

В. А. Трудоношин, Н. В. Пивоварова

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

САПР

**СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО
ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

В 9 книгах

**В. А. Трудоношин
Н. В. Пивоварова**

4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Под редакцией
доктора технических наук,
профессора, лауреата
Государственной премии СССР
И. П. Норенкова

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
технических вузов

Минск
«Вышэйшая школа»
1988

ББК 30.2-05я73

С19

УДК 658.512.22.011.56(075.8)

Печатается по книге: Трудоношин В. А., Пивоварова Н. В. Системы автоматизированного проектирования. Кн. 4. Математические модели технических объектов.— М.: Высш. шк., 1986.

Рецензенты: кафедра «Конструирование и производство интегральных микросхем» Московского института электронной техники (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Г. Г. Казеннов); д-р техн. наук, проф. В. Я. Петров (Московский институт гражданской авиации).

САПР: Система автоматизир. проектирования:
С19 Учеб. пособие для втузов. В 9 кп. Кн. 4. Математические модели технических объектов / В. А. Трудоношин, Н. В. Пивоварова; Под ред. И. П. Норенкова.— Мн.: Выш. шк., 1988.—159 с.: ил.

ISBN 5—339—00027—3.

В четвертой книге пособия «Системы автоматизированного проектирования» рассматриваются вопросы моделирования систем с распределенными параметрами на основе методов конечных разностей и конечных элементов. Для объектов с сосредоточенными параметрами приводятся примеры эквивалентных схем и методов получения математических моделей: табличный, узловой, переменных состояния.

С $\frac{2109000000-026}{М304(03)-88}$ 28—88

ББК 30.2-05я73

© Издательство «Высшая школа», 1986

© Оформление. Издательство «Высшая школа», 1988, с изменениями

ISBN 5—339—00027—3

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании технических объектов можно выделить две основные группы процедур: анализ и синтез. Для синтеза характерно использование структурных моделей (см. книгу 6), для анализа — использование функциональных моделей. Методы решения моделей излагаются в книге 5. В САПР анализ выполняется математическим моделированием. Математическое моделирование — процесс создания модели и оперирование ею с целью получения сведений о реальном объекте. Альтернативой математического моделирования является физическое макетирование, но у математического моделирования есть ряд преимуществ: меньшие сроки на подготовку анализа; значительно меньшая материалоемкость, особенно при проектировании крупногабаритных объектов; возможность выполнения экспериментов на критических режимах, которые привели бы к разрушению физического макета, и др.

Математическая модель (ММ) — совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т. д.) и связей между ними, отражающих важнейшие для проектировщика свойства проектируемого технического объекта.

Моделирование большинства технических объектов можно выполнять на микро-, макро и метауровнях, различающихся степенью детализации рассмотрения процессов в объекте.

Математической моделью технического объекта на микроуровне является система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процессы в сплошной среде с заданными краевыми условиями. Система уравнений, как правило, известна (уравнения Ламе для механики упругих сред; уравнения Навье —

Стокса для гидравлики; уравнения теплопроводности для термодинамики и т. д.), но точное решение ее удается получить лишь для частных случаев, поэтому первая задача, возникающая при моделировании, состоит в построении приближенной дискретной модели. Для этого используются методы конечных разностей и интегральных граничных уравнений, одним из вариантов последнего является метод граничных элементов. Так как получаемая при дискретизации пространства аппроксимирующая система алгебраических уравнений имеет высокий порядок, то при моделировании достаточно сложных технических объектов приходится принимать ряд допущений и упрощений и переходить к моделированию на макроуровне.

Математической моделью технического объекта на макроуровне является система ОДУ с заданными начальными условиями. В основе ММ лежат компонентные уравнения отдельных элементов и топологические уравнения, вид которых определяется связями между элементами. Предпосылкой создания единого математического и программного обеспечения анализа на макроуровне являются аналоги компонентных и топологических уравнений физически однородных подсистем, из которых состоит технический объект. Для получения топологических уравнений используются формальные методы. Основными методами получения ММ объектов на макроуровне являются следующие методы: обобщенный, табличный, узловый и переменных состояния. Методы отличаются друг от друга видом и размерностью получаемой системы уравнений, способом дискретизации компонентных уравнений реактивных ветвей, допустимыми типами зависимых ветвей. Для сложных технических объектов размерность ММ становится чрезмерно высокой, и для моделирования приходится переходить на метауровень.

На метауровне моделируют в основном две категории технических объектов: объекты, являющиеся предметом исследований теории автоматического управления, и объекты, являющиеся предметом теории массового обслуживания. Для первой категории объектов возможно использование математического аппарата макроуровня, для второй категории объектов используют методы событийного моделирования.

1. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МИКРОУРОВНЕ

1.1. Краевые задачи при проектировании технических объектов

Проектирование многих технических объектов связано с необходимостью анализа непрерывных физических процессов, математическим описанием которых являются дифференциальные уравнения в частных производных. Примером тому служат современные летательные аппараты, при проектировании и расчете которых широко используется анализ подобных моделей.

Примеры уравнений, составляющих основу моделей объектов на микроуровне. Первая важная задача проектирования летательного аппарата — определение прочности узлов и элементов конструкции при различных видах нагружения. Поэтому исследование напряженного состояния деталей конструкции и связанные с ним расчеты на прочность относятся к наиболее ответственным в самолетостроении.

Напряженное состояние деталей конструкции в зависимости от геометрии исследуемого узла, вида приложенной нагрузки и свойств материала описывается дифференциальными уравнениями различного вида. Любое из этих уравнений может быть получено из общего квазигармонического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (1.1)$$

где x, y, z — пространственные координаты; φ — искомая непрерывная функция; K_x, K_y, K_z — коэффициенты; Q — внешнее воздействие.

В двухмерном случае при $K_x = K_y = 1$ уравнение (1.1) сводится к уравнению, описывающему напряженное

состояние, возникающее в поперечном сечении упругого однородного стержня под воздействием крутящего момента M :

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + 2E\theta = 0, \quad (1.2)$$

где E — модуль сдвига материала стержня; θ — угол закручивания на единицу длины, а функция φ — функция, связанная с напряжениями сдвига τ_x и τ_y уравнениями

$$\tau_x = \partial \varphi / \partial y; \quad \tau_y = \partial \varphi / \partial x. \quad (1.3)$$

В (1.2) в явном виде не входит крутящий момент, связанный с искомой функцией напряжения φ уравнением

$$M = 2 \int_S \varphi dS,$$

где S — площадь рассматриваемого сечения.

Вторая важная задача проектирования летательного аппарата — изучение его аэродинамических свойств. Решение этой задачи связано с исследованием процессов обтекания газом поверхностей произвольной формы. Наиболее общими уравнениями, описывающими этот процесс, являются уравнения Навье — Стокса, которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} &= F_z - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где u , v , ω — проекции вектора скорости; F_x , F_y , F_z — проекции вектора силы на оси координат; ρ — плотность; p — давление; $\nu = \mu/\rho$ (μ — коэффициент вязкости).

- **Примечание.** Система уравнений (1.4) незамкнутая. Для решения ее следует доопределить с помощью уравнения неразрывности, которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где t — время.

Третья задача проектирования летательных аппаратов — расчет тепловых режимов работы деталей и узлов конструкции. Одним из основных аспектов задачи является определение температурных полей, имеющих место в конструкциях.

- **Примечание.** Знание температурных полей необходимо для вычисления количества теплоты, подводимой к телу или отводимой от него. Кроме того, температурные поля влияют на распределение напряжений в конструкциях. Это обстоятельство особенно важно учитывать при проектировании вращающихся элементов летательных аппаратов.

Температурное поле в сплошной среде описывается уравнением теплопроводности. Последнее может быть получено из уравнения (1.1), если под функцией φ понимать температуру T , а под коэффициентом K — коэффициент теплопроводности λ . Так, в двухмерном случае при условии, что коэффициенты теплопроводности λ_x и λ_y по соответствующим направлениям не зависят от координат, стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0, \quad (1.6)$$

где Q — источник теплоты внутри тела, который считается положительным, если теплота подводится к телу.

Сформулированные выше задачи — типичные для многих областей техники. Так, задачу исследования механических напряжений, возникающих в конструкциях, необходимо решать при проектировании мостов, арок, опор электропередачи и т. д. Рост быстроходности и удельной мощности тепловых двигателей вызывает необходимость более тщательного, чем ранее, исследования проблем механической прочности и тепловых режимов работы их деталей. Аналогичные проблемы возникают в автомобиле- и турбиностроении. Проектирование дамб, плотин, дренажных и оросительных каналов невозможно

без тщательного анализа течения грунтовых вод. Последняя задача является частным случаем сформулированной выше задачи о течении жидкостей и газов. В градостроительстве при проектировании системы водоснабжения городов необходим анализ течения грунтовых вод.

Анализ течения жидкого или газообразного теплоносителя на основе уравнений Навье — Стокса проводится при проектировании ядерных реакторов. Кроме того, особо важная роль при проектировании ядерных установок отводится расчету тепловыделяющей системы, математической моделью (ММ) которой является нестационарное уравнение теплопроводности. В этом случае в уравнении (1.6) дополнительно появляется член, описывающий изменение искомого температурного поля во времени. При анализе тепловых процессов в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛх), например в высокотемпературных газоохлаждаемых реакторах, уравнение теплопроводности удобнее записывать в сферических координатах в виде

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -R + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (1.7)$$

где C_p — удельная теплоемкость материала ТВЭЛов; R — удельная ядерная мощность.

Краевые условия. Уравнения (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) имеют множество решений. Для получения единственного решения необходимо задавать *краевые условия* (сведения об искомым непрерывных функциях на границах рассматриваемых областей — *граничные условия*, а в случае нестационарных задач — значения этих же функций в начальный момент времени — *начальные условия*). Исходное дифференциальное уравнение в частных производных вместе с краевыми условиями носит название дифференциальной *краевой задачи* и представляет собой ММ исследуемого объекта.

Граничные условия в краевых задачах могут задаваться различными способами.

На границе рассматриваемой области можно задать: а) значение искомой функции; б) значения производных по пространственным координатам от искомой функции; в) уравнение баланса потоков. В случаях а) — в) говорят о граничных условиях *первого*, *второго* и *третьего* рода соответственно.

Для уравнений теплопроводности (1.6) и (1.7) чаще задают граничные условия первого и третьего рода. Другими словами, на границе с рассматриваемой областью задаются либо температура $T(x)=T(c)$, либо условия теплообмена с внешней средой. При этом если на границе области имеет место конвективный теплообмен, то граничное условие третьего рода записывается в виде

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha(T - T_*) = 0, \quad (1.8)$$

где α — коэффициент теплообмена, в общем случае являющийся функцией температуры; T_* — температура окружающей среды.

Если на границе задан поток q теплоты, то граничное условие

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + q = 0, \quad (1.9)$$

где поток q считается положительным, если теплота отводится от рассматриваемого объекта.

Поток q теплоты и конвективный теплообмен не могут задаваться одновременно на одном и том же участке границы. В частном случае, когда граница теплоизолирована, т. е. конвективный теплообмен отсутствует и поток теплоты равен нулю, имеет место граничное условие второго рода:

$$\partial T / \partial x = 0; \quad \partial T / \partial y = 0.$$

Граничные условия для уравнений Навье—Стокса также могут быть весьма разнообразными. Например, в задаче об обтекании вязкой жидкостью или газом поверхности произвольной формы обычно задаются граничные условия первого рода, причем на границе необходимо задавать значения компонент вектора скорости, плотность и давление.

Приближенные модели объектов на микроуровне. Точное решение краевых задач удается получить лишь для немногих частных случаев. Поэтому общий способ их решения, в том числе и в САПР, заключается в использовании различных приближенных моделей. В настоящее время наиболее широкое распространение получили модели на основе интегральных уравнений и модели на основе метода сеток.

Основная идея построения модели на основе интегральных уравнений заключается в переходе от исходного дифференциального уравнения в частных производных к эквивалентному интегральному уравнению, подлежащему дальнейшим преобразованиям.

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области — узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

Этап 1. Построение сетки в заданной области (дискретизация задачи).

Этап 2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи).

Этап 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Наиболее часто в составе САПР используются два метода сеток: 1) метод конечных элементов (МКЭ); 2) метод конечных разностей (МКР). Эти методы отличаются друг от друга на этапах 1 и 2 алгоритма. На этапе 3 методы практически идентичны.

■ **Примечание.** Ниже будут рассмотрены этапы 1 и 2 алгоритма метода сеток, а этап 3 будет подробно изложен в книге 5.

1.2. Метод конечных элементов

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных свойств, как устойчивость, сходимость и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее МКЭ

активно развивается, с его помощью без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов и программ, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

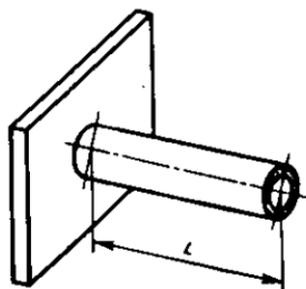


Рис. 1.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием теплового потока.

К основным преимуществам МКЭ относят доступность и простоту его понимания и применимость метода для задач с произвольной формой области решения, возможность создания на основе метода высококачественных универсальных программ для ЭВМ.

В МКЭ исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти — *конечные элементы*. Искомая непрерывная функция аппроксимируется кусочно-непрерывной, определенной на множестве конечных элементов. Аппроксимация может задаваться произвольным образом, но чаще всего для этих целей используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах на границах элементов.

● **Пример использования МКЭ для расчета одномерного температурного поля в однородном стержне.** Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рис. 1.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена α и температура окружающей среды T_* . Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

Температурное поле в стержне описывается уравнением теплопроводности (1.6), которое в одномерном приближении имеет вид

$$\lambda_x (d^2T/dx^2) = 0. \quad (1.10)$$

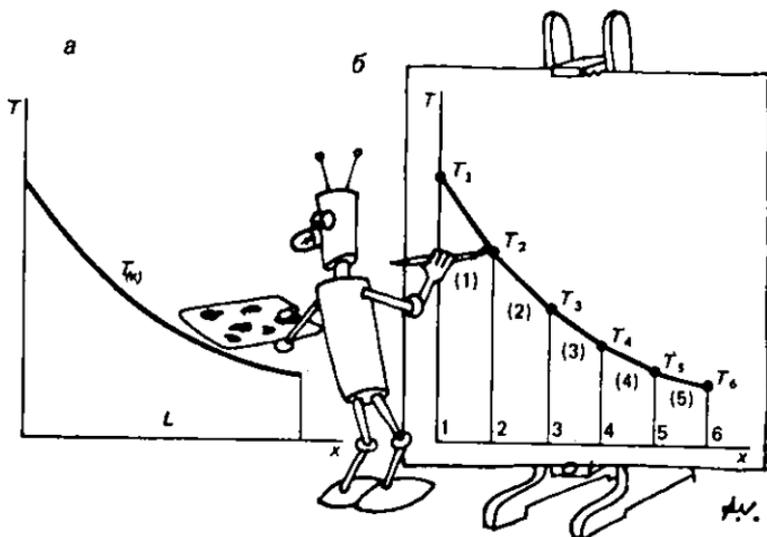


Рис. 1.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ.

Крайевые условия определяются уравнениями:

$$\lambda_x (dT/dx) + q = 0 \text{ при } x = 0; \quad (1.11a)$$

$$\lambda_x (dT/dx) - \alpha(T - T_*) = 0 \text{ при } x = L. \quad (1.11б)$$

Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рис. 1.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 1.2, б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения $T_1 - T_6$, которые в общем случае сначала неизвестны и подлежат определению в МКЭ.

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двухмерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо-, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, кото-

рые также могут иметь прямолнейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов.

Этап 1. Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы).

Этап 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)}\mathbf{R} + A_0, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{A}^{(e)}$ — вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 — свободный член; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора $\mathbf{A}^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через *вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции* и координаты узлов n , проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{N}^{(e)}$ — матрица-строка, элементы которой называют *функциями формы* конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.13), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = \mathbf{N}\Phi. \quad (1.14)$$

Система (1.14) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор Φ в (1.4) вначале неизвестен. Его определение — наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора Φ . Один из алгоритмов основан на минимизации

функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Этап 1. Выбор функционала F , зависящего для стационарных задач от искомой функции φ и ее частных производных $\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z$, по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) dV, \quad (1.15)$$

где V — объем.

Функционал F представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам:

$$F = \sum_{e=1}^N F^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(\varphi^{(e)}, \dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}) dV^{(e)}, \quad (1.16)$$

где N — число элементов.

Этап 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.13) в (1.16) и вычисление производных $\dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}$ по формулам вида

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \partial\varphi^{(e)} / \partial x = (\partial N^{(e)} / \partial x) \Phi^{(e)}.$$

Этап 3. Минимизация по вектору Φ функционала F . Для этого составляются уравнения

$$\partial F^{(e)} / \partial \Phi^{(e)} = 0. \quad (1.17)$$

Суммирование выражений (1.17) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\Phi = B, \quad (1.18)$$

где K — матрица коэффициентов — *матрица жесткости*; B — *вектор нагрузки*.

Этап 4. Решение системы (1.18), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора Φ подставляют в (1.14), после чего значение функции φ легко вычисляется в любой точке заданной области.

■ **Примечание.** Каждый из четырех этапов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

Выделение конечных элементов. Разбиение области на элементы — важный этап в МКЭ. От качества раз-

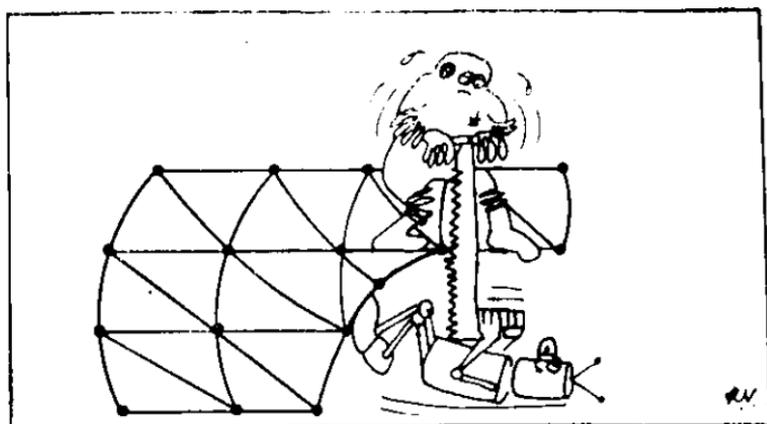


Рис. 1.3. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

биения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы. Возможность легко варьировать размерами элементов — важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.).

Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (подконструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) — следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумера-

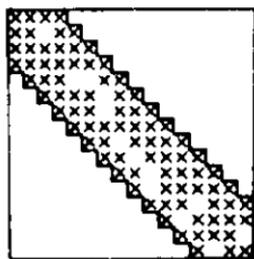


Рис. 1.4. Матрица ленточной структуры.

цин имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений.

Дело в том, что матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, — сильно разреженная матрица ленточной структуры. Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали (рис. 1.4). Целое число L ,

представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется *шириной полосы*. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит, в свою очередь, от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних.

Под *числом степеней свободы* понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двухмерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы — M , то ширина полосы

$$L = (N + 1)M.$$

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области.

На рис. 1.5 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рис. 1.5, а) $N = 14$, при втором (рис. 1.5, б) $N = 5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6;

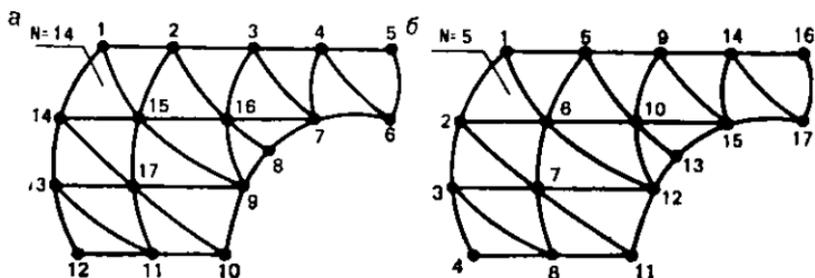


Рис. 1.5. Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы.

при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 1.5, б сокращает необходимый объем ОП почти в три раза по сравнению со случаем рис. 1.5, а.

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к определенным конечным элементам. Такого рода информация называется *топологической* и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы (см. ниже) долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении перечисленных в § 1.1 задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу которых составляют специальные программы, называемые *препроцессорами*. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ. **Алгоритм работы препроцессора**, как правило, состоит из следующих этапов:

Этап 1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Этап 2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Этап 3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ.

При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удается обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. **Алгоритмы формирования межузловых связей** строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий **алгоритм**:

Этап 1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

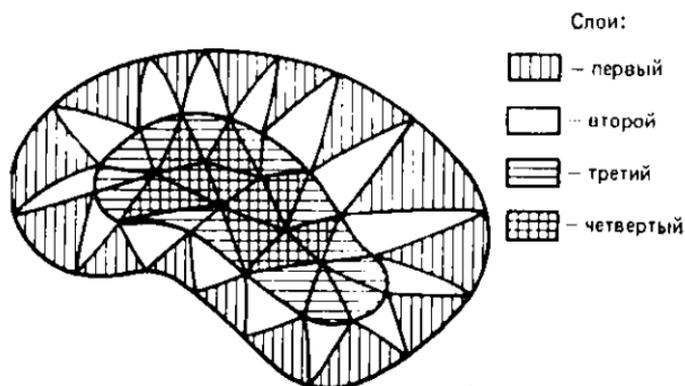


Рис. 1.6. Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы.

Этап 2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на этапе 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

Этап 3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 1.6. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Этап 1. Определение граничных узлов области.

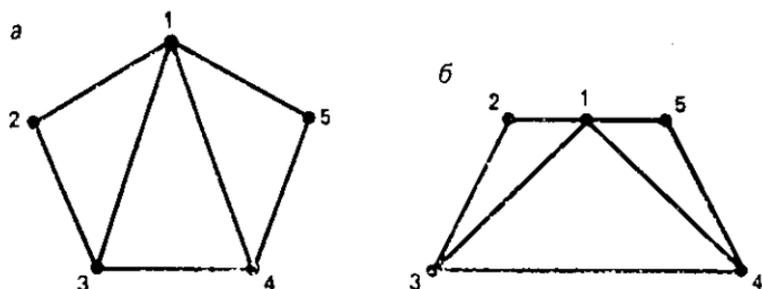


Рис. 1.7. Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы:

а - регулярная сетка; б - сетка в заданной области.

Этап 2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

Этап 3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

На рис. 1.7 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Для построения регулярной сетки используется следующий алгоритм:

Этап 1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

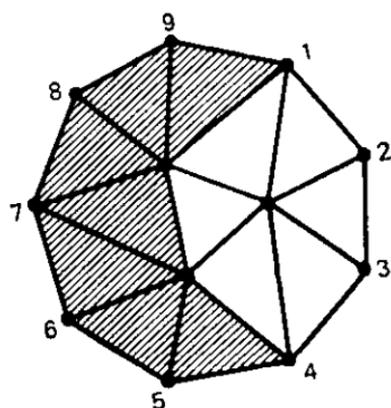


Рис. 1.8. Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами.

Этап 2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.

На рис. 1.8. проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схема соединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних точек области. Если в результате выполне-

ния алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы *симплекс-элементов* содержат константы и линейные члены; полиномы *комплекс-элементов* — константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы *мультиплекс-элементов* также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок, изображенный на рис. 1.9. При определении функции этого элемента для простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции φ аппроксимируется полиномом:

$$\varphi = a_1 + a_2x. \quad (1.19)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i , Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j. \end{aligned} \quad (1.20)$$

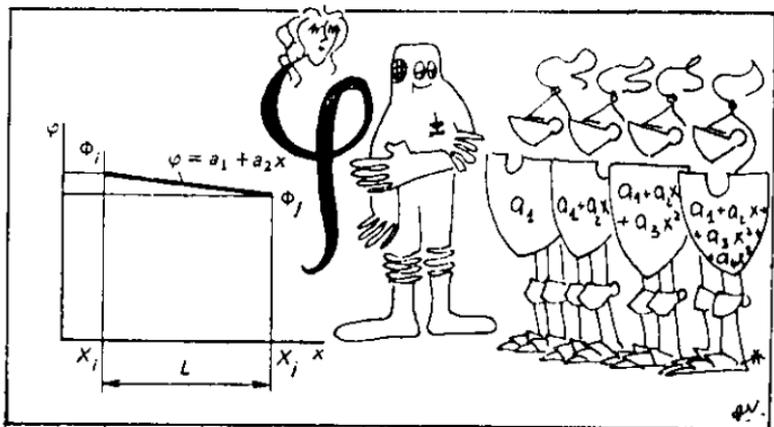


Рис. 1.9. Одномерный симплекс-элемент.

Подставив (1.20) в (1.19), получим

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i; \quad \Phi_j = a_1 + a_2 X_j. \quad (1.21)$$

Решив систему (1.21) относительно a_1 и a_2 , определим

$$a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (1.19), получим

$$\varphi = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L + [(\Phi_j - \Phi_i) / L] x. \quad (1.22)$$

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (1.22), представим его в форме

$$\varphi = [(X_j - x) / L] \Phi_i + [(x - X_i) / L] \Phi_j. \quad (1.23)$$

Члены уравнения (1.23), заключенные в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L. \quad (1.24)$$

С учетом обозначений (1.24) уравнение (1.23) принимает вид

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \quad (1.25)$$

или в матричной форме

$$\varphi = \mathbf{N} \Phi, \quad (1.26)$$

где $\mathbf{N} = [N_i, N_j]$ — матрица-строка; $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$ — вектор-столбец.

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Не представляет труда убедиться в наличии этого свойства у функций формы (1.24).

Двухмерный симплекс-элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двумерной области.

Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию φ внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y. \quad (1.27)$$

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 1.10). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2X_i + a_3Y_i; \\ \Phi_j &= a_1 + a_2X_j + a_3Y_j; \\ \Phi_k &= a_1 + a_2X_k + a_3Y_k, \end{aligned}$$

разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S) [(X_jY_k - X_kY_j)\Phi_i + (X_kY_i - X_iY_k)\Phi_j + \\ &\quad + (X_iY_j - X_jY_i)\Phi_k]; \\ a_2 &= (0,5/S) [(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S) [(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k], \end{aligned} \quad (1.28)$$

где S — площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

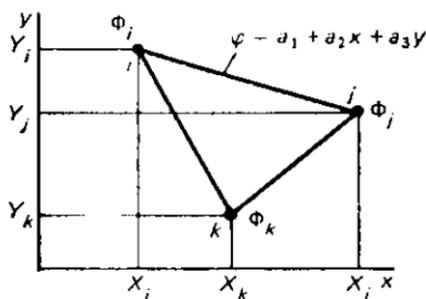


Рис. 1.10. Функция двухмерного симплекс-элемента.

Подставив (1.28) в (1.27) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (1.29)$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S) (a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= (0,5/S) (a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= (0,5/S) (a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (1.30)$$

и

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j; & a_j &= X_k Y_i - Y_k X_i; & a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i; \\ b_i &= Y_j - Y_k; & b_j &= Y_k - Y_i; & b_k &= Y_i - Y_j; \\ c_i &= X_k - X_j; & c_j &= X_i - X_k; & c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k , нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (1.25) для одномерного и (1.29) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

Аналогично рассмотренным примерам вычисляются функции всех прочих типов элементов, набор которых может пополняться и расширяться.

Объединение конечных элементов в ансамбль. Основу этого этапа составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 1.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 1.2, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (1.25).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (1.25), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели: для

$$\text{элемента } 1 \quad i=1; \quad j=2; \quad (1.31a)$$

$$\text{элемента } 2 \quad i=2; \quad j=3; \quad (1.31б)$$

$$\text{элемента } 3 \quad i=3; \quad j=4; \quad (1.31в)$$

$$\text{элемента } 4 \quad i=4; \quad j=5; \quad (1.31г)$$

$$\text{элемента } 5 \quad i=5; \quad j=6. \quad (1.31д)$$

Подставив значения номеров узлов (1.31) в (1.25), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3; \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)}T_3 + N_4^{(3)}T_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}T_4 + N_5^{(4)}T_5; \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)}T_5 + N_6^{(5)}T_6, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (1.24) значения произвольных номеров i, j также следует изменить в соответствии с (1.31). Тогда значения $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам

$$N_3^{(2)} = (x - X_2)/L^{(2)};$$

$$N_3^{(3)} = (X_4 - x)/L^{(3)}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}$ и $N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин $T_1 - T_6$ уравнения (1.32) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 1.11. Для обозначения узлов отдельных элементов по-прежнему используют

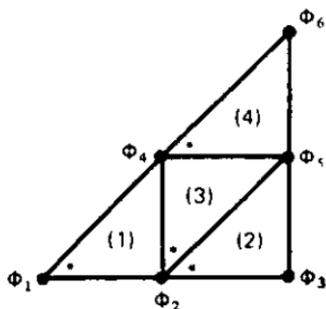


Рис. 1.11. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области.

ся номера i, j, k , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой) против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

$$\text{элемент 1 } i=1; \quad j=2; \quad k=4; \quad (1.33a)$$

$$\text{элемент 2 } i=2; \quad j=3; \quad k=5; \quad (1.33б)$$

$$\text{элемент 3 } i=2; \quad j=5; \quad k=4; \quad (1.33в)$$

$$\text{элемент 4 } i=4; \quad j=5; \quad k=6. \quad (1.33г)$$

Подставляя значения (1.33) в (1.29), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_4^{(1)}\Phi_4; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_5^{(2)}\Phi_5; \\ \varphi^{(3)} &= N_2^{(3)}\Phi_2 + N_5^{(3)}\Phi_5 + N_4^{(3)}\Phi_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (1.30) при вычислении функций формы элементов.

Система (1.34) — сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_5^{(2)}\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(3)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\varphi = \mathbf{N}\Phi. \quad (1.35)$$

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (1.34).

Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

Определение вектора узловых значений функций. Для этой цели, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некото-

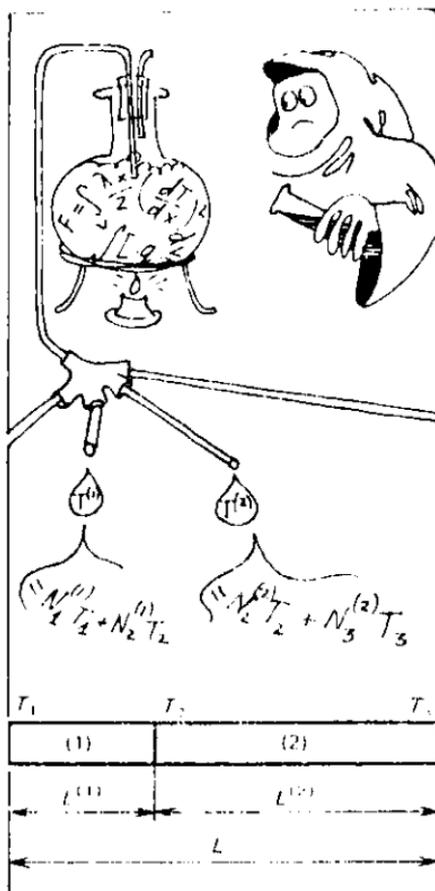


Рис. 1.12. Пример минимизации функционала при нахождении распределения температуры в стержне.

рого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

- Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне (см. рис. 1.12).

При указанном методе минимизируется функционал:

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha (T - T_*)^2] dS, \quad (1.36)$$

где V — объем тела; S — площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия (1.11). При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно) (рис. 1.12). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (1.37)$$

Функционал (1.36) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_{S_1} qTdS_1 + \int_{S_2} 0,5\alpha (T - T_*)^2 dS_2, \quad (1.38)$$

где S_1 и S_2 — площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (1.11а) и (1.11б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (1.38) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

$$\begin{aligned} \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV &= \int_{V_1} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \\ &+ \int_{V_2} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Производные в (1.39) вычисляются с учетом (1.37) и (1.24):

$$dT^{(1)}/dx = (-T_1 + T_2)/L^{(1)}; \quad dT^{(2)}/dx = (-T_2 + T_3)/L^{(2)}. \quad (1.40)$$

Подставив (1.40) в (1.39) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)}dx$, получим

$$\begin{aligned} \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV &= 0,5 \frac{\lambda_x^{(1)} S^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + \\ &+ 0,5 \frac{\lambda_x^{(2)} S^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Второе и третье слагаемые в (1.38) вычисляются просто, так как подынтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_1} qTdS_1 = qT_1S_1; \quad (1.42)$$

$$\int_{S_2} 0,5\alpha (T - T_*)^2 dS_2 = 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.43)$$

где S_1 и S_2 — площади поверхностей, на которых заданы q и α (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием выражений (1.41)–(1.43):

$$F = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qS_1T_1 + 0,5\alpha S_2(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.44)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)}\lambda_x^{(1)}/L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)}\lambda_x^{(2)}/L^{(2)}$.

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \partial F / \partial T_1 &= C^{(1)}T_1 + C^{(1)}T_2 + qS_1 = 0; \\ \partial F / \partial T_2 &= -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - C^{(2)}T_3 = 0; \\ \partial F / \partial T_3 &= -C^{(2)}T_2 + [C^{(2)} + \alpha S_2]T_3 - \alpha S_2T_* = 0, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \alpha S_2T_* \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

В общем виде (1.45) можно представить так:

$$KT = B,$$

что соответствует (1.18).

- **Примечание.** Матрица коэффициентов K в (1.45) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (1.45) можно определить узловы значения T_1, T_2, T_3 .

Из (1.44) и (1.45) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях. При этом алгоритм получения матрицы жесткости несколько отличается от описанного выше и состоит из следующих этапов:

Этап 1. Представление функционала F в виде суммы соответствующих функционалов для элементов.

Для рассмотренного примера $F = F^{(1)} + F^{(2)}$, причем

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \int_{V^{(1)}} [0,5C^{(1)}/L^{(1)}] (-T_1 + T_2)^2 dV^{(1)} + \int_{S_1} qT_1 dS_1; \\ F^{(2)} &= \int_{V^{(2)}} [0,5C^{(2)}/L^{(2)}] (-T_2 + T_3)^2 dV^{(2)} + \int_{S_2} 0,5\alpha(T_3 - T_*)^2 dS_2. \end{aligned}$$

Этап 2. Минимизация функционала каждого элемента отдельно (при этом вычисляются матрицы жесткости $K^{(e)}$ и векторы нагрузки $B^{(e)}$ для всех конечных элементов). В примере

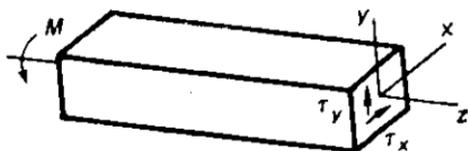


Рис. 1.13. Упругий стержень, находящийся под воздействием крутящего момента.

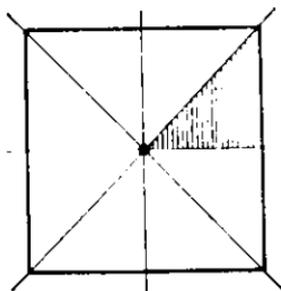


Рис. 1.14. Поперечное сечение стержня, находящегося под воздействием крутящего момента.

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial T} = \begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha S_2 T_* \end{bmatrix}.$$

Этап 3. Суммирование матриц жесткости и векторов нагрузки отдельных элементов [сумма приравнивается нулю, что позволяет получить систему (1.18)].

Минимизация специально подобранного функционала при определении вектора узловых значений широко используется при анализе прочности конструкций. При этом если в качестве степеней свободы выбраны напряжения, то минимизируется функционал, описывающий дополнительную работу системы. Если же степенями свободы выбраны перемещения, то минимизируется потенциальная энергия системы.

- Пример минимизации функционала в задаче о кручении стержня (рис. 1.13). Задача описывается уравнением (1.2), отыскание напряжений в сечении связано с минимизацией дополнительной работы системы. В случае крайних условий первого рода $\varphi=0$ соответствующий функционал имеет вид

$$F = \int_V \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2E\varphi\theta \right] dV. \quad (1.47)$$

Для определения напряжений необходимо знать форму сечения стержня. В случае квадратного сечения стержня из-за наличия осей симметрии при решении задачи достаточно рассмотреть 1/8 его (рис. 1.14).

Разбиение исследуемой части сечения стержня на элементы показано на рис. 1.11. (На практике такое разбиение стержня слишком грубое.) Функционал (1.47) представим суммой функционалов, относящихся к отдельным элементам сечения стержня: $F = \sum_{e=1}^4 F^{(e)}$.

Рассмотрим один из функционалов:

$$F^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \right)^2 - 2E\varphi^{(e)}\theta \right] dV^{(e)}. \quad (1.48)$$

Введя обозначения

$$g^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad g^{(e)t} = \left[\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \right],$$

преобразуем (1.48) к виду

$$F^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \left[\frac{1}{2} g^{(e)t} g^{(e)} - 2E\varphi^{(e)}\theta \right] dV^{(e)}. \quad (1.49)$$

С учетом (1.35) вектор $g^{(e)}$ запишется в виде:

$$g^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_6^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_6^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

или

$$g^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \Phi,$$

где $\mathbf{D}^{(e)}$ — матрица градиентов.

