

Д. М. АНДРОНОВ, А. Н. ХИЖНЯК

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЙ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

Утверждено УУЗ МГА СССР в качестве учебного
пособия для вузов гражданской авиации



МОСКВА „ТРАНСПОРТ“ 1977

Математические методы планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации. Андронов А. М., Хижняк А. Н., М., «Транспорт», 1977, 215 с.

В книге изложены основные положения теории и практики применения экономико-математических методов при анализе, планировании и организации производственной деятельности предприятий гражданской авиации.

Книга состоит из трех разделов, в которых рассматриваются: теория регрессии; теория массового обслуживания; математическое программирование. В процессе изложения даются необходимые теоретические выкладки, однако основное внимание уделяется практическим приложениям.

Предназначена в качестве учебного пособия для вузов по курсам «Основы экономико-математического моделирования», «Организация и планирование производства на предприятиях гражданской авиации».

При написании разд. 7.1 были использованы материалы И. Е. Швацкого, разд. 8.3 и 8.4 — А. М. Литвинчука.

Ил. 26, табл. 39, список лит. 36 назв.

ВВЕДЕНИЕ

Программой Коммунистической партии Советского Союза предусмотрено интенсивное развитие гражданской авиации как одного из основных видов транспорта. Решения XXV съезда КПСС определили конкретные задачи гражданской авиации. При этом достижение прироста объема в основном планируется за счет повышения эффективности работы транспорта. Большое значение придается внедрению научной организации труда, производства и управления с использованием современных средств организационной и вычислительной техники. В свою очередь основой этого является широкое применение экономико-математических методов.

В свете изложенного становится ясным, что новым требованиям должны отвечать и методы анализа производственно-хозяйственной деятельности предприятий ГА. Именно поэтому необходимость применения математических методов в ГА обусловлена:

значительным ростом объема работ всех предприятий;
все возрастающей сложностью авиационной техники и производственных процессов;

желанием получить максимальный эффект от деятельности предприятий.

Целью применения математических методов является построение модели, имитирующей протекание рассматриваемого экономического процесса. Наличие такой модели позволяет решать задачи двоякого рода: прогнозировать протекание процесса при изменении определенных факторов; находить такое сочетание управляемых факторов, которое обеспечивает наиболее эффективное протекание процесса. В связи с этим будем понимать под экономико-математической моделью данного процесса совокупность математических формул и алгоритмов, описывающих данный процесс и позволяющих оценивать интересующие нас характеристики процесса.

Экономико-математическое моделирование зародилось в теории политической экономии. В качестве первой следует назвать работу Франсуа Кенэ (1694—1774). Произведением Кенэ, в котором впервые присутствовал прототип экономико-математической модели, является его знаменитая «Экономическая таблица» (1758). В ней автор сделал попытку изобразить годовой процесс общественного производства в виде количественных соотношений. Кенэ делил общество на три класса и рассматривал процесс обращения произведенного продукта между классами. Отметим, что построенная им модель не была математической: вместо формульных соотношений он использовал диаграммы, оформленные в виде таблиц. Дальнейшее развитие идеи Кенэ получили в трудах английских экономистов А. Смита (1723—1790) и Д. Рикардо (1772—1823).

Чтобы понять значение работ этого направления, достаточно привести следующие строки из письма К. Маркса к Ф. Энгельсу от 31 мая 1873 г.: «...ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д. и т. д. представлены в их движении в течение года и т. д., в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислять эти *up and downs*¹ как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов».

Законченная модель простого и расширенного воспроизводства в капиталистическом обществе была создана К. Марксом. Эта модель уже является в

¹ повышения и понижения

полном смысле экономико-математической, так как процесс производства описан совокупностью математических формул. В дальнейшем модели К. Маркса получили интенсивное развитие и на их базе оформился ряд экономико-математических дисциплин. Одной из них является теория межотраслевого баланса. Цель межотраслевого баланса состоит в планировании объемов производства различных отраслей народного хозяйства, обеспечивающих пропорциональное развитие отраслей.

Эффективность межотраслевого планирования в масштабах всего народного хозяйства в полной мере проявляется только в условиях социалистического общества. Именно поэтому впервые схема межотраслевого баланса была разработана в 20-х годах советскими учеными [16]. Первый баланс был составлен в СССР в 1924 г. Баланс Центрального статистического управления, изданный в 1926 г., включал наименования 28 сельскохозяйственных продуктов, 2 продуктов лесоводства и 8 предметов фабрично-заводского производства.

Математическая модель межотраслевого баланса впервые была сформулирована американским экономистом В. Леонтьевым (1941 г.), применившим ее для анализа структуры экономики США за 1919—1939 гг. В настоящее время математические модели межотраслевого планирования получили широкое развитие и применение в СССР.

Выше был дан краткий исторический обзор лишь одного (исторически самого первого) направления теории экономико-математического моделирования. Общее число таких направлений весьма велико. В настоящей работе изложены те из них, которые в наибольшей степени применяются при анализе производственно-хозяйственной деятельности гражданской авиации, а именно: теория регрессии, теория массового обслуживания и математическое программирование.

Теория регрессии применяется для построения укрупненных математических моделей. Регрессионная модель состоит в представлении изучаемой величины в виде суммы отдельных слагаемых. Каждое такое слагаемое является произведением известного количественного фактора на неизвестный коэффициент. Теория регрессии позволяет оценивать эти коэффициенты на основании статистических данных и, следовательно, прогнозировать значение изучаемой величины при различных значениях факторов.

Теория массового обслуживания применяется для построения более детальных моделей производственных процессов. Последние описываются в терминах «требование на обслуживание» и «обслуживающий аппарат». Основной здесь является задача расчета длины очереди требований, ожидающих начала обслуживания. Очередь образуется вследствие случайных факторов, сопутствующих протеканию производственных процессов.

Модели математического программирования (оптимизационные модели) имитируют зависимость некоторого критерия эффективности от ряда переменных, а также различного рода ограничения, накладываемые на переменные. В рамках этих ограничений необходимо найти значения переменных, оптимизирующих критерий эффективности.

Отметим, что наряду с построением математической модели обычно необходимы еще два этапа: оценка параметров модели и их оптимизация. В этом смысле только теория массового обслуживания предназначена для выполнения одной цели — разработки моделей обслуживания. Остальные две теории представляют методы для решения и других задач: теория регрессии — для оценивания неизвестных параметров модели, а математическое программирование — для оптимизации.

Задача оценки параметров возникает в том случае, когда в построенной математической модели некоторые постоянные параметры фигурируют в алгебраическом виде (в виде букв) и должны быть оценены вне рамок модели. Иногда такая оценка осуществляется с помощью детерминированных экономических расчетов (например, путем калькуляции себестоимости и пр.). Часто оценка должна быть сделана на основе статистических данных. В простейших случаях для этих целей применяются элементарные методы математической статистики [3, 21]. В более сложных ситуациях часто используются регрессионные методы, поэтому после построения моделей массового обслуживания или оптимизационных моделей на стадии оценки неизвестных параметров они рассматриваются как регрессионные модели.

Конечной целью построения математической модели является установление зависимости интересующего нас показателя от ряда факторов. Такая зависимость позволяет в принципе найти такую комбинацию управляемых факторов, которая оптимизирует данный показатель. Часто, однако, осуществить это бывает затруднительно ввиду слишком большого объема вычислений, связанных с перебором всех возможных вариантов. Для ускорения процесса поиска оптимума служат методы математического программирования (линейного и динамического программирования и пр.). Следовательно, оптимизация с помощью этих методов может осуществляться не только на моделях математического программирования, специально для этого созданных, но и на моделях массового обслуживания и регрессии, после того, как они уже построены и параметры их оценены.

Дадим краткий исторический обзор. Теория регрессии базируется на методе наименьших квадратов, восходящему к великому немецкому математику К. Гауссу (1777—1855). Ее развитие тесно связано с именем выдающегося русского математика А. А. Маркова (1856—1922). Следует отметить также работы советского математика Ю. В. Линника (1915—1973) и индийского ученого С. Р. Рао.

Родоначальником теории массового обслуживания является датский ученый А. Эрланг (1878—1929). Его работы были связаны с задачами организации обслуживания абонентов телефонных станций Копенгагенской компании, сотрудником которой он являлся. Существенный вклад в развитие теории внес выдающийся советский математик А. Я. Хинчин (1894—1959). В тридцатых годах, когда в Москве осуществлялся переход к автоматическим телефонным станциям, он как депутат Моссовета принимал участие в работе секции связи. В это время А. Я. Хинчиным был выполнен ряд оригинальных работ для московского телефонного узла. Дальнейшее развитие теории массового обслуживания получила в трудах Б. В. Гнеденко, Д. Кендалла, И. Н. Коваленко, С. Пальма, Ф. Поллачека, Л. Такача и др.

Впервые задача линейного программирования была сформулирована в 1939 г. советским математиком Л. В. Канторовичем. Под его руководством в Институте математики и механики Ленинградского университета выполнялась работа по решению ряда производственных задач, связанных с составлением оптимальных планов раскроя листовых материалов, загрузки станков, перевозки грузов и пр. Л. В. Канторович назвал разработанный метод решения «методом разрезающих множителей».

Позднее и почти независимо от этой работы в США и Англии (вначале для военных нужд) стали развиваться аналогичные методы, получившие название «линейного программирования». Наибольшая заслуга в развитии теории линейного программирования принадлежит американскому ученому Дж. Данцигу, являющемуся автором симплексного (1947) и модифицированного симплексного методов, принципа декомпозиции и пр. Большой вклад внесли также Т. Купманс, Р. Гомори и др. История динамического программирования тесно связана с именем Р. Беллмана.

Приведем краткий обзор применения математических методов при планировании и управлении производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации.

Основным направлением применения теории регрессии является прогнозирование объемов авиационных перевозок пассажиров. Оно осуществляется в рамках автоматизированных подсистем управления «Перевозки» и «Перспектива», обеспечивающих составление, соответственно, годовых и перспективных планов (прогнозов). Последние охватывают перевозки по авиасвязям (парам городов), аэропортам и МГА в целом. Важным направлением применения теории регрессии является исследование зависимости трудоемкости и себестоимости капитального ремонта и периодического технического обслуживания самолетов от длительности эксплуатации летательного аппарата, концентрации и специализации производства и пр. В качестве других направлений можно назвать прогнозирование потребности в кадрах для гражданской авиации, нормирование расхода и запаса авиационного технического имущества и др.

Теория массового обслуживания первоначально применялась для целей организации и планирования работ по техническому обслуживанию самолетов [2]. С ее помощью решались задачи прогнозирования простоев самолетов на

периодическом техническом обслуживании, расчета потребности в исполнителях, определении оптимальной организации работ. В дальнейшем теория массового обслуживания широко применялась при организации и планировании различных производственных процессов в гражданской авиации. При проектировании аэропортов она позволяет рассчитывать количество и пропускные способности отдельных элементов аэропорта — взлетно-посадочных полос, рулежных дорожек, мест стоянки для самолетов, пассажирских помещений в аэровокзале, средств внутри-вокзальной и аэродромной механизации. При организации работы различных служб аэропорта она применяется для определения потребного количества регистрационных стоек и дежурных по регистрации, расчета численности и расстановки персонала по обслуживанию самолетов на перроне аэропорта, решения задач оптимальной специализации и кооперирования труда и пр.

Теория массового обслуживания использовалась при проектировании автоматизированной системы продажи и бронирования авиационных билетов «Сирена». С ее помощью определялось необходимое количество пультов-манипуляторов и рассчитывалась пропускная способность каналов связи при различных вариантах подсоединения пультов к каналам.

Первым направлением математического программирования, получившим применение в гражданской авиации, явилось линейное программирование [18]. Оно с успехом используется при расстановке самолетов по авиалиниям и составлении на этой основе плана движения самолетов. Другими направлениями применения математического программирования является составление оптимальных планов поставок авиационных горюче-смазочных материалов аэропортам, снабжения авиационным техническим имуществом, маневрирования самолето-вертолетным парком ГА для выполнения работ по применению авиации в народном хозяйстве с учетом сезонности работ, отхода летательных аппаратов на капитальный ремонт и т. п. Весьма актуальными являются задачи перспективного планирования развития отрасли: базирование самолетов ГА, развитие сети аэропортов и авиационных технических баз и пр.

В заключение следует отметить, что возможности широкого применения математических методов будут существенно увеличены в условиях функционирования автоматизированных систем управления в эксплуатационных предприятиях ГА. Важнейшим направлением здесь является применение математических методов при оперативном управлении производственными процессами в реальном масштабе времени.

РАЗДЕЛ I

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЯДОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Глава I

АНАЛИЗ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ СОПУТСТВУЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Общие положения

Задача прогнозирования различного рода экономических показателей возникает при планировании на ближнюю или дальнюю перспективу производственно-хозяйственной деятельности предприятий ГА. Такое прогнозирование обычно осуществляется или с помощью экспертных методов, или с помощью математических моделей. В первом случае эксперт (или группа экспертов) составляет прогноз, основываясь, с одной стороны, на имеющемся статистическом материале и некоторых контрольных или директивных данных, и, с другой стороны, на личном опыте и интуиции, а также на информации, имеющей зачастую лишь косвенное отношение к рассматриваемой задаче. Если личный опыт и интуиция имеют существенное значение, то экспертный метод прогнозирования может оказаться единственно приемлемым. В последнее время процесс экспертного прогнозирования был несколько формализован и поставлен на научную основу. В такой модифицированной форме он получил название «Метода Дельфи» [25]. Применение математических моделей сводится в конечном счете к получению формул или алгоритмов, по которым на основе имеющейся статистики рассчитывается прогноз. Успешность применения математической модели зависит от двух факторов: объема и качества статистических данных; соответствия математической модели, используемой при построении формулы или алгоритма, реальному механизму формирования прогнозируемого показателя.

Отметим, что если первый фактор (статистические данные) обеспечен, то второй фактор целиком зависит от математической культуры и экономических познаний исследователя. Если даже первоначальная математическая модель в действительности не верна, то это обстоятельство может быть обнаружено в результате специального математического анализа. Следовательно, ясное понимание математической модели позволяет как избежать ошибок, связанных с некорректным применением основанных на них формул,

так и провести указанный анализ и выявить причины расхождения. Именно поэтому уделим математическим моделям максимальное внимание.

Рассмотрение математических моделей начнем с простейшего случая, соответствующего минимально возможному для прогнозирования объему информации. Предположим, что в нашем распоряжении имеются лишь данные о зафиксированных значениях рассматриваемого экономического показателя $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$. Прогнозирование осуществим по формуле

$$Y_k^* = \beta_0^* + \beta_1^* t_k, \quad (1.1)$$

где t_k — заданный момент времени;
 β_0^* и β_1^* — неизвестные коэффициенты, которые должны быть определены по имеющимся данным.

Величина Y_i называется зависимой переменной, а t_i — сопутствующей переменной (в качестве нее, конечно, может фигурировать не время, а любая переменная). Итак, начинаем со случая одной сопутствующей переменной. Он будет рассмотрен более подробно, поскольку случай нескольких сопутствующих переменных будет аналогичным, если употреблять матричные обозначения.

Таблица 1

Годовые первоначальные отправки пассажиров из аэропорта Минск

Год	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
Отправки, тыс. чел.	118	170	213	227	285	340	388	479	572	624	681	744

Таблица 2

Порядок вычислений

i	t_i	t_i^2	Y_i	$t_i Y_i$	Y_i^2
1	1	1	118	118	13 924
2	2	4	170	340	28 900
3	3	9	213	639	45 369
4	4	16	227	908	51 529
5	5	25	285	1 425	81 225
6	6	36	340	2 040	115 600
7	7	49	388	2 716	150 544
8	8	64	479	3 832	229 441
9	9	81	572	5 148	327 184
10	10	100	624	6 240	389 376
11	11	121	681	7 491	463 761
12	12	144	744	8 928	553 536
$n = 12$	$\Sigma t_i = 78$	$\Sigma t_i^2 = 650$	$\Sigma Y_i = 4 841$	$\Sigma t_i Y_i = 39 825$	$\Sigma Y_i^2 = 2 450 389$

В качестве примера в табл. 1 приведены данные об отправлениях авиационных пассажиров из аэропорта Минск за 1961 — 1972 гг. Для прогнозирования на будущее (например, на 1975 г.) используем формулу (1.1). Естественно, точность прогнозирования будет повышена, если дополнительно учитывать такие сопутствующие переменные, как численность населения, объем валовой промышленной продукции города, реальный доход на душу населения и т. д. Однако будем считать, что этой информации нет.

При прогнозировании необходимо отчетливо сознавать, что использование формулы (1.1) предполагает, что в будущем сохранятся те же тенденции, которые имели место в прошлом и нашли свое отражение в соответствующих статистических данных. Если это не так, то возможны три пути: 1) введение в формулу (1.1) дополнительных переменных, отражающих эти тенденции; 2) использование более совершенной математической модели; 3) внесение к рассчитанному по формуле (1.1) значению поправки, определяемой экспертным путем или на основании других формул и статистических данных.

Таковыми новыми тенденциями, исключающими формальную экстраполяцию по формуле (1.1), могут быть также: широкое применение автобусов и аэротакси, существенное увеличение пропускной способности аэропорта, изменение тарифов на воздушном транспорте и т. п.

Модель, отражаемая формулой (1.1), называется регрессионной моделью с одной сопутствующей переменной. Изложим теорию регрессионных моделей, следуя в основном превосходной книге [8]. Строгое математическое изложение теории регрессии содержится в работе [17].

1.2. Метод наименьших квадратов

Нашей целью является нахождение коэффициентов β_0^* и β_1^* формулы (1.1) на основании значений зависимой переменной $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, соответствующих значениям сопутствующей переменной $t_1, t_2, \dots, t_n$. Процедура нахождения коэффициентов будет определяться тем критерием, которым руководствуемся. Обычно используется критерий наименьших квадратов: коэффициенты подбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых

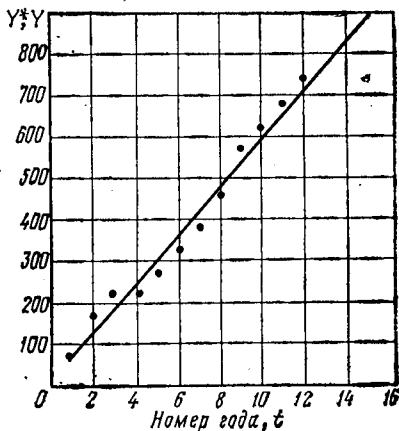


Рис. 1. Динамика пассажирских отправок, тыс. пасс.

значений $\{Y_i\}$ от вычисляемых по формуле (1.1) $\{Y_i^*\}$ была минимальной. Математическая запись этого критерия такова:

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)]^2. \quad (1.2)$$

Дадим изложенному подходу геометрическую трактовку (рис. 1). Формуле (1.1) соответствует на плоскости некоторая прямая. Каждой паре зафиксированных значений зависимой Y_i и сопутствующей t_i переменных на этой плоскости соответствует точка. Значение $Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)$ есть отклонение по вертикали от данной точки до прямой. Следовательно, выражение (1.2) есть сумма квадратов таких отклонений.

Определение значений коэффициентов, минимизирующих сумму (1.2), не представляет труда. Как известно из курса математического анализа для этого следует взять производные по β_0^* и β_1^* , приравнять их нулю и решить полученную систему из двух уравнений. Эта система уравнений называется нормальной и имеет вид:

$$\beta_0^* n + \beta_1^* \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \beta_0^* \sum_{i=1}^n t_i + \beta_1^* \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i Y_i. \quad (1.3)$$

Отсюда находим

$$\beta_1^* = \frac{\sum Y_i t_i - [(\sum Y_i)(\sum t_i)]/n}{\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2/n} = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})(t_i - \bar{t})}{\sum (t_i - \bar{t})^2}, \quad (1.4)$$

$$\beta_0^* = \bar{Y} - \beta_1^* \bar{t},$$

где

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i, \quad \bar{t} = \frac{1}{n} \sum t_i.$$

В формуле (1.4) суммирование по i ведется от 1 до n , а вычисление β_1^* может быть проведено по любому из двух приведенных выражений. Произведя вычисления и подставляя найденные значения для β_0^* и β_1^* в (1.1), получаем формулу для прогнозирования. Наряду с ней может быть использована следующая формула, часто более удобная на практике:

$$Y_k^* = \bar{Y} + \beta_1^* (t_k - \bar{t}). \quad (1.5)$$

Возвратимся к рассмотрению примера, представленного табл. 1. Для удобства расчетов по формуле (1.4) будем пользоваться табл. 2. Находим:

$$\beta_1^* = \frac{39\,825 - (4841 \cdot 78)/12}{650 - (78)^2/12} = \frac{39\,825 - 31\,466,5}{650 - 507} = \frac{8358,5}{143} = 58,45;$$

$$\beta_0^* = \frac{4841}{12} - 58,45 \cdot \frac{78}{12} = 403,42 - 379,93 = 23,49.$$

Итак, искомое выражение по формуле (1.1) есть

$$Y_k^* = 23,49 + 58,45t_k$$

и представлено на рис. 1 прямой. Если использовать его для прогнозирования, то количество отправок из аэропорта на 1975 г. составит:

$$Y_{1975}^* = 23,49 + 58,45 \cdot 15 = 900,25.$$

Применение суммы (1.2) в качестве критерия, подлежащего минимизации, предполагало, что всем наблюдениям придан один и тот же вес (иногда говорят о равноточности наблюдений). Однако в некоторых ситуациях нужно придавать одним наблюдениям больший вес, а другим — меньший. Это может происходить, во-первых, вследствие различной достоверности значений зависимой переменной (например, часть информации может оказаться неполной или некачественной). Во-вторых, более поздние значения зависимой переменной могут оказывать большее влияние на будущее, чем более ранние, как отчасти устаревшие.

Итак, будем придавать i -му наблюдению вес $\sigma^{-2}w_i$. Здесь предполагается, что σ^{-2} неизвестно, но одинаково для всех наблюдений, а w_i различны, но известны. Все w_i предполагаются неотрицательными. В этом случае критерий (1.2) примет вид:

$$\sigma^{-2} \sum_{i=1}^n w_i [Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)]^2. \quad (1.6)$$

Формулы (1.4) и (1.5) для неизвестных коэффициентов и прогнозируемой величины преобразуются следующим образом:

$$\beta_1^* = \frac{\frac{1}{\sum w_i} (\sum w_i Y_i) (\sum w_i t_i) - \sum w_i t_i Y_i}{\frac{1}{\sum w_i} (\sum w_i t_i)^2 - \sum w_i t_i^2}; \quad (1.7)$$

$$\beta_0^* = \frac{1}{\sum w_i} (\sum w_i Y_i - \beta_1^* \sum w_i t_i); \quad (1.8)$$

$$Y_k^* = \frac{1}{\sum w_i} \sum w_i Y_i + \beta_1^* \left(t_k - \frac{1}{\sum w_i} \sum w_i t_i \right), \quad (1.9)$$

где суммирование ведется по всем i от 1 до n .

Легко видеть, что предыдущие формулы получаются отсюда при $w_i = 1$.

Вычисления удобно оформлять в виде табл. 3.

Возвратимся к рассмотрению нашего численного примера. Будем считать, что при прогнозировании на будущее следует более поздним данным придавать большую весомость. Например, примем весомость последнего наблюдения (1972 г.), равную единице, а весомость каждого предыдущего, равную 0,8 от весомости последующего. В соответствии с этим $w_{12} = 1$; $w_{11} = 0,8$; $w_{10} = 0,64$ и т. д.

Вспомогательная таблица для вычисления значений по формулам (1.7)–(1.9)

i	w_i	t_i	$w_i t_i$	$w_i t_i^2$	Y_i	$w_i Y_i$	$w_i t_i Y_i$
1	1,000	1	1,000	1,000	118	118,000	118,000
2	0,800	2	1,600	3,200	170	136,000	272,000
3	0,640	3	1,920	5,760	213	136,320	408,960
4	0,512	4	2,048	8,192	227	116,224	464,896
5	0,410	5	2,050	10,250	285	116,850	584,250
6	0,328	6	1,968	11,808	340	111,520	669,120
7	0,262	7	1,834	12,838	388	101,656	711,592
8	0,210	8	1,680	13,440	479	100,590	804,720
9	0,168	9	1,512	13,608	572	96,096	864,864
10	0,134	10	1,340	13,400	624	83,616	836,160
11	0,107	11	1,177	12,947	681	72,867	801,537
12	0,086	12	1,032	12,384	744	63,984	767,808
	$\Sigma w_i =$ = 4,657	$\Sigma t_i =$ = 78	$\Sigma w_i t_i =$ = 19,161	$\Sigma w_i t_i^2 =$ = 118,827	$\Sigma Y_i =$ = 4841	$\Sigma w_i Y_i =$ = 1253,723	$\Sigma w_i t_i Y_i =$ = 7303,907

Значения w_i , а также порядок всех вычислений приведены в табл. 3. В итоге получаем:

$$\beta_1^* = \frac{\frac{1}{4,657} (1253,723 \cdot 19,161) - 7303,907}{\frac{1}{4,657} (19,161)^2 - 118,827} = \frac{-2145,525}{-39,990} = 53,65;$$

$$\beta_0^* = \frac{1}{4,657} (1253,723 - 53,65 \cdot 19,161) = 48,46.$$

Прогноз на 1975 г. составит: $Y_{1975}^* = 48,46 + 53,65 \cdot 15 = 853,21$.

Расхождение этого прогноза с прогнозом, полученным ранее и равным 900,25, объясняется тем, что темпы роста отправок в последние годы несколько замедлились. Поскольку в данном случае больший вес придавался более поздним наблюдениям, то это повлекло меньшее значение прогнозируемых отправок.

1.3. Случайные величины

Для дальнейшего анализа правомочности использования для прогнозирования формулы (1.1) и для нахождения неизвестных коэффициентов критерия (1.2) используем теорию вероятностей. В этом разделе напомним основные понятия теории вероятностей и введем необходимые понятия и обозначения. Достаточно полное изложение теории вероятностей содержится в книгах [3, 21].

Обычно имеют дело со случайными величинами, точное значение которых заранее предугадать достоверно невозможно. В нашем случае такими величинами были зависимые переменные $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Случайные величины будем обозначать заглавными латинскими буквами X, Y, Z и т. д., придавая им при необходимости нижние индексы $1, 2, \dots$.

Для наиболее краткого описания случайной величины служат ее числовые характеристики, т. е. некоторые константы. Основными из них являются: среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия.

Среднее значение случайной величины X обозначается $E(X)$, или μ , и равно той константе, которую случайная величина принимает «в среднем». Дисперсия обозначается $D(X)$, или σ^2 , и служит мерой рассеяния, разброса случайной величины около ее среднего значения.

Положительное значение корня квадратного из дисперсии называется средним квадратическим отклонением и обозначается $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Среднее значение и среднее квадратическое отклонение имеют одну и ту же размерность.

Числовые характеристики не дают полного описания случайной величины, поскольку не указываются вероятности, с которыми случайная величина принимает те или иные значения. Полное описание будет получено, если указан вид распределения случайной величины и его параметры. Зная то и другое, для каждой вероятности p ($0 \leq p \leq 1$) можно указать квантиль $F^{-1}(p)$. Квантиль $F^{-1}(p)$ — это такое число, которое случайная величина не превосходит с вероятностью p .

Наиболее распространенным распределением является нормальное. Параметрами его являются среднее значение μ и среднее квадратическое отклонение σ . Нормальное распределение обозначается $\Phi(\mu; \sigma^2)$. В связи с этим ясным является, например, выражение: «случайная величина X имеет распределение $\Phi(\mu; \sigma^2)$ ». Квантиль нормального распределения $\Phi(0; 1)$, имеющего нулевое среднее и единичную дисперсию, обозначается $\Phi^{-1}(p)$. Они табулированы см. табл. ПІ приложения. Квантили нормального распределения $\Phi(\mu; \sigma^2)$ с произвольными параметрами μ и σ обозначаются $\Phi^{-1}(\mu; \sigma^2)$ и вычисляются по формуле $\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$. Найдем, например, квантиль нормального распределения $\Phi(2; 4)$, отвечающий вероятности $p=0,1$. По табл. ПІ находим $\Phi^{-1}(0,1)=1,28$. Следовательно, $\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$ $(0,1) = 2 - 2 \cdot 1,28 = -0,56$. Итак, $\Phi^{-1}(2; 4) = -0,56$ — это число, которое случайная величина с распределением $\Phi(2; 4)$ не превысит с вероятностью $0,1$.

Причина широкого распространения нормального распределения может быть выяснена с помощью так называемой центральной предельной теоремы. Последняя утверждает, что сумма большого количества независимых или слабо зависимых случайных величин имеет приблизительно нормальное распределение. Отметим, что большинство экономических показателей за достаточно длительный

период времени (год, квартал, месяц) являются суммами большого числа слагаемых, соответствующих, например, одним суткам, и поэтому их можно считать распределенными по нормальному закону.

С нормальным распределением тесно связан ряд других распределений, которые получаются на основе нормального распределения. В первую очередь укажем на χ^2 -распределение (читается: хи-квадрат распределение). Параметром этого распределения является число степеней свободы ν . χ^2 -распределение с числом степеней свободы ν обозначается $K(\nu)$. Квантиль этого распределения, отвечающий вероятности p , обозначается $K^{-1}(p; \nu)$. Эти квантили табулированы (см. табл. III приложения). Так, случайная величина, имеющая распределение $K(4)$, с вероятностью 0,9 не превысит значения $K^{-1}(0,9; 4) = 7,78$.

χ^2 -распределение связано с нормальным распределением следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ — ν независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение $\Phi(0; 1)$ с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда сумма квадратов этих величин $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_\nu^2$ имеет χ^2 -распределение с ν степенями свободы.

Другим важным распределением является распределение Стюдента, параметром которого также служит число степеней свободы ν . Распределение Стюдента с ν степенями свободы обозначается $S(\nu)$, а его квантиль, отвечающий вероятности, p — $S^{-1}(p; \nu)$. Квантили $S^{-1}(p; \nu)$ для некоторых значений числа степеней свободы ν и вероятностей p приведены в табл. III приложения. В частности, можно найти, что $S^{-1}(0,6; 7) = 0,263$.

Распределение Стюдента возникает следующим образом. Пусть X и Y две независимые случайные величины, причем X имеет распределение $\Phi(0; 1)$, а Y — распределение $K(\nu)$. Тогда частное $\sqrt{\nu}X/Y$ имеет распределение Стюдента с ν степенями свободы.

Последним рассмотрим распределение Фишера. Оно, как и нормальное распределение, имеет два параметра, каждый из которых называется числом степеней свободы. Распределение Фишера с числом степеней свободы ν_1 и ν_2 обозначается $F(\nu_1; \nu_2)$. Заметим, что порядок следования ν_1 и ν_2 существен, т. е. $F(\nu_1; \nu_2)$ не равно $F(\nu_2; \nu_1)$. Квантиль распределения Фишера с ν_1 и ν_2 степенями свободы, отвечающий вероятности p , обозначается $F^{-1}(p; \nu_1, \nu_2)$. Значения их для $p=0,95$ приведены в табл. IV приложения. Например, $F^{-1}(0,95; 3,5) = 5,41$.

Распределению Фишера с ν_1 и ν_2 степенями свободы соответствует частное $\nu_2 X / \nu_1 Y$, если X и Y — две независимые случайные величины, имеющие χ^2 -распределение с числами степеней свободы ν_1 и ν_2 соответственно.

Для того чтобы полностью использовать информацию, содержащуюся в утверждении «случайная величина имеет данное распределение», необходимо знать параметры этого распределения. Однако на практике эти параметры бывают неизвестны и их следует определить на основе имеющихся статистических данных о за-

регистрированных значениях данной величины. В результате получаем оценки параметров, которыми пользуются вместо неизвестных истинных значений параметров. Конечно, значения оценок и параметров обычно не совпадают. Однако если процедура оценивания достаточно хороша, то эти значения должны быть близки.

Для обозначения параметров распределений использовались буквы греческого алфавита β , μ , σ , ν . Для обозначения оценок будем употреблять те же буквы, снабжая их сверху звездочкой: β^* , μ^* , σ^* и т. д.

В то время как параметры являются неизвестными постоянными, их оценки являются случайными величинами, так как они получаются на основе наблюдаемых значений исходных случайных величин. Поэтому правомерно говорить о среднем значении, дисперсии и распределении оценок. Пусть α неизвестный параметр, а α^* его оценка. Говорят, что α^* является несмещенной оценкой параметра α , если ее среднее значение равно истинному значению параметра α , т. е. если $E(\alpha^*) = \alpha$ для любого α .

Процедура несмещенного оценивания хороша тем, что при многократном использовании ее в среднем правильно угадывается неизвестный параметр. Если можно предложить сразу несколько несмещенных оценок неизвестного параметра, то наилучшей из них считается оценка с минимальной дисперсией, так как подсчитанные значения такой оценки будут плотнее располагаться около истинного значения параметра.

Если $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — суть независимые наблюдения над случайной величиной Y со средним μ и дисперсией σ^2 , то несмещенными оценками μ и σ^2 являются:

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum Y_i; \quad \sigma^{2*} = \frac{1}{n-1} (\sum Y_i^2 - n\mu^{*2}). \quad (1.10)$$

Выше были изложены основные понятия теории точечного оценивания, когда параметр оценивается одним числом, т. е. точкой на действительной оси. Возможно также интервальное оценивание. В этом случае задаются доверительной вероятностью p и строят интервал, который с вероятностью p накрывает неизвестный параметр. Для такого рода построений необходимо знать распределение оценок параметра.

Приведем несколько примеров.

Предположим, что: 1) σ^2 — неизвестный параметр; 2) σ^{2*} — такая оценка, что отношение $\nu\sigma^{2*}/\sigma^2$ имеет χ^2 -распределение с ν степенями свободы. Тогда доверительным интервалом для σ^2 с доверительной вероятностью p будет интервал

$$(0; \nu\sigma^{2*}(K^{-1}(1-p; \nu))^{-1}). \quad (1.11)$$

Предположим теперь, что: 1) μ — неизвестный параметр; 2) μ^* и σ^* такие оценки, что отношение $\sqrt{Y_c}(\mu - \mu^*)/\sigma^*$ имеет распределение Стьюдента с ν степенями свободы (здесь c — некоторая посто-

янная). Тогда при доверительной вероятности p доверительным интервалом для μ будет:

$$\left(\mu^* - \frac{\sigma^*}{\sqrt{c}} S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; \nu \right); \mu^* + \frac{\sigma^*}{\sqrt{c}} S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; \nu \right) \right). \quad (1.12)$$

Пусть, наконец, 1) σ_1^2 и σ_2^2 неизвестные параметры; 2) σ_1^{2*} такая оценка σ_1^2 , что отношение $\nu_1 \sigma_1^{2*} / \sigma_1^2$ имеет χ^2 -распределение с ν_1 степенями свободы; 3) оценка σ_2^2 не зависит от σ_1^{2*} и такова, что отношение $\nu_2 \sigma_2^{2*} / \sigma_2^2$ имеет χ^2 -распределение с ν_2 степенями свободы. Тогда доверительным интервалом для отношения σ_1^2 / σ_2^2 с доверительной вероятностью p будет интервал

$$\left(0; \frac{\sigma_1^{2*}}{\sigma_2^{2*}} (F^{-1}(1-p; \nu_1, \nu_2))^{-1} \right). \quad (1.13)$$

Кроме своего прямого назначения, построенные доверительные интервалы позволяют проверять различного рода статистические гипотезы. Статистическая гипотеза — это некоторое утверждение относительно вида распределения или неизвестных параметров случайной величины. Для проверки данной статистической гипотезы необходимо иметь: заданную доверительную вероятность p ; подсчитанное значение оценки (или оценок, если их несколько). В данном случае доверительная вероятность трактуется как вероятность правильного принятия гипотезы (обратная ей величина, равная $1-p$, называется уровнем значимости и есть вероятность неправильного отклонения верной гипотезы).

