарная случайная функция $w(k)$ – белый шум. Тогда из формулы (I.4) с учетом стационарности следует

$$R_w(n)=D_w\,\delta_{n,0}$$

и в силу (2.38)

$$S_w(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_w\,\delta_{n,0}\,z^{-n}=D_w=\mathrm{const}.$$

Если, кроме того, белый шум $w(k)$ является стандартным (необходимое изменение характеристик воздействия достигается подбором матрицы B), то в соответствии с выражением (I.6)

$$S_w(z) = E,$$

и расчетные формулы (2.46), (2.47) принимают вид

$$R_y(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} H_y(z)\, H_y^T(z^{-1})\, z^{n-1}\, dz,$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} H_y(z)\, H_y^T(z^{-1})\, z^{-1}\, dz. \qquad (2.50)$$

Замечание. Касаясь вычисления обратных преобразований типа (2.50), заметим, что полюсы передаточной функции $H_y(z)$ совпадают с собственными значениями матрицы A, а для функции $H_y^T(z^{-1})$ являются величинами, обратными этим собственным значениям. В силу же условия устойчивости системы для собственных значений матрицы A имеют место $|\lambda_i| < 1$. Поэтому за контур интегрирования Γ можно выбирать окружность $|z| = 1$. Практически вычисление интегралов проводится обычно путем нахождения вычетов подынтегральной функции в указанных ее полюсах, расположенных внутри этой единичной окружности.

Определение математического ожидания с помощью z - преобразования для какой-либо из переменных системы основано на формуле (2.28). Действительно, из определения (2.4I) передаточной функции следует

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_y(n) = H_y(z)\Big|_{z=1} = H_y(1).$$

Подставляя это в выражение (2.28) находим

$$m_y = H_y(1)\, m_w. \qquad (2.5I)$$

Аналогичные формулы имеют место и для других переменных $x(k)$ и $u(k)$; при этом используются соответствующие выражения (2.43), (2.49) для передаточных функций.

2.6. Анализ системы при стационарном воздействии

Рассмотренный в предыдущем параграфе стационарный случай относится к ситуации, когда стационарными являются все фигурирующие случайные функции $w(k)$, $u(k)$, $x(k)$, $y(k)$. Наряду с этим представляют практический интерес задачи, когда в условиях стационарности воздействия $u(k)$ остальные переменные могут не являться стационарными случайными функциями. Это может иметь место, когда установившееся стационарное воздействие $u(k)$ начинает действовать на систему, находящуюся в некотором произвольном состоянии в рассматриваемый момент k_0.

Для решения такой задачи целесообразно стационарное решение представить не в виде предельного, отвечающего $k_0 \to -\infty$ (см.формулу (2.27)), а частным решением, соответствующим некоторым определенным начальным условиям для выбранного k_0.

Исходя из уравнений системы (2.25)

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned}\right\}$$

будем рассматривать условия стационарности для переменной состояния $x(k)$. В соответствии с указанной выше Теоремой 2.I стационарным является решение вида

$$x_c(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_x(k-i)\, w(i), \tag{2.52}$$

в то время, как общее решение имеет вид (2.4)

$$x(k) = \Phi(k-k_0)\, x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\, Bw(i).$$

В этих условиях возможно представление стационарного решения (2.52) как частного решения, отвечающего определенным начальным условиям $x_0(k_0)$.

Теорема 2.2. Для того чтобы частное решение

$$x(k)=\Phi(k-k_0)x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Bw(i)$$

совпадало с решением (2.52) при $k \geqslant k_0$ и, следовательно, являлось стационарной случайной функцией, достаточно, чтобы начальное значение $x_0(k)$ было выбрано в соответствии с выражением

$$x_c(k_0)=\sum_{i=-\infty}^{k_0-1}\Phi(k_0-i-1)Bw(i)=\sum_{i=-\infty}^{k_0-1}h_x(k_0-i)w(i)=x_c(k_0). \quad (2.53)$$

Доказательство. Учитывая выражение (2.19) для импульсной характеристики $h_x(k-i)$, представим решение (2.52) в следующем виде

$$x_c(k)=\sum_{i=-\infty}^{k-1}h_x(k-i)w(i)=\sum_{i=-\infty}^{k_0-1}\Phi(k-i-1)Bw(i)+\sum_{i=k_0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Bw(i).$$

Приравнивая результат выражения для любого решения, получаем условие, которому должно удовлетворять искомое значение

$$\Phi(k-k_0)x_0(k_0)=\sum_{i=-\infty}^{k_0-1}\Phi(k-i-1)Bw(i).$$

Из него находим

$$x_0(k_0)=\sum_{i=-\infty}^{k_0-1}\Phi^{-1}(k-k_0)\Phi(k-i-1)Bw(i)$$

или, учитывая свойства переходной функции состояния

$$\Phi^{-1}(k,i)=\Phi(i,k), \qquad \Phi(j,i)\cdot\Phi(k,j)=\Phi(k,i)$$

(см., например, [1], с. 43), получаем требуемое соотношение (2.53).

Таким образом, искомое значение $x_o(k_o)$ определяется значением стационарного решения (2.52), вычисленным для $k=k_o$.

В силу случайности $w(k)$ величина $x_o(k_o)$ является случайной и надлежащий ее подбор для каждой из возможных реализаций $w(k)$ (с целью получения стационарного решения) не представляется практически возможным и интересным. Однако выражение (2.53) может быть использовано для определения начальных значений моментных характеристик случайной функции $x_c(k)$.

Действительно, вычисляя математическое ожидание от обеих частей равенства (2.53), находим

$$m_o = m_{x_c}(k_o) = \sum_{i=-\infty}^{k_o-1} h_x(k_o-i)\, m_w \tag{2.54}$$

и для дисперсионной матрицы имеем

$$D_o = D_{x_c}(k_o) = \sum_{i=-\infty}^{k_o-1} h_x(k_o-i)\, D_w h_x^T(k_o-i). \tag{2.55}$$

Естественно, они дают соответствующие стационарные значения этих характеристик.

Полученные результаты позволят перейти к задаче настоящего параграфа – решению нестационарной задачи при условии стационарности воздействия $u(k)$ на основе использования полученных ранее расчетных соотношений.

Будем исходить из уравнений (I.I4) формирования воздействия $u(k)$ уравнений системы (2.25), сводящихся к общим уравнениям вида (I.I2)

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned}\right\}$$

в которых

$$x(k) = \left(\frac{x_1(k)}{u(k)} \right).$$

При этом в связи со стационарностью воздействия $u(k)$ рассматривается стационарное решение $u_C(k)$ уравнений формирования (I.I4) и произвольное, отвечающее некоторым начальным условиям $x_1(k_0)$ решение уравнений системы (2.25). Решение такой задачи в рамках общих уравнений возможно, если в качестве начальных значений для моментных характеристик принять для $x_1(k)$ выбранные по условию задачи начальные данные, а для $u(k)$ начальные значения, определяемые условиями стационарности (2.54),(2.55).

Этому соответствуют начальные данные следующего вида:

$$m_x(k_0) = \left(\frac{m_x\ (k_0)}{m_{u_c}(k_0)} \right) , \qquad (2.56)$$

$$D_x(k_0) = \left(\begin{array}{c|c} D_{x_1}(k_0) & D_{x_1 u}(k_0) \\ \hline D_{u x_1}(k_0) & D_{u_c}(k_0) \end{array} \right) , \qquad (2.57)$$

где $m_{u_c}(k_0)$, $D_{u_c}(k_0)$ определяются соотношениями (2.54), (2.55), а $m_{x_1}, D_{x_1}, D_{x_1 u}, D_{u x_1}$ – заданными условиями задачи.

Как упоминалось в подразд. 2.I, начальное состояние $x_1(k_0)$ системы, как правило, независимо от внешнего воздействия $u(k)$ или же не имеется достаточных оснований для принятия определенных характеристик этой связи. Поэтому чаще всего можно полагать

$$D_{x_1 u}(k_0) = D_{u x_1}(k_0) = M[\overset{\circ}{x}_1(k_0) u_c^T(k_0)] = 0$$

Последующее решение задачи проводится с помощью общих расчетных формул типа (2.6),(2.11),(2.12),(2.16),(2.18).