Подставив (1.50) в (1.49), получим

$$F^{(e)} = 0,5 \int_{V^{(e)}} \Phi^t \mathbf{D}^{(e)t} \mathbf{D}^{(e)} \Phi dV^{(e)} - 2E\theta \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)} \Phi dV^{(e)}.$$

Минимизация функционала $F^{(e)}$ приводит к уравнению

$$\int_{V^{(e)}} \mathbf{D}^{(e)t} \mathbf{D}^{(e)} dV^{(e)} \Phi = 2E\theta \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)t} dV^{(e)},$$

где

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{D}^{(e)t} \mathbf{D}^{(e)} dV^{(e)} \quad (1.51)$$

есть матрица жесткости, а

$$\mathbf{B}^{(e)} = 2E\theta \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)t} dV^{(e)} \quad (1.52)$$

есть вектор нагрузки отдельного элемента.

Вычисление по (1.51) и (1.52) проведем на примере первого элемента. С учетом первого уравнения системы (1.34) матрицу градиентов $\mathbf{D}^{(1)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= 0,5 \frac{1}{S^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_4^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $b_1^{(1)} = Y_2 - Y_4$; $b_2^{(1)} = Y_4 - Y_1$; $b_4^{(1)} = Y_1 - Y_2$;

$c_1^{(1)} = X_4 - X_2$; $c_2^{(1)} = X_1 - X_4$; $c_4^{(1)} = X_2 - X_1$.

Произведение матриц $\mathbf{D}^{(1)t} \mathbf{D}^{(1)}$ равно

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)t} \mathbf{D}^{(1)} &= \frac{1}{4S^{(1)} S^{(1)}} \times \\ &\times \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} + c_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} + c_{12}^{(1)} & 0 & b_{14}^{(1)} + c_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ b_{21}^{(1)} + c_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} + c_{22}^{(1)} & 0 & b_{24}^{(1)} + c_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}^{(1)} + c_{41}^{(1)} & b_{42}^{(1)} + c_{42}^{(1)} & 0 & b_{44}^{(1)} + c_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.53) \end{aligned}$$

где

$$b_{LM}^{(1)} = b_L^{(1)} b_M^{(1)}; \quad c_{LM}^{(1)} = c_L^{(1)} c_M^{(1)}.$$

Выражение (1.53) — постоянная величина и может быть вынесена из-под знака интеграла. С учетом сказанного и принимая для простоты толщину элемента равной 1, матрицу жесткости можно вычислить по формуле

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)t} \mathbf{D}^{(1)} \int_{V^{(1)}} dV^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)t} \mathbf{D}^{(1)} S^{(1)}. \quad (1.54)$$

Для определения вектора нагрузки (1.52) удобно воспользоваться интегральной формулой, позволяющей вычислять интегралы по площади двухмерных симплекс-элементов:

$$\int_S N_i^a N_j^b N_k^c dS = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2S. \quad (1.55)$$

В частном случае при $a=1, b=0, c=0$ формула имеет вид

$$\int_S N_i = \frac{1}{3!} 2S = \frac{S}{3}. \quad (1.56)$$

С учетом принятого допущения о единичной толщине элемента и формулы (1.56) вектор нагрузки $\mathbf{B}^{(1)}$ для первого элемента запишется в виде

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{2E\theta S^{(1)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные вычисления необходимо проделать и для всех остальных элементов области. Далее, принимая, что площади всех элементов равны, а свойства материала одинаковы, и объединяя уравнения для элементов, получим полную систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} + c_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} + c_{12}^{(1)} & 0 & b_{14}^{(1)} + c_{14}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} + c_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1+2+3)} + c_{22}^{(1+2+3)} & b_{23}^{(2)} + c_{23}^{(2)} & b_{24}^{(1+4)} + c_{24}^{(1+4)} \\ 0 & b_{32}^{(2)} + c_{32}^{(2)} & b_{33}^{(2)} + c_{33}^{(2)} & 0 \\ b_{41}^{(1)} + c_{41}^{(1)} & b_{42}^{(1+3)} + c_{42}^{(1+3)} & 0 & b_{44}^{(1+3+4)} + c_{44}^{(1+3+4)} \\ 0 & b_{52}^{(2+3)} + c_{52}^{(2+3)} & b_{53}^{(2)} + c_{53}^{(2)} & b_{54}^{(3+4)} + c_{54}^{(3+4)} \\ 0 & 0 & 0 & b_{64}^{(4)} + c_{64}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 3P \\ P \\ 3P \\ 3P \\ P \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{25}^{(2+3)} + c_{25}^{(2+3)} & 0 \\ b_{35}^{(2)} + c_{35}^{(2)} & 0 \\ b_{45}^{(3+4)} + c_{45}^{(3+4)} & b_{46}^{(4)} + c_{46}^{(4)} \\ b_{55}^{(2+3+4)} + c_{55}^{(2+3+4)} & b_{56}^{(4)} + c_{56}^{(4)} \\ b_{65}^{(4)} + c_{65}^{(4)} & b_{66}^{(4)} + c_{66}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 3P \\ P \\ 3P \\ 3P \\ P \end{bmatrix}.$$

где

$$b_{LM}^{(i+j+k)} = b_{LM}^{(i)} + b_{LM}^{(j)} + b_{LM}^{(k)} \text{ и } c_{LM}^{(i+j+k)} = c_{LM}^{(i)} + c_{LM}^{(j)} + c_{LM}^{(k)},$$

$$P = 2E\theta S/3;$$

$$S = S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = S^{(4)}.$$

При реализации МКЭ в САПР форма (1.54) матрицы жесткости элемента неэффективна с точки зрения затрат ОП. Действительно, матрицы жесткости отдельных элементов имеют ту же размерность, что и глобальная матрица жесткости системы, а большинство элементов матрицы нулевые. В САПР с целью сокращения затрат ОП из матриц жесткости исключают нулевые элементы, строя их в сокращенной форме. Такой метод построения матриц называют *методом прямой жесткости*. При этом исключается необходимость хранения матриц большой размерности, но возникает потребность в специальной процедуре кодирования узлов элементов.

Суть этой процедуры заключается в том, что сначала вычисляются матрицы жесткости элементов в сокращенной форме. Например, в рассмотренном выше примере матрица жесткости $K^{(1)}$ будет иметь вид

$$K^{(1)} = \frac{1}{4S^{(1)}} \begin{bmatrix} b_{ii}^{(1)} + c_{ii}^{(1)} & b_{ij}^{(1)} + c_{ij}^{(1)} & b_{ik}^{(1)} + c_{ik}^{(1)} \\ b_{ji}^{(1)} + c_{ji}^{(1)} & b_{jj}^{(1)} + c_{jj}^{(1)} & b_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(1)} \\ b_{ki}^{(1)} + c_{ki}^{(1)} & b_{kj}^{(1)} + c_{kj}^{(1)} & b_{kk}^{(1)} + c_{kk}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки также вычисляется в сокращенном виде:

$$B^{(1)} = \frac{2E\theta S^{(1)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Затем строкам и столбцам матриц жесткости отдельных элементов присписываются глобальные номера узлов и тем самым определяется их место в общей матрице жесткости системы. Аналогично производится формирование глобального вектора нагрузки.

Метод Галеркина — другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений — представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого

метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом применяется при решении задач, для которых не удается подобрать функционал для минимизации (например задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье — Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации ошибки $\varepsilon = Lu - f$ приближенного решения u исходного дифференциального уравнения $L\varphi - f = 0$, где L — дифференциальный оператор.

Для минимизации ε в заданной области G требуется выполнение равенства $\int_G N_i \varepsilon dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений

$$\int_G N_{\beta} L(\varphi) dG = 0 \text{ при } \beta = i, j, k, \dots,$$

где $L(\varphi)$ — левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию φ .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне (см. рис. 1.1), конечно-элементная модель которого представлена на рис. 1.13.

Применив метод Галеркина к (1.10), получим

$$\int_V N' \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = 0. \quad (1.57)$$

Подставим в (1.57) формулу дифференцирования произведений:

$$\begin{aligned} \int_V N' \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV &= \int_V \frac{d}{dx} \left(N' \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV - \\ &- \int_V \frac{dN'}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Интерполяционная функция T не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (1.58) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Так, второй интеграл в (1.58) можно представить в виде

$$\int_V \frac{dN^i}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)i}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}. \quad (1.59)$$

Вычислим в (1.59) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)i}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{X_j - x}{L^{(e)}} \\ \frac{x - X_l}{L^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.60)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \quad (1.61)$$

С учетом (1.60) и (1.61)

$$\int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)i}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{\lambda_x^{(e)}}{L^{(e)} L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} dV^{(e)} = \frac{S^{(e)} \lambda_x^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Первый интеграл в (1.58) на основании теоремы Остроградского — Гаусса преобразуется к виду

$$\int_V \frac{d}{dx} \left(N^i \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV = \int_S N^i \lambda_x \frac{dT}{dx} l_x dS, \quad (1.63)$$

где $l_x(dT/dx) = dT/dn$; n — внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия (1.11а) в точке $x=0$ для первого элемента интеграл (1.63) принимает вид

$$\int_S N^{(1)i} \lambda_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} \frac{X_2}{L^{(1)}} \\ -\frac{X_1}{L^{(1)}} \end{bmatrix} (-q) dS. \quad (1.64)$$

Подставив значения $X_1=0$, $X_2=L^{(1)}$ в (1.64), получим

$$\int_S N^{(1)i} \lambda_x^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

С учетом краевого условия (1.11б) в точке $x=L$ для второго элемента интеграл (1.63) запишется так:

$$\int_S N^{(2)} \lambda_x^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} dS = \int_S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-\alpha(T_3 - T_*)] dS = \\ = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha T_3 + \alpha T_*). \quad (1.66)$$

Просуммировав выражения вида (1.62) для первого и второго элементов и выражения (1.65) и (1.66) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)}C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} & \\ 0 & -C^{(2)}C^{(2)} + \alpha S_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ -\alpha S_2 T_* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.67)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Система (1.67) идентична системе (1.45), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала.

Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Φ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ **Примечание.** Основные особенности этого шага — большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.

Нестационарные краевые задачи. Во всех рассмотренных выше примерах МКЭ применялся для решения стационарных краевых задач. Алгоритм метода и особенности отдельных его этапов остаются неизменными и при решении нестационарных задач, в уравнениях которых присутствуют не только частные производные по пространственным координатам, но и частные производные по времени, как, например, в (1.4), (1.7). В этом случае член с частной производной по времени рассматривается как функция пространственных координат в каждый фиксированный момент времени, или, как принято говорить, на каждом шаге численного интегрирования по времени. Например, в рассмотренной выше задаче нестационарное температурное поле в стержне описывается уравнением

$$C_{p\rho} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.68)$$

В этом случае при вариационной формулировке задачи минимизации подлежит функционал

$$F = \int_V \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 2C_{p\rho} \frac{\partial T}{\partial t} T \right] dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} \alpha (T - T_*)^2 \right] dS. \quad (1.69)$$

Функционал (1.69) отличается от минимизированного выше функционала (1.36) наличием дополнительного слагаемого в объемном интеграле. Вычислим вклад этого слагаемого в результирующую систему уравнений. Для этого обозначим

$$F_1 = \int_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} T dV. \quad (1.70)$$

Принимая, что характеристики материала постоянны по всему объему стержня, перепишем (1.70) в виде $F_1 = D \int_V \frac{\partial T}{\partial t} T dV$, где $D = C_p \rho$.

Интеграл F_1 можно представить суммой интегралов, записанных для отдельных элементов:

$$F_1 = \sum_{e=1}^2 D^{(e)} \int_{V^{(e)}} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} T^{(e)} dV^{(e)}. \quad (1.71)$$

Используя соотношение $T^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$ и учитывая, что $\mathbf{N}^{(e)}$ является функцией только координат, производную по времени в (1.71) представим в виде

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} = \mathbf{N}^{(e)} \left(\frac{\partial \mathbf{T}^{(e)}}{\partial t} \right).$$

Тогда для отдельного элемента функционал F_1 записывается в форме

$$F_1^{(e)} = D^{(e)} \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \frac{\partial \mathbf{T}^{(e)}}{\partial t} dV^{(e)}. \quad (1.72)$$

Продифференцировав (1.72) по вектору $\mathbf{T}^{(e)}$ и приравняв результат нулю, получим

$$\frac{\partial F_1^{(e)}}{\partial \mathbf{T}^{(e)}} = D^{(e)} \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} dV^{(e)} \frac{\partial \mathbf{T}^{(e)}}{\partial t}. \quad (1.73)$$

Подставляя в объемный интеграл (1.73) соотношения для функций формы (1.24) и учитывая соотношение $dV^{(e)} = S^{(e)} dL^{(e)}$, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(e)} &= D^{(e)} \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)t} \mathbf{N}^{(e)t} dV^{(e)} = \\ &= D^{(e)} S^{(e)} \int_{L^{(e)}} \left[\frac{X_j - x}{L^{(e)}} \right] \left[\frac{X_j - x}{L^{(e)}} \quad \frac{x - X_l}{L^{(e)}} \right] dx = \\ &= \frac{1}{6} D^{(e)} S^{(e)} L^{(e)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

После суммирования по элементам и с учетом (1.74) функционал F_1 принимает вид

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2H^{(1)} & H^{(1)} & 0 \\ H^{(1)} & 2(H^{(1)} + H^{(2)}) & H^{(2)} \\ 0 & H^{(2)} & 2H^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \quad (1.75)$$

где $H^{(1)} = D^{(1)} S^{(1)} L^{(1)} / 6$ и $H^{(2)} = D^{(2)} S^{(2)} L^{(2)} / 6$.

Объединяя (1.75) с ранее полученным для той же задачи уравнением (1.45), результирующую систему уравнений для задачи (1.68) запишем в форме

$$\mathbf{G} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{B}. \quad (1.76)$$

■ **Примечание.** Методы решения системы (1.76) подробно рассмотрены в книге 5.

1.3. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей исторически начал развиваться раньше МКЭ и является старейшим методом решения краевых задач.

Алгоритм МКР состоит из этапов, традиционных для метода сеток:

Этап 1. Построение сетки в заданной области. В МКР используется сетка, задаваемая конечным множеством узлов. В узлах сетки определяются приближен-

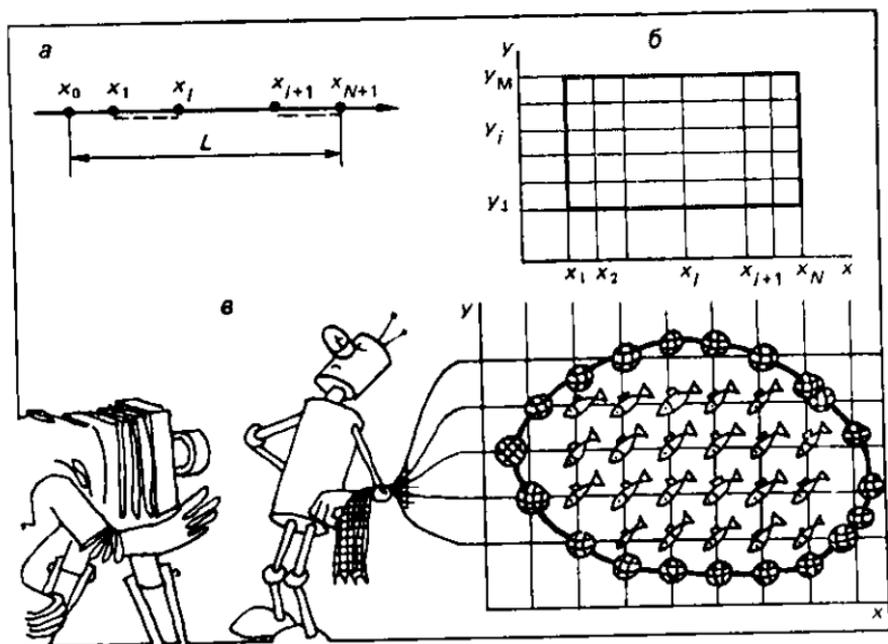


Рис. 1.15. Примеры построения сеток в МКР.

ные значения φ_h искомой функции φ . Совокупность узловых значений φ_h называют *сеточной функцией*.

Этап 2. Замена дифференциального оператора $L_\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$ в исходном дифференциальном уравнении разностным аналогом L_h , построенным по одной из схем, рассмотренных ниже. При этом непрерывная функция φ аппроксимируется сеточной функцией φ_h .

Этап 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

При кажущейся простоте алгоритма МКР его практическая реализация наталкивается на ряд трудностей. Для выяснения их природы целесообразно рассмотреть основные этапы МКР более подробно.

Построение сетки в заданной области. В МКР используются, как правило, регулярные сетки, шаг которых либо постоянен, либо меняется по несложному закону. Примеры построения сеток в МКР даны на рис. 1.15. Для одномерных областей построение сетки мало чем отличается от аналогичной процедуры в МКЭ. Отрезок длиной L разбивается на N частей (рис.

1.15, а). Расстояние между двумя соседними узлами называется *шагом сетки* $h_i = x_i - x_{i-1}$ при $i = 1, 2, \dots, N$.

При регулярной сетке шаг h_i — постоянная величина, равная $1/(N-1)$, где N — количество узлов сетки.

Для двумерной области подход к построению сетки существенно отличается от аналогичной процедуры в МКЭ. Пусть в качестве области изменения функции задан прямоугольник (рис. 1.15, б). Оси x и y разбиваются на отрезки, которые являются шагами сетки по соответствующим направлениям. Через точки деления проводятся прямые, параллельные осям координат. Совокупность точек пересечения (узлов) этих прямых и образует сетку в заданной двумерной области. Соседними узлами такой сетки называются узлы, расстояние между которыми равно шагу сетки по одной из осей.

Способ построения сетки не меняется и в том случае, если задана область произвольной формы (рис. 1.15, в). Узлы сетки, попавшие внутрь области, называются *внутренними узлами*. Точки пересечения прямых, образующих сетку, с границей области называются *граничными узлами*. Очевидно, что даже в случае постоянных шагов сетки по осям x и y в области имеются граничные узлы, отстоящие от ближайших к ним внутренних узлов на расстояние, меньшее шага по соответствующему направлению. Поэтому для двумерной области произвольной формы сетка в общем случае всегда является нерегулярной, причем особенности геометрии учитываются только в околограничных узлах.

Замена дифференциального оператора разностным аналогом. Эту процедуру легко проиллюстрировать на следующем простом примере. Пусть непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на отрезке (рис. 1.15, а), описывается дифференциальным уравнением

$$d\varphi/dx + A\varphi = 0, \quad (1.77)$$

где A — константа; задано также граничное условие $\varphi(0) = 1$ и при дискретизации области была построена сетка с постоянным шагом h .

Заменим дифференциальный оператор $L_\varphi = d\varphi/dx$ разностным:

$$L_{h+} = [\varphi(x+h) - \varphi(x)]/h, \quad (1.78)$$

где L_{h+} — правая разностная производная.

рис. 1.16 приведены шаблоны, соответствующие правой (рис. 1.16, а), левой (рис. 1.16, б) и центральной (рис. 1.16, в) разностным производным.

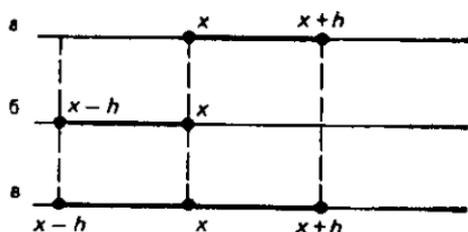


Рис. 1.16. Примеры шаблонов в одномерной области, соответствующих разностным производным:

а — правой; б — левой; в — центральной.

На рис. 1.17 приведены примеры шаблонов, наиболее часто используемых при аппроксимации дифференциальных операторов $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в двумерной области. Шаблон типа «крест» (рис. 1.17, а) соответствует аппроксимации:

$$\partial\varphi/\partial x \approx [\varphi(x+h_x, y) - \varphi(x-h_x, y)]/2h_x;$$

$$\partial\varphi/\partial y \approx [\varphi(x, y+h_y) - \varphi(x, y-h_y)]/2h_y,$$

где h_x и h_y — шаги сетки в направлениях x и y .

Четырехточечный шаблон (рис. 1.17, б) соответствует аппроксимации:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y) - \varphi(x, y)}{h_x} +$$

$$+ 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y+h_y) - \varphi(x, y+h_y)}{h_x};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \approx 0,5 \frac{\varphi(x, y+h_y) - \varphi(x, y)}{h_y} +$$

$$+ 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y+h_y) - \varphi(x+h_x, y)}{h_y}.$$

При переходе от дифференциальной краевой задачи к разностной необходимо также аппроксимировать граничные условия. Так, в рассмотренном примере (1.77) граничные условия при использовании (1.78) можно аппроксимировать точно:

$$\varphi_h(0) = 1. \quad (1.83)$$

Совокупность разностного уравнения и разностных краевых условий называется *разностной схемой краевой задачи*. Так, в нашем примере уравнения (1.79) и (1.83) являются разностной схемой краевой задачи (1.77).

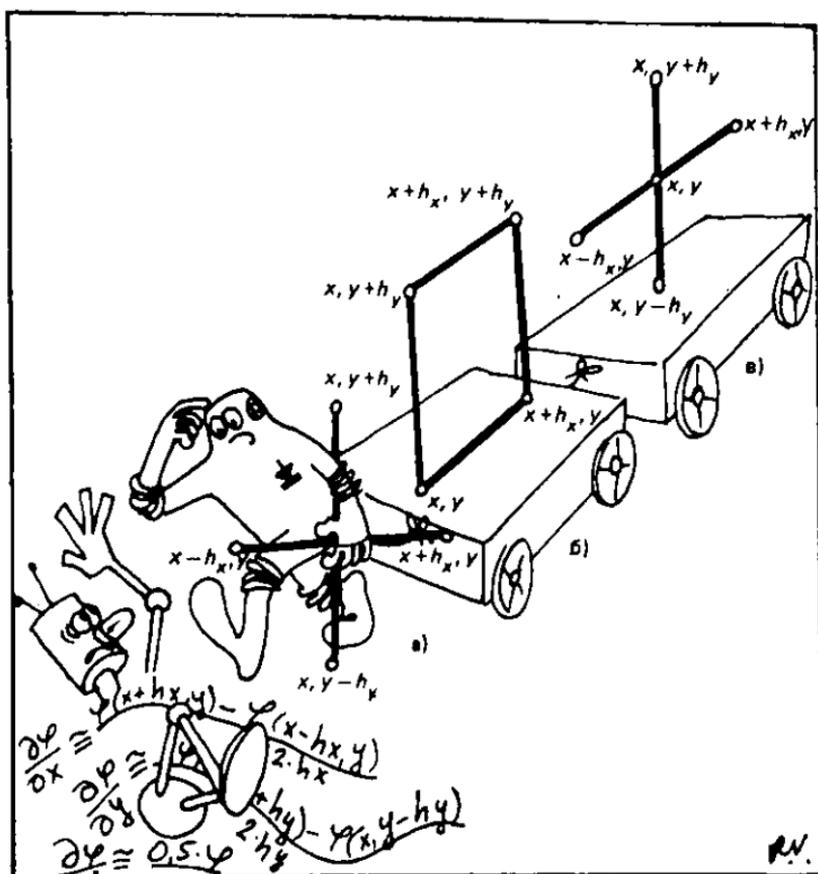


Рис. 1.17. Примеры шаблонов в двумерной области.

Кажущаяся простота построения разностной схемы в рассмотренном примере обманчива. В реальных задачах при построении разностных схем могут возникнуть существенные проблемы. Например, при исследовании разностных схем даже для простых линейных задач часто выясняется, что, казалось бы, разумная разностная схема дает решение, не сходящееся при измельчении сетки к точному решению дифференциальной задачи. Поэтому построение сходящейся разностной схемы — центральный и наиболее сложный вопрос МКР.

Понятие сходимости разностной схемы тесно связано с понятиями точности и устойчивости.

Пусть точное значение непрерывной функции φ в узле

с координатой $x = x_h$ равно φ_h , а полученное значение сеточной функции в том же узле φ_{hn} . Если погрешность $\delta_n = \varphi_{hn} - \varphi_n$ стремится к нулю при стремлении к нулю шага h и имеет k -й порядок относительного шага, то принято говорить, что разностная схема имеет k -й порядок точности в n -м узле.

Аналогично для определения порядка аппроксимации вычисляют погрешность между точным $L_{\varphi n}$ и приближенным L_{hn} значениями производной в n -м узле:

$$\psi_h = L_{hn} - L_{\varphi n}.$$

При этом порядок погрешности ψ_n относительно шага совпадает с порядком аппроксимации дифференциального L_{φ} разностным L_h оператором в n -м узле.

Для определения порядка точности многих практических разностных схем достаточно определить порядок аппроксимации дифференциального оператора разностным, так как порядки точности и аппроксимации для них совпадают. Однако разностная схема, для которой такое утверждение может быть доказано, должна обладать еще одним важным свойством — устойчивостью. *Устойчивая разностная схема* — схема, в которой не происходит наращивания малых ошибок округления, допущенных на начальных стадиях решения.

Для многих краевых задач сходимость разностной схемы является следствием аппроксимации ею краевой задачи и устойчивости. При этом порядок сходимости относительно шага совпадает с порядком аппроксимации.

Для гладких неразрывных функций хорошо развит математический аппарат изучения аппроксимации и доказательства устойчивости разностных схем.

■ **Примечание.** Доказательство устойчивости сводится к получению априорных оценок, выражающих непрерывную зависимость разностного решения задачи от входных данных.

Необходимость исследования сходимости впервые построенной разностной схемы обуславливает тот факт, что основу программных реализаций в САПР составляют вполне конкретные, хорошо изученные для определенных задач разностные схемы.

● **Примеры устойчивых разностных схем для решения краевой задачи (1.6) с краевыми условиями первого рода.** Областью определения искомой непрерывной функции $T(x, y)$ является прямо-

угольник, приведенный на рис. 1.15, б. Для решения задачи используется равномерная по направлениям осей x и y сетка с шагами h_x и h_y соответственно. Для произвольного внутреннего узла (x, y) вторые производные по координатам аппроксимируются разностными аналогами P_x и P_y с помощью пятиточечного шаблона (рис. 1.17, в):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx P_x = \frac{1}{h_x} \left[\frac{T(x+h_x, y) - T(x, y)}{h_x} - \frac{T(x, y) - T(x-h_x, y)}{h_x} \right]; \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx P_y = \frac{1}{h_y} \left[\frac{T(x, y+h_y) - T(x, y)}{h_y} - \frac{T(x, y) - T(x, y-h_y)}{h_y} \right].$$

Введя обозначения $T(x+h_x, y) = T_{i+1, j}$; $T(x, y-h_y) = T_{i, j-1}$ и т. д., можно записать в более компактной форме

$$P_x = [(T_{i+1, j} - 2T_{i, j} + T_{i-1, j})/h_x^2]; \quad (1.85)$$

$$P_y = [(T_{i, j+1} - 2T_{i, j} + T_{i, j-1})/h_y^2].$$

Подставив (1.85) в (1.6) и полагая $\lambda_x = \lambda_y = 1$, получим разностное уравнение

$$P_x + P_y + Q(ih_x, jh_y) = 0. \quad (1.86)$$

Прямолинейные границы области позволяют в данном случае точно аппроксимировать краевые условия:

$$T_{i, j}^{r, p} = T(ih_x, jh_y), \quad (1.87)$$

где точки ih_x и jh_y принадлежат границе области.

Разностная схема (1.86), (1.87) устойчива и аппроксимирует исходную краевую задачу (1.6) со вторым порядком точности относительно шага. Кроме того, она регулярна по направлениям осей x и y , что позволяет создавать быстродействующие алгоритмы решения результирующей системы алгебраических уравнений.

Несколько сложнее решается та же задача в случае, когда область определения функции имеет произвольную форму (см. рис. 1.15, в). Здесь для внутренних узлов, как и в предыдущем случае, сетка является регулярной. Однако в области имеется ряд приграничных узлов, один из которых приведен на рис. 1.18, для которых необходимо интерполировать заданные граничные условия. На практике интерполяция производится различными способами. Наиболее простой из них заключается в замене граничных условий, заданных на границе области S , граничными условиями на звеньях сетки S_h . Например, для случая, изображенного на рис. 1.18, можно принять, что граница S_h проходит через приграничный узел $T_{i, j}$, причем краевые условия в узле принимаются равными значению либо в точке $T_{i, j}$, либо

в точке $T_{i,j}$, либо среднему между ними, либо любому линейному сочетанию их значений.

В областях со сложной формой границы интерполяция граничных условий для каждого приграничного узла может потребовать значительных вычислительных затрат и сделать нецелесообразным использование МКР.

Сравнение методов конечных элементов и конечных разностей. Оба метода относятся к классу сеточных методов приближенного решения краевых задач. С точки зрения теоретических оценок точности методы обладают примерно равными возможностями. В зависимости от формы области, краевых условий, коэффициентов исходного уравнения оба метода имеют погрешности аппроксимации от первого до четвертого порядка относительно шага. В силу этого они успешно используются для разработки программных комплексов автоматизированного проектирования технических объектов.

Методы конечных элементов и конечных разностей имеют ряд существенных отличий. Прежде всего методы различны в том, что в МКР аппроксимируются производные искомых функций, а в МКЭ — само решение, т. е. зависимость искомых функций от пространственных координат и времени. Методы сильно отличаются и в способе построения сеток. В МКР строятся, как правило, регулярные сетки, особенности геометрии области учитываются только в околограничных узлах. В связи с этим МКР чаще применяется для анализа задач с прямолинейными границами областей определения функций. К числу традиционных задач, решаемых на основе МКР, относятся исследования течений жидкостей и газов в трубах, каналах с учетом теплообменных процессов и ряд других. В МКЭ разбиение на элементы производится с учетом геометрических особенностей области, процесс разбиения начинается от границы с целью наилучшей аппроксимации ее геометрии. Затем разбивают на элементы внутренние области, причем алгоритм разбиения

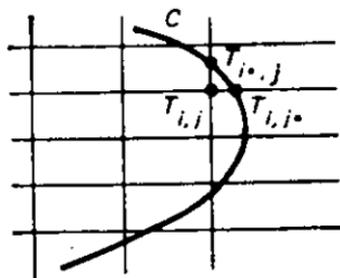


Рис. 1.18. Интерполяция граничных условий для приграничных узлов в области с произвольной формой границы.

ния строится так, чтобы элементы удовлетворяли некоторым ограничениям, например стороны треугольников не слишком отличались по длине и т. д. Поэтому МКЭ наиболее часто используется для решения задач с произвольной областью определения функций, таких, как расчет на прочность деталей и узлов строительных конструкций, авиационных и космических аппаратов, тепловой расчет двигателей и т. д.

Общей проблемой методов является высокая размерность результирующей системы алгебраических уравнений (несколько десятков тысяч в реальных задачах). Поэтому реализация МКР и МКЭ в составе САПР требует разработки специальных способов хранения матрицы коэффициентов системы и методов решения последней.

■ **Примечание.** Подход к решению этих проблем изложен в книге 5.

1.4. Программные комплексы на основе методов конечных разностей и конечных элементов

Программные комплексы на основе МКР. Их можно разделить на две группы.

К первой группе программных комплексов относятся программы, направленные на решение уравнений определенного класса, например эллиптических с формально заданными краевыми условиями, безотносительно к конкретной области их использования.

Вторая группа программных комплексов представляет бóльший интерес для моделирования в САПР; в ней реализуется решение краевых задач с конкретным физическим смыслом. К последним относятся такие крупные программы, как ГАММА, ТЕКОН, комплекс программ для числового решения уравнений Навье — Стокса. В основу построения программных комплексов второй группы заложен ряд общих принципов. Так, все комплексы построены по модульному принципу, причем модули делятся на две части: управляющую и обрабатывающую.

Управляющие модули: а) генерируют рабочие программы на основе информации, заданной пользователем или хранящейся в библиотеке; б) управляют взаимодействием отдельных модулей в процессе вычислений; в) обеспечивают визуальное отображение исходной ин-

формации и результатов расчетов в виде пространственных изображений, графиков и т. д.; г) обеспечивают диалог с пользователем на принятом языке программного комплекса.

Обрабатывающие модули обеспечивают решение конкретных краевых задач, относящихся к рассматриваемому классу. Кроме того, к этим модулям могут относиться базисные модули, обеспечивающие: а) трансляцию исходных данных (геометрия области, краевые условия, вид исходного уравнения) на язык внутреннего описания, принятый в комплексе; б) построение сетки (определение по номеру узла его координат и номеров соседних с ним узлов); в) построение дискретных аппроксимаций (формирование матрицы коэффициентов и вектора правых частей системы алгебраических уравнений).

● **Пример обрабатывающего модуля.** Программный комплекс ГАММА является примером программных комплексов второй группы. Он разработан в МГУ им. М. И. Ломоносова для ЭВМ БЭСМ-6. Обрабатывающие модули, составляющие комплекс, позволяют решать разнообразные задачи аэрогидродинамики.

Рассмотрим обрабатывающий модуль для расчета сверхзвукового обтекания газом боковой поверхности тела.

Рассматривается течение идеального вязкого газа вдоль боковой поверхности затупленного осесимметричного тела при числах $Re > 10^3$. Расчет ведется в заданной области Q (рис. 1.19). На границе Γ_2 задаются значения продольной u и поперечной v составляющих скорости, давления p , температуры T и начальное

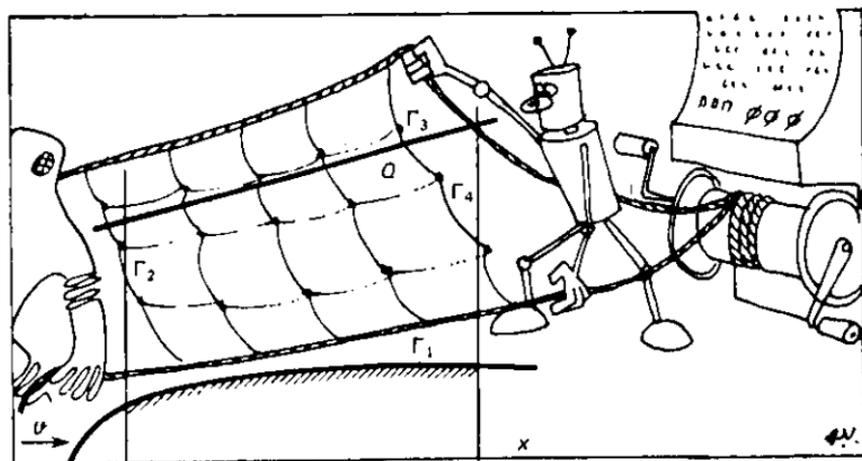


Рис. 1.19. Пример расчета методом конечных разностей в программном комплексе ГАММА.

го поля параметров потока в области. Расчет ведется на основе полных уравнений (1.4) Навье — Стокса.

Используется явная разностная схема. Область Q покрывается сеткой ($x_m = x_0 + m\Delta x$, $y_l = y_0 + l\Delta y$), в каждой точке которой в момент времени $t=0$ задаются значения функции газодинамических функций (скорость, температура, давление).

Для расчета по программе пользователем задаются следующие исходные данные: 1) число узлов сетки в направлении y в поле течения ($10 \leq N1 \leq 100$); 2) число узлов сетки в направлении x ($10 \leq N3 \leq 100$); 3) число узлов сетки в направлении x с постоянным шагом ($1 \leq N5 \leq 100$); 4) значение шага по оси x ; 5) значение шага по оси y ; 6) значение шага по времени; 7) параметры, характеризующие газ (число Рейнольдса, Прандтля и т. д.); 8) расстояние от оси симметрии до начальной точки, образующей тело; 9) параметры управления печатью.

Массивы, содержащие начальные значения полей скорости, давления и температуры, записываются на магнитную ленту и считываются с нее перед началом расчета. В результате расчета значения искомым функций u , v , p , T определяются во всех точках разностной сетки, покрывающей область Q . На печать выдается распределение плотности на заданных временных шагах вдоль образующей тела.

Важной характеристикой комплекса программ ГАММА является его открытость к включению новых обрабатывающих модулей, в результате чего комплекс постоянно расширяется и совершенствуется.

Программные комплексы на основе МКЭ. Многочисленные программные комплексы на основе МКЭ наиболее развиты применительно к расчетам на прочность элементов и узлов конструкций в авиационной и космической технике и в строительстве. Программные комплексы, реализующие МКЭ, можно разделить на программные комплексы специализированные и универсальные.

Специализированные программные комплексы предназначены для анализа вполне определенного класса конструкций при приложении определенного вида нагрузок. Для специализированных программных комплексов характерны: а) относительно низкая стоимость; б) затраты на разработку около 2 человеко-лет; в) простая логическая структура; г) высокая степень независимости от типа ЭВМ; д) высокая эффективность решения задач рассматриваемого класса.

- **Пример специализированного программного комплекса.** Рассмотрим программный комплекс EUFEMI Швеции, предназначенный для решения статических задач упругости и термоупругости на ЭВМ UNIVAC 1108. Объем программного комплекса — 25 000 операторов на ФОРТРАНе. Программный комплекс имеет обширную библиотеку элементов, позволяющих вести анализ

ферм, рам, пластин, оболочек, осесимметричных тел, решать как плоские, так и пространственные задачи. Внешние нагрузки могут задаваться сосредоточенными, распределенными и поверхностными.

Комплекс EUFEMI обладает широким набором сервисных функций. По желанию пользователя на печать можно вывести геометрию исследуемой конструкции, графики распределения нагрузок для всей конструкции, в заданных узлах или в узлах с максимальной нагрузкой. Он обеспечивает также возможность прерывать счет с последующим возобновлением прерванного места.