Вернемся к рассмотрению трех описанных выше случаев. Предположим, что в первом случае необходимо проверить гипотезу $\sigma^2 = \sigma_0^2$ при альтернативном утверждении $\sigma^2 > \sigma_0^2$; во втором — гипотезу $\mu = \mu_0$, при альтернативе $\mu \neq \mu_0$; в третьем — гипотезу $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = \eta_0$, при альтернативе $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 > \eta_0$, где σ_0^2 , μ_0 и η_0 — заданные числа. Кроме того, предположим верными оговоренные условия относительно распределения оценок. Для проверки статистической гипотезы необходимо построить соответствующий доверительный интервал и посмотреть, попадает ли в него оговариваемое число σ_0^2 , μ_0 или η_0 . Если попадает — то гипотеза не отвергается.

1.4. Математическая модель

Сформулируем условия, при которых изложенный выше метод наименьших квадратов для оценки неизвестных параметров является оптимальным. Постулируется следующая зависимость между зависимой и сопутствующей переменными:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t + Z, \quad (1.14)$$

где β_0 и β_1 — неизвестные параметры модели (постоянные величины); t — известное и не случайное значение сопутствующей переменной; Z — случайная величина, сопутствующая наблюдению.

Иными словами, в результате наблюдения регистрируется не истинное значение $\beta_0 + \beta_1 t$, а его сумма со случайной составляющей Z . В экономических исследованиях наличие составляющей Z может быть вызвано двумя причинами: существованием факторов (сопутствующих переменных), не учитываемых в модели; существованием случайных отклонений от основной тенденции, отражаемой выражением $\beta_0 + \beta_1 t$.

Обычно имеется несколько реализаций модели (1.14), каждой из которых соответствуют свои значения Y , t и Z . Для указания конкретной реализации будем снабжать эти величины индексом $i = 1, 2, \dots, n$, где n — количество реализаций. В связи с этим формула (1.14) может быть переписана в виде

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + Z_i. \quad (1.14')$$

В дополнение к формуле (1.14') сделаем следующие предположения: величины $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ взаимно независимы; среднее значение каждой составляющей равно нулю, а дисперсии одинаковы, но, быть может, неизвестны:

$$E(Z_i) = 0, D(Z_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.15)$$

Формулы (1.14'), (1.15) и описывают нашу модель. Математическое ожидание и дисперсия зависимой переменной согласно этой модели равны:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 t_i, D(Y_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.16)$$

При этом случайные величины (Y_i) взаимно независимы. Следовательно, значения зависимой переменной формируются в основном за счет слагаемого $\beta_0 + \beta_1 t$ (основная тенденция). На это слагаемое накладывается случайная составляющая Z , имеющая характер или неучтенных факторов или случайных помех. Соотношение (1.15) постулирует, что эта составляющая не может быть предсказана, если $\sigma \neq 0$, но что систематическая ошибка в модели отсутствует. Если $E(Z) \neq 0$, то говорят о наличии систематической ошибки.

Если соотношения (1.14) и (1.15) справедливы, то имеют место следующие основные результаты теории наименьших-квадратов.

а) Оценки β_0^* и β_1^* , вычисляемые по формуле (1.4), являются несмещенными оценками параметров β_0 и β_1 .

б) Эти оценки имеют наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок, являющихся линейными функциями результатов наблюдений $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

в) Несмещенной оценкой неизвестной дисперсии σ^2 является

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)]^2. \quad (1.17)$$

В качестве оценки среднего квадратического отклонения будем пользоваться величиной $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{2*}}$.

Отсюда следует, что и прогноз, рассчитываемый по формуле

$$Y_K^* = \beta_0^* + \beta_1^* t_K, \quad (1.18)$$

является несмещенной оценкой истинного математического ожидания $\beta_0 + \beta_1 t_K$, причем дисперсия этой оценки минимальна и равна

$$D(Y_K^*) = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(t_K - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n(\bar{t})^2} \right\}, \quad (1.19)$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{n} (t_1 + t_2 + \dots + t_n).$$

Необходимо помнить, что все это справедливо, если модель верна, т. е. если соотношения (1.14) и (1.15) действительно имеют место.

Формулу (1.19) можно применять, если дисперсия σ^2 известна. В противном случае следует пользоваться оценкой дисперсии $D(Y_K^*)$, которая получается в результате подстановки в (1.19) вместо σ^2 оценки σ^{2*} :

$$D^*(Y_K^*) = \sigma^{2*} \left(\frac{1}{n} + \frac{(t_K - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n(\bar{t})^2} \right). \quad (1.19')$$

Выше не делалось никаких предположений относительно распределения случайной составляющей Z . Обычно предполагают, что она имеет нормальное распределение $\Phi(0; \sigma^2)$. В этом случае дополнительно справедливы следующие утверждения.

г) Оценки β_0^* и β_1^* обладают наименьшими дисперсиями среди всех несмещенных оценок параметров β_0 и β_1 .

д) Отношение $(n-2)\sigma^{2*}/\sigma^2$, где σ^2 — дисперсия, а σ^{2*} — вычисляемая по формуле (1.17) оценка ее, имеет χ^2 -квадрат распределение с $(n-2)$ степенями свободы $K(n-2)$; это позволяет на основании формулы (1.11) построить доверительный интервал для дисперсии σ^2 с доверительной вероятностью p :

$$(0; (n-2)\sigma^{2*}(K^{-1}(1-p; n-2))^{-1}). \quad (1.20)$$

е) Для доверительной вероятности p доверительным интервалом для математического ожидания $E(Y_K) = \beta_0 + \beta_1 t_K$, соответствующего значению сопутствующей переменной t_K , является интервал

$$\left(Y_K^* \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2 \right) \sqrt{D^*(Y_K^*)} \right). \quad (1.21)$$

ж) При доверительной вероятности p доверительным интервалом для зависимой переменной $Y_K = \beta_0 + \beta_1 t_K + Z_K$, соответствующей

Оценка дисперсии

i	t_i	$\beta_1^* t_i$	$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* t_i$	Y_i	$Y_i - Y_i^*$	$(Y_i - Y_i^*)^2$
1	1	58,45	81,94	118	36,06	1300,61
2	2	116,90	140,39	170	29,61	876,93
3	3	175,35	198,84	213	14,16	200,56
4	4	233,80	257,29	227	-30,29	917,42
5	5	292,26	315,74	285	-30,74	944,95
6	6	350,71	374,19	340	-34,19	1169,02
7	7	409,16	432,64	388	-44,64	1992,91
8	8	467,61	491,09	479	-12,09	146,24
9	9	526,06	549,54	572	22,46	504,27
10	10	584,51	607,96	624	16,01	256,16
11	11	642,96	666,47	681	14,55	211,82
12	12	701,41	724,89	744	19,10	364,93
					$\Sigma(Y_i - Y_i^*) =$ $= -0,01$	$\Sigma(Y_i - Y_i^*)^2 =$ $= R_0 = 8885,82$

сопутствующей переменной t_K , будет интервал

$$\left(Y_K^* \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2 \right) \sqrt{\sigma^{2*} + D^*(Y_K^*)} \right). \quad (1.22)$$

Отметим, что этот интервал шире, чем интервал (1.21), поскольку он должен покрывать не постоянную (но неизвестную нам) величину $\beta_0 + \beta_1 t_K$, а случайную величину $\beta_0 + \beta_1 t_K + Z_K$.

Именно формулой (1.22) необходимо пользоваться, если мы при прогнозировании хотим построить доверительный интервал для фактического значения экономического показателя (а не его среднего значения) в будущем.

Проверка гипотезы $\beta_1 = 0$, т. е. гипотезы об отсутствии регрессии (влияния переменной t на Y) будет рассмотрена в разд. 1.6.

В качестве примера найдем оценку неизвестной дисперсии отпавок пассажиров из аэропорта Минск. Вычисления сведем в табл. 4. Напомним, что оценки неизвестных коэффициентов составили:

$$\beta_0^* = 23,49; \quad \beta_1^* = 58,45.$$

По формуле (1.17) получаем оценку дисперсии

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{12-2} 8885,82 = 888,58.$$

Оценка среднего квадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^{2*}} = \sqrt{888,58} = 29,81.$$

Прогноз отправок на 1975 г. составляет $Y_{1975}^* = 900,25$. Оценка дисперсии прогноза вычисляется по формуле (1.19')

$$D^*(Y_{1975}^*) = 888,58 \left\{ \frac{1}{12} + \frac{(15 - 6,5)^2}{650 - 12 \cdot 6,5^2} \right\} = 888,58 \cdot 0,589 = 523.$$

Найдем доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 при $p=0,95$. По табл. ПП приложения находим, что $K^{-1}(1-0,95; 12-2) = 3,94$. Искомый доверительный интервал определяется по формуле (1.20): $(0; 10 \cdot 888,58/3,94) = (0; 2258,3)$.

Найдем теперь доверительный интервал для математического ожидания отправок $\beta_0 + 15\beta_1$, соответствующих, например, 1975 г. Примем $p=0,99$. По табл. ППП находим, что $S^{-1}(0,995; 10) = 3,16$.

Следовательно, доверительный интервал есть (см. формулу 1.21): $(900,25 \pm 3,16 \sqrt{523}) = (900,25 \pm 3,16 \cdot 22,87) = (827,98; 972, 52)$.

Доверительный интервал для величины отправок в 1975 г. вычисляется по формуле (1.22):

$$(900,25 \pm 3,16 \sqrt{523 + 888,58}) = (900,25 \pm 118,74) = (781, 51; 1256,47).$$

1.5. Случай различных дисперсий

Основными постулатами сформулированной выше модели были те, что для случайных составляющих Z_i предполагалось равенство нулю математических ожиданий и равенство дисперсий (см. формулу 1.15). Второе предположение может быть несколько ослаблено. Можно считать, что дисперсии не одинаковы, но известны нам с точностью до постоянного множителя. В этом случае условие (1.15) заменяется на следующее:

$$E(Z_i) = 0, D(Z_i) = \frac{1}{w_i} \sigma^2, \quad (1.23)$$

где $w_i, i=1, 2, \dots, n$ — известные постоянные; σ^2 — неизвестная постоянная.

В данном случае критерий, подлежащий минимизации, имеет вид (1.6). Оценки параметров β_0 и β_1 должны вычисляться по формулам (1.7) и (1.8), а прогноз должен рассчитываться по формуле (1.9). Из формулы (1.6) следует, что наблюдения берутся с весами, обратно пропорциональными соответствующим дисперсиям $D(Z_i)$. При таком выборе критерия оптимальные свойства метода наименьших квадратов, сформулированные в разд. 1.4, сохраняются.

Как будет следовать из результатов разд. 2.5, формулы (1.17), (1.19), (1.21), (1.22) принимают следующий вид:

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n w_i (Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i))^2; \quad (1.17')$$

$$D(Y_K^*) = \sigma^2 \left(\frac{1}{\sum w_i} + \frac{\left(\frac{1}{\sum w_i} \sum t_i w_i - t_K \right)^2 \sum w_i}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} \right); \quad (1.19'')$$

$$(\beta_0^* + \beta_1^* t_K \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2 \right) \sqrt{D^*(Y_K^*)}); \quad (1.21'),$$

$$\left((\beta_0^* + \beta_1^* t_K) \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2 \right) \sqrt{D^*(Y_K^*) + \sigma^{2*} \frac{1}{w_K}} \right), \quad (1.22')$$

где $D^*(Y_K^*)$ — оценка дисперсии $D(Y_K^*)$, получаемая из (1.19'') путем замены σ^2 на σ^{2*} ; $\sigma^2 \frac{1}{w_K}$ — дисперсия случайной составляющей для k -го наблюдения, для которого величина w_K считается известной.

1.6. Исследование точности модели

Целью настоящего раздела является обсуждение приемов для оценки степени точности описания имеющихся данных предложенной моделью (1.16). Рассмотрим величину $(Y_i - \bar{Y})$ — отклонение i -го наблюдения от среднего значения наблюдаемых величин $\bar{Y}$. Сумма квадратов этих величин $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$, взятая по всем i от 1 до n , обозначается R_Σ и является мерой разброса наблюдаемых значений Y_i . Эту сумму можно разбить на две составляющие, согласно формуле

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i^* - \bar{Y})^2. \quad (1.24)$$

Здесь $(Y_i - Y_i^*)$ — это отклонение i -го наблюдаемого значения от значения Y_i^* , вычисляемого согласно предлагаемой модели (1.1):

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* t_i.$$

Следовательно, квадрат этой величины $(Y_i - Y_i^*)^2$ может служить мерой расхождения фактического и предсказанного значений для i -го наблюдения. Сумма этих квадратов по всем i , т. е. $\sum (Y_i - Y_i^*)^2$, является мерой расхождения всех наблюдаемых значений от уравнения регрессии (1.1). Она называется «суммой квадратов относительно регрессии» и обозначается R_0 .

Величина $(Y_i^* - \bar{Y})$ — это отклонение i -го предсказанного значения от среднего $\bar{Y}$. Сумма квадратов этих отклонений по всем i

есть та составляющая общей суммы (1.24), которая объясняется регрессией (1.1). Она обозначается R_p и называется «суммой квадратов, обусловленной регрессией». Таким образом, уравнение (1.24) может быть записано в следующей словесной формулировке:

Сумма квадратов относительно среднего равна сумме квадратов относительно регрессии плюс сумма квадратов, обусловленная регрессией. Выше были введены обозначения:

$$R_p = \sum_{i=1}^n (Y_i^* - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i^*)^2 - n(\bar{Y})^2; \quad (1.25)$$

$$R_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2; \quad R_0 = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2.$$

Эквивалентной формой записи приведенных уравнений будет

$$R_{\Sigma} = R_0 + R_p. \quad (1.26)$$

Отношение

$$R^2 = \frac{R_p}{R_{\Sigma}} = 1 - \frac{R_0}{R_{\Sigma}} \quad (1.27)$$

может служить для оценки степени точности описания имеющихся данных уравнением регрессии (1.1). Оно показывает долю разброса наблюдений около среднего значения $\bar{Y}$, которая объясняется регрессией. Величина R^2 принимает значение между 0 и 1. Если уравнение регрессии идеально описывает данные, то Y_i^* равно Y_i для всех i и поэтому $R_0=0$, $R^2=1$. Если $\beta_1=0$, т. е. регрессия Y на t отсутствует, то Y_i^* равно $\bar{Y}$ для всех i и поэтому $R_p=0$, $R^2=0$.

Вычислим величину R^2 для нашего примера. Согласно табл. 4, $R_0=8885,82$. Из табл. 2 находим, что $\Sigma Y_i^2=2450389$, $\Sigma Y_i=4841$. По формуле (1.25) имеем:

$$R_{\Sigma} = \Sigma Y_i^2 - \frac{1}{n} (\Sigma Y_i)^2 = 2450389 - \frac{1}{12} (4841)^2 = 497449.$$

Следовательно, по формуле (1.27) получаем

$$R^2 = 1 - \frac{R_0}{R_{\Sigma}} = 1 - \frac{8885,82}{497449} = 0,98.$$

Отметим попутно, что $R_p = R_{\Sigma} - R_0 = 488563$.

Наряду с формальными математическими проверками, подобными приведенной процедуре вычисления коэффициента R^2 , чрезвычайно полезными являются также различные графические проверки. В первую очередь здесь следует назвать график зависимости наблюдаемых значений Y_i от значений сопутствующей переменной t_i . График дает возможность визуально оценить, насколько хорошо имеющиеся данные соответствуют предположению о том, что имеет место линейная зависимость вида (1.1).

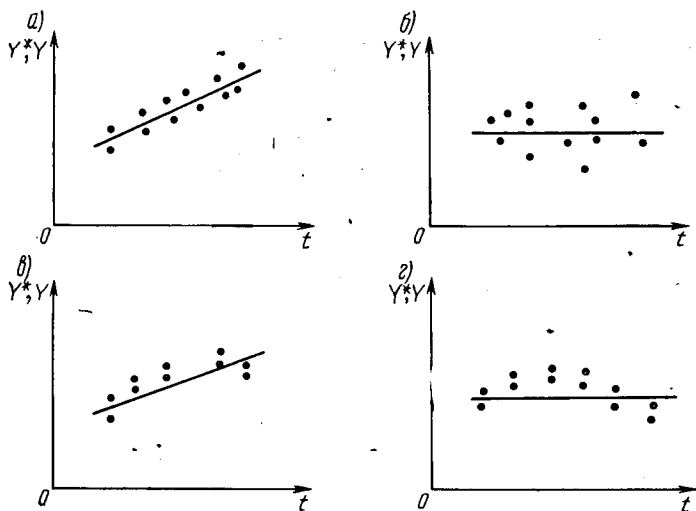


Рис. 2. Виды графиков зависимости Y от t

На рис. 2 изображены типичные ситуации. Случаи a и $б$ не противоречат предположению о линейной зависимости, однако в случае $б$, очевидно, переменная Y от t не зависит, т. е. $\beta_1=0$ и регрессия отсутствует.

В случаях $в$ и $г$ следует, очевидно, предположить, что зависимость между Y и t не является линейной. Для описания этой зависимости необходимо ввести в модель члены, содержащие t во второй степени или выше, например, рассмотрим модель $Y=\beta_0+\beta_1t+\beta_2t^2+Z$. Такие модели будут исследоваться во второй главе.

Для нашего численного примера графическая зависимость Y от t представлена на рис. 1. График показывает, что нет оснований отвергать предположение о линейной зависимости.

Следующим важным графическим анализом является исследование остатков. Остаток, соответствующий i -му наблюдению, определяется как разность $Y_i - Y_i^*$ наблюдаемого и предсказываемого значений. Так как $Z_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 t_i)$, а $Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 t_i$, то остаток $Y_i - Y_i^*$ служит оценкой величины случайной составляющей Z_i , имевшей место при i -ом наблюдении. Если постулируемая модель (1.14) верна, то остаток является несмещенной оценкой среднего значения $E(Z_i)$, а квадрат его $(Y_i - Y_i^*)^2$ — несмещенной оценкой дисперсии $D(Z_i)$. Согласно постулируемой модели (1.15), математическое ожидание $E(Z_i) = 0$, а дисперсия $D(Z_i) = \sigma^2$ независимо от значения номера наблюдений i и величины сопутствующей переменной t . Кроме того, можно показать, что остаток $Y_i - Y_i^*$ не зависит от прогнозируемой величины Y_i^* . Поэтому среднее значение

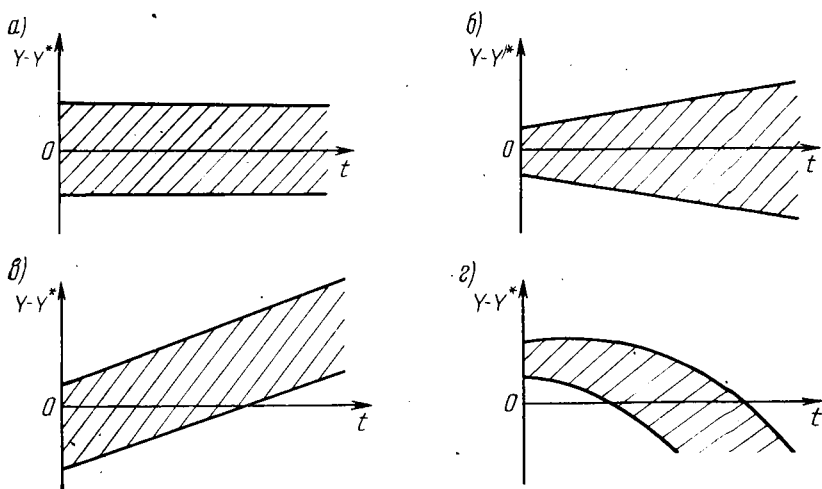


Рис. 3. Виды графиков зависимости остатков от аргумента

ние остатка $E(Y_i - Y_i^*)$, вычисленное при условии, что зафиксировано данное значение Y_i^* , также равно 0. Следовательно, если построить график зависимости остатков $Y_i - Y_i^*$ как функцию любого из перечисленных аргументов (it, Y_i^*), то этот график:

а) должен быть симметричным относительно оси абсцисс (требование условия $E(Z_i) = 0$);

б) должен иметь примерно постоянный разброс точек относительно оси абсцисс (требование условия $D(Z_i) = \sigma^2$).

Если это не так, то постулируемая модель (1.15) неверна и должна быть пересмотрена. Типичные ситуации, которые могут встретиться при анализе графической зависимости остатков, изображены на рис. 3. Здесь по вертикальной оси откладываются значения остатков, а по горизонтальной — значения какого-либо из следующих аргументов; номера наблюдения i ; сопутствующей переменной t ; прогнозируемой переменной Y_i^* .

На графике области разброса остатков для наглядности заштрихованы. В случае *a* отклонений от постулируемой модели не наблюдается. Остальные случаи свидетельствуют о том, что модель неверна. Случай *б* указывает на то, что дисперсия $D(Z_i)$ зависит от аргумента, т. е. что предположение $D(Z_i) = \sigma^2$ нарушено. Утверждение о таком нарушении можно делать всегда, когда область разброса имеет вид конуса, ось которого направлена в любую сторону (не обязательно по горизонтали, как это показано на графике). В случае *в* остатки не симметричны относительно оси t , т. е. имеют линейную регрессию на аргумент. Это говорит о том, что линейный член в модели ошибочно пропущен. Случай *г* также указывает на несимметричность точек, т. е. на то, что модель неточна. По-видимому, в модель должны быть введены квадратичные члены (типа $\beta_2 t^2$).

Отметим также, что если в модели присутствует свободный член β_0 , то сумма всех остатков $\Sigma(Y_i - Y_i^*)$ должна равняться нулю. Неравенство суммы нулю указывает на наличие ошибки в вычислениях.

Проанализируем остатки для рассматриваемого примера. Сумма остатков $\Sigma(Y_i - Y_i^*)$ близка нулю (табл. 4), поэтому ошибки в вычислениях нет. Так как все возможные аргументы (i, t_i, Y_i^*) монотонно возрастают, то достаточно провести анализ остатков в зависимости от какого-то одного из них, например от номера наблюдения i . В рассматриваемом случае остатки вычисляются по формуле $Y_i - Y_i^* = Y_i - 23,49 - 58,45 i$.

Значения остатков в зависимости от i приведены в табл. 4 и на рис. 4. Значения остатков не дают оснований отвергнуть постулируемую модель регрессии.

Следует отметить, что анализ остатков может быть проведен в зависимости от любых аргументов, которые в данной конкретной задаче представляют интерес. Предположим, например, что собранные данные соответствуют различным объектам, для которых предполагается одна и та же модель регрессии (объектами могут быть управления гражданской авиации, аэропорты, ремонтные заводы и т. п.). Тогда целесообразно проверить зависимость остатков от принадлежности наблюдаемых значений объектам. Может также случиться, что наблюдения были произведены в различное время, причем фактор времени в модель не входит. Так может быть, например, при исследовании зависимости себестоимости или трудоемкости технического обслуживания от объема производства, если данные собирались в разное время. В таком случае целесообразно сделать анализ остатков в зависимости от времени наблюдений. Обнаружение зависимости остатков указывает на необходимость введения в модель дополнительных членов, учитывающих соответствующие факторы.

При анализе графиков могут встречаться точки, имеющие характер выбросов. Эти точки подлежат специальному логическому анализу и могут дать очень ценную информацию, если в результате анализа окажется, что им соответствовали особые комбинации условий.

Если же в результате анализа обнаружится техническая ошибка (при регистрации значений, перезаписи их в таблицу или

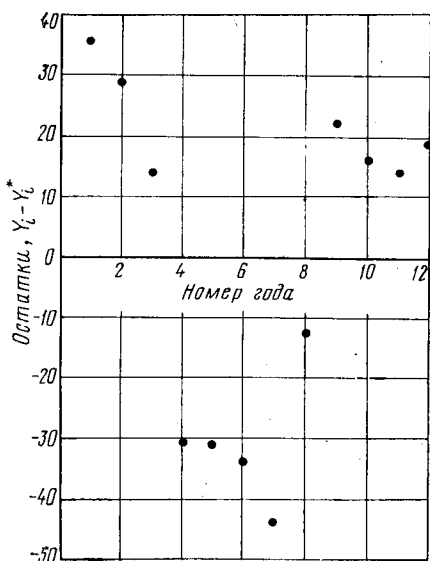


Рис. 4. Анализ остатков

при вычислениях), то соответствующие точки отбрасываются или корректируются.

Последней процедурой проверки адекватности модели является проверка незначимости регрессии, т. е. отсутствия линейной зависимости переменной Y от сопутствующей переменной t . Точная формулировка задачи следующая: проверить гипотезу $Y = \beta_0 + Z$ при альтернативе $Y = \beta_0 + \beta_1 t + Z$. Основой для проверки гипотезы является остаточная сумма квадратов R_p , обусловленная регрессией, и остаточная сумма квадратов R_0 относительно регрессии. Критерием проверки служит отношение

$$F = \frac{(n-2) R_p}{R_0}. \quad (1.28)$$

Малые значения критерия указывают на справедливость гипотезы, а большие значения противоречат ей. Если гипотеза верна, то критерий имеет распределение Фишера с 1 и $n-2$ степенями свободы. Поэтому область принятия проверки гипотезы для доверительной вероятности p (т. е. для уровня значимости $1-p$) является интервал

$$(0; F^{-1}(p; 1, n-2)). \quad (1.29)$$

Если подсчитанное значение критерия не попадает в области принятия, то гипотеза отвергается. При этом, пользуясь длительное время этой критической областью, примерно в 100 $p\%$ случаев будем принимать верную гипотезу. Отвержение гипотезы свидетельствует о том, что член β_1 в модели отбрасывать не следует, а принятие гипотезы, — что этот член может быть отброшен.

В нашем примере имеем: $n=12$; $R_p=488\,563$; $R_0=8885,82$; $F=550,73$. Если выбрать значение доверительной вероятности, равное 0,95, то по табл. ПIV приложения находим, что $F^{-1}(0,95; 1,10) = 4,96$. Следовательно, область принятия гипотезы есть $(0; 4,96)$.

Так как значение критерия не попадает в эту область, то регрессию объема отправок на номер года следует признать значимой.

Методы, применяемые для проверки адекватности модели, могут быть значительно усилены, если некоторым значениям сопутствующей переменной соответствует несколько повторных наблюдений. Пусть для значения сопутствующей переменной t_1 проведено n_1 наблюдений, для значения t_2 — n_2 наблюдений, для значения t_i — n_i наблюдений. Для каждого значения t_i , которому соответствует несколько наблюдений, вычисляется величина

$$\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{1}{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \right)^2,$$

где Y_{ij} — значение зависимой переменной, соответствующей j -му наблюдению при фиксированном t_i .

Затем определяется сумма таких величин, как

$$R_e = \sum_{i=1}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{1}{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \right)^2 \right), \quad (1.30)$$

которая называется «чистой ошибкой». Здесь n_0 — число различных значений, сопутствующей переменной.

Название R_e обусловлено тем, что различия в повторных испытаниях при одних и тех же значениях сопутствующей переменной определяется целиком разбросом (дисперсией) случайной составляющей Z .

Обозначим

$$n_e = \sum_{i=1}^{n_0} n_i - n_0 = n - n_0, \quad (1.31)$$

где $\sum n_i = n$ — общее число наблюдений.

Тогда, если для всех наблюдений дисперсия случайных составляющих одна и та же ($D(Z_i) = \sigma^2$), то отношение

$$\sigma^{2*} = R_e/n_e \quad (1.32)$$

является несмещенной оценкой этой дисперсии. Эта оценка несмещенная, если даже математическое ожидание i -го наблюдения $E(Y_i)$ не равно $\beta_0 + \beta_1 t_i$, т. е. если модель некорректна. Теперь сумму квадратов относительно регрессии R_0 можно разложить на два слагаемых:

$$R_0 = R_e + (R_0 - R_e). \quad (1.33)$$

Второе слагаемое называется суммой квадратов, обусловленной «неадекватностью» модели. Ее значение находится вычитанием R_e из R_0 и служит критерием соответствия модели имеющимся данным.

Разбиение суммы квадратов относительно общего среднего на отдельные составляющие может быть оформлено в виде так называемой «Таблицы дисперсионного анализа» (табл. 5).

Дисперсионный анализ

Таблица 5

Источник	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Регрессия	R_p	1	$\left. \begin{array}{l} R_p \\ R_0/(n-2) \end{array} \right\}$
Отклонение от регрессии в том числе:	R_0	$n-2$	
чистая ошибка	R_e	n_e	$\left. \begin{array}{l} R_e/n_e \\ (R_0 - R_e)/(n-2-n_e) \end{array} \right\}$
неадекватность	$R_0 - R_e$	$n-2-n_e$	
Отклонение от среднего	R_{Σ}	$n-1$	

Значение средних квадратов в таблице определяется в результате деления сумм квадратов на число степеней свободы. Фигурные скобки показывают те средние квадраты, отношения которых следует взять для проверки различных гипотез [см. формулы (1.28) и (1.34)].

Если имеет место нормальное распределение и справедлива постулируемая модель (1.16), то R_e и $R_0 - R_e$ взаимно независимы, причем обе имеют χ^2 -распределение: первая с n_e степенями свободы, а вторая — с $(n - n_e - 2)$.

Следовательно, отношение

$$\frac{n_e (R_0 - R_e)}{(n - n_e - 2) R_e}, \quad (1.34)$$

равное отношению соответствующих средних квадратов, имеет распределение Фишера с $n - n_e - 2$ и n_e степенями свободы. Поэтому при доверительной вероятности p областью принятия гипотезы о корректности модели является интервал

$$[0; F^{-1}(p; n - n_e - 2, n_e)], \quad (1.35)$$

где $F^{-1}(p; n - n_e - 2, n_e)$ находится по табл. ПIV.

Если проверяемая гипотеза принимается, то для оценки дисперсии σ^2 следует использовать формулу (1.17), обеспечивающую большую точность (меньшую дисперсию оценки) по сравнению с формулой (1.32). Если гипотеза отвергается, то следует испробовать другую модель. Тем не менее оценка дисперсии может быть найдена по формуле (1.32).

В данном разделе был рассмотрен случай равных дисперсий. Если дисперсия для i -го наблюдения равна $\sigma^2 \omega_i^{-1}$, где σ^2 предполагается неизвестной, а ω_i — известной величиной, то для применения изложенных проверок необходимо сделать замену переменных Y_i на $\sqrt{\omega_i} Y_i$. Это вызывает замену

$$Y_i^* \text{ на } \sqrt{\omega_i} Y_i^* = \sqrt{\omega_i} (\beta_0^* + \beta_1^* t_i),$$

где коэффициенты β_0^* и β_1^* вычисляются по формулам (1.8) и (1.7). После такой замены новые случайные величины будут иметь одинаковые дисперсии. Поэтому для них остаются справедливыми все описанные выше процедуры проверки адекватности модели.

Глава 2

АНАЛИЗ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ СОПУТСТВУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Матрицы и вектора

Рассмотрим общий случай регрессионного анализа, когда имеется не одна сопутствующая переменная t , а несколько. Для того чтобы упростить соответствующие этому случаю математические выкладки и формулы, необходимо воспользоваться матричными обо-

Таблица 6

Пассажирооборот (тарифный) по некоторым управлениям гражданской авиации
(млн. пасс.-км)

Управление	Год									
	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
Латвийское	329	419	484	559	654	744	801	862	927	934
Магаданское	640	753	837	908	1032	1120	1199	1354	1417	1490
Приволжское	1262	1562	1853	2279	2688	3263	3627	4091	4454	4705
Северо-Кавказское	2928	3534	4337	5160	5916	6809	7039	8015	8572	8777
Туркменское	415	470	575	659	725	789	862	973	1044	1065
Уральское	1330	1615	1800	2204	2569	3080	3366	3824	4168	4356

значениями. Читатель, знакомый с основными положениями теории матриц, может данный раздел пропустить.

Матрицей называется прямоугольная таблица, состоящая из $n \times m$ элементов. Говорят, что матрица имеет порядок $n \times m$, если число строк таблицы n , а число столбцов m . Элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, называется i, j -м элементом матрицы. Матрицы будем обозначать жирными заглавными буквами **A**, **B**, **C**, **T**, ...; i, j -й элемент матрицы **A** будет обозначаться a_{ij} , матрицы **B** — b_{ij} и т. п. Матрицы могут также обозначаться через составляющие ее элементы следующим образом: **A** = (a_{ij}) ; **B** = (b_{ij}) и т. д.

Если число строк и число столбцов матрицы совпадают, то матрица называется *квадратной*. Диагональными элементами квадратной матрицы **A** порядка $n \times n$ называются элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Матрица, у которой только диагональные элементы отличны от нуля, называется *диагональной*.

Приведем пример матрицы. В табл. 6 представлены данные о пассажирообороте по шести управлениям гражданской авиации за 1964—1973 гг. Перенумеруем года так, чтобы 1964 г. получил номер 1, 1965 г. — номер 2, а 1973 г. — номер 10. Если в табл. 6 отбросить весь словесный текст и оставить только цифры, то получим матрицу порядка 6×10 . Строки матрицы будут соответствовать управлениям, а столбцы — годам. Элемент i, j матрицы показывает величину пассажирооборота i -го управления в j -м году.

Частным случаем матрицы является вектор. *Вектор* — это матрица, состоящая из одного столбца, т. е. матрица порядка $n \times 1$. Будем говорить о векторе порядка n , если вектор содержит n элементов. Отметим, что каждый столбец матрицы порядка $n \times n$ является вектором порядка n .

Для обозначения векторов примем следующую систему. В первых, вектора будем обозначать жирными строчными буквами латинского алфавита **a**, **b**, **c**, ..., а их i -й элемент a_i, b_i . Во вторых, если желательно выделить j -й столбец матрицы **A**, то будем гово-

речь о нем как о векторе $A^{(j)}$. В-третьих, если желательно подчеркнуть, что элементы вектора являются случайными величинами, то для обозначения вектора будем использовать полужирные буквы Y, X, Z , а для обозначения его i -го элемента — простые буквы Y, X, Z с нижним индексом i . В связи с этим введенные обозначения связаны таким образом:

$$a = (a_i); A^{(j)} = (a_{ij}); Y = (Y_i). \quad (2.1)$$

Кроме того, например, матрица порядка $n \times m$ может быть записана через свои вектора-столбцы как

$$A = (A^{(j)}). \quad (2.2)$$

В рассмотренной выше матрице A вектор $A^{(1)}$ соответствует пассажирообороту по управлениям для 1-го года. Вся матрица A является совокупностью таких векторов $A^{(j)}$ для j от 1 до 10.

Матрицы и вектора являются обобщением понятия скаляра (т. е. числа и переменной). Как и для последнего, для них определены различные арифметические операции. Две матрицы A и B являются равными, если они имеют один и тот же порядок и каждый элемент матрицы A равен соответствующему элементу матрицы B , т. е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ для всех i и j .

Сумма двух матриц A и B определена только в случае, если обе матрицы имеют один и тот же порядок. Сумма A и B есть матрица, i, j -й элемент которой есть сумма i, j -х элементов этих матриц. Иными словами, сумма получается путем поэлементного сложения. Если сумму A и B обозначить C , то математически операция суммирования определяется так:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C.$$

Операция суммирования очевидным образом определяется и для нескольких матриц, например, $A+B+C$.

Если, например, в рассматриваемом примере необходимо определить суммарный пассажирооборот каждого управления за 1964—1973 гг., то будем интересоваться суммой $A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(10)}$. В результате получим вектор, первый элемент которого (для первого управления) равен 6713, второй элемент (для второго управления) — 10 750 и т. д. Весь вектор, если записать его горизонтально, будет иметь вид: (6 713; 10 750; 29 784; 61 087; 7 572; 28 322).

Для матриц и векторов определена операция умножения на скаляр c , т. е. на число или переменную. Она заключается в умножении каждого элемента на скаляр, т. е.

$$cA = c(a_{ij}) = (ca_{ij}). \quad (2.3)$$

Отметим, что для операции сложения матриц и умножения их на скаляр справедливы свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности: $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$; $c(A+B)=cA+cB$.