2.7. Примеры анализа дискретных систем

Пример 1. Система описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= 0{,}6\,x(k) + u(k), \\ y(k) &= x(k), \end{aligned}\right\}$$

ее начальное состояние случайно с характеристиками

$$m_x(0) = m_0, \quad D_x(0) = D_0, \quad D_{xu}(0) = D_{ux}(0) = 0.$$

Случайное воздействие $u(k)$ определяется уравнением

$$u(k+1) = 0{,}2\,u(k) + w(k)$$

и представляет собой скалярный процесс авторегрессии первого порядка (1.15). Скалярный процесс $w(k)$ считается стандартным белым шумом и

$$M[w(k)] = m_w, \quad D_w = 1.$$

Считая воздействие установившимся (стационарным), определить характеристики воздействия, переменных состояния и выхода.

Решение. Объединяя уравнения системы и воздействия приведем их к общей форме (1.12)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}w(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{aligned}\right\}$$

где в соответствии с выражением (1.13)

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \;\; 0).$$

Определяем характеристики воздействия $u(k)$, рассматривая задачу во временной области. Соответствующая импульсная характеристика $h_u(k,i)$ определяется формулой (2.20)

$$h_u(k,i)=h_u(k-i)=h_u(n)=\begin{cases} 0{,}2^{n-1}, & (n=k-i>0), \\ 0, & (n=k-i<0). \end{cases}$$

По формуле (2.28) для стационарной функции $u_c(k)$ вычисляем математическое ожидание

$$m_u=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_u(j)m_w=\sum_{j=-\infty}^{\infty} 0{,}2^{j-1}\, m = 1{,}25\, m_w ,$$

по формулам (2.31) – дисперсию

$$D_u=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_u(j)\, D_w h = \sum_{j=1}^{\infty} 0{,}2^{j-1} D_w\, 0{,}2^{j-1}=\frac{25}{24}D_w=1{,}04D_w$$

и корреляционную функцию

$$R_u(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_u(j)\, D_w h_u(n+j)=\sum_{j=1}^{\infty} 0{,}2^{j-1} D_w\cdot 0{,}2^{n+j-1}=1{,}04\cdot 0{,}2^{n} D_w .$$

Импульсную характеристику $h_x(k,i)$ определяем по формуле (2.19) с учетом выражения (2.5) для переходной функции состояния

$$h_x(k,i)=h_x(n)=\begin{cases} A^{n-1}B, & (n>0), \\ 0, & (n<0). \end{cases}$$

Для вычисления степеней матрицы A удобно воспользоваться соотношением (1.35), связывающим ее с диагональной матрицей Λ собственных значений

$$\Lambda=T^{-1}AT,$$

откуда находим

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

и

$$A^{n-1} = T\Lambda^{n-1}T .$$

Преобразующую матрицу T находим, пользуясь общей методикой канонических преобразований (см. [I], подразд. 2.3) и Теоремой I.2 настоящего пособия, в следующем виде :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix} .$$

После этого имеем

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6^{n-1} & 0 \\ 0 & 0,2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6^{n-1} & 2,5(0,6^{n-1}-0,2^{n-1}) \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

и выражение для импульсной характеристики

$$h_x(n) = A^{n-1}B = \begin{pmatrix} 2,5(0,6^{n-1}-0,2^{n-1}) \\ 0,2^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (n>0) .$$

Математическое ожидание m_x случайной функции $x(k)$ находим по общей формуле (2.6), принимая в качестве начального значения (2.56), отвечающие случаю стационарности воздействия $u(k)$,

$$m_x(k) = \begin{pmatrix} 0,6^k & 2,5(0,6^k-0,2^k) \\ 0 & 0,2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ 1,25 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 2,5(0,6^{k-i-1}-0,2^{k-i-1}) \\ 0,2^{k-i-1} \end{pmatrix} m_w =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6^k m + 3,125 m_w(1-0,6^k) \\ 1,25\, m_w \end{pmatrix} .$$

Для дисперсионной матрицы $D_x(k)$, пользуясь формулой (2.II), находим (при начальных условиях (2.57))

$$D_x(k)=\begin{pmatrix}0{,}6^k & 2{,}5(0{,}6^k-0{,}2^k)\\ 0 & 0{,}2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_0 & 0\\ 0 & 1{,}04D_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}6^k & 0\\ 2{,}5(0{,}6^k-0{,}2^k) & 0{,}2^k\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\begin{pmatrix}2{,}5(0{,}6^{k-i-1}-0{,}2^{k-i-1})\\ 0{,}2^{k-i-1}\end{pmatrix}D_w\begin{pmatrix}2{,}5(0{,}6^{k-i-1}-0{,}2^{k-i-1}) & 0{,}2^{k-i-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(D_0-3{,}27D_w)\,0{,}36^k+(2{,}07+1{,}20\cdot 0{,}12^k)D_w & 0{,}24(1-0{,}12^k)D_w\\ 0{,}24(1-0{,}12^k)D_w & 1{,}04D_w\end{pmatrix}$$

При увеличении k вычисленные характеристики стремятся к своим установившимся значениям, отвечающим стационарности не только воздействия $u(k)$, но и переменной состояния $x(k)$

$$m_x=\begin{pmatrix}3{,}125\\ 1{,}25\end{pmatrix}m_w, \quad D_x=\begin{pmatrix}2{,}07 & 0{,}24\\ 0{,}24 & 1{,}04\end{pmatrix}D_w.$$

Если начальные условия выбраны в соответствии с последними выражениями, то значения $m_x(k)$, $D_x(k)$ при всех k остаются постоянными и равными этим величинам. При этом, как легко проверить, выполняются конечные "стационарные" уравнения (2.33) и (2.34).

Для определения характеристик выходной переменной $y(k)$ находим соответствующую импульсную характеристику $h_y(k,i)$ системы, используя выражение (2.I5)

$$h_y(k,i)=h_y(n)=\begin{cases} C\,A^{n-1}B=2{,}5(0{,}6^{n-1}-0{,}2^{n-1}), & (n>0),\\ 0, & (n\leq 0).\end{cases}$$

Тогда

$$m_y(k) = 0{,}6^k m_0 + 3{,}125\,(1 - 0{,}6^k)\, m_w,$$

$$D_y(k) = 0{,}36^k (D_0 - 3{,}27 D_w) + (2{,}07 + 1{,}2 \cdot 0{,}12^k)\, D_w.$$

Те же результаты могут быть получены с помощью выражений (2.16),(2.17) соответственно. В данной простой задаче эти результаты очевидны в силу соотношения

$$y(k) = x(k).$$

Пример 2. Система описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x(k+2) &= 1{,}3\,x(k+1) - 0{,}4\,x(k) + u(k), \\ y(k) &= x(k) + x(k+1). \end{aligned} \right\}$$

Случайное воздействие $u(k)$ определяется условиями примера I, т.е. описывается уравнением

$$u(k+1) = 0{,}2\,u(k) + w(k)$$

при

$$M[w(k)] = m_w, \quad D_w(k) = D_w.$$

Требуется определить характеристики установившегося движения системы, соответствующего стационарным решениям для случайных функций $u(k)$, $x(k)$, $y(k)$.

Решение. Введем в качестве переменных состояния

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x(k), \\ x_2(k) &= x_1(k+1), \\ x_3(k) &= u(k). \end{aligned}$$

Тогда в общих уравнениях системы

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B w(k), \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \right\}$$

$$x_1(k)=\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ u_1(k) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C=(1 \;\; 1 \;\; 0).$$

Для нахождения характеристик рассматриваемых стационарных функций воспользуемся методикой z – преобразования. В соответствии с уравнением формирования воздействия $u(k)$ и формулой (2.49) определяем передаточную функцию

$$H_{u}(z) = H_u(z) = \frac{1}{z-0{,}2}.$$

Математическое ожидание m_u находим, пользуясь формулой вида (2.51) для функции $u(k)$

$$m_u = H_u(1)\cdot m_w = \frac{1}{1-0{,}2} m_w = 1{,}25\, m_w.$$

Как указывалось в подразд. 2.5, спектральная плотность $S_w(z)$ процесса $w(k)$ определяется выражением

$$S_w(z) = S_w(z) = D_w = \mathrm{const}.$$

Дисперсионную матрицу D_u находим с помощью соотношения (2.50)

$$D_u = \frac{D_w}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1} H_u(z)H_u(z^{-1})z^{-1}dz = \frac{D_w}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^{-1}}{(z-0{,}2)(z^{-1}-0{,}2)}dz.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся теорией вычетов, в соответствии с которой

$$\oint f(z)dz = 2\pi j\sum_{i=1}^{S}\mathrm{Res}\, f(z_i),$$

где $\mathrm{Res}\, f(z_i)$ вычет подынтегральной функции $f(z)$ в полюсе z_i, расположенном внутри контура интегрирования Γ

В рассматриваемом случае

$$f(z)=\frac{z^{-1}}{(z-0,2)(z^{-1}-0,2)}=\frac{1}{(z-0,2)(1-0,2z)},$$

единственным таким полюсом для которой является $z_1=0,2$. Тогда

$$\operatorname{Res} f(0,2)=f(z)(z-z_1)\Big|_{z=z_1=0,2}=\frac{1}{1-0,2\cdot 0,2}=1,04$$

и, следовательно,

$$D_u=1,04\,D_w.$$

Для корреляционной функции $R_u(n)$, поступая аналогичным образом, имеем

$$R_u(n)=\frac{D_w}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^n}{(z-0,2)(1-0,2z)}\,dz=1,04\cdot 0,2^n D_w.$$

Найденные характеристики стационарной случайной функции $u(k)$ совпадают с полученными в примере I рассмотрением во временной области. Легко проверить, что передаточная функция $H_u(z)$ и соответствующая импульсная характеристика $h_u(n)$ связаны соотношением(2.41).