Программный комплекс EUFEMI состоит из восьми основных блоков: 1) ввода исходных данных; 2) обработки входной информации (геометрия области, свойства материала и т. д.); 3) перенумерации узлов; 4) формирования глобальной матрицы жесткости и вектора нагрузки; 5, 6, 7) решения системы алгебраических уравнений, подготовки результатов к печати; 8) вывода результатов.

Комплекс EUFEMI обеспечен входным проблемно-ориентированным языком, команды которого делятся на команды: а) описания геометрии, свойств материала, граничных условий, степеней свободы; б) описания внешних нагрузок, задания формы печати результатов.

В комплексе предусмотрены средства контроля ошибок входной информации, которые в зависимости от степени ошибки осуществляют ее коррекцию, выдают предупреждающие сообщения или прекращают решение задачи.

Входная информация о геометрии исходного объекта делится на две группы: 1) координаты узлов; 2) номера узлов элементов. Эта информация может задаваться либо отдельно для каждого узла, либо генерироваться автоматически. При автоматической генерации входной информации узлы располагаются либо вдоль прямых, либо вдоль дуг окружностей. При этом шаг между узлами выдерживается постоянным. Для генерации локально неравномерных сеток используют специальные команды. Для контроля входных данных можно получить рисунок заданной области, разбитой на элементы. Комплекс EUFEMI может выдавать рисунки двух типов: 1) область, разбитая на элементы и номера элементов (рис. 1.20, а); 2) область с нанесенными и пронумерованными узлами (рис. 1.20, б).

Предельные возможности комплекса зависят от класса ЭВМ. Рекомендуются, однако, применять EUFEMI для задач с общим числом степеней свободы в пределах 3—5 тыс.

Программные комплексы общего назначения (универсальные) позволяют исследовать широкий класс конструкций при различных способах нагружения и различных свойствах материала. Их отличительными признаками являются: а) сложная логическая структура; б) наличие СУБД; в) время разработки 50—100 человеко-лет; г) ориентация на определенный класс ЭВМ; д) обширная библиотека конечных элементов.

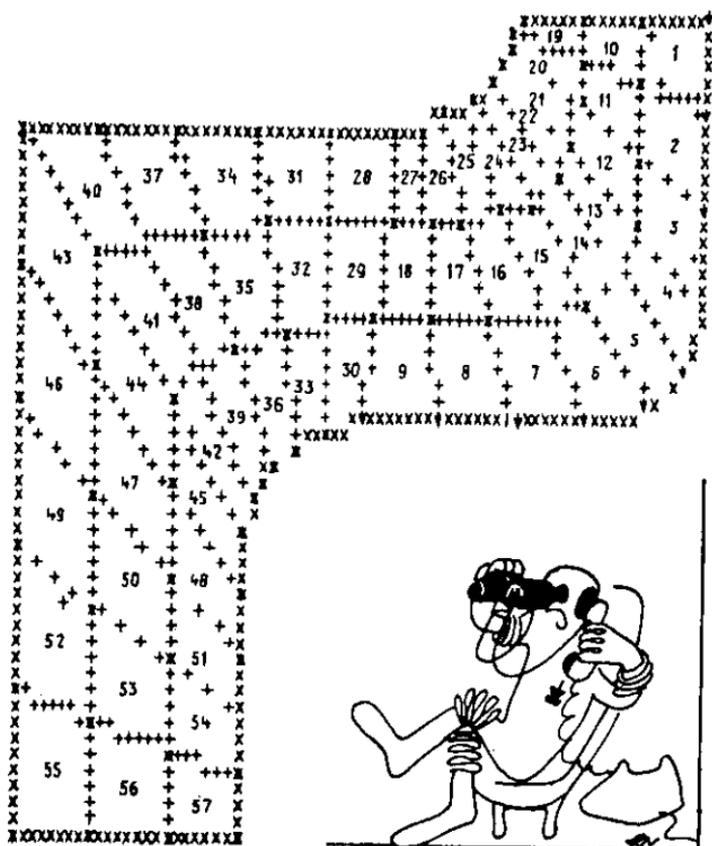


Рис. 1.20, а. Область, разбитая на элементы, и номера элементов.

Все универсальные программные комплексы, реализующие МКЭ, построены по модульному принципу. Модули, как правило, представляют собой отдельные программы, написанные на языке высокого уровня, например на языке ФОРТРАН. Непосредственно между собой модули не взаимодействуют, а объединяются в каждом конкретном случае в нужной последовательности с помощью монитора. Состав основных модулей является типичным для большинства программ и отражает существо основных этапов МКЭ (см. § 1.2). Так, все универсальные программные комплексы имеют в своем составе модули, реализующие операции над матрицами, а также модули, реализующие работу с разреженными матрицами. Боль-

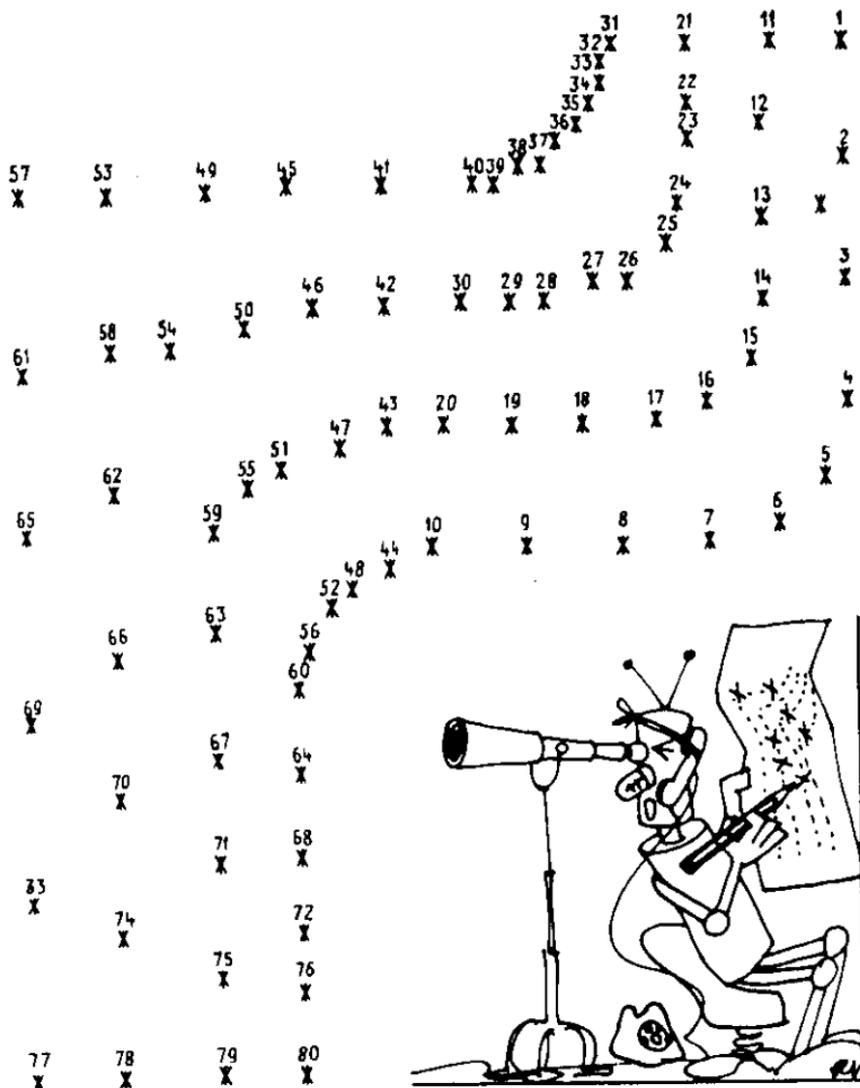


Рис. 1.20, б. Область с нанесенными и пронумерованными узлами.

шинство программных комплексов содержат также блоки автоматической обработки исходной информации, формирования матриц жесткости элементов и глобальной матрицы жесткости.

Немаловажной проблемой для универсальных комплексов является, как отмечалось выше, большой объем выходной информации. Поэтому в их состав включаются,

как правило, модули, позволяющие пользователю выбрать те данные, которые ему нужны, и получить их в графической форме.

● **Примеры универсальных программных комплексов.** 1. Программный комплекс «Прочность-75» разработан в проблемной лаборатории тонкостенных пространственных конструкций Киевского инженерно-строительного института и ориентирован на ЭВМ БЭСМ-6. Наличие монитора и языкового процессора позволяет с полным основанием отнести «Прочность-75» к программным системам. Система предназначена для исследования напряженного состояния и собственных колебаний элементов несущих конструкций. Входной информацией системы являются сведения о топологии, геометрии и физической структуре исследуемого объекта. На выходе пользователь может получить картину распределения сил и деформаций во времени. Система «Прочность-75» разделена на отдельные подсистемы, предназначенные для анализа объектов определенной размерности.

Задание входной информации в системе автоматизировано. Для этой цели используются специальные проблемно-ориентированные языки, которые разделены на три группы.

К группе 1 относятся языки, предназначенные для описания одного определенного класса задач с жестко заданным алгоритмом решения (языки ЯСТООМ, ЯСТАМПО, ЯКОДЕТОМ). Например, язык ЯСТАМПО используется для описания многослойных пластин и оболочек, находящихся под воздействием поверхностных нагрузок. Описание модели на языке ЯСТАМПО основано на предположении о регулярности сетки, разбивающей ее на элементы. Язык позволяет описать конструкцию сложной формы с произвольной системой отверстий.

Группу 2 составляют языки, ориентированные на решение нескольких классов задач (языки ДИСТОС, ЯСТОМТ). Пользователю предоставляется возможность выбрать один из возможных алгоритмов решения задачи. Язык ЯСТОМТ, например, используется для описания толстых оболочек и массивных тел сложной формы. Область разбивается на трехмерные элементы в виде параллелепипедов с помощью равномерной сетки.

К группе 3 относится язык СИДЕКОН. Он обеспечивает возможность использовать метод решения, который заранее не включен в систему. Кроме того, с помощью языка СИДЕКОН можно описывать сложные комбинированные конструкции. При этом конструкция сначала разбивается на небольшое число подконструкций. Затем каждая подконструкция разбивается на конечные элементы различных типов по заранее заданным алгоритмам. Поэтому для описания сложной конструкции достаточно задать лишь типы фрагментов и сжатую информацию о граничных условиях их стыковки. Кроме того, необходима, конечно, числовая информация о фрагментах. Входная информация обрабатывается далее метатранслятором. Для расчета конкретной задачи рабочая программа формируется из отдельных подпрограмм на языке ФОРТРАН в определенной последовательности и транслируется затем в машинные коды. После этого управление передается в соответствующую проблемно-ориентированную подсистему, которая в процессе работы использует сформированную метатранслятором и монитором рабочую программу.

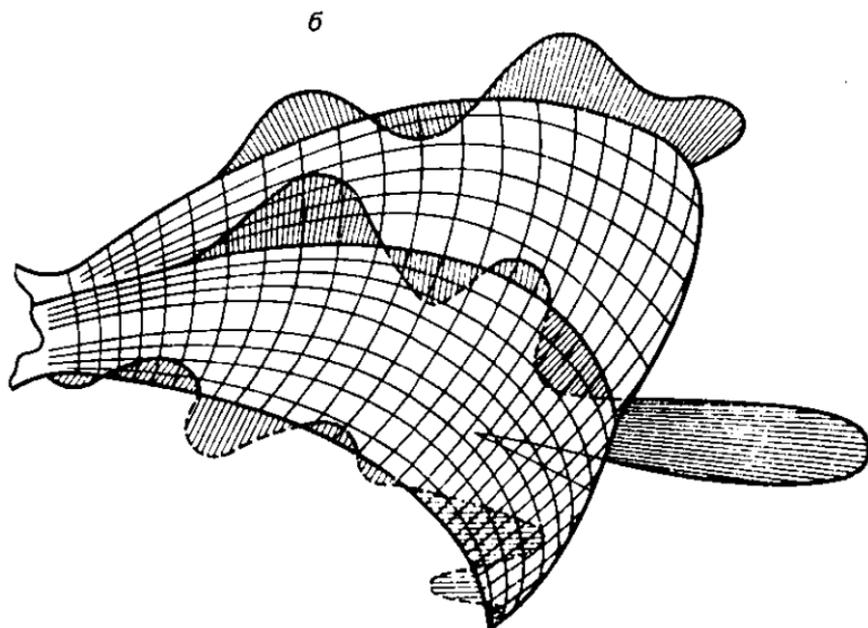
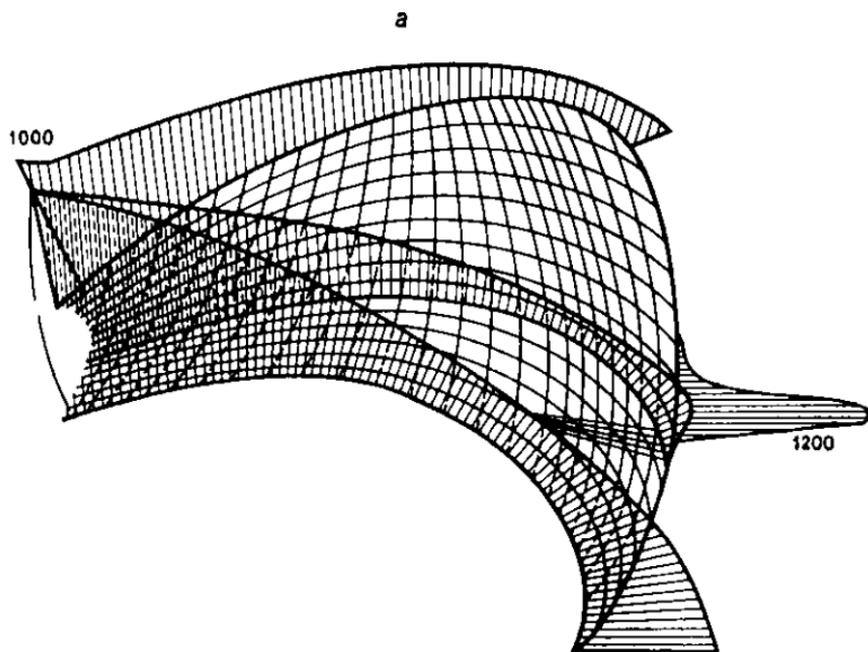


Рис. 1.21. Пример расчета напряжений в неполюгой оболочке с помощью программной системы «Прочность-75»:

а — эпюры мембранных напряжений; б — эпюры изгибных напряжений.

Система «Прочность-75» обеспечивает возможность работы в двух режимах: 1) пакетном; 2) интерактивном.

● Пример использования системы для решения задачи о напряженном состоянии непологой оболочки сложной конфигурации (рис. 1.21). На оболочку действует внешняя нормальная распределенная нагрузка интенсивностью $p = 9,81 \cdot 10^4$ Па. Расчетная модель состоит из 601 элемента. Количество степеней свободы в узле — 5 (3 перемещения и 2 угла поворота). Порядок результирующей системы алгебраических уравнений — 3465. На рис. 1.21, а представлены полученные в результате расчетов эпюры мембранных, а на рис. 1.21, б — изгибных напряжений. Рисунки получены на графопостроителе.

2. Программная система ASKA содержит несколько сотен отдельных подпрограмм на языке ФОРТРАН. Система ASKA ориентирована на большие ЭВМ третьего поколения (CDC 6600, IBM 360/65, UNIVAC 1108). Объем ОП, занимаемый системой и рабочими массивами, составляет 500К байт. Предельное число неизвестных в рассматриваемой конструкции может достигать 57 тыс.

Система ASKA разбита на подсистемы ASKA I ... ASKA IV, предназначенные соответственно для решения задач: линейной статике; динамических (переходные процессы в демпфируемых и недемпфируемых конструкциях); нелинейной статике, пластичности, больших перемещений; стационарной и нестационарной термоупругости, а также подсистемы (ASKA V), содержащей сервисные программы, программы контроля ошибок.

С помощью монитора система ASKA формирует из имеющихся подпрограмм необходимую для расчета конкретной задачи последовательность. Кроме того, система ASKA может использоваться для решения задач по алгоритмам, не включенным заранее в систему, а созданным пользователем впервые. При этом пользователь имеет возможность включать в систему новые модули, используя общую схему решения задачи.

Система ASKA снабжена специальным входным языком, который позволяет в удобной форме описывать геометрию и топологию проектируемой конструкции.

Библиотека конечных элементов системы содержит более 50 различных элементов. На рис. 1.22, а приведен пример использования системы ASKA для расчета соединения труб с использованием элемента HEXEC 27 из библиотеки системы (рис. 1.22, б). При решении 2/3 общего времени работы составило время ввода-вывода. На формирование матрицы жесткости затрачено 40 % времени решения (это объясняется использованием элементов с криволинейными ребрами, очерченными по параболе).

3. Программная система NASTRAN предназначена для расчета на прочность конструкций авиакосмических объектов, обеспечивает возможность проводить следующие виды расчетов:

1. Расчет статической прочности конструкций под воздействием сосредоточенной и распределенной нагрузок.

2. Расчет динамической прочности под действием переменных нагрузок и случайных возмущений.

3. Расчет колебаний конструкций.

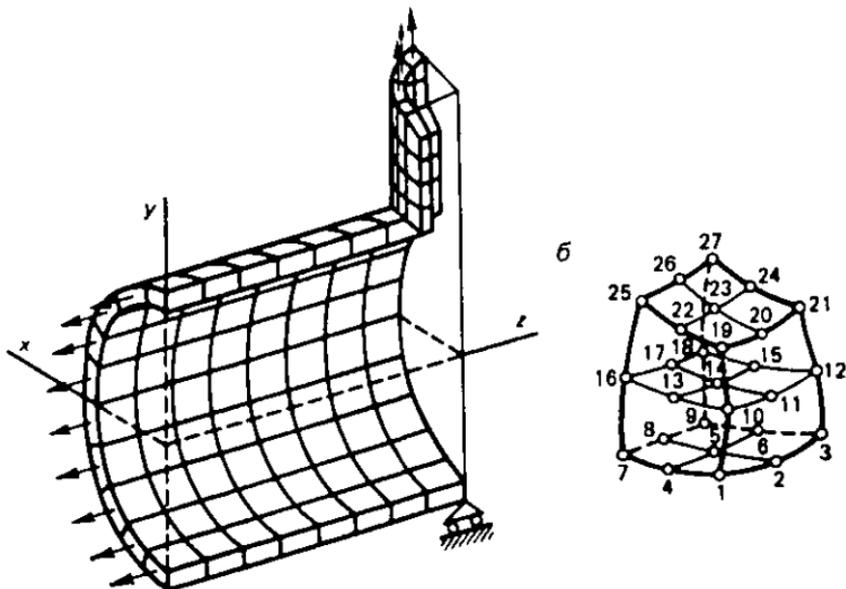


Рис. 1.22. Пример расчета соединения труб с помощью программной системы ASKA:

a — исходный фрагмент; *б* — конечный элемент из библиотеки системы.

4. Расчет статической и динамической прочности для нелинейных задач (с некоторыми ограничениями).

5. Расчет стационарных и нестационарных температурных полей.

6. Расчет течения жидкости и газа.

7. Расчеты пластичности и текучести.

Библиотека конечных элементов системы NASTRAN содержит набор элементов для расчета стержней, балок, мембран искривленных оболочек, осесимметричных тел, трубопроводов и т. д.

Размерность решаемых задач практически не ограничена, так как экономические ограничения на размерность задачи проявляются раньше, чем исчерпываются возможности системы.

Программная система NASTRAN имеет сложную логическую структуру и с точки зрения системного программиста очень похожа на операционную систему. В состав управляющей подсистемы входит монитор, который может управлять решением задач, расположенных не только в ОП, но и на внешних носителях. В системе предусмотрена возможность прерывания счета с последующим возобновлением с прерванного места.

Функциональная часть системы состоит из отдельных модулей, для управления которыми создан специальный язык DMAP. Последовательность инструкции языка DMAP определяет порядок решения, выраженный в терминах матричных операций. Последовательность матричных операций, запрограммированных в строго определенном порядке, называется жестким форматом.

Жесткие форматы используются в системе NASTRAN для расчета по стандартной методике. Всего в состав системы входит 12 жестких форматов, таких, как статический расчет, статический расчет с дифференциальной жесткостью, расчет собственных колебаний и т. д.

При желании пользователь может создавать и новые форматы, но эта работа по силам только высококвалифицированным специалистам, глубоко знающим систему NASTRAN.

Входные данные для системы состоят из трех частей: 1) управляющие данные; 2) сведения о нагрузках; 3) основные данные. Управляющие данные определяют жесткий формат и форму представления результатов. Колода основных данных содержит описание всей конструкции. Для жестких форматов генерация исходных данных автоматизирована, но пользователю при этом необходимо сделать выбор из 150 различных вариантов, приведенных в инструкции.

Промышленное применение системы NASTRAN долгое время тормозилось именно огромным количеством необходимых исходных данных. С целью облегчения подготовки данных были разработаны автономные программы (препроцессоров), генерирующие данные для системы. Так, программа GRIDXY составлена для моделирования небольших гильз снарядов с помощью треугольных и трапециевидных кольцевых элементов. Кроме того, программа может использоваться для моделирования тонкостенных осесимметричных конструкций. Чтобы воспользоваться программой, пользователь должен разбить конструкцию на подобласти, ограниченные прямыми линиями или полиномиальными кривыми. Остальные действия выполняет сама программа.

Программа FEM разработана фирмой «Макдонелл—Дуглас» для снятия исходных данных непосредственно с чертежа.

Еще одним примером препроцессора для системы NASTRAN служит программа DATGEN, генерирующая модель палубы и каркаса судна на основе параметрического описания.

1.5. Методы граничных элементов

При решении краевых задач приближенные модели технических объектов можно строить на основе интегральных уравнений. При этом первый шаг на пути к решению состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к эквивалентным интегральным уравнениям. Во многих случаях, когда такой переход оказывается успешным, решение исходной задачи может быть получено с минимальными вычислительными затратами и высокой степенью точности. Кроме того, размерность исходной задачи понижается на 1, двумерные задачи преобразуются в одномерные.

Примером указанного подхода к решению краевых задач служат методы интегральных граничных элементов (МГЭ). Развитие МГЭ началось сравнительно недавно,

причем мощным стимулом к этому послужило создание быстродействующих ЭВМ. Все разновидности МГЭ используют принцип суперпозиции, поэтому область их применения ограничена классом полностью линейных или линейных относительно приращений задач. Однако к такому классу относятся многие важные для развития техники задачи, например МГЭ успешно используются для решения задач теории упругости, механики жидкости и газов.

Все МГЭ строятся на основе общих принципов. При этом различают прямые и непрямые МГЭ.

В *прямых МГЭ* искомыми переменными краевой задачи являются величины, имеющие реальный физический смысл, например в задачах теории упругости — усилия и перемещения, возникающие в элементах конструкции.

В *непрямых МГЭ* решение исходной задачи выражается через функции плотности, которые сами по себе не имеют реального физического смысла. После того как функции плотности найдены, значения реальных физических параметров задачи могут быть получены из них путем простого интегрирования.

В любом варианте МГЭ результатом перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям в конечном счете является система уравнений, включающая значения переменных только на границе заданной области. Поэтому в отличие от МКЭ и МКР последующая дискретизация задачи проводится только на границе исследуемой области. Последнее обуславливает, во-первых, более высокую по сравнению с МКР и МКЭ точность решения, во-вторых, существенно меньший объем входных данных при реализации методов на ЭВМ.

Переход от исходного дифференциального уравнения к интегральному. Рассмотрим на простом примере алгоритм перехода. В двухмерной однородной области G_1 произвольной формы с коэффициентом проницаемости k требуется найти распределение функции φ , описанной уравнением

$$\partial^2 \varphi / \partial x_1^2 + \partial^2 \varphi / \partial x_2^2 = 0. \quad (1.88)$$

■ **Примечание.** Уравнение (1.88) является частным случаем описанного в § 1.1 квазигармонического уравнения (1.1) при $x_1 = x$, $x_2 = y$. Там же приводятся примеры практических задач проектирования технических объектов, приводящих к этому уравнению.

На границе L рассматриваемой области заданы граничные условия первого рода

$$\varphi(x_0) = g(x_0). \quad (1.89)$$

Э т а п 1. Нахождение сингулярного решения. В МГЭ используется то обстоятельство, что для большинства уравнений в частных производных существуют сингулярные (фундаментальные) решения, отвечающие единичным возмущающим воздействиям в неограниченной области. Для рассматриваемой задачи сингулярное решение записывается в виде

$$\varphi(x) = G(x, \xi)g(\xi), \quad (1.90)$$

где $\varphi(x)$ — значение искомой функции в произвольной точке области; $g(\xi)$ — единичное возмущающее воздействие, приложенное в точке ξ .

При этом начала координат для систем x и ξ совпадают. Величина $G(x, \xi)$ определяется, в свою очередь, уравнением

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi k} \ln \left| \frac{r}{r_0} \right|,$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ и r_0 выбрано так, что $G=0$ при $r=r_0$.

Уравнение (1.90) определяет искомую функцию $\varphi(x)$ относительно некоторого нулевого значения при $r=r_0$.

Э т а п 2. Введение фиктивных источников. Рассматриваемая область GI «помещается» в бесконечную область, для которой известно решение (1.90). При этом потребуем, чтобы значения $\varphi(x)$ на границе области совпадали с заданным граничным условием (1.89). Чтобы это требование выполнялось, введем на границе фиктивные источники неизвестной интенсивности $p(\xi)$ в расчете на единицу длины границы L . Подставив $p(\xi)$ в (1.90) и проинтегрировав его по длине границы, получим искомое решение:

$$\varphi(x) = \int_L G(x, \xi) p(\xi) dL(\xi) + C. \quad (1.91)$$

В результате проделанных действий от исходного дифференциального уравнения (1.88) удалось перейти к эквивалентному интегральному уравнению (1.91). Произвольная постоянная C появляется в (1.91) для обеспечения единственного решения в связи с тем, что функция $\varphi(x)$ рассчитывается относительно некоторого нулевого значения. В дальнейшем C подбирается таким обра-

зом, чтобы суммарное «излучение» от всех источников обращалось в нуль на бесконечно удаленной границе.

Для обеспечения заданных граничных условий необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi(x_0) = \int_L G(x_0 \xi) p(\xi) dL + C. \quad (1.92)$$

На основании равенства (1.92) строится система интегральных уравнений относительно неизвестных фиктивных источников $p(\xi)$. После того как они будут найдены, значения искомой функции $\varphi(x)$ в любой внутренней точке области легко определяются из (1.91).

Если бы (1.92) удалось проинтегрировать аналитически, то для исходной задачи было бы найдено точное решение. На практике (1.92) решается приближенно, что является единственным источником погрешности в МГЭ.

Дискретизация границы рассматриваемой области. Для приближенного решения (1.92) производится дискретизация границы рассматриваемой области. Аналогично МКЭ разбиение границы на элементы можно производить различными способами. В простейшем случае граница аппроксимируется линейными элементами. Отдельный элемент определяется координатой своей средней точки. Интенсивность неизвестных источников $p(\xi)$ в пределах элемента принимается постоянной.

С учетом принятых допущений выражение (1.92) запишется в виде

$$\varphi(x_0^q) = \sum_{e=1}^N p(\xi^{(e)}) \int_L G(x_0^q \xi^{(e)}) dL(\xi^{(e)}) + C, \quad (1.93)$$

где x_0^q — координата средней точки q -го граничного элемента.

Уравнение (1.93) определяет значение функции в средней точке q -го граничного элемента.

В матричной форме (1.93) принимает вид

$$\varphi^q = \left(\int_{\Delta L} G^{qe} dL \right) p^{(e)} + C, \quad (1.94)$$

где ΔL — длина q -го граничного элемента; $p^{(e)}$ — вектор-столбец размерности N ; $\int_{\Delta L} G^{qe} dL$ — вектор-строка той же размерности.

При этом каждый элемент вектора-строки определяется по формуле

$$G^{qe} = \int_{\Delta L^{(e)}} G(x_0^q, \xi^{(e)}) dL(\xi^{(e)}). \quad (1.95)$$

С учетом (1.95) уравнение (1.94) переписывается так:

$$\varphi^q = G^{qe} p^{(e)} + C.$$

Составляя аналогичные уравнения для каждого граничного элемента и проводя суммирование по всем элементам, получим систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = G^S p + IC,$$

где φ и p — N -мерные векторы; I — единичный N -мерный вектор-столбец; G^S — матрица коэффициентов размерности $N \times N$.

Таким образом, при реализации на ЭВМ алгоритм МГЭ состоит из следующих этапов:

Э т а п 1. Формирование входных данных (номера узлов граничных элементов, номера самих элементов и т. д.).

Э т а п 2. Интегрирование функций $G(x, \xi)$ для получения матрицы коэффициентов G^S .

Э т а п 3. Составление разрешающей системы алгебраических уравнений.

Э т а п 4. Решение системы для определения неизвестных фиктивных источников.

Э т а п 5. Подстановка найденных значений в определяющее интегральное уравнение и вычисление значений функций во внутренних точках области.

Многие этапы рассмотренного алгоритма аналогичны соответствующим этапам МКЭ. Достаточно нетривиальным является этап 2 алгоритма, связанный с интегрированием функции $G(x, \xi)$. Поэтому в целом программирование МГЭ требует несколько больших усилий по сравнению с реализацией МКЭ. Однако последующая эксплуатация программы проще с точки зрения пользователя, так как объем задаваемой входной информации значительно меньше, чем в МКЭ.

Краткие выводы

Математическим описанием объектов проектирования на микроуровне служат, как правило, дифференциальные уравнения в частных производных, точное решение для которых удается получить

лишь в немногих частных случаях. В связи с этим для анализа объектов на микроуровне разрабатывают приближенные модели, математическое описание которых представлено системами обыкновенных дифференциальных или алгебраических уравнений. Для построения приближенных моделей объектов используют два подхода. В основе одного из них лежит метод сеток, в основе другого — использование интегральных уравнений. К наиболее популярным вариантам метода сеток относятся метод конечных элементов и метод конечных разностей. Оба метода обеспечивают примерно одинаковую точность решения и успешно используются для построения моделей в САПР. К методам, основанным на использовании интегральных уравнений, относятся методы граничных элементов. Применение этих методов позволяет, в частности, на единицу понижать размерность решаемых задач.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МАКРОУРОВНЕ

2.1. Общие сведения о моделировании на макроуровне

Использование ММ объекта в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных возможно только для очень простых технических систем, и даже в этом случае порядок аппроксимирующей алгебраической системы уравнений при моделировании в трехмерном пространстве может достигать 10^6 и более. Поэтому при моделировании на макроуровне в технической системе выделяются достаточно крупные элементы, которые в дальнейшем рассматриваются в виде неделимой единицы. Непрерывной независимой переменной остается (в сравнении с моделированием на микроуровне) только время. Математической моделью технической системы на макроуровне будет система ОДУ.

Поведение большинства технических подсистем можно охарактеризовать с помощью *фазовых переменных*. Фазовые переменные образуют вектор неизвестных в ММ технической системы. Так, в электрической подсистеме фазовыми переменными являются токи и напряжения, в механической поступательной подсистеме — силы и скорости.

Математическую модель системы получают объединением компонентных и топологических уравнений.

Законы функционирования элемента подсистемы (в дальнейшем — просто элемента) задаются компонентными уравнениями, связывающими, как правило, разнородные фазовые переменные, относящиеся к данному элементу, т. е. компонентные уравнения связывают переменные типа потока с переменными типа потенциала.

- **Примечание.** Конкретный смысл этих переменных для различных физических подсистем показан в табл. 2.1.

Компонентные уравнения могут быть линейными или нелинейными, алгебраическими, обыкновенными дифференциальными или интегральными. Эти уравнения получаются на основе знаний о конкретной предметной области. Для каждого элемента моделируемого технического объекта должны быть получены компонентные уравнения. Это может оказаться длительной и трудоемкой процедурой. Но эта процедура выполняется однократно с одновременным накоплением библиотеки подпрограмм моделей элементов.

- **Примечание.** Для большинства элементов такие компонентные уравнения уже получены в прикладных дисциплинах. Ими можно воспользоваться при моделировании в САПР. Например, в гидравлике для дросселя имеется аналитическое выражение, связывающее расход и давление (это и есть компонентное уравнение дросселя).

Компонентные уравнения получают либо теоретически, либо физическим макетированием, либо математическим моделированием на микроуровне.

Связь между однородными фазовыми переменными, относящимися к разным элементам подсистемы, задается топологическими уравнениями, получаемыми на основе сведений о структуре подсистемы. Для формирования топологических уравнений разработаны формальные методы (см. гл. 3). Очевидно, что процедура получения топологических уравнений выполняется для каждого моделируемого объекта, так как структуры объектов различны.

- **Примечание.** Подробнее о свойствах компонентных и топологических уравнений см. в книге 1.

В САПР целесообразно использовать математические и программные средства, обеспечивающие моделирование всей номенклатуры проектируемых объектов и способные адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации. Эти свойства достигаются, если применяемые средства имеют высокую степень универсальности. Получению универсальных средств способствует использование аналогий между подсистемами различной физической природы и между моделирующими их компонентными и топологическими уравнениями.

2.2. Аналогии компонентных уравнений

В большинстве технических систем можно выделить три типа простейших элементов:

А. Элемент типа R — элемент диссипации энергии. На этом элементе, как правило, происходит преобразование энергии в тепловую.

Б. Элемент типа C .

В. Элемент типа L .

На элементах типа C и L происходит накопление потенциальной или кинетической энергии.

Сочетанием этих простейших элементов, а также источников фазовых переменных может быть получена ММ технического объекта практически любой сложности.

Рассмотрим основные физические подсистемы с точки зрения аналогий компонентных уравнений.

Для каждой физической подсистемы характерны свои законы, однако для простейших элементов форма выражающих их уравнений оказывается одинаковой.

Электрическая подсистема. Фазовыми переменными электрической подсистемы являются токи I и напряжения U . Запишем уравнения трех типов простейших элементов:

А. Уравнение сопротивления (закон Ома) $I=U/R$, где R — электрическое сопротивление.

Б. Уравнение емкости $I=C(dU/dt)$, где C — электрическая емкость.

В. Уравнение индуктивности $U=L(di/dt)$, где L — электрическая индуктивность.

Механическая поступательная подсистема. Фазовые переменные механической поступательной подсистемы — силы F и скорости V — соответственно аналоги токов и напряжений. Запишем уравнения трех типов простейших элементов:

А. Уравнение вязкого трения $F=V/R_m$, где $R_m=1/k$ — аналог электрического сопротивления; k — коэффициент вязкого трения.

Б. Уравнение массы (уравнение второго закона Ньютона) $F=ma=C_m(dV/dt)$, где $a=dV/dt$ — ускорение; $C_m=m$ — аналог электрической емкости (масса элемента).

В. Уравнение пружины $F=kx$, где x — перемещение; k — жесткость пружины.

Продифференцируем обе части уравнения по времени: $dF/dt = kV$, или $V = L_M(dF/dt)$, где $L_M = 1/k$ — аналог электрической индуктивности.

Аналогичное компонентное уравнение можно получить из закона Гука для элемента, у которого учитывается сжимаемость, т. е. $P = E(\Delta l/l)$, где P — напряжение в элементе; E — модуль Юнга; l — длина элемента; Δl — изменение длины элемента. Умножив обе части этого уравнения на площадь S поперечного сечения элемента и продифференцировав по времени, получим: $d(PS)/dt = (ES/l)(d\Delta l/dt)$; $d(\Delta l)/dt = V$; $PS = F$; $dF/dt = (ES/l)V$, или $V = L_M(dF/dt)$; $L_M = l/(ES)$.

Механическая вращательная подсистема. Фазовые переменные этой подсистемы — моменты сил M и угловые скорости ω — соответственно аналоги токов и напряжений. Запишем уравнения трех типов простейших элементов:

А. Уравнение вязкого трения вращения $M = \omega/R_{вр}$, где $R_{вр} = 1/k$ — аналог электрического сопротивления; k — коэффициент трения вращения.

Б. Основное уравнение динамики вращательного движения $M = J(d\omega/dt)$, где J — аналог электрической емкости (момент инерции элемента).

В. Уравнение кручения бруса с круглым поперечным сечением $M = GJ_p\theta$, где M — крутящий момент; G — модуль сдвига; J_p — полярный момент инерции сечения; $\theta = d\varphi/dl$ — относительный угол закручивания.

Рассмотрим брус конечной длины, тогда $\theta = \varphi/l$, где φ — угол закручивания; l — длина бруса. Продифференцируем обе части уравнения по времени, т. е. $dM/dt = (GJ_p/l)(d\varphi/dt)$, или, если учесть, что $d\varphi/dt = \omega$ и $L_{вр} = l/(GJ_p)$, то $\omega = L_{вр}(dM/dt)$, где $L_{вр}$ — аналог электрической индуктивности (вращательная гибкость).

Аналогичное компонентное уравнение можно получить для спиральной пружины, уравнение которой $M = c\varphi$, где c — жесткость пружины. Продифференцировав обе части уравнения по времени, получим $\omega = L_{вр}(dM/dt)$; $L_{вр} = 1/c$.

Гидравлическая (пневматическая) подсистема. Фазовые переменные гидравлической подсистемы — массовые расходы Q_m и давления P — соответственно аналоги токов и напряжений. Запишем уравнения трех типов простейших элементов:

А. Уравнение для участка трубопровода при стацио-

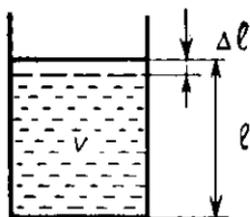


Рис. 2.1. Иллюстрация к определению гидравлической емкости.