Одной из важнейших является операция умножения матриц. Произведение двух матриц A и B определено только в том случае,

если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Если порядок матрицы A есть $n \times m$, а порядок матрицы B есть $m \times l$, то порядок произведения AB есть $n \times l$; i, j -й элемент произведений AB получается путем умножения элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца $B^{(j)}$ матрицы B :

$$AB = (c_{ij}); \quad c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}. \quad (2.4)$$

Коммутативное свойство для умножения матриц не имеет места, т. е. не обязательно, чтобы $AB = BA$.

Частным случаем умножения матриц является умножение матрицы на вектор, результатом чего будет вектор. Если матрица A имеет порядок $n \times m$, а вектор b — порядок m , то произведение Ab будет вектором порядка n ; i -й элемент произведения определяется по формуле

$$(Ab)_i = \left(\sum_r a_{ir} b_r \right). \quad (2.5)$$

Умножение матрицы A на вектор b можно рассматривать как преобразование вектора b , в результате которого получается новый вектор Ab .

Продолжим рассмотрение примера с табл. 6. Обозначим 1 вектор порядка 10, состоящий из единиц. Суммарный пассажирооборот каждого из управлений за все представленные годы может быть получен путем умножения рассматриваемой матрицы на этот вектор. Читатель может проверить, что в результате получается тот же вектор, который был приведен ранее.

Рекомендуется также проверить правильность следующего соотношения:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 4 & 36 & 26 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц обладает свойством *ассоциативности*: $(AB)C = A(BC)$, так что произведение ABC трех и более матриц определяется однозначно. Следует отметить также, что операция умножения обладает свойством *дистрибутивности* $A(B+C) = AB+AC$.

В операциях с матрицами широкое распространение находит транспонирование матриц. Транспонированной к A называется матрица A' , получаемая из A путем замены строк на столбцы (или наоборот). Если матрица A квадратная, то транспонированная матрица получается, если развернуть каждую строку матрицы A вокруг ее диагонального элемента по часовой стрелке до совмещения со столбцом. Математическая формулировка операции транспонирования матрицы A выглядит так:

$$A' = (a'_{ij}) = (a_{ji}), \quad (2.6)$$

т. е. i, j -й элемент транспонированной матрицы A' есть j, i -й элемент исходной матрицы A . Матрица, транспонированная к сумме матриц, есть сумма матриц, транспонированных к исходным матрицам: $(A+B)' = A' + B'$, $(A+B+C)' = A' + B' + C'$ и т. д. Соответствующие выражения для произведения матриц выглядят несколько сложнее:

$$(AB)' = B'A'; (ABC)' = C'B'A' \text{ и т. д.}, \quad (2.7)$$

т. е. при транспонировании произведения матриц необходимо перемножить в обратном порядке матрицы, транспонированные к исходным.

При транспонировании вектора a порядка n (т. е. матрицы порядка $n \times 1$) получается матрица a' порядка $1 \times n$, состоящая из одной строки. Будем называть ее вектором-строкой, оставляя термин вектор за вектором-столбцом. При умножении вектора-строки a' на вектор b того же порядка получается скаляр $a'b$ (число или переменная):

$$a'b = \sum_i a_i b_i. \quad (2.8)$$

Особую роль в системе вещественных чисел играют числа 0 и 1. В теории матриц аналогичную роль выполняют нулевая и единичная матрицы. Нулевая матрица обозначается 0 и представляет собой квадратную матрицу, состоящую из нулей. Единичная матрица есть квадратная матрица, у которой диагональные элементы равны 1, а остальные — нулю. Единичная матрица обозначается I. Справедливы следующие равенства:

$A+0=A$; $A0=0$; $0A=0$; $AI=A$; $IA=A$, где предполагается, что используемые произведения определены.

С каждой квадратной матрицей A связано некоторое число, называемое определителем матрицы и обозначаемое $|A|$.

Если $A=a$; $B=(b_{ij})$; $C=(c_{ij})$ — матрицы порядка 1×1 , 2×2 и 3×3 соответственно, то

$$|A| = a^{-1}, \quad |B| = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad (2.9)$$

$$|C| = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{11}c_{32}c_{23} - c_{21}c_{12}c_{33} - c_{31}c_{22}c_{13}.$$

Если определитель не равен нулю, то говорят, что матрица невырожденная. Каждая невырожденная матрица A имеет обратную матрицу, обозначаемую A^{-1} . При умножении невырожденной матрицы A на обратную ей матрицу A^{-1} получается единичная матрица: $AA^{-1}=I$, $A^{-1}A=I$.

Можно проверить, что для трех приведенных матриц A , B и C обратными матрицами будут:

$$A^{-1} = a^{-1}; \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix};$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23} & c_{32}c_{13} - c_{12}c_{33} & -c_{22}c_{13} + c_{12}c_{23} \\ c_{31}c_{23} - c_{21}c_{33} & c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} & -c_{11}c_{23} + c_{21}c_{13} \\ c_{21}c_{32} - c_{31}c_{22} & c_{31}c_{12} - c_{11}c_{32} & c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Обратная матрица единственна. Справедливы такие соотношения:
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ и т. д., $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;
 $(A^{-1})^{-1} = A$, где предполагается, что все используемые обратные матрицы существуют.

Определители матриц более высокого порядка чем 3×3 , а также обратные матрицы вычисляются обычно на вычислительных машинах.

Примером применения обратной матрицы является модель *межотраслевого баланса*. В ней рассматривается n отраслей, каждая из которых производит один вид продукции (сталь, уголь, электроэнергию и пр.). Пусть a_{ij} — величина объема продукции i -й отрасли, необходимой для получения единицы продукции j -й отрасли. Обозначим через b_i конечный продукт i -й отрасли, который должен оставаться после удовлетворения потребностей всех отраслей в продукции данной отрасли; x_i — общий объем продукции i -й отрасли.

Пусть A — матрица порядка $n \times n$ из элементов a_{ij} , b и x — вектора порядка n из элементов b_i и x_i . Тогда вектор потребных объемов продукции x удовлетворяет соотношению $Ax + b = x$, где A и b предполагаются заданными. Отсюда находим явное выражение для неизвестного вектора x : $x = (I - A)^{-1} b$.

2.2. Случайные векторы

Выше уже отмечалось, что элементами вектора могут быть случайные величины. Такие векторы обозначались буквами X , Y , Z и т. д. Будем называть их *случайными векторами*. Если на m **каждой** случайной величины в векторе $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ подставить ее среднее значение (математическое ожидание), то получим вектор средних значений, называемый средним значением (случайного) вектора X и обозначаемый $E(X) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$ ¹. Если A — матрица порядка $m \times n$, состоящая из констант, а X — случайный вектор порядка n , то имеет место формула

$$E(AX) = AE(X). \quad (2.11)$$

При рассмотрении двух случайных величин часто возникает вопрос об измерении степени зависимости этих величин. Важнейшей числовой характеристикой зависимости двух случайных величин является ковариация. *Ковариация* случайных величин X и Y обозначается $\text{Cov}(X, Y)$ и равна математическому ожиданию произведения отклонения этих величин от их средних значений:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]). \quad (2.12)$$

Отметим, что ковариация случайной величины X с самой собой равна просто дисперсии $D(X)$: $D(X) = \text{Cov}(X, X)$.

Если ковариацию $\text{Cov}(X, Y)$ разделить на произведение средних квадратических отклонений случайных величин X и Y , то получим коэффициент корреляции

$$r_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}. \quad (2.13)$$

Ковариация и коэффициент корреляции являются мерой линейной зависимости случайных величин. Если они равны нулю, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Если две величины независимы, то ковариация и корреляция равны нулю, т. е. они некоррелированы. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. из некоррелированности не следует еще независимость случайных величин. Исключение составляет нормальное распределение, для которого понятия независимости и некоррелированности совпадают.

Коэффициент корреляции является безразмерной характеристикой. Его значения меняются от -1 до 1 . В этих крайних случаях случайные величины связаны линейной зависимостью вида: $Y = \alpha + \beta X$, где α и β — постоянные коэффициенты.

Для того чтобы описать линейную зависимость между всеми парами элементов вектора X , необходимо указать для этих пар значения ковариаций. Такое описание удобно осуществить с помощью матрицы, называемой *ковариационной матрицей*. Последняя имеет порядок $n \times n$, где n — число элементов случайного вектора X . На пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы находится значение ковариации $\text{Cov}(X_i, X_j)$ между i -ым и j -ым элементами вектора X . Если обозначить ковариационную матрицу вектора X $C(X)$, то по определению имеем

$$C(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j)). \quad (2.14)$$

Диагональные элементы ковариационной матрицы $C(X)$ — это дисперсии элементов вектора, причем i -ый диагональный элемент $\text{Cov}(X_i, X_i)$ есть дисперсия $D(X_i)$ i -го элемента X_i .

Из определения (2.12) ковариации следует, что при транспонировании ковариационная матрица не меняется, т. е.

$$C(X) = C'(X). \quad (2.15)$$

Матрицы со свойством (2.15) называются *симметрическими*.

Если элементы вектора X независимы, то ковариации $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, недиагональные элементы матрицы $C(X)$ равны 0 и матрица имеет вид

$$C(X) = \begin{pmatrix} D(X_1) & 0 & \dots & 0 \dots \\ 0 & D(X_2) & 0 \dots & \\ 0 & 0 & D(X_3) \dots & \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

В частном случае, когда дисперсии всех элементов одинаковы и равны σ^2 , получаем

$$C(X) = \sigma^2 I, \quad (2.17)$$

где I — диагональная матрица порядка $n \times n$.

Произведение AX преобразует случайный вектор X в новый случайный вектор AX . Среднее значение вектора AX определяется через среднее значение вектора X и матрицу A по формуле (2.11). Выражение для ковариационной матрицы нового вектора AX через ковариационную матрицу $C(X)$ вектора X и матрицу A имеет вид

$$C(AX) = AC(X)A'. \quad (2.18)$$

Предположим, что матрица A состоит из одной строки, т. е. является вектором-строкой. Обозначим ее a' . Тогда случайный вектор X преобразуется в одномерную случайную величину $a'X$. Среднее значение и дисперсия этой случайной величины вычисляются по формулам, являющимися частными случаями (2.11) и (2.18):

$$E(a'X) = a'E(X); D(a'X) = a'C(X)a. \quad (2.19)$$

В заключение приведем формулы для оценок ковариации и коэффициента корреляции случайных величин X и Y . Пусть $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ — n пар независимых наблюдений над случайными величинами X и Y . Эмпирические ковариация и коэффициент корреляции вычисляются по формулам

$$\text{Cov}(X, Y)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \mu_X^* \mu_Y^*; \quad (2.20)$$

$$r_{XY}^* = \frac{\text{Cos}(X, Y)^*}{\sigma_X^* \sigma_Y^*},$$

где μ_X^* и μ_Y^* — эмпирические средние значения случайных величин X и Y ;

$\sigma_X^* = \sqrt{s_X^{2*}}$ и $\sigma_Y^* = \sqrt{s_Y^{2*}}$ — эмпирические средние квадратические отклонения случайных величин X — см. формулу (1.10).

2.3. Случай одной сопутствующей переменной в матричных обозначениях

Для того, чтобы сделать более понятным переход к матричным обозначениям, вернемся к случаю регрессии с одной сопутствующей переменной и перепишем все результаты, полученные для него в первой главе, в матричных обозначениях. Зафиксированные в n наблюдениях значения зависимой переменной обозначались $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Введем вектор наблюдений Y порядка n , i -ая компонента которого равна Y_i . Если использовать операцию транспонирования, то вектор Y преобразуется в вектор-строку Y' , что позволяет дать компактное определение вектора $Y: Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

Каждому наблюдению сопутствовала случайная составляющая Z , значение которой для i -го наблюдения обозначалось Z_i . Обозна-

чим Z вектор случайных составляющих порядка n , i -ая компонента которого равна Z_i : $Z' = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$. Напомним, что вектор Y известен, так как определены его компоненты, а вектор Z является неизвестным.

Целью регрессионного анализа является оценка неизвестных коэффициентов β_0 и β_1 . Если β_0 считать за первую компоненту вектора, а β_1 — за вторую, то получим вектор, который назовем вектором неизвестных коэффициентов: $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$.

Во всех наблюдениях коэффициенту β_0 сопутствовала переменная, равная тождественно единице. Коэффициенту β_1 сопутствовала переменная t , значение которой для i -го наблюдения обозначалось t_i . Введем в рассмотрение матрицу T порядка $n \times 2$, у которой первый столбец состоит из единиц, а второй — из значений t_i . Используя для удобства записи операцию транспонирования, получим

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Теперь математическая модель, лежащая в основе регрессионного анализа, может быть записана так¹:

$$Y = T\beta + Z, \quad (2.21)$$

$$\text{где } E(Z) = 0, \quad C(Y) = C(Z) = \sigma^2 I. \quad (2.22)$$

Действительно, равенство двух матриц означает равенство соответствующих компонент матриц, так что матричное уравнение (2.21) эквивалентно n уравнениям типа $Y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + Z_i$.

Нашей целью является получение оценок неизвестных коэффициентов. Пусть β^* будет вектором оценок порядка 2, i -ая компонента которого есть β_i^* ($i=0, 1$). Согласно методу наименьших квадратов, в качестве оценок принимались такие значения, которые минимизировали сумму квадратов отклонений (1.2). Запишем эту сумму квадратов в матричной форме. Во-первых, заметим, что произведение $T\beta^*$ представляет собой вектор порядка $n \times 1$, i -ый элемент которого равен $\beta_0^* + \beta_1^* t_i$. Во-вторых, вектор $Y - T\beta^*$ содержит в качестве i -го элемента $Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)$. Применяя к вектору $Y - T\beta^*$ операцию транспонирования, получаем вектор-строку $(Y - T\beta^*)'$. Произведение вектор-строки $(Y - T\beta^*)'$ на вектор $Y - T\beta^*$ дает скаляр, который равен сумме квадратов отклонений (1.2):

$$(Y - T\beta^*)' (Y - T\beta^*) = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* t_i)]^2. \quad (2.23)$$

Итак, согласно методу наименьших квадратов, необходимо найти такой вектор оценок β^* , который бы минимизировал выражение (2.23).

Для нахождения оценок были использованы нормальные урав-

¹ Здесь и далее в формулах вектора β , β^* , Δ и Δ^* полужирным шрифтом не выделены.

нения (1.3). Они могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n t_i Y_i \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Заметим далее, что произведение двух матриц T' и T :

$$T'T = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Произведение матрицы T' на вектор Y дает вектор

$$T'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n t_i Y_i \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Теперь видно, что матричная запись системы нормальных уравнений такова:

$$T'T\beta^* = T'Y. \quad (2.27)$$

Матрица $T'T$ является квадратной матрицей порядка 2×2 . Предположим, что она невырожденная, т. е. что существует обратная матрица $(T'T)^{-1}$. При умножении ее на $T'T$ получается единичная матрица I . В свою очередь, произведение единичной матрицы I на вектор β^* равно (по свойству единичной матрицы) тому же вектору β^* . Следовательно, если умножить левую и правую части уравнения (2.27) на матрицу $(T'T)^{-1}$, то получим явное выражение для вектора оценок

$$\beta^* = (T'T)^{-1}T'Y. \quad (2.28)$$

В разд. 1.2 для оценок коэффициента β_0 и β_1 использовались выражения (1.4). Покажем, что они эквивалентны формуле (2.28).

Найдем для этого обратную матрицу $(T'T)^{-1}$. Определитель матрицы $T'T$, согласно (2.9), равен:

$$|T'T| = n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 = n \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 - n(\bar{t})^2 \right). \quad (2.29)$$

Теперь, применяя формулу (2.10), находим

$$(T'T)^{-1} = \frac{1}{|T'T|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n t_i^2 & -\sum_{i=1}^n t_i \\ -\sum_{i=1}^n t_i & n \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Произведение этой матрицы на вектор $\mathbf{T}'\mathbf{Y}$ — (см. формулу 2.26) — дает, как следует из формулы (2.28), оценки коэффициентов:

$$\beta_0^* = \frac{1}{|\mathbf{T}'\mathbf{T}|} \left[\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i Y_i \right) \right];$$

$$\beta_1^* = \frac{1}{|\mathbf{T}'\mathbf{T}|} \left[n \sum_{i=1}^n t_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \right].$$

Легко видеть, что эти выражения совпадают с формулами (1.4).

Как уже отмечалось, вектор оценок β^* является случайным. Поэтому представляет интерес нахождение среднего значения и дисперсионной матрицы этого вектора. Эта цель может быть достигнута, если использовать представление оценок в форме (2.28). Среднее значение вектора β^* , согласно формуле (2.11), $E(\beta^*) = E((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{Y}) = (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'E(\mathbf{Y})$. Если модель верна, то $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{T}\beta$, так что $E(\beta^*) = (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta = \mathbf{I}\beta = \beta$.

Итак, доказано, что в случае корректности модели математическое ожидание $E(\beta^*)$ есть β , т. е. β^* является *несмещенной оценкой* вектора неизвестных коэффициентов:

$$E(\beta^*) = \beta. \quad (2.31)$$

Найдем теперь дисперсионную матрицу вектора оценок β^* . Для этого необходимо использовать выражение (2.28) для оценки β^* и применить свойство (2.18). В качестве матрицы $\mathbf{A}$, фигурирующей в формуле (2.18), в нашем случае используется матрица $(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}$. Дисперсионная матрица вектора наблюдений $\mathbf{Y}$, согласно (2.22), есть $\mathbf{C}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}$. Подставляя все это в формулу (2.18), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\beta^*) &= \mathbf{C}[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{Y}] = [(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'] [\mathbf{C}(\mathbf{Y})] [(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}]' = \\ &= (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{C}(\mathbf{Y})[\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}] = (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} = \\ &= \sigma^2(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{T}'\mathbf{T})(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, дисперсионной матрицей вектора оценок β^* является

$$\mathbf{C}(\beta^*) = \sigma^2(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}. \quad (2.32)$$

Чтобы найти явные выражения для ковариаций оценок β_0^* и β_1^* , необходимо вспомнить вид обратной матрицы $(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}$ для случая одной сопутствующей переменной. Последний указан формулой (2.30). Следовательно,

$$D(\beta_0^*) = \frac{\sigma^2}{|\mathbf{T}'\mathbf{T}|} \sum_{i=1}^n t_i^2, \quad D(\beta_1^*) = \frac{\sigma^2}{|\mathbf{T}'\mathbf{T}|} n,$$

$$\text{Cov}(\beta_0^*, \beta_1^*) = \frac{-\sigma^2}{|\mathbf{T}'\mathbf{T}|} \sum_{i=1}^n t_i,$$

где $|\mathbf{T}'\mathbf{T}|$ определяется формулой (2.29).

Для того, чтобы можно было воспользоваться приведенными формулами, необходимо знать оценку неизвестной дисперсии σ^2 . В случае одной сопутствующей переменной несмещенная оценка дисперсии σ^2 определяется по формуле (1.17). Сравнивая эту формулу с формулой (2.23), находим, что в матричных обозначениях несмещенная оценка дисперсии σ^2 имеет вид

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-2} (Y - T\beta^*)' (Y - T\beta^*). \quad (2.33)$$

Подставляя вместо σ^2 вычисленное по формуле (2.33) значение оценки в формулу (2.32), находим оценку ковариационной матрицы вектора β^* .

Предположим, что необходимо дать прогноз зависимой переменной для значения сопутствующей переменной, равной t_k . Пусть Δ_k есть вектор порядка 2, первый элемент которого равен 1, а второй — t_k . Тогда прогнозирование осуществляется по формуле

$$Y_k^* = \Delta_k' \beta^*. \quad (2.34)$$

Математическое ожидание зависимой переменной при значении сопутствующей переменной Δ_k составляет $\Delta_k' \beta$. С другой стороны, математическое ожидание прогноза

$$E(Y_k^*) = E(\Delta_k' \beta^*) = \Delta_k' E(\beta^*) = \Delta_k' \beta. \quad (2.35)$$

Следовательно, если модель верна, то прогнозирование является *несмещенным*, т. е. без систематической ошибки. Дисперсия прогноза

$$D(Y_k^*) = D(\Delta_k' \beta^*) = \Delta_k' C(\beta^*) \Delta_k = \sigma^2 \Delta_k' (T'T)^{-1} \Delta_k. \quad (2.36)$$

Для случая одной сопутствующей переменной, используя выражение (2.30) для обратной матрицы $(T'T)^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} D(Y_k^*) &= \sigma^2 (1 t_k) \frac{1}{|T'T|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n t_i^2 & -\sum_{i=1}^n t_i \\ -\sum_{i=1}^n t_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t_k \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sigma^2}{|T'T|} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 - t_k \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n t_i + n t_k \right) \begin{pmatrix} 1 \\ t_k \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sigma^2}{|T'T|} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 - t_k \sum_{i=1}^n t_i - t_k \sum_{i=1}^n t_i + n t_k^2 \right), \end{aligned}$$

что совпадает с ранее приведенной формулой (1.19).

Закончим настоящий раздел рассмотрением нашего примера, используя матричные обозначения.

Для того, чтобы поупражняться в операциях над матрицами, будем использовать не конечные выражения типа (2.29), (2.30) и т. д., а общий путь, намеченный выше.

Имеем:

$$Y = \begin{pmatrix} 118 \\ 170 \\ 213 \\ 227 \\ 285 \\ 340 \\ 388 \\ 479 \\ 572 \\ 624 \\ 681 \\ 744 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix}.$$

Для нахождения оценок по формуле (2.28) найдем $(T'T)^{-1}$:

$$T'T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 78 \\ 78 & 650 \end{pmatrix}.$$

$$|T'T| = \begin{vmatrix} 12 & 78 \\ 78 & 650 \end{vmatrix} = 12 \cdot 650 - 78^2 = 1716.$$

Теперь по формуле (2.10) получаем:

$$(T'T)^{-1} = \frac{1}{1716} \begin{pmatrix} 650 & -78 \\ -78 & 12 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по формуле (2.28):

$$\beta^* = \frac{1}{1716} \begin{pmatrix} 650 & -78 \\ -78 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 170 \\ 213 \\ 227 \\ 285 \\ 340 \\ 388 \\ 479 \\ 572 \\ 624 \\ 681 \\ 744 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1716} \begin{pmatrix} 40300 \\ 84858 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,48 \\ 58,45 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионная матрица вектора оценок β^* , согласно (2.32), равна:

$$C(\beta^*) = \sigma^2 \frac{1}{1716} \begin{pmatrix} 650 & -78 \\ -78 & 12 \end{pmatrix}.$$

Несмещенную оценку неизвестной дисперсии σ^2 вычисляем по формуле (2.33). Для этого вначале находим

$$T\beta^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23,48 \\ 58,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81,93 \\ 140,38 \\ 198,83 \\ 257,28 \\ 315,73 \\ 374,18 \\ 432,63 \\ 491,08 \\ 549,53 \\ 607,98 \\ 666,43 \\ 724,88 \end{pmatrix}, \quad Y - T\beta^* = \begin{pmatrix} 36,07 \\ 29,62 \\ 14,17 \\ -30,28 \\ -30,73 \\ -34,18 \\ -44,63 \\ -12,08 \\ 22,47 \\ 16,02 \\ 14,57 \\ 19,12 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{12-2} (36,07 \ 29,62 \ 14,17 \ -30,28 \ -30,73 \ -34,18 \ -44,63$$

$$-12,08 \ 22,47 \ 16,02 \ 14,57 \ 19,12) \begin{pmatrix} 36,07 \\ 29,62 \\ 14,17 \\ -30,28 \\ -30,73 \\ -34,18 \\ -44,63 \\ -12,08 \\ 22,47 \\ 16,02 \\ 14,57 \\ 19,12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} (8885,81) = 888,58.$$

Y — вектор порядка n зависимых переменных, i -й элемент которого есть зависимая переменная, соответствующая i -му наблюдению;

β — вектор порядка $m+1$ неизвестных коэффициентов, $(i+1)$ -й элемент которого есть коэффициент при i -й сопутствующей переменной;

Z — вектор порядка n случайных составляющих, i -й элемент которого есть случайная составляющая, имеющая место в i -м наблюдении.

Кроме того, рассмотрим матрицу T порядка $n \times (m+1)$ сопутствующих переменных, состоящую из n строк и $m+1$ столбцов. Строки этой матрицы соответствуют различным наблюдениям, а столбцы — различным сопутствующим переменным. Первая строка содержит значения сопутствующих переменных для 1-го наблюдения, вторая — для 2-го наблюдения и т. д. Первый столбец матрицы состоит из единиц. Второй столбец состоит из значений первой сопутствующей переменной в различных наблюдениях, третий — из значений второй сопутствующей переменной и т. п.

Итак, введены следующие обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & \dots & t_1^{(m)} \\ 1 & t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & \dots & t_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n^{(1)} & t_n^{(2)} & \dots & t_n^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Система равенств (2.38) может быть записана в матричных обозначениях следующим образом:

$$Y = T\beta + Z. \quad (2.41)$$

Условие (2.39) переписывается так:

$$E(Z) = 0, \quad C(Z) = \sigma^2 I. \quad (2.42)$$

Эти формулы в точности совпадают с формулами (2.21) и (2.22), полученными для случая одной сопутствующей переменной. Разница, однако, заключается в порядке матриц и векторов для обоих случаев.

Обозначим через β^* вектор оценок неизвестных коэффициентов β . Пусть далее Δ'_k есть вектор-строка порядка $m+1$ значений сопутствующих переменных для k -го наблюдения, 1-й элемент есть 1, 2-й элемент есть значение 1-й сопутствующей переменной, ..., $(m+1)$ -й элемент — значение m -ой сопутствующей переменной. Итак:

$$\beta^{*'} = (\beta_0^*, \beta_1^*, \dots, \beta_m^*);$$

$$\Delta'_k = (1, t_k^{(1)}, \dots, t_k^{(m)}).$$

Отметим, что строками матрицы T являются $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$.

Формула (2.37) для прогнозирования значения зависимой переменной Y_k , соответствующего вектору сопутствующих переменных Δ'_k , принимает вид

$$Y_k^* = \Delta'_k \beta^* \quad (2.43)$$

Задача заключается в нахождении оценок коэффициентов β^* , которые бы минимизировали сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений зависимых переменных от значений, вычисляемых по формуле (2.43):

$$R_0 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \Delta'_i \beta^*)^2 = (Y - T\beta^*)' (Y - T\beta^*). \quad (2.44)$$

Как и в случае одной сопутствующей переменной, для нахождения оценок необходимо продифференцировать выражение (2.44) по $\beta_0^*, \beta_1^*, \dots, \beta_m^*$ и приравнять производные нулю. Получающаяся система уравнений называется нормальной. Нетрудно показать, что, как и в случае одной сопутствующей переменной — см. формулу (2.27), она имеет вид:

$$T'T\beta^* = T'Y. \quad (2.45)$$

Далее поступаем, как и прежде. Предполагаем, что матрица $T'T$ является невырожденной, т. е. имеет обратную матрицу $(T'T)^{-1}$. Умножая левую и правую части (2.45) на $(T'T)^{-1}$, получаем явное выражение для вектора оценок β^*

$$\beta^* = (T'T)^{-1}T'Y. \quad (2.46)$$

Оценки, вычисляемые по этой формуле, называются *оценками наименьших квадратов*. Для получения их, следовательно, необходимо:

- найти произведение $T'Y$;
- найти произведение матриц $T'T$;
- найти обратную матрицу $(T'T)^{-1}$;
- вычислить произведение $(T'T)^{-1}T'Y$.

Наибольшую трудность вызывает нахождение обратной матрицы $(T'T)^{-1}$. Для матриц порядка 2×2 и 3×3 явные выражения для элементов обратной матрицы были приведены в разд. 2.1 — см. формулу (2.10). Для матриц более высокого порядка можно использовать алгоритм Жордана-Гаусса, который приведен в разд. 2.7. Отметим, однако, что обратные матрицы высоких порядков находят обычно с помощью вычислительных машин.

Если математическая модель (2.41) и (2.42) действительно имеет место, то, как и в случае одной сопутствующей переменной (см. разд. 1.4), можно доказать следующие свойства оценки наименьших квадратов (2.46).

а) Вектор β^* является несмещенной оценкой истинного вектора неизвестных коэффициентов β :

$$E(\beta^*) = \beta. \quad (2.47)$$

б) Оценки наименьших квадратов имеют наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок неизвестных коэффициентов, являющихся линейными функциями наблюдений $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

в) Несмещенной оценкой неизвестной дисперсии σ^2 является

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \Delta'_i \beta^*)^2, \quad (2.48)$$

где Δ'_i — i -ая строка матрицы T .

Оценкой среднего квадратического отклонения служит $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{2*}}$.

г) Ковариационная матрица вектора оценок β^* имеет вид:

$$C(\beta^*) = \sigma^2 (T'T)^{-1}. \quad (2.49)$$

Напомним, что $(i+1)$ -ый диагональный элемент этой матрицы C равен дисперсии $D(\beta_i^*)$ оценки коэффициента β_i^* , $i=0, m$. Для получения оценки $C^*(\beta^*)$ ковариационной матрицы $C(\beta^*)$ необходимо в эту формулу вместо неизвестной дисперсии σ^2 подставить ее оценку σ^{2*} , вычисляемую по формуле (2.48).

д) Прогноз, рассчитываемый по формуле (2.43), является несмещенной оценкой истинного математического ожидания $\Delta'_k \beta$ и имеет наименьшую дисперсию

$$D(Y_k^*) = \sigma^2 \Delta'_k (T'T)^{-1} \Delta_k. \quad (2.50)$$

Подставляя σ^{2*} вместо σ^2 , находим оценку $D^*(Y_k^*)$ этой дисперсии.

Свойства а) — д) имеют место при любых распределениях случайных составляющих $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. При дополнительном предположении о нормальном распределении $\Phi(0; \sigma^2)$ этих составляющих справедливы, кроме того, следующие утверждения.

е) Вектор оценок β^* обладает наименьшей дисперсией среди всех (линейных и нелинейных) несмещенных оценок вектора коэффициентов β .

ж) Отношение σ^{2*}/σ^2 , где σ^2 — неизвестная дисперсия, σ^{2*} — ее оценка, вычисляемая по формуле (2.48), имеет χ^2 -распределение с $n-m-1$ степенями свободы $K(n-m-1)$. Доверительный интервал для неизвестной дисперсии при доверительной вероятности p имеет вид:

$$(0; (n-m-1) \sigma^{2*} [K^{-1}(1-p; n-m-1)]^{-1}). \quad (2.51)$$

з) При доверительной вероятности p доверительным интервалом для математического ожидания $\Delta'_k \beta$ зависимой переменной Y_k , соответствующей вектору-строке значений сопутствующих переменных $\Delta'_k = (1 \ t_k^{(1)} \dots \ t_k^{(m)})$, будет

$$\left(\Delta'_k \beta^* \pm S^{-1} \left(\frac{p+1}{2}; n-m-1 \right) \sigma^* (\Delta'_k (T'T)^{-1} \Delta_k)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.52)$$

и) При доверительной вероятности p доверительным интервалом для значения зависимой переменной Y_k , соответствующего вектору-строке сопутствующих переменных $\Delta_k = (1 \cdot t_k^{(1)} \dots t_k^{(m)})$, будет

$$\left(\Delta_k' \hat{\beta}^* \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-m-1 \right) \sqrt{\sigma^{2*} + D^*(Y_k^*)} \right). \quad (2.53)$$

В качестве примера рассмотрим задачу прогнозирования пассажирооборота воздушным транспортом. Сопутствующими переменными выберем следующие:

- $t_i^{(1)}$ — номер года i , т. е. $t_i^{(1)} = i$;
- $t_i^{(2)}$ — численность населения, млн. человек;
- $t_i^{(3)}$ — национальный доход, млрд. рублей.

Значения сопутствующих переменных, а также пассажирооборота по МГА с 1961 по 1973 г. приведены в табл. 7. Эти значения были заимствованы из статистического ежегодника «Народное хозяйство СССР в 1973 г.». Годы в таблице нумеруются начиная с 1961 г.

В нашем случае $n=13$; $m=3$. Матрица T имеет порядок 13×4 . Первый столбец ее состоит из единиц, а второй, третий и четвертый столбцы — это соответствующие столбцы табл. 7. Вычисляем произведение матриц T' и T . Оно является матрицей порядка 4×4 следующего вида:

$$T'T = \begin{pmatrix} 13 & 91 & 3042 & 3027 \\ 91 & 819 & 21772 & 24072 \\ 3042 & 21772 & 713096 & 720535 \\ 3027 & 24072 & 720535 & 761325 \end{pmatrix}.$$

Таблица 7

Некоторые показатели развития народного хозяйства СССР

Год	$t_i^{(1)} = i$	Численность населения, $t_i^{(2)}$ млн. чел.	Национальный доход, млрд. руб., $t_i^{(3)}$	Пассажирооборот по МГА, млрд. пасс-км, Y_i	Год	$t_i^{(1)} = i$	Численность населения, $t_i^{(2)}$ млн. чел.	Национальный доход, млрд. руб., $t_i^{(3)}$	Пассажирооборот по МГА, млрд. пасс-км, Y_i
1961	1	216	153	16,4	1968	8	237	244	62,1
1962	2	220	165	20,3	1969	9	240	262	71,5
1963	3	224	168	25,3	1970	10	242	290	78,2
1964	4	227	181	30,9	1971	11	244	305	88,8
1965	5	230	194	38,1	1972	12	246	314	95,9
1966	6	232	207	45,1	1973	13	249	338	98,8
1967	7	235	226	53,5					

Теперь следует найти обратную матрицу $(T'T)^{-1}$. Вычисления, проведенные на ЭВМ, показали, что

$$(T'T)^{-1} = \begin{pmatrix} 14382,3 & 270,68 & -62,94 & -6,608 \\ 270,68 & 5,318 & -1,177 & -0,1383 \\ -62,94 & -1,177 & 0,2765 & 0,0289 \\ -6,608 & -0,1383 & 0,0289 & 0,0032 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы T' на вектор значений зависимой переменной Y (см. последний столбец табл. 7) есть вектор порядка 4.

Вектор β^* получается по формуле (2.46) и имеет следующий вид:

$$(\beta^*)' = (367,22 \quad 11,20 \quad -1,71 \quad 0,05).$$

Итак, пассажирооборот по МГА на k -ый год прогнозируется по формуле

$$Y_k^* = 367,22 + 11,20k - 1,71t_k^{(2)} + 0,05t_k^{(3)}.$$

Несмещенная оценка неизвестной дисперсии σ^2 вычисляется по формуле (2.48). Окончательно находим: $R_0 = 27,95$;

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{13 - 3 - 1} 27,95 = \frac{1}{9} 27,95 = 3,11;$$

$$\sigma^* = \sqrt{3,11} = 1,76.$$

В качестве оценки ковариационной матрицы вектора оценок используется матрица (см. формулу 2.49), представленная в следующем виде:

$$C^* = \begin{pmatrix} 44729,17 & 841,80 & -195,75 & -20,55 \\ 841,80 & 16,54 & -3,66 & -0,43 \\ -195,75 & -3,66 & 0,86 & 0,09 \\ -20,55 & -0,43 & 0,09 & 0,01 \end{pmatrix}. \quad (2.49')$$

Напомним, что диагональные элементы матрицы — это дисперсии оценок коэффициентов β_i , $i = 0, 3$.

Составим теперь прогноз пассажирооборота на 1975 г. Прогноз численности населения и национального дохода СССР на 1975 г. считается заданным и составляет, соответственно, 255 млн. чел. и 368 млрд. руб. Следовательно, вектор сопутствующих переменных для прогнозирования года

$$\Delta'_{15} = (1 \quad 15 \quad 255 \quad 368).$$

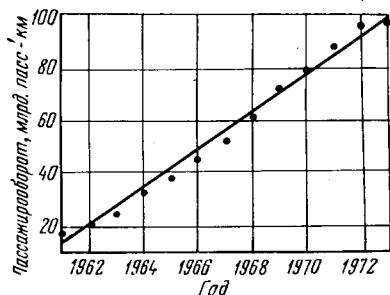


Рис. 5. Динамика пассажирооборота по МГА

Прогноз пассажирооборота составит

$$Y_{1975}^* = 367,22 + 11,20 \cdot 15 - 1,71 \cdot 255 + 0,05 \cdot 368 = 117,57.$$

График зависимости пассажирооборота Y от номера года представлен на рис. 5.