Для определения характеристик переменной состояния $x(k)$ находим передаточную функцию $H_x(z)$ исходя из выражения (2.48)

$$H_x(z)=(zE-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0,4 & z-1,3 & -1 \\ 0 & 0 & z-0,2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ (z-0{,}5)(z-0{,}8) \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание m_x определяем, пользуясь формулой (2.5I) и найденным выражением для $H_x(z)$

$$m_x = H_x(1)\, m_w \frac{1}{(1-0{,}5)(1-0{,}8)(1-0{,}2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ (1-0{,}5)(1-0{,}8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 12{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} m_w$$

Для вычисления дисперсионной матрицы воспользуемся выражением (2.50)

$$D_x = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} H_x(z) H_x^T(z^{-1}) z^{-1} dz = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ (z-0{,}5)(z-0{,}8) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8)(z^{-1}-0{,}2)} \left(1 \quad z^{-1} \quad (z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8)\right) z^{-1} dz =$$

$$= \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8)(z^{-1}-0{,}2)} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & (z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8) \\ z & 1 & z(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8) \\ (z-0{,}5)(z-0{,}8) & z^{-1}(z-0{,}5)(z-0{,}8) & (z-0{,}5)(z-0{,}8)(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8) \end{pmatrix}.$$

Вычисляем последовательно элементы матрицы

$$D_{11} = D_{22} = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8)(z^{-1}-0{,}2)}\, dz =$$

$$= \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{2}}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(1-0{,}5z)(1-0{,}8z)(1-0{,}2z)}\, dz =$$

$$= \frac{D_w}{2\pi j}\, 2\pi j \left[\operatorname{Res} f(0{,}5) + \operatorname{Res} f(0{,}8) + \operatorname{Res} f(0{,}2) \right] =$$

$$= D_w\,(-6{,}86 + 19{,}59 + 0{,}30) = 13{,}03\, D_w\,;$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z\, dz}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(1-0{,}5z)(1-0{,}8z)(1-0{,}2z)} = 12{,}30\, D_w\,;$$

$$D_{23} = D_{31} = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(1-0{,}5z)(1-0{,}8z)(1-0{,}2z)} = 0\,;$$

$$D_{23} = D_{32} = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z\, dz}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(z-0{,}2z)} = 0{,}28\, D_w;$$

$$D_{33} = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{(z-0{,}2)(1-0{,}2z)}\, dz = 1{,}04\, D_w.$$

В результате имеем

$$D_x = \begin{pmatrix} 13{,}03 & 12{,}30 & 0 \\ 12{,}30 & 13{,}03 & 0{,}28 \\ 0 & 0{,}28 & 1{,}04 \end{pmatrix} D_w.$$

Для определения характеристик выходной переменной $y(k)$ определяем соответствующую передаточную функцию $H_y(z)$ по формуле (2.45)

$$H_y(z) = H_y(z) = C(zE-A)^{-1}B = CH_x(z) =$$

$$= (1 \quad 1 \quad 0)\frac{1}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)}\begin{pmatrix} 1 \\ z \\ (z-0{,}5)(z-0{,}8) \end{pmatrix} = \frac{1+z}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)}.$$

После этого находим математическое ожидание

$$m_y = H_y(1)\, m_w = \frac{1+1}{(1-0{,}5)(1-0{,}8)(1-0{,}2)}\, m_w = 25\, m_w$$

и дисперсионную матрицу

$$D_y = D_y = \frac{D_w}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=1} H_y(z)\, H_y(z^{-1})\, z^{-1}\, dz =$$

$$=\frac{D_w}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1+z)(1+z^{-1})z^{-1}}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(z^{-1}-0{,}5)(z^{-1}-0{,}8)(z^{-1}-0{,}2)}dz=$$

$$=\frac{D_w}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1+z)^2\,z\,dz}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)(z-0{,}2)(1-0{,}5z)(1-0{,}8z)(1-0{,}2z)}=50{,}69D_w.$$

Проведенное вычисление характеристик выходной переменной $y(k)$, основанное на использовании соответствующей передаточной функции $H_y(z)$, является общим приемом. В том же случае, когда уже определены характеристики переменной состояния $x(k)$, те же результаты могут быть найдены более простым путем - использованием уравнения выхода, связывающего эти переменные.

Вычисление корреляционных функций $R_x(n)$ и $R_y(n)$ проводится с помощью первой из формул (2.50).

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Общие сведения

Рассмотрим непрерывную систему, описываемую уравнениями, аналогичными уравнениям (1.3).

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t),\\&y(t)=C\;(t),\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

где $u(t)$ - m - мерный вектор входных сигналов;

$x(t)$ - n - мерный вектор состояния системы;

$y(t)$ - p -мерный вектор выходных сигналов;

$A(t), B(t), C(t)$ – матрицы соответствующих размеров, характеризующие систему.

Если $A(t), B(t), C(t), u(t)$ – непрерывные неслучайные функции аргумента t, то решение системы (3.I) можно представить в виде [I]

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \\
y(t) &= C(t)\,\Phi(t,t_0)\,x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $\Phi(t,\tau)$ – переходная функция состояния системы. Если входной сигнал $u(t)$ – случайный процесс, то состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ будут также случайными процессами. Системы, описываемые уравнениями (3.I) со случайными входными сигналами $u(t)$ и неслучайными параметрами $A(t), B(t), C(t)$ будут в дальнейшем называться непрерывными стохастическими линейными системами.

Если случайный входной сигнал $u(t)$ является непрерывным (в среднеквадратическом) процессом, то решение системы (3.I) можно также представить в виде (3.2), но интегралы в этих формулах следует понимать как стохастические.*) К сожалению, формулы (3.2) непригодны, если $u(t)$ белый шум. Дело в том, что белый шум (с непрерывным временем t) является слишком "нерегулярным" случайным процессом, для которого даже не имеют смысла стохастические интегралы в выражениях (3.2). Поскольку белый шум представляет собой чрезвычайно полезную модель реальных широкополосных случайных процессов, а также является основой для представления других

---

*) Напомним, что определение стохастического интеграла Римана отличается от обычного только тем, что вместо обычного предела последовательности интегральных сумм, используется понятие предела в среднеквадратическом, поскольку интегральные суммы – случайные величины второго порядка.

процессов с помощью так называемых формирующих систем (см.подразд.I.2), нам потребуется так изменить математический аппарат анализа стохастических линейных систем, чтобы включить в рассмотрение входные сигналы типа белого шума. Математические трудности, связанные с анализом таких систем можно преодолеть, если преобразовать первое уравнение системы (3.I) в интегральное и ввести понятие интеграла Стилтьеса.

3.2. Интегральное уравнение состояния. Интеграл Стилтьеса

Предположим на время, что $u(t)$ – неслучайный входной сигнал. Проинтегрировав обе части первого уравнения системы (3.I) можно получить его в следующем виде:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t)x(t)dt + \int_{t_0}^{t} B(t)u(t)dt. \qquad (3.3)$$

Введем вектор-функцию $w(t)$, приняв

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} u(t)dt + w(t_0),$$

так что

$$u(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t}. \qquad (3.4)$$

Тогда $u(t)dt = dw(t)$. Подставляя это выражение в формулу (3.3), получим

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t)x(t)dt + \int_{t_0}^{t} B(t)dw(t). \qquad (3.5)$$

Если функция $w(t)$ дифференцируема, т.е. существует производная (3.4), интегральное уравнение (3.5) эквивалентно дифференциальному уравнению состояния в (3.I). Если $w(t)$ не дифференцируема, дифференциальное уравнение в (3.I) лишается смысла, в то время как уравнению (3.5) можно придать смысл, вводя понятие интеграла Стилтьеса.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ действительные или комплексные функции, определенные на отрезке $[a,b]$; $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$; $t_{k-1}\le\tau_k\le t_k$; $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$; $\Delta g_k=g(t_k)-g(t_{k-1})$. Обозначим символом S_n интегральную сумму вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta g_k .$$

Если существует предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \max(\Delta t_k)\to 0}} S_n$ и этот предел не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ точками $t_0,t_1,\ldots,t_n$ и выбора промежуточных точек τ_k, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется <u>интегралом Стилтьеса функции f по функции</u> g и обозначается символом $\int_a^b f(t)dg(t)$, т.е.

$$\int_a^b f(t)dg(t)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta t_k|\to 0}}\left[\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta g_k\right] \qquad (3.6)$$

Заметим, что при $g(t)=t$ интеграл Стилтьеса переходит в интеграл Римана, так что приведенное выше определение (3.6) можно считать обобщением известного определения интеграла.