нарном ламинарном течении жидкости $P = R_{\Gamma} Q_m$, где $R_{\Gamma} = 128\nu l / (\pi d^4)$ — аналог электрического сопротивления (ν — кинематическая вязкость, d и l — диаметр и длина трубопровода).

Б. Уравнение сжимаемости жидкости в некотором объеме V при воздействии давления P $\Delta V = V\beta \Delta P$. Так как $\Delta V = S \Delta l$ (рис. 2.1), то, умножив обе части уравнения на ρ и продифференцировав по времени, получим $\rho S (d\Delta l / dt) = V\beta \rho (dP / dt)$, или $Q_m = C_{\Gamma} (dP / dt)$,

где $C_{\Gamma} = \rho V \beta$ — аналог электрической емкости; ρ — плотность жидкости; S — площадь поперечного сечения сосуда, $U = d\Delta l / dt$ — скорость движения жидкости через сечение.

В. Уравнение Эйлера (закон движения идеальной жидкости) $\partial U / dt = -(1/\rho) (\partial P / \partial X)$.

Если рассмотреть участок трубопровода длиной l с давлениями на концах P_1 и P_2 , то при замене производной $dP / \partial X$ первой разностью найдем $dU / dt = (1/\rho) (P_1 - P_2) / l$. Для получения в левой части уравнения массового расхода умножим обе его части на ρS , т. е. $dQ_m / dt = (S/l) P$, или $P = L_{\Gamma} (dQ_m / dt)$, где $L_{\Gamma} = l / S$ — аналог электрической индуктивности.

Закон движения реальной жидкости описывается уравнением Навье — Стокса, которое для одномерного случая выглядит так: $\partial U / dt = U (\partial U / \partial X) - (1/\rho) (\partial P / \partial X) + G_m + \nu (\partial^2 U / \partial X^2)$, где G_m — массовые силы; ν — вторая вязкость.

Выделяя участок трубопровода и считая $\partial U / \partial X = a = \text{const}$, получим, что участок может быть представлен гидравлическими сопротивлением и индуктивностью (массовыми силами пренебрегаем), т. е. $L_{\Gamma} (dQ_m / dt) + R_{\Gamma} Q_m = P$; $R_{\Gamma} = al / S$.

Тепловая подсистема. Фазовые переменные этой подсистемы — тепловые потоки Φ и температура T — соответственно аналоги токов и напряжений. Запишем уравнения трех типов простейших элементов:

А. Из соответствующих уравнений законов Фурье и Ньютона для теплопроводности и конвекции $\psi = \lambda (T_1 - T_2) / l$ и $\psi = a_{\text{конв}} (T_1 - T_2)$, где ψ — плотность теплового потока; λ — коэффициент теплопроводности; $a_{\text{конв}}$ — коэффициент теплообмена через конвекцию; T_1 и T_2 — тем-

пература на границах рассматриваемого участка длиной l для индуктивного теплообмена и T_1 — температура тела; T_2 — температура окружающей среды для конвективного теплообмена.

Для получения теплового потока умножим обе части уравнений на площадь S поперечного сечения выделенного участка, т. е. $\Phi = (\lambda S/l)T$ или $\Phi = T/R_{\text{конд}}$; $\Phi = Sa_{\text{конв}}T$ или $\Phi = T/R_{\text{конв}}$, где $R_{\text{конд}} = l/(\lambda S)$ — кондукционное сопротивление; $R_{\text{конв}} = 1/(Sa_{\text{конв}})$ — конвекционное сопротивление.

Б. Уравнение теплоемкости тела $C_T = dQ/dT$, где dQ — изменение количества теплоты в теле при изменении температуры на dT .

Так как изменение количества теплоты в единицу времени есть тепловой поток, то $dQ/dt = \Phi = C_T(dT/dt)$, где $C_T = cm$ — аналог электрической емкости; c — удельная теплоемкость; m — масса тела.

В. В том случае, когда фазовыми переменными являются тепловой поток и температура, компонентное уравнение, соответствующее тепловой индуктивности, не имеет физического смысла.

2.3. Аналогии топологических уравнений

Топологические уравнения в большинстве физических подсистем базируются на уравнениях равновесия и уравнениях непрерывности.

Рассмотрим аналогии топологических уравнений в различных физических подсистемах по отношению к электрической подсистеме.

Электрическая подсистема. Связи между отдельными элементами этой подсистемы устанавливаются на основе законов Кирхгофа.

Уравнение первого закона Кирхгофа устанавливает равенство нулю суммы токов в узлах схемы, т. е. $\sum_{k \in p} I_k = 0$ (уравнение равновесия), где I_k — ток k -й ветви; p — множество номеров ветвей, инцидентных рассматриваемому узлу.

Из уравнения второго закона Кирхгофа видно, что сумма падений напряжений на элементах схемы при их обходе по произвольному контуру равна нулю, т. е. $\sum_{j \in q} U_j = 0$ (уравнение непрерывности), где j —

номер ветви; U_j — падение напряжения на j -й ветви схемы, входящей в контур; q здесь и далее — множество номеров ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Механическая поступательная подсистема. Аналогом уравнения первого закона Кирхгофа является уравнение принципа Даламбера: сумма сил, действующих на тело, включая инерционные, равна нулю, т. е. $\sum_{k \in p} F_k = 0$, где F_k — сила, приложенная к телу.

Аналогом уравнения второго закона Кирхгофа будет уравнение принципа сложения скоростей: абсолютная скорость является суммой относительной и переносных скоростей, или же сумма этих трех скоростей равна нулю (переносных скоростей может быть несколько: с первого тела на второе, со второго на третье и т. д.), т. е. $\sum_{j \in q} V_j = 0$.

Для механических плоскостных и пространственных систем рассмотренные принципы применимы, если F_k и V_j представить в виде векторных величин, когда приведенные выше уравнения справедливы для каждой координатной оси, например для пространственных систем $\sum_{k \in p} F_{kx} = 0$; $\sum_{k \in p} F_{ky} = 0$; $\sum_{k \in p} F_{kz} = 0$; $\sum_{j \in q} V_{jx} = 0$; $\sum_{j \in q} V_{jy} = 0$; $\sum_{j \in q} V_{jz} = 0$, где F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — соответственно проекции сил на оси x , y , z ; V_{jx} , V_{jy} , V_{jz} — соответственно проекции скорости на оси x , y , z .

Механическая вращательная подсистема. Аналогом уравнения первого закона Кирхгофа является уравнение принципа Даламбера для вращательных подсистем, т. е. $\sum_{k \in p} M_k = 0$, где M_k — момент силы, действующий относительно оси вращения, включая момент, вызванный моментом инерции.

Аналогом уравнения второго закона Кирхгофа является уравнение принципа сложения угловых скоростей вдоль оси вращения, т. е. $\sum_{j \in q} \omega_j = 0$.

■ **Примечание.** Этот принцип будет рассмотрен при составлении эквивалентных схем вращательных подсистем.

Гидравлическая (пневматическая) подсистема. Аналогом уравнения первого закона Кирхгофа является уравнение равновесия в узлах подсистемы, т. е. $\sum_{k \in p} Q_{mk} = 0$, где Q_{mk} — поток, подтекающий или оттекающий от узла.

Аналогом уравнения второго закона Кирхгофа является уравнение неразрывности подсистемы, т. е. $\sum_{j \in q} P_j = 0$ — сумма падений давлений при обходе по контуру равна нулю; P_j — падение давления на ветви, входящей в контур.

Тепловая подсистема. Аналогом уравнения первого закона Кирхгофа является уравнение равновесия в узлах подсистемы, т. е. $\sum_{k \in p} \Phi_k = 0$ — сумма тепловых потоков в узлах подсистем равна нулю, где Φ_k — тепловой поток, подтекающий или оттекающий от узла.

Аналогом уравнения второго закона Кирхгофа является уравнение непрерывности, т. е. $\sum_{j \in q} T_j = 0$ — сумма разностей температур при обходе по замкнутому контуру равна нулю, где T_j — разность температур на участке, входящем в контур.

Таким образом, во всех рассмотренных подсистемах можно установить аналогии переменных типа потока и типа потенциала. Эти аналогии и аналогии на уровне простейших элементов сведены в табл. 2.1.

■ **Примечание.** Аналогии рассматривались по отношению к электрической подсистеме, но это не принципиально; в качестве исходной могла быть выбрана любая другая подсистема (кроме тепловой).

Топологические уравнения строго справедливы для установившихся режимов, но их можно применять и в тех случаях, когда временем распространения возбуждений по линиям связи можно пренебречь. Время распространения возбуждений зависит от физической природы подсистемы, т. е. от скорости распространения возбуждений в соответствующей среде и размеров этой среды в конкретном объекте. Под *возбуждением* понимается изменение фазовых переменных. *Критической длиной* на-

Таблица 2.1

Подсистема	Фазовые переменные		Компоненты		
	типа потока	типа потенциала	типа R	типа C	типа L
Электрическая	Ток	Напряжение	Сопротивление	Емкость	Индуктивность
Механическая поступательная	Сила	Скорость	Трение	Масса	Упругость
Механическая вращательная	Момент	Угловая скорость	То же	Момент инерции	Вращательная гибкость
Гидравлическая (пневматическая)	Расход	Давление	»	Гидравлическая емкость	Гидравлическая индуктивность
Тепловая	Тепловой поток	Температура	Теплопроводность	Теплоемкость	—

зывают приближенный предельный размер среды, при превышении которого необходимо учитывать время распространения возбуждений. Критическая длина зависит от временного диапазона моделирования объекта, например если моделируется электрический объект в наносекундном диапазоне, то критическая длина будет порядка 30 см; если в пикосекундном диапазоне, то критическая длина составит единицы и доли миллиметра. Приближенно критическую длину можно определить по формуле $l_{кр} = \Delta t V$, где V — скорость распространения возбуждения в среде, например для электрической подсистемы это скорость света, для механической, гидравлической и пневматической подсистем — скорость звука; Δt — интервал времени, характеризующий временную точность рассмотрения процессов.

Приведенные выше элементы подсистем — линейные. Однако элементы подсистем могут быть и нелинейными, зависящими от режима работы, например гидравлическое сопротивление при турбулентном режиме течения жидкости зависит от расхода, значение емкости p - n -перехода — от напряжения на нем. Если набор линейных и нелинейных элементов дополнить зависимыми и независи-

мыми источниками переменных типа потока I и типа разности потенциалов E , то будем иметь базовые совокупности двухполюсников, на основе которых можно получать математические модели практически любых технических объектов.

Независимые источники используются для моделирования постоянных воздействий на объект, например сила тяжести может быть отражена постоянным источником силы, напряжение питания электронной схемы — источником типа разности потенциалов и т. д.

Зависимые источники можно разделить на группы: 1) источники, зависящие от времени; 2) источники, зависящие от фазовых переменных. Источники, зависящие от времени, используются для моделирования внешних воздействий на объект, например трапецидальным источником расхода может быть отражено функционирование идеального гидронасоса в режимах включения, работы и выключения, синусоидальным источником напряжения — подключение генератора сигналов к электронной схеме. Источники, зависящие от фазовых переменных, используются для отражения нелинейных свойств объектов, а также для установления взаимосвязей между подсистемами различной физической природы.

■ **Примечание.** Применение групп зависимых источников будет проиллюстрировано позднее.

2.4. Получение эквивалентных схем технических объектов

При получении ММ достаточно сложного технического объекта, состоящего из нескольких физических подсистем, нужно:

1) выделить в объекте однородные физические подсистемы, например механическую, гидравлическую, электрическую и т. д.;

2) получить эквивалентные схемы каждой из подсистем;

3) установить связи между подсистемами;

4) получить математическую модель системы (ММС) одним из рассмотренных ниже способов. Этот этап формализован и может быть выполнен с помощью ЭВМ.

● **Пример выделения в объекте однородных физических подсистем.** Гидромеханическое золотниковое устройство представлено на

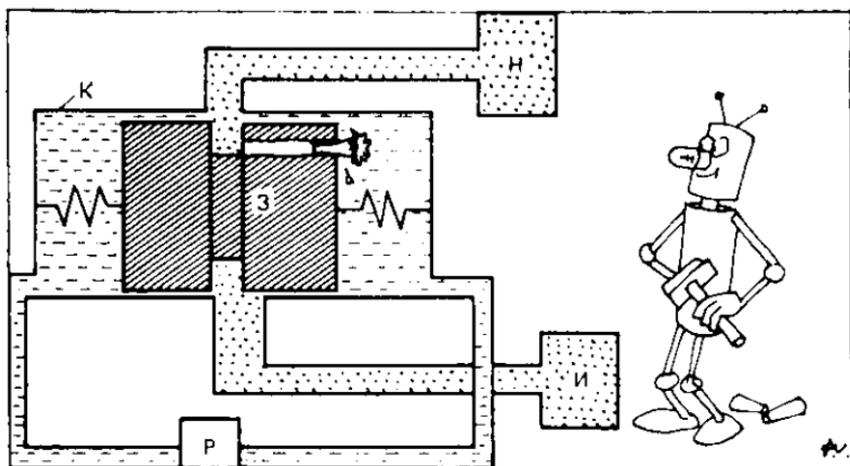


Рис. 2.2. Схема гидромеханического золотникового устройства.

рис. 2.2. Особенность этого примера в том, что в зависимости от учитываемых эффектов можно выделить две или три подсистемы. Предположим, что утечки между золотником 3 и корпусом К отсутствуют, тогда наш объект можно разделить на три подсистемы: одну механическую и две гидравлические. Механическая подсистема состоит из корпуса К, золотника 3 и пружин; первая гидравлическая подсистема — из источника расхода И, трубопроводов, регулируемого зазора и нагрузки Н; вторая гидравлическая подсистема — из регулятора Р, трубопроводов и двух полостей в корпусе.

Таким образом, если в техническом объекте имеются несвязанные подсистемы одной физической природы, то их следует при моделировании рассматривать как отдельные подсистемы. Если в примере учесть утечки между золотником и корпусом, то в объекте будут выделены две подсистемы: механическая и гидравлическая.

■ **Примечание.** Методы получения ММС подробно будут рассмотрены в гл. 3. Ниже будут приведены способы получения эквивалентных схем однородных физических подсистем и типы связей между ними в сложном техническом объекте.

Эквивалентные схемы применяются пользователем САПР в процессе подготовки информации об объекте для комплексов анализа и оптимизации, поэтому детализация объекта выполняется до блоков, которые в программных комплексах представлены подпрограммами ММ. Разработчики САПР или разработчики ММ при включении в комплекс новых подпрограмм моделей должны оперировать эквивалентной схемой объекта, выполненной на уровне двухполюсников.

Инженер отражает в эквивалентной схеме те элементы и свойства реального объекта, которые, по его мнению, оказывают существенное влияние на функционирование объекта. Какими эффектами можно пренебречь, ему подсказывают опыт и интуиция. Поэтому процедура составления эквивалентной схемы не полностью формализована.

Отражение структурных свойств объектов возможно как с помощью эквивалентных схем, так и с помощью графов.

■ **Примечание.** Применение графов в АП будет показано несколько позднее, а пока будем пользоваться эквивалентными схемами, поскольку это более наглядно, так как условное изображение ветви характеризует тип элемента.

Будем использовать обозначения ветвей, приведенные на рис. 2.3.

Ветви типа Е соответствует компонентное уравнение $E=f(Z)$, где в качестве Z могут фигурировать независимая переменная t , фазовые переменные, константа; E — разность переменных типа потенциалов для узлов этой ветви;

ветви типа С — компонентное уравнение $I=C(dU/dt)$;

ветви типа R — компонентное уравнение $I=U/R$;

ветви типа L — компонентное уравнение $U=L(dI/dt)$;

ветви типа I — компонентное уравнение $I=f(Z)$, где Z — аргумент такой же, как у ветви типа Е.

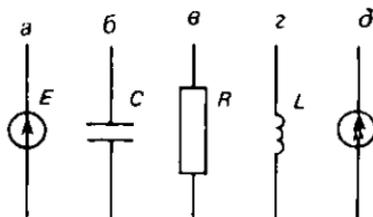


Рис. 2.3. Условные графические обозначения ветвей эквивалентной схемы:

а — типа Е; б — типа С; в — типа R; г — типа L; д — типа I.

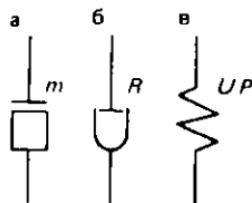


Рис. 2.4. Условные графические обозначения ветвей эквивалентной схемы для механической подсистемы:

а — элемент массы; б — элемент трения; в — элемент упругости.

В этих уравнениях U — переменная типа разности потенциалов на концах ветви, I — переменная типа потока в этой ветви, параметры ветвей могут быть как постоянными, так и зависимыми от фазовых переменных или от времени.

В некоторых физических подсистемах приняты свои условные обозначения, например при отображении динамических свойств механических подсистем используются обозначения, показанные на рис. 2.4.

Эквивалентные схемы механических поступательных подсистем. При построении эквивалентной схемы сначала в моделируемом объекте выделяют элементы, массу которых необходимо учесть. Такие элементы изображаются двухполюсниками (условное обозначение двухполюсника дано на рис. 2.4, *a*). Первый полюс этого двухполюсника соединяется с базовым узлом, отражающим инерциальную систему отсчета (или систему, которую можно принять при решении конкретной задачи за инерциальную), что следует из компонентного уравнения элемента массы, второй полюс представляет собой собственно саму массу (через него осуществляются все взаимодействия элемента с окружающей средой). Далее выделяют учитываемые элементы трения и упругости. Элемент трения (рис. 2.4, *b*) включается между контактируемыми телами, элемент упругости (рис. 2.4, *в*) — между телами, соединяемыми упругой связью.

Внешние усилия, прикладываемые к механической системе, отображаются включением источника силы между базовым узлом и тем узлом, к которому подключен элемент массы, подвергающийся усилию. Идеальных источников скорости в природе не существует, так как этот источник должен обладать бесконечной мощностью и независимо от массы тела ему сообщается скорость, равная значению источника. Но тем не менее в эквивалентных схемах такие источники встречаются. Если моделировать вертикальные перемещения автомобиля при его движении по неровной каменистой дороге, то профиль дороги можно представить источником скорости, который будет включен между базовым узлом (земля) и узлом, с которого начинается изображение колеса.

● **Пример механической поступательной системы.** На рис. 2.5, *a* изображена механическая поступательная система, а на рис. 2.5, *b* — ее эквивалентная схема для движения вдоль горизонтальной оси. Автомобиль массой m_1 везет груз массой m_2 , при-

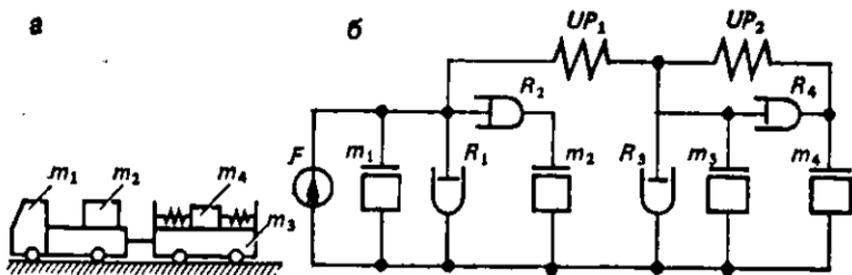


Рис. 2.5. Пример механической поступательной системы (а) и ее эквивалентная схема (б).

цеп массой m_3 с подпружиненным в нем грузом массой m_4 . Узлам схемы соответствуют скорости, ветвям — усилия. На рис. 2.5, б m_1, \dots, m_4 — вышеназванные массы; F — тяга автомобиля; R_1 и R_3 — приведенные коэффициенты трения автомобиля и прицепа о землю; R_2 и R_4 — коэффициенты трения грузов с кузова автомобиля и прицепа; UP_1 — упругость сцепки; UP_2 — упругость пружин, удерживающих груз массой m_4 .

- **Пример механической поступательной системы с рычагом.** На рис. 2.6, а изображена рычажная система. При малых перемещениях такую систему можно считать поступательной. Рычаг изображен на эквивалентной схеме (рис. 2.6, б) двумя зависимыми источниками F_p и E_p . Он представляет собой трансформатор сил и скоростей: $F_p = KF_{E_p}$; $E_p = KV_{F_p}$; $K = l_2/l_1$, здесь F_{E_p} — усилие (в ветви источника скорости E_p), воздействующее на пружину UP_2 ; V_{F_p} — скорость на верхнем конце рычага (скорость m_3 или же F_p); l_1 и l_2 — соответствующие плечи рычага. Обозначения элементов системы и эквивалентной схемы совпадают; m_3 — масса пружины UP_1 , массами остальных пружин пренебрегаем.

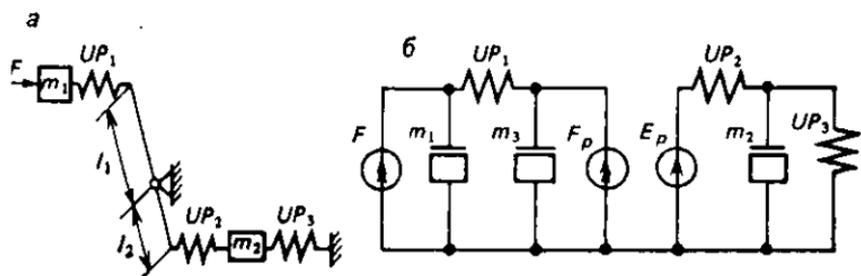


Рис. 2.6. Пример рычажной механической системы (а) и ее эквивалентная схема (б).

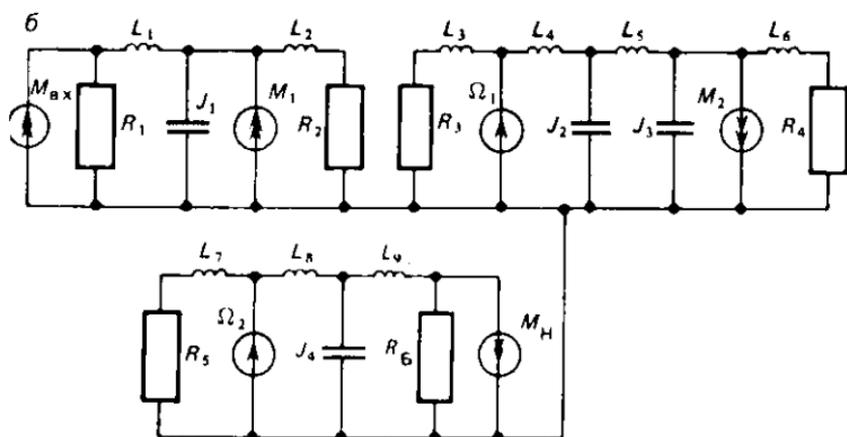
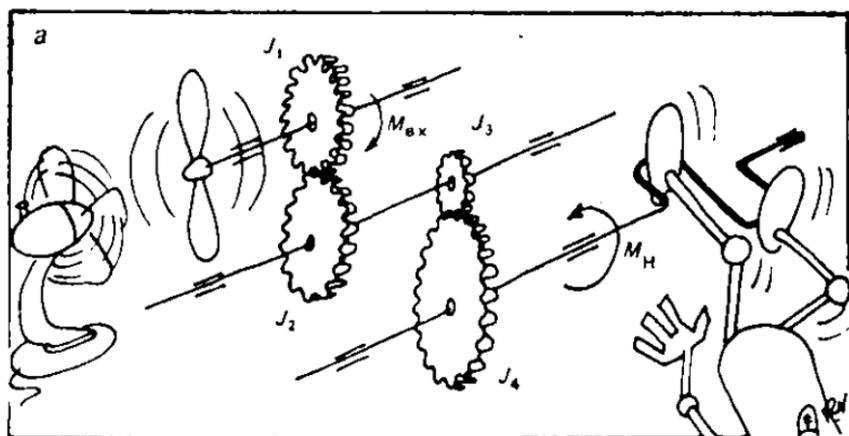


Рис. 2.7. Модель редуктора.

Эквивалентные схемы вращательных механических систем. В таких схемах базовый узел, как правило, соответствует неподвижной (невращающейся) части объекта. Ветвь, изображающая момент инерции, включается между базовым узлом и узлом, через который осуществляется взаимодействие тела с данным моментом инерции с телами, находящимися с ним на одной оси вращения.

● **Пример модели редуктора.** На рис. 2.7, а представлен редуктор, а на рис. 2.7, б — его эквивалентная схема, узлы которой соответствуют угловым скоростям, а ветви — моментам сил. В данном случае система состоит из трех вращательных подсистем (согласно числу осей вращения), взаимодействие между которыми осуществляется зубчатым зацеплением — трансформато-

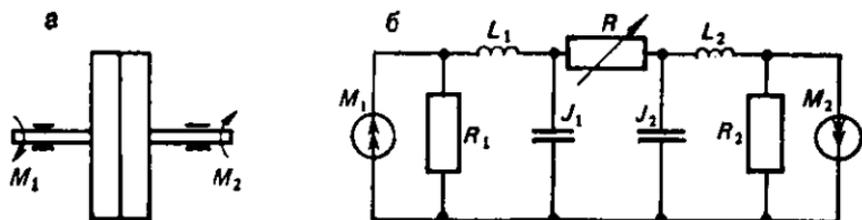


Рис. 2.8. Схематичное изображение муфты сцепления (а) и ее эквивалентная схема (б).

ром моментов и угловых скоростей. На эквивалентной схеме зацепления представлены зависимыми источниками момента и угловой скорости: M_1 и Ω_1 (первое зацепление); M_2 и Ω_2 (второе зацепление).

Для первого зацепления $M_1 = k_1 M_{\Omega_1}$; $\Omega_1 = k_1 \Omega_{M_1}$; $k_1 = D_2/D_1$, где k_1 — передаточное отношение; D_1 и D_2 — диаметры зубчатых колес соответственно с моментами инерции J_1 и J_2 ; M_{Ω_1} — момент на элементе Ω_1 , т. е. момент, противодействующий вращению первого колеса со стороны второго; Ω_{M_1} — источник угловой скорости для второго колеса со стороны первого.

Для второго зацепления $M_2 = k_2 M_{\Omega_2}$; $\Omega_2 = k_2 \Omega_{M_2}$; $k_2 = D_3/D_4$, где k_2 — передаточное отношение; D_3 и D_4 — диаметры зубчатых колес с моментами I_3 и I_4 соответственно.

На эквивалентной схеме (рис. 2.7, б) $M_{вх}$ — момент на входе редуктора, $M_{н}$ — момент нагрузки, L_4 и L_8 — крутильные гибкости зубчатых колес, характеризующие упругие свойства зубьев; L_1, \dots, L_9 — крутильные гибкости валов; R_1, \dots, R_8 — коэффициенты трения в подшипниках с учетом приведенного трения в зубчатых зацеплениях.

- **Пример модели муфты сцепления автомобиля.** Примером, когда ветвь типа R включается между двумя небазовыми узлами, может служить эквивалентная схема муфты сцепления автомобиля, составленная для вращательного движения (рис. 2.8, б). На рис. 2.8, а схематично изображена муфта сцепления. На рис. 2.8 M_1 — момент на входном валу; M_2 — нагрузка на выходном валу муфты; R_1 и R_2 — коэффициенты трения в подшипниках; L_1 и L_2 — крутильные гибкости валов; J_1 и J_2 — моменты инерции ведущего и ведомого дисков муфты; $R = R(t)$ — коэффициент трения между дисками сцепления.

При составлении эквивалентных схем вращательных механических систем особое внимание следует обратить на направление источников моментов и скоростей. На рис.

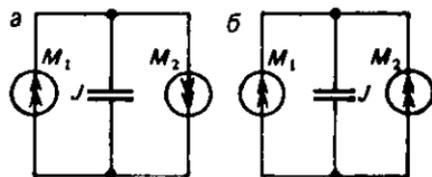


Рис. 2.9. Схемы встречного включения источников момента (а) и согласного включения источников момента (б).

2.9, а представлен случай, когда моменты M_1 и M_2 противодействуют друг другу, а на рис. 2.9.б — случай, когда моменты M_1 и M_2 действуют в одном направлении.

■ **Примечание.** Аналогичное замечание справедливо и для источников силы в механических поступательных подсистемах.

Эквивалентные схемы гидравлических (пневматических) подсистем. За базовый узел при составлении эквивалентных схем таких подсистем обычно принимается внешняя среда.

■ **Примечание.** Поскольку гидравлическая и пневматическая подсистемы аналогичны, в дальнейшем будем говорить только о гидравлической подсистеме.

Резервуары изображаются на эквивалентных схемах гидравлических подсистем емкостями, которые одним полюсом подключаются к базовому узлу, через другой полюс осуществляется взаимодействие этой емкости с трубопроводами и другими гидравлическими элементами. Трубопровод на эквивалентной схеме изображается гидравлическими сопротивлением и индуктивностью, включенными последовательно, но может быть отображен и только ветвью типа R , если пренебречь инерционностью жидкости.

● **Пример фрагмента гидравлической подсистемы.** На рис. 2.10, а представлен фрагмент гидравлической подсистемы, а на рис. 2.10, б — его эквивалентная схема. В узлах схемы определяются давления, расходы распределены по ветвям. Трубопроводы отображены гидравлическими сопротивлениями R_1, \dots, R_4 и гидравлическими индуктивностями L_1, \dots, L_4 ; P_1 и P_2 — источники давлений; C_1 — гидравлическая емкость; зависимый источник расхода G_1 равен расходу через элементы R_3 и L_3 ; переменная

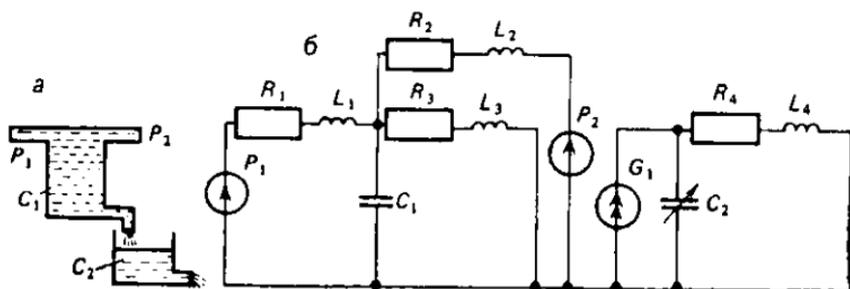


Рис. 2.10. Пример гидравлической подсистемы (а) и ее эквивалентная схема (б).

гидравлическая емкость C_2 определяется через заполненность сосуда, т. е. $C_2 = f(\int Q_m c_2 dt)$.

- **Примечание.** Способ вычисления интеграла при моделировании, см. § 2.5.

Эквивалентные схемы тепловых подсистем. Если в ММ элементов используются значения температур, то за базовый узел в таких подсистемах может приниматься условное тело с температурой 0 К или 0°C или, если в ММ используются только разности температур, произвольная точка подсистемы.

В узлах эквивалентной схемы определяются либо абсолютные температуры, либо перегрев относительно базового узла; тепловые потоки распределяются по ветвям схемы.

- **Пример тепловой подсистемы.** На рис. 2.11, б представлен фрагмент печатной платы, подлежащий тепловому расчету, на

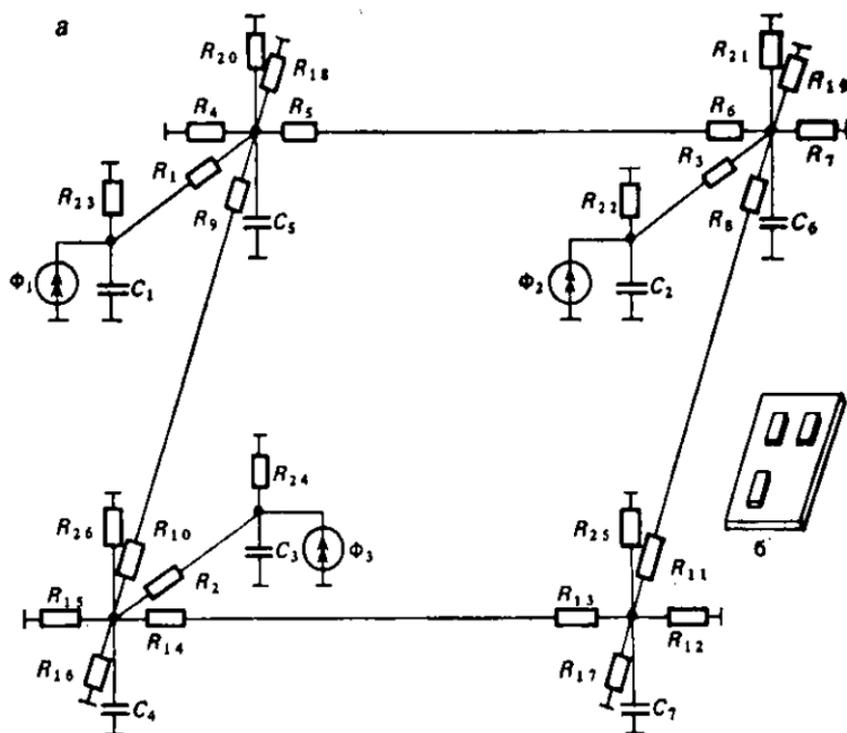


Рис. 2.11. Фрагмент печатной платы (б) и ее тепловая эквивалентная схема (а).

рис. 2.11, а — ее эквивалентная схема. Фрагмент печатной платы разбит на четыре участка. Микросхемы на эквивалентной схеме представлены источниками теплового потока Φ_1, \dots, Φ_3 . Теплоемкости микросхем обозначены C_1, \dots, C_3 ; теплоемкости участков платы — C_4, \dots, C_7 ; резисторами R_1, \dots, R_3 представлены тепловые сопротивления переходов микросхема — плата, R_4, \dots, R_{19} — кондукционные тепловые сопротивления; R_{20}, \dots, R_{26} — конвекционные тепловые сопротивления. Поскольку плата расположена горизонтально, теплоотдачей вниз от платы пренебрегают.

Эквивалентные схемы электрических подсистем. Эквивалентные схемы таких подсистем практически совпадают с их принципиальными схемами, заменяются только сложные радиокомпоненты их схемами замещения, а также могут быть учтены «паразитные» элементы монтажа.

Под *схемой замещения* понимается эквивалентная схема сложного радиокомпонента, составленная из двухполюсников.

На рис. 2.12, а представлена схема двухкаскадного усилителя, а на рис. 2.12, б — его эквивалентная схема. Элементы, обведенные пунктирной линией, входят в эквивалентные схемы замещения транзистора.

Рекомендации к составлению эквивалентных схем. При составлении эквивалентных схем следует избегать

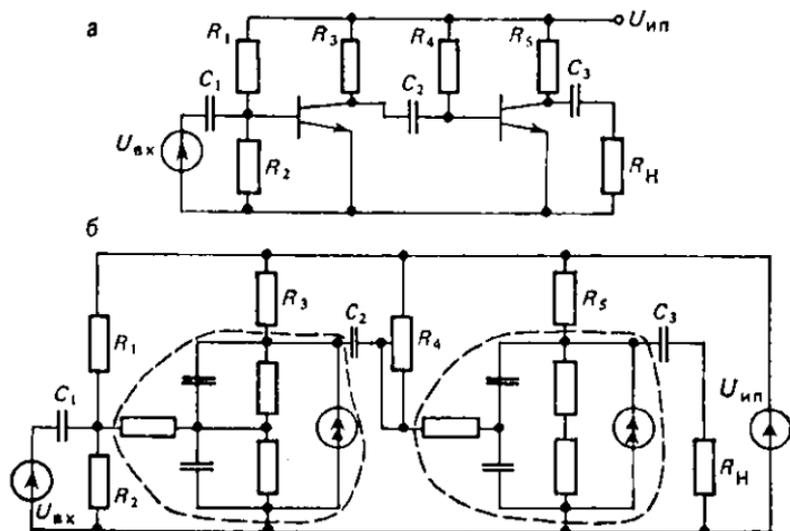


Рис. 2.12. Принципиальная схема усилителя (а) и его эквивалентная схема (б).

последовательного соединения источника типа I и ветви типа L, а также параллельного соединения источника типа E и ветви типа C. Причина этого в том, что, например, при последовательном соединении источника силы с элементом гибкости (пружиной) скачкообразное изменение силы приведет к тому, что в узле их соединения скорость может достигать бесконечных величин. При параллельном соединении, например источника давления и гидравлической емкости, влияние емкости никак не сказывается на процессах в объекте, поскольку разность давлений в узлах их подключения определяется только источником и значение расхода, поступающего в емкость при скачкообразном изменении давления, может достигать бесконечных значений. Для устранения таких подключений следует учесть какой-либо эффект, которым ранее пренебрегали: в узел соединения ветвей типа I и L подключить ветвь типа C или R, между ветвями типа E и C включить ветвь типа R или L. Например, при последовательном соединении источника силы и пружины можно в узел их соединения подключить элемент массы, соответствующий массе пружины, при параллельном соединении источника давления и гидравлической емкости между ними можно включить элемент местного сопротивления, соответствующий сопротивлению входного отверстия в емкости.

- **Примечание.** Приведенные выше замечания в основном относятся к подключению входных источников, но и для зависимых источников их учет также желателен.

Типы связей между подсистемами различной физической природы. Выше рассмотрены эквивалентные схемы однородных физических подсистем. Однако реальный объект, как правило, представляет собой совокупность разнородных физических подсистем. Согласно основным этапам получения ММС на макроуровне, после составления эквивалентных схем однородных подсистем следует установить связи между ними, т. е. определить их воздействие друг на друга. Можно выделить три типа связей: 1) трансформаторная, 2) гираторная, 3) через зависимые параметры элементов.