Отметим в заключение, что наличие свободного члена β_0 в модели — см. формулы (2.37), (2.38) и (2.40) не является обязательным. Отсутствие его приводит к тому, что в матрице T исчезает столбец, состоящий из единиц. Для этого случая все остается в силе, если всюду в формулах $m+1$ заменить на m . Свободный член должен отсутствовать в тех зависимостях, которые предполагают нулевое значение зависимой переменной при нулевых значениях всех сопутствующих переменных (например, как в зависимости доходов от объема выполненной работы).

2.5. Случай различных дисперсий

Существенным условием математической модели (2.38) или (2.41), постулируемой нами, было равенство дисперсий и некоррелированность случайных составляющих Z , соответствующих различным наблюдениям — см. формулы (2.39) и (2.42). Это условие, как и случай одной сопутствующей составляющей (см. разд. 1.5), может быть ослаблено. Можно предположить, что дисперсионная матрица вектора случайных составляющих является диагональной и известна с точностью до постоянного сомножителя σ^2 . При этом условие (2.42) заменяется на следующее:

$$E(Z) = 0; C(Z) = \sigma^2 W, \quad (2.54)$$

где постоянная σ^2 предполагается неизвестной, а матрица W — известной и диагональной:

$$W = \begin{pmatrix} w_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_n^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

В рамках этого условия случайные составляющие могут иметь различные дисперсии.

Оказывается, что рассматриваемый случай может быть сведен к ранее рассмотренному, когда $W = I$. Для этого необходимо вначале вычислить матрицу

$$W^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{w_n} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Если умножить теперь обе части выражения (2.41) на матрицу $W^{-\frac{1}{2}}$, то получим

$$W^{-\frac{1}{2}}Y = W^{-\frac{1}{2}}T\beta + W^{-\frac{1}{2}}Z.$$

Новая случайная составляющая $W^{-\frac{1}{2}}Z$ имеет, согласно формуле (2.18), дисперсионную матрицу

$$C(W^{-\frac{1}{2}}Z) = W^{-\frac{1}{2}}C(Z)(W^{-\frac{1}{2}})' = W^{-\frac{1}{2}}\sigma^2WW^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2I.$$

Следовательно, если вместо вектора наблюдений Y рассматривать

$$W^{-\frac{1}{2}}Y = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1}Y_1 \\ \sqrt{w_2}Y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{w_n}Y_n \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

а вместо матрицы значений сопутствующих переменных T рассматривать $W^{-\frac{1}{2}}T$, получающуюся из T путем умножения i -й строки на $\sqrt{w_i}$:

$$W^{-\frac{1}{2}}T = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & \sqrt{w_1}t_{11} & \sqrt{w_1}t_{12} & \dots & \sqrt{w_1}t_{1m} \\ \sqrt{w_2} & \sqrt{w_2}t_{21} & \sqrt{w_2}t_{22} & \dots & \sqrt{w_2}t_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{w_n} & \sqrt{w_n}t_{n1} & \sqrt{w_n}t_{n2} & \dots & \sqrt{w_n}t_{nm} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

то приходим к прежней модели с постоянными дисперсиями. Для этой модели справедливы все ранее выведенные формулы после замены в них, конечно, Y и T в соответствии с формулами (2.57) и (2.58). Если возвратиться к первоначальному вектору Y , то формулы (2.44), (2.46), (2.48) — (2.50), (2.52) и (2.53) должны быть переписаны соответственно в виде

$$\sum_{i=1}^n w_i (Y_i - \Delta'_i \beta^*)^2 = (Y - T\beta^*)' W^{-1} (Y - T\beta^*); \quad (2.44')$$

$$\beta^* = (T'W^{-1}T)^{-1}T'W^{-1}Y; \quad (2.46')$$

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n w_i (Y_i - \Delta'_i \beta^*)^2; \quad (2.48')$$

$$C(\beta^*) = \sigma^2 (T'W^{-1}T)^{-1}; \quad (2.49'')$$

$$D(Y_k^*) = \sigma^2 \Delta'_k (T'W^{-1}T)^{-1} \Delta_k; \quad (2.50')$$

$$\left(\Delta'_k \beta^* \pm S^{-1} \left(\frac{p+1}{2}; n-m-1 \right) \sigma^* (\Delta'_k (\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \Delta_k)^{-\frac{1}{2}} \right); \quad (2.52')$$

$$\left(\Delta'_k \beta^* \pm S^{-1} \left(\frac{p+1}{2}; n-m-1 \right) \sigma^* \left(\frac{1}{w_k} + \Delta'_k (\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \Delta_k \right)^{\frac{1}{2}} \right); \quad (2.53')$$

где σ^2/w_k — дисперсия k -го наблюдения, для которой постоянная w_k считается известной.

Формула (2.51) остается прежней.

В качестве примера найдем выражения (2.46') и (2.50') для случая одной сопутствующей переменной.

Согласно (2.58) имеем

$$\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sum w_i & \sum t_i w_i \\ \sum t_i w_i & \sum t_i^2 w_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i w_i \\ \sum Y_i w_i t_i \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T})^{-1} &= \frac{1}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 w_i & -\sum t_i w_i \\ -\sum t_i w_i & \sum w_i \end{pmatrix}, \\ \beta^* &= (\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Y} = \\ &= \frac{1}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} \begin{pmatrix} \sum Y_i w_i \sum t_i^2 w_i - \sum t_i w_i \sum Y_i w_i t_i \\ \sum w_i \sum Y_i w_i t_i - \sum t_i w_i \sum Y_i w_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Это соответствует формулам (1.7) и (1.8).

Далее, по (2.50')

$$\begin{aligned} D(Y_k^*) &= \Delta'_k (\mathbf{T}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \Delta_k \sigma^2 = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ t_k \sum w_i & \sum t_i w_i \end{pmatrix} = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} (\sum t_i^2 w_i - 2t_k \sum t_i w_i + t_k^2 \sum w_i) = \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{\sum w_i} + \frac{\sum w_i \left(\frac{1}{\sum w_i} \sum t_i w_i - t_k \right)^2}{\sum w_i \sum t_i^2 w_i - (\sum t_i w_i)^2} \right). \end{aligned}$$

Этим выражением уже воспользовались (см. формулу 1.19"). Формулы (1.21') и (1.22') теперь следуют из (2.52') и (2.53') и полученного выражения для $D(Y_k^*)$.

2.6. Проверка корректности модели

Проверка степени соответствия имеющихся данных постулируемой модели (2.41) и (2.42) для общего случая проводится также как для случая одной сопутствующей переменной (см. раздел 1.6).

В частности, имеют место формулы (1.24), (1.25) и (1.26), представляющие сумму квадратов отклонений относительно среднего $R_2 = \Sigma (Y_i - \bar{Y})^2$ в виде двух составляющих: $R_p = \Sigma (Y_i^* - \bar{Y})^2$ — суммы квадратов, обусловленной регрессией, $R_0 = \Sigma (Y_i - Y_i^*)^2$ — суммы квадратов относительно регрессии. Конечно, для вычисления оценок Y_i^* в общем случае необходимо пользоваться формулой (2.43). Отношение R^2 , вычисляемое по формуле (1.27), служит количественной мерой точности регрессионной модели. Чем ближе оно к 1, тем модель точнее. Величина R называется *множественным коэффициентом корреляции*.

Из графических проверок наибольшее значение имеет исследование остатков

$$Y_i - Y_i^* = Y_i - \Delta_i' \beta^*, \quad (2.59)$$

где Δ_i' — i -ая строка матрицы T . График остатков может быть построен в зависимости от любого из следующих аргументов: номера наблюдений i ; прогнозируемой переменной Y_i^* ; каждой сопутствующей переменной $t^{(j)}$.

Если дисперсии всех наблюдений постоянны, как это следует из модели (2.42), то график остатков не должен иметь тенденции к изменению в зависимости от любого из перечисленных аргументов. Различные случаи, которые могут встретиться, были изображены на рис. 3 и рассмотрены в разд. 1.6.

Весьма важно проверить гипотезу о незначимости регрессии, т. е. равенстве нулю всех коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Критерием проверки является отношение

$$F = (n - m - 1) \frac{R_p}{R_0 m}, \quad (1.28')$$

а областью принятия гипотезы — интервал

$$[0; F^{-1}(p; m, n - m - 1)], \quad (1.29')$$

где p — доверительная вероятность (т. е. $1 - p$ — уровень значимости).

Предположим, что проведенные проверки не выявили расхождения между имеющимися данными и моделью. Может возникнуть сомнение в том, что все $m + 1$ коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ являются необходимыми для предсказания значения зависимой переменной Y . Это очень важно, поскольку введение каждой дополнительной переменной в модель вызывает дополнительные затраты, связанные со сбором статистических данных для оценки соответствующих коэффициентов и с получением значения этой переменной для прогнозируемой ситуации. Проверим, например, гипотезу о том, что $\beta_m = 0$, т. е. что m -я сопутствующая переменная не оказывает значимого влияния на зависимую переменную (незначима). Отметим, что m -я переменная выбрана лишь для простоты обозначений (путем перенумерации можно сделать любую переменную последней).

Гипотеза $\beta_m = 0$ может быть проверена двумя способами. По первому способу поступают так. Для параметра β_m находят оценку β_m^* и оценку дисперсии $D(\beta_m^*)$, равную $D^*(\beta_m^*) = c_{m+1, m+1}$. Здесь $c_{m+1, m+1}$ — элемент ковариационной матрицы C , стоящий на пересечении $(m+1)$ -й строки и $(m+1)$ -го столбца (см. формулу 2.49, где вместо неизвестной величины σ^2 следует подставить σ^{2*} , вычисляемую по формуле 2.48). В случае справедливости гипотезы $\beta_m = 0$ отношение $(\beta_m^*)^2 / D^*(\beta_m^*) = (\beta_m^*)^2 / c_{m+1, m+1}$ имеет распределение Фишера с одной и $n-m-1$ степенями свободы. Для доверительной вероятности p областью принятия гипотезы является интервал

$$[0; F^{-1}(p; 1, n-m-1)], \quad (2.60)$$

где $F^{-1}(p; 1, n-m-1)$ — квантиль распределения Фишера с 1 и $n-m-1$ степенями свободы, отвечающий вероятности p .

Второй способ проверки гипотезы $\beta_m = 0$ является более общим и применяется во многих других случаях. Гипотеза проверяется в два этапа. Вначале рассматривается модель регрессии, включающая все m сопутствующих переменных. Для этой модели находится сумма квадратов отклонений относительно регрессии $R_0 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$. На втором этапе рассматривается та же модель с условием $\beta_m = 0$, т. е. при наличии только $(m-1)$ -ой сопутствующей переменной. Для новой модели также находится сумма квадратов отклонений относительно регрессии, которую обозначим через R_0' . Критерием проверки гипотезы является отношение

$$\frac{(n-m-1)(R_0' - R_0)}{R_0}. \quad (2.61)$$

Если гипотеза верна, то этот критерий имеет распределение Фишера с 1 и $n-m-1$ степенями свободы $F(1; n-m-1)$. Областью принятия гипотезы при доверительной вероятности p будет интервал (2.60).

Может случиться, что следует проверить гипотезу о значимости сразу нескольких сопутствующих переменных. Для определенности положим, что таковыми являются l последних переменных $\beta_{m-l+1}, \dots, \beta_m$. Как и прежде, гипотезу проверяем в два этапа. Вначале вычисляем сумму квадратов отклонений от регрессии R_0 для полной модели с m сопутствующими переменными. Затем вычисляем эту же сумму для новой модели, содержащей только $m-l$ сопутствующих переменных. Обозначим последнюю сумму R_0' . Критерием проверки гипотезы $\beta_{m-l+1} = 0, \dots, \beta_m = 0$ при альтернативе отсутствия этих ограничений служит отношение

$$\frac{(n-m-1)(R_0' - R_0)}{lR_0}. \quad (2.62)$$

Если гипотеза верна, то это отношение имеет распределение Фишера с l и $n-m-1$ степенями свободы $F(l; n-m-1)$. Областью при-

нятия гипотезы для доверительной вероятности p будет интервал:

$$[0; F^{-1}(p; l, n - m - 1)]. \quad (2.63)$$

Рассмотренная гипотеза является частным случаем более общей линейной гипотезы. Последняя предполагает наличие l линейных соотношений между неизвестными коэффициентами модели $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ и описывается следующим образом. Пусть $\mathbf{H}$ — известная матрица порядка $l \times (m+1)$. Предполагается, что матрица $\mathbf{H}'\mathbf{H}$ является невырожденной и условие (2.42) выполнено. Необходимо проверить гипотезу $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\beta + \mathbf{Z}$ при ограничениях $\mathbf{H}\beta = 0$ при альтернативе $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\beta + \mathbf{Z}$ без всяких ограничений на параметры.

Последовательность проверки этой гипотезы такая же, как и прежде. Вначале рассматривается альтернатива и вычисляется остаточная сумма квадратов отклонений от регрессии $R_0 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$, затем рассматривается гипотеза. Ограничение $\mathbf{H}\beta = 0$ накладывает l независимых связей на неизвестные коэффициенты $\beta_0, \dots, \beta_m$. Используя их, можно выразить одни коэффициенты через другие и в результате вместо $m+1$ получить $m+1-l$ неизвестных коэффициентов. Соответственно этому вместо m будет $m-l$ сопутствующих переменных, а вместо матрицы $\mathbf{T}$ порядка $n \times (m+1)$ будет фигурировать некоторая другая матрица порядка $n \times (m+1-l)$. Решая теперь задачу наименьших квадратов для этих новых $m+1-l$ неизвестных коэффициентов, найдем остаточную сумму квадратов отклонений от регрессии, которую обозначим R_0' . Составим отношение (2.62). Если гипотеза верна, то отношение имеет распределение Фишера с l и $n-m-l$ степенями свободы $F(l; n-m-l)$. Областью принятия гипотезы является интервал (2.63).

Приведем пример. При рассмотрении задачи прогнозирования пассажирооборота по МГА естественно поставить следующий вопрос: являются ли все сопутствующие переменные значимыми, т. е. необходимыми для прогнозирования? Чтобы ответить на него, выпишем из ковариационной матрицы $\mathbf{C}$ (см. 2.49') значения оценок дисперсий оценок неизвестных коэффициентов:

$$D^*(\beta_0^*) = 44729,17; \quad D^*(\beta_1^*) = 16,54; \quad D^*(\beta_2^*) = 0,86; \quad D^*(\beta_3^*) = 0,01.$$

Сопоставление этих значений с оценками $\{\beta_i^*\}$ показывает, что наименьшее отношение $(\beta_i^*)^2/D^*(\beta_i^*)$ имеет оценка β_3^* . Поэтому проверим на незначимость коэффициент β_3 , т. е. гипотезу $\beta_3 = 0$. Для этого вычислим вначале отношение $(\beta_3^*)^2/D^*(\beta_3^*)$. Оно получается равным 0,25. Найдем теперь область принятия гипотезы (2.60). По табл. ПIV приложения имеем

$$F^{-1}(0,95; 1, n - m - 1) = F^{-1}(0,95; 1, 9) = 5,12.$$

Мы видим, что критерий попадает в интервал $(0; 5,12)$, так что гипотеза $\beta_3 = 0$ принимается.

Для проверки гипотезы $\beta_3 = 0$ можно следовать и второму способу. Рассмотрим для этого модель с двумя сопутствующими переменными: номером года и численностью населения. Расчеты, ана-

логичные приведенным, показывают, что в этом случае имеют место такие оценки:

$$\beta_0^* = 446,35; \beta_1^* = 12,87; \beta_2^* = -2,05;$$

$$R'_0 = 28,54; \sigma^{2*} = \frac{1}{13-1-2} 28,54 = 2,85;$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 10535,50 & 128,21 & -48,86 \\ 128,21 & 1,58 & -0,60 \\ -48,86 & -0,60 & 0,23 \end{pmatrix}.$$

Критерием проверки гипотезы $\beta_3=0$ является отношение (2.61):

$$\frac{(n-m-1)(R'_0 - R_0)}{R_0} = \frac{(13-3-1)(28,54 - 27,95)}{27,95} = \frac{0,59}{3,11} = 0,19.$$

Значения критериев в обоих случаях близки (разница объясняется ошибками округления).

Итак, можно ограничиться двумя сопутствующими переменными и в качестве оценок неизвестных коэффициентов принять 446,35; 12,87 и -2,05.

Посмотрим теперь, нельзя ли еще уменьшить число сопутствующих переменных. Оценки дисперсии найденных оценок — суть диагональные элементы матрицы C^* :

$$D^*(\beta_0^*) = 10535,50; D^*(\beta_1^*) = 1,58; D^*(\beta_2^*) = 0,23.$$

В данном случае наименьшее отношение $(\beta_i^*)^2/D^*(\beta_i^*)$ имеет β_2^* , так что следует проверить гипотезу $\beta_2=0$. Вычисления показывают, что $(\beta_2^*)^2/D^*(\beta_2^*) = (-2,05)^2/0,23 = 18,3$. Сравним это значение критерия с тем, которое будет получаться по второму способу. Согласно этому способу для проверки гипотезы $\beta_2=0$ рассматривается модель с одной сопутствующей переменной — номером года.

В этом случае вычисления показывают, что:

$$\beta_0^* = 3,46; \beta_1^* = 7,47; R'_0 = 81,67; \sigma^{2*} = \frac{1}{13-1-1} 81,67 = 7,42;$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 2,57 & -0,29 \\ -0,29 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

Критерием проверки гипотезы $\beta_2=0$ является отношение (2.61)

$$\frac{(13-2-1)(81,67 - 28,54)}{28,54} = 18,62,$$

что практически совпадает с полученным ранее значением.

Так как $F^{-1}(0,95; 1,10) = 4,96$, то подсчитанное значение критерия не попадает в область принятия (0; 4,96) и гипотеза отклоняется. Следовательно, при прогнозировании необходимо учитывать две сопутствующие переменные: номер года и численность населения, т. е. применять формулу $Y_k^* = 446,35 + 12,87k - 2,05t_k^{(2)}$.

Источник	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Регрессия	R_p	m	R_p/m
Отклонение от регрессии	R_0	$n-m-1$	$R_0/(n-m-1)$
в том числе:			
чистая ошибка	R_e	n_e	R_e/n_e
неадекватность	$R_0 - R_e$	$n-m-1-n_e$	$(R_0 - R_e)/(n-m-1-n_e)$

Для 1975 г. это дает следующее значение прогноза:

$$Y_{1975}^* = 446,35 + 12,87 \cdot 15 - 2,05 \cdot 255 = 116,6.$$

Рассмотрение этого примера будет закончено в разд. 3.1.

Как и в одномерном случае, для проверки гипотезы об адекватности модели могут использоваться более сильные методы, если имеются повторяющиеся наблюдения. Повторяющимися считаются наблюдения, характеризующиеся одинаковыми значениями всех сопутствующих переменных $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)}$. В этом случае сумму квадратов относительно регрессии R_0 можно представить в виде двух составляющих, обусловленных чистой ошибкой R_e и неадекватностью модели $R_0 - R_e$. Дисперсионный анализ проводится, как это показано в табл. 8, аналогичной табл. 5 (последняя получается из нее при $m=1$). При этом остаются справедливыми формулы (1.30) — (1.33), приведенные для одномерного случая. Гипотеза об адекватности модели проверяется на основании формул, аналогичных (1.34) и (1.35):

$$\frac{n_e(R_0 - R_e)}{(n-m-n_e-1)R_e}; \quad (1.34')$$

$$(0; F^{-1}(p; n-m-n_e-1, n_e)). \quad (1.35')$$

При попадании критерия (1.34') в интервал (1.35') гипотеза принимается. Пример изложенного дисперсионного анализа дан в разд. 3.3.

Выше рассматривался случай одинаковых дисперсий, соответствующий модели (2.42). Предположим теперь, что эта модель заменяется на модель (2.54). Для того чтобы воспользоваться полученными результатами, необходимо провести следующие преобразования:

$$Y_i \rightarrow \sqrt{w_i} Y_i \text{ (т. е. } Y \rightarrow W^{-\frac{1}{2}} Y), \quad \Delta'_i \rightarrow \sqrt{w_i} \Delta'_i \text{ (т. е. } T \rightarrow W^{-\frac{1}{2}} T).$$

Для этих новых переменных будет справедливым все сказанное в настоящем разделе.

2.7. Алгоритм Жордана — Гаусса

В изложенных процедурах наибольшие вычислительные трудности вызывает нахождение обратной матрицы $(T'T)^{-1}$ или, что эквивалентно, решение системы уравнений (2.45). В настоящем разделе изложим для этого простой алгоритм Жордана — Гаусса. Обозначим через A матрицу $T'T$, x — вектор неизвестных β и c — вектор $T'Y$, называемый вектором свободных коэффициентов. Используя эти обозначения, решим систему уравнений относительно x

$$Ax = c, \quad (2.64)$$

где A — невырожденная матрица порядка $n \times n$; c — вектор порядка n .

Напомним, что элемент a_{ij} означает элемент матрицы A , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, а c_i и x_i означают i -й элемент векторов c и x . Элементы $\{a_{ij}\}$ и $\{c_i\}$ предполагаются известными.

Запишем в развернутом виде матрицу A , справа от нее вектор c и еще правее единичную матрицу I порядка $n \times n$: $A|c|I$

$$\begin{array}{cccccccc|ccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & c_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} & c_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & c_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

В результате применения алгоритма Жордана-Гаусса получаем на месте матрицы A единичную матрицу I , на месте вектора c — решение x системы уравнений, на месте матрицы I — обратную матрицу A^{-1} . Обозначим расширенную матрицу B , а ее элементы b_{ij} . Алгоритм состоит из n шагов.

На первом шаге, просматривая элементы первого столбца матрицы A сверху вниз, останавливаемся на первом ненулевом элементе. Соответствующую этому элементу строку расширенной матрицы меняем местами с первой строкой. (Ясно, что если первый элемент $a_{11} = b_{11}$ первого столбца матрицы оказывается ненулевым, то перестановки делать не надо). Первый элемент первой строки объявляется *ведущим*. Делим все элементы первой строки на этот ведущий элемент b_{11} . Элементы любой другой i -ой строки преобразуются по формуле ($i = 2, 3, \dots, n$):

$$b_{ij}^{(1)} = b_{ij} - \frac{b_{1j}b_{i1}}{b_{11}} = b_{ij} - b_{1j}^{(1)}b_{i1}. \quad (2.65)$$

Здесь верхний индекс 1 обозначает элементы расширенной матрицы B после первого шага. Иными словами, из каждого элемента i -ой строки вычитается произведение соответствующего элемента первой строки $b_{1j}^{(1)}$, полученное после преобразования на данном шаге, и первого элемента i -й строки b_{i1} . В результате применения

этой операции ко всем строкам первый столбец, кроме первого элемента, равного 1, получается состоящим из нулей.

На втором шаге просматриваются сверху вниз элементы второго столбца, начиная со второй строки. Находится первый ненулевой элемент и объявляется ведущим. Если ведущий элемент не является элементом второй строки, то вторая строка меняется местами со строкой, которой принадлежит ведущий элемент. Все элементы второй строки делятся на ведущий элемент. Элементы i -й строки преобразуются по формуле ($i = 1, 3, 4, \dots, n$):

$$b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} - \frac{b_{2j}^{(1)} b_{i2}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} = b_{ij}^{(1)} - b_{2j}^{(2)} b_{i2}^{(1)}.$$

В результате все элементы второго столбца (за исключением второго элемента $b_{22}^{(2)} = 1$) оказываются равными нулю. Аналогичным образом происходят преобразования на других шагах. В качестве типового рассмотрим ν -й шаг.

Просматриваем, начиная с ν -го, элементы ν -го столбца сверху вниз. Останавливаемся на первом ненулевом элементе, который объявляем ведущим. Меняем местами, если это нужно, ν -ую строку и строку, к которой принадлежит ведущий элемент. Делим все элементы ν -ой строки на ведущий элемент. Все другие строки подвергаем преобразованию, кроме ν -ой. При этом элементы i -ой строки преобразуются по формуле

$$b_{ij}^{(\nu)} = b_{ij}^{(\nu-1)} - \frac{b_{\nu j}^{(\nu-1)} b_{i\nu}^{(\nu-1)}}{b_{\nu\nu}^{(\nu-1)}} = b_{ij}^{(\nu-1)} - b_{\nu j}^{(\nu)} b_{i\nu}^{(\nu-1)}, \quad (2.66)$$

т. е. из каждого элемента i -й строки вычитается величина: (соответствующий элемент ν -й строки, полученный после преобразования на данном шаге) $\times$ (ν -й элемент i -й строки).

В итоге все элементы ν -го столбца, кроме ν -го, получают равными нулю. На n -м шаге автоматически в качестве ведущего выбирается последний оставшийся диагональный элемент матрицы **A**. После деления n -й строки расширенной матрицы **B** на этот элемент и соответствующего преобразования матрицы процедура Жордана — Гаусса заканчивается. В итоге на месте матрицы **A** получаем матрицу **I**, на месте вектора **c** — решение **x** системы уравнений (2.64) и на месте матрицы **I** — обратную матрицу **A**⁻¹. Иными словами, вместо расширенной матрицы **A|c|I** получается матрица **I|x|A**⁻¹.

Может случиться, что на некотором шаге при просмотре соответствующего столбца не найдется ненулевого элемента, который можно объявить ведущим. Это значит, что матрица **A** является вырожденной и для нее не существует обратной матрицы. Последнее означает, что по крайней мере один столбец матрицы **T**, т. е. столбец значений некоторой сопутствующей переменной, может быть выражен через другие столбцы. Такая переменная в математической модели лишняя, поскольку вся информация, которую она мо-

жет дать, содержится в других сопутствующих переменных. Поэтому соответствующую переменную нужно или исключить из модели или несколько изменить ее значения, чтобы устранить вырожденность.

Отметим также, что если на некотором шаге при поиске ведущего элемента пришлось переставлять строки, то в исходной матрице сопутствующих переменных это соответствует перестановке аналогичных столбцов. Иными словами, это влечет перенумерацию сопутствующих переменных. В процессе процедуры Жордана — Гаусса удобно фиксировать все перестановки, с тем чтобы затем быстро перенумеровать эти переменные.

Приллюстрируем алгоритм Жордана — Гаусса на примере.

Найдем матрицу, обратную матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составляем расширенную матрицу **B**

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Здесь столбец свободных членов s отсутствует, поскольку не надо решать систему уравнений. Рассмотрим алгоритм Жордана — Гаусса по шагам.

Первый шаг. Так как в первом столбце ненулевым элементом является второй, то вначале переставляем первую и вторую строки:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ведущим элементом является 3. Делим все элементы первой строки на 3. Затем из каждого элемента второй (третьей) строки вычитаем произведение соответствующего элемента преобразованной первой строки и первого элемента второй (третьей) строки. В результате получаем матрицу

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}$$

Второй шаг. Ведущим элементом является 2. Делим вторую строку на 2, а из элементов первой (третьей) строки вычитаем чис-

ло $1/6$ ($-1/3$), умноженное на соответствующий элемент второй строки. В итоге находим

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/12 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/6 & -2/3 & 1 \end{array}$$

Третий шаг. После деления элементов третьей строки получаем искомую обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Умножением ее на исходную матрицу непосредственно убеждаемся, что она является обратной:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8. Две сопутствующие переменные

В заключение более подробно рассмотрим случай двух сопутствующих переменных. Для этого имеются две причины. Во-первых, после случая одной сопутствующей переменной он является наиболее важным. Во-вторых, для него еще можно выписать все результаты в явной форме, в то время как для большего числа переменных приходится обходиться результатами в матричных обозначениях (с использованием операции обращения матрицы и т. п.). Итак, постулируется математическая модель

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z. \quad (2.67)$$

Имеется n наблюдений $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, причем i -му наблюдению соответствуют значения сопутствующих переменных $t_i^{(1)}$ и $t_i^{(2)}$. Следовательно, i -ой строкой матрицы $\mathbf{T}$ будет $\Delta_i = (1 \ t_i^{(1)} \ t_i^{(2)})$. Произведение матриц $\mathbf{T}'$ и $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \begin{pmatrix} n & \sum t_i^{(1)} & \sum t_i^{(2)} \\ \sum t_i^{(1)} & \sum (t_i^{(1)})^2 & \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} \\ \sum t_i^{(2)} & \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} & \sum (t_i^{(2)})^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы (см. формулу 2.9)

$$\begin{aligned} |T'T| &= n \sum (t_i^{(1)})^2 \sum (t_i^{(2)})^2 + 2 \sum t_i^{(1)} \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} \sum t_i^{(2)} - \\ &- n (\sum t_i^{(1)} t_i^{(2)})^2 - \sum (t_i^{(2)})^2 (\sum t_i^{(1)})^2 - \sum (t_i^{(1)})^2 (\sum t_i^{(2)})^2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Обратная матрица вычисляется по формуле (2.10)

$$(T'T)^{-1} = \frac{1}{|T'T|} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

где $d_{11} = \sum (t_i^{(1)})^2 \sum (t_i^{(2)})^2 - (\sum t_i^{(1)} t_i^{(2)})^2$;

$$d_{12} = d_{21} = \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} \sum t_i^{(2)} - \sum t_i^{(1)} \sum (t_i^{(2)})^2;$$

$$d_{13} = d_{31} = \sum t_i^{(1)} \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} - \sum t_i^{(2)} \sum (t_i^{(1)})^2;$$

$$d_{23} = d_{32} = \sum t_i^{(1)} \sum t_i^{(2)} - n \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)};$$

$$d_{22} = n \sum (t_i^{(2)})^2 - (\sum t_i^{(2)})^2;$$

$$d_{33} = n \sum (t_i^{(1)})^2 - (\sum t_i^{(1)})^2.$$

Вектор $T'Y$ в транспонированном виде запишется так:

$$(T'Y)' = (\sum Y_i \quad \sum Y_i t_i^{(1)} \quad \sum Y_i t_i^{(2)}). \quad (2.70)$$

Умножая этот вектор на обратную матрицу $(T'T)^{-1}$, получаем оценки неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \beta_0^* &= \frac{1}{|T'T|} (d_{11} \sum Y_i + d_{12} \sum Y_i t_i^{(1)} + d_{13} \sum Y_i t_i^{(2)}); \\ \beta_1^* &= \frac{1}{|T'T|} (d_{21} \sum Y_i + d_{22} \sum Y_i t_i^{(1)} + d_{23} \sum Y_i t_i^{(2)}); \\ \beta_2^* &= \frac{1}{|T'T|} (d_{31} \sum Y_i + d_{32} \sum Y_i t_i^{(1)} + d_{33} \sum Y_i t_i^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Согласно формуле (2.49), оценка дисперсии β_i^* составит:

$$D^*(\beta_i^*) = \sigma^{2*} \frac{1}{|T'T|} d_{i+1, i+1}. \quad (2.72)$$

Аналогичным образом могут быть расписаны выражения (2.50) — (2.53). Поскольку численные значения элементов обратной матрицы $(T'T)^{-1}$ предполагаются известными, вычисления по этим формулам не представляют труда. При этом следует иметь в виду, что если $\Delta'_k = (1 \quad t_k^{(1)} \quad t_k^{(2)})$, то

$$\begin{aligned} \Delta'_k (T'T)^{-1} \Delta_k &= \frac{1}{|T'T|} d_{11} + 2d_{12} t_k^{(1)} + 2d_{13} t_k^{(2)} + d_{22} (t_k^{(1)})^2 + 2d_{23} t_k^{(1)} t_k^{(2)} + \\ &+ d_{33} (t_k^{(2)})^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Рассмотрим соответствующий пример.

2.9. Численный пример

В первой главе изучалась регрессия первоначальных отправок пассажиров из аэропорта Минск в случае одной сопутствующей переменной — номера года. Введем теперь в рассмотрение вторую сопутствующую переменную — численность населения Минска в соответствующем году. Обозначим $t_i^{(1)}$ номер года (принимая 1961 г. за первый год), $t_i^{(2)}$ численность населения в i -м году, тыс. чел. Значения $t_i^{(1)}$ и $t_i^{(2)}$, а также фактические значения отправок пассажиров Y_i , приведены в табл. 9. В ней отражены также порядок и промежуточные результаты вычислений. С помощью последних получаем:

$$d_{11} = 650 \cdot 7\,365\,873 - (65\,684)^2 = 478\,782 \cdot 10^4 - 431\,439 \cdot 10^4 = 473\,430 \cdot 10^3;$$

$$d_{12} = 65\,684 \cdot 9\,267 - 78 \cdot 7\,365\,873 = 608\,694 \cdot 10^3 - 285\,381 \cdot 10^4 = 341\,555 \cdot 10^2;$$

$$d_{13} = 78 \cdot 65\,684 - 9267 \cdot 650 = 512\,335 \cdot 10^1 - 602\,355 \cdot 10^1 = -900\,198;$$

$$d_{23} = 78 \cdot 9\,267 - 12 \cdot 65\,684 = 722\,826 - 788\,208 = -65\,382;$$

$$d_{22} = 12 \cdot 7\,365\,873 - (9267)^2 = 883\,905 \cdot 10^2 - 858\,773 \cdot 10^2 = 2\,513\,190;$$

$$d_{33} = 12 \cdot 650 - 78^2 = 780\,000 \cdot 10^{-2} - 608\,400 \cdot 10^{-2} = 1716.$$

$$|T'T| = 12 \cdot 650 \cdot 7\,365\,873 + 2 \cdot 78 \cdot 65\,684 \cdot 9\,267 - 12 \cdot (65\,684)^2 -$$

$$- 7\,365\,873 \cdot (78)^2 - 650 \cdot (9267)^2 = 574\,538 \cdot 10^5 +$$

$$+ 949\,562 \cdot 10^5 - 517\,727 \cdot 10^5 - 448\,140 \cdot 10^5 - 558\,202 \cdot 10^5 = 3\,151\,910.$$

Таблица 9

Вычислительная таблица

$i=t_i^{(1)}$	$(t_i^{(1)})^2$	$t_i^{(2)}$	$(t_i^{(2)})^2$	$t_i^{(1)} \quad t_i^{(2)}$	Y_i	$t_i^{(1)} Y_i$	$t_i^{(2)} Y_i$
1	1	570	324 900	570	118	118	67 260
2	4	599	358 801	1 198	170	340	101 830
3	9	644	414 736	1 932	213	639	137 172
4	16	688	473 344	2 752	227	908	156 176
5	25	717	514 089	3 585	285	1 425	204 345
6	36	749	561 001	4 494	340	2 040	254 660
7	49	772	595 984	5 404	388	2 716	299 536
8	64	818	669 124	6 544	479	3 832	391 822
9	81	842	708 964	7 578	572	5 148	481 624
10	100	917	840 889	9 170	624	6 240	572 208
11	121	955	912 025	10 505	681	7 491	650 355
12	144	996	992 016	11 952	744	8 928	741 024

$\sum_{i=78} t_i^{(1)} =$	$\sum_{i=650} (t_i^{(1)})^2 =$	$\sum_{i=9267} t_i^{(2)} =$	$\sum_{i=7\,365\,873} (t_i^{(2)})^2 =$	$\sum_{i=65\,684} t_i^{(1)} \times t_i^{(2)} =$	$\sum_{i=4841} Y_i =$	$\sum_{i=39\,825} t_i^{(1)} \times Y_i =$	$\sum_{i=4\,058\,012} t_i^{(2)} \times Y_i =$
---------------------------	--------------------------------	-----------------------------	--	---	-----------------------	---	---

$$\beta_0^* = \frac{1}{3\,151\,910} (473\,430 \cdot 10^3 \cdot 4841 + 341\,555 \cdot 10^2 \cdot 39\,825 - 900\,198 \cdot 4\,058\,012) =$$

$$= \frac{-896\,869 \cdot 10^3}{3\,151\,910} = -284,55.$$

$$\beta_1^* = \frac{1}{3\,151\,910} (341\,555 \cdot 10^2 \cdot 4841 + 2\,513\,190 \cdot 39\,825 - 65\,382 \cdot 4\,058\,012) =$$

$$= \frac{113\,627 \cdot 10^3}{3\,151\,910} = 36,05;$$

$$\beta_2^* = \frac{1}{3\,151\,910} (-900\,198 \cdot 4841 - 65\,382 \cdot 39\,825 + 1\,716 \cdot 4\,058\,012) =$$

$$= \frac{185\,192}{315\,191} = 0,588.$$

Итак, прогноз первоначальных отправок пассажиров из аэропорта Минск на k -й год определяется выражением

$$Y_k^* = -284,55 + 36,05 t_k^{(1)} + 0,588 t_k^{(2)}, \quad (2.74)$$

где $t_k^{(1)} = k$ — номер прогнозируемого года (для 1961 г. $k=1$);
 $t_k^{(2)}$ — численность населения Минска в k -м году, тыс. чел.