Стохастический интеграл Стилтьеса от неслучайной функции по случайной функции $g(t)$ определяется аналогичным образом только в определении (3.6) предел понимается как предел в среднеквадратическом.

Нам понадобится также матричная форма интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b F(t)dG(t)H(t),$$

где $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ - матрицы соответствующих размеров. Этот интеграл определяется как матрица с элементами

$$\left\{ \int_a^b F(t)\,dG(t)H(t) \right\}_{ik} = \int_a^b \left\{ F(t)dG(t)H(t) \right\}_{ik} =$$

$$= \sum_r \sum_s \int_a^b F_{ir}(t) H_{sk}(t)\, dG_{rs}(t).$$

В частности, если $F(t)$ – ($m \times n$) – матрица, $G(t)=g(t)$ – ($n \times 1$) – матрица (n – мерный вектор-столбец), $H(t)=1$, то

$$\int_a^b F(t)\,dg(t) = \begin{pmatrix} \int_a^b F_{11}(t)dg_1(t) + \ldots + \int_a^b F_{1n}(t)dg_n(t) \\ \\ \int_a^b F_{m1}(t)\,dg_1(t) + \ldots + \int_a^b F_{mn}(t)\,dg_n(t) \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

3.3. Случайные процессы с ортогональными приращениями и их связь с белым шумом

Случайный процесс второго порядка $\xi(t)$ называется процессом с ортогональными приращениями, если для любых t_1, t_2, t_3, t_4 таких, что $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$M\left\{ [\xi(t_2) - \xi(t_1)][\xi(t_4) - \xi(t_3)] \right\} = 0 . \qquad (3.8)$$

Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением процессов с нулевым математическим ожиданием. Для таких процессов соотношение (3.8) означает некоррелированность приращений процесса $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ и $\xi(t_4) - \xi(t_3)$, если они взяты на непересекающихся интервалах.

Структурной функцией процесса $\xi(t)$ с ортогональными приращениями называется функция $F^{\xi}(t)$, определяемая как

$$F^{\xi}(t)=\begin{cases} M[|\xi(t)-\xi(t_0)|^2] & \text{при } t>t_0, \\ -M[|\xi(t)-\xi(t_0)|^2] & \text{при } t<t_0. \end{cases}$$

Можно показать, что несмотря на то, что функция $F^{\xi}(t)$ зависит от параметра t_0, ее приращения не зависят от t_0 и

$$M[|\xi(t)-\xi(u)|^2]=F^{\xi}(t)-F^{\xi}(u).$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что процесс $\xi(t)$ с ортогональными приращениями непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна его структурная функция $F^{\xi}(t)$.

Важным примером процесса с ортогональными приращениями является <u>винеровский процесс</u>, определяемый условиями:

а) $\xi(0)=0$;

б) приращения процесса $\xi(t)$ распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием;

в) $F^{\xi}(t)=t$. (3.9)

Из вида структурной функции винеровского процесса следует, что этот процесс непрерывен при всех t. Можно показать, что винеровский процесс не дифференцируем ни в одной точке. Однако в некотором обобщенном смысле (который мы не будем уточнять) можно определить производную винеровского процесса, которая называется стационарным нормальным белым шумом и в этом обобщенном смысле винеровский процесс является интегралом от нормального белого шума. Если отказаться в определении винеровского процесса от нормальности приращений и рассмотреть обобщенную производную такого процесса с ортогональными приращениями, то можно прийти к более общему понятию стационарного белого шума с распределением, отличным от нормального.

Рассматривая (с учетом сделанных замечаний) интегральное уравнение состояния (3.5), можно сделать вывод, что при определении реакции линейной системы на белый шум, мы столкнемся со стохастическими интегралами Стилтьеса по непрерывному процессу с ортогональными приращениями.

3.4. Интеграл Стилтьеса по процессу с ортогональными приращениями

Рассмотрим некоторые свойства стохастических интегралов по процессу с ортогональными приращениями. Пусть $f(t)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ неслучайная функция, $\xi(t)$ случайный процесс с ортогональными приращениями, имеющий нулевое математическое ожидание. Можно показать, что стохастический интеграл Стилтьеса

$$I = \int_a^b f(t)\, d\xi(t)$$

существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\sigma^2 = \int_a^b f^2(t)\, dF^{\xi}(t), \tag{3.10}$$

причем $MI = 0$, $DI = \sigma^2$. Пусть $g(t)$ - другая непрерывная неслучайная функция и пусть существует интеграл

$$y = \int_c^d g(t)\, d\xi(t).$$

Тогда можно показать, что

$$M[Iy] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\max(a,c)}^{\min(b,d)} f(t)\, g(t)\, dF^{\xi}(t) & \text{при } \max(a,c) < \min(b,d), \\ 0 & \text{при } \max(a,c) > \min(b,d). \end{cases} \tag{3.11}$$

При анализе линейных стохастических систем нам придется рассматривать векторные случайные процессы, у которых компоненты являются процессами с ортогональными приращениями. Пусть $\xi(t)$ m- мерный случайный процесс, компоненты которого взаимно не коррелированы, имеют нулевое математическое ожидание и их структурные функции имеют вид (3.9). Пусть $F(t)$ – $(n \times m)$- матрица, для всех компонент которой существуют интегралы вида (3.10) при $F^{\xi_k}(t)=t$. Стохастический интеграл

$$\int_a^b F(t)\,d\,\xi(t),$$

определяемый формулой (3.7), является n- мерным случайным вектором. Основное свойство таких интегралов, которое нам понадобится в дальнейшем, можно сформулировать следующим образом: если существуют интегралы

$$I=\int_a^b F(t)d\xi(t), \qquad Y=\int_c^d G(t)d\xi(t),$$

то

$$M[IY^T]=\begin{cases}\displaystyle\int_{max(a,c)}^{min(b,d)} F(t)G^T(t)\,dt & \text{при } max(a,c)<min(b,d),\\ 0 & \text{при } max(a,c)>min(b,d).\end{cases} \tag{3.12}$$

Читателю предлагается самостоятельно вывести это соотношение из соотношений (3.7) и (3.11) с учетом того, что интегралы, взятые по различным компонентам процесса $\xi(t)$ взаимно некоррелированы.

В заключение данного раздела заметим, что из определения стохастического интеграла Стилтьеса и свойств нормальных процессов следует, что если $\xi(t)$ нормальный случайный процесс, то интегралы вида $\int_a^b F(t)d\,\xi(t)$ (при неслучайной $F(t)$) являются нормальными случайными векторами.

3.5. Решение уравнения состояния непрерывной стохастической линейной системы при белом шуме на входе

При решении уравнения состояния (3.5) будем полагать, что процесс $w(t)$ имеет взаимно некоррелированные компоненты, являющиеся процессами с ортогональными приращениями, имеющими нулевое математическое ожидание и структурную функцию вида (3.9). Это предположение эквивалентно предположению о том, что $u(t)$ векторный белый шум с корреляционной функцией

$$K_u(t_1,t_2)=E\delta(t_1-t_2). \tag{3.13}$$

Может оказаться, что рассмотрение входных процессов только такого типа является слишком ограничительным из-за того, что сомножителем при дельта-функции в выражении (3.13) является единичная матрица E. На самом деле это не так, поскольку нетрудно показать, что случай, когда входной сигнал $u(t)$ имеет корреляционную функцию более общего вида

$$K_u(t_1,t_2)=Q(t)\delta(t_1-t_2),$$

где $Q(t)$ - положительно определенная матрица сводится к рассматриваемому здесь умножению матрицы $B(t)$ в уравнениях (3.1), (3.5) справа на матрицу $S(t)$, удовлетворяющую условию

$$Q(t)=S(t)S^T(t).$$

<u>Теорема 3.1</u>. Решение интегрального уравнения состояния (3.5) имеет вид

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)d\,w(\tau), \tag{3.14}$$

где $\Phi(t,\tau)$-переходная функция состояния системы, описываемой уравнениями (3.1), и это решение единственно.