При трансформаторном типе связи в одной подсистеме включается зависимый источник разности потенциалов. Этот источник зависит от разности потенциалов на зависимом источнике потока, установленном в

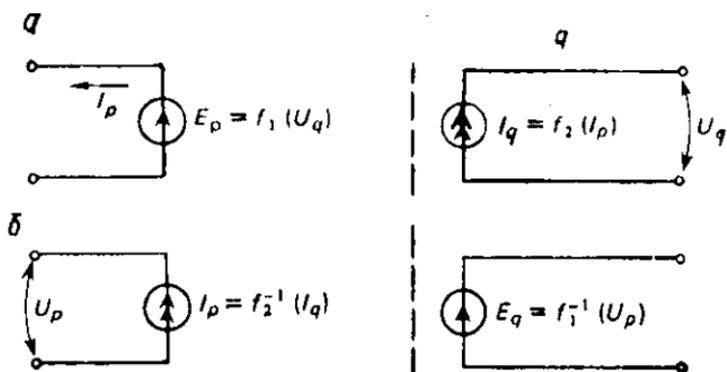


Рис. 2.15. Схема гираторного типа связи.

другой подсистеме, который, в свою очередь, зависит от потока через первый источник. На рис. 2.13, *а* показана эквивалентная схема трансформаторной связи, где *p* и *q* — подсистемы различной природы.

Если же источники в подсистемах поменять местами, то схема будет иметь такой вид, как изображено на рис. 2.13, *б*. Подобный вид связи уже встречался в ранее рассмотренных примерах эквивалентных схем однородных физических подсистем (рычаг, зубчатое зацепление колес).

Для разнородных физических подсистем рассмотренная выше связь характерна при электромеханическом взаимодействии.

- **Пример трансформаторного типа связи.** На рис. 2.14, *а* представлен электромеханический вибратор, на рис. 2.14, *б* — его эквивалентная схема. Источник силы *F*, воздействующий на массу *m*, зависит от скорости изменения электромагнитного поля, т. е. от тока через катушку электромагнита, или, что то же са-

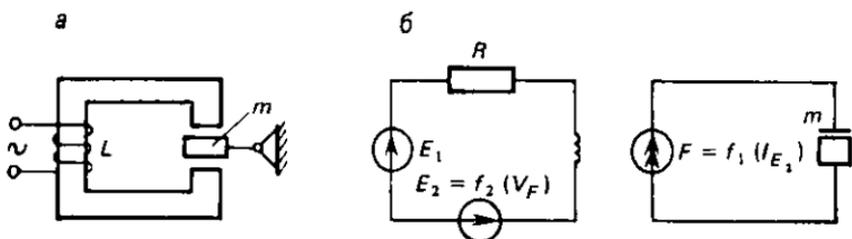


Рис. 2.14. Пример электромеханического вибратора (*а*) и его эквивалентная схема (*б*).

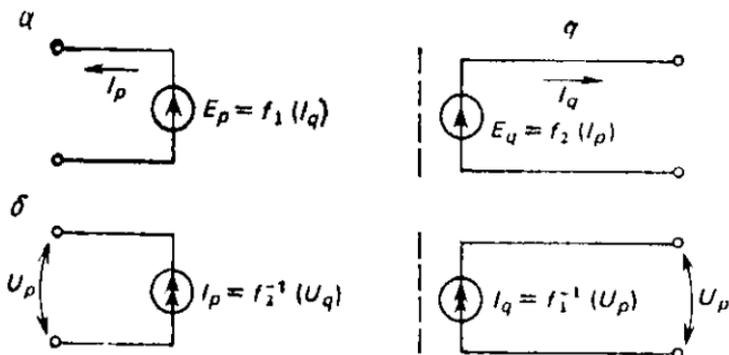


Рис. 2.15. Схема гираторного типа связи.

мое, от тока через источник противоз. д. с. E_2 , который зависит от скорости движения массы m ; E_1 — входное синусоидальное напряжение; R — активное сопротивление обмотки электромагнита.

Использование схемы рис. 2.13, *a* или 2.13, *б* определяется из физических соображений или же из учета последовательного и параллельного подключения источников.

При гираторном типе связи в обеих физических подсистемах включаются зависимые источники одного вида: либо типа разности потенциалов, либо типа потока. Источники разности потенциалов зависят от потока через источник в другой подсистеме (рис. 2.15, *a*), источники потока зависят от разности потенциалов на источнике в другой подсистеме (рис. 2.15, *б*). Такой вид связи характерен при взаимодействии механической и гидравлической или пневматической подсистем.

● Пример гираторного типа связи. На рис. 2.16, *a* изображен гидроцилиндр (совокупность гидравлической и пневматической под-

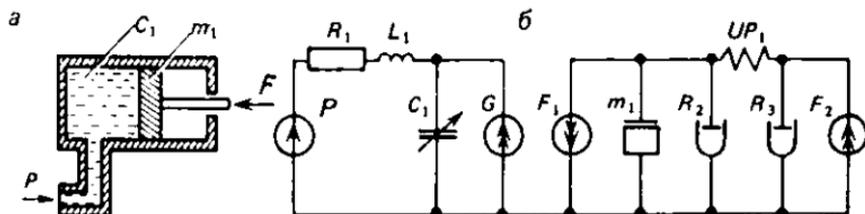


Рис. 2.16. Схематичное изображение гидроцилиндра (*a*) и его эквивалентная схема (*б*).

систем), а на рис. 2.16, б — его эквивалентная схема. Гидравлическая система на эквивалентной схеме представлена источником давления P , который через трубопровод (элементы R_1 и L_1) нагнетает жидкость в переменную емкость C_1 ; механическая подсистема представлена источником усилия F_2 , который, преодолевая трение штока о стенки, через упругий шток UP_1 , передвигает поршень массой m_1 , имеющий трение R_2 о стенки цилиндра.

Воздействие на гидравлическую подсистему со стороны механической учитывается источником расхода G , который зависит от скорости движения поршня, т. е. $G = k_1 V$ при $k_1 = \rho S$, где S — площадь поперечного сечения поршня; ρ — плотность жидкости; V — скорость движения поршня (потенциал механической подсистемы).

Источник силы F_1 учитывает воздействие гидравлической подсистемы на механическую: $F_1 = k_2 P$ при $k_2 = S$, где P — давление в емкости C_1 (потенциал гидравлической подсистемы).

Выбор схемы связи (рис. 2.15, а или 2.15, б) выполняют так же, как и для трансформаторной связи.

- **Примечание.** Трансформаторная и гираторная связи устанавливают взаимодействие подсистемы по двум парам фазовых переменных. В последнем примере неверной будет такая связь: в гидравлической подсистеме зависимый источник расхода $G = kV$, а в механической — зависимый источник скорости $V = G/k$. В этом случае было бы установлено соответствие только между фазовыми переменными одной пары.

Связь через зависимые параметры элементов характерна при взаимодействии с тепловой подсистемой. В зависимости от значений температуры меняются параметры элементов взаимодействующей подсистемы, например вязкость жидкости, значение сопротивления резистора. Обратное влияние на тепловую подсистему учитывается введением в эквивалентную схему тепловой подсистемы зависимых источников теплового потока. При отсутствии массопереноса значение источника определяется мощностью, выделяемой элементом; при наличии массопереноса — переносимой массой.

В случае моделирования влияния температуры на работу технических объектов без учета обратного воздействия предполагают, как будет изменяться температура во времени, и переносят эту зависимость на параметры элементов объекта, т. е. делают параметры зависимыми от времени. Аналогично моделируют старение элементов объекта при расчетах надежности.

2.5. Сложные модели элементов технических объектов

Рассмотренных в § 2.4 моделей простейших элементов подсистем, зависимых источников и элементов связи подсистем достаточно для получения ММ многих технических объектов. Но гораздо удобнее использовать более сложные элементы подсистем, ММ которых получены заранее, т. е. в программном обеспечении САПР каждой такой модели соответствует подпрограмма. Пользователь САПР при этом избавлен от необходимости описания достаточно сложных зависимостей, реализованных в модели.

По способу получения различают теоретические и эмпирические ММ.

Теоретические ММ отражают физические закономерности процессов, происходящих в элементе. При этом эквивалентная схема элемента и его параметры имеют определенный физический смысл.

■ **Примечание.** Все ранее рассмотренные модели являются теоретическими.

Эмпирические ММ получают на основании изучения объекта как «черного ящика», т. е. по его отклику на внешнее воздействие, причем реакции на внешнее воздействие могут изучаться как на реальном объекте, так и с помощью более точных ММ (например, моделей микроуровня).

Теоретические ММ, как правило, более универсальны и справедливы в большем диапазоне внешних воздействий, чем эмпирические ММ.

Сложные математические модели электрической подсистемы. Наиболее распространенными сложными элементами электрической подсистемы в радиоэлектронных устройствах являются диод, биполярный и МДП-транзисторы. Создано и используется несколько разновидностей ММ диодов и биполярных транзисторов, различающихся точностью, областями адекватности, показателями экономичности. Рассмотрим характерные модели диода и биполярного транзистора, называемые *моделями ПАЭС* и используемые в ряде программ анализа электронных схем.

Математическая модель диода основана на аппроксимации вольт-амперной характеристики p - n -перехода:

$$I = I_T \exp[U/(m\varphi_T) - 1], \quad (2.1)$$

где I и U — ток и напряжение на диоде; I_T — тепловой ток p - n -перехода; φ_T — температурный потенциал; m — эмпирический коэффициент, позволяющий точнее аппроксимировать вольт-амперную характеристику реального диода.

В таком виде ММ, естественно, не учитывает динамических свойств диода. Для их отражения параллельно зависимому источнику тока, задаваемому (2.1), подключается емкость C :

$$C = C_{60} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - U} \right)^n + \frac{\tau}{m\varphi_T} I_T e^{U/(m\varphi_T)}, \quad (2.2)$$

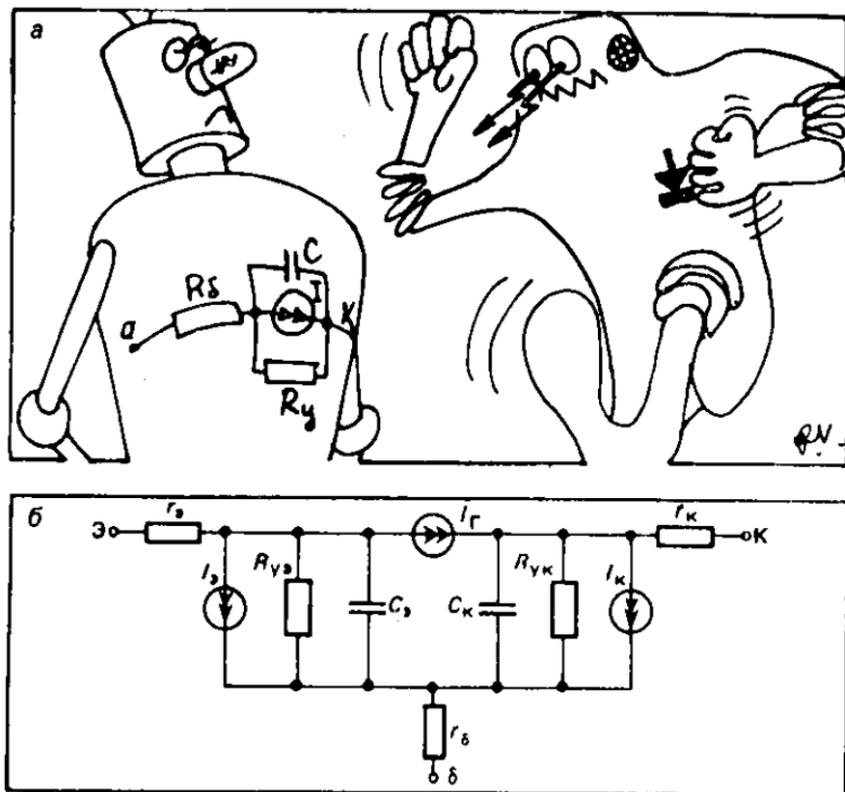


Рис. 2.17. Эквивалентные схемы диода (а) и биполярного транзистора (б).

где C_{60} — барьерная емкость p - n -перехода при $U=0$; φ_0 — контактная разность потенциалов, n равен $1/2$ или $1/3$ (в зависимости от характера перехода), второе слагаемое в (2.2) есть диффузионная емкость.

Эквивалентная схема диода, представленная на рис. 2.17, а, дополнена резисторами: R_6 , учитывающим объемное омическое сопротивление полупроводника, и R_y , учитывающим утечку по поверхности диода.

Эквивалентная схема биполярного транзистора представлена на рис. 2.17, б. Так как транзистор состоит из двух p - n -переходов эмиттер-база и коллектор-база, то элементы I_3 , C_3 , R_{y3} , I_k , C_k , R_{yk} — элементы соответствующих p - n -переходов, $I_T = BI_3 - B_n I_k$ — источник тока, отражающий пролет неосновных носителей через базу и определяющий усилительные свойства транзистора (B и B_n — нормальный и инверсный коэффициенты усиления тока), r_3 , r_k и r_6 — объемные сопротивления областей соответственно эмиттера, коллектора и базы.

Пользователь САПР может не знать этих эквивалентных схем, ему достаточно сведений об области применения моделей, их описания на входном языке программного комплекса анализа и значений параметров. Описание транзистора может выглядеть так:

TR ___ U1 ___ U2 ___ U3, KT361,

где U1, U2, U3 — узлы подключения соответственно эмиттера, базы и коллектора, KT361 — тип транзистора, определяющий значения его параметров.

Математическая модель МДП-транзистора — в своем достаточно простом варианте может быть задана эквивалентной схемой (рис. 2.18) и выражением для зависимого источника тока

$$I_{и-с} = k_1 (U_{3-и} - U_{пор})^2 \left(1 - \exp \left(- \frac{3U_{C-и}}{U_{3-и} - U_{пор}} \right) \right) + k_2 (U_{3-и} - U_{пор}) U_{C-и}, \quad (2.3)$$

где k_1 — удельная крутизна вольт-амперной характеристики сток — затвор; k_2 — удельная выходная проводимость.

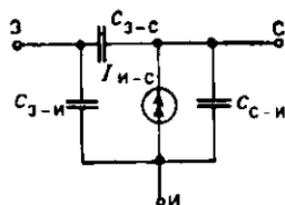


Рис. 2.18. Эквивалентная схема МДП-транзистора.

мость; $U_{\text{пор}}$ — пороговое напряжение; $U_{з-и}$ и $U_{с-и}$ — разности потенциалов затвор — исток и сток — исток.

Пороговое напряжение изменяется в зависимости от разности потенциалов между истоком и подложкой. Эта зависимость задается выражением

$$U_{\text{пор}} = U'_{\text{пор}} + b(\sqrt{U_{и-п} + 2\varphi_0} - \sqrt{2\varphi_0}),$$

где $U'_{\text{пор}}$ — пороговое напряжение при $U_{и-п} = 0$; b и φ_0 — параметры, зависящие от конструктивного исполнения транзистора; $C_{з-и}$, $C_{з-с}$, $C_{с-и}$ — межэлектродные емкости; $U_{и-п}$ — разность потенциалов исток — подложка.

Сложные элементы механических систем. При моделировании механических систем помимо основных фазовых переменных (сил и скоростей) для поступательного движения удобно использовать дополнительную переменную — перемещение. Это связано с тем, что многие параметры элементов зависят от перемещения, например у пружины, работающей на сжатие, при смыкании витков изменяется упругость. Для вращательного движения в случае необходимости можно ввести в рассмотрение дополнительную переменную — угловое перемещение.

- **Пример поступательной механической системы с элементом, зависящим от перемещения** (рис. 2.19, а). На рис. 2.19, б приведена эквивалентная схема этой системы.

Так как перемещение S вычисляется через интегрирование скорости, т. е. $S = \int V dt$, то, проинтегрировав скорость узла 2,

получим перемещение левого конца пружины. Для моделирования перемещения S можно использовать эквивалентную схему из элементов I и C , представляющую собой идеальный интегратор, что следует из компонентного уравнения емкости $I = C(dU/dt)$ или $(1/C) \int Idt = U$, т. е. разность потенциалов на емкости представляет собой интеграл от тока через нее, если принять $C = 1$. Если принять $I = V$, то напряжение на емкости

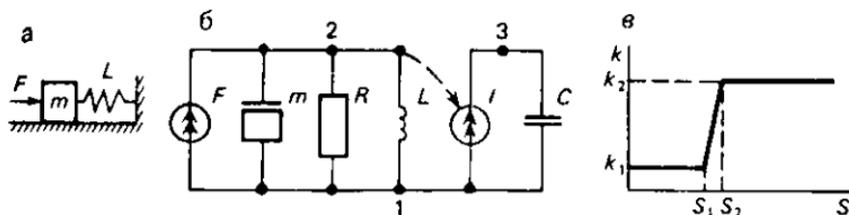


Рис. 2.19. Пример механической поступательной системы (а), ее эквивалентная схема (б), зависимость жесткости пружины от перемещения (в).

является аналогом перемещения левого конца пружины и используется в ММ прижины для определения жесткости K согласно характеристике, представленной на рис. 2.19, в.

Компонентные и топологические уравнения интегратора включаются в общую систему уравнений объекта.

- **Примечание.** Реальные технические объекты моделируют в трех- или двухмерном пространстве. В дальнейшем ради простоты изложения будем рассматривать двухмерный случай.

Математические модели взаимодействия между механическими телами достаточно сложные, но разрабатываются однократно, и их разработку должны выполнять либо квалифицированные пользователи, либо разработчики САПР. В качестве примеров рассмотрим модели шарнира, нерастяжимой тяги и скользящей пары.

Фазовыми переменными плоских механических систем являются скорости V_x, V_y и усилия F_x, F_y по координатам x и y , угловые скорости ω и моменты M . При моделировании пространственных систем к этим переменным добавятся пара фазовых переменных для координаты z и еще две пары вращательных фазовых переменных для соответствующих плоскостей.

Для каждого тела будем считать заданными координаты центра масс, массу, центральный момент инерции [координаты центра масс зададим в декартовой неподвижной системе координат через (x_{i0}, y_{i0}) , где i — номер тела], введем подвижную, связанную с этим телом полярную систему координат, начало которой будет располагаться в центре масс тела. Эту систему координат будем использовать для задания контактных точек тела через (r_{ij}, φ_{ij}) , где i, j — номер тела и контактной точки (для контактных точек в неподвижной системе координат $i=0$).

Шарнирная связь тела с неподвижным основанием показана на рис. 2.20, а, где x_0y_0 — неподвижная система координат, x_1y_1 — подвижная система координат с координатами контактной точки (r_{11}, φ_{11}) . В неподвижной системе координат (r_{01}, φ_{01}) — координаты контактной точки, (x_{10}, y_{10}) — координаты центра масс, φ_{10} — угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной. Независимо от вида воздействия на тело шарнир ограничивает его перемещения вращательным движением вокруг контактной точки, иначе это условие с привязкой к осям координат неподвижной системы можно записать в виде

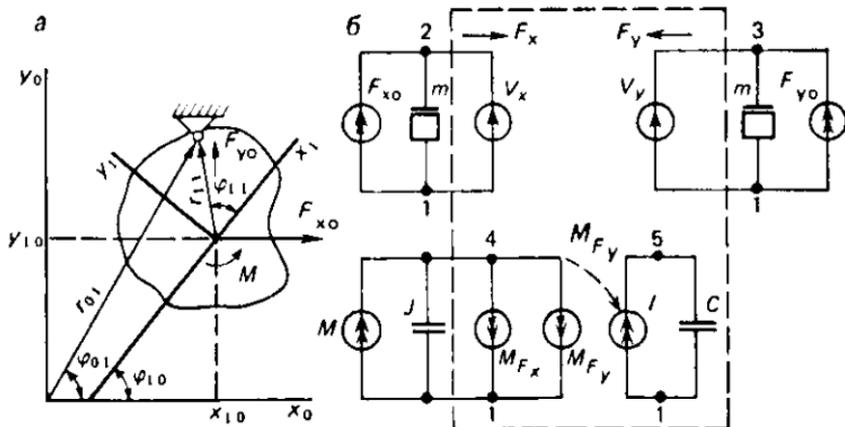


Рис. 2.20. Пример шарнирного соединения тела с неподвижным основанием (а) и его эквивалентная схема (б).

$$\begin{aligned} r_{01} \cos \varphi_{01} - r_{11} \cos (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= x_{10}; \\ r_{01} \sin \varphi_{01} - r_{11} \sin (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= y_{10}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку фазовыми переменными являются линейные и угловые скорости, перейдем к ним, продифференцировав (2.4) по времени:

$$\begin{aligned} \omega_1 r_{11} \sin (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= V_{1x}; \\ -\omega_1 r_{11} \cos (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= V_{1y}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ω_1 — угловая скорость тела I ; V_{1x} и V_{1y} — скорости центра тяжести тела I по соответствующим координатам.

Уравнениям (2.5) соответствует эквивалентная схема, показанная на рис. 2.20, б, где F_{x0} , F_{y0} , M — внешние воздействия на тело; m и J — масса тела и центральный момент инерции соответственно; элементы, составляющие собственно модель шарнира, обведены на рис. 2.20, б пунктирной линией; F_x и F_y — проекции реакций в шарнире на координатные оси x и y ; V_x и V_y — зависимые источники скорости, определяемые (2.5); $M_{F_x} = F_x r_{11} \sin (\varphi_{10} + \varphi_{11})$ и $M_{F_y} = F_y r_{11} \cos (\varphi_{10} + \varphi_{11})$ — моменты реакций в шарнире относительно центра тяжести; I, C — интегратор [I — источник, линейно зависящий от угловой скорости (разности угловых скоростей узлов 4 и 1) с коэффициентом 1, т. е. $I = U_{41}$, значение емкости равно 1].

Кроме уравнений (2.5) при составлении схемы учтено, что реакции в шарнире, согласно третьему закону Ньютона, с равным усилием действуют на тело и на неподвижную систему отсчета.

Интегратор позволяет получить значение угла поворота φ_{10} , необходимого для определения линейных скоростей и моментов. В эквивалентную схему (рис. 2.20, б) можно было бы ввести еще два интегратора для определения перемещений по осям x и y , если бы эти перемещения фигурировали в качестве аргументов в каких-либо функциональных зависимостях.

■ **Примечание.** Как будет показано в гл. 3, система уравнений, получаемая с помощью эквивалентной схемы (рис. 2.20), замкнутая.

Для пользователя САПР модель такого шарнира представляется в виде «черного» ящика с указанным порядком узлов подключения и параметрами — координатами контактной точки (r_{11} , φ_{11}) и начальным значением угла φ_{10} , если он по каким-либо соображениям выбирается не равным нулю. Его описание на языке программного комплекса анализа может выглядеть так:

ШАРНИР ___У1 ___У2 ___У3 (r_{11} , φ_{11} , φ_{10}).

Шарнирная связь двух подвижных тел показана на рис. 2.21, а. Тело 1 с координатами центра масс (x_{10} , y_{10}) и относительным углом поворота φ_{10} подвижной системы координат x_1y_1 через шарнир А связано с телом 2 с координатами центра масс (x_{20} , y_{20}) и углом поворота φ_{20} подвижной системы координат. Для такого соединения тел можно записать уравнения

$$\begin{aligned} r_{11} \cos (\varphi_{10} + \varphi_{11}) - r_{21} \cos (\varphi_{20} + \varphi_{21}) &= x_{20} - x_{10}; \\ -r_{11} \sin (\varphi_{10} + \varphi_{11}) + r_{21} \sin (\varphi_{20} + \varphi_{21}) &= y_{10} - y_{20}. \end{aligned}$$

Продифференцируем эти уравнения по t для перехода от перемещений к скоростям:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 r_{21} \sin (\varphi_{20} + \varphi_{21}) - \omega_1 r_{11} \sin (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= V_{2x} - V_{1x} = V_x, \\ \omega_2 r_{21} \cos (\varphi_{20} + \varphi_{21}) - \omega_1 r_{11} \cos (\varphi_{10} + \varphi_{11}) &= V_{1y} - V_{2y} = V_y, \end{aligned} \right\} (2.6)$$

где ω_i — угловая скорость i -го тела; V_{ix} и V_{iy} — скорости центра масс i -го тела по осям x и y соответственно.

Зависимости (2.6) позволяют интерпретировать ММ шарнира как зависимые источники скорости, включен-

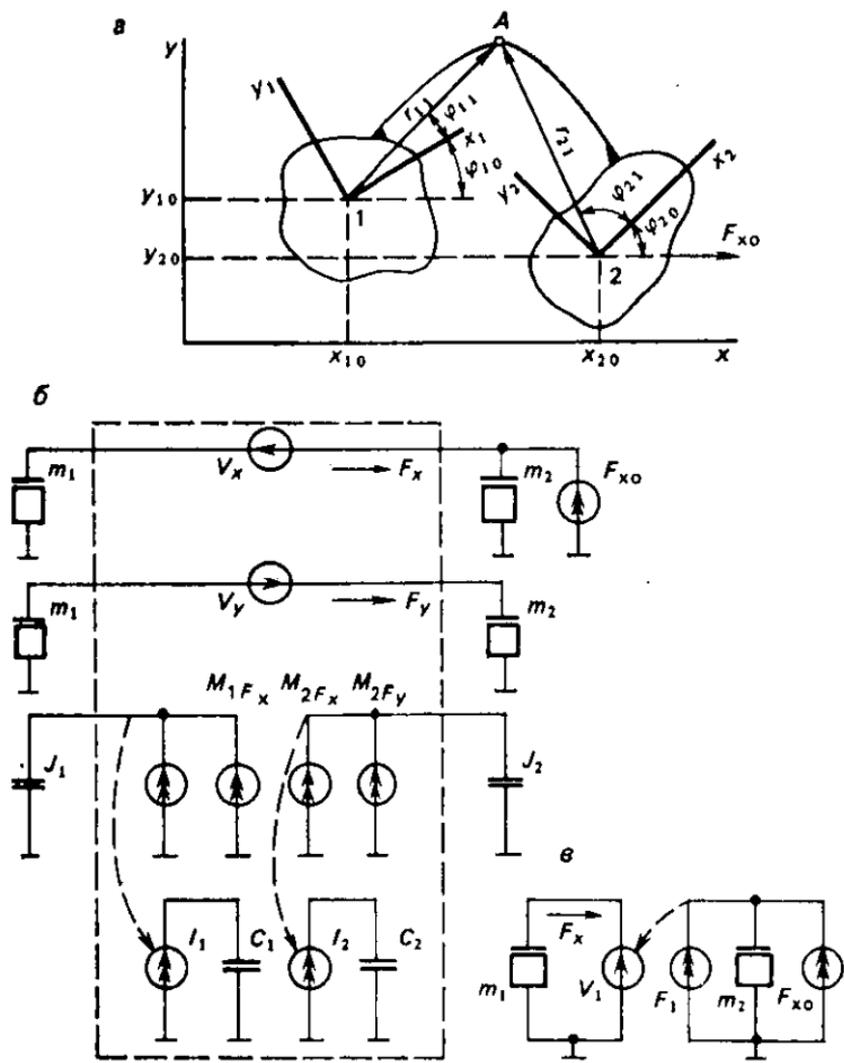


Рис. 2.21. Пример шарнирного соединения двух тел (а), первый вариант его эквивалентной схемы (б), второй вариант его эквивалентной схемы для сил и скоростей вдоль оси x (б).

ные в эквивалентные схемы для поступательного движения. Для эквивалентной схемы вращательного движения нужно учесть моменты от реакций в шарнире.

Эквивалентная схема объекта представлена на рис. 2.21, б, где схема модели шарнира выделена пунктирной линией; V_x и V_y — источники, определяемые со-

гласно (2.6) (они передают усилия F_x и F_y от одного тела к другому). Через усилия F_x и F_y определяются моменты от реакций в шарнире относительно центра масс:

$$\begin{aligned} M_{1F_x} &= F_x r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}); \\ M_{1F_y} &= F_y r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); \\ M_{2F_x} &= F_x r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\ M_{2F_y} &= F_y r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где I_1, C_1, I_2, C_2 — интеграторы, позволяющие вычислять углы поворота, необходимые для (2.6) и (2.7); F_{x0} — внешнее воздействие на объект.

■ **Примечание.** Альтернативную эквивалентную схему такого шарнира можно получить, используя трансформаторный тип связи между телами; такая схема для координаты x приведена на рис. 2.2, *в*. Зависимый источник скорости V_1 определяется формулой, полученной из (2.6):

$$V_1 = V_{1x} = V_{2x} - \omega_2 r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) + \omega_1 r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}).$$

Источник усилия F_1 равен F_x — усилию на источнике скорости. В этой схеме в явном виде учитывается третий закон Ньютона.

Эквивалентная схема подвижного шарнира является обобщением эквивалентной схемы неподвижного шарнира (для этого объединяются узлы у элементов m_2 и J_2).

Связь двух тел с помощью нерастяжимой тяги длиной R представлена на рис. 2.22, *а*. На концах тяги — шаровые шарниры A и B .

Это соединение двух тел можно охарактеризовать уравнением

$$(x_{B0} - x_{A0})^2 + (y_{B0} - y_{A0})^2 = R^2, \quad (2.8)$$

где $x_{B0}, y_{B0}, x_{A0}, y_{A0}$ — координаты шарниров, нижний индекс 0 означает принадлежность координат к неподвижной системе отсчета $x_0 y_0$.

Подставим (2.9) в (2.8):

$$\begin{aligned} & (x_{20} - x_{10} + r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) - r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}))^2 + \\ & (y_{20} - y_{10} + r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) - r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}))^2 = R^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Продифференцируем уравнение (2.10) по времени с целью перехода от перемещений к основным фазовым переменным и разрешим его относительно $(V_{2x} - V_{1x})$:

$$\begin{aligned} (V_{2x} - V_{1x}) &= r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) \omega_2 - r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}) \omega_1 - \\ &- (y_{20} - y_{10} + r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) - r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11})) (V_{2y} - \end{aligned}$$

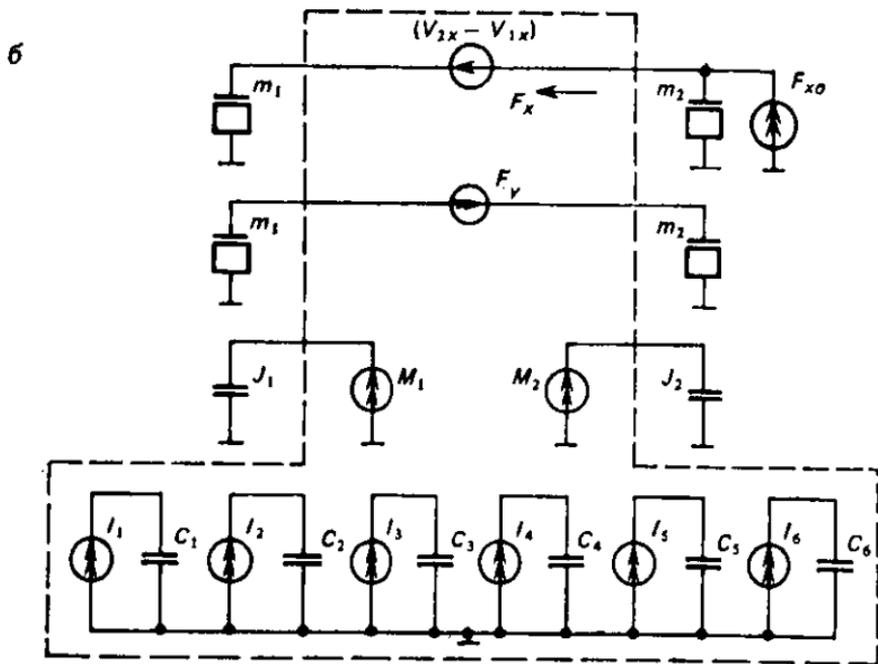
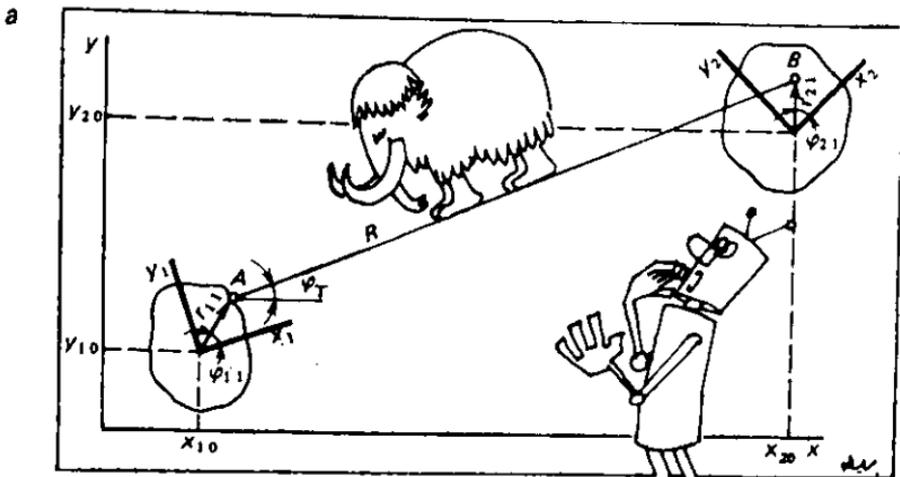


Рис. 2.22. Пример соединения двух тел с помощью нерастяжимой тяги.

$$-V_{1y} + r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) \omega_2 - r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}) \omega_1 / (x_{20} - x_{10} + r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) - r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11})).$$

В общем виде

$$(V_{2x} - V_{1x}) = f((V_{2y} - V_{1y}), (x_{20} - x_{10}), (y_{20} - y_{10}), \omega_1, \omega_2). \quad (2.11)$$

Это уравнение по отношению к эквивалентной схеме горизонтальных перемещений можно интерпретировать как зависимый источник скорости, включаемый между двумя телами.

Уравнение (2.8) не учитывает передачу усилия, направленного вдоль тяги, т. е. того, что реакция в шарнире разлагается на составляющие в соответствии с углом φ_T (рис. 2.22, б):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_T &= \frac{F_y}{F_x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \\ &= \frac{y_{20} - y_{10} + r_{21} \sin(\varphi_{20} - \varphi_{21}) - r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11})}{x_{20} - x_{10} + r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) - r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11})}, \end{aligned}$$

где F_x и F_y — реакции в шарнире; F_x — усилие, передаваемое через источник скорости $V_{2x} - V_{1x}$, тогда уравнение $F_y = F_x \operatorname{tg} \varphi_T$ можно по отношению к эквивалентной схеме вертикальных перемещений интерпретировать как зависимый источник усилия.

Следовательно, между вертикальными и горизонтальными перемещениями для тяги действует связь трансформаторного типа.

В эквивалентную схему тяги для вращательного движения к моментам инерции тел подключаются источники моментов, определяемые через реакции в шарнирах:

$$M_1 = F_x r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}) + F_y r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11});$$

$$M_2 = F_x r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) + F_y r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}).$$

Выразим эти координаты через координаты центров тяжести и координаты контактных точек:

$$x_{B0} = x_{20} + r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \quad x_{A0} = x_{10} + r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); \quad (2.9)$$

$$y_{B0} = y_{20} + r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \quad y_{A0} = y_{10} + r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}).$$

Поскольку в выражения для источника $V_{2x} - V_{1x}$, источника усилия F_y и моментов M_1 и M_2 входят координаты центров масс (x_{10}, y_{10}) , (x_{20}, y_{20}) и углы поворотов

дим второе условие в виде математического выражения. Положение точки B , лежащей на прямой AC и принадлежащей телу 2, в подвижной системе координат (x_1, y_1) задается уравнением

$$y_{B1} = kx_{B1} + b, \quad (2.12)$$

где y_{B1} и x_{B1} — координаты точки B ; k и b — константы, определяемые из уравнения прямой AC .

В неподвижной системе координат для этой же точки B можно записать выражения

$$\begin{aligned} x_{B0} &= x_{10} + x_{B1} \cos \varphi_{10} - y_{B1} \sin \varphi_{10}; \\ y_{B0} &= y_{10} + x_{B1} \sin \varphi_{10} + y_{B1} \cos \varphi_{10}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_{B1} &= (x_{B0} - x_{10}) \cos \varphi_{10} + (y_{B0} - y_{10}) \sin \varphi_{10}; \\ y_{B1} &= -(x_{B0} - x_{10}) \sin \varphi_{10} + (y_{B0} - y_{10}) \cos \varphi_{10}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение (2.12), тогда уравнение положения точки B на прямой AC в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} &-(x_{B0} - x_{10}) \sin \varphi_{10} + (y_{B0} - y_{10}) \cos \varphi_{10} = \\ &= k[(x_{B0} - x_{10}) \cos \varphi_{10} + (y_{B0} - y_{10}) \sin \varphi_{10} + b]. \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное уравнение по t :

$$\begin{aligned} &-(V_{Bx} - V_{1x}) \sin \varphi_{10} + \omega_1 (x_{B0} - x_{10}) \cos \varphi_{10} + \\ &+ (V_{By} - V_{1y}) \cos \varphi_{10} - \omega_1 (y_{B0} - y_{10}) \sin \varphi_{10} = \\ &= k[(V_{Bx} - V_{1x}) \cos \varphi_{10} - \omega_1 (x_{B0} - x_{10}) \sin \varphi_{10} + \\ &+ \omega_1 (y_{B0} - y_{10}) \cos \varphi_{10} + (V_{By} - V_{1y}) \sin \varphi_{10}]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $V_{Bx} = V_{2x}$ и $V_{By} = V_{2y}$, перепишем полученное выражение, разрешив его относительно $V_{2x} - V_{1x}$:

$$\begin{aligned} V_{2x} - V_{1x} &= \{ (V_{2y} - V_{1y}) (\cos \varphi_{10} - k \sin \varphi_{10}) + \\ &+ \omega_1 [(x_{20} - x_{10}) (\cos \varphi_{10} + k \sin \varphi_{10}) - (y_{20} - y_{10}) (\sin \varphi_{10} + \\ &+ k \cos \varphi_{10})] \} / (\sin \varphi_{10} - k \cos \varphi_{10}). \end{aligned}$$

Это уравнение позволяет связать на эквивалентной схеме для горизонтального движения два тела зависимым источником скорости. Коэффициент k может быть определен через координаты точек A и C в подвижной полярной системе координат:

$$k = (r_{11} \sin \varphi_{11} - r_{12} \sin \varphi_{12}) / (r_{12} \cos \varphi_{12} - r_{11} \cos \varphi_{11}).$$

Через источник $V_{2x}—V_{1x}$ передается усилие F_x (таким включением автоматически выполняется третий закон Ньютона).