Порядок вычисления оценки дисперсии σ^2 (см. формулу 2.48) отражен в табл. 10. Оценка

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{12 - 2 - 1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \Delta_i' \beta^*)^2 = \frac{1}{9} 8177,38 = 908,6.$$

Таблица 10

Оценка дисперсии

$i = t_i^{(2)}$	$t_i^{(1)} \beta_1^*$	$t_i^{(2)}$	$t_i^{(2)} \beta_2^*$	Y_i^*	$Y_i^* - Y_i$	$(Y_i^* - Y_i)^2$
1	36,05	570	335,16	86,66	-31,34	982,20
2	72,10	599	352,21	139,76	-30,24	914,46
3	108,15	644	378,67	202,27	-10,73	115,13
4	144,2	688	404,54	264,19	37,19	1383,10
5	180,25	717	421,60	316,05	31,05	964,10
6	216,3	749	440,41	372,16	32,16	1034,27
7	252,35	772	453,94	421,74	33,74	1138,39
8	288,4	818	480,98	484,83	5,83	33,99
9	324,45	842	495,10	535	-37	1369
10	360,5	917	539,20	615	-9	81
11	396,55	955	561,54	673,54	-7,46	55,65
12	432,7	996	585,65	733,7	-10,3	106,09
Σ	2811,9	9267	5449,00	4842,9	1,9	8177,38

Согласно формуле (2.72), оценки дисперсий β_i^* будут:

$$D^*(\beta_0^*) = \frac{908,6}{3\ 151\ 910} 473430 \cdot 10^3 = 132560,4;$$

$$D^*(\beta_1^*) = \frac{908,6}{3\ 151\ 910} 2\ 513\ 190 = 703,69;$$

$$D^*(\beta_2^*) = \frac{908,6}{3\ 151\ 910} 1716 = 0,48.$$

По формуле (2.60) вычисляем область принятия гипотезы о незначимости коэффициентов регрессии.

При $p=0,95$ и $n-m-1=12-2-1=9$ по табл. ПIV находим, что $F^{-1}(0,95; 1; 9) = 5,12$. Следовательно, область принятия есть интервал $(0; 5,12)$.

Критерием проверки является отношение $(\beta_i^*)^2/D^*(\beta_i^*)$. В нашем случае

$$(\beta_1^*)^2/D^*(\beta_1^*) = \frac{(36,05)^2}{703,69} = 1,85;$$

$$(\beta_2^*)^2/D^*(\beta_2^*) = \frac{(0,588)^2}{0,48} = 0,72.$$

Эти значения попадают в область принятия, так что по крайней мере одна из сопутствующих переменных является незначимой. В качестве такой следует принять вторую, поскольку значение критерия для нее меньше.

Проверку гипотезы $\beta_2=0$ можно провести и другим способом, который был описан в разд. 2.6. Если учитывать только первую сопутствующую переменную, то остаточная сумма квадратов $R_0' = 8885,82$, как это было вычислено в табл. 4. Для двух рассматриваемых сопутствующих переменных $R_0 = 8177,38$. По формуле (2.61) находим

$$\frac{(n-m-1)(R_0' - R_0)}{R_0} = \frac{9 \cdot 708,44}{8177,38} = 0,78.$$

Это значение отличается несколько от подсчитанного ранее и равного 0,72 за счет ошибок округления.

Несмотря на то, что каждый из коэффициентов по отдельности является незначимым, делать вывод о том, что оба они одновременно незначимы, нельзя. Для проверки гипотезы $\beta_1 = \beta_2 = 0$ следует применить критерий (1.28'). Вычисления, однако, производить излишне, поскольку зависимость отправок от номера года очевидна.

Итак, при прогнозировании достаточно учитывать одну сопутствующую переменную — номер года. Этот случай уже рассматривался в гл. I.

3.1. Общие положения

В первых главах были изложены теоретические основы регрессионного анализа. Приводились численные примеры для иллюстрации элементов теории и технических приемов вычислений (например, неизвестных коэффициентов регрессии, обратной матрицы и т. п.). При этом ограничились рассмотрением простых задач прогнозирования, основанных на простых регрессионных моделях. Однако характер применения регрессионных методов далеко не исчерпывается рассмотренными задачами. Регрессионные методы являются мощным оружием анализа и планирования различных аспектов производственно-хозяйственной деятельности предприятий гражданской авиации. Читатель должен научиться распознавать в конкретных практических ситуациях задачи регрессии и правильно их формулировать.

Успешность применения регрессионных методов определяется двумя основными факторами. Во-первых, грамотной экономической постановкой задачи. Во-вторых, степенью соответствия предлагаемой регрессионной модели реальной ситуации. Остановимся на этих факторах подробнее.

После постановки задачи получаем исходные предпосылки и данные для построения модели. Некоторые из них выступают в дальнейшем как достоверные и не могут быть опровергнуты в рамках модели, если даже они не верны. Естественно, что ошибочные предпосылки приведут и к ошибочным выводам, какую бы искусственную математическую модель не применяли.

При построении регрессионной модели для зависимой переменной Y в первую очередь необходимо учитывать, что некоторые ее составляющие могут быть определены методом прямого счета. Иными словами, эти составляющие могут быть с большой степенью точности вычислены по формулам, отражающим существующие детерминированные соотношения или закономерности. В качестве примера приведем калькуляцию себестоимости продукции в экономике. Обозначим V^* сумму таких составляющих, вычисляемую по известным формулам. С другой стороны имеются составляющие, для которых подобные формулы предложить нельзя. Это может быть вызвано или необходимостью учета большого количества влияющих факторов, или наличием случайных составляющих, не поддающихся детерминированному описанию. Для анализа таких составляющих и следует использовать регрессионный анализ. Следовательно, целью регрессионного анализа в рассматриваемом случае должно явиться нахождение зависимости для разности $Y - V^*$, а не для Y .

Примером составляющей себестоимости, не поддающейся детерминированному расчету, могут служить косвенные аэропортовые расходы. Здесь известна только общая сумма косвенных аэро-

портовых расходов, а также количество самолето-вылетов по типам самолетов. Задача состоит в оценке косвенных аэропортовых расходов, приходящихся на один вылет (прилет) самолета данного типа.

При постановке задачи особое внимание следует уделять выбору сопутствующих переменных. Последними должны быть такие переменные, влияние которых на зависимую переменную обуславливалось бы действительными экономическими закономерностями, а не побочными или второстепенными явлениями. Часто в качестве сопутствующих переменных выбирают такие переменные, которые имеют наибольший эмпирический коэффициент корреляции с зависимой переменной, вычисляемый по формуле (2.20). Этот путь допустим только в том случае, если при этом не нарушается сформулированное в предыдущем предложении требование. Действительно, большой коэффициент корреляции может быть обусловлен не реальным влиянием данной сопутствующей переменной на зависимую переменную, а зависимостью этой сопутствующей переменной от другой сопутствующей переменной, которая и является настоящей причиной обнаруженного влияния.

В статистической теории любые две сопутствующие переменные выступают в симметричной форме (в том смысле, что ковариация $t^{(1)}$ с $t^{(2)}$ и, наоборот, ковариация $t^{(2)}$ с $t^{(1)}$ одинаковы и что не делается различия, какая из них в действительности является зависимой от другой). Действительная зависимость должна быть установлена на основе физических соображений и является предметом инженерных и экономических, а не математической дисциплин. В силу изложенного следует делать различие между статистической зависимостью, измеряемой коэффициентами корреляции, и физической зависимостью. Понимание этого факта позволяет избежать кажущихся осложнений. В связи с этим нападки на статистическую теорию типа «согласно статистике зонты влияют на урожай» свидетельствуют не о недостатках статистики, а о некомпетентности говорящих.

При использовании регрессионных моделей необходимо быть уверенным, что и в будущем сохраняются отраженные в ней закономерности. Следует отметить, что область применения модели может быть расширена за счет введения дополнительных сопутствующих переменных. Часто они носят характер фиктивных переменных. Соответствующие примеры будут рассмотрены в разд. 3.2 и 3.3. Основная трудность, связанная с введением дополнительных переменных, состоит в необходимости оценки новых коэффициентов при этих переменных. Это, как правило, требует увеличения объема статистики и приводит к усложнению расчетов.

Для того чтобы метод наименьших квадратов давал оптимальные оценки, необходимо учитывать различные дисперсии (достоверности) отдельных наблюдений. Соблюдение этого условия является одним из важнейших для корректности модели.

Выше все время рассматривались модели, являющиеся линейными относительно параметров. Наряду с этим можно предложить модели, нелинейные относительно параметров. Конкретный вид

постулируемой зависимости может быть обусловлен или подсказан инженерными или экономическими соображениями. Некоторые из нелинейных моделей с помощью подходящего преобразования могут быть сведены к линейным моделям. Например, модель $Y = \exp(\beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z)$ в результате логарифмирования приводится к модели $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z$.

Если обозначить новую зависимую переменную $V = \ln Y$, то линейный вид зависимости будет совершенно очевиден: $V = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z$. В предположении, что Z имеет нулевое математическое ожидание, можно использовать метод наименьших квадратов.

Сводка некоторых моделей, которые могут быть сведены к линейным, содержится в табл. 11.

Для корректности применения метода наименьших квадратов к таким моделям необходимо быть уверенным, что случайная составляющая должна присутствовать в модели в таком виде, что после преобразования она суммируется с остальными слагаемыми и имеет нулевое математическое ожидание.

Для этого, в частности, в модели 1 табл. 11 необходимо, чтобы в исходной модели она была сомножителем, логарифм которой имеет нулевое математическое ожидание.

При использовании преобразований следует отчетливо сознавать, что в результате применения метода наименьших квадратов мы получаем наилучший прогноз не первоначальной зависимой переменной Y , а новой зависимой переменной V . Прогноз Y^* , получающийся после перехода от V обратно к Y , получается смещенным и, следовательно, не оптимальным.

Т а б л и ц а 11

Преобразование моделей

№ модели	Исходная модель	Преобразованная модель
1	$Y = \beta_0 (t^{(1)})^{\beta_1} (t^{(2)})^{\beta_2} Z$	$V = \ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln t^{(1)} + \beta_2 \ln t^{(2)} + \ln Z$
2	$Y = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z}$	$V = \frac{1}{Y} = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z$
3	$Y = \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + Z}}$	$V = \ln \left(\frac{1}{Y} - 1 \right) = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + Z$
4	$Y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + Z$	$Y = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + \beta_2 t^{(2)} + Z,$ где $t^{(1)} = t, \quad t^{(2)} = t^2$
5	$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t} + Z$	$Y = \beta_0 + \beta_1 t^{(1)} + Z,$ где $t^{(1)} = \frac{1}{t}$

В заключение остановимся на экспертной оценке качества формул, полученных в результате регрессионного анализа. Такая оценка необходима, поскольку она позволяет вскрыть противоречие формул физическому или экономическому смыслу исследуемых зависимостей. Причиной этих ошибок является то, что регрессионный метод обеспечивает наилучшее сглаживание имеющихся данных. При этом может, конечно, оказаться, что оценка коэффициента при некотором факторе получится со знаком, обратным тому, который следует из физических соображений. Это обстоятельство не является существенным, если использовать полученную формулу только для целей сглаживания данных. Если же целью является прогнозирование, то это может привести к существенным ошибкам. В этом случае следует выявить причину полученного результата, отбросить данную формулу и искать другую, свободную от указанного недостатка.

В качестве примера рассмотрим полученную в разд. 2.6 регрессионную зависимость годового пассажирооборота по МГА Y_k^* от номера года k и численности населения страны $t_k^{(2)}$. Коэффициент при $t_k^{(2)}$ получается отрицательным и равным $-2,05$. Естественно, это противоречит физическому смыслу исследуемой зависимости. Попробуем выяснить причину противоречия.

Согласно табл. 7, годовой прирост численности населения с 1969 по 1972 г. составлял 2 млн. чел. Годовой прирост пассажирооборота по МГА за это же время колебался от 6,7 до 10,6 млрд. пасс-км. Соответствующие цифры за 1972—1973 гг. составили 3 млн. чел. и 2,9 млрд. пасс-км. Следовательно, большему приросту численности здесь соответствует меньший прирост пассажирооборота. Этим, очевидно, и обусловлена полученная отрицательная зависимость между пассажирооборотом и численностью населения.

Отметим, что 1973 г. не является типичным годом для Аэрофлота. Малый прирост пассажирооборота в этом году объясняется рядом объективных факторов (списание самолетов, непоставка новых самолетов и т. п.). Поэтому для получения правильной зависимости данные за 1973 г. в расчетах учитывать не следует. Если использовать данные за 1965—1972 гг., то получается следующая регрессионная зависимость:

$Y_k^* = -135 + 6,66k + 0,62t_k^{(2)}$, где, как и ранее для 1961 г. $k=1$, размерность Y^* — млрд. пасс-км, $t^{(2)}$ — млн. чел.

Вычисленный по этой формуле прогноз на 1975 г. составляет 123 млрд. пасс-км. Если исходить из прогноза численности населения страны на 1980 г. $t_k^{(2)} = 268$ млн. чел., то прогноз пассажирооборота составит 164,4 млрд. пасс-км. По всей видимости этой формулой и следует пользоваться для прогнозирования.

3.2. Прогнозирование объемов авиационных перевозок

Задачи прогнозирования объемов отправок пассажиров из аэропорта и общего пассажирооборота в целом по МГА рассматривались в процессе изложения регрессионного метода. При этом была проиллюстрирована техника вычислений и составления прогноза.

Остановимся на некоторых методологических вопросах прогнозирования.

При применении регрессионных методов для целей прогнозирования могут быть использованы индивидуальные и групповые модели. Первые заключаются в изолированном рассмотрении объекта прогнозирования (аэропорта, авиасвязи, например Москва — Новосибирск, УГА и т. п.), вторые — в рассмотрении его совместно с другими объектами.

Индивидуальный прогноз возможен, если в будущем не ожидается воздействие факторов, эффект которых не может быть оценен по статистическим данным, относящимся к рассматриваемому объекту (т. е. таких факторов, которые не действовали на объект ранее). В этом случае можно ограничиться только статистикой по данному объекту.

При групповом подходе общую совокупность объектов часто оказывается целесообразным разбить на однородные (в смысле некоторых признаков) совокупности. Такими признаками могут быть принадлежность объектов к одинаковым климатическим или географическим зонам и т. п.

В этом случае регрессионный метод применяется для каждой однородной совокупности по отдельности.

Групповой подход позволяет оценить влияние на прогнозируемую величину для данного объекта факторов, которые не действовали на этот объект ранее. Оценим, например, влияние на увеличение объема перевозок пассажиров введения прямой связи (т. е. беспересалочного авиарейса). Для этого необходимо ввести в качестве сопутствующей фиктивную переменную, равную 0, если прямой связи для выбранного авианаправления в данном году нет, и 1 — в противном случае. Рассматривая группу направлений, часть из которых в некоторое время имела прямую связь, а часть — нет, можно оценить неизвестный коэффициент при этой фиктивной переменной. Его величина и служит оценкой увеличения перевозок в результате введения прямой связи.

Рассмотрим иллюстративный пример для трех направлений. Предположим, что имеется статистика пассажирских перевозок по ним за 5 лет. Известно также, что для первого направления авиасвязь была введена на 3-м году, во втором — имелась все 5 лет, а в третьем — прямой связи не было. В качестве сопутствующих переменных выберем номер года и фиктивную переменную, описанную выше. Всего имеется 15 наблюдений. Если отнести первые пять наблюдений к первому направлению, следующие пять — ко второму и последние пять — к третьему, то матрица сопутствующих переменных T' (вместе со столбцом из единиц, соответствующим свободному члену уравнения регрессии) будет иметь вид

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Если для третьего направления предполагается ввод, например, к шестому году прямой авиасвязи, то наблюдения, соответствующие матрице T , позволяют оценить увеличение пассажирских отправок. Прогноз отправок будет при этом вычислен по формуле

$$Y_{6,3}^* = \beta_0^* + \beta_1^* 6 + \beta_2^*, \quad (3.1)$$

в то время как при отсутствии прямой авиасвязи он оценивался бы по формуле

$$Y_{6,3}^* = \beta_0^* + \beta_1^* 6.$$

Предположим, что зарегистрированные значения отправок для первого, второго и третьего направлений соответственно будут (в тыс. пасс.): 16, 17, 20, 22, 23; 19, 21, 22, 23, 25; 13, 15, 16, 17, 18.

Найдем оценки коэффициентов формулы (3.1). Так как $n=15$,

$$\sum t_i^{(1)} = 45; \sum t_i^{(2)} = \sum (t_i^{(2)})^2 = 8; \sum (t_i^{(1)})^2 = 165; \sum t_i^{(1)} t_i^{(2)} = 27,$$

то по формуле (2.68) находим:

$$\begin{aligned} (T'T) &= 15 \cdot 165 \cdot 8 + 2 \cdot 45 \cdot 27 \cdot 8 - 15 \cdot (27)^2 - 8 \cdot (45)^2 - 165 \cdot 8^2 = \\ &= 19\,800 + 19\,400 - 10\,935 - 16\,200 - 10\,560 = 1545. \end{aligned}$$

Теперь из формулы (2.69) следует:

$$d_{11} = 165 \cdot 8 - 729 = 1320 - 729 = 591;$$

$$d_{12} = 27 \cdot 8 - 45 \cdot 8 = 216 - 360 = -144;$$

$$d_{13} = d_{31} = 45 \cdot 27 - 8 \cdot 165 = 1215 - 1320 = -105;$$

$$d_{23} = d_{32} = 45 \cdot 8 - 15 \cdot 27 = 360 - 405 = -45;$$

$$d_{22} = 15 \cdot 8 - 8^2 = 120 - 64 = 56;$$

$$d_{33} = 15 \cdot 165 - 2025 = 450.$$

$$(T'T)^{-1} = \frac{1}{1545} \begin{pmatrix} 591 & -144 & -105 \\ -144 & 56 & -45 \\ -105 & -45 & 450 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения оценок $\{\beta_i^*\}$ применяем формулу (2.71):

$$\beta_0^* = \frac{1}{1545} (591 \cdot 287 - 144 \cdot 906 - 105 \cdot 175) = \frac{20\,778}{1545} = 13,45;$$

$$\beta_1^* = \frac{1}{1545} (-144 \cdot 287 + 56 \cdot 906 - 45 \cdot 175) = \frac{1533}{1545} = 0,99;$$

$$\beta_2^* = \frac{1}{1545} (-105 \cdot 287 - 45 \cdot 906 + 450 \cdot 175) = \frac{7845}{1545} = 5,06.$$

Итак, прогноз перевозок по третьей связи на 6-й год составит $Y_{6,3}^* = 13,45 + 0,99 \cdot 6 + 5,06 = 24,45$.

Если бы прямая связь не вводилась, то прогноз составил бы $Y_{6,3}^* = 19,39$.

Следовательно, величина скачка пассажирских перевозок за счет ввода прямой связи оценивается в 5060 человек.

Обсудим теперь вопросы, касающиеся выбора самого прогнозируемого показателя. Важно подчеркнуть, что часто целесообразно перейти от интересующего нас показателя к некоторой функции от него. Цель такого перехода состоит в том, чтобы обеспечить постулаты, лежащие в основе регрессионного анализа: равенство нулю случайной составляющей Z и постоянство дисперсий (см. формулу 2.39).

Остановимся вначале на индивидуальных моделях. При прогнозировании пассажирских отправок из аэропорта Минск была использована модель (2.67), где $t_i^{(1)} = i$ — номер года, $t_i^{(2)} = h_i$ — численность населения города в i -ом году. Эта модель не является вполне корректной, поскольку с ростом номера года растут отправки и, очевидно, дисперсия их, так что условие равенства дисперсий нарушено. Более правильно считать дисперсию отправок в i -ом году пропорциональной численности населения города h_i . Это приводит к случаю неравноточности данных, описанному в разд. 2.5 при $w_i = h_i^{-1}$. Для правильного оценивания неизвестных коэффициентов $\{\beta_i\}$ необходимо предварительно разделить уравнение (2.67) на $\sqrt{h_i}$, что приводит к зависимости

$$Y_i / \sqrt{h_i} = h_i^{-\frac{1}{2}} \beta_0 + i h_i^{-\frac{1}{2}} \beta_1 + h_i^{\frac{1}{2}} \beta_2 + Z_i, \quad E(Z_i) = 0, \quad D(Z_i) = \sigma^2. \quad (3.2)$$

Полагая $V_i = Y_i / h_i$, приходим к стандартной модели регрессии.

При прогнозировании перевозок Y_i по отдельной авиасвязи на i -ый год модель $Y_i = \beta_0 + i\beta_1 + Z_i$ является также самой простейшей. Если в течение периода времени, за который имеется статистика, имело место воздействие важных факторов, то это должно быть отражено в модели. Рассмотрим, например, статистику авиационных перевозок пассажиров по направлению Челябинск — Казань с 1963 по 1971 г. за август, чел.: 440; 524; 660; 849; 975; 1267; 1328; 1460; 1470. Если построить график этого временного ряда, то обнаружится, что в 1968 г. был «скачок» авиаперевозок. Это объясняется тем, что в данном году была введена прямая авиасвязь по этому направлению. Ясно, что если введение прямой авиасвязи не учитывать, то прогноз перевозок окажется сильно завышенным. Для учета этого фактора введем сопутствующую переменную $t_i^{(2)}$, равную 1 или 0, судя по тому, была ли в i -ом году прямая авиасвязь или нет. В этом случае перевозки в i -ом году прогнозируются по формуле $Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* i + \beta_2^* t_i^{(2)}$. Матрица сопутствующих переменных для 1963—1971 гг. имеет вид

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь следует применить процедуру регрессионного анализа в случае двух сопутствующих переменных, изложенную в разд. 2.8.

При прогнозировании на i -й год перевозок по связям необходимо также учитывать, что дисперсии перевозок непостоянны. Для этого можно исходить из модели

$$Y_i = h_i^{(1)} h_i^{(2)} (\beta_0 + \beta_1 i) + Z_i, \quad D(Z_i) = \sigma^2 h_i^{(1)} h_i^{(2)},$$

где $h_i^{(1)}$ и $h_i^{(2)}$ — численности населения первого и второго города связи.

Наличие произведения $h_i^{(1)} h_i^{(2)}$ исходит из предположения о том, что объем перевозок между городами определяется возможностью общения каждого жителя одного города с каждым жителем другого города. Переходя к зависимой переменной

$$V_i = Y_i / \sqrt{h_i^{(1)} h_i^{(2)}},$$

приходим к стандартной модели с постоянной дисперсией случайной составляющей Z :

$$V_i = Y_i / \sqrt{h_i^{(1)} h_i^{(2)}} = (h_i^{(1)} h_i^{(2)})^{\frac{1}{2}} (\beta_0 + \beta_1 i) + Z_i, \quad D(Z_i) = \sigma^2.$$

Остановимся теперь на групповых моделях. В данном случае число сопутствующих переменных должно быть больше, чем в случае индивидуальных моделей. Это объясняется тем, что ранее модель применялась только для одного объекта, а теперь — для многих. Поэтому в нее необходимо ввести переменные (факторы), отражающие особенности одного объекта по сравнению с другими.

Рассмотрим вначале групповую модель для прогнозирования на i -й год отправок из аэропорта следующего вида:

$$Y_i = h_i \left(\beta_0 + i\beta_1 + \sum_{j=2}^m \beta_j t_i^{(j)} \right) + Z_i, \quad D(Z_i) = h_i \sigma^2, \quad (3.3)$$

где h_i — численность населения города в i -ом году; $\beta_0, \beta_1, \dots$ — неизвестные коэффициенты; $t_i^{(2)}, t_i^{(3)}, \dots$ — дополнительные сопутствующие переменные.

В качестве сопутствующих переменных могут фигурировать такие факторы, как принадлежность города к выделенным климатическим зонам, к курортам, к столицам республик, промышленным или транспортным центрам и пр., объем валовой продукции города и т. п. Большинство из этих факторов являются качественными, а соответствующие переменные — булевыми. Последними называются переменные, принимающие два значения: 0, если город не принадлежит данной группе, и 1, если принадлежит. Соответствующие этим переменным неизвестные коэффициенты оцениваются для всей рассматриваемой группы городов.

Отметим, что если введенных факторов оказывается недостаточно для получения точной модели, то следует ввести и произведение

факторов. Например, для города-курорта естественнее предполагать не постоянную величину приращения отправок (по сравнению с некурортом), а зависящую от номера года. Тогда, если признаку «курорт» соответствует переменная $t_i^{(3)}$, то следует дополнительно ввести в модель переменную $t_i^{(4)} = it_i^{(3)}$.

В качестве примера приведем групповую модель для прогнозирования первоначальных отправок пассажиров из аэропортов. Эта модель была разработана И. Е. Швацким на базе автоматизированной подсистемы перспективного планирования развития ГА (АСУ «Перспектива»).

Первоначально в модели рассматривалось 190 аэропортов, характеризующихся наибольшими отправками. Качество такой модели, измеряемое оценкой среднеквадратического отклонения σ^* , оказалось невысоким. Поэтому для выявления причины данного обстоятельства был проведен экспертный анализ. Анализ установил, что общую картину существенно ухудшали несколько аэропортов, фактические значения отправок из которых были значительно меньше рассчитанных по модели. Такими оказались аэропорты, которые имеют: явно недостаточную пропускную способность (Орджоникидзе, Оренбург), рядом расположенные более крупные аэропорты (Жданов и Донецк) и т. п. Так как целью исследования являлось установление общих закономерностей, то из рассмотрения было исключено 45 аэропортов, имеющих отмеченные особенности.

В итоге осталось 145 аэропортов, по которым и обрабатывалась статистика с 1960 по 1974 г. Всего имелось 1800 наблюдений (по некоторым аэропортам временный ряд оказался неполным). Простейшая групповая модель для прогнозирования первоначальных отправок пассажиров из аэропорта за год имела вид

$$Y_i^* = h_i (2,52 + 0,542i - 0,00386h_i),$$

где i — номер года (для 1960 г. $i=1$); h_i — численность населения города в i -ом году, десятки тыс. чел.; Y_i^* — прогноз отправок пассажиров, тыс. чел.

Оценка среднеквадратического отклонения σ^* равнялась 4,9 (отметим, что для первоначальной совокупности в 190 аэропортов эта оценка составляла 18, т. е. была значительно больше). Для уменьшения σ^* было введено произведение факторов i и h_i , т. е. третья сопутствующая переменная $t_i^{(3)} = ih_i$. Физический смысл ее состоит в том, что на отправки влияет не столько численность населения города сама по себе, сколько произведение: (численность населения) $\times$ (реальный доход на душу населения), а реальный доход зависит от времени практически линейно.

Полученная формула имела вид:

$$Y_i^* = h_i (2,0538 + 0,5378i - 0,0019h_i - 0,000163ih_i),$$

причем оценка σ^* составила 4,4.

Отметим, что в обеих моделях сопутствующие переменные оказались значимыми. Кроме величины σ^* , качество модели может

измеряться также средней относительной ошибкой, вычисляемой по формуле

$$\frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i^* - Y_i) / Y_i,$$

где Y_i — фактическое значение отправок.

Для первоначальной совокупности в 190 аэропортов эта ошибка составляла 59%, а для двух вышерассмотренных моделей соответственно 39 и 38%, по данным за 1974 г. Все эти модели обеспечивают хорошую точность и могут с успехом применяться на практике.

Из групповых моделей для прогнозирования перевозок пассажиров по авиасвязям наиболее популярна так называемая «гравитационная» модель. Перевозки пассажиров по связи согласно этой модели оцениваются формулой

$$Y_i = (h_i^{(1)} h_i^{(2)} / l)^{\beta_0 + \beta_1 i + Z_i}, \quad (3.4)$$

где i — номер года; $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ — численности населения первого и второго города связи соответственно в i -ом году; l — расстояние между городами;

$$E(Z_i) = 0, D(Z_i) = \sigma^2.$$

Для уточнения модели (3.4) в нее необходимо ввести дополнительные переменные, как это было сделано в модели (3.3). Можно также исходить из более сложной зависимости объема перевозок от расстояния между городами:

$$Y_i = (h_i^{(1)} h_i^{(2)})^{\beta_0 + \beta_1 i + Z_i} l^{\beta_2 + \beta_3 i}.$$

Оценка неизвестных коэффициентов получается путем предварительной линеаризации модели (см. разд. 3.1).

В заключение отметим, что если в планируемом периоде для рассматриваемого объекта не ожидается существенного изменения условий его функционирования, то следует пользоваться индивидуальными моделями, как более точными. В противных случаях используются групповые модели. При этом можно оценить соответствующий эффект по групповой модели и прибавить его к прогнозу, получаемому по индивидуальной модели.

3.3. Нормирование трудовых затрат

Задача нормирования трудовых затрат является одной из центральных задач организации производства. Она состоит в установлении научно обоснованных норм времени на выполнение отдельных работ. Правильное нормирование в значительной степени обуславливает эффективность выбранной организации работ, оптимальность рассчитанного числа исполнителей и их специализации и т. п.

Математическая формулировка задачи выглядит так.

Имеется некоторое количество работ $m+1$, выполняемых исполнителями данной специальности. Обозначим $j_1, j_2, \dots, j_l$ номера работ, которые при некотором наблюдении последовательно выполняет фиксированный специалист. Суммарное время, затраченное на них специалистом, обозначим Y . Предполагается, что перерывов между отдельными работами нет (если это не так, то перерывы следует оценить и вычесть из Y). Обозначим β_j «истинные» нормы времени, необходимые для выполнения j -й работы, $j=\overline{0, m}$. Постулируемая математическая модель записывается так:

$$Y = \beta_{j_2} + \beta_{j_l} + \dots + \beta_{j_l} + Z, \quad (3.5)$$

где Z — случайная составляющая, сопутствующая данному наблюдению.

Поскольку имеется не одно, а несколько наблюдений (а именно n), будем обозначать значения Y и Z для i -го наблюдения Y_i и Z_i . Для того чтобы сформулировать данную задачу как задачу регрессии, введем в рассмотрение для i -го наблюдения переменные $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}$. Будем полагать $t_{ij}=1$, если j -я работа выполнялась при i -ом наблюдении, и $t_{ij}=0$, если нет. С помощью введенных переменных выражение (3.5) записывается в виде (для $i=\overline{1, n}$)

$$Y_i = \sum_{j=0}^m \beta_j t_{ij} + Z_i. \quad (3.6)$$

Следовательно, $\{t_{ij}\}$ — суть сопутствующие переменные. Как обычно, им отвечает матрица T порядка $n \times (m+1)$, i -ая строка которой указывает работы, выполняемые при i -ом наблюдении ($i=\overline{1, n}$).

В качестве иллюстрации рассмотрим процесс технического обслуживания некоторого авиационного изделия, осуществляемый одним исполнителем. На изделии проводятся регламентные (обязательные) и дополнительные работы. Поскольку обслуживание изделия выполняется одним специалистом, то целесообразно все регламентные работы объединить в одну. Присвоим ей номер 0 (т. е. $j=0$). Предположим далее, что имеются четыре дополнительные работы, встречающиеся от случая к случаю (связанные, например, с устранением выявленных отказов). Перенумеруем их от 1 до 4. Наличие дополнительных работ при каждом обслуживании фиксируется (в ведомостях на дефектацию, картах-нарядах или в результате специального опроса). Поэтому можно составить матрицу T сопутствующих переменных, указывающую на выполненные работы. Такая матрица приведена в табл. 12. В ней же для каждого обслуживания приведена суммарная длительность выполнения работ Y . Отметим, что последнюю величину получить намного проще, чем длительность выполнения каждой работы.

Задача заключается в оценке норм времени β_j на выполнение работ. С этой целью воспользуемся методом наименьших квадратов. Для того чтобы даваемые по этому методу оценки были наилучшими

Результаты замеров длительностей технического обслуживания

i	Матрица Т					Y_i	i	Матрица Т					Y_i
	t_{i0}	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}			t_{i0}	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	
1	1	1	0	1	0	34	9	1	0	1	0	1	22
2	1	0	0	0	0	22	10	1	0	1	1	1	32
3	1	1	0	0	0	28	11	1	0	0	0	1	22
4	1	0	0	1	1	28	12	1	1	1	0	1	34
5	1	0	0	0	0	21	13	1	1	0	0	0	23
6	1	0	1	0	0	24	14	1	0	0	1	1	29
7	1	0	0	0	0	18	15	1	0	0	0	0	16
8	1	1	1	0	0	30							

ми, необходимо с точностью до постоянного сомножителя знать дисперсии случайных составляющих Z . Однако на первом этапе можно считать, что все дисперсии одинаковы, и использовать обычную процедуру регрессионного анализа. Если предположение о равенстве дисперсий кажется очень сомнительным, то далее целесообразно положить, что дисперсия i -го наблюдения пропорциональна средней

длительности выполнения работ $\sum_{j=0}^m \beta_j t_{ij}$. В этом случае целесообразно перейти ко второму этапу и использовать взвешенный метод, полагая дисперсии пропорциональными оценкам $\sum_{j=0}^m \beta_j^* t_{ij}$, найденным на первом этапе.

При использовании регрессионной процедуры может оказаться, что матрица $T'T$ является вырожденной, т. е. обратной матрицы $(T'T)^{-1}$ не существует. Это соответствует случаю, когда условия наблюдений оказались такими, что по крайней мере две работы все время встречаются вместе. По таким данным, очевидно, невозможно оценить продолжительность выполнения каждой отдельной работы. Чтобы выйти из этого положения необходимо или объединить такие работы (и соответствующие столбцы матрицы T), или провести дополнительные наблюдения. Отмеченная ситуация встретилась бы в рассматриваемом случае, если бы отсутствовали наблюдения № 1, 9—12 (тогда работы № 3 и 4 все время присутствовали вместе).

Закончим рассмотрение примера, содержащегося в табл. 12. Произведение матриц $T'T$ и обратная матрица $(T'T)^{-1}$ имеют следующий вид:

$$(T'T) = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(T'T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,19 & -0,13 & -0,06 & -0,06 & -0,11 \\ -0,13 & 0,34 & -0,08 & -0,03 & 0,13 \\ -0,06 & -0,08 & 0,37 & 0,11 & -0,17 \\ -0,06 & -0,03 & 0,11 & 0,45 & -0,21 \\ -0,11 & 0,13 & -0,17 & -0,21 & 0,44 \end{pmatrix}.$$

Вычислим оценки $\{\beta_i^*\}$ и σ^{2*} :

$$(T'Y)' = (383 \quad 149 \quad 142 \quad 123 \quad 167).$$

$$(\beta^*)' = [(T'T)^{-1} T'Y]' = (19,13 \quad 7,53 \quad 2,78 \quad 8,45 \quad 0,75).$$

$$(T\beta^*)' = (35,11 \quad 19,13 \quad 26,66 \quad 28,33 \quad 19,13 \quad 21,91 \quad 19,13 \quad 29,44 \quad 22,66 \quad 31,11 \quad 19,88 \quad 30,19 \quad 26,66 \quad 28,33 \quad 19,13).$$

$$(Y - T\beta^*)' = (-1,11 \quad 2,87 \quad 1,34 \quad -0,33 \quad 1,87 \quad 2,09 \quad -1,13 \quad 0,56 \quad -0,66 \quad 0,89 \quad 2,12 \quad 3,81 \quad -3,66 \quad 0,67 \quad -3,13).$$

$$R_0 = (Y - T\beta^*)'(Y - T\beta^*) = 64,70.$$

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n - m - 1} R_0 = \frac{1}{10} 64,7 = 6,47.$$

Поскольку в данном случае имеются повторяющиеся наблюдения, то можно провести дисперсионный анализ (см. табл. 8). В рассматриваемом случае повторяющимися являются наблюдения с номерами: 2, 5, 7 и 15; 3 и 13; 4 и 14. Суммы значений зависимой переменной для этих трех групп наблюдений соответственно составляют: $(22+21+18+16)=77$; $(28+23)=51$; $(28+29)=57$.