<u>Доказательство</u>. С учетом выражения (3.14) и свойства переходной функции состояния

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = A(t)\,\Phi(t,\tau) \qquad (3.15)$$

имеем

$$\int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s)\Big[\Phi(s,t_0) + \int_{t_0}^{s} \Phi(s,\tau)B(\tau)\,dw(\tau)\Big]ds = \qquad (3.16)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi(s,t_0)}{\partial s}\, x(t_0)\,ds + \int_{t_0}^{t}\Big[\int_{t_0}^{s} \frac{\partial \Phi(s,\tau)}{\partial s}\, B(\tau)\,dw(\tau)\Big]ds$$

Вычисляя первый интеграл в правой части (3.16) с учетом того, что $\Phi(t,t) = E$, и меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получим

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds =$$

$$= \Phi(t,t_0)x(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Big[\int_{\tau}^{t} \frac{\partial \Phi(s,\tau)}{\partial s}\,ds\Big] B(\tau)\,dw(\tau) = \qquad (3.17)$$

$$= \Phi(t,t_0)x(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\,dw(\tau) - \int_{t_0}^{t} B(\tau)\,dw(\tau)$$

Подставляя формулу (3.17) в (3.5) убеждаемся в том, что формула (3.14) действительно представляет решение уравнения (3.5). Нетрудно доказать единственность этого решения.

Следствие. Если случайный вектор $x(t_0)$ имеет нормальное распределение, а входной сигнал $u(t)$, не зависящий от $x(t_0)$ нормальный белый шум, то состояние $x(t)$ и выходной процесс $y(t)$ системы, описываемой уравнениями (3.1) являются нормальными случайными процессами.

Теорема 3.1, определяющая общий вид решения уравнения состояния, позволяет вывести соотношения для расчета математического ожидания и корреляционной функции состояния системы $x(t)$. При условиях, сформулированных в следствии теоремы 3.1, эти характеристики дают полное вероятностное описание процесса $x(t)$.

Теорема 3.2. Пусть $u(t)$ - белый шум, некоррелированный с начальным состоянием $x(t_0)$. Тогда математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$ состояния системы $x(t)$ определяются формулами

$$m_x(t) = \Phi(t,t_0)m_x(t_0), \tag{3.18}$$

$$K_x(t_1,t_2) = \Phi(t_1,t_0)D_x(t_0)\Phi^T(t_2,t_0) + \int_{t_0}^{\min(t_1,t_2)} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_2,\tau)\,d\tau. \tag{3.19}$$

Доказательство. Формула (3.18) получается применением оператора математического ожидания к (3.14) с учетом того, что $\Phi(t,\tau)$ и $B(\tau)$ неслучайны и $m_u(t)=0$. Для доказательства соотношения (3.19) заметим, что из некоррелированности $x(t)$ и $u(t)$ следует некоррелированность первого и второго слагаемых в (3.14). Поэтому корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$ будет равна сумме корреляционных функций этих слагаемых. Применяя соотношение (3.11) для вычисления корреляционной функции первого слагаемого и соотношение (3.I2) для вычисления корреляционной функции второго, получим (3.I9).

Следствие. Корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$ полностью определяется дисперсионной матрицей $D_x(t)$ состояния $x(t)$

$$K_x(t_1,t_2)=\begin{cases}\Phi(t_1,t_2)D_x(t_2) & \text{при } t_1>t_2,\\ D_x(t_1)\Phi^T(t_2,t_1) & \text{при } t_1<t_2,\end{cases} \tag{3.20}$$

где

$$D_x(t)=\Phi(t,t_0)D_x(t_0)\Phi^T(t_2,t_0)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau. \tag{3.21}$$

Теорема 3.5 Математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсионная матрица $D_x(t)$ состояния $x(t)$ при условиях, определенных в теореме 3.2, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dm_x(t)}{dt}=A(t)m_x(t),$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt}=A(t)D_x(t)+D_x(t)A^T(t)+B(t)B^T(t).$$

Доказательство. Дифференцируя соотношения (3.I8),(3.2I) по t с учетом свойства (3.I5) переходной функции состояния, получим

$$\frac{dm_x(t)}{dt}=\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t}m_x(t_0)=$$

$$=A(t)\Phi(t,t_0)m_x(t_0)=A(t)m_x(t),$$

$$\frac{d D_x(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(t,t_0)}{\partial t} D_x(t_0)\Phi^T(t,t_0) + \Phi(t,t_0) D_x(t_0) \frac{\partial \Phi^T(t,t_0)}{\partial t} +$$

$$+ \Phi(t,t_0)\, B(t) B^T(t) \Phi(t,t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{t^0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \frac{\partial \Phi^T(t,\tau)}{\partial t} d\tau =$$

$$= A(t)\left[\Phi(t,t_0) D_x(t_0) \Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi(t,\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ \Big[\Phi(t,t_0) D_x(t_0) \Phi^T(t,t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t,\tau) d\tau\Big] A^T(t) + B(t) B^T(t) =$$

$$= A(t) D_x(t) + D_x(t) A^T(t) + B(t) B^T(t),$$

что и требовалось доказать.

<u>Теорема 3.4</u>. Если система, описываемая уравнениями (3.I), стационарна и устойчива, входной процесс $u(t)$ - белый шум с корреляционной функцией $K_u(t_1 t_2) = E\,\delta(t_1 - t_2)$ и нулевым математическим ожиданием, начальное состояние $x(t_0)$ не коррелировано с $u(t)$, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсионную матрицу

$$D_x(t_0) = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = D, \tag{3.22}$$

являющуюся решением уравнения

$$AD + DA^{T} + BB^{T} = 0, \tag{3.23}$$

то состояние системы $x(t)$ при $t > t_0$ является отрезком стационарного (в широком смысле) процесса с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_x(t_1 t_2) = \begin{cases} e^{A(t_1 - t_2)} D & \text{при } t_1 > t_2, \\ De^{A^{T}(t_2 - t_1)} & \text{при } t_2 \geqslant t_1 \end{cases} \tag{3.24}$$

<u>Доказательство</u>. Для интегралов Римана от матричных функций параметра t справедливо следующая формула интегрирования по частям:

$$\int A(t)B'(t)dt = A(t)B(t) - \int A'(t)B(t)dt,$$

где $A(t), B(t)$ - матричные функции от t соответствующих размеров, а знак $'$ означает дифференцирование по t. Применяя эту формулу к выражению (3.22) с учетом соотношения

$$(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A,$$

получим

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{\infty} e^{At} BB^{T} e^{A^{T}t} dt = \\ &= e^{At} BB^{T} e^{A^{T}t} (A^{T})^{-1} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} Ae^{At} BB^{T} e^{A^{T}t} (A^{T})^{-1} dt = \\ &= e^{At} BB^{T} e^{A^{T}t} (A^{T})^{-1} \Big|_0^{\infty} - AD(A^{T})^{-1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Учитывая, что для устойчивой системы

$$\lim_{t \to \infty} e^{At} = 0$$

соотношение (3.25) можно записать в виде

$$D = -BB^T(A^T)^{-1} - AD_x(A^T)^{-1}$$

или

$$DA^T = -BB^T - AD,$$

что эквивалентно уравнению (3.23). Таким образом, мы показали, что матрица D_x, определяемая соотношением (3.22), действительно удовлетворяет уравнению (3.23) и согласно теореме 3.4 $D_x(t) = D$ является решением дифференциального уравнения для дисперсионной матрицы при начальном условии $D_x(t_0) = D$.

Поскольку $m_x(t_0) = 0$ из теоремы 3.2 следует, что $m_x(t) = 0$ и так как для стационарной системы $\Phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, то соотношение (3.20), определяющее корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$, примет вид (3.24).

4. АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

4.1. Постановка задачи

При анализе непрерывных стохастических систем как и при анализе дискретных систем, будем считать, что случайная составляющая входного сигнала представляется уравнениями системы, формирующей ее из белого шума.

Пусть анализируемая система описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= A_1(t)x_1(t) + B_1(t)\left[u_1(t) + v_1(t)\right], \\ y(t) &= C_1(t)x_1(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

где $u_1(t)$ - случайная составляющего входного сигнала, имеющая нулевое математическое ожидание; $v_1(t)$ - неслучайная составляющая входного сигнала.