Условие того, что реакция в скользящей паре F направлена перпендикулярно к направляющей, приводит к однозначной взаимосвязи между F_x и F_y (рис. 2.23, а):

$$F_y = F_x \operatorname{ctg} \varphi_{\text{ск}},$$

где $\varphi_{\text{ск}}$ — угол поворота направляющей относительно оси x .

Это уравнение позволяет на эквивалентной схеме для вертикальных перемещений соединить тела зависимым источником силы F_y , т. е. для скользящей пары также характерен трансформаторный тип связи между эквивалентными схемами для вертикальных и горизонтальных перемещений:

$$\operatorname{ctg} \varphi_{\text{ск}} = (x_C - x_A) / (y_C - y_A),$$

где x_C, y_C, x_A, y_A — координаты точек C и A в неподвижной системе координат.

Через заданные полярные координаты точек находим

$$\operatorname{ctg} \varphi_{\text{ск}} = \frac{r_{12} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) - r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11})}{r_{12} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) - r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11})}.$$

Элементы эквивалентной схемы скользящей пары, отражающие вращательное движение, представлены источниками моментов, возникающими от реакций F_x и F_y :

$$M_{F_x} = M_{F_{x1}} - M_{F_{x2}}, \quad M_{F_y} = M_{F_{y1}} - M_{F_{y2}};$$

$$M_{F_{x1}} = F_x [(y_{20} - y_{10}) + r_{21} \sin \varphi_{20}];$$

$$M_{F_{x2}} = F_x r_{21} \sin \varphi_{20};$$

$$M_{F_{y1}} = F_y [(x_{20} - x_{10}) + r_{21} \cos \varphi_{20}];$$

$$M_{F_{y2}} = F_y r_{21} \cos \varphi_{20},$$

где индекс 1 или 2 — номер тела.

Окончательно имеем

$$M_{F_x} = F_x (y_{20} - y_{10}); \quad M_{F_y} = F_y = F_y (x_{20} - x_{10}).$$

Пять интеграторов, включенных в эквивалентную схему, необходимы для определения $x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \varphi_{10}$.

Механические упоры, люфты, сухое трение являются неотъемлемыми элементами механических подсистем. При моделировании технических объек-

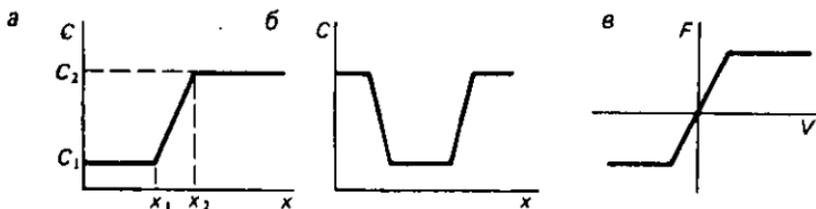


Рис. 2.24. Характеристики нелинейных механических элементов: а — упора; б — люфта; в — сухого трения.

тов часто необходимо учитывать ограничения на перемещения некоторых составных частей объекта, например при моделировании движения плунжера золотниковых устройств, ограниченного угла поворота шарнирных соединений и т. п.

Механический упор для поступательной подсистемы можно представить двумя способами.

Способ 1. Он основан на использовании нелинейной упругости с характеристикой, представленной на рис. 2.24, а. Здесь x — перемещение двух тел друг относительно друга, C — коэффициент жесткости взаимосвязи между ними. Параметрами такой модели будут: C_1 — коэффициент жесткости взаимосвязи до достижения ограничения; x_1 — перемещение, при котором наступает контакт в упоре; C_2 — коэффициент жесткости при полном контакте, который наступает при перемещении x_2 . Допустимо $x_1 = x_2$, но это условие может привести к плохой сходимости решения системы нелинейных уравнений при применении неявных методов интегрирования (см. книгу 5).

Способ 2. Он предполагает абсолютно жесткий упор и основан на логической коррекции значений скоростей и перемещений при достижении ограничения. Двусторонний упор можно представить следующим образом:

$$x = \begin{cases} x' & \text{при } x_n \leq x' \leq x_b; \\ x_b & \text{при } x' > x_b; \\ x_n & \text{при } x' < x_n; \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} V' & \text{при } x_n \leq x' \leq x_b, \text{ или при } x' > x_b \text{ и } V' < 0, \\ & \text{или при } x' < x_n \text{ и } V' > 0; \\ 0 & \text{при } x' > x_b \text{ и } V' > 0; \\ 0 & \text{при } x' < x_n \text{ и } V' < 0, \end{cases}$$

где x — перемещение; V — скорость; $x_{\text{н}}$ и $x_{\text{в}}$ — минимально и максимально возможные значения x ; x' и V' — значения x и V , вычисленные без учета упора.

Такую модель механического упора можно использовать преимущественно при применении явных методов интегрирования.

Люфты в соединениях можно моделировать двумя подвижными механическими упорами, включенными последовательно и образующими характеристику, показанную на рис. 2.24, б. При этом необходимо, чтобы один из упоров работал при положительных перемещениях, другой — при отрицательных.

Элемент сухого трения представляется нелинейным элементом механического трения с характеристикой, показанной на рис. 2.24, в. Параметры модели — координаты точки излома и тангенс угла наклона пологой части характеристики. Крутой участок характеристики может быть и вертикальным, но при этом возможны затруднения вычислительного плана, связанные со сходимостью решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Поэтому рекомендуется наклон этой части характеристики делать конечным, тем более что в реальном случае он также существует хотя бы за счет изгиба микроскопических шероховатостей.

Модели элементов гидравлических подсистем. Помимо ранее рассмотренных простейших гидравлических элементов к собственно гидравлическим элементам относятся сопротивление реального трубопровода, дроссель и клапаны.

■ **Примечание.** Остальные элементы гидросистем классифицируются как гидромеханические (например, насос, гидромотор, распределительный золотник и т. д.).

Так как фазовыми переменными в гидравлической подсистеме являются расход и давление, а в механической — силы и скорости, то модели перечисленных элементов должны представлять собой уравнения или системы уравнений относительно указанных переменных.

Сопротивление реального трубопровода является нелинейным и зависящим от режима течения жидкости. Режим течения жидкости при движении в круглых трубах оценивается по значению числа Рейнольдса; $Re = VD/\nu$, где V — скорость движения жидко-

сти; D — диаметр трубопровода; ν — кинематическая вязкость.

Критическим значением числа Рейнольдса для круглых труб будет значение $Re_{кр} = 2320$, при меньших значениях режим течения ламинарный, при больших — турбулентный.

Потери напора в трубопроводе

$$h = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (2.13)$$

где λ — гидравлический коэффициент трения; l — длина трубопровода; g — ускорение свободного падения.

Формула (2.13) справедлива для всех режимов течения; от режима течения зависит только коэффициент λ .

При ламинарном режиме $\lambda = 64/Re$. Преобразуем (2.13) таким образом, чтобы в ней связывались расходы и давления. Умножим обе части уравнения на ρg . В левой части уравнения получим давление, в правой — выделим $VS\rho = Q_m$.

Окончательно для ламинарного режима $P = R_{г\lambda} Q_m$, где $R_{г\lambda} = 128\nu l / (\pi D^4)$.

Для турбулентного режима справедлива зависимость $P = R_{г\mu} Q_m |Q_m|$, где $R_{г\mu} = 8\lambda l / (\pi^2 D^5 \rho)$, которая также получается из (2.13) после выделения в правой части $Q_m |Q_m|$.

Коэффициент λ зависит от числа Re .

Общая ММ дросселя должна быть справедлива для турбулентного и ламинарного режимов течения жидкости в широком диапазоне изменения температуры и давления. Поскольку точного описания переходного режима между турбулентным и ламинарным режимами не существует, можно использовать кусочную аппроксимацию зависимости коэффициента μ от числа Re , т. е. $\mu = \min\{Z \sqrt{Re}, \mu_{max}\}$, где μ_{max} — коэффициент при развитии турбулентном режиме; Z — коэффициент, зависящий от геометрических размеров дросселя и определяемый экспериментально.

Число Re определяется из формулы $Re = 4|G|/\nu\Pi\rho$, где G — расход жидкости через дроссель; Π — смачиваемый периметр контура поперечного сечения дросселя; ν — коэффициент кинематической вязкости, зависящий от давления и температуры:

$$\nu = \nu_0 \exp\{r(P_p - P_0)\}/\rho,$$

$$\rho = \rho_0 [1 / (1 - (P_p + P_0) / E_c)];$$

$$\nu_0 = \omega_0 / (\rho_0 \exp(b_T(T - T_0))),$$

где r — пьезокоэффициент; P_p — рабочее давление; P_0 и T_0 — давление и температура, при которых определяется ω_0 — коэффициент динамической вязкости; ρ_0 — плотность жидкости, определяемая при $P = 10^6$ Па и $T = T_0$; E_c — модуль объемной упругости жидкости; b_T — термокоэффициент.

Уравнения, связывающие расход Q_m через дроссель с давлением P , позволяют интерпретировать дроссель как линейное (при ламинарном режиме течения жидкости) или как нелинейное (при турбулентном режиме течения жидкости) сопротивление:

$$Q_m = \mu_{\max} F V \sqrt{2\rho} \sqrt{|P|} \operatorname{sign} P \text{ при } \mu = \mu_{\max};$$

$$Q_m = 8(ZS)^2 \rho P / (\omega \Pi) \text{ при } \mu < \mu_{\max},$$

где S — площадь проходного сечения дросселя; ω — динамическая вязкость, определяемая по формуле

$$\omega = \omega_0 \exp[r(P_p - P_0)] / \exp[b_T(T - T_0)].$$

Переливной клапан является элементом регулирования давления в гидросистеме. С достаточной точностью практически для любых гидросистем математическая модель клапана может быть представлена его статической характеристикой

$$Q_m = \max\{0; Y_{\text{кл}} \rho (P_{\text{наг}} - P_{\text{сл}} - P_{\text{кл}})\},$$

где $Y_{\text{кл}}$ — проводимость клапана, определяемая его конструкцией; $P_{\text{наг}}$ — давление в магистрали нагнетания; $P_{\text{сл}}$ — давление в магистрали слива; $P_{\text{кл}}$ — разность давлений в этих магистралях, при которой открывается клапан.

Следовательно, клапан представляет собой нелинейное (кусочно-линейное) сопротивление.

Для насоса, если пренебречь сжимаемостью жидкости в полостях насоса, неравномерностью подачи из-за кинематики, влиянием индикаторных характеристик, можно использовать эквивалентную схему, показанную на рис. 2.25. Здесь зависимый источник момента силы M и момент инерции J представляет механическую часть насоса, зависимый источник Q_m и сопротивление утечки R_y — гидравлическую часть. Связь между подсистемами — гидраторного типа. Поскольку применяются источ-

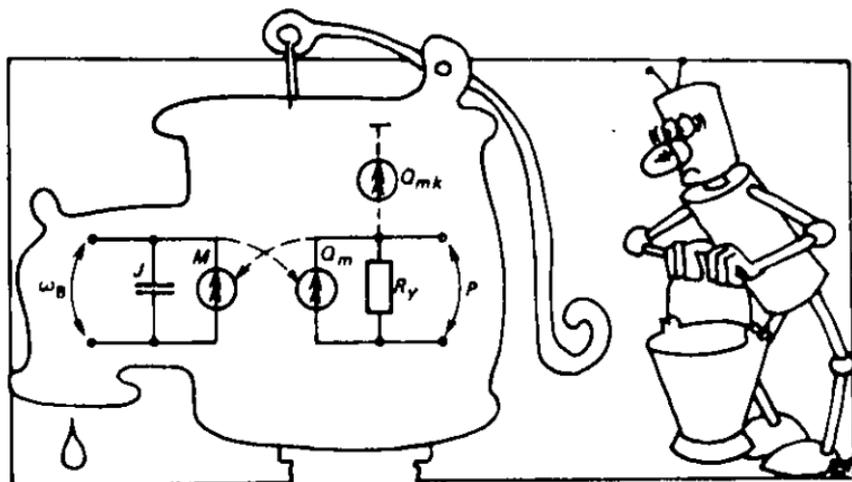


Рис. 2.25. Эквивалентная схема насоса.

ники типа потока, в качестве аргументов они должны использовать переменные типа потенциала, т. е. давления и угловые скорости.

Момент на валу насоса

$$M = q_n f P + a_\omega \omega_{вp} + a_p |P| + a,$$

где a_ω и a_p — коэффициенты механических и гидравлических потерь; a — постоянная гидромеханических потерь; $f = q(t)/q_n$; $-1 \leq f \leq 1$; $q(t)$ — рабочий объем насоса; f — параметр регулирования.

Расход жидкости зависит только от угловой скорости:

$$Q_m = q_n f \rho \omega_{вp},$$

где q_n — максимальный рабочий объем насоса; $\omega_{вp}$ — угловая скорость вращения вала насоса.

- **Примечание.** Значения a_ω , a_p , a и R_γ берутся из характеристик механического и объемного КПД насоса.

Более точная модель насоса учитывает компрессию и декомпрессию рабочей жидкости при прохождении через гидромашину, что на эквивалентной схеме учтено источником расхода Q_{mk} (изображен пунктиром). Этот источник отражает тот факт, что расход, подаваемый насосом в магистраль высокого давления, меньше, чем расход, поступающий из магистрали слива:

$$Q_{mk} = K_{kf} \omega_{вр} \rho P,$$

где K_k — конструктивный параметр насоса.

Эквивалентная схема гидромотора представлена на рис. 2.25, при ее построении также принято допущение о пренебрежении неравномерностью подачи, где для гидромотора: $M = q_{kf} P - b_{\omega} \omega_{вр} - b_p |P| \text{sign } \omega_{вр} - b \text{sign } \omega_{вр}$ — момент, развиваемый гидромотором; J — момент инерции вращающихся частей; $Q_m = \rho q_{kf} \omega_{вр}$ — расход жидкости, отбираемой гидромотором из сети; R_y — сопротивление утечки; b_{ω} , b_p — коэффициенты гидромеханических потерь; b — постоянная гидромеханических потерь.

Гидромеханические потери в уравнении момента заданы с учетом направления вращения и возможности тормозного режима.

Распределительный золотник можно рассматривать как комплекс дросселей, соединяемых каналами в результате движения плунжера. Движение плунжера приводит к изменению площади S поперечного сечения дросселя, значение которой изменяется от 0 до S_{\max} .

Краткие выводы

Существуют аналогии компонентных и топологических уравнений для подсистем различной физической природы, что создает основу для разработки единого математического и программного обеспечения САПР.

Компонентные уравнения устанавливают связь между разнородными фазовыми переменными, относящимися к одному элементу, а топологические уравнения — между однородными фазовыми переменными, относящимися к разным элементам системы.

Для объединения эквивалентных схем однородных физических подсистем, выделенных в объекте, используют трансформаторную, гираторную связи и связь через зависимые параметры.

3. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Элементы теории графов

Графы в математическом обеспечении САПР используются при решении задач синтеза, особенно в конструкторском проектировании, при проектировании программного обеспечения, баз данных, при решении задач анализа на макроуровне.

Топологические уравнения подсистем записываются для узлов и контуров эквивалентной схемы, поэтому получение эквивалентной схемы — необходимый этап подготовки технического объекта к моделированию. Поскольку существующие методы получения топологических уравнений основаны на применении графов, рассмотрим основные определения и понятия из их теории.

- **Примечание.** Пользователь САПР непосредственно вопросов, связанных с получением топологических уравнений, не касается, ему достаточно уметь представлять объект в виде эквивалентной схемы. Знание алгоритмов автоматического получения топологических уравнений необходимо разработчику САПР и квалифицированному пользователю, пополняющему библиотеку моделей программного комплекса анализа динамических систем.

Граф — совокупность вершин (узлов) и связывающих их ребер (ветвей). Если ребра графа имеют определенное направление, то такой граф называют ориентированным (орграфом), а его ребра — дугами (рис. 3.1).

Часть графа — граф, образованный из исходного графа удалением некоторых вершин и ребер.

Подграф — часть графа, образованная некоторым подмножеством ребер графа и всеми инцидентными им вершинами.



Рис. 3.1. Граф (а), подграф (б), суграф (в).

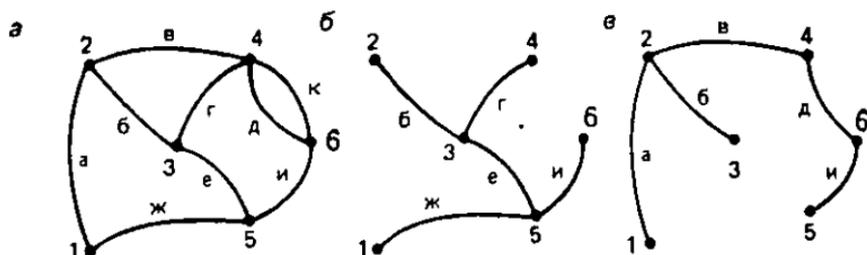


Рис. 3.2. Граф (а) и его фундаментальные деревья (б, в).

Суграф — часть графа, образованная удалением из исходного графа некоторых ребер. Количество вершин графа и суграфа одинаково.

Маршрут — последовательность смежных ребер. Смежными считаются ребра, инцидентные одной и той же вершине, или вершины, инцидентные одному и тому же ребру. В общем случае маршрут может содержать повторяющиеся ребра и вершины.

Цепь — маршрут, в котором все ребра различны.

Замкнутая цепь называется циклом.

Простой цикл (контур) — цикл, не содержащий повторяющихся вершин.

Граф является *связным*, если можно указать маршрут, охватывающий все вершины.

Дерево графа — связный подграф, не имеющий циклов.

Фундаментальное дерево (остов) — связный суграф, не имеющий циклов, т. е. фундаментальное дерево охватывает все вершины графа и не образует ни одного цикла.

Ветви дерева — ребра графа, вошедшие в дерево.

Хорды — ребра графа, не вошедшие в дерево.

На рис. 3.2, а представлен пример связного графа, а на рис. 3.2, б — его фундаментальное дерево. Ветвями дерева будут ребра б, г, е, ж, и, хордами — ребра а, в, д, к.

Выбор фундаментального дерева графа не однозначен, для одного и того же графа их может быть несколько. Так, на рис. 3.2, в представлено еще одно фундаментальное дерево графа (рис. 3.2, а). При этом ребра а, б, в, д, и — ветви дерева, г, е, ж, к — хорды.

■ **Примечание.** Ниже будут рассматриваться только фундаментальные деревья.

При моделировании на макроуровне особый интерес представляет дерево, в которое ребра включаются согласно некоторому приоритету. Если, изображая структуру технического объекта, за каждым ребром графа закреплять обозначение заменяемого им элемента, то можно построить нормальное дерево графа.

Нормальное дерево графа — такое фундаментальное дерево, в которое ребра включаются в такой последовательности: источники разности потенциалов типа Е, ребра типа С, ребра типа R, ребра типа L, источники переменной типа I.

Таблица 3.1

Узлы	Ветви								
	а	б	в	г	д	е	ж	и	к
1	+1						+1		
2	-1	-1	+1						
4			-1	+1	-1				+1
5						-1	-1	-1	
6					+1			+1	-1

Сечение ветви дерева — множество ребер, пересекаемых линией сечения (при этом должны выполняться следующие условия: линия сечения является замкнутой и пересекает любое ребро не более одного раза, среди ветвей дерева пересекается единственная).

Граф несет информацию о связях в объекте, удобную для восприятия человеком, но для обработки на ЭВМ нужна информация числового характера. Представить граф в таком виде можно с помощью матрицы инцидентий A , которая кодирует ориентированный граф так: каждому узлу графа (кроме одного, называемого базовым) соответствует одна строка, каждому ребру — один столбец, в столбце записывается $+1$ на пересечении со строкой узла, из которого ребро направлено, и -1 на пересечении со строкой узла, к которому оно направлено, остальные элементы этого столбца равны 0. Базовому узлу в матрице инцидентий никакая строка не соответствует. В качестве базового может быть выбран произвольный узел.

Матрицы, содержащие нулевые элементы, называются разреженными матрицами. Матрицы инцидентий являются сильно разреженными, причем разреженность возрастает с увеличением их размера.

В табл. 3.1 представлена матрица инцидентий для графа, показанного на рис. 3.3 (за базовый принят узел 3).

3.2. Метод получения топологических уравнений

Метод, основанный на использовании информации, заключенной в M -матрице (в матрице контуров и сечений), — наиболее удобный и общий метод получения топологических уравнений.

M -матрица строится на основании ориентированного графа эквивалентной схемы и выбранного для этого графа дерева. Количество столбцов матрицы соответствует числу ветвей дерева, а количество строк — числу хорд.

Процедура формирования M -матрицы заключается в следующем: каждая хорда графа поочередно включается в дерево, при этом образуется замкнутый контур; выполняется обход этого контура в направлении, заданном направлением хорды; в строке матрицы, соответствующей данной хорде, ставится $+1$, если направление ветви дерева совпадает с направлением обхода контура, -1 , если направление ветви дерева противоположно, 0 , если ветвь не входит в данный контур.

Рассмотрим получение матрицы контуров и сечений для графа, показанного на рис. 3.3. M -матрица этого графа представлена в табл. 3.2.

При подключении хорды a образуется контур из ветвей дерева $b, e, ж$, в столбцах матрицы, соответствующих

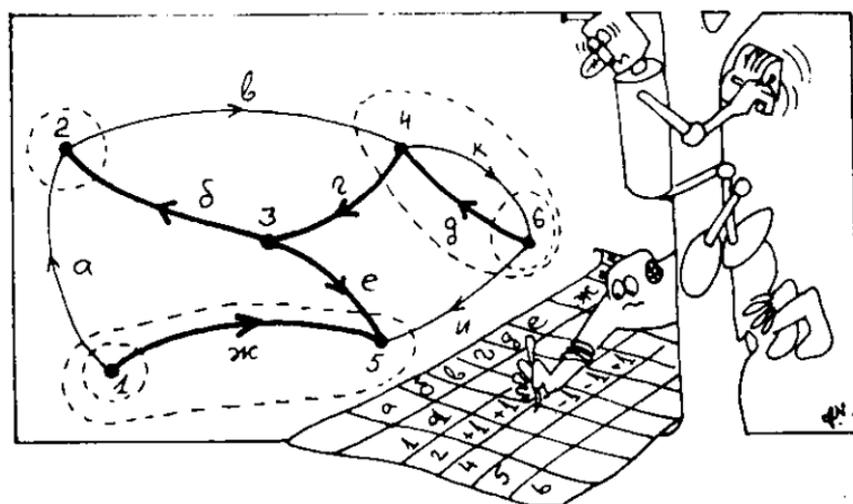


Рис. 3.3. Матрица контуров и сечений графа.

Таблица 3.2

	<i>б</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>	<i>ж</i>
<i>а</i>	-1	0	0	+1	-1
<i>в</i>	+1	-1	0	0	0
<i>к</i>	0	0	+1	0	0
<i>и</i>	0	-1	-1	-1	0

ветвям *б* и *ж*, появится -1 , в столбце, соответствующем ветви *е*, будет $+1$, остальные столбцы содержат 0. Аналогично заполняются и другие строки.

Топологические уравнения с использованием *М*-матрицы имеют вид

$$\mathbf{M} \mathbf{U}_{в.д} + \mathbf{U}_x = 0; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{I}_{в.д} - \mathbf{M}' \mathbf{I}_x = 0, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{U}_{в.д}$, \mathbf{U}_x — векторы переменных типа разностей потенциалов на ветвях дерева и хордах; $\mathbf{I}_{в.д}$, \mathbf{I}_x — векторы переменных типа потока для ветвей дерева и хорд; \mathbf{M}' — транспонированная *М*-матрица.

Для *М*-матрицы табл. 3.2 имеем:

$$\begin{aligned} -U_b + U_e - U_{ж} + U_a &= 0; & I_b + I_a - I_e &= 0; \\ U_b + U_g + U_e &= 0; & I_g - I_e + I_u &= 0; \\ U_d + U_k &= 0; & I_d - I_k + I_u &= 0; \\ -U_g - U_d - U_e + U_u &= 0; & I_e - I_a + I_u &= 0; \\ & & I_{ж} + I_a &= 0, \end{aligned}$$

где U_i и I_i — переменные типа *U* и *I* для ребра *i*.

Таким образом, (3.1) есть не что иное, как уравнение второго закона Кирхгофа (или ему аналогичное согласно аналогиям топологических уравнений), записанное в матричной форме, а (3.2) — уравнение первого закона Кирхгофа (или ему аналогичное) для сечений дерева. Линии сечений графа (рис. 3.3) отмечены пунктирными линиями.

■ **Примечание.** Сечения дерева специально выбирать не надо. Уравнения для сечений получаются из *М*-матрицы, для построения которой сечения не привлекаются, и на рис. 3.3 они отмечены для визуальной проверки полученных уравнений.

Количество топологических уравнений равно количеству ветвей эквивалентной схемы.

3.3. Обобщенный метод получения математических моделей систем

Математической моделью технического объекта на макроуровне является система обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае не разрешенная относительно производных, т. е. $F(\dot{v}, v, t) = 0$, где v — вектор фазовых переменных; t — время, независимая переменная; F — вектор-функция; $\dot{v} = dv/dt$. Подобную систему уравнений в общем случае можно решить только с помощью численных методов интегрирования, поскольку эта система высокого порядка и нелинейна. Результат решения ММ системы (ММС) — зависимости фазовых переменных от времени.

Как было показано ранее (см. книгу 1), обобщенная ММС может быть представлена в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ компонентных уравнений} \\ & \text{реактивных и неактивных} \\ & \text{ветвей} \end{aligned} \begin{cases} F(Z, W) = 0; \\ F(W) = 0; \end{cases} \quad (3.3) \\ \alpha \text{ топологических уравнений} & \begin{cases} F(W, H) = 0; \\ F(Z, H) = 0, \end{cases} \\ \gamma \text{ формул интегрирования} & \end{aligned}$$

где H — вектор переменных состояния, т. е. фазовых переменных, непосредственно характеризующих запасы энергии в системе (переменных типа разности потенциалов на ветвях типа C и переменных типа потока через ветви типа L); W — вектор остальных фазовых переменных; Z — вектор производных переменных состояния по времени.

Эти уравнения составлены при условии, что эквивалентная схема содержит α элементов и из них γ реактивных. Реактивными считаются элементы, способные накапливать энергию, т. е. типа C и L (емкости, индуктивности, массы, упругости и т. д.).

Количество неизвестных в этих уравнениях $2\alpha + \gamma$, так как размерности векторов H и Z равны γ , а вектора W — $2\alpha - \gamma$. Таким образом, система уравнений (3.3) — замкнутая.

Совокупность неизвестных переменных в уравнениях, описывающих поведение технической системы, называется *вектором базисных координат* или *базисом метода*.

Базис обобщенного метода составляют переменные типа разности потенциалов для всех элементов, перемен-

ные типа потока для всех ветвей и переменные типа производных переменных состояния.

В матричном виде ММС обобщенного метода можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 1 & -M & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & D_3 & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & D_4 & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_x \\ I_{в.д} \\ I_x \\ U_{в.д} \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \mu \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где 1 — единичная подматрица; D_3 и D_4 — диагональные подматрицы, содержащие на диагонали 1 или 0 . Например, для подматрицы D_3 компонентное уравнение $I_x - f(U_x) = 0$ даст на диагонали 1 , а компонентное уравнение $U_x - f(Z) = 0$ даст на диагонали 0 , поскольку в нем отсутствует I_x ; подматрица K_{31} связывает между собой I_x и U_x , т. е. ее элементы суть коэффициенты перед U_x в компонентных уравнениях хорд; подматрица K_{42} связывает между собой $I_{в.д}$ и $U_{в.д}$, т. е. ее элементы суть коэффициенты перед $I_{в.д}$ в компонентных уравнениях ветвей дерева; подвекторы θ_3 и θ_4 — постоянные члены в компонентных уравнениях; подматрицы K_{32} , K_{34} , K_{41} , K_{43} — ненулевые только при наличии зависимых ветвей, например элемент с уравнением $I_x = f(U_{в.д})$ даст ненулевой элемент в подматрицу K_{34} ; элементы подматриц K_{35} и K_{45} суть коэффициенты в компонентных уравнениях реактивных элементов перед Z ; подматрицы K_{51} , ..., K_{54} связывают между собой переменные состояния, которые могут принадлежать как ветвям дерева, так и хордам, с их производными (подвектор Z) через формулы интегрирования. Формула интегрирования в общем виде (см. книгу 1)

$$Z_k = \eta_k H_k + \mu_k,$$

тогда коэффициент η_k будет элементом подматриц K_{51} , ..., K_{54} , а коэффициент μ_k будет элементом подвектора μ .

Решение подобной системы уравнений возможно итерационными методами, наиболее распространенным из которых является метод Ньютона (см. книгу 5). Алгоритм метода Ньютона предусматривает многократное решение линеаризованной системы уравнений:

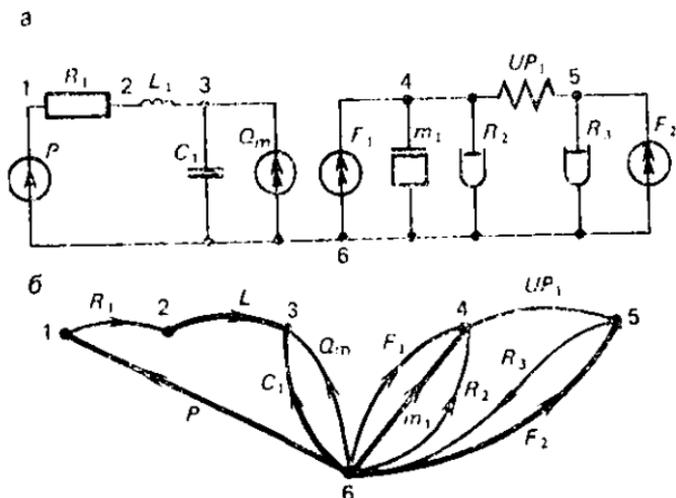


Рис. 3.4. Эквивалентная схема гидромеханической системы (а) и ее граф (б) с выделенным фундаментальным деревом.

$$\mathbf{Y}\Delta\mathbf{X} = -\varphi(\mathbf{X}),$$

где $\mathbf{Y} = [\partial\varphi/\partial\mathbf{X}]$ — матрица Якоби; $\Delta\mathbf{X}$ — вектор поправок к неизвестным \mathbf{X} ; $\varphi(\mathbf{X})$ — вектор невязок.

- Пример получения математической модели гидромеханической системы (обобщенным методом). Эквивалентная схема гидромеханической системы представлена на рис. 3.4, а.

Граф эквивалентной схемы изображен на рис. 3.4, б. Направления переменных типа потока в ветвях задаем произвольно (кроме источников потока). Если заданное и истинное направления не совпадают, то получим значения переменных типа потока со знаком минус. Дерево графа выделено жирными линиями. В обобщенном методе дерево выбирается произвольным, т. е. не обязательно нормальным.

Используя уравнения (3.1) и (3.2), получим топологические уравнения системы. М-матрица представлена в табл. 3.3. Нулевые элементы в ней не проставлены. Система топологических уравнений такова:

$$\begin{array}{ll} U_P + U_L - U_C + U_{R_1} = 0; & U_{F_1} + U_{R_3} = 0; \\ -U_C + U_{Q_m} = 0; & I_P - I_{R_1} = 0; \\ -U_m + U_{F_1} = 0; & I_C + I_{R_1} + I_{Q_m} = 0; \\ -U_m + U_{R_2} = 0; & I_m + I_{F_1} + I_{R_2} - I_{UP} = 0; \\ U_m - U_{F_2} + U_{UP} = 0; & I_{F_2} + I_{UP} - I_{R_3} = 0. \end{array}$$

Таблица 3.3

	<i>P</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>m</i>	<i>F</i> ₂
<i>R</i> ₁	+1	+1	+1		
<i>Q</i> _{<i>m</i>}			-1		
<i>F</i> ₁				-1	
<i>R</i> ₂				-1	
<i>U</i> <i>P</i>				+1	-1
<i>R</i> ₃					+1

Вектор неизвестных для этого примера будет содержать следующие элементы:

$$X^1 = [U_{R_1}, U_{Q_m}, U_{F_1}, U_{R_2}, U_{UP}, U_{R_3}, I_P, I_L, I_C, I_m, I_{F_2}, \\ I_{R_1}, I_{Q_m}, I_{F_1}, I_{R_2}, I_{UP}, I_{R_3}, U_P, U_L, U_C, U_m, U_{F_2}, \\ \dot{U}_C, \dot{U}_m, \dot{I}_L, \dot{I}_{UP}]$$

Расположение переменных в этом векторе следующее: подвектор U_x , подвектор $I_{в.д.}$, подвектор I_x , подвектор $U_{в.д.}$, подвектор производных переменных состояния для реактивных элементов. Система уравнений типа

$$Y(X) \Delta X = -\varphi(X)$$

представлена так, как показано на с. 118—119.

Вектор невязок составлен из следующих подвекторов: нулевой подвектор (уравнения 1, ..., 11); подвектор, получаемый из компонентных уравнений 12, ..., 22; подвектор, получаемый из формул интегрирования (уравнения 23, ..., 26); f_1, \dots, f_4 — формулы интегрирования соответствующего дифференциального уравнения, причем не обязательно одинаковые, для каждого реактивного элемента может быть использована своя формула интегрирования: $U'_C, U'_m, I'_L, I'_{UP}$ — векторы значений соответствующих переменных состояния на предыдущих шагах интегрирования, поскольку формула интегрирования выглядит следующим образом

$$Z_k = \eta_k H_k + \mu_k, \quad (3.5)$$

где η_k зависит от порядка метода интегрирования и шага интегрирования h_k , а μ_k зависит, кроме того, от вектора значений переменных состояния на одном или нескольких предыдущих шагах.

Коэффициенты a, b, c, d в матрице Якоби суть коэффициенты, получаемые после дифференцирования формулы (3.5) по соответствующей переменной. Если используется один метод интегрирования для всех дифференциальных уравнений, то коэффициенты равны между собой.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

1	+1																+1			
2		+1																		
3			+1																	
4				+1																
5					+1															
6						+1														
7							+1				-1									
8								+1				-1								
9									+1			+1	+1							
10										+1				+1	+1	-1				
11											+1					+1	-1			
12	$\frac{-1}{R_1}$											+1								
13													+1							
14														+1						
15															+1					
16																	0			
17																		+1		
18																		+1		
19																				
20											+1									
21												+1								
22													+1							
23																				
24																				
25																			c	
26																				
27																				
28																				d

Для неявного метода первого порядка — метода Эйлера, формула которого $Z_k = dH_k/dt = (H_k - H_{k-1})/h$, коэффициенты равны $1/h$.

Для метода Гира второго порядка, формула которого $Z_k = [(1/2)H_{k-2} - 2H_{k-1} + (3/2)H_k]h$, коэффициенты равны $a=b=c=d=(3/2)h$.

Рассмотрим, как необходимо представить модели некоторых элементов при их включении в библиотеку комплекса анализа динамических систем, если в этом комплексе реализован обобщенный алгоритм формирования ММС.

Модель биполярного транзистора. Эквивалентная схема транзистора изображена на рис. 2.17, б. Запишем компонентные уравнения каждой ветви:

$$\begin{aligned} I_{r_3} - U_{r_3}/r_3 &= 0; & I_{C_K} - [C_{бк} + \tau_{II}/m\varphi_{TK} (I_K + \\ I_{R_{y3}} - U_3/R_{y3} &= 0; & + I_{TK})] \dot{U}_{C_K} = 0; \\ I_3 - I_{T3} \exp(U_3/m\varphi_{T3} - 1) &= 0; & I_K - I_{TK} \exp(U_K/m\varphi_{TK} - 1) = 0; \\ I_{C_3} - [C_{б3} + \tau/(m\varphi_{T3})] (I_3 + & I_{R_{yK}} - U_K/R_{yK} = 0; \\ + I_{T3}) \dot{U}_{C_3} &= 0; & I_{r_K} - U_{r_K}/r_K = 0; \\ I_G - B I_3 + B_{II} I_K &= 0; & I_{r_6} - U_{r_6}/r_6 = 0. \end{aligned}$$

Неизвестными переменными являются I_{r_3} , $I_{R_{y3}}$, I_3 , I_{C_3} , I_G , I_{C_K} , I_K , $I_{R_{yK}}$, I_{r_K} , I_{r_6} , U_{r_3} , U_3 , U_{C_3} , \dot{U}_{C_K} , U_K , U_{r_K} , U_{r_6} , U_G .