По формуле (1.30) находим величину «чистой ошибки»:

$$\begin{aligned} R_e = & \left(22^2 + 21^2 + 18^2 + 16^2 - \frac{1}{4} \cdot 77^2 \right) + \left(28^2 + 23^2 - \frac{1}{2} \cdot 51^2 \right) + \\ & + \left(28^2 + 29^2 - \frac{1}{2} \cdot 57^2 \right) = (1505 - 1482,25) + (1313 - 1300,50) + \\ & + (1625 - 1624,5) = 35,75. \end{aligned}$$

Число различных значений сопутствующей переменной $n_0=10$. По формуле (1.31) определяем $n_e=15-10=5$.

Результаты необходимых вычислений сведены в табл. 13. Подсчитанное по формуле (1.34') значение критерия Фишера составляет: $5,79 : 7,15 = 0,81$.

Таблица 13

Дисперсионный анализ

Источник	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Отклонение от регрессии R_0 в том числе:	64,70	10	6,47
чистая ошибка R_e	35,75	5	7,15
неадекватность $R_0 - R_e$	28,95	5	5,79

При $n_0=5$ и $n-m-1-n_0=5$ степенях свободы и $p=0,95$ квантиль $F^{-1}(0,95; 5,5)=5,05$ находим по табл. ПIV приложения. Следовательно, критерий попадает в область принятия $(0; 5,05)$ и гипотеза о корректности модели (3.6) не опровергается. Итак, нормативы трудоемкости работ можно принять равными 19,13; 7,53; 2,78; 8,48 и 0,75.

3.4. Анализ эксплуатационных показателей

Важной экономической задачей, часто встречающейся на практике, является анализ эксплуатационных показателей изделий в зависимости от их наработки. Например, большое значение имеет установление зависимости себестоимости летного часа или себестоимости технического обслуживания и ремонта от налета самолета с начала эксплуатации и т. п. Установление такой зависимости позволяет правильно планировать эксплуатационные расходы и назначать экономически оптимальные сроки службы изделий.

При анализе себестоимости летного часа может оказаться, что некоторые ее составляющие практически не зависят от налета с начала эксплуатации и подсчитываются с помощью калькуляции (например, заработная плата летно-подъемному составу). Такие составляющие следует исключить и рассматривать только остающуюся часть себестоимости. Тем не менее для удобства сохраним термин «себестоимость летного часа». Анализ себестоимости проводится на основе данных, представленных в табл. 14.

Делением значений четвертой строки на третью получаются значения себестоимости $Y=V/w$ в каждом из интервалов. Эти значения приведены в пятой строке.

Естественно предположить, что дисперсии расходов в каждом интервале пропорциональны налету часов в этом интервале: $D(V)=w_i\sigma^2$. Отсюда по формуле (2.19) получаем, что дисперсия

Исходные данные

Таблица 14

Номер интервала, i	1	2	3	4	5	6	7
Границы интервала, тыс. ч	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7
Налет в интервале w_i , тыс. ч	1,6	4,2	6,0	7,5	6,3	4,3	2,5
Суммарные расходы V_i , тыс. руб.	30	51	70	105	95	64	40
Себестоимость Y_i , руб./ч	18,75	12,14	11,67	14,00	15,08	14,88	16,00
$(i-0,5) w_i$	0,80	6,30	15,0	26,25	28,35	23,65	16,25
$(i-0,5)^2 w_i$	0,40	9,45	37,5	91,88	127,6	130,1	105,6
$Y_i(i-0,5) w_i$	15,00	76,48	175,1	367,5	427,5	351,9	260,0

себестоимости летного часа Y_i в i -ом интервале пропорциональна $1/w_i$:

$$D(Y_i) = D(V_i/w_i) = w_i^{-2} D(V_i) = w_i^{-1} \sigma^2, \quad (3.7)$$

где σ^2 — неизвестная постоянная.

К этому же выражению приходим, если считать дисперсию расходов пропорциональной числу наблюдений в интервале. За число наблюдений в нашем случае следует принять число самолетов в интервале, получающееся в результате деления суммарной наработки на длину интервала $1 \cdot 10^3$ ч. Поэтому дисперсия расходов в интервале пропорциональна $w_i \cdot 10^{-3}$, т. е. налету w_i .

Согласно методике разд. 1.2 и 1.5, для учета неравноточности наблюдений следует применять формулы (1.7), (1.8), (1.17') — (1.22').

Отнесем наблюдаемые значения в интервалах Y_i к серединам интервалов, т. е. примем $t_i = (i-1) + 0,5 = i - 0,5$. Значения $t_i w_i$, $Y_i w_i = V_i$, $t_i^2 w_i$, $t_i w_i Y_i$ в формулах (1.7) и (1.8) приведены в табл. 14. Соответствующие суммы равны:

$$\begin{aligned} \sum w_i &= 32,4; \\ \sum w_i t_i &= \sum w_i (i - 0,5) = 116,60; \\ \sum Y_i t_i w_i &= \sum Y_i w_i (i - 0,5) = 1673,48; \\ \sum t_i^2 w_i &= \sum w_i (i - 0,5)^2 = 502,53; \\ \sum Y_i w_i &= \sum V_i = 455. \end{aligned}$$

Вычисления по формулам (1.7) и (1.8) показывают, что

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{455 \cdot 116,6/32,4 - 1673,48}{116,6^2/32,4 - 502,53} = 0,435, \\ \beta_0^* &= (455 - 0,435 \cdot 116,6) : 32,4 = 12,478. \end{aligned}$$

Итак, искомая зависимость средних расходов на летный час от наработки t с начала эксплуатации

$$Y_t^* = 12,478 + 0,435t. \quad (3.8)$$

Из формулы следует, что с ростом наработки на 10 тыс. ч себестоимость летного часа возрастает в среднем на 4,35 руб.

Рассмотренный пример интересен в том плане, что различным наблюдениям придавались различные веса. В частности, первому наблюдению, равному 18,75, придавался меньший вес, так как налет в соответствующем интервале был меньше среднего и это значение принималось за менее достоверное, чем другие. Если этого не делать, то значение оценки β_1^* оказалось бы со знаком минус, что противоречит физическому смыслу исследуемой зависимости.

Рассмотренная модель может быть усовершенствована, если кроме налета учитывать и другие факторы, влияющие на себестоимость: дальности использования самолетов, места базирования и

пр. Это может быть осуществлено путем ввода в модель соответствующих переменных.

Часто в литературе исследуется регрессионная зависимость эксплуатационных расходов самолетов от его веса. Такая модель представляет интерес при оценке эффективности и тенденций развития перспективных типов летательных аппаратов. Модель имеет вид (1.1), где под t понимается вес, а под Y — расходы. Ясно, что такая модель является весьма грубой. Для уточнения ее следует ввести ряд дополнительных сопутствующих переменных, учитывающих среднюю скорость и дальность, тип двигателей (с помощью переменных, принимающих значения 0 для турбореактивных и 1 для турбовинтовых двигателей) и пр. Это приводит к модели многомерной регрессии (2.37).

В заключение коротко остановимся на модели формирования косвенных аэропортовых расходов. Пусть $t^{(j)}$ — зарегистрированное количество прилетов и вылетов самолетов j -го типа за рассматриваемый период, $j = \overline{1, m}$; Y — общие косвенные аэропортовые расходы за это время. Тогда может быть предложена модель (2.37). Коэффициенты β_j трактуются здесь как нормы аэропортовых расходов на один вылет (прилет) самолета j -го типа. Оценка их производится методами регрессионного анализа.

РАЗДЕЛ II

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Глава 4

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Общие положения

Временные ряды показателей характеризуют производственную деятельность предприятий гражданской авиации. Конечной целью является установление аналитической зависимости некоторых из этих показателей (зависимых) от других (независимых), в частности от времени. Полученные зависимости являются укрупненными экономико-математическими моделями, описывающими в общих чертах существующие между рассматриваемыми факторами взаимосвязи. При этом наибольшее внимание уделяется прогнозированию различных показателей.

Типичный график временной зависимости, рассматриваемой в рамках регрессионных моделей, представлен на рис. 1. Такой график не позволяет ответить на ряд производственных вопросов, возникающих на практике, например: как влияют на величину отправок численность работников аэропорта, увеличение пропускной способности аэродрома и аэровокзала и т. п. Не поможет ответить на эти вопросы и введение соответствующих факторов в качестве сопутствующих переменных в регрессионную модель (2.38), поскольку эти факторы не оказывают аддитивного влияния на зависимую переменную (отправки), как это постулируется в модели. Иными словами, регрессионная модель не отражает указанных зависимостей и не реагирует в достаточной степени на изменение отмеченных факторов. Данное обстоятельство является естественным, так как регрессионные модели предназначались для укрупненного анализа и прогнозирования. Для более детального анализа необходимо подробнее исследовать рассматриваемый процесс и привлекать для его описания другие модели. Следовательно, здесь имеет место как изменение класса решаемых задач, так и используемых моделей. Задачи становятся более детальными, требующими для своего решения анализа технологических производственных процессов.

Для иллюстрации вернемся снова к рассмотрению рис. 1. Выберем некоторый момент времени, т. е. точку на временной оси, и проведем прямую вертикальную к этой оси. В результате получим

сечение, содержащее более детальную информацию о протекании процесса в рассматриваемый момент времени. Пусть указанной информацией является количество взлетов и посадок самолетов в данном аэропорту, сгруппированное по получасовым интервалам времени в течение суток (или распределение отправок пассажиров в течение суток,

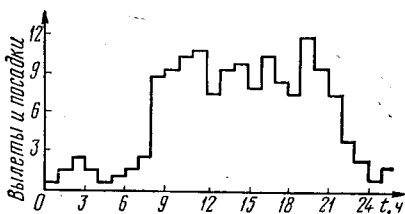


Рис. 6. Распределение прилетов и вылетов самолетов по времени суток

рис. 6). Нашей целью является описание производственного процесса, протекание которого отражено на представленном графике.

Отметим, что большинство производственных процессов может быть описано и формализовано как процессы обслуживания. При этом имеется спрос на какой-то вид обслуживания. Принято говорить, что имеется поток требований на обслуживание, понимая под требованием необходимость, потребность, обслуживание. В нашем примере обслуживание можно трактовать как: техническое обслуживание прибывающих и убывающих самолетов; наземное обслуживание пассажиров (регистрация билетов, оформление, прием и выдача багажа, посадка улетающих и встреча прилетающих пассажиров); процесс занятости самолетами взлетно-посадочной полосы (ВПП), мест стоянки (МС); буксировку самолетов тягачами и т. п.

Для удовлетворения требований имеются обслуживающие аппараты (иногда говорят — линии обслуживания). В рассмотренных примерах обслуживающими аппаратами были: перронные бригады технического обслуживания самолетов и средства механизации; работники службы перевозок аэропорта; взлетно-посадочные полосы и места стоянки самолетов; буксировщики и т. п.

Из изложенного ясно, что «обслуживание» следует понимать в широком смысле, как обслуживание во всех видах. Например, обслуживанием можно называть ремонт, занятость некоторого места (ВПП или МС самолетом, места в аэровокзале пассажиром) и т. п. Соответствующим образом разный смысл можно вкладывать и в понятие «обслуживающий аппарат».

Основная проблема, возникающая при рассмотрении взаимодействия потока требований и обслуживающих аппаратов, заключается в исследовании процесса ожидания требованиями начала обслуживания, иначе — процесса образования очереди требований на обслуживание. Отметим, что за рубежом соответствующая математическая дисциплина называется теорией очередей. В нашей стране общепринятым является термин «теория массового обслуживания», введенный одним из основоположников этой теории советским математиком А. Я. Хинчиным.

Рассмотрим какой-то один из видов обслуживания и соответствующий тип обслуживающих аппаратов (например, техническое обслуживание самолетов и перронные бригады). Если требование

в момент своего поступления застает хотя бы один аппарат данного типа свободным, то оно немедленно принимается им на обслуживание. Если все аппараты заняты, то образуется очередь на обслуживание. В этом случае требования поступают из очереди на обслуживание в моменты освобождения аппаратов.

Итак, процесс обслуживания описывается следующим образом: с одной стороны выделяется *поток требований* на обслуживание, с другой — *обслуживающие аппараты*. То и другое в совокупности образуют *систему массового обслуживания*.

Поток требований, в первую очередь, характеризуется *интенсивностью* (λ), т. е. средним числом требований, прибывающих на обслуживание в единицу времени. Другими основными характеристиками системы массового обслуживания являются количество обслуживающих аппаратов (s) и среднее время (μ), необходимое для обслуживания одного требования.

В каких случаях возникают очереди? Во-первых, тогда, когда число требований, поступающих в единицу времени, подвержено случайным колебаниям. Получается, что в одно время требований на обслуживание поступает мало и аппараты простаивают из-за отсутствия работы. В другое время требований поступает так много, что аппараты не успевают их обслуживать и образуется очередь. Возможность образования очереди усиливается еще больше, если и время, необходимое для обслуживания одного требования, не остается постоянным, а меняется случайным образом от обслуживания к обслуживанию.

Как простой требований в очереди, так и непроизводительный простой обслуживающих аппаратов из-за отсутствия работы невыгоден. Например, убыточен простой самолетов, ожидающих технического обслуживания, простой перронных бригад, ожидающих поступления самолетов. Налицо конфликтная ситуация: уменьшение числа обслуживающих аппаратов ведет к уменьшению расходов на их содержание и к увеличению убытков от простоев требований в ожидании начала обслуживания, и наоборот. Какое же число обслуживающих аппаратов будет оптимальным?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выбрать *показатель эффективности обслуживания*, характеризующий успешность работы системы массового обслуживания. В одних случаях таким показателем будет суммарный убыток от непроизводительных простоев требований и обслуживающих аппаратов, в других случаях — среднее время ожидания требований начала обслуживания, средняя длина очереди и т. д. Необходимо организовать систему массового обслуживания так, чтобы эти показатели были оптимальными, или, по крайней мере, не хуже заданных. Теперь можно дать более точное определение теории массового обслуживания, а именно охарактеризовать ее как науку, определяющую показатели эффективности различных систем массового обслуживания.

Посмотрим, какие задачи, встречающиеся при организации производственных процессов в гражданской авиации, являются зада-

чами массового обслуживания. В табл. 15 приведены некоторые из этих задач. Первая задача касается организации работы касс по продаже авиабилетов. Требованием здесь будет покупатель авиабилета, а обслуживающим аппаратом — кассир. Число покупателей, обращающихся в кассу за единицу времени, случайное. Поэтому перед окошечком кассы то никого нет, то образуется очередь. Нельзя допустить, чтобы пассажиры стояли в очереди очень долго. Предположим, что следует исходить из того, что среднее время, необходимое для приобретения билета, не должно превышать 5 мин. Каким должно быть для этого число кассиров?

Много задач массового обслуживания возникает при проектировании аэропортов. Они заключаются в определении целесообразного числа ВПП, МС, размеров производственных площадей и пассажирских помещений, оптимальной системы регистрации пассажиров и обработки багажа и т. д. Ясно, что при расчетах необходимо принимать во внимание случайные колебания загрузки. Если это не учитывать, то нормальная работа аэропорта будет часто нарушаться. Например, каким должно быть число мест стоянок самолетов на перроне, вместимость помещений для ожидания и регистрации пассажиров, чтобы вероятность перегрузки не превышала заданного уровня, предположим 1%?

При расчете числа ВПП следует учитывать дополнительные капитальные затраты на сооружение новых ВПП и непроизводительные расходы, вызванные ожиданием прибывающими самолетами разрешения на посадку. Поэтому показателем эффективности здесь будут приведенные эксплуатационные затраты. Ясно, что как завышенное, так и заниженное число ВПП ухудшает этот показатель.

Большинство задач организации и планирования технического обслуживания самолетов могут быть сформулированы как задачи массового обслуживания. Рассмотрим, например, процесс обслуживания самолетов на перроне. Требованием здесь является самолет, а обслуживающими аппаратами — технические перронные бригады и средства механизации. Фактические моменты прилетов и вылетов всегда в большей или меньшей степени отклоняются от расписания. Продолжительности обслуживания самолетов также имеют случайные колебания. Поэтому в нужный момент времени может не оказаться свободной бригады или средства механизации, в результате чего произойдет задержка рейса. Спрашивается, сколько необходимо иметь технических перронных бригад и средств механизации, чтобы вероятность несвоевременного обслуживания самолета была не выше заданной?

Методы теории массового обслуживания могут быть применены и при расчете фонда запасных агрегатов. Потребность в запасных частях и агрегатах заранее точно неизвестна, так как она в значительной степени определяется отказами и неисправностями авиационной техники. Обычно снятые с самолетов неисправные агрегаты отправляются в ремонт, а вместо них устанавливаются запасные агрегаты из оборотного фонда. Если в момент обнаружения неисправности весь оборотный фонд находится в ремонте, то самолеты

Задачи массового обслуживания

Название задачи	Требование на обслуживание	Обслуживающий аппарат	Показатель эффективности обслуживания	Что требуется определить
Организация работы билетных касс	Покупатель авиабилета	Кассир	Среднее время, необходимое для приобретения билета	Число кассиров
Расчет систем регистрации пассажиров и обработки багажа в аэропортах	Пассажир	Рабочее место регистрации билетов пассажиров и приемки багажа	Среднее время, необходимое для регистрации	Оптимальную систему регистрации билетов и обработки багажа пассажиров
Расчет пропускной способности ВПП	Самолет, требующий посадки	ВПП	Приведенные эксплуатационные затраты	Число ВПП
Расчет пропускной способности аэропортов	а) Самолет б) Пассажир	а) Место стоянки самолета б) Место ожидания пассажира в аэровокзале	Вероятность перегрузки аэропорта	Размеры перрона, производственных площадей и пассажирских помещений аэровокзала
Обслуживание самолета на перроне	Самолет	а) Техническая перронная бригада б) Средства аэродромной механизации	Вероятность своевременного обслуживания самолета	а) Число бригад б) Количество средств механизации
Периодическое техническое обслуживание самолетов	Самолет	Смена трудоемких форм регламента	а) Календарный простой на обслуживании б) Суммарный убыток от простоя самолетов и расходов на заработную плату	Оптимальную организацию обслуживания
Расчет фонда запасных агрегатов	Неисправный агрегат	Рабочее место, на котором производится ремонт агрегатов	Вероятность простоя самолета из-за отсутствия запасного агрегата	Фонд запасных агрегатов

будут простаивать. Чтобы этого не случилось, необходимо иметь большой оборотный фонд. Однако это невыгодно экономически. В связи с этим требуется определить такой минимальный размер оборотного фонда, при котором вероятность простоя самолетов из-за отсутствия запасных агрегатов не превышала определенной величины.

Исходя из вышеизложенного можно заключить, что теория массового обслуживания позволяет решать широкий круг задач, возникающих при организации производственных процессов в гражданской авиации.

4.2. Общие сведения о системах массового обслуживания

В настоящей работе рассматриваются системы массового обслуживания определенного вида, а именно такие, которым соответствуют производственные процессы в ГА. Однако целесообразно дать представление и о системах других видов, поскольку они могут встречаться в практической деятельности и поскольку это уяснит место рассматриваемых систем обслуживания среди остальных. Попутно вводятся основные определения и ограничения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Система массового обслуживания — это совокупность потока требований и обслуживающих аппаратов. Понятие «обслуживание» является неопределяемым. Смысл его в каждом конкретном случае ясен из содержания задачи. Отправляясь от этого исходного понятия, можно дать определение основных терминов, употребляемых в теории массового обслуживания. Так, под *требованием* понимают необходимость выполнения обслуживания. Например, в момент посадки самолета поступает требование на обслуживание какого-либо вида: «обслуживание при кратковременной стоянке», «послеполетное обслуживание», «обслуживание по форме № 1» и т. д.

Потоком требований называют упорядоченную по времени поступления последовательность требований. Следовательно, прилетающие самолеты образуют поток требований на обслуживание.

Под *обслуживающим аппаратом* (линией) понимают объект, предназначенный для обслуживания требований. В рассматриваемом примере обслуживающими аппаратами являются технические перронные бригады и средства механизации.

Обычно поступающее требование не может быть обслужено любым из имеющихся аппаратов. Это вызвано тем, что, как правило, существует специализация аппаратов по видам обслуживания. Например, технические перронные бригады специализируются по типам самолетов. Поэтому бригада, специализированная по определенному типу, не может принять на обслуживание самолет другого типа. Другой пример такого рода можно привести из практики работы службы перевозок. При существующей системе регистрации билетов и обработки багажа пассажиров прибывающий в аэропорт пассажир может пройти регистрацию не у любого рабочего места, а только у того, которое соответствует его рейсу.

В случае специализации аппаратов система массового обслуживания является *неполнодоступной*, так как не все обслуживающие аппараты доступны любому требованию. В противоположность этому систему массового обслуживания называют *полнодоступной*, если любое¹ требование может быть обслужено любым аппаратом. Обычно переход от неполнодоступной системы к полнодоступной не вызывает трудностей. Для этого достаточно выделить из всех имеющихся аппаратов те аппараты, которые имеют одинаковую специализацию, а из потока требований те требования, которые могут быть ими обслужены. Полученная таким образом система будет полнодоступной. Следовательно, вместо одной неполнодоступной системы можно рассматривать несколько полнодоступных систем. Например, можно по отдельности рассматривать самолеты определенного типа и обслуживающие их перронные бригады, а также пассажиров данного рейса и соответствующие рабочие места регистрации.

Переход от неполнодоступной системы к полнодоступной значительно облегчает исследование. Поэтому, не оговаривая это особо, в дальнейшем будем предполагать, что такой переход уже сделан, и будем рассматривать только полнодоступные системы.

Важное значение имеет характер поступления требований. А именно, требования могут поступать по одиночке и группами. В первом случае говорят, что поток требований является *ординарным*, а во втором — *неординарным*. В большинстве случаев характеру производственных процессов в ГА соответствует ординарный поток поступлений. Например, по одиночке прибывают самолеты в зону аэропорта для захода на посадку. По одиночке поступают самолеты на техническое обслуживание или ремонт. За редким исключением по одиночке прибывают в агентства Аэрофлота пассажиры, желающие купить билеты на самолет. С другой стороны, в некоторых случаях наличие ординарности потока является сомнительным. Рассмотрим, например, процесс регистрации билетов пассажиров в аэропортах. Обычно аэропорт находится на удаленном от центра города расстоянии. Большая часть пассажиров прибывает в аэропорт на городских автобусах, курсирующих по определенному расписанию. Поэтому вполне возможно, что в момент прибытия автобуса поступает целая группа пассажиров, отлетающих одним рейсом.

В качестве другого примера рассмотрим прибытие самолетов в аэропорт. Каждый прибывающий самолет доставляет в аэропорт сразу группу пассажиров, которые должны быть обслужены. Следовательно, поток прилетающих пассажиров неординарен.

Учет возможности группового поступления требований существенно усложняет расчеты. Обычно будем предполагать ординарность потока. Если в некоторых из рассматриваемых случаях это не вполне соответствует действительности, то вызванная этим погрешность часто оказывается незначительной.

Максимальное число требований, которое может поступить в систему, может быть ограниченным или неограниченным. Строго

говоря, в действительности всегда число «потенциальных» требований ограничено. Например, ограничено число жителей. Поэтому ограничено максимальное число покупателей, которые могут обратиться в кассу за билетами. Конечно общее число самолетов, которые могут поступить на обслуживание, и т. д. Предположение о неограниченном числе потенциальных требований очень удобно с математической стороны, так как позволяет упростить теорию. Интуитивно ясно, что оно может быть принято, когда максимальное число требований значительно превосходит число обслуживающих аппаратов. Так как это имеет место в рассматриваемых случаях, то в дальнейшем обычно будем считать, что число потенциальных требований не ограничено. Типичные примеры противоположного характера дают задачи об обслуживании станков. Обслуживающим аппаратом является здесь рабочий, требованием — отказавший станок, а обслуживание заключается в починке станка.

Если рабочий обслуживает два станка, то предположение о неограниченности потока делать, конечно, нельзя.

Сделаем несколько замечаний, касающихся обслуживающих аппаратов. Во-первых, всюду в работе обслуживающие аппараты данной полностью системы считаются идентичными в том смысле, что время, необходимое для обслуживания каждого требования, не зависит от того, на каком аппарате происходит обслуживание. Например, если имеется несколько бригад, то предполагается, что продолжительность обслуживания самолета по данной форме регламента не зависит от того, какая бригада производит обслуживание. Аналогично время, необходимое для приобретения билета, принимается независимым от того, к какому кассиру обратился покупатель. Конечно, в действительности это условие может не соблюдаться: одни аппараты обслуживают требования скорее, чем другие. Однако ошибки можно избежать, если для идентичных аппаратов в качестве скорости обслуживания взять некоторую осредненную скорость.

Следующее замечание относится к надежности аппаратов. Предполагаем, что обслуживающие аппараты абсолютно надежны, т. е. не могут ломаться и выходить из строя. Для аппаратов, рассматриваемых в настоящей работе, это условие выполняется. Если даже некоторые аппараты могут выходить из строя, то эти события являются настолько редкими, что ими можно без ущерба пренебречь.

Наконец, необходимо учитывать, сколько требований одновременно может обслуживать один аппарат. Почти во всех рассматриваемых задачах аппарат одновременно может обслуживать только одно требование. Например, техническая перронная бригада одновременно обслуживает только один самолет. Кассир оформляет билет одному пассажиру. Противоположным является случай *группового* обслуживания, когда аппарат одновременно обслуживает несколько требований. Например, один самолет «обслуживает» сразу группу пассажиров, а также большое количество груза.

Обычно имеют дело с первым случаем. Случай группового обслуживания будет оговариваться специально.

Характерной особенностью приведенных во введении примеров является то, что требование, заставшее при своем поступлении все аппараты занятыми, становилось в очередь и *ожидало начала обслуживания*. Такие системы массового обслуживания называются *системами с ожиданием*. Полное время пребывания требований в этих системах складывается из времени ожидания и времени обслуживания. Другим распространенным классом систем массового обслуживания являются *системы с отказами* (иначе — системы с потерями). В этих системах требование, поступившее в момент, когда все аппараты заняты, получает отказ и покидает систему необслуженным (или, как говорят, «теряется»). Примером таких систем могут служить телефонные системы. Обслуживающими аппаратами здесь являются линии связи, а требованиями — вызовы абонентов. Если в момент вызова абонента все линии оказываются занятыми, то поступает отказ — подается сигнал занятости, и требование теряется. В гражданской авиации пример такого рода дает работа камер хранения. Если все места заняты, то обращающиеся в камеру хранения пассажиры получают отказ.

Кроме систем с ожиданием и систем с потерями, имеются системы промежуточного типа, называемые системами *смешанного типа*. В системах такого типа требования могут как теряться, так и ожидать начала обслуживания. Тот или другой случай имеет место в зависимости от того, выполняются ли некоторые ограничения, касающиеся очереди требований, ожидающих обслуживания. Ограничения могут накладываться, например, на время ожидания. Если время ожидания требованием начала обслуживания меньше некоторой величины, то требование становится в очередь и ожидает обслуживания. В противном случае происходит потеря требования. С такой ситуацией часто сталкиваются на практике. Предположим, что пришедший в агентство Аэрофлота покупатель видит перед кассами большую очередь. Если покупатель не располагает достаточным временем для ожидания в очереди, то он покидает агентство, не сделав покупки. Ограничения могут накладываться также на длину очереди, когда число мест ожидания ограничено, или на полное время обслуживания, равное сумме продолжительностей ожидания и собственно обслуживания.

Так как возникающие в производственной деятельности Аэрофлота задачи соответствуют в основном системам с ожиданием, то ниже рассматривается преимущественно только этот тип систем массового обслуживания. При исследовании систем с ожиданием необходимо учитывать *дисциплину очереди*, т. е. порядок поступления требований из очереди на обслуживание. Обычно будет предполагаться, что обслуживание происходит в порядке поступления, т. е. по принципу «первым пришел — первым обслужен». Из других дисциплин очереди, которые могут встретиться на практике, следует отметить дисциплину с приоритетами (преимуществами). В этом случае требования классифицируются в зависимости от назначе-

мых им приоритетов. В соответствии с этими приоритетами и формируется порядок очереди. Например, назначение приоритета производится при погрузочно-разгрузочных работах, когда в первую очередь обрабатывается скоропортящийся и срочный груз.

Приведенный обзор показывает, что существует большое разнообразие систем массового обслуживания. Однако в практической деятельности Аэрофлота наибольшее распространение находят системы массового обслуживания, характеризующиеся описанными в настоящем разделе ограничениями. Конечно, при решении отдельных задач некоторые из этих ограничений могут не выполняться. В таких случаях важно знать, насколько существенно это расхождение и какой может быть ошибка. Для ответа на этот вопрос необходимо использовать статистические данные о процессе обслуживания за какой-либо прошедший период времени. Сравнивая фактические данные с данными, получаемыми из расчета, можно оценить степень расхождения. Если расхождение невелико, то это значит, что принятые допущения несущественны и могут быть приняты. В противном случае для решения задачи следует исходить из других систем массового обслуживания, сведения о которых читатель может найти в специальной литературе.

Важнейшими количественными характеристиками систем массового обслуживания являются:

λ — интенсивность потока требований (среднее число требований, поступающих за единицу времени);

s — число обслуживающих аппаратов;

μ — среднее время обслуживания одного требования.

Если эти характеристики не меняются с течением времени, то система массового обслуживания будет функционировать в установившемся режиме, который в дальнейшем и предполагается.

Рассмотрим основные показатели эффективности систем массового обслуживания. Отметим, что в установившемся режиме эти показатели не зависят от времени. Начнем с систем с ожиданием. Наиболее распространенным показателем является коэффициент загрузки ρ . Напомним, что для систем с ожиданием требования не теряются. Поэтому ρ называется также коэффициентом использования аппаратов, поскольку показывает, какую долю располагаемого фонда времени обслуживающие аппараты заняты. Так как за единицу времени поступает λ требований, а средняя продолжительность обслуживания каждого требования равна μ , то продолжительность занятости всех аппаратов в течение единицы времени составляет $\lambda\mu$. С другой стороны, за единицу времени располагаемый фонд времени s аппаратов равен $1 \cdot s$. Следовательно, коэффициент загрузки (использования)

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{s}. \quad (4.1)$$

Очевидно, практический интерес представляет только случай, когда ρ меньше единицы. В противном случае аппараты не будут справляться с обслуживанием поступающего потока требований и

очередь будет неограниченно расти. Поэтому для систем с ожиданием в дальнейшем будем всегда считать, что $\rho < 1$.

Будем говорить, что требование находится в системе, если оно ожидает обслуживания или находится на обслуживании. Обозначим n число требований, находящихся в системе. Так как с течением времени это число меняется, то n является случайной величиной. Предположим, что произведено очень большое количество наблюдений над системой, в результате которых установлена доля случаев, когда в системе наблюдалось ровно n требований. Эта величина называется *вероятностью* p_n того, что в системе имеется n требований.

Зная $p_n (n=0, 1, 2, \dots)$, легко вычислить *среднее число требований в системе* u :

$$u = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n. \quad (4.2)$$

Очередь появляется в том случае, когда число требований в системе превышает число обслуживающих аппаратов, т. е. когда $n = s+1, s+2$ и т. д., причем число требований в очереди соответственно будет 1, 2, ... Соответствующие вероятности равны p_{s+1}, p_{s+2} и т. д. Поэтому *среднее число требований в очереди* v составит: *

$$v = 1 \cdot p_{s+1} + 2 \cdot p_{s+2} + \dots = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) p_n. \quad (4.3)$$

Так как коэффициент загрузки есть доля времени, в течение которого аппараты заняты обслуживанием, то ρs равно среднему числу загруженных аппаратов. Но в каждый момент времени загружено ровно столько аппаратов, сколько требований находится на обслуживании. Поэтому среднее число требований, находящихся на обслуживании, равно среднему числу занятых аппаратов ρs . Так как среднее число требований в системе равно сумме среднего числа требований в очереди и на обслуживании, то

$$u = v + \rho s. \quad (4.4)$$

Это соотношение легко проверить, учитывая, что среднее число занятых аппаратов ρs может быть вычислено по формуле

$$\rho s = \sum_{n=0}^s n p_n + s \sum_{n=s+1}^{\infty} p_n. \quad (4.5)$$

Здесь второе слагаемое учитывает тот факт, что если число требований в системе превышает число имеющихся аппаратов, то работают все s аппаратов.

Важным показателем является *среднее время ожидания начала обслуживания* γ . Сумма среднего времени ожидания γ и обслужи-

* Здесь и ниже предполагается, что поток требований является пуассоновским (см. разд. 5.3).

живания μ равна среднему времени пребывания требования в системе ω :

$$\omega = \gamma + \mu. \quad (4.6)$$

Установим полезную связь между средним числом требований, находящихся в системе, и средним временем пребывания требования в системе. Так как за единицу времени в систему поступает λ требований, а средняя продолжительность пребывания одного требования в системе есть ω ; то суммарная продолжительность нахождения всех требований в системе за единицу времени равна $\lambda \cdot \omega$. Но так как в системе находится в среднем u требований, то эта величина равна произведению единицы времени на u , т. е.

$$u = \lambda \omega. \quad (4.7)$$

Аналогично можно вывести формулу

$$v = \lambda \gamma. \quad (4.8)$$

Приведенные показатели эффективности характеризуют степень использования обслуживающих аппаратов и затраты времени на пребывание требований в системе (в очереди и на обслуживании). Обычно бывает необходимым соизмерить эти величины, с тем чтобы найти экономически оптимальное решение. В связи с этим предположим, что за единицу времени пребывания требования в системе обслуживания имеют место убытки, равные c . Кроме того, эксплуатация одного аппарата приводит за единицу времени к расходам, равным k . Отметим, что в величину k обычно входят как эксплуатационные расходы, так и удельные капитальные затраты на один аппарат, связанные с его приобретением и приходящиеся на единицу времени. Так как число аппаратов равно s , а в единицу времени в систему поступает λ требований, то в качестве критерия экономической эффективности системы обслуживания можно предложить приведенные затраты

$$\mathcal{E} = c\lambda\omega + ks. \quad (4.9)$$

В этом выражении ω (среднее время пребывания одного требования в системе), а вместе с ним и слагаемое $c\lambda\omega$ уменьшаются с ростом числа обслуживающих аппаратов s . В противоположность этому слагаемое ks с ростом числа аппаратов увеличивается. Задача состоит, следовательно, в выборе такого значения s , при котором критерий (4.9) будет минимален. Такой выбор s обеспечивает минимизацию приведенных затрат, связанных с приобретением и эксплуатацией аппаратов и непроизводительным пребыванием требований в системе обслуживания.

Отметим также, что за счет дополнительных затрат часто имеется возможность уменьшить среднюю длительность обслуживания одного требования μ . При этом будет уменьшаться и величина ω — среднее время пребывания требования в системе. В этом случае для нахождения оптимального решения в критерий (4.9) следует ввести также указанные дополнительные затраты.

Рассмотрим теперь показатели эффективности систем массового обслуживания *с отказами*. Как и прежде, обозначим p_n вероятность наличия в системе n требований. Требование получает отказ в том и только в том случае, если в момент своего поступления в систему застаёт все аппараты занятыми. Если в системе имеется s аппаратов, то вероятность данного события равна p_s . Эта вероятность, называемая *вероятностью отказа*, является важнейшим показателем эффективности системы с отказами.