Будем полагать, что случайная составляющая $u_1(t)$ описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} &= A_2(t)x_2(t) + B_2(t)u_2(t), \\ u_1(t) &= C_2(t)x_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

где $u_2(t)$ белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $E\delta(t_1-t_2)$ *). Вводя новый вектор состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

и обозначая $w' = u_2$, $v = v_1$, уравнения (4.I), (4.2) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)w'(t) + G(t)v(t), \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 0) \qquad (4.4)$$

---

*) При необходимости рассмотрения белого шума с более общей корреляционной функцией $Q(t_1)\,\delta(t_1-t_2)$ согласно замечанию, сделанному в начале подразд. 3.5, в последующих формулах следует заменить $B(t)$ на $B(t)\,S(t)$, где $S(t)$ - любая матрица, удовлетворяющая условию $Q(t) = S(t)\,S'(t)$.

Задача анализа непрерывной стохастической линейной системы сводится к получению выражений для общего решения системы (4.3), математического ожидания, корреляционных и взаимных корреляционных функций процессов $x(t)$, $y(t)$ и входного процесса

$$u(t) = u_1(t) + v_1(t) = C_u(t)x(t) + v(t), \qquad (4.5)$$

где

$$C_u = (v\ C_2). \qquad (4.6)$$

4.2. Общее решение уравнений системы и его характеристики

В соответствии с принципом суперпозиции реакцию стохастической линейной системы можно представить в виде суммы неслучайной составляющей, обусловленной математическим ожиданием начального состояния и входного сигнала, и случайной составляющей. Неслучайной составляющей процессов $x(t)$, $y(t)$, $u_{вх}(t)$ является их математическое ожидание $m_x(t)$, $m_y(t)$, $m_u(t)$, а случайной — центрированные процессы $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{u}(t)$. Используя формулы (3.2) и теорему 3.I, можно получить следующие выражения:

$$m_x(t) = \Phi(t,t_0)m_x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)v(\tau)d\tau,$$

$$m_y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)m_x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)d\tau, \qquad (4.7)$$

$$m_u(t) = v(t),$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{x}(t) &= \Phi(t,t_0)\overset{\circ}{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)\,dw(\tau)\\
\overset{\circ}{y}(t) &= C(t)\Phi(t,t_0)\overset{\circ}{x}(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)\,dw(\tau),\\
\overset{\circ}{u}_{\text{вх}}(t) &= C_u(t)\Phi(t,t_0)\overset{\circ}{x}(t_0) + C_u(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)\,dw(\tau) =\\
&= C_2(t)\Phi_2(t,t_0)\overset{\circ}{x}(t_0) + C_2(t)\int_{t_0}^{t}\Phi_2(t,\tau)B_2(\tau)\,dw(\tau),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

где $w(t)$ - процесс с ортогональными приращениями, являющийся (формально) интегралом от белого шума $w'(t)$. Согласно теореме 3.2 с использованием формул (П.20),(П.22) Приложения получим

$$
K_x(t_1,t_2) = \begin{cases} \Phi(t_1,t_2)\,D_x(t_2) & \text{при } t_1 \geq t_2, \\ D_x(t_1)\,\Phi^T(t_2,t_1) & \text{при } t_1 < t_2, \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
K_y(t_1,t_2) &= C(t_1)K_x(t_1,t_2)C^T(t_2),\\
K_u(t_1,t_2) &= C_u(t_1)K_x(t_1,t_2)C_u^T(t_2),\\
K_{xy}(t_1,t_2) &= K_x(t_1,t_2)C^T(t_2),\\
K_{xu}(t_1,t_2) &= K_x(t_1,t_2)C_u^T(t_2),\\
K_{yu}(t_1,t_2) &= C(t_1)K_x(t_1,t_2)C_u^T(t_2),
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

где дисперсионная матрица состояния $D_x(t)$ определяется выражением

$$D_x(t) = \Phi(t,t_0) D_x(t_0) \Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t,\tau) d\tau. \qquad (4.9)$$

Матрицу $D_x(t)$ можно также найти, решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = A(t) D_x(t) + D_x(t) A^T(t) + B(t) B^T(t) \qquad (4.10)$$

при заданном начальном значении $D_x(t_0)$.

Из общих выражений (4.7)- (4.10) можно получить ряд полезных соотношений для различных частных случаев. Предположим, что система, описываемая уравнениями (4.3), устойчива, так что

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \Phi(t,t_0) = \lim_{t \to \infty} \Phi(t,t_0) = 0 .$$

Полагая в формулах (4.7), что $t_0 \to -\infty$, получим выражения для установившихся случайных и неслучайных составляющих процессов $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$,

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \int_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau) G(\tau) v(\tau) d\tau, \\ m_y(t) &= C(t) \int_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau) G(\tau) v(\tau) d\tau, \qquad (4.11) \\ m_u(t) &= v(t), \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)dw(\tau)$$

$$\overset{\circ}{y}(t) = C(t)\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)dw(\tau), \tag{4.11}$$

$$\overset{\circ}{u}(t) = C_u(t)\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)dw(\tau)$$

Дисперсионная матрица состояния $D_x(t)$ в установившемся режиме определяется выражением

$$D_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau. \tag{4.12}$$

Если система, описываемая уравнениями (4.3), устойчива и стационарна, то можно показать, что установившиеся составляющие процессов $\overset{\circ}{x}(t)$, $\overset{\circ}{y}(t)$, $\overset{\circ}{u}(t)$ являются стационарными (в широком смысле) процессами. Действительно, подставляя в (4.12) выражение для переходной функции состояния стационарной системы $\Phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, получим (см.(3.22))

$$D_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}BB^T e^{A^T(t-\tau)}d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{At_1}BB^T e^{A^T t_1}dt_1 = D = \text{const}.$$

С учетом постоянства матрицы C для стационарной системы стационарность процессов $\overset{\circ}{x}(t)$, $\overset{\circ}{y}(t)$, $\overset{\circ}{u}(t)$ следует из теоремы 3.4. Подставляя в формулы (4.8) переходную функцию состояния стационарной системы, убеждаемся в том, что процессы

$\overset{\circ}{x}(t)$, $\overset{\circ}{y}(t)$, $\overset{\circ}{u}(t)$ стационарно связаны, поскольку их взаимные корреляционные функции зависят только от разности аргументов. Вводя функции $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$, $R_u(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$, $R_{xu}(\tau)$, $R_{yu}(\tau)$ таким же образом, как это было сделано для дискретных процессов, соотношения (4.8) для установившихся составляющих в устойчивой стационарной системе можно переписать в виде

$$R_x(\tau) = \begin{cases} e^{A\tau} D & \text{при } \tau > 0, \\ D e^{A'\tau} & \text{при } \tau < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= C R_x(\tau) C^T, \\ R_u(\tau) &= C_u R_x(\tau) C_u^T, \\ R_{xy}(\tau) &= R_x(\tau) C^T \\ R_{xu}(\tau) &= R_x(\tau) C_u^T, \\ R_{yu}(\tau) &= C R_x(\tau) C_u^T. \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Предположим теперь, что анализируемая и формирующая системы стационарны и устойчивы и неслучайная составляющая $v(t)$ равна нулю. Тогда установившиеся составляющие выхода этих систем $y(t)$ и $u(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= C_2 \int_{-\infty}^{t} e^{A_2(t-\tau)} B_2 \, dw(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\, dw(\tau), \\ y(t) &= C_1 \int_{-\infty}^{t} e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

где h_1 и h_2 – импульсные характеристики анализируемой и формирующей систем. Первое из соотношений (4.14) вытекает из

(4.II), а второе следует из представления выхода стохастической системы при воздействии на вход непрерывного случайного процесса. Выражения для корреляционных и взаимных корреляционных функций процессов $u(t)$ и $y(t)$ в данном случае можно получить непосредственно из (4.I4). Используя формулу (3.I2) и общие соотношения, относящиеся к расчету характеристик интегральных преобразований случайных процессов, получим

$$R_u(\tau) = K_u(t_1, t_2)\Big|_{t_1 - t_2 = \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t_1-\theta) h_2^T(t_2-\theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau-\theta) h_2^T(-\theta)\, d\theta \qquad (4.I5)$$

$$R_y(\tau) = K_u(t_1, t_2)\Big|_{t_1 - t_2 = \tau} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t_1-\theta) K_u(\theta, \theta_2) h_1^T(t_2-\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\theta) h^T(-\theta)\, d\theta, \qquad (4.I6)$$