Часть матрицы Якоби, получаемая из топологических уравнений, формируется после обработки М-матрицы всей эквивалентной схемы, а часть матрицы Якоби, получаемая из компонентных уравнений, может быть сформирована в подпрограмме модели. В предположении, что в дерево вошли ветви C_3 , C_K и r_6 , эту часть матрицы для вышеперечисленного порядка неизвестных можно представить в табл. 3.4. Коэффициенты в этой матрице

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{I_{T3}}{m\varphi_{T3}} \exp[U_3/(m\varphi_{T3})]; \\ a_2 &= -\frac{\tau}{m\varphi_{T3}} \dot{U}_{C_3}; \\ a_3 &= -\left[C_{б3} + \frac{\tau}{m\varphi_{T3}} (I_3 + I_{T3}) \right]; \\ a_4 &= -\frac{\tau_{II}}{m\varphi_{TK}} \dot{U}_{C_K}; \end{aligned}$$

Таблица 3.4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1										$\frac{-1}{r_3}$								I_{r_3}
2		1										$\frac{-1}{R_{y_3}}$							$I_{R_{y_3}}$
3			1									a_1							I_{a_1}
4			a_2	1									a_3						I_{a_3}
5			$-v$		1		B_{κ}												I_r
7						1		a_4						a_5					$I_{C_{\kappa}}$
6							1							a_6					I_{κ}
8								1							$\frac{-1}{R_{y\kappa}}$				$I_{R_{y\kappa}}$
9									1										$I_{r_{\kappa}}$
10																			U_{r_6}
11																			U_{r_3}
12																			U_{a_3}
13												a_7	1						\dot{U}_{C_3}
14														1	a_8				$\dot{U}_{C_{\kappa}}$
15																			U_{κ}
16																			$U_{r_{\kappa}}$
17										1								$\frac{-1}{r_6}$	I_{r_6}
18																			U_r

$$a_5 = - \left[C_{\text{БК}} + \frac{\tau_{\text{II}}}{m\varphi_{\text{TK}}} (I_{\kappa} + I_{\text{TK}}) \right];$$

$$a_6 = - \frac{I_{\text{TK}}}{m\varphi_{\text{TK}}} \exp [U_{\kappa}/(m\varphi_{\text{TK}})].$$

Коэффициенты a_7 и a_8 вычисляются в подпрограмме интегрирования. Справа от матрицы — вектор неизвестных. Из перечня элементов вектора неизвестных видно, что в модели уже учтены некоторые топологические уравнения. Так, например, из вектора неизвестных исключены элементы U_{C_3} и $U_{C_{\kappa}}$ как совпадающие с элементами U_{r_3} и $U_{r_{\kappa}}$.

Таблица 3.5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1							1		a_1	a_2	a_3	a_4					F_x
2								1	a_5	a_6	a_7	a_8					F_y
3	a_9		1								a_{10}						M_{1F_x}
4		a_{11}		1							a_{12}						M_{1F_y}
5	a_{13}				1							a_{14}					M_{2F_x}
6		a_{15}				1						a_{16}					M_{2F_y}
7									-1						1		V_x
8										-1						1	V_y
9																	ω_1
10																	ω_2
11																	φ_{10}
12																	φ_{20}
13											a_{17}		1				\dot{U}_{C_2}
14												a_{18}		1			\dot{U}_{C_1}
15																	I_1
16																	I_2

Модель шарнирной связи двух тел (см. § 2.4). Незвестными переменными при использовании обобщенного базиса будут F_x , F_y , M_{1F_x} , M_{1F_y} , M_{2F_x} , M_{2F_y} , V_x , V_y , ω_1 , ω_2 , φ_1 , φ_2 , \dot{U}_{C_1} , \dot{U}_{C_2} , I_1 , I_2 .

Компонентные уравнения для всех элементов шарнирной связи выглядят следующим образом:

$$V_x - \omega_2 r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) + \omega_1 r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}) = 0;$$

$$V_y - \omega_2 r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) + \omega_1 r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}) = 0;$$

$$M_{1F_x} - F_x r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}) = 0;$$

$$M_{1F_y} - F_y r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}) = 0;$$

$$M_{2F_x} - F_x r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}) = 0;$$

$$\begin{aligned}
 M_2 F_y - F_y r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}) &= 0; \\
 I_1 - l\omega_1 &= 0; \\
 I_1 - C_1 \dot{U}_{C_1} &= 0; \\
 I_2 - l\omega_2 &= 0; \\
 I_2 - C_2 \dot{U}_{C_2} &= 0.
 \end{aligned}$$

Часть матрицы Якоби, определяемая компонентными уравнениями при условии, что I_1, I_2 — хорды, C_1, C_2 — ветви дерева, представлена в табл. 3.5. Коэффициенты в матрице определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_2 &= -r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\
 a_3 &= \omega_1 r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_4 &= -\omega_2 r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\
 a_5 &= r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_6 &= -r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\
 a_7 &= -\omega_1 r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_8 &= \omega_2 r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\
 a_9 &= -r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_{10} &= -F_x r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); \\
 a_{11} &= -r_{11} \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}); & a_{12} &= F_y r_{11} \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}); \\
 a_{13} &= -r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); & a_{14} &= -F_x r_{21} \cos(\varphi_{20} + \varphi_{21}); \\
 a_{15} &= r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}); & a_{16} &= F_y r_{21} \sin(\varphi_{20} + \varphi_{21}),
 \end{aligned}$$

а коэффициенты a_{17}, a_{18} вычисляются в подпрограмме интегрирования.

Справа от матрицы — вектор неизвестных.

Как видно из примеров, при использовании обобщенного базиса ММС имеет высокий порядок даже для простых объектов.

3.4. Табличный метод получения математических моделей систем

В табличном методе в вектор базисных координат включаются переменные величины типа U и I для всех ветвей схемы. Выбор такого базиса позволяет в эквивалентной схеме иметь любые зависимые ветви. Из обобщенного метода табличный получается алгебраизацией компонентных уравнений, т. е. из вектора неизвестных, согласно (3.5), исключаются производные переменных состояния.

Рассмотрим алгебраизацию компонентных уравнений при использовании неявной формулы Эйлера для уравнения элемента типа C :

$$I_k = C(dU_k/dt).$$

Подставляя $dU_h/dt = (U_h - U_{h-1})/h_k$, получим алгебраизованное компонентное уравнение элемента типа С:

$$I_k = (C/h_k)(U_h - U_{h-1}) \text{ или } I = y_k U_h + q_k,$$

где k — номер шага интегрирования; h_k — его величина.

● Пример алгебраизации для уравнения элемента типа L при использовании для интегрирования формул Гира. Формула Гира $\dot{I}_k = (I_k - \sum_{i=1}^p d_i I_{k-i})/(h_k b)$, где d_i и b — коэффициенты, зависящие от порядка метода и величин шагов.

Подставим формулу Гира в компонентное уравнение элемента типа L:

$$U_k = L d I_k / dt.$$

В результате получим алгебраизованное компонентное уравнение:

$$U_k = [L/(h_k b)] (I_k - \sum_{i=1}^p d_i I_{k-i}) \text{ или } I_k = y_k U_k + q_k, \quad (3.6)$$

где
$$y_k = h_k b / L, \quad q_k = \sum_{i=1}^p d_i I_{k-i}.$$

Представление компонентных уравнений в форме (3.6) удобно для формирования матрицы Якоби. Матрица Якоби, получаемая при использовании табличного метода, сильно разреженная. Чем меньше число ненулевых элементов в матрице, тем выше экономичность модели, поэтому следует стремиться получить максимальную разреженность матрицы.

Поскольку структура компонентных уравнений определена набором элементов, используемых в объекте, то влиять на разреженность можно только за счет топологической части ММС. Один из алгоритмов, обеспечивающий высокую разреженность M-матрицы, а потому и разреженность топологической части матрицы Якоби, основан на включении в дерево в первую очередь тех ветвей (по возможности), которые обладают наибольшим весом. Вес ветви определяется суммарной кратностью вершин, между которыми она включена. Кратность вершины, в свою очередь, определяется количеством ветвей, ей инцидентных. Для графа гидромеханической системы (рис. 3.4, б) ветви, включенные в дерево, отвечают этому условию.

В общем виде алгебраизованная и линеаризованная система уравнений, получаемая табличным методом, может быть записана следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M \\ 0 & 1 & -M^1 & 0 \\ Y_{31} & Y_{32} & D_3 & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & D_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_x \\ \Delta I_{в.д} \\ \Delta I_x \\ \Delta U_{в.д} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_x \\ K_{в.д} \end{bmatrix},$$

где Y_{ij} — подматрица частных производных компонентных уравнений по компонентам вектора неизвестных (подматрицы Y_{32} , Y_{34} , Y_{41} , Y_{43} будут содержать ненулевые элементы только при наличии гираторных или трансформаторных связей и то только при условии, что ветви этих связей попали в разные категории: одна — в ветви дерева, другая — в хорды. Замечание относится и к ветвям с зависимыми параметрами, поскольку эти параметры входят в компонентное уравнение); D_3 , D_4 — диагональные подматрицы (диагональным элементом может быть 1 или 0); символом Δ отмечены приращения соответствующих переменных; K_x и $K_{в.д}$ — невязки компонентных уравнений хорд и ветвей дерева.

Матрица Якоби и вектор правых частей вычисляются по значениям переменных, определенных на предыдущей итерации, или по результатам предыдущих шагов (для первой итерации на шаге).

Алгебраизованная и линеаризованная система уравнений гидромеханической системы, граф которой изображен на рис. 3.4, имеет вид, показанный далее (с. 126—127).

Рассмотрим ММ биполярного транзистора при использовании для интегрирования неявного метода Эйлера. Вектор неизвестных

$$X^1 = (I_{гэ}, I_{R_{гэ}}, I_{сэ}, I_э, I_{гк}, I_{ск}, I_{ку}, I_{R_{гк}}, I_{гк}, I_{гб}, U_{гэ}, U_э, U_{гк}, U_{гк}, U_{гб}, U_{гк}).$$

Компонентные уравнения остаются такими же, как при применении обобщенного метода, кроме двух уравнений, содержащих производные. Вместо этих уравнений будем иметь

$$I_{сэ} - \left[C_{сэ} + \frac{\tau}{m\varphi_{гэ}} (I_э + I_{гэ}) \right] \left(\frac{U_{э, n} - U_{э, n-1}}{h} \right) = 0;$$

$$I_{ск} - \left[C_{ск} + \frac{\tau_{II}}{m\varphi_{гк}} (I_{гк} + I_{гк}) \right] \left(\frac{U_{гк, n} - U_{гк, n-1}}{h} \right) = 0,$$

где n — номер шага интегрирования.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	+1													
2		+1												
3			+1											
4				+1										
5					+1									
6						+1								
7							+1					-1		
8								+1				-1		
9									+1			+1	+1	
10										+1				+1
11											+1			
12	$\frac{-1}{R_1}$											+1		
13			$-k_1$										+1	
14		$-k_2$												+1
15			$\frac{-1}{R_2}$											
16				$-Y_{UP}$										
17					$\frac{-1}{R_3}$									
18														
19								+1						
20									+1					
21										+1				
22											+1			

Часть матрицы Якоби, сформированная на основании только компонентных уравнений, представлена в табл. 3.6. Коэффициенты в матрице, не обозначенные штрихом, остались такими же, как и в матрице, представленной табл. 3.5, т. е.

$$a_2' = \frac{\partial I_{C_3}}{\partial I_3} = -\frac{\tau}{m\varphi_{T3}} \left(\frac{U_{3,n} - U_{3,n-1}}{h} \right);$$

$$a_3' = \frac{\partial I_{C_3}}{\partial U_3} = - \left(C_{63} + \frac{\tau}{m\varphi_{T3}} (I_3 + I_{T3}) \right) / h;$$

$$a_5' = \frac{\partial I_{C_K}}{\partial U_K} = - \left(C_{6K} + \frac{\tau_n}{m\varphi_{TK}} (I_K + I_{TK}) \right) / h;$$

$$a_4' = \frac{\partial I_{C_K}}{\partial I_K} = -\frac{\tau_n}{m\varphi_{TK}} \left(\frac{U_{K,n} - U_{K,n-1}}{h} \right).$$

Как видно из этих выражений, смена метода интегрирования может привести к необходимости замены компонентных уравнений реактивных элементов.

Табличный метод иногда называют *методом моделирования в полном координатном базисе*. Полный координатный базис, так же как и обобщенный, избыточный; из него без ущерба для общности можно исключить величины постоянные или переменные, зависящие только от времени. В результате сокращается размерность ММС. Переменные, зависящие от времени, принадлежат источникам типа Е и I. При выборе дерева необходимо обеспечить попадание ветвей источников типа Е в дерево, а ветвей источников типа I — в хорды. При этом I_E для источников типа Е и U_I для источников типа I входят в координатный базис. Из ММС исключаются компонентные уравнения таких источников, а переменные I_E и U_I будут найдены из топологических уравнений.

Например, в ММС гидромеханической системы можно исключить перемещение U_P и соответственно перемещение ΔU_P , подставив вместо U_P в первое уравнение значение P (I_P остается в координатном базисе). Таким образом, из системы уравнений будут исключены одно уравнение и одна неизвестная, т. е. система уравнений останется совместной. Переменную I_{F_2} , принадлежащую ветви дерева, а не хорде, исключить из системы уравнений такими простыми действиями не удастся.

Метод получения ММС, в координатный базис которого включаются переменные типа U и I всех ветвей

Таблица 3.6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	1										$-\frac{1}{r_3}$						I_{r_3}
2		1										$-\frac{1}{R_{y_3}}$					$I_{R_{y_3}}$
3			1								a_1						I_b
4			a'_2	1								a'_3					I_{b_2}
5			$-B$		1		B_n										I_Γ
6						1	a'_4						a'_5				I_{C_k}
7							1						a'_6				I_k
8								1					$\frac{1}{R_{y_k}}$				$I_{R_{y_k}}$
9									1				$-\frac{1}{r_k}$				I_{r_k}
10										1				$-\frac{1}{r_6}$			I_{r_6}
11																	U_{r_3}
12																	U_b
13																	U_k
14																	U_{r_k}
15																	U_{r_6}
16																	U_Γ

схемы, кроме постоянных или зависящих только от времени переменных, называют *модифицированным табличным методом*. Достоинство этого метода — простота формирования ММС и возможность иметь в эквивалентной схеме любые зависимые ветви, недостаток — высокая размерность ММС, несмотря на некоторое сокращение по сравнению с немодифицированным методом.

3.5. Узловой метод получения математических моделей систем

Узловой метод является популярным при создании программных комплексов анализа динамических систем. В качестве вектора базисных координат в этом методе используется вектор переменных типа узловых потенци-

Таблица 3.7

	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>	<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>
1	-1	+1							
2		-1	+1	+1					
3			-1		+1	+1			
4				-1	-1		+1		
5						-1		+1	+1
6							-1	-1	

алов, в качестве топологических уравнений — уравнения типа первого закона Кирхгофа

$$\mathbf{I}(\varphi) = 0, \quad (3.7)$$

где φ — вектор переменных величин типа потенциала, характеризующих состояние узла (скорости, давления, температуры); \mathbf{I} — вектор переменных величин типа потока (токи, силы, расходы, тепловые потоки).

Топологические уравнения типа (3.7) могут быть получены с помощью матрицы инцидентий \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = 0. \quad (3.8)$$

Таблица 3.8

	<i>к</i>	<i>л</i>	<i>м</i>	<i>о</i>	<i>н</i>	<i>п</i>
<i>a</i>	+1					
<i>б</i>	-1	+1				
<i>в</i>		-1	+1			
<i>г</i>		-1		+1		
<i>д</i>			-1	+1		
<i>е</i>			-1		+1	
<i>ж</i>				-1		+1
<i>з</i>					-1	+1
<i>и</i>					-1	

Из уравнений обобщенного метода получения топологических уравнений уравнение (3.8) может быть выведено следующим образом. В эквивалентную схему объекта вводятся фиктивные ветви, связывающие все узлы схемы с базовым (базовым может быть любой узел эквивалентной схемы; как правило, это узел, к которому подключено наибольшее количество ветвей). Проводимости этих ветвей равны нулю, т. е. переменная типа I в этих ветвях равна нулю. В дерево включаются только эти фиктивные ветви.

Для графа, изображенного на рис. 3.5, без учета ветвей, отмеченных пунктиром, построим матрицу инциденций A (табл. 3.7).

Для этого же графа с учетом того, что ветви, отмеченные пунктирными линиями, являются его деревом, построим M -матрицу (табл. 3.8). Фиктивные ветви в эквивалентной схеме имеют направление от небазового узла к базовому.

Сравним полученную M -матрицу с матрицей инциденций A . Если каждой фиктивной ветви поставить в соответствие узел, из которого она выходит, то

$$A = -M^t.$$

Преобразуем общие топологические уравнения:

$$MU_{в.д} + U_x = 0; \quad (1)$$

$$I_{в.д} - M^t I_x = 0. \quad (2)$$



Рис. 3.5. Матрица инциденций графа.

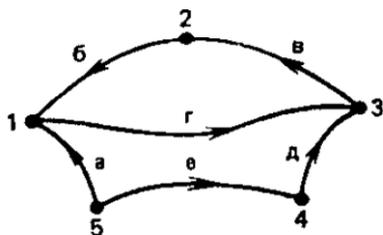


Рис. 3.6. Граф.

Так как ветви дерева фиктивные, то $I_{в,д} = 0$ и из уравнения (2) получим

$$M^t I = A I = 0,$$

где I — вектор переменных типа потока реальных ветвей.

Из уравнения (1) получим уравнение связи переменных типа потенциала φ с переменными типа разности потенциалов U на реальных ветвях. Так как $U_{в,д} = \varphi$, то $M\varphi + U = 0$ или $A^t \varphi - U = 0$.

Как уже было сказано выше, в узловом методе в вектор неизвестных включается вектор φ или $U_{в,д}$, компонентные уравнения алгебраизуются так же, как и в табличном методе, и, кроме того, накладывается ограничение на вид компонентного уравнения: оно обязательно должно быть представлено в виде зависимости переменной типа потока от переменной типа потенциала, т. е. $I = I(\varphi)$, либо от времени.

Тогда алгебраизованная и линеаризованная система уравнений приобретает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M \\ 0 & 1 & -M^t & 0 \\ Y_{31} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ 0 \\ \Delta I \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

где $Y_{31} = [\partial I / \partial U]$ — матрица частных производных компонентных уравнений по переменным типа разности потенциалов; K — вектор невязок компонентных уравнений.

Исключим из вектора неизвестных подвекторы ΔU и ΔI . Из первого уравнения системы (3.9) имеем $\Delta U = -M\Delta\varphi$. Подставим это значение в третье уравнение системы, а полученный результат — во второе: $\Delta I = K + Y_{31}M\Delta\varphi$; $M^t K + M^t Y_{31}M\Delta\varphi = 0$, или

$$Y\Delta\varphi = -M^t K, \quad (3.10)$$

где $Y = M^t Y_{31} M$ — матрица Якоби (матрица узловых проводимостей), алгоритм экономического вычисления

Таблица 3.9

	а	б	в	г	д	е
1	-1	-1		+1		
2		+1	-1			
3			+1	-1	-1	
4					+1	-1

которой будет рассмотрен ниже; $\mathbf{M}^t\mathbf{K}$ — вектор сумм переменных типа потока в узлах схемы.

Уравнение (3.10) и есть линеаризованная ММС для узлового метода.

Рассмотрим, что представляет собой матрица $\mathbf{Y} = \mathbf{M}^t\mathbf{Y}_{31}\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{31}\mathbf{A}^t$.

Для графа, показанного на рис. 3.6, построим матрицу инциденций (табл. 3.9), приняв за базовый узел 5.

Матрица \mathbf{Y}_{31} при оговоренной структуре компонентных уравнений будет диагональной с размерностью, равной количеству ветвей. Для удобства обозначим $\partial I_i / \partial U_i$ именем ветви, тогда:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{31} &= \begin{bmatrix} a & & & & & & \\ & б & & & & & \\ & & в & & & & \\ & & & г & & & \\ & & & & д & & \\ & & & & & е & \\ & & & & & & \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{A}\mathbf{Y}_{31} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & & & & & +1 \\ & +1 & -1 & & & & \\ & & & +1 & -1 & & -1 \\ & & & & & +1 & -1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} a & & & & & & \\ & б & & & & & \\ & & в & & & & \\ & & & г & & & \\ & & & & д & & \\ & & & & & е & \\ & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -б & & & & & г \\ & б & -в & & & & \\ & & & в & -г & & -д \\ & & & & & д & е \\ & & & & & & \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

ные элементы. Допустим, есть элемент, включенный между тремя узлами с номерами i, j, k . Тогда этот элемент даст слагаемые в элементы матрицы Якоби:

$$\begin{array}{l} y_{ii} \dots y_{ij} \dots y_{ik}; \\ \cdot \dots \cdot \dots \cdot \\ y_{ji} \dots y_{jj} \dots y_{jk}; \\ \cdot \dots \cdot \dots \cdot \\ y_{ki} \dots y_{kj} \dots y_{kk}. \end{array}$$

☞ **Примечание.** В матрице Якоби многополюсник представлен только своими внешними узлами, в то время как может иметь и внутренние.

При применении узлового метода в эквивалентной схеме допускаются и зависимые ветви, но аргументами функциональных зависимостей должны быть только элементы вектора φ . Допустим, переменная типа потока в k -й ветви, включенной между узлами с номерами i и j , зависит от переменных величин типа потенциала в l -м и m -м узлах:

$$I_k = I_k(\varphi_l, \varphi_m).$$

Тогда эта зависимость приведет к появлению следующих элементов матрицы:

$$\begin{aligned} y_{il} &= \partial I_k / \partial \varphi_l; & y_{im} &= -\partial I_k / \partial \varphi_m; & y_{jl} &= -\partial I_k / \partial \varphi_l; \\ y_{im} &= \partial I_k / \partial \varphi_m. \end{aligned}$$

☉ **Пример ММС механической поступательной системы** (рис. 3.7, а) при использовании узлового метода. Эквивалентная схема объекта для сил и скоростей вдоль горизонтальной оси представлена на рис. 3.7, б (граф этой схемы изображен на рис. 3.11). Выбором в качестве базового узел 4. Алгебраизация компонентных уравнений выполнена с помощью метода Эйлера. Линеаризованная система уравнений

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} + \frac{m_3}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{L_2} & -\frac{\Delta t}{L_2} & 0 \\ -\frac{\Delta t}{L_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{m_2}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{L_2} + \frac{\Delta t}{L_1} & -\frac{\Delta t}{L_1} \\ 0 & -\frac{\Delta t}{L_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{m_3}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{L_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \varphi_1 \\ \Delta \varphi_2 \\ \Delta \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

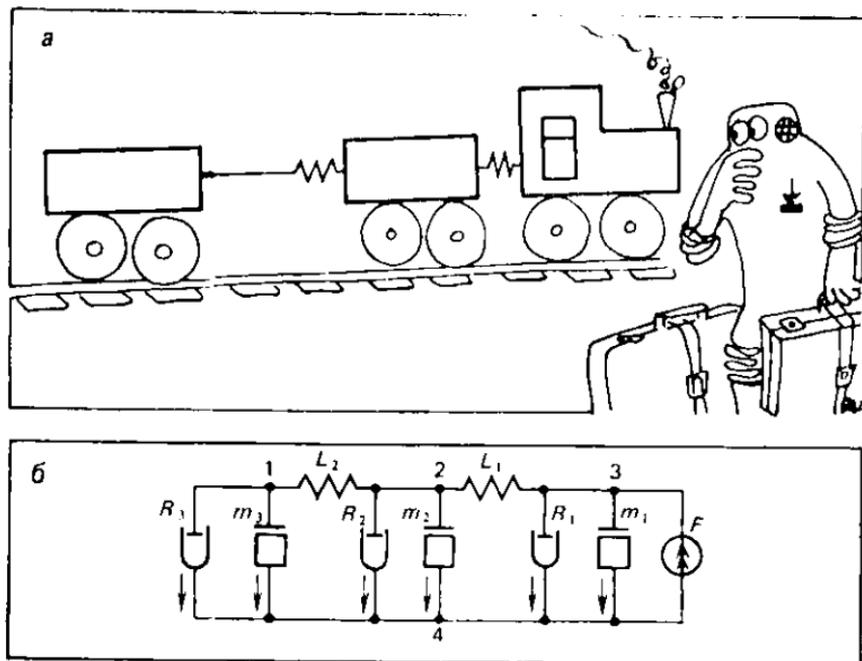


Рис. 3.7. Пример ММС механической поступательной системы.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1}{R_3} + \frac{\varphi_1 - \varphi_1^{n-1}}{\Delta t} m_3 + \left(i_{L_2}^{n-1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L_2} \Delta t \right) \\ \frac{\varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_2^{n-1}}{\Delta t} m_2 - \left(i_{L_2}^{n-1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L_2} \Delta t \right) + \\ \quad + \left(i_{L_1}^{n-1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{L_1} \Delta t \right) \\ \frac{\varphi_3}{R_3} + \frac{\varphi_3 - \varphi_3^{n-1}}{\Delta t} m_3 - \left(i_{L_1}^{n-1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{L_1} \Delta t \right) - F_1 \end{bmatrix}$$

Для формирования матрицы Якоби используем экономичную процедуру. Элементы R_3 и m_3 дадут вклады в элемент y_{11} , равные соответственно $1/R_3$ и $m_3/\Delta t$, где Δt — шаг интегрирования. Элемент L_2 даст вклад $\Delta t/L_2$ в элементы y_{11} и y_{22} со знаком «+», в элементы y_{12} и y_{21} — со знаком «-» и т. д. Элементы y_{13} и y_{31} нулевые, так как нет связи между узлами 1 и 3. Элементы вектора невязок сформированы из усилий, приложенных к узлу. Индексом обозначены переменные, полученные на предыдущем шаге интегрирования. Значения $i_{L_k}^n = i_{L_k}^{n-1} + (\varphi_i - \varphi_j)/(L_k \Delta t)$ и $\varphi_m^n = \varphi_m$ запоминаются для следующего шага. Для первого шага интегрирования $i_{L_k}^0$ и φ_m^0 определяются из начальных условий.

Подпрограмма ММ элемента, используя в качестве исходных данных подвектор скоростей, сформированный для узлов, к которым подключен элемент, и значения i_L^{n-1} и φ^{n-1} , а также величину шага интегрирования и параметры элемента, вычисляет подматрицу Якоби и подвектор сил для внешних узлов, одновременно подготавливая значения i_L^n и φ^n .

- **Пример модели гидравлического дросселя.** В зависимости от коэффициента расхода μ расход Q_m является либо линейной, либо нелинейной функцией давления P (см. § 2.5), соответственно должны изменяться элементы матрицы Якоби. Вычисляется число Рейнольдса:

$$Re = 4 | Q_m^{n-1} | / (v \Pi \rho),$$

где Q_m^{n-1} — расход через дроссель, полученный на предыдущей итерации.

Определяется коэффициент расхода: $\mu = \min \{ z \sqrt{Re}; \mu_{\max} \}$; если $\mu < \mu_{\max}$, то $Q_m = 8(ZS)^2 \rho P / (\omega \Pi)$.

Уравнения, сформированные по узловому методу

$$\begin{bmatrix} 8(ZS)^2 \rho / (\omega \Pi) & -8(ZS)^2 \rho / (\omega \Pi) \\ -8(ZS)^2 \rho / (\omega \Pi) & 8(ZS)^2 \rho / (\omega \Pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_m \\ -Q_m \end{bmatrix},$$

если $\mu = \mu_{\max}$, то $Q_m = \mu_{\max} F \sqrt{2\rho |P| \text{sign } P}$.

Тогда и уравнения ММ

$$\begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_m \\ -Q_m \end{bmatrix},$$

где $y = \mu_{\max} F \sqrt{2\rho / (2V |P|)}$.

Достоинство узлового метода — простота формирования матрицы Якоби и низкий порядок получаемой системы уравнений, поскольку именно для этого метода характерно предварительное исключение большого числа неизвестных из обобщенного базиса.

Недостаток узлового метода — ограничения, накладываемые на тип используемых элементов: в узловом методе запрещены идеальные источники переменной типа разности потенциалов, а также ветви, зависящие от переменных типа потока. Эти недостатки в узловом методе можно устранить введением специальных ветвей, которые не должны исказить физических процессов в объекте. Последовательно с идеальным источником типа разности потенциалов включается ветвь типа R, благодаря чему этот источник можно свести к источнику типа потока (рис. 3.8).

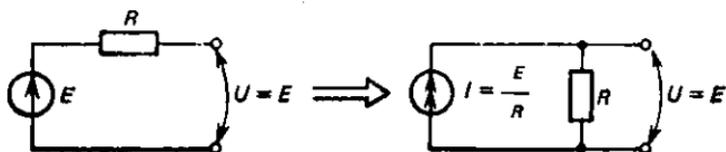


Рис. 3.8. Преобразование источника типа E в источник типа I .

Последовательно с ветвями, потоки через которые являются управляющими, включается ветвь, у которой связь между переменными типа потока и типа разности потенциалов — линейная, т. е. ветвь типа R . Тогда зависимость от переменной типа потока через ветвь может быть заменена зависимостью от разности потенциалов на этой вспомогательной ветви.

Объясним сказанное. Пусть есть зависимый источник потока с компонентным уравнением $I_1 = \dot{f}(I_2)$, где I_2 — поток через управляющую ветвь, последовательно с ней включается ветвь типа R с компонентным уравнением $U_2 = I_2 R_2$, тогда компонентное уравнение зависимого источника можно записать в виде $I_1 = \dot{f}(U_2/R_2)$.

● **Пример модели шарнирного соединения тела с неподвижным основанием.** Эквивалентная схема системы, состоящей из тела, шарниром соединенным с неподвижным основанием, приведена на рис. 2.20, б. Составим ММ этой системы, используя узловой метод.

Поскольку в эквивалентной схеме имеются источники скорости V_x и V_y , а в узловом методе они недопустимы, необходимо такое преобразование эквивалентной схемы: последовательно с источниками скоростей включаем небольшие механические сопротивления и преобразуем источники скорости в источники уси-

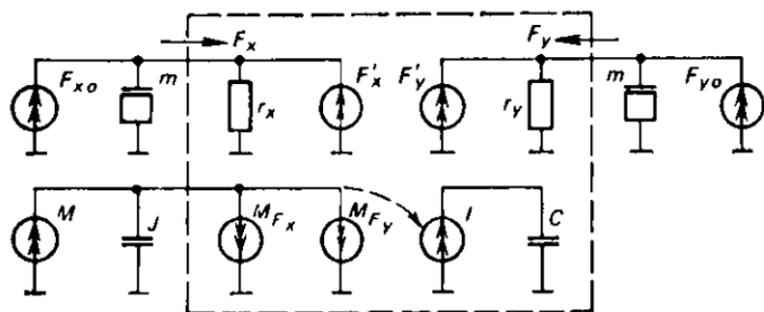


Рис. 3.9. Эквивалентная схема шарнирного соединения тела с неподвижным основанием при использовании узлового метода.

лий так, как это было показано на рис. 3.8. Преобразованная эквивалентная схема представлена на рис. 3.9. Выражения для определения вектора невязок следующие:

$$\text{узел 1: } -F_x + (\varphi_1 - \varphi_1^{n-1})(m/\Delta t) + \varphi_1/r_x - \varphi_3 r_{11} \sin(\varphi_4 + a)/r_x = I_1;$$

$$\text{узел 2: } -F_y + (\varphi_2 - \varphi_2^{n-1})(m/\Delta t) + \varphi_2/r_y + \varphi_3 r_{11} \cos(\varphi_4 + a)/r_y = I_2;$$

$$\text{узел 3: } -M + (\varphi_3 - \varphi_3^{n-1})(J/\Delta t) + (-\varphi_3 r_{11} \sin(\varphi_4 + a)/r_x + \varphi_1/r_x) r_{11} \sin(\varphi_4 + a) + (\varphi_3 r_{11} \cos(\varphi_4 + a)/r_y + \varphi_2/r_y) r_{11} \cos(\varphi_4 + a) = I_3;$$

$$\text{узел 4: } -I\varphi_3 + (\varphi_4 - \varphi_4^{n-1}) I = I_4.$$

Элементы матрицы Якоби определяются дифференцированием элементов вектора невязок:

$$y_{11} = \partial I_1 / \partial \varphi_1 = m/\Delta t + 1/r_x;$$

$$y_{12} = \partial I_1 / \partial \varphi_2 = 0;$$

$$y_{13} = \partial I_1 / \partial \varphi_3 = -r_{11} \sin(\varphi_4 + a);$$

$$y_{14} = \partial I_1 / \partial \varphi_4 = -\varphi_3 r_{11} \cos(\varphi_4 + a)/r_x \text{ и т. д.}$$

Преобразования эквивалентной схемы, выполняемые для снятия ограничений в узловом методе, не всегда удобны для пользователя, более формально подобные ограничения снимаются в *модифицированном узловом методе*. Он получается, если базис узлового метода расширить переменными типа потока управляющих ветвей и источников типа разности потенциалов. Поскольку увеличивается количество неизвестных, соответственно должно увеличиться количество уравнений. Уравнения узлового метода дополняются компонентными уравнениями управляющих ветвей и источников типа разности потенциалов. Аддитивный вклад модели в левую и правую части системы уравнений $\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi_1 \\ \Delta \varphi_2 \\ \Delta I_E \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} I_E \\ -I_E \\ (\varphi_1 - \varphi_2) - E \end{bmatrix}.$$

Здесь φ_1 и φ_2 — потенциалы узлов 1 и 2, к которым подключен источник; I_E — ток, протекающий через источник (значения I_E определяются по результатам предыдущих итераций); Δ — приращения соответствующих переменных.

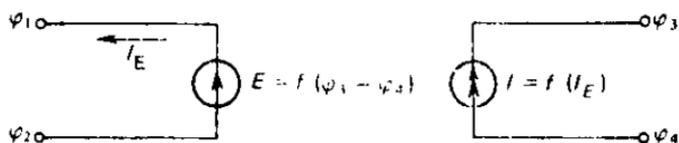


Рис. 3.10. Эквивалентная схема трансформаторного типа связи.

- Пример уравнений трансформаторной связи, сформированных по модифицированному узловому методу. Схема трансформаторной связи представлена на рис. 3.10, а вклад в уравнение:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial I}{\partial I_E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial I}{\partial I_E} \\ 1 & -1 & -\frac{\partial f}{\partial \varphi_3} & -\frac{\partial f}{\partial \varphi_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi_1 \\ \Delta \varphi_2 \\ \Delta \varphi_3 \\ \Delta \varphi_4 \\ \Delta I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_E \\ I_E \\ -I \\ I \\ (\varphi_1 - \varphi_2) - f(\varphi_3 - \varphi_4) \end{bmatrix}$$

Достоинство модифицированного узлового метода — получение ММС сравнительно невысокого порядка при практически любых зависимых ветвях, недостаток — дискретизация компонентных уравнений реактивных ветвей методами интегрирования, в результате чего смена метода интегрирования может привести к необходимости смены всех подпрограмм элементов, содержащих реактивные элементы, т. е. библиотека методов интегрирования САПР в этом случае жестко связана с библиотекой моделей элементов.

3.6. Метод переменных состояния

Базис метода переменных, характеризующих состояние системы, или более коротко — метода переменных состояния, составляют переменные типа потока через элементы типа $C(I_C)$, переменные типа разности потенциалов на элементах типа $L(U_L)$ и производные переменных состояния. Из уравнений обобщенного метода формирования ММС уравнения метода переменных состояния могут быть получены путем предварительного исключения из вектора неизвестных всех переменных, кроме I_C , U_L и производных переменных состояния.

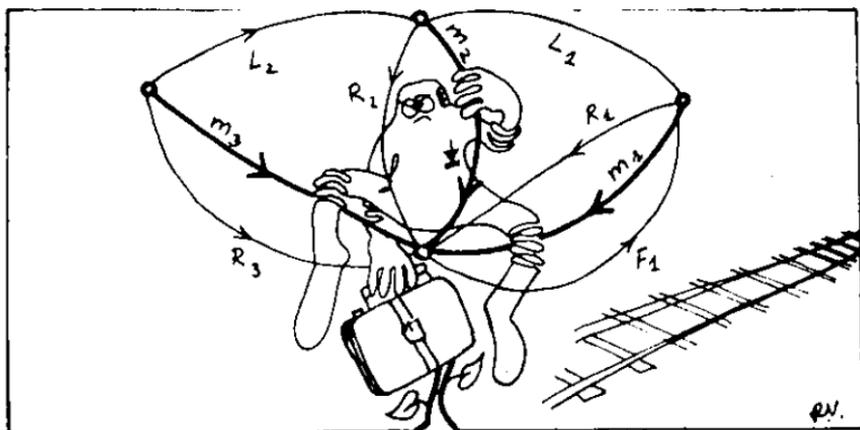


Рис. 3.11. Граф механической системы с выделенным нормальным деревом.

В этом методе предварительная алгебраизация компонентных уравнений не требуется, поэтому при программной реализации метода библиотека ММ элементов не связана с библиотекой методов интегрирования.