Зная вероятность отказа требованию в обслуживании, легко подсчитать среднее число требований, получающих отказ в течение единицы времени: $\lambda_{\text{отк}} = \lambda \cdot p_s$.

Отметим, что $\lambda - \lambda_{\text{отк}}$ есть, следовательно, среднее число требований, принимаемых на обслуживание в течение единицы времени.

Коэффициент загрузки вычисляется, как и прежде, по формуле (4.1). Однако в отличие от систем с ожиданием для систем с отказами он может быть больше единицы. Кроме того, коэффициент загрузки не равен коэффициенту использования аппаратов ρ' , поскольку некоторые требования получают отказ в обслуживании. Так как среднее число обслуженных в единицу времени требований равняется $\lambda - \lambda_{\text{отк}}$, среднее время одного обслуживания есть μ , а число аппаратов s , то коэффициент использования

$$\rho' = \frac{\lambda(1 - p_s)\mu}{s}. \quad (4.10)$$

Для систем с отказами очередь требований отсутствует. Поэтому из других показателей эффективности интерес представляют только среднее число требований в системе u , вычисляемое по формуле

$$u = \sum_{n=0}^s n p_n = \lambda(1 - p_s)u. \quad (4.11)$$

Предположим, что эксплуатация одного обслуживающего аппарата в течение единицы времени приводит к расходам k . Пусть далее отказ в обслуживании одного требования влечет убыток, равный c_0 . Тогда приведенные средние затраты, связанные с эксплуатацией s аппаратов и убытками от отказов требованиям, в единицу времени в среднем составляют

$$\mathfrak{D}_0 = c_0 \lambda p_s + k s. \quad (4.12)$$

В данном случае задача заключается, как и прежде, в определении такого числа аппаратов, при котором величина приведенных затрат минимальна.

Приведенные формулы показывают, что, зная величины $\{p_n\}$, можно вычислить любые показатели эффективности обслуживания. Вероятность p_n можно трактовать как относительную долю времени, в течение которого в системе находится n требований. Обычно это также есть вероятность того, что вновь прибывшее требование застанет в системе ровно n других требований*.

* Это справедливо в случае пуассоновского потока требований.

5.1. Вероятностные модели продолжительности обслуживания

Рассмотрим методы анализа вероятностных процессов обслуживания. Такие процессы характеризуются тем, что моменты поступления и продолжительности обслуживания требований случайны. Следовательно, для анализа необходимо использовать методы математической статистики, т. е. статистические методы. Ниже будут приведены минимальные сведения об этих методах.

Статистический анализ процессов обслуживания включает две задачи: анализ времени, необходимого для обслуживания одного требования, и анализ потока требований. Остановимся вначале на первой задаче.

Отметим, что существуют две группы методов анализа продолжительности обслуживания одного требования: технологические и статистические. Суть технологических методов состоит в детальном исследовании технологического процесса обслуживания: процесс разбивается на отдельные работы, изучается взаимосвязь этих работ, длительность их выполнения и влияние на общую продолжительность обслуживания и т. п. К технологическим методам относят метод сетевого планирования и метод, основанный на изучении цикловых графиков технического обслуживания.

Статистические методы заключаются в анализе данных об общей продолжительности обслуживания. Они являются более формальными по сравнению с технологическими методами, так как не вскрывают структуры, механизма процесса обслуживания и фиксируют только конечный результат. Основными задачами, решаемыми статистическими методами, являются: определение среднего значения и дисперсии длительности обслуживания, оценка вероятности выполнения обслуживания в заданный срок, установление с помощью регрессионного анализа влияния на среднюю длительность обслуживания таких факторов, как длительность и условия эксплуатации авиационной техники, и т. п.

Исходным «сырьем» для статистического метода являются фактические данные о продолжительности обслуживания за прошедший период времени. Для корректности применения этого метода необходимо быть уверенным, что эти данные *однородны*, т. е. относятся к одним и тем же условиям работы (одни и те же организация работ, численность исполнителей, применяемые средства механизации, климатические условия и т. п.). Кроме того, для обоснованной экстраполяции на будущее полученных в результате статистического анализа выводов необходимо предполагать, что и в дальнейшем эти условия сохранятся.

Статистические методы не могут применяться для целей предварительного анализа новой организации обслуживания или исследования длительности обслуживания, например, новых типов летательных аппаратов, по которым еще не имеется опыта эксплуатации.

В этих случаях используются технологические методы. Оценка продолжительности выполнения отдельных работ по обслуживанию здесь обычно производится экспертным путем. Однако по тем работам, которые аналогичным образом проводились в прошлом и по длительности выполнения которых имеется достаточно данных, следует использовать статистический метод. Итак, при оговоренных выше условиях статистический метод может применяться для анализа как общей продолжительности обслуживания, так и длительности выполнения отдельных работ. Для сокращения будем в дальнейшем вести изложение применительно к общей продолжительности обслуживания.

Продолжительность обслуживания является случайной. Это обстоятельство обусловлено случайным характером таких факторов, как доработки, отказы и неисправности авиационной техники, поставка запасных агрегатов, фактическая производительность труда в каждом отдельном случае, и т. п. Поэтому продолжительность обслуживания будем рассматривать как случайную величину, которую обозначим X . Эта величина из раза в раз принимает значения случайным образом. Возможность принятия того или иного значения определяется функцией распределения $F(x)$ или плотностью распределения $f(x)$.

Значение функции распределения в точке x есть вероятность того, что случайная величина X в результате однократной реализации не превзойдет значения x :

$$F(x) = P\{X \leq x\}. \quad (5.1)$$

Грубо говоря, $F(x)$ есть относительная доля случаев, подсчитанная на основе большого числа реализаций случайной величины, в которых будет иметь место неравенство $X \leq x$.

Физический смысл плотности распределения $f(x)$ заключается в следующем. Если рассмотреть достаточно малую положительную величину Δx , то произведение $f(x)\Delta x$ приблизительно равно вероятности того, что в результате однократной реализации случайная величина X примет значение из интервала $(x, x + \Delta x)$. Точнее,

$$P\{x < X \leq x + \Delta x\} = f(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad (5.2)$$

где $o(\Delta x)$ означает величину высшего порядка малости, чем Δx , т. е. стремящуюся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$ быстрее, чем Δx .

Между функцией $F(x)$ и плотностью $f(x)$ существуют следующие соотношения*:

Часто оказывается достаточным ограничиться только *типичными* значениями случайной величины X .

$$f(x) = F'(x); \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy. \quad (5.3)$$

* Первое равенство в соотношениях (5.3) справедливо в точках непрерывности плотности.

Основным из них является *среднее значение* μ . Оно вычисляется по формуле *

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx. \quad (5.4)$$

В каждой конкретной реализации случайная величина X будет отклоняться от своего среднего значения μ . Мерой разброса, рассеяния величины X от μ служит *дисперсия*

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (5.5)$$

Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением* σ .

В аналитических выражениях для функции и плотности распределения, кроме независимой переменной x , фигурируют некоторые постоянные, называемые *параметрами распределения*. Если выражения для двух функций (или плотностей) распределения отличаются только параметрами, то говорят, что эти распределения принадлежат одному типу. Следовательно, внутри одного типа распределения отличаются друг от друга параметрами. Рассмотрим основные типы распределений.

Важнейшим для применений является *нормальное* распределение. Плотность и функция этого распределения задаются формулами

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.6)$$

где μ и σ — параметры распределения, равные соответственно среднему значению и среднему квадратическому отклонению;

$\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — табулированные функции аргумента $z = x - \mu/\sigma$, значения которых приводятся в табл. ПIV (отметим, что если z отрицательно, то $\varphi(z) = \varphi(-z)$, $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$).

Графики плотности и функции нормального распределения приведены на рис. 7. Отличительной особенностью нормального распределения является симметричность кривой плотности распределения относительно вертикали, проходящей через точку μ оси абсцисс.

Другим распространенным распределением является *распределение Эрланга*, определяемое выражениями

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

* Выражение (5.4) для μ справедливо лишь для положительных случайных величин, когда $Fx=0$ при $x=0$.

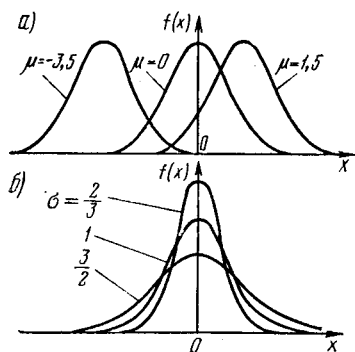


Рис. 7. Графики кривой плотности нормального распределения: а) $\sigma^2 = 1$; б) $\mu = 0$

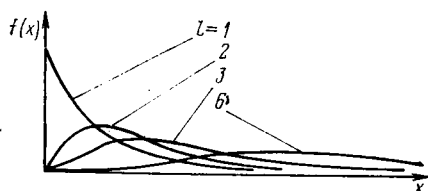


Рис. 8. Графики кривой плотности распределения Эрланга

$$F(x) = \begin{cases} 1 - P_{<l-1}(\lambda x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где λ и l — параметры распределения, причём параметр λ является неотрицательным числом ($\lambda > 0$), а l — целым положительным числом ($l = 1, 2, \dots$);

$$P_{<l}(a) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a} \text{ — табули-}$$

рованная функция аргумента $a = \lambda x$, значения которой приведены в табл. ПVIII.

Для облегчения вычислений по формуле (5.7) может быть использована табл. ПVII.

Через параметры λ и l среднее значение и дисперсия распределения Эрланга вычисляются по формулам

$$\mu = \frac{l}{\lambda}; \quad \sigma^2 = \frac{l}{\lambda^2}. \quad (5.8)$$

Эти выражения можно получить, используя формулы (5.4) и (5.5).

Графики плотности распределения Эрланга для некоторых значений l приведены на рис. 8. Из графиков видно, что кривая плотности в данном случае является асимметричной.

Важным частным случаем распределения Эрланга при $l=1$ является экспоненциальное распределение, при котором плотность и функция распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Можно проверить, что это удовлетворяет соотношению (5.3). Среднее значение экспоненциального распределения $\mu = 1/\lambda$, а дисперсия $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

Для облегчения вычислений по формулам (5.9) следует использовать табл. ПVI.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, что длительность технического обслуживания некоторого типа самолета при кратковременной стоянке в промежуточном аэропорту имеет распределение Эрланга с параметрами $l=5$ и $\lambda=0,15$ 1/мин, при этом среднее значение длительности равно 33,3 мин, а дисперсия 222,2 мин². Какова вероятность того, что обслуживание будет закончено в срок, если длительность стоянки по расписанию составляет 40 мин?

Указанная вероятность есть значение функции распределения Эрланга с параметрами $l=5$ и $\lambda=0,15$ 1/мин в точке $x=40$ мин. По формуле (5.7) имеем

$$F(40) = 1 - P_{\leq 5-1}(0,15 \cdot 40) = 1 - P_{\leq 4}(6).$$

Из табл. ПВIII находим, что при $n=4$ и $\alpha=6$ $P_{\leq 4}(6) = 0,2851$. Следовательно, вероятность своевременного обслуживания составляет $1 - 0,2851 = 0,7149$.

Можно поставить и противоположную задачу: какова минимальная длительность стоянки по расписанию, при которой вероятность своевременного обслуживания не менее заданного значения, например, 0,9?

Исходным для ответа является следующее неравенство:

$$0,9 \leq F(x) = 1 - P_{\leq 4}(0,15x).$$

Отсюда получаем условие для определения неизвестной длительности стоянки x :

$$P_{\leq 4}(0,15x) \leq 1 - 0,9 = 0,1.$$

Двигаясь слева направо по строке табл. ПВIII, отвечающей $n=4$, находим первое число, меньшее 0,1. Это число есть 0,0996 и соответствует $\alpha=8$. Так как $\alpha=0,15x$, то $x=\alpha/0,15=8/0,15 \approx 53$ мин. Итак, для обеспечения заданной вероятности длительность стоянки не должна быть менее 53 мин.

Рассмотрим этот же пример для случая нормального распределения длительности обслуживания с параметрами $\mu=33,3$ мин и $\sigma=15$ мин. Имеем (см. формулу 5.6):

$$F(40) = \Phi\left(\frac{40 - 33,3}{15}\right) \approx \Phi(0,444).$$

По табл. ПВ находим $\Phi(0,444) \approx 0,671$. Значит вероятность своевременного обслуживания составляет только 0,671. Следовательно, при тех же значениях среднего и дисперсии эта вероятность существенно зависит от вида распределения.

Для окончательного решения задачи в случае нормального распределения следует по столбцу табл. ПВ, отвечающему $\Phi(z)$, опускаться до минимального значения, равного или превосходящего

0,9. Это соответствует значению аргумента $z=1,28$. Так как $z = \frac{x - 33,3}{15}$, то $x = 15 \cdot 1,28 + 33,3 = 19,2 + 33,3 = 52,5$ мин. Итак, минимальная длительность стоянки, при которой обслуживание будет заканчиваться в срок с вероятностью 0,9, составляет в случае нормального распределения 52,5 мин.

Сделаем несколько дополнительных замечаний относительно экспоненциального распределения. Во-первых, отметим, что если случайная величина X имеет распределение Эрланга с параметрами λ и l , то ее можно рассматривать как сумму l случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_l$ — взаимно независимых и экспоненциально распределенных с параметром λ :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_l. \quad (5.10)$$

Разумеется верно и обратное: сумма l независимых величин с распределением (5.9) имеет распределение (5.7). Пусть, например, некоторое обслуживание представляет собой l последовательно выполняемых работ. Каждая работа имеет продолжительность, распределенную по экспоненциальному закону с параметром λ . Тогда суммарная продолжительность обслуживания имеет распределение Эрланга с параметрами λ и l .

Рассмотрим другую модель, связанную с экспоненциальным распределением. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_s$ — s независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ . Найдём распределение наименьшей из них, т. е. величины

$$X = \min \{X_1, X_2, \dots, X_s\}. \quad (5.11)$$

Событие $\{X \geq x\}$ имеет место тогда и только тогда, когда имеют место все s событий $\{X_i \geq x\}$. Поэтому

$$P\{X \geq x\} = \prod_{i=1}^s P\{X_i \geq x\}.$$

Так как согласно формулам (5.1) и (5.9)

$$P\{X_i \geq x\} = 1 - F(x) = e^{-\lambda x},$$

то

$$P\{X \geq x\} = \prod_{i=1}^s e^{-\lambda x} = e^{-s\lambda x},$$

$$P\{X \leq x\} = 1 - P\{X \geq x\} = 1 - e^{-s\lambda x}.$$

Следовательно, наименьшая (или минимум) из s экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ имеет экспоненциальное распределение с параметром $s\lambda$.

Рассмотрим, например, процесс поиска отказа или неисправности, возникшего на некотором изделии. Пусть поиск ведут параллельно s техников. Предположим, что время, необходимое для отыскания отказа (неисправности) одним техником, имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . Поиск заканчивается, как

только первый из s техников отыщет неисправность. Тогда в предположении о том, что техники работают взаимно независимо, длительность поиска неисправности всеми s техниками имеет экспоненциальное распределение с параметром $s\lambda$.

Введем понятие интенсивности обслуживания. Интенсивность обслуживания $\lambda(x)$ есть функция временного аргумента x , определяемая формулой

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Поясним ее физический смысл. Если рассмотреть достаточно малую положительную величину Δx , то произведение $f(x)\Delta x$ приблизительно равно вероятности того, что в результате однократной реализации случайная величина X (длительность обслуживания) примет значение из интервала $(x, x + \Delta x)$. Поэтому $\lambda(x)dx$ есть вероятность того, что обслуживание закончится в интервале времени $(x, x + dx)$, если оно не закончилось ранее. Итак, если в момент времени x после начала обслуживания последнее еще не закончилось, то $\lambda(x)dx$ есть вероятность окончания обслуживания в близлежащем интервале времени длиной dx .

Для экспоненциального распределения (5.9) имеем

$$\lambda(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} = \lambda.$$

Следовательно, в экспоненциальном случае интенсивность обслуживания постоянна и равна параметру λ . С другой стороны можно показать, что для нормального распределения и распределения Эрланга интенсивность $\lambda(x)$ с ростом аргумента x увеличивается.

Постоянство интенсивности определяет особую роль экспоненциального распределения. В данном случае сведения о том, как долго продолжалось уже обслуживание, не несут никакой информации о том, сколько еще оно будет продолжаться. В связи с этой особенностью экспоненциальное распределение называют *чисто случайным*. Оно характерно для таких работ, в которых элемент случайности превалирует (как, например, в процессе поиска отказа или неисправности).

В экспоненциальном случае интенсивность λ есть величина, обратная средней длительности обслуживания $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Иными словами,

λ есть среднее число обслуживаний, которые закончатся в единицу времени, если обслуживание проводится непрерывно (после окончания одного обслуживания сразу начинается следующее).

Если одновременно проводятся сразу s обслуживаний, причем каждое с интенсивностью λ , то суммарная интенсивность составит $s\lambda$. Это следует из того, что время до первого окончания обслуживания определяется формулой (5.11) — имеет экспоненциальное распределение с параметром $s\lambda$.

5.2. Статистический анализ продолжительности обслуживания

Первым вопросом, который возникает при обработке статистических данных, является вопрос о взаимной независимости продолжительностей обслуживания. Обычно продолжительность обслуживания любого требования не зависит от продолжительности обслуживания других требований, т. е. взаимная независимость имеет место. Например, продолжительность технического обслуживания какого-либо самолета при кратковременной стоянке не зависит от того, сколько времени потребовалось для обслуживания других самолетов. Время, необходимое для оформления кассиром билета данному пассажиру, не зависит от того, сколько времени затратил кассир на оформление билетов предыдущим пассажирам. В дальнейшем свойство взаимной независимости продолжительностей обслуживания будем всегда подразумевать.

Статистический анализ заключается в определении распределения, к которому следует отнести рассматриваемую случайную величину, и в оценке параметров распределения. Для этой цели используются зарегистрированные значения этой случайной величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, где n — число реализаций (наблюдений). Отметим, что результат одной реализации не влияет на результат другой.

В первую очередь на основе имеющихся данных производится оценка среднего значения и дисперсии рассматриваемой случайной величины. Оценки обозначаются соответственно μ^* и σ^{2*} :

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad \sigma^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\mu^*)^2. \quad (5.12)$$

Вместо формулы (5.12) можно использовать формулу (1.10). Найденные значения оценок μ^* и σ^{2*} , вообще говоря, не будут совпадать с истинными значениями μ и σ^2 . Причина этого в том, что мы имеем дело со случайной величиной, так как наблюдаемые значения $X_1, X_2, \dots, X_n$ случайны. Однако с ростом числа наблюдений n оценки имеют тенденцию стремиться к истинным значениям μ и σ^2 .

Оценка среднего значения и дисперсии дает возможность оценить параметры распределения. В случае нормального распределения оценками параметров будут μ^* и $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{2*}}$. Для нахождения оценок в случае распределения Эрланга при $l \geq 2$ следует в формулу (5.8) вместо μ и σ^2 подставить их оценки и решить полученную систему из двух уравнений относительно λ и l . В результате имеем следующие оценки для параметров λ и l :

$$l^* = \left\lfloor \frac{\mu^{*2}}{\sigma^{2*}} \right\rfloor; \quad \lambda^* = \frac{l^*}{\mu^*}, \quad (5.13)$$

где $Ea \text{ Э}$ — целое число, ближайшее к a (необходимость округления до ближайшего целого числа вызвана тем, что как параметр l распределения Эрланга, так и его оценка l^* , должны быть целыми).

В случае экспоненциального распределения известно, что $l=1$, поэтому достаточно использовать только первое равенство формулы (5.8). Оценкой параметра λ здесь будет

$$\lambda^* = \frac{1}{\mu^*}. \quad (5.14)$$

Часто оценки μ^* и σ^{2*} достаточны для решения поставленной задачи. Это имеет место тогда, когда критерии эффективности не зависят от вида распределения длительности обслуживания, а зависят лишь от значений математического ожидания μ и дисперсии σ^2 . В противном случае необходимо решить вопрос о том, к какому типу распределения относится рассматриваемая случайная величина. Для этой цели служит гистограмма, которая строится следующим образом. В первую очередь производится группировка результатов наблюдений. Для этого интервал, содержащий все n значений $X_1, X_2, \dots, X_n$, разбивается на некоторое число интервалов и подсчитывается число данных, попавших в каждый из образованных интервалов. В дальнейшем будем обозначать правые концы интервалов группирования $t_1, t_2, \dots, t_m$, а их длины $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_m$. Левый конец первого интервала обозначим t_0 .

Число данных a_j , попавших в j -ый интервал, есть число таких наблюдений, которые удовлетворяют неравенству $t_{j-1} < X \leq t_j$, где X — значение случайной величины, соответствующее данному наблюдению.

Частотой наблюдения в j -м интервале группирования h_j называется отношение числа наблюдений a_j в этом интервале к общему числу наблюдений n и длине интервала Δt_j :

$$h_j = \frac{a_j}{n \Delta t_j}. \quad (5.15)$$

Если частоты подсчитаны, то можно математическое ожидание и дисперсию оценить по формулам

$$\mu^* = \sum_j h_j (t_{j-1} + 0,5 \Delta t_j); \quad (5.12')$$

$$\sigma^{2*} = \sum_j h_j (t_{j-1} + 0,5 \Delta t_j)^2 - (\mu^*)^2.$$

Эти формулы менее точны, чем формула (5.12), однако они позволяют уменьшить объем вычислений, поскольку имеют дело со сгруппированными данными.

Гистограмма строится в системе координат (t, h) . По оси абсцисс откладываются интервалы группирования. На каждом из интервалов строят прямоугольник, высота которого равна частоте в интервале h_j .

Полученная ступенчатая кривая и называется гистограммой. Формально гистограмму можно определить как графическое изображение ступенчатой функции:

$$f^*(x) = h_j; \quad t_{j-1} < x \leq t_j. \quad (5.16)$$

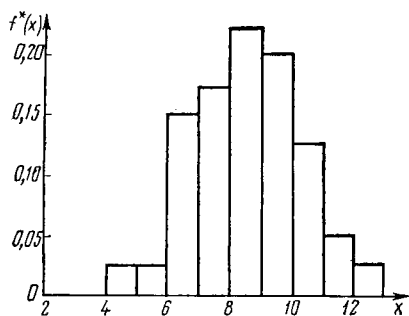


Рис. 9. Гистограмма длительности обслуживания

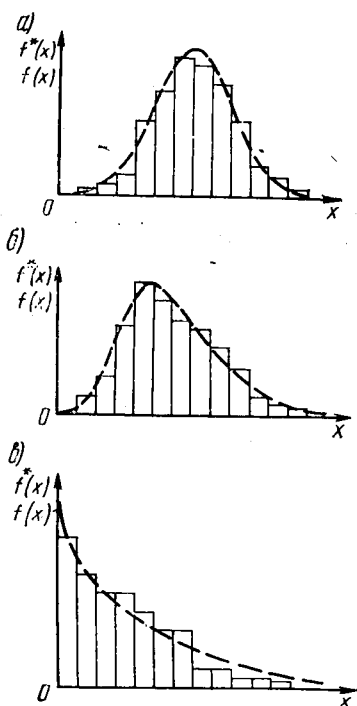


Рис. 10. Виды гистограмм.

Примерный вид гистограммы изображен на рис. 9.

Из построения гистограммы следует, что площадь прямоугольника, лежащего против достаточно малого отрезка оси абсцисс Δx , равна $f^*(x)\Delta x$ и приблизительно составляет долю данных, попавших в интервал $(x, x+\Delta x)$. Сопоставляя это с тем, что $f(x)\Delta x$ есть вероятность принятия случайной величиной значения из интервала $(x, x+\Delta x)$, заключаем, что гистограмма $f^*(x)$ есть эмпирический аналог кривой плотности распределения $f(x)$. Поэтому по внешнему виду гистограммы можно судить о том, какой тип распределения может иметь место в данном случае. Так, если гистограмма достаточно симметрична (рис. 10, а), то следует ожидать нормальное распределение. Если гистограмма асимметрична (рис. 10, б), то можно сделать предположение о распределении Эрланга с $l \geq 2$. Наконец, случаю, изображенному на рис. 10, в, соответствует экспоненциальное распределение.

Суждение о типе распределения по внешнему виду гистограммы допускает произвольный выбор плотности распределения. Поэтому, строго говоря, на основании гистограммы может быть выдвинута только *статистическая* гипотеза о типе распределения. Для *количественной* оценки степени согласия этой гипотезы с имеющимися данными служат *статистические критерии*. Наиболее

распространенным из них является критерий хи-квадрат (χ^2) Пирсона, идея которого заключается в следующем. Пусть $p(j)$ обозначает вероятность того, что случайная величина, следующая определяемому гипотезой распределению, примет значение из j -го интервала группирования (t_{j-1}, t_j) . Тогда $np(j)$ есть среднее число наблюдений в j -ом интервале группирования при условии, что ги-

потеза верна и общее число наблюдений равно n . Так как фактически в этот интервал попало a_j данных, то сопоставление a_j и $np(j)$ дает основание отвергнуть или принять гипотезу. Если расхождение между наблюдаемыми значениями $a_1, a_2, \dots, a_m$ и, соответственно, их теоретическими аналогами $np(1), np(2), \dots, np(m)$ велико, то фактические данные противоречат гипотезе, а если мало, — то подтверждают ее. В качестве меры расхождения берется следующая величина, называемая обычно критерием χ^2 Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(a_j - np(j))^2}{np(j)}. \quad (5.17)$$

Если не все параметры распределения известны, то и истинные значения вероятностей $np(1), np(2), \dots, np(m)$ неизвестны. Однако, оценив по формулам (5.12) — (5.14) параметры, можно оценить и вероятности $p(1), p(2), \dots, p(m)$. Для этого достаточно подставить оценки параметров в функцию распределения $F(x)$, получив таким образом оценку функции распределения $F^*(x)$, и найти искомые оценки по формуле

$$\begin{aligned} p^*(j) &= F^*(t_j) - F^*(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, m-1, \\ p^*(1) &= F^*(t_1), \quad p^*(m) = 1 - F^*(t_{m-1}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Тогда формула (5.17) принимает вид

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(a_j - np^*(j))^2}{np^*(j)}. \quad (5.19)$$

Подсчитанную по этой формуле (или по формуле 5.17, если все параметры известны) величину критерия χ^2 необходимо сравнить с критическим значением $K^{-1}(1-\alpha; v)$. Если вычисленное значение χ^2 меньше $K^{-1}(1-\alpha; v)$, то гипотеза принимается, иначе — отвергается. Критическое значение $K^{-1}(1-\alpha; v)$ определяется по табл. III в зависимости от: числа степеней свободы v ; критического уровня значимости α . Число степеней свободы v определяется по формуле $v = m - r - 1$, где m — число интервалов группирования; r — число оцениваемых параметров распределения.

В случае оценки всех параметров нормального распределения или распределения Эрланга $r=2$, а в случае экспоненциального распределения $r=1$.

Критический уровень значимости α есть допустимая вероятность неправильного отклонения гипотезы. Значением α задаются. Наиболее употребительные критические уровни значимости: 0,10; 0,05; 0,01. Если, например, $\alpha=0,10$, то это значит, что, применяя данное правило отклонения гипотезы, мы будем примерно в 10 случаях из ста действовать неверно, т. е. отвергать верную гипотезу. Величина $1-\alpha$ называется доверительной вероятностью (см. разд. 1.3).

По значениям ν и α величина $K^{-1}(1-\alpha; \nu)$ определяется с помощью табл. III. Так, при $\nu=10$ и $\alpha=0,10$ находим, что

$$K^{-1}(1-\alpha; 10) = K^{-1}(0,9; 10) = 16,0.$$

В заключение отметим, что для корректного применения критерия χ^2 Пирсона необходимо, чтобы общее число данных n было не менее 60—70 и чтобы в каждом интервале группирования имелось не менее 7—10 данных. При невыполнении последнего условия соседние интервалы необходимо объединять.

Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим пример. В табл. 16 приведены данные Чалова о 150 замерах длительности

Таблица 16

Продолжительности технического обслуживания самолета Ил-18

Продолжительность обслуживания, мин

293,	150,	260,	540,	302,	240,	370,	265,	400,	335,	175,	360,	288,
420,	300,	630,	476,	600,	450,	600,	500,	210,	630,	687,	240,	520,
230,	640,	450,	240,	543,	270,	468,	360,	630,	290,	480,	660,	420,
330,	390,	660,	360,	440,	375,	284,	540,	353,	330,	840,	260,	265,
250,	675,	465,	280,	360,	150,	370,	420,	480,	240,	930,	1050,	450,
434,	480,	300,	630,	450,	330,	420,	300,	553,	400,	285,	360,	175,
330,	505,	810,	220,	548,	360,	810,	225,	480,	300,	610,	525,	518,
210,	320,	403,	360,	436,	300,	390,	480,	431,	270,	380,	720,	330,
390,	783,	465,	618,	270,	565,	298,	340,	510,	620,	398,	760,	240,
300,	780,	483,	385,	330,	460,	510,	270,	360,	150,	480,	480,	457,
360,	465,	780,	420,	588,	240,	430,	600,	460,	380,	360,	400,	335,
260,	150,	415,	487,	480,	365,	330,						

Таблица 17

Обработка данных о продолжительности технического обслуживания самолета Ил-18

№ интервала, j	Границы интервала, $t_{j-1}-t_j$	Число наблюдений, a_j	Частость, h_j	$F^*(t_j)$	$p^*(j)$	$np^*(j)$	$\frac{(a_j - np^*(j))^2}{np^*(j)}$	$f_0(t_j)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100—200	6	0,00040	0,068	0,068	10,2	1,73	0,0013
2	200—300	28	0,00187	0,256	0,188	28,2	0	0,0023
3	300—400	40	0,00266	0,501	0,245	36,8	0,28	0,0024
4	400—500	37	0,00247	0,711	0,210	31,5	0,96	0,0018
5	500—600	14	0,00093	0,851	0,140	21,0	2,33	0,0011
6	600—700	15	0,00100	0,930	0,079	11,9	0,81	0,0006
7	700—800	5	0,00033	0,970	0,040	6,0	0,17	0,0003
8	800—900	3	0,00020	—	0,030	4,5	0,06	0,0001
9	900—1000	1	0,00007	—				
10	1000—1100	1	0,00007	0,998				
Сумма		150			1,000	150,1	$\chi^2=6,34$	

технического обслуживания самолетов Ил-18 после 50 ч налета в аэропорту Ташкент. Оценим в первую очередь среднее значение и дисперсию продолжительности обслуживания. Вычисления по формуле (5.12) показывают, что $\mu^* = 422,8$ мин, $\sigma^{2*} = 28590,3$ мин². Оценка среднего квадратического отклонения σ^* составляет 169,1 мин.

Произведем теперь группировку имеющихся данных. Примем длину Δt всех интервалов одинаковой и равной 100 мин. Левый конец первого интервала t_0 также

примем равным 100 мин. Границы интервалов группирования приведены во втором столбце табл. 17. Подсчитаем число данных, попавших в каждый из интервалов, и занесем их в третий столбец этой же таблицы. Последняя строка таблицы служит здесь для контроля, т. е. для проверки того, что $\sum a_j = n = 150$.

В четвертом столбце таблицы подсчитаны частоты в интервалах по формуле (5.15):

$$h_j = \frac{a_j}{n \Delta t_j} = \frac{a_j}{15\,000}.$$

По этим данным и формуле (5.16) на рис. 11 построена гистограмма продолжительности обслуживания. Гистограмма асимметрична, поэтому следует попробовать распределение Эрланга. Параметры этого распределения оцениваются по формулам (5.13):

$$l^* = E \frac{422,8^2}{28590,3} \approx 6; \quad \lambda^* = \frac{6}{422,8} = 0,0142 \frac{1}{\text{мин}}.$$

Подставляя эти оценки в формулы (5.7), находим следующие выражения для оценок функции и плотности распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 - P_{<5}(0,0142x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$f_0(x) = \begin{cases} 0,0142 \frac{(0,0142x)^5}{5!} e^{-0,0142x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислим значения $F^*(x)$ в точках $t_1, t_2, \dots, t_m$. Для $t_1 = 200$ мин по табл. PVIII находим

$$F^*(t_1) = F^*(200) = 1 - P_{<5}(0,0142 \cdot 200) = 1 - P_{<5}(2,84) \approx 1 - 0,932 \approx 0,068.$$

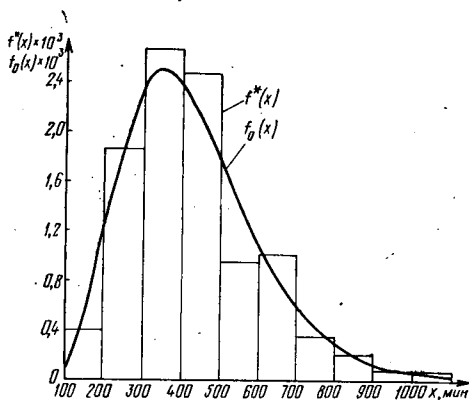


Рис. 11. Гистограмма и кривая плотности распределения длительности обслуживания

Заносим полученное значение в первую строку столбца. Аналогичным образом заполняем весь столбец 5.

Обратим внимание на то, что в каждом из последних трех интервалов группирования содержится менее 5 данных. Поэтому для корректности применения критерия χ^2 Пирсона объединяем эти интервалы, так что после объединения всего остается $m=8$ интервалов.

Оценка вероятности $p^*(j)$ попадания случайной величины в j -ый интервал определяется по формуле (5.18): $p^*(1)=F^*(t_1)=0,068$; $p^*(2)=F^*(t_2)-F^*(t_1)=0,256-0,068=0,188$ и т. д., $p^*(8)=1-F^*(t_7)=1-0,970=0,030$.

Эти оценки приведены в столбце 6.

В столбце 7 содержатся величины $np^*(1)$; $np^*(2)$, ..., $np^*(8)$ — оценки среднего числа попаданий случайной величины в интервалы при условии, что гипотеза верна и общее число наблюдений $n=150$. В восьмом столбце приведены значения $\frac{(a_j - np^*(j))^2}{np^*(j)}$.

В частности, для первого интервала имеем

$$\frac{(a_1 - np^*(1))^2}{np^*(1)} = \frac{(6 - 10,2)^2}{10,2} = 1,73.$$

Сумма элементов восьмого столбца дает значение критерия χ^2 . В данном случае $\chi^2=6,34$. Эту величину необходимо сопоставить с критическим значением $K^{-1}(1-\alpha; \nu)$. Для нахождения последнего примем уровень значимости $\alpha=0,10$.

Учитывая, что было оценено $r=2$ параметра распределения (λ и l) и что после объединения осталось $m=8$ интервалов, число степеней свободы

$$\nu = m - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5.$$

По табл. III находим, что при $\alpha=0,10$ и $\nu=5$ критическое значение $K^{-1}(0,9; 5)=9,24$. Так как вычисленное значение критерия $\chi^2=6,34$ меньше этой величины, то гипотезу следует принять.

В последнем столбце таблицы приведены значения оценки плотности $f_0(x)$ в точках $t_1, t_2, \dots, t_m$. Построенный по этим значениям график представлен на рис. 5. Сопоставление его с гистограммой показывает, что сглаживание хорошее.

Итак, проведенный анализ позволяет считать, что продолжительность технического обслуживания самолета Ил-18 имеет распределение Эрланга с параметрами $\lambda=0,0142$ 1/мин и $l=6$.

5.3. Обобщенная модель формирования продолжительности обслуживания

Рассмотрим модель, являющуюся обобщением нормального и экспоненциального распределений продолжительности обслуживания отдельного требования. Эта модель, в первую очередь, предназначена для описания и анализа продолжительности технического

обслуживания самолетов. Известно, что работы, выполняемые по обслуживанию, делятся на два вида: основные (регламентные) и дополнительные. Дополнительные работы обусловлены устранением выявленных неисправностей и отказов авиационной техники, задержками различного рода и т. п. Основные работы определяются регламентом обслуживания.