где h – импульсная характеристика последовательного соединения формирующей и анализируемой системы, определяемая выражением

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau-\theta) h_2(\theta)\, d\theta . \qquad (4.I7)$$

Далее

$$R_{yu}(\tau) = K_{yu}(t_1,t_2)\Big|_{t_1-t_2=\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t_1-\theta)K_u(\theta,t_2)\,d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\theta)h_2^{T}(-\theta)\,d\theta \tag{4.18}$$

Применяя к выражениям (4.15)-(4.18) преобразование Фурье и учитывая свойства преобразования Фурье, получим матрицы спектральных плотностей

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= H_2(j\omega)\,\tilde{H}_2(j\omega), \\ S_y(\omega) &= H(j\omega)\,\tilde{H}(j\omega), \\ S_{yu}(\omega) &= H(j\omega)\,\tilde{H}_1(j\omega), \end{aligned} \tag{4.19}$$

где $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ - частотные характеристики анализируемой и формирующей систем, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= C_1(j\omega E - A_1)^{-1}B_1, \\ H_2(j\omega) &= C_2(j\omega E - A_2)^{-1}B_2, \end{aligned} \tag{4.20}$$

Матрица $H(j\omega)$, являющаяся частотной характеристикой последовательного соединения этих систем, равна

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)\,H_2(j\omega). \tag{4.21}$$

Знак $\sim$ в формулах (4.19) означает транспонирование матрицы с заменой элементов на комплексно-сопряженные.

Подставляя выражение (4.21) в (4.19), получим

$$S_y(\omega) = H_1(j\omega) S_u(\omega) H_1^{\sim}(j\omega),$$

$$S_{yu}(\omega) = H_1(j\omega) S_u(\omega), \qquad (4.22)$$

которые полезны для расчетов в том случае, когда статистические характеристики входного процесса $u(t)$ задаются матрицей его спектральных плотностей $S_u(\omega)$

4.3. Примеры анализа непрерывных стохастических линейных систем

Пример I. Исторически, самым первым примером непрерывной стохастической системы была система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bw'(t),$$
$$y(t) = cx(t), \qquad (4.23)$$

где $w'(t)$ - белый гауссов шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_w(t_1,t_2) = \delta(t_1 - t_2)$, параметры $a = -\alpha\,(\alpha > 0)$, b, c - постоянны. Этот пример появился в задаче о броуновском движении частицы при наличии трения. Дифференциальное уравнение в (4.23) называется уравнением Ланжевена, а его решение - процессом Орнштейна-Уленбека. Уравнения (4.23) описывают также процесс на выходе RC - фильтра низкой частоты при воздействии на его вход белого шума.

Используя формулы предыдущего раздела, получим следующие выражения для статистических характеристик процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$m_x(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} x(t_0),$$

$$D_x(t) = e^{-2\alpha(t-t_0)}\left[D_x(t_0) - \frac{b^2}{2\alpha}\right] + \frac{b^2}{2\alpha}$$

$$K_x(t_1, t_2) = D_x(t) e^{-\alpha(t_1 - t_2)},$$
$$m_y(t) = c m_x(t),$$
$$D_y(t) = c^2 D_x(t), \tag{4.24}$$
$$K_y(t_1, t_2) = c^2 K_x(t_1, t_2),$$
$$K_{xy}(t_1, t_2) = c K_x(t_1, t_2).$$

В установившемся режиме (при $t_0 \to -\infty$) процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются стационарными процессами с нулевым математическим ожиданием и корреляционными функциями

$$R_x(\tau) = K_x(t_1, t_2)\Big|_{t_1 - t_2 = \tau} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|},$$

$$R_y(\tau) = K_y(t_1, t_2)\Big|_{t_1 - t_2 = \tau} = \frac{c^2\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \tag{4.25}$$

$$R_{xy}(\tau) = K_{xy}(t_1, t_2)\Big|_{t_1 - t_2 = \tau} = \frac{c\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Применяя преобразование Фурье к (4.25), получим соответствующие спектральные плотности

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \tag{4.26}$$

$$S_y(\omega)=\frac{c^2 \sigma^2}{\alpha^2+\omega^2},$$
$$S_{xy}(\omega)=\frac{c\sigma^2}{\alpha^2+\omega^2} \qquad (4.26)$$

Из следствия теоремы 3.I установившиеся составляющие процессов $x(t)$ и $y(t)$ являются нормальными случайными процессами.

Пример 2. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями состояния (4.I), в которых матрицы A_1, B_1, C, постоянны и равны

$$A_1=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}. \qquad (4.27)$$

Эта система стационарна. Для того чтобы выяснить, является ли эта система устойчивой, решим характеристическое уравнение матрицы A_1

$$|A_1-\lambda E|=0. \qquad (4.28)$$

Имеем

$$|A_1-\lambda E|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -3\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8.$$

Подставляя это выражение в (4.28) и решая характеристическое уравнение, получим корни

$$\lambda_1=-4, \qquad \lambda_2=-2,$$

Поскольку эти корни отрицательны, рассматриваемая система устойчива (см. [I] с. 63).

Предположим, что на вход этой системы поступает процесс Эрнштейна-Уленбека, рассмотренный в предыдущем примере с параметрами $\alpha = \beta = c = 1$. Требуется найти характеристики установившейся составляющей выхода системы $y(t)$.

Так как установившиеся составляющие процессов $y(t)$ и $u(t)$ являются стационарными процессами и так как спектральная плотность установившейся составляющей процесса $u(t)$ известна (см. (4.26))

$$S_u(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \qquad (4.29)$$

то наиболее короткий путь решения поставленной задачи состоит в определении спектральных матриц $S_y(\omega)$ $S_{yu}(\omega)$ по формулам (4.22) и нахождению $R_y(\tau)$ и $R_{yu}(\tau)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathcal{F}\{S_y(\omega)\}, \\ R_{yu}(\tau) &= \mathcal{F}\{S_{yu}(\omega)\}. \end{aligned} \qquad (4.30)$$

Подставляя в (4.22) выражение (4.29) для $S_u(\omega)$ и выражение для частотной характеристики системы (см. [I] с. 70)

$$H_1(j\omega) = H_1(p)\Big|_{p=j\omega} = C_1(j\omega E - A_1)^{-1} B_1 =$$

$$= \frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)} \begin{pmatrix} 3(j\omega+1) \\ j\omega+3 \end{pmatrix},$$

получим

$$S_y(\omega)=\frac{1}{(\omega^2+16)(\omega^2+4)}\begin{pmatrix} 9 & 3\dfrac{-j\omega+3}{-j\omega+1} \\ 3\dfrac{j\omega+3}{j\omega+1} & \dfrac{\omega^2+9}{\omega^2+1} \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

$$S_{yu}(\omega)=\frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{-j\omega+1} \\ \dfrac{j\omega+3}{\omega^2+1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что элементы матриц $S_y(z)$ и $S_{yu}(z)$ являются функциями аналитичными при всех комплексных z за исключением конечного числа полюсов, не лежащих на действительной оси. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{z\to\infty} S_y(z)=0, \qquad \lim_{z\to\infty} S_{yu}(z)=0.$$

В этих условиях для вычисления обратного преобразования Фурье можно воспользоваться формулой

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\begin{cases} i\sum\limits_{z_k \text{ в верхней полуплоскости}} \operatorname{Res}[F(z)e^{izt}, z_k] & \text{при } t>0, \\ -i\sum\limits_{z_k \text{ в нижней полуплоскости}} \operatorname{Res}[F(z)e^{izt}, z_k] & \text{при } t<0, \end{cases} \tag{4.33}$$

Подставляя (4.32) в (4.30) и используя (4.33), получим

$$\left\{R_y(\tau)\right\}_{11} = \frac{3}{4} e^{-2|\tau|} - \frac{3}{8} e^{-4|\tau|} ,$$

$$\left\{R_y(\tau)\right\}_{22} = \frac{16}{45} e^{-|\tau|} - \frac{5}{36} e^{-2|\tau|} - \frac{7}{360} e^{-4|\tau|} ,$$

$$\left\{R_y(\tau)\right\}_{12} = \left\{R_y(\tau)\right\}_{21} = \begin{cases} \frac{5}{12} e^{-2\tau} - \frac{7}{40} e^{-4\tau} & \text{при } \tau > 0 , \\ \frac{8}{15} e^{\tau} - \frac{1}{4} e^{2\tau} - \frac{1}{24} e^{4\tau} & \text{при } \tau < 0 , \end{cases}$$

$$\left\{R_{yu}(\tau)\right\}_{11} = \begin{cases} e^{-2\tau} - \frac{3}{5} e^{-4\tau} & \text{при } \tau > 0 , \\ \frac{2}{5} e^{\tau} & \text{при } \tau < 0 , \end{cases}$$

$$\left\{R_{yu}(\tau)\right\}_{21} = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-\tau} - \frac{1}{3} e^{-2\tau} - \frac{1}{15} e^{-4\tau} & \text{при } \tau > 0 , \\ \frac{4}{15} e^{\tau} & \text{при } \tau < 0 . \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Векторно-матричное представление систем скалярных случайных величин (случайных функций) и их характеристик позволяет использовать компактную форму описания таких величин и их линейных преобразований.