Отличительная особенность метода — возможность получения системы дифференциальных уравнений, являющейся ММ технического объекта, в нормальной форме Коши, т. е. разрешенной относительно производных. Эта возможность появляется благодаря тому, что в базис метода входят переменные I_C и U_L (формулы интегрирования пока не учитываем), которые определяются для соответствующих элементов согласно уравнениям $I_C = C(dU_C/dt)$, $U_L = L(dI_L/dt)$.

Разрешив ММС относительно I_C и U_L , а затем выполнив деление частей уравнений на C или L , получим систему уравнений в нормальной форме Коши.

В отличие от табличного метода, для которого фундаментальное дерево графа эквивалентной схемы выбиралось из условия минимальной насыщенности M -матрицы, в методе переменных состояния используется *нормальное дерево графа* (рис. 3.11) — фундаментальное дерево, в которое ветви включаются согласно следующему приоритету: типа Е, типа С, типа R, типа L и типа I. Использование такого дерева позволяет упростить процедуру получения системы уравнений в нормальной форме Коши.

3.7. Математические модели технических объектов для получения частотных характеристик

Для многих технических объектов, описываемых системой линейных дифференциальных уравнений, необходимо получение амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик (АЧФ и ФЧХ). Часто АЧХ и ФЧХ определяют для объектов, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений в режиме малого воздействия, в котором возможна линеаризация нелинейностей.

Получение АЧХ и ФЧХ возможно на основе уравнений, сформированных для анализа объекта во временной области, т. е. ММС в виде системы дифференциальных уравнений, при подаче на вход объекта гармонического воздействия. Но такой подход связан с большими затратами машинного времени, поскольку необходимо решать ММС для ряда частот входного воздействия из заданного частотного диапазона. Поэтому для получения АЧХ и ФЧХ разрабатываются специальные модели и методы.

Численный метод анализа частотных характеристик. Поскольку модель технического объекта предполагается линейной, целесообразно записать ее относительно приращений:

$$d\mathbf{V}/dt = \mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{U}, \quad (3.11)$$

где \mathbf{V} — вектор приращений переменных состояния относительно значений этих переменных без воздействия сигнала (в статическом состоянии); \mathbf{U} — вектор переменных составляющих входных воздействий; \mathbf{B} и \mathbf{D} — постоянные матрицы.

Учитываем, что $\mathbf{V}(0) = 0$, и применяем преобразование Лапласа к (3.11):

$$p\mathbf{V}(p) = \mathbf{B}\mathbf{V}(p) + \mathbf{D}\mathbf{U}(p), \quad (3.12)$$

где $\mathbf{V}(p)$ и $\mathbf{U}(p)$ — преобразованные по Лапласу векторы $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$.

Заменив p в (3.12) на $j\omega$, получим модель объекта в частотной области:

$$(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{V}(j\omega) = \mathbf{D}\mathbf{U}(j\omega), \quad (3.13)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица того же порядка, что и матрица \mathbf{B} .

Решение этой системы уравнений позволяет определить значение $\mathbf{V}(j\omega)$ для избранного ряда частот. По-

строение ЛЧХ и ФЧХ сводится к нахождению модуля и аргумента комплексного значения $V(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$ на заданных частотах ω при единичной амплитуде воздействия.

Метод полиномиальных коэффициентов. Так как математическая модель объекта линейна, то $U_{\text{вых}} = B_1 V + D_1 U$, где $U_{\text{вых}}$ — вектор приращений тех фазовых переменных, которые считаются выходными для объекта.

Применяя преобразование Лапласа и учитывая (3.12), получим

$$U_{\text{вых}} = H(p) U(p),$$

где $H(p) = B_1(pI - B)^{-1}D + D_1$ — матрицы передаточных функций объекта.

Элементы матрицы $H_{ij} = U_{\text{вых}i}(p)/U_j$ суть функции передачи от j -го входа к i -му выходу.

Эти функции можно представить как отношение двух полиномов относительно p :

$$H_{ij} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}. \quad (3.14)$$

Если коэффициенты a_i и b_j предварительно определяют численно, то имеем *метод полиномиальных коэффициентов*. Вычисление коэффициентов полиномов весьма трудоемкая задача, но она выполняется однократно для эквивалентной схемы заданной конфигурации и при заданных параметрах элементов, и затем для определения значения функции передачи на любой частоте достаточно воспользоваться формулой (3.14). Недостаток этого метода состоит в быстром росте погрешностей вычислений при увеличении размерности задачи.

Символический метод. Здесь большая часть действий по определению коэффициентов a_i и b_j производится в общем виде, т. е. выполняются операции над символическими обозначениями, в результате чего a_i и b_j выражаются не через конкретные значения параметров элементов, а через их символические обозначения. Этот метод еще более трудоемкий, чем метод полиномиальных коэффициентов, но зато появляется возможность определения частотных характеристик с использованием (3.14) при произвольных значениях параметров элементов после однократного получения коэффициентов a_i и b_j ; кроме того, наблюдается меньший рост погрешности с возрастанием размерности задачи для объектов, представляемых экви-

валентными схемами средней и большой сложности (более трех десятков узлов). Однако в большинстве программ анализа используется численный метод анализа частотных характеристик [путем решения системы (3.13)], поскольку затраты времени на получение коэффициентов a_i и b_j резко возрастают с ростом сложности эквивалентной схемы (пропорционально n^4 , где n — порядок системы уравнений).

Численный метод может быть реализован не только для объектов, описываемых системой уравнений в нормальной форме Коши, как это было показано для (3.11). Любой из вышерассмотренных методов формирования ММС во временной области может быть адаптирован для получения ММС в частотной области. Для этого достаточно ММ элементов во временной области заменить моделями для частотной области, поскольку топологические уравнения остаются без изменений.

Компонентные уравнения для простейших элементов типа R , C , L соответственно $I=U/R$; $I=j\omega CU$; $U=j\omega LI$, где U и I — преобразованные по Фурье переменные составляющие соответствующих фазовых переменных.

3.8. Математические модели технических объектов при моделировании на метауровне

К основным типам сложных технических объектов, подходы к моделированию которых на метауровне различны (см. книгу 1), можно отнести объекты, являющиеся предметами исследований теории автоматического управления (ТАУ), и объекты, моделируемые как системы массового обслуживания.

Модели объектов ТАУ. Поведение сложного технического объекта в этом случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Классические методы ТАУ развиты для случаев отсутствия или ограниченного числа нелинейностей в моделях безынерционных элементов. При использовании моделей ТАУ в САПР эти ограничения могут быть сняты.

Для решения таких задач можно использовать специализированные программы, реализующие классические методы ТАУ, или универсальные программные комплексы. Специализированные программы просты, но, как уже было отмечено, классические методы вносят ряд ограничений. Для применения универсальных программных

комплексов с входными языками, ориентированными на описание эквивалентных схем, нужна методика приведения поставленной задачи к таким схемам.

Рассмотрим методику такого приведения для случая задания исходного описания на примере задачи о посадке самолета в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта методика аналогична методике составления структурных схем объектов для последующего анализа на АВМ. Она основана на установлении соответствий между членами (слагаемыми) исходных уравнений и элементами эквивалентных схем, допустимых с позиций входного языка программного комплекса.

При ряде допущений, характерных для метауровня, уравнение высокочастотных колебаний в продольном движении самолета при посадке имеет вид

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\xi\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = kT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + k\omega_0^2\delta(t),$$

где $\theta(t)$ — угол тангажа; ξ — коэффициент демпфирования высокочастотных колебаний; ω_0 — резонансная частота колебаний; k — коэффициент усиления высокочастотных колебаний; T_0 — траекторная постоянная времени; $\delta(t)$ — отклонение руля высоты (внешнее воздействие на объект).

Кроме того, угол тангажа θ и высота h связаны дифференциальным уравнением

$$T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V\theta(t),$$

где V — скорость движения самолета считается постоянной.

Алгоритм составления структурной схемы выглядит так:

Э т а п 1. Разрешение уравнений относительно старших производных:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} &= -2\xi\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} + kT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + \\ &\quad + k\omega_0^2\delta(t); \\ \frac{d^2h(t)}{dt^2} &= -\frac{1}{T_0} \frac{dh(t)}{dt} + \frac{V}{T_0} \theta(t). \end{aligned}$$

Э т а п 2. Определение суммы в правой части уравнений с помощью сумматора (считается, что слагаемые известны).

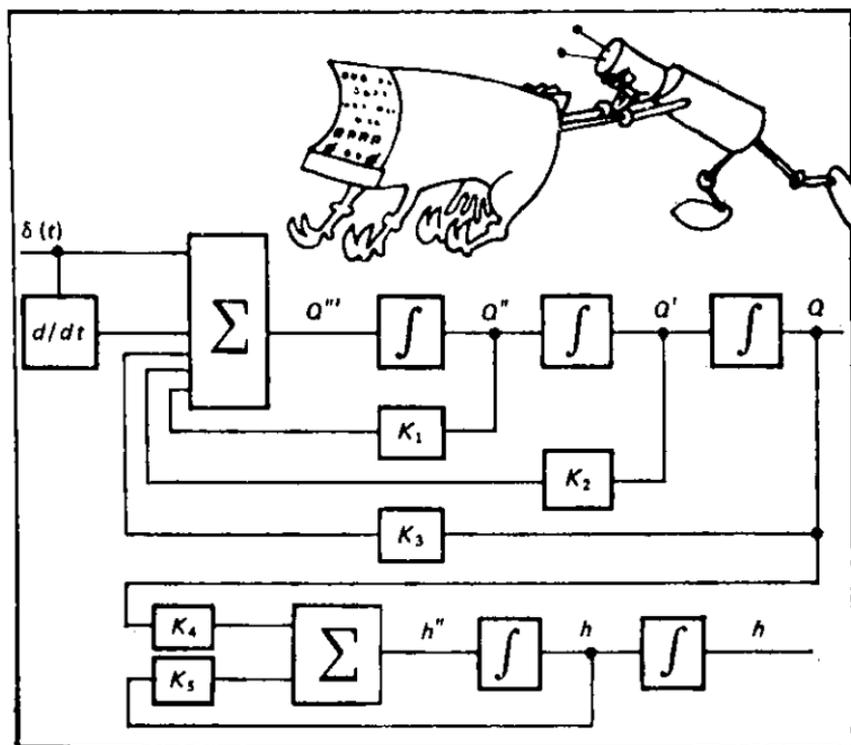


Рис. 3.12. Схема решения предлагаемой системы уравнения.

Э т а п 3. Получение производных меньших порядков и зависимостей необходимых переменных от времени путем последовательного интегрирования.

Э т а п 4. Выполнение этапа 2, так как теперь слагаемые в правой части действительно известны (установление обратных связей).

Составим схему решения предлагаемой системы уравнения по данной методике (рис. 3.12). Если будем иметь блоки, выполняющие сложение, интегрирование, дифференцирование (для вычисления производной отклонения руля высоты) и передачу сигналов с заданными коэффициентами, то сможем решить поставленную задачу. Блок сложения можно выполнить на основе резистора с номинальным значением, равным единице сопротивления, параллельно которому включены источники тока (рис. 3.13). Тогда значения тока и напряжения на резисторе равны значению суммы токов источников. Операция вычитания выполняется изменением направления тех ис-

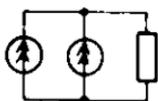


Рис. 3.13. Схема сумматора.

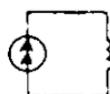


Рис. 3.14. Схема блока, выполняющего дифференцирование переменной.

точников тока, которые соответствуют переменным, используемым со знаком минус.

С помощью этой же схемы можно реализовать совместно с выполнением сложения и передачу сигналов с заданными коэффициентами, если для зависимых источников тока использовать компонентное уравнение вида $I = kX$, где k — коэффициент передачи соответствующей переменной X .

Блок, выполняющий интегрирование, представляет собой зависимый источник тока и емкость, соединенные параллельно. Если вместо одного источника тока параллельно включить несколько источников тока, то получим блок, выполняющий суммирование и интегрирование.

Дифференцирование можно выполнить с помощью блока, показанного на рис. 3.14. Зависимый источник тока (его значение равно переменной, которую необходимо проинтегрировать) нагружен на индуктивность с номинальным значением, равным единице. В этом случае, согласно компонентному уравнению индуктивности, напряжение на индуктивности будет равно производной тока.

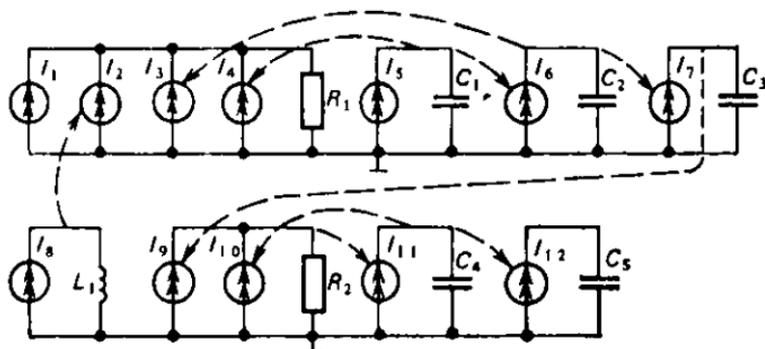


Рис. 3.15. Эквивалентная схема для решения уравнений.

Используя рассмотренные блоки, получим эквивалентную схему для исходной системы уравнений (рис. 3.15), где $I_1 = k\omega_0^2\delta(t)$; $I_2 = -kT_0\omega_0^2\varphi_5$; $I_3 = -\omega_0^2\varphi_3$; $I_4 = -2\xi\omega_0\varphi_2$; $I_5 = \varphi_1$; $I_6 = \varphi_2$; $I_7 = \varphi_3$; $I_8 = \delta(t)$; $I_9 = V/T_0\varphi_4$; $I_{10} = -1/T_0\varphi_7$; $I_{11} = \varphi_6$; $I_{12} = \varphi_7$ и потенциалы узлов $\varphi_1 = d^3\theta(t)/dt^3$; $\varphi_2 = d^2\theta(t)/dt^2$; $\varphi_3 = d\theta(t)/dt$; $\varphi_4 = \theta(t)$; $\varphi_5 = d\delta(t)/dt$; $\varphi_6 = d^2h(t)/dt^2$; $\varphi_7 = dh(t)/dt$; $\varphi_8 = h(t)$.

Начальные условия для решения задаются в виде начальных напряжений на емкостях интеграторов.

Зависимые источники тока не накладывают никаких ограничений на вид функциональных зависимостей, поэтому решаемые таким образом системы дифференциальных уравнений могут быть нелинейными.

Для пользователя САПР удобно представлять объект анализа в виде исходной структурной схемы (см. рис. 3.12). В функции разработчика САПР в этом случае входит написание подпрограмм соответствующих блоков.

Подобный подход к решению систем дифференциальных уравнений применим и к системам, не разрешенным относительно старших производных. Предположим, что ММ какого-либо объекта или процесса суть следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}xe^y + xy' + yx' &= 0; \\x' - y' \ln x' - c &= 0.\end{aligned}$$

Преобразуем систему к виду

$$\begin{aligned}y' &= -(e^y + (y/x)x'); \\x' &= y' \ln x' + c.\end{aligned}$$

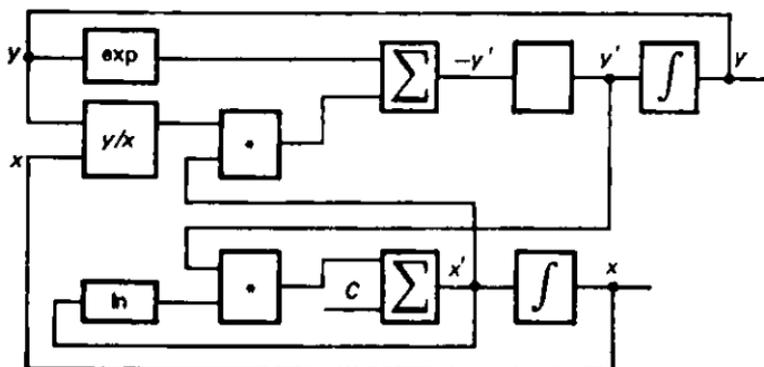


Рис. 3.16. Структурная схема решения системы уравнений, не разрешенной относительно старших производных.

Считая, что правые части уравнений известны, получим структурную схему решения этой системы (рис. 3.16).

Для решения этой системы уравнений помимо уже рассмотренных блоков необходимы блоки, выполняющие преобразование сигнала в соответствии с заданной функцией, деление и умножение двух

сигналов. Такие блоки удобно реализовать в виде многополюсников. Например, блок умножения двух сигналов представляет собой четырехполюсник (рис. 3.17). Аддитивный вклад в систему уравнений $\mathbf{Y}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$:

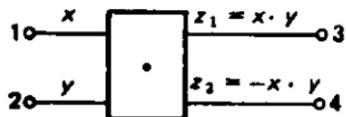


Рис. 3.17. Схема блока, выполняющего перемножение переменных.

$$\begin{bmatrix} y & x & 0 & 0 \\ -y & -x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_3 \\ \Delta\varphi_4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y \cdot x \\ -y \cdot x \end{bmatrix}.$$

Нулевые элементы в строках матрицы Якоби обусловлены однонаправленностью модели. Выходной сигнал представляет собой зависимый источник тока с компонентным уравнением $I = xy$. Подключая к базовому узлу полюс 4 модели, будем иметь источник тока со знаком плюс, подключая полюс 3 — со знаком минус.

- **Пример блока, выполняющего преобразование сигнала в соответствии с заданной функцией.** Пусть необходимо выполнить преобразование сигнала по формуле $Z = e^y$, тогда можно использовать зависимый источник тока с компонентным уравнением $I = \exp(y)$. Вклад в систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^y & 0 & 0 \\ -e^y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ e^y \\ -e^y \end{bmatrix}.$$

Моделирование объектов ТАУ, представленных в виде набора стандартных звеньев, практически не отличается от рассмотренного выше подхода, поскольку каждое звено описывается соответствующим дифференциальным уравнением. Рассмотрим апериодическое и колебательное звенья.

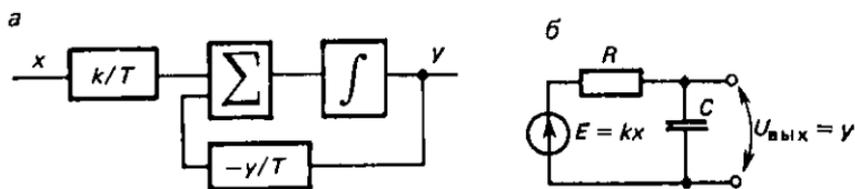


Рис. 3.18. Схема аперриодического звена:
 а — структурная схема; б — электронный эквивалент.

Аперриодическое звено описывается дифференциальным уравнением

$$kx = T \left(\frac{dy}{dt} \right) + y, \quad (3.15)$$

где x — входной сигнал; y — выходной сигнал; k — статический коэффициент передачи; T — постоянная времени звена.

Этому уравнению соответствует эквивалентная схема рис. 3.18, а.

Второй вариант представления аперриодического звена состоит в подборе соответствующей электронной схемы, так как известно, что RC -цепочка (рис. 3.18, б) является аперриодическим звеном с $k=1$. Если на входе цепочки поставим зависимый источник напряжения с компонентным уравнением $E=kx$, то получим звено, описываемое уравнением (3.15).

Колебательное звено описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx,$$

где T — постоянная времени; ξ — коэффициент затухания ($\xi < 1$); k — коэффициент усиления.

Для этого звена также можно получить соответствующую структурную схему, но с точки зрения затрат машинного времени и памяти экономичнее будет звено, представленное электронной схемой (рис. 3.19) с зависимым источником напряжения на входе.

Рассмотрим объединение блоков в систему при использовании узлового метода. Для узлового метода в качестве аргументов для зависимых источников тока (допустимы только источники тока)

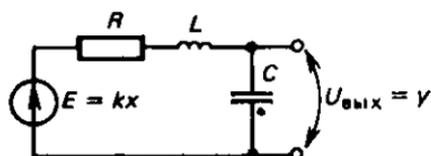


Рис. 3.19. Схема колебательного звена.

могут использоваться узловые потенциалы. Значение тока зависимого источника соответствует выходной переменной для многих бло-

ков, например для блока умножения. Если эта переменная затем поступает на сумматор, интегратор или дифференцирующий блок, то источник тока непосредственно подключается к резистору, емкости или индуктивности (именно эти элементы, как мы уже убедились, выполняют соответствующие функции при параллельном подключении к ним источников тока). Если выходная переменная блока используется как аргумент для зависимого источника тока, то выход блока (источник тока) подключается к резистору с номинальным значением, равным единице. В этом случае значение напряжения на резисторе равно значению тока, т. е. равно выходной переменной и может быть использовано в качестве аргумента для зависимого источника тока.

Таким образом, для моделирования объектов ТАУ возможно применение программных комплексов анализа динамических систем макроуровня.

Математическое моделирование систем массового обслуживания. Математическое моделирование систем массового обслуживания (СМО) может быть аналитическим и имитационным. При аналитическом моделировании модели СМО могут быть получены при использовании допущений, каждое из которых приводит к уменьшению степени их адекватности. Поэтому, несмотря на то, что аналитические модели очень экономичны, основным универсальным методом исследования СМО является имитационное моделирование.

■ **Примечание.** Принципы имитационного моделирования были изложены в книге I.

Рассмотрим некоторые вопросы более подробно.

При моделировании СМО различают два типа элементов: заявки и обслуживающие аппараты.

Поток заявок характеризуется временами поступления заявок. В общем случае поток можно рассматривать как случайный процесс, задаваемый функцией распределения промежутков времени между моментами поступления двух соседних заявок. Основной характеристикой потока заявок является интенсивность λ , равная среднему числу заявок, поступающих в единицу времени ($1/\lambda = T$ — средний интервал времени между поступлениями двух соседних заявок).

Работа *обслуживающего аппарата* характеризуется длительностью обслуживания заявки — промежутком

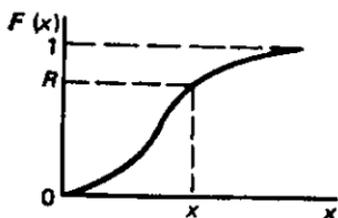


Рис. 3.20. Иллюстрация к определению случайной величины, распределенной по произвольному закону.

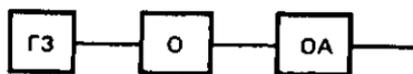


Рис. 3.21. Схема простейшей системы массового обслуживания: ГЗ — генератор заявок; О — очередь к обслуживающему аппарату ОА.

времени, необходимым для обслуживания. В общем случае это случайная величина, характеризуемая некоторым законом распределения. Математическое ожидание этого закона распределения — среднее время обслуживания μ заявки.

Законы распределения случайных величин при моделировании СМО могут быть произвольными, но наиболее часто используются распределения экспоненциальное, k -распределение Эрланга, нормальное. Моделирование последовательности случайных чисел (в СМО это интервалы времени между поступлениями заявок и времени обслуживания), распределенных по заданному закону, выполняется на основе программного датчика случайных чисел с равномерным распределением в интервале от 0 до 1. В основе построения датчика лежит теорема, утверждающая, что если величина X имеет плотность распределения $f(x)$, то величина

$$F(Y) = \int_{-\infty}^Y f(X) dX \quad (3.16)$$

распределена равномерно в интервале $[0, 1]$, т. е. задавая $F(Y)$ и решая (3.16) относительно y , получим случайные числа с требуемой плотностью распределения $f(x)$.

Уравнение (3.16) может быть решено графически, как это показано на рис. 3.20, где $F(X)$ — функция распределения; X — случайная величина с законом распределения $F(X)$; R — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$.

Для некоторых законов распределения данный способ может быть реализован аналитически. Например,

для экспоненциального распределения $F(Y) = R =$
 $= \int_0^Y \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \lambda e^{-\lambda Y}.$

Разрешая это уравнение относительно Y , получим $Y =$
 $= - (1/\lambda) \ln(1 - R)$. В данное уравнение подставим зна-
 чения равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$ ве-
 личины R , в результате определим значения Y — величи-
 ны с плотностью распределения $f(Y) = \lambda e^{-\lambda Y}$;

для k -распределения Эрланга значения случайной ве-
 личины $Y = - \frac{1}{k\lambda} \sum_{i=1}^k \ln(1 - R_i)$, где k — порядок распреде-
 ления;

для нормального распределения значения случайной ве-
 личины $Y = \sigma_Y \sqrt{12/n} \left(\sum_{i=1}^n R_i - n/2 \right) + M_Y$, где $n \geq 6$ доста-
 точно для практических целей, M_Y и σ_Y — математическое
 ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной ве-
 личины Y .

- Пример моделирования простейшей СМО (рис. 3.21). Генератор заявок ГЗ вырабатывает заявки в соответствии с требуемым законом.

Предположим, что длина очереди не ограничена. Зададимся дисциплиной обслуживания заявок, стоящих в очереди: пусть обслуживание ведется по принципу «раньше пришел, раньше обслужен». Если t_i — момент поступления i -й заявки на вход 0, то время выхода заявки из ОА, $\Theta_i = t_i + W_i + q_i$, где W_i — время пребывания заявки в очереди, q_i — время обслуживания i -й заявки в ОА (t_i и q_i определяются по соответствующим законам генерации и обслуживания заявок). Необходимо определить W_i . Будем считать, что в момент времени $t = 0$ в СМО нет ни одной заявки; значит, $W_i = 0$, т. е. время пребывания в очереди самого первого требования равно нулю, тогда

$$W_{i+1} = \begin{cases} W_i + q_i - \eta_i, & \text{если } W_i + q_i - \eta_i > 0; \\ 0, & \text{если } W_i + q_i - \eta_i < 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

где $\eta_i = t_{i+1} - t_i$ — интервал времени между поступлениями двух соседних заявок.

Соотношения (3.17) иллюстрируются рис. 3.22. На рис. 3.22, а ($i+1$)-я заявка поступает в момент, когда ОА занят обслуживанием, причем соотношение (3.17) справедливо в любом случае, обслуживается ли i -я заявка или какая-либо из предыдущих заявок. На рис. 3.22, б ОА свободен в момент прихода ($i+1$)-й заявки.

Таким образом, появляется возможность вычислять W_{i+1} последовательно, начиная с первой заявки.

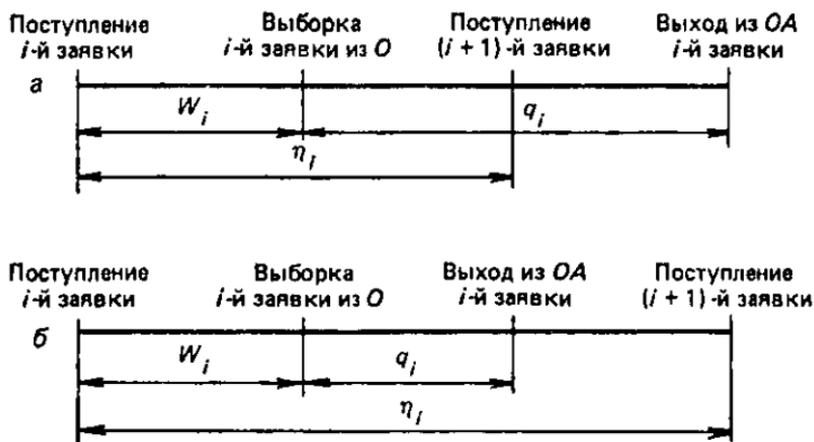


Рис. 3.22. Поступление заявок в систему:
 а — ОА занят; б — ОА свободен.

Алгоритм моделирования СМО (см. рис. 3.21) состоит из следующих этапов:

Этап 1. Генерация случайной величины η_i и вычисление t_i .

Этап 2. Определение q_i .

Этап 3. Вычисление W_i .

Этап 4. Вычисление θ_i .

Подавая на вход системы достаточно большое количество заявок (10^2 — 10^5), можно собрать статистические сведения для определения следующих характеристик: *загрузка ОА* $\rho = T_3/T$, где T_3 — время работы ОА, T — время моделирования; *коэффициент простоя* $k = 1 - \rho$; *количество заявок, обслуженных ОА*; *средняя и максимальная длина очереди*; *среднее и максимальное время ожидания в очереди*; *среднее и максимальное время пребывания в системе*.

Как видно на примере даже простейшей СМО, для моделирования необходимо составление алгоритма, синхронизирующего события, происходящие в системе, и выявляющего события, которые должны быть очередными. Продвижение текущего модельного времени удобно выполнять с помощью событийного метода, заключающегося в составлении для всех генераторов заявок и обслуживающих аппаратов списка будущих событий (СБС). Момент наступления текущего события в СМО определяется минимальным значением момента времени из списка будущих событий. Кроме событий, непосредственно влияющих на работу системы, в СБС заносятся также моменты времени печати статистических сведений и окончания моделирования.

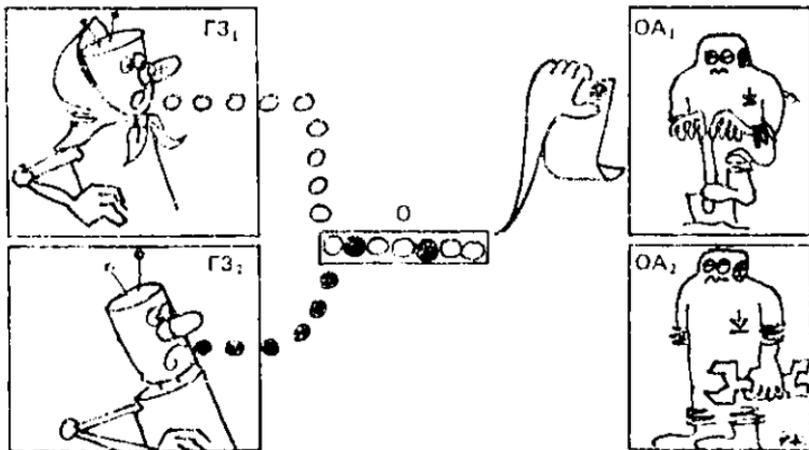


Рис. 3.23. Пример способа продвижения модельного времени по СБС.

- Пример способа продвижения модельного времени по СБС (рис. 3.23). Два генератора заявок $ГЗ_1$ и $ГЗ_2$ ставят заявки в очередь O , из которой последние могут быть обработаны обслуживающими аппаратами OA_1 и OA_2 . Список будущих событий для этой системы составят (рис. 3.24): моменты поступления заявок от $ГЗ_1$ (t_1) и от $ГЗ_2$ (t_2); моменты выборки заявок из очереди аппаратами OA_1 (θ_1) и OA_2 (θ_2) (считаем, что они совпадают с временем окончания обслуживания предыдущих заявок); моменты печати статистических характеристик $t_{печ}$ и момент окончания моделирования $t_{кон}$.

На рис. 3.25, а показано состояние СБС в момент выборки заявки из очереди первым обслуживающим аппаратом. На рисунке t_m текущее время моделирования (в данный момент $t_m = \theta_1$). После попадания заявки в OA_1 становится известным время ее обслуживания и соответственно время выборки из очереди следующей заявки в OA_1 . Происходит замена значения θ_1

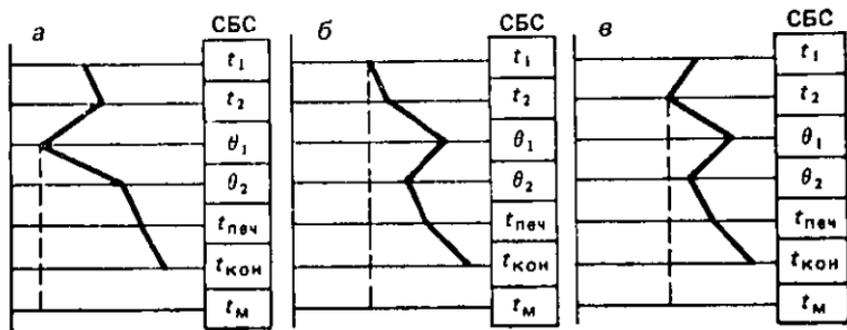


Рис. 3.24. Изменение состояния списка будущих событий.

в СБС и производится обращение к блоку 0 с целью уменьшения очереди на 1. Список будущих событий принимает вид, показанный на рис. 3.24, б, где $t_m = t_1$. Теперь поступает заявка от ГЗ₁, в соответствии с заданным законом формируется новое время поступления заявки от ГЗ₁, производится его замена в СБС и выполняется обращение к блоку 0 для увеличения очереди заявок на 1. Список будущих событий принимает вид, показанный на рис. 3.24, в, где $t_m = t_2$. Выполняется обращение к блоку 0 для увеличения очереди на 1, формируется новый момент t_2 и т. д.

Таким образом, алгоритм событийного моделирования определяет минимальное значение момента времени из СБС, этот момент времени соответствует событию, которое будет следующим в системе. В зависимости от того, что это за событие, алгоритм должен выполнить те или иные изменения в системе, обусловленные логикой работы ОА, на которые влияет данное событие, и добавить соответствующие элементы в СБС.

Создание имитационных моделей возможно на основе универсальных алгоритмических языков, таких, как ФОРТРАН, ПЛ/1 и т. п., но такой подход к моделированию связан с весьма трудоемким процессом программирования и, кроме того, переход к исследованию новой СМО приводит к необходимости создания практически новой программы. Поэтому разработан ряд алгоритмических языков высокого уровня, предназначенных специально для моделирования СМО, наибольшее распространение среди них получили языки GPSS, SOL, SIMULA, СЛЕНГ, СТАМ.

■ **Примечание.** С основами языка GPSS можно познакомиться в книге 7.

Краткие выводы

Для получения ММС используют методы обобщенный, табличный, табличный модифицированный, узловый, узловый модифицированный, контурный и переменных состояния. Все методы могут быть сформированы из обобщенного предварительным исключением части переменных из базиса метода. Наибольшей размерностью характеризуются ММС, полученные обобщенным методом, наименьшей — узловым, контурным или переменных состояния (в зависимости от конфигурации эквивалентной схемы). Произвольные функциональные зависимости для элементов системы допустимы в обобщенном, табличном, табличном модифицированном и узловом модифицированном методах. Метод переменных состояния позволяет получить ММС в нормальной форме Коши.

При создании программного обеспечения библиотека моделей элементов не будет связана с библиотекой методов численного интегрирования, если воспользоваться для формирования ММС обобщенным методом или методом переменных состояния, так как для них не требуется предварительной дискретизации компонентных уравнений реактивных ветвей.

При анализе объектов, являющихся предметом исследования ТАУ, можно воспользоваться математическим и программным обеспечением, созданным для анализа объектов макроуровня.

При анализе объектов, являющихся предметом исследования теории массового обслуживания, используются в основном методы событийного моделирования.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.— 552 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.— 392 с.
3. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы: Введение в теорию.— М.: Наука, 1977.— 439 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов.— М.: Мир, 1984.— 494 с.
5. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем.— М.: Высш. шк., 1980.— 309 с.
6. Петренко А. И., Власов А. И., Тимченко А. П. Табличные методы моделирования электронных схем на ЭЦВМ.— Киев: Вища школа, 1977.— 189 с.
7. Автоматизированное проектирование следящих приводов и их элементов / В. Ф. Казмиренко, М. В. Баранов, И. В. Илюхин и др.— М.: Энергоатомиздат, 1980.— 238 с.
8. Расчет и проектирование строительных и дорожных машин на ЭВМ/Е. Ю. Малиновский, Л. Б. Зарецкий, Ю. Г. Беренгард и др.— М.: Машиностроение, 1980.— 215 с.
9. Анисимов Б. В., Петров В. Я. Организация вычислительных процессов.— М.: Высш. шк., 1977.— 407 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Методы получения математических моделей технических объектов на микроуровне	7
§ 1.1. Краевые задачи при проектировании технических объектов	7
§ 1.2. Метод конечных элементов	12
§ 1.3. Метод конечных разностей	41
§ 1.4. Программные комплексы на основе методов конечных разностей и конечных элементов	50
§ 1.5. Методы граничных элементов	60
2. Основные положения получения математических моделей технических объектов на макроуровне	66
§ 2.1. Общие сведения о моделировании на макроуровне	66
§ 2.2. Аналогии компонентных уравнений	68
§ 2.3. Аналогии топологических уравнений	71
§ 2.4. Получение эквивалентных схем технических объектов	75
§ 2.5. Сложные модели элементов технических объектов	89
3. Методы получения математических моделей технических систем	109
§ 3.1. Элементы теории графов	109
§ 3.2. Метод получения топологических уравнений	112
§ 3.3. Обобщенный метод получения математических моделей систем	114
§ 3.4. Табличный метод получения математических моделей систем	123
§ 3.5. Узловой метод получения математических моделей систем	129
§ 3.6. Метод переменных состояния	140
§ 3.7. Математические модели технических объектов для получения частотных характеристик	142
§ 3.8. Математические модели технических объектов при моделировании на метауровне	144
Используемая литература	158

Учебное издание

Трудоношин Владимир Анатольевич
Пивоварова Наталья Владимировна

Системы автоматизированного проектирования
Кн. 4
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Учебное пособие

Заведующий редакцией С. Ю. Липец
Редактор А. М. Апель
Младший редактор А. Я. Сыромятникова
Художник обложки В. А. Ярошевич
Художественный редактор Ю. С. Сергачев
Технический редактор М. Н. Кислякова
Корректор Т. К. Хваль

ИБ № 2645

Сдано в набор 22.05.87. Подписано в печать 29.02.88. АТ 12527. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 8,72. Уч.-изд. л. 8,44. Тираж 18 000 экз. Зак. 306. Цена 35 к.

Издательство «Высшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский проспект, 79.