I. Случайной матрицей называется матрица

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (\text{П.I})$$

элементы a_{ij} которой являются случайными величинами.

В частности, случайным вектором (векторной случайной величиной) называется вектор (матрица-столбец)

$$x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T. \qquad (\text{П.2})$$

В соответствии с общепринятым определением случайной величины она является функцией элементов ω некоторого множества элементарных событий. В выражениях (П.I),(П.2) и в последующем аргумент ω при записи опускается во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений. Переменные $x, y, u, v,$ $w,$ используемые в рассматриваемых уравнениях стохастических систем, являются векторными случайными величинами.

2. Математическим ожиданием $M[A]$ матрицы A называется матрица, определяемая соотношением

$$M[A]=\begin{pmatrix} M[a_{11}] & M[a_{12}] & \dots & M[a_{1m}] \\ M[a_{21}] & M[a_{22}] & \dots & M[a_{2m}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M[a_{n1}] & M[a_{n2}] & \dots & M[a_{nm}] \end{pmatrix} \qquad (\text{П}.3)$$

3. В частности, математическим ожиданием векторной случайной величины (П.2) называется вектор, определяемый соотношением

$$m_x = M[x]. \qquad (\text{П}.4)$$

4. Если A, B, C - матрицы с неслучайными элементами и Z -случайная матрица, то выполняется соотношение

$$M[AZB+C] = AM[Z]B+C. \qquad (\text{П}.5)$$

При этом предполагается (как и везде далее), что все матрицы имеют соответствующие размеры, при которых определены записываемые операции.

Для случайных векторов x и y имеет место

$$M[Ax+By] = AM[x]+BM[y]. \qquad (\text{П}.6)$$

5. <u>Корреляционной матрицей</u> K_{xy} случайных векторов x и y называется матрица

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}^{T}] = (K_{x_i y_j}) \; (i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}), \qquad (\text{П}.7)$$

элементами которой являются корреляционные моменты

$$\mathcal{K}_{x_i y_j} = M[\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{y}_j] \qquad (\text{П.8})$$

составляющих x_i и y_i соответственно.

6. <u>Дисперсионная матрица</u> D_x случайного вектора x определяется соотношением

$$D_x = K_{xx} = M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^T] = (\mathcal{K}_{x_i x_j}) \qquad (\text{П.9})$$

и в силу выполнения условий

$$\mathcal{K}_{x_i x_j} = \mathcal{K}_{x_j x_i} \qquad (i,j = \overline{1,n})$$

является симметричной.

7. Если x, y - случайные векторы A, B – неслучайные матрицы и векторы ξ, η - определяются выражениями

$$\xi = Ax, \qquad \eta = By, \qquad (\text{П.10})$$

то имеет место соотношение (доказывается непосредственным вычислением)

$$K_{\xi\eta} = AK_{xy}B^T \qquad (\text{П.11})$$

Из этого соотношения следуют

$$K_{\xi y} = AK_{xy}, \qquad K_{x\eta} = K_{xy}B^T; \qquad (\text{П.12})$$

$$D_\xi = A D_x A^T, \quad D_\eta = B D_y B^T \tag{П.13}$$

Перечисленные векторно-матричные представления и формулы для случайных величин очевидным образом распространяются и на случайные функции.

8. <u>Векторная случайная функция</u> $x(t)$ есть вектор (матрица-столбец)

$$x(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t))^T, \tag{П.14}$$

составляющие которого $x_i(t)$ являются скалярными случайными функциями аргумента t; в рассматриваемых задачах этот аргумент интерпретируется как время (в таком случае $x(t)$ называют также случайным процессом).

При рассмотрении непрерывных систем $t \in [0, T]$, включая $T = \infty$; в дискретном представлении $t = k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

Основные характеристики векторных случайных функций и соотношения между ними получаются из соответствующих соотношений для случайных величин с учетом того обстоятельства, что в качестве случайных величин x и y теперь рассматриваются значения $x(t_1)$, $y(t_2)$ случайных функций $x(t)$, $y(t)$, взятые для различных или совпадающих значений аргумента t. При этом принимается во внимание возможная зависимость от того же аргумента и неслучайных матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$.

9. <u>Математическим ожиданием</u> $m_x(t)$ векторной случайной функции $x(t)$ называется вектор

$$m_x(t) = M[x(t)] \tag{П.15}$$

10. <u>Матричная взаимная корреляционная функция</u> $K_{xy}(t_1, t_2)$ случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ есть матрица вида

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{y}^{T}(t_2)\right]. \qquad (\Pi.16)$$

II. <u>Матричная корреляционная функция</u> $K_x(t_1, t_2)$ (автокорреляционная) случайной функции $x(t)$ получается из выражения (П.I6) при $y(t)=x(t)$ и определяется формулой

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}^{T}(t_2)\right]. \qquad (\Pi.17)$$

I2. <u>Матричная дисперсионная функция</u> $D_x(t)$ соответствует $t_1 = t_2 = t$ и дается выражением

$$D_x(t) = K_x(t, t) = M\left[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^{T}(t)\right]. \qquad (\Pi.18)$$

Диагональные элементы матрицы определяют дисперсии

$$D_{x_i} = M\left[\overset{\circ}{x}{}_i^2\right]$$

составляющих $x_i(t)$ вектора $x(t)$.

I3. Если векторные случайные функции $x(t), y(t)$ и $\xi(t)$, $\eta(t)$ связаны соотношением вида (II.I0)

$$\xi(t) = A(t)x(t), \qquad \eta(t) = B(t)y(t), \qquad (\Pi.19)$$

то имеют место равенства (аналогичные (П.II)-(П.I3))

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = A(t_1)K_{xy}(t_1, t_2)B^{T}(t_2); \qquad (\Pi.20)$$

$$K_{\xi y}(t_1,t_2) = A(t_1)\,K_{xy}(t_1,t_2),$$
$$K_{x\eta}(t_1,t_2) = K_{xy}(t_1,t_2)\,B^{T}(t_2); \qquad (\Pi.21)$$

$$D_{\xi}(t) = A(t)D_x(t)A^{T}(t), \quad D_{\eta}(t) = B(t)D_y(t)B^{T}(t). \qquad (\Pi.22)$$

14. Векторная случайная функция $x(t)$ называется стационарной, если выполняются условия

$$m_x(t) = m_x = \mathrm{const} \qquad (\Pi.23)$$

и для любого t^*

$$K_x(t_1+t^*, t_2+t^*) = K_x(t_1,t_2). \qquad (\Pi.24)$$

Последнему условию удобно придать другой вид, полагая $t^* = -t_1$ и вводя функцию R_x одной переменной $\tau = t_2 - t_1$. Тогда из соотношения (П.24) следует

$$K_x(t_1,t_2) = K_x(0, t_2-t_1) = R_x(\tau). \qquad (\Pi.25)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лекоаченко В.А., Понырко С.А. Математические основы теории систем: Учеб . пособие. ЛИАП, 1983.

2. Лившиц Н.А., Виноградов В.Н., Голубев Г.А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. М., Советское радио, 1974.

3. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М., Наука, 1975.

4. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М., Машиностроение, 1962.

5. Антонью А. Цифровые фильтры; анализ и проектирование. М., Радио и связь, 1983.

6. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., Связь, 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Св.план 1986 г. поз. 514

Лексаченко Валентин Александрович
Пекурло Сергей Афанасьевич

Математические основы
теории систем
(стохастические системы)

Учебное пособие

Редактор Н.В.Гашикова Корректор Т.М.Москаленко

Подписано в печать 31.07.86. М-25759. Формат 60х84 1/16
Бумага тип.№ 3. Печать офсетная. Объем 6,0 п.л.
Уч.-изд.л. 6,0 Тираж 400 экз. Зак. № 423 Цена 20 к.

Ротапринт ЛИАП 190000, Ленинград, ул.Герцена,67