Обозначим μ среднюю продолжительность выполнения основных работ. Будем считать, что фактическая продолжительность основных работ имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2 . Пусть p есть вероятность наличия дополнительных работ.

Продолжительность выполнения основных и дополнительных работ (если последние имеются) будем считать случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение со средним значением λ^{-1} .

Плотность и функция распределения общей продолжительности обслуживания в данном случае есть:

$$f(x) = \begin{cases} (1-p) \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & x \leq 0, \\ (1-p) \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + p\lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$F(x) = \begin{cases} (1-p) \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & x \leq 0, \\ (1-p) \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + p(1 - e^{-\lambda x}), & x > 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Математическое ожидание продолжительности обслуживания равно

$$(1-p)\mu + p\lambda^{-1}, \quad (5.22)$$

а дисперсия

$$(1-p)(\sigma^2 + \mu^2) + 2p\lambda^{-2} - p^2\lambda^{-2} - (1-p)^2\mu^2 - 2p(1-p)\mu\lambda^{-1}. \quad (5.23)$$

При вычислениях по формулам (5.20) и (5.21) следует пользоваться табл. PV и PVI.

Рассматриваемое распределение имеет четыре параметра: λ , μ , σ и p .

Остановимся на оценке этих параметров. Пусть из проведенных обслуживаний дополнительные работы были n_d раз. Тогда оценка вероятности

$$p^* = \frac{n_d}{n}. \quad (5.24)$$

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{n-n_d}$ есть зафиксированные значения длительности обслуживания, при которых дополнительных работ не было,

а $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n_{\lambda}}$ — при которых они были. Тогда для оценок можно использовать формулы:

$$\mu^* = \frac{1}{n - n_{\lambda}} \sum_{i=1}^{n-n_{\lambda}} X_i; \quad (5.25)$$

$$\lambda^{-1*} = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_{i=1}^{n_{\lambda}} X'_i; \quad (5.26)$$

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n - n_{\lambda}} \sum_{i=1}^{n-n_{\lambda}} (X_i - \mu^*)^2. \quad (5.27)$$

При $p=0$ частным случаем данного распределения является нормальное распределение, а при $p=1$ — экспоненциальное.

5.4. Описание и статистический анализ потока требований

Поток требований на обслуживание имеет две основные формы задания: аналитическую и эмпирическую. Аналитическая форма заключается в задании распределения промежутков времени между поступлениями последовательных требований. Эмпирическая форма заключается в задании фактического расписания и возможных отклонений от него. Аналитическая форма более удобна для практического использования, так как задает поток с помощью компактных математических формул. Однако она не всегда обеспечивает достаточную точность описания реального потока. Ее применяют для задания потока требований, в котором превалирует случайный, а не плановый характер поступления на обслуживание. Например, эта форма может использоваться для различных видов перронного обслуживания самолетов в случае высокой и примерно постоянной интенсивности соответствующего потока (более точно условия применимости аналитической формы задания при обслуживании самолетов на перроне будут сформулированы ниже).

Эмпирическая форма задания применяется, когда аналитическая форма не дает необходимой точности. Это обычно имеет место, например, для процессов обслуживания самолетов на перроне в случае значительных колебаний интенсивности прилетов и вылетов самолетов в течение рассматриваемого периода. Здесь приходится учитывать плановые моменты прилетов и вылетов самолетов, т. е. расписание, а также возможные отклонения от них.

Рассмотрим методику анализа в случае аналитической формы задания. Эмпирическая форма задания будет исследована в гл. 8.

Наиболее просто аналитическому описанию поддается так называемый *пуассоновский* поток, которым и ограничимся. Пуассоновский поток должен удовлетворять следующим условиям: 1) одновременно может поступить не более одного требования потока; 2) интенсивность потока в течение рассматриваемого периода постоянна; 3) промежутки времени между поступлениями требований

взаимно независимы и имеют экспоненциальное распределение.

Следовательно, чтобы можно было воспользоваться аналитической формой задания, необходимо убедиться в том, что этот поток пуассоновский, т. е. что он соответствует трем перечисленным условиям. Будем предполагать, что первое условие соблюдается. Остановимся на втором условии.

Интенсивность потока обозначается λ и равна среднему числу требований, поступающих за единицу времени. С течением времени интенсивность потока может меняться. Интенсивность потока требований на обслуживание самолетов по прилету днем больше, чем ночью. Это же справедливо для потока пассажиров, желающих приобрести билеты на самолеты, пройти регистрацию в городском аэровокзале, и т. п. Как правило, организация обслуживания, оптимальная при данной интенсивности потока требований, не будет оптимальной при другой. Поэтому для правильной организации обслуживания необходимо выделять периоды различной интенсивности потока и решать задачи для каждого периода.

Для изучения колебаний интенсивности потока необходимо рассматриваемый отрезок времени разбить на несколько интервалов и подсчитать, какое число требований поступает в среднем в течение каждого из интервалов. Результаты могут быть представлены в виде графика, как это показано на рис. 6. График изображает изменение интенсивности взлетов и посадок в одном из аэропортов в течение суток. Из графика видно, что можно выделить два периода, в течение каждого из которых интенсивность потока можно считать постоянной: первый период с 8 до 22 ч и второй период с 22 до 8 ч. Ясно, что работу аэропорта с 8 до 22 ч нужно организовать по одному, а в остальное время — по другому.

Итак, первый этап исследования — это выделение периодов времени, характеризующихся постоянной интенсивностью потока требований. Отметим, что если выделить такие периоды не представляется возможным, то от аналитической формы задания потока требований придется отказаться. Примером такого рода может служить график, изображенный на рис. 12. Во всех случаях необходимо придерживаться следующего правила: выделяемые периоды времени, имеющие постоянную интенсивность потока, должны быть значительно (не менее чем в 5—7 раз) больше среднего времени обслуживания одного требования. Если это условие не соблюдается, то следует воспользоваться эмпирическим методом.

Предположим, что выделены периоды времени достаточной длины. Следующий этап — изучение потока требований в каждом из периодов. Поэтому в дальнейшем будем исходить из того, что интенсивность потока требований в рассматриваемом периоде времени постоянна. В этом случае говорят о *стационарности* потока.

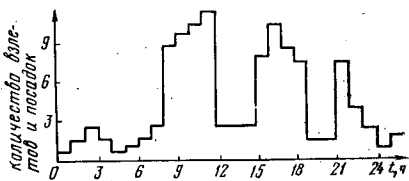


Рис. 12. Пример нестационарного потока требований

Третье условие, которому должен удовлетворять пуассоновский поток, состоит в независимости и экспоненциальном распределении промежутков времени между поступлениями требований. Оно проверяется путем статистического анализа этих промежутков. В первую очередь проверяется гипотеза о взаимной независимости. Проверка идет с помощью специального критерия, который будет описан ниже. Если гипотеза о взаимной независимости принимается, то далее проверяется гипотеза об экспоненциальном распределении.

Хотя среднее число требований, поступающих за единицу времени, т. е. интенсивность, постоянна, промежутки между поступлениями могут сильно колебаться. Поэтому их можно рассматривать как случайные величины и для анализа применять те же методы, что и при исследовании продолжительности обслуживания (разд. 5.2).

Проверкой гипотезы об экспоненциальном распределении заканчивается анализ потока требований. Если проведенный анализ показывает, что поток требований является пуассоновским, то это означает, что рассматриваемый поток удалось описать аналитически. В этом случае поток в течение данного периода характеризуется единственным показателем — интенсивностью λ . Если обнаружено, что поток не является пуассоновским, то следует прибегнуть для его описания к эмпирическому методу

В качестве примера исследуем поток требований на заправку самолетов топливом. Предположим, что рассматривается период времени, в течение которого этот поток имеет постоянную интенсивность. Данные о промежутках между поступлениями требований за этот период времени представлены в табл. 18. Проверим вначале гипотезу о взаимной независимости этих промежутков. Для проверки могут быть использованы различные критерии. Рассмотрим процедуру применения наиболее простого из таких критериев — «критерия числа серий».

Исходные данные записаны в табл. 18 в порядке их поступления (это существенно при проверке на независимость). Запишем теперь их в порядке возрастания. В результате получим так называемый вариационный ряд:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 17, 17, 18, 25, 33.

Найдем средний член этого ряда, вправо и влево от которого располагается одинаковое число элементов. Если общее число членов ряда n нечетное, то это будет член с номером $(n-1):2+1$. Если же общее число членов ряда четное, то таких членов будет два с номерами $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$. В первом случае медианой называется величина среднего члена ряда. Во втором случае медианой назы-

Промежутки времени между поступлениями требований, мин

i X_i	1 8	2 1	3 1	4 7	5 2	6 1	7 1	8 1	9 3	10 12	11 1	12 6	13 14	14 7
i X_i	15 10	16 14	17 25	18 8	19 11	20 10	21 3	22 4	23 4	24 8	25 2	26 4	27 7	28 12
i X_i	29 5	30 2	31 6	32 8	33 1	34 1	35 3	36 9	37 2	38 2	39 3	40 7	41 4	42 2
i X_i	43 1	44 3	45 8	46 1	47 2	48 5	49 2	50 17	51 1	52 1	53 2	54 6	55 7	56 1
i X_i	57 13	58 10	59 5	60 4	61 10	62 5	63 1	64 6	65 7	66 1	67 31	68 8	69 7	50 2
i X_i	71 18	72 2	73 1	74 2	75 5	76 6	77 4	78 17	79 5	80 1				

вается среднее арифметическое членов ряда с номерами $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2} + 1$. Название объясняется тем, что одинаковое число членов ряда будет больше и меньше этого «медианного» значения.

В рассматриваемом примере общее число членов ряда $n=80$. Следовательно, медианой будет среднее арифметическое членов вариационного ряда с номерами 40 и 41. Значения этих членов равны 4 и 5 (в вариационном ряду они выделены полужирным шрифтом). Следовательно, медиана равна 4,5 мин.

Обозначим A промежуток времени между требованиями, больший медианы, т. е. 4,5 мин, а B — промежуток, меньший медианы. Запишем в виде букв A и B последовательность промежутков между требованиями в порядке их поступления, заменяя числа в табл. 18 соответствующими буквами:

$A, B, B, A, B, B, B, B, B, A, B, A, A, A, A; A, A, A, A, A, B, B,$
 $B, A, B, B, A, A, A, B, A, A, B, B, B, A, B, B, B, A, B, B, B, B,$
 $A, B, B, A, B, A, B, B, A, A, B, A, A, A, B, A, A, B, A, A,$
 $B, A, A, A, B, A, B, B, B, A, A, B, A, A, B.$

Назовем *серией* отрезок последовательности максимально возможной длины, состоящий из одних и тех же букв. Например, первая серия последовательности, представленная в вариационном ряду, состоит из одной буквы A , вторая — из двух B , третья — из одной буквы A и т. д. Легко подсчитать, что общее число серий в рассматриваемой последовательности равно 40.

Использование критерия числа серий основано на следующих соображениях. Если промежутки между поступлениями требований взаимно независимы, то любой такой промежуток будет с равной вероятностью как больше своего медианного значения, так и меньше его, независимо от того, какими были предыдущие промежутки. Следовательно, соответствующая последовательность A и B будет чисто случайной, т. е. вероятность появления буквы A или B на любом месте и при любых условиях равна 0,5. Теоретически подсчитано, какому закону в такой последовательности будут следовать некоторые ее характеристики, например число серий. Если члены испытываемой последовательности действительно взаимно независимы, то зарегистрированное число серий будет соответствовать теоретическому. Если же члены последовательности зависимы, то будут наблюдаться отклонения и избыток серий укажет на сильное перемешивание, а недостаток — на сильную группировку букв.

В табл. 19 приводятся нижние и верхние пределы, в которых с вероятностью 0,90 и 0,95 будет лежать число серий при условии взаимной независимости членов последовательности. Например, видно, что при 100 наблюдениях с вероятностью 0,90 число серий будет больше 42 и меньше 59. При том же числе наблюдений с вероятностью 0,95 число серий находится между 40 и 61. Будем отвергать гипотезу, если в случае истинности ее статистические данные с вероятностью 0,95 должны быть иными, чем те, которые получены в действительности. Следовательно, при 100 наблюдениях гипотезу о независимости будем браковать, если подсчитанное число серий меньше 40 и больше 61.

Вернемся к нашему случаю. Из табл. 19 находим, что при 80 наблюдениях число серий должно с вероятностью 0,95 находиться в пределах 31—50. В действительности оно равнялось 40, т. е. лежало в этих пределах. Следовательно, статистические данные не противоречат гипотезе о взаимной независимости промежутков времени между поступлениями требований на заправку самолетов топливом.

Приступим теперь к проверке гипотезы об экспоненциальном распределении промежутков времени между поступлениями. Для этого вначале по формулам (5.12) и (5.14) вычисляем оцен-

Таблица 19

Критерий числа серий

Вероятность встретить R	Число серий, R												
	Число наблюдений, n												
	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	180	200
0,90 0,95	8	6	11	15	19	24	33	42	51	60	70	79	88
	8	15	20	26	32	37	48	59	70	81	91	102	113
	2	6	10	14	18	22	31	40	49	58	68	77	86
	9	15	21	27	33	39	50	61	72	83	93	104	115

ки среднего значения промежутка времени между поступлениями (μ) и параметра экспоненциального распределения (λ):

$$\mu^* = 6 \text{ мин}; \quad \lambda^* = \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{6} \text{ мин}^{-1}.$$

Сгруппируем имеющиеся статистические данные по временным интервалам и подсчитаем относительные частоты в интервалах (табл. 20). Оказывается, 34 промежутка меньше или равны 3 мин, 17 промежутков больше 3 мин и меньше или равны 6 мин и т. д.

По данным табл. 20 построим гистограмму промежутков времени между поступлениями требований (рис. 13). Внешний вид гистограммы соответствует случаю экспоненциального распределения, т. е. пуассоновскому потоку требований. Проверим гипотезу о том, что действительно имеет место экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1/6 \text{ мин}^{-1}$ (табл. 21).

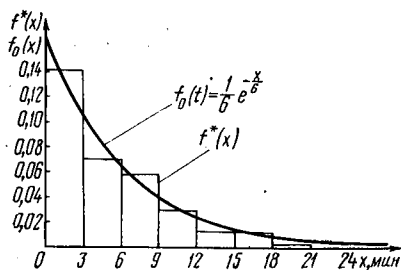


Рис. 13. Гистограмма и кривая плотности распределения интервалов между поступлениями требований

Таблица 20

Обработка данных о промежутках времени между поступлениями требований

Границы интервала	0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—33
Число наблюдений, a_j	34	17	14	7	3	3	2
Частость, h_j	0,142	0,071	0,058	0,029	0,012	0,012	0,002

Таблица 21

Подсчет критерия χ^2

№ интервала, j	Границы интервала, мин, $t_{j-1}-t_j$	Число наблюдений, a_j	$F^*(t_j) = 1 - e^{-t_j/6}$	Оценка вероятности попадания в интервал, $p^*(j)$	Оценка ожидаемого числа попаданий, $np^*(j)$	$\frac{(a_j - np^*(j))^2}{np^*(j)}$	$f_0(t_j) = \frac{1}{6} e^{-t_j/6}$
1	0—3	34	0,39	0,39	31,2	0,25	0,101
2	3—6	17	0,63	0,24	19,2	0,16	0,061
3	6—9	14	0,78	0,15	12,0	0,11	0,037
4	9—12	7	0,85				0,022
5	12—15	3	0,92	0,14	11,2	0,02	0,014
6	15—18	3	0,95				
7	18—∞	2	1,00	0,08	6,4	0,31	0,008
Сумма	80			1,00	80,0	$\chi^2 = 0,85$	

В данном случае нижняя граница первого интервала равна нулю, а верхняя граница последнего интервала равна ∞ . так как в случае экспоненциального распределения диапазон изменения случайной величины есть $(0, \infty)$. Так как пятый, шестой и седьмой интервалы группирования содержат меньше пяти данных (табл. 21), то объединим пятый интервал с четвертым, а шестой — с седьмым. В результате число интервалов группирования (m) станет равным 5. Поскольку экспоненциальное распределение содержит один параметр ($r=1$), то число степеней свободы $\nu = m - r - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$. По табл. III находим, что при $\alpha = 0,10$ и $\nu = 3$ критическое значение $K^{-1}(1 - \alpha; 3) = K^{-1}(0,9; 3) = 6,25$. Поскольку подсчитанное значение критерия χ^2 , равное 0,85, меньше этой величины, то гипотеза об экспоненциальном распределении принимается.

5.5. Применение регрессионных методов при статистическом анализе систем обслуживания

При рассмотрении простейших случаев анализа распределения длительности обслуживания и потока требований предполагалось, в частности, что зарегистрированные значения длительностей обслуживания — одинаково распределенные случайные величины. Часто, однако, оказывается, что это не так, поскольку на длительность обслуживания могут влиять факторы, которые заранее нам известны или которыми мы можем управлять (численность работников, условия труда и т. п.). В этом случае средняя продолжительность обслуживания μ может быть представлена как некоторая функция сопутствующих переменных $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$: $\mu = f(t^{(1)}, t^{(2)}, \dots)$. Если функция f может быть линеаризована (см. разд. 3.1), то для ее оценивания применимы методы теории регрессии.

В качестве примера предположим, что численность исполнителей меняется от обслуживания к обслуживанию. Обозначим $t_1, t_2, \dots, t_n$ численности исполнителей при первом, втором, ..., n -ом обслуживании, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ — соответствующие им зарегистрированные длительности обслуживания. Постулируем следующую регрессионную модель зависимости средней длительности обслуживания μ от численности исполнителей:

$$\mu = \frac{a}{t} \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2}, \quad (5.28)$$

где β_0, β_1 и β_2 — неизвестные коэффициенты (эта зависимость соответствует модели 2 табл. 11); a — трудоемкость обслуживания (известная неслучайная величина).

Рассмотрим преобразование $v = a/\mu t$. В терминах новой величины v зависимость (5.28) примет вид: $v = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$. Неизвестные коэффициенты могут быть оценены теперь по формулам разд. 2.8, в котором рассматривается случай двух сопутствующих переменных $t^{(1)} = t$; $t^{(2)} = t^2$.

В качестве примера приведем выражение для оценки средней длительности обслуживания самолета Ил-18 по определенной форме регламента.

Формула (5.28) в данном случае принимает вид

$$\mu^* = \frac{60}{t} \frac{1}{0,28 + 0,21t - 0,013t^2}, \quad 5 \leq t \leq 12. \quad (5.29)$$

Зависимости средней длительности обслуживания μ от численности исполнителей t могут быть найдены не на основании фактических данных о продолжительностях обслуживания, а по данным построения и анализа сетевых графиков процесса обслуживания [14]. Тогда в качестве зарегистрированных значений длительностей обслуживания будут фигурировать значения длины критического пути сетевого графика, который должен быть построен при различной численности исполнителей.

Интенсивность поступающего потока требований также может быть исследована с помощью регрессионных методов. Необходимость в этом возникает тогда, когда в будущем ожидается изменение факторов, которые влияют на интенсивность потока и которые можно заранее оценить. Если предположить, что интенсивность потока требований растет от года к году в соответствии с тенденцией, изображенной на рис. 1, то прогноз интенсивности на i -ый год можно рассчитать по формуле

$$\lambda_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* i,$$

где β_0^* и β_1^* — оценки, найденные по формулам разд. 1.2.

Далее следует рассмотреть период времени, в течение которого изменение интенсивности мало, так что для него интенсивность можно считать постоянной и равной λ_i^* . Чтобы такое допущение было приемлемым, может оказаться необходимым разбить интересующий нас период на несколько периодов достаточно малой длины.

Глава 6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

6.1. Общие положения

Первым этапом исследования реальных процессов обслуживания является их содержательное описание. На основе этого описания строится математическая модель процесса, включающая описание потока требований и структуры обслуживания. Второй этап состоит в оценке параметров модели и проверке различных статистических гипотез. Эти этапы исследования были подробно освещены в гл. 4 и 5. Следующий этап заключается в определении интересующих нас критериев эффективности обслуживания (см. разд. 4.2), т. е., как принято говорить, в решении построенной математической модели процесса массового обслуживания.

Существуют два основных метода решения моделей массового обслуживания: аналитический и статистического моделирования. Аналитический метод заключается в составлении и аналитическом решении уравнений, описывающих рассматриваемый процесс об-

служивания. Он приводит к явным формулам для критериев эффективности обслуживания (говорят — решению в явном виде). К сожалению, аналитическому расчету поддаются лишь немногие модели массового обслуживания.

Метод статистического моделирования заключается в непосредственной имитации процесса обслуживания. Он будет рассмотрен в гл. 8. Этот метод универсален, т. е. позволяет решать практически любые модели, однако требует для своего применения большого объема вычислительных работ.

6.2. Простейшая модель массового обслуживания в общем случае

Рассмотрение моделей массового обслуживания начнем с наиболее простой. Вначале несколько отклонимся от обычной последовательности описания: поток требований, распределение длительности обслуживания и т. п. Это вызвано тем, что рассматриваемая модель является довольно общей, охватывающей различные варианты потока требований, характера обслуживания и т. д.

Изучаемая модель полностью характеризуется путем указания следующих свойств, которым она должна удовлетворять.

а) Состояние системы (или процесса) массового обслуживания полностью характеризуется количеством находящихся в ней требований.

Если i есть число требований, находящихся в системе, т. е. на обслуживании и в ожидании обслуживания, то будем говорить, что система пребывает в состоянии i ($i=0, 1, \dots$).

Сформулированное свойство накладывает определенные ограничения на систему. В частности, оно требует эквивалентности, идентичности всех требований: все требования имеют один и тот же приоритет, одно и то же распределение длительности обслуживания и т. п.

б) Постулируется наличие установившегося (стационарного) режима функционирования системы. Вероятность состояния i в установившемся режиме обозначим p_i .



Рис. 14. Граф переходов между состояниями

в) Из каждого состояния возможен переход только в соседнее состояние, т. е. из состояния 0 в состояние 1, а из состояния i (для $i=1, 2, \dots$) в состояния $i-1$ и $i+1$.

Данное условие означает, что система не может «перескакивать» через одно и более состояний. Отсюда следует, что поток требований должен быть ординарным, а обслуживание одиночным, а не групповым. Графически это может быть изображено так, как показано на рис. 14.



Рис. 15. Траектория процесса обслуживания

На нем представлен граф переходов между состояниями. В кружочках значатся номера состояний, а стрелки указывают на возможные переходы.

Для того чтобы пояснить сформулированное условие, рассмотрим графическое изображение протекания (реализации или эволюции) процесса.

Так как переход из состояния в состояние происходит мгновенно, то реализацией процесса является изображение на рис. 15 ступенчатая линия.

г) Среднее число переходов системы из состояния i в состояние $i+1$ за единицу времени непрерывного пребывания системы в состоянии i равно v_i^+ , где $i=0, 1, 2, \dots$, а в состоянии $i-1$ равно v_i^- , где $i=1, 2, \dots$. Здесь v_i^+ и v_i^- — известные неотрицательные постоянные.

Предполагается, что они не зависят от времени (условие стационарности) и от того, когда и как система попала в состояние i , т. е. от «предыстории» процесса (это так называемое *марковское свойство* процесса). Величины $\{v_i\}$ называются *интенсивностями переходов*.

Перечисленным ограничениям удовлетворяют многие модели массового обслуживания, имеющие большое распространение на практике. Выведем формулы для вероятностей состояний p_i , считая величины v_i^+ и v_i^- заданными. Отправным будет использование наличия установившегося режима функционирования системы. Установившийся режим означает выполнение условия равновесия, согласно которому за любой промежуток времени среднее число переходов из состояния i в состояние $i+1$ (обозначим эти переходы $i \rightarrow i+1$) равно среднему числу переходов $i+1 \rightarrow i$: рассмотрим на рис. 14 сечение между состояниями i и $i+1$. Если средние числа переходов $i \rightarrow i+1$ и $i+1 \rightarrow i$ не равны, то, поскольку система не может перескакивать через состояния, в некоторый момент времени система покинет одно из этих состояний и больше в него не возвратится. Поэтому вероятность того или другого состояния системы будет зависеть от рассматриваемого момента времени, а это противоречит предположению об установившемся режиме.

Найдем среднее число переходов $i \rightarrow i+1$ в течение единицы времени. Согласно определению величины v_i^+ , среднее число переходов $i \rightarrow i+1$ за время t непрерывного нахождения в состоянии i есть $v_i^+ t$. С другой стороны вероятность p_i — это относительная доля времени нахождения системы в состоянии i . Поэтому за единицу времени система будет находиться в состоянии i в среднем время p_i . Полагая $t=p_i$, находим, что среднее число переходов $i \rightarrow i+1$ за единицу времени составит $p_i v_i^+$. Аналогично этому среднее число переходов $i+1 \rightarrow i$ за единицу времени есть $p_{i+1} v_{i+1}^-$. Приравнявая эти выражения, получаем следующее основное соотношение:

$$p_{i+1} v_{i+1}^- = p_i v_i^+. \quad (6.1)$$

Это уравнение позволяет последовательно вычислить все вероятности p_i через вероятность p_0 отсутствия требований в системе (здесь предполагается $v_j^- \neq 0$ для всех $j \neq 0$):

$$p_i = \frac{v_{i-1}^+}{v_i^-} p_{i-1} = \frac{v_{i-1}^+ v_{i-2}^+}{v_i^- v_{i-1}^-} p_{i-2} = \dots = p_0 \prod_{j=1}^i \frac{v_{j-1}^+}{v_j^-}.$$

Окончательно

$$p_i = p_0 \prod_{j=1}^i v_{j-1}^+ / v_j^- . \quad (6.2)$$

Теперь осталось только найти выражение для p_0 . Оно может быть получено из условия нормировки, согласно которому сумма всех вероятностей должна равняться единице:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i v_{j-1}^+ / v_j^- \right),$$

причем суммирование во второй сумме ведется до первого i , для которого $v_{i-1}^+ = 0$. Итак, вероятность отсутствия требований в системе

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i v_{j-1}^+ / v_j^- \right)^{-1}. \quad (6.3)$$

Формулы (6.2) и (6.3) задают распределение числа требований, находящихся в системе. С помощью их могут быть вычислены основные числовые характеристики эффективности системы массового обслуживания: среднее число требований в системе и в очереди, дисперсии числа требований и т. п. (см. формулы 4.2—4.12).

Рассмотрим случай, когда вероятность $p_0 = 0$, т. е. сумма в выражении (6.3) равняется бесконечности. Из формулы (6.2) следует, что здесь все вероятности p_i равны нулю. Иными словами, требования поступают быстрее, чем их успевает обслуживать система. Число требований в системе при этом непрерывно возрастает, так что установившегося режима не существует. Это позволяет сформулировать следующее «рабочее правило» для определения наличия установившегося режима: установившийся режим существует тогда и только тогда, когда

$$p_0^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i v_{j-1}^+ / v_j^- < \infty. \quad (6.4)$$

Отметим, что если число возможных состояний системы конечно, то конечны число слагаемых фигурирующей здесь суммы и величина p_0 . В этом случае, следовательно, установившийся режим всегда существует.

Рассмотренная модель массового обслуживания охватывает большой класс систем, для которых поток требований является пуассоновским, а распределение длительности обслуживания — экспоненциальным. Применимость описанной модели для таких систем объясняется следующими двумя основными свойствами, ко-

торыми обладают пуассоновский поток и экспоненциальное распределение.

Свойство А. Предположим, что поток требований является пуассоновским с интенсивностью λ . Тогда среднее число требований, поступающих за любые непересекающиеся интервалы времени общей длительностью t , равно λt и не зависит от того, как поступали требования вне этих интервалов.

Отметим, что переходы $i \rightarrow i+1$ имеют место при поступлении требований. Поэтому v_i^+ — это среднее число требований, поступающих за единицу времени пребывания системы в состоянии i . Согласно сформулированному свойству в случае пуассоновского потока

$$v_i^+ = \lambda. \quad (6.5)$$

Для систем с ожиданием эта формула справедлива для всех $i = 0, 1, \dots$. Для систем с отказами эта формула справедлива для $i = 0, 1, \dots, s-1$, где s — число обслуживающих аппаратов, т. е. мест в системе.

Свойство Б. Предположим, что распределение продолжительности обслуживания является экспоненциальным со средним значением μ .

Пусть j обслуживающих аппаратов непрерывно работают в течение любых непересекающихся интервалов времени общей длительностью t .

Тогда среднее число требований, обслуженных за это время, равно jt/μ и не зависит от того, как происходил процесс обслуживания вне этих интервалов (по поводу этого свойства смотрите также последних два абзаца разд. 5.1).

Отметим, что переходы $i \rightarrow i-1$ имеют место при окончаниях обслуживаний. Поэтому v_i^- — среднее число требований, обслуживаемых за единицу времени пребывания системы в состоянии i . Если состоянию i соответствует j работающих аппаратов, то согласно свойству Б

$$v_i^- = j/\mu. \quad (6.6)$$

Формулы (6.2) — (6.6) позволяют рассчитывать широкий класс систем, обладающих свойствами А и Б. Ниже будут рассмотрены различные модификации таких систем.

При этом будут использованы следующие обозначения случайных величин:

U — число требований, находящихся в системе;

V — число требований, ожидающих начала обслуживания;

Γ — длительность ожидания требованием начала обслуживания;

W — длительность пребывания требования в системе.

В этих обозначениях основные показатели эффективности системы массового обслуживания записываются так:

$$u = E(U); v = E(V); \gamma = E(\Gamma); w = E(W),$$

где E — символ математического ожидания случайной величины.

6.3. Простейшая однолинейная система с ожиданием

Рассматривается система, состоящая из одного обслуживающего аппарата. На вход поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Длительность обслуживания одного требования имеет экспоненциальное распределение (5.9) со средним значением μ . Приоритеты требований отсутствуют, количество мест для ожидания и длительность ожидания начала обслуживания в очереди не ограничены. В данном случае формула (6.5) справедлива для $i=0, 1, \dots$. Поскольку имеется один аппарат, то

$$v_i^- = \mu^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Подставляя полученные значения v_i^+ и v_i^- в формулу (6.3), находим вероятность нулевого состояния:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \lambda \mu \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda \mu)^i \right)^{-1} = 1 - \lambda \mu. \quad (6.8)$$

Итак, $p_0 = 1 - \lambda \mu$.

Из формулы (6.2) получаем выражение для вероятности нахождения в системе ровно i требований ($i=0, 1, 2, \dots$):

$$p_i = p_0 \prod_{j=1}^i \lambda \mu = (\lambda \mu)^i (1 - \lambda \mu). \quad (6.9)$$

Величина $\rho = \lambda \mu$ есть коэффициент загрузки. Следовательно,

$$p_0 = 1 - \rho; \quad p_i = \rho^i (1 - \rho), \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Среднее число требований в очереди v и в системе u находится по формулам (4.3) и (4.4):

$$v = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) p_i = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \rho^i (1 - \rho) = \rho^2 (1 - \rho)^{-1}; \quad (6.11)$$

$$u = v + \rho = \rho (1 - \rho)^{-1}. \quad (6.12)$$

Отметим, что здесь было использовано тождество, справедливое при $-1 < c < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i c^i = c (1 - c)^{-2}. \quad (6.13)$$

Вероятность нахождения в системе не более i требований

$$p_{\leq i} = P\{U \leq i\} = \sum_{j=0}^i p_j = 1 - \rho^{i+1}. \quad (6.14)$$

Приступим теперь к вычислению характеристик длительности ожидания начала обслуживания. Предположим, что требование при своем поступлении застаёт в системе ещё i требований, из которых одно уже обслуживается. Вероятность данного события есть p_i . В этом случае вновь поступившему требованию придется ожидать время, равное сумме i слагаемых. Каждое слагаемое имеет

экспоненциальное распределение со средним μ и не зависит от других слагаемых. Такая сумма имеет распределение Эрланга с параметрами $\lambda = \mu^{-1}$ и $l = i$ (см. формулу 5.10). Итак, если в системе застигнуто i требований, то вероятность ожидать не более времени x (см. формулу 5.7)

$$1 - P_{\leq i-1}(\mu^{-1}x) = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu^{-1}x} = \sum_{j=i}^{\infty} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu^{-1}x}. \quad (6.15)$$

Если в системе требований не было, то ожидать не пришлось, т. е. с вероятностью 1 длительность ожидания не превышала x при любом $x \geq 0$. Поэтому безусловная вероятность того, что ожидание требованием начала обслуживания не превысит x , получается произведением p_i на выписанные вероятности и последующим суммированием по i :

$$\begin{aligned} P\{\Gamma \leq x\} &= p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{j=i}^{\infty} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu^{-1}x} = \\ &= p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu^{-1}x} \sum_{i=1}^j p_i = p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu^{-1}x} (\lambda\mu)(1 - \\ &\quad - (\lambda\mu)^j) = p_0 + e^{-\mu^{-1}x} (\lambda\mu) \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^{-1}x)^j \frac{1}{j!} - e^{-\mu^{-1}x} (\lambda\mu) \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda x)^j \frac{1}{j!} = \\ &= p_0 + \lambda\mu e^{-\mu^{-1}x} (e^{\mu^{-1}x} - 1) - \lambda\mu e^{-\mu^{-1}x} (e^{\lambda x} - 1). \end{aligned}$$

Окончательная формула для вероятности ожидания не более времени x (функция распределения времени ожидания) есть.

$$P\{\Gamma \leq x\} = 1 - \rho e^{-(\mu^{-1} - \lambda)x} \quad \text{при } x \geq 0. \quad (6.16)$$

От экспоненциального распределения с параметром $\mu^{-1} - \lambda$ это отличается только тем, что с вероятностью $p_0 = 1 - \rho$ длительность ожидания равняется нулю. Среднее время ожидания γ может быть вычислено по формуле (4.8):

$$\gamma = \mu\rho(1 - \rho)^{-1}. \quad (6.17)$$

Аналогичным образом можно найти характеристики длительности пребывания требования в системе. Разница состоит только в том, что необходимо учитывать и длительность обслуживания рассматриваемого требования (т. е. в упомянутой перед формулой (6.15) сумме следует брать не i , а $i+1$ слагаемых). В результате получаем вероятность того, что требование будет находиться в системе не более времени x (функция распределения времени пребывания в системе):

$$P\{W \leq x\} = 1 - e^{-\mu^{-1}x} - e^{-(1-\rho)\mu^{-1}x}(1 - e^{-\lambda x}). \quad (6.18)$$

Средняя длительность нахождения требования в системе вычисляется по формуле (4.6):

$$w = \mu(1 + \rho(1 - \rho)^{-1}). \quad (6.19)$$

6.4. Многолинейная система с ожиданием

Данная модель отличается от предыдущей только тем, что имеется не один, а несколько обслуживающих аппаратов. Обозначим число аппаратов s . Каждый аппарат обслуживает одновременно только одно требование, причем длительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним μ . Если число требований i больше числа аппаратов s , то s требований, поступивших раньше, обслуживаются, а остальные требования ожидают в очереди. В момент окончания обслуживания очередного требования на обслуживание принимается требование, которое раньше других поступило в систему.

В данном случае формула (6.5) справедлива для $i=0, 1, \dots, s$. Если число требований в системе i меньше числа аппаратов s , то работает только i аппаратов. Поэтому

$$v_i^- = \begin{cases} i\mu & \text{при } i = 1, 2, \dots, s, \\ s\mu & \text{при } i = s, s+1, s+2, \dots \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для v_i^+ и v_i^- в формулу (6.3), находим вероятность отсутствия требований в системе:

$$p_0^{-1} = \sum_{i=0}^{s-1} \prod_{j=1}^i (\lambda\mu/j) + \sum_{i=s}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^s \lambda\mu/j \right) \left(\prod_{j=s+1}^i \lambda\mu/s \right).$$

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} (\rho s)^i \frac{1}{i!} + (\rho s)^s \frac{1}{s! (1-\rho)} \right)^{-1}. \quad (6.20)$$

При $i \leq s$ вероятность наличия i требований в системе

$$p_i = p_0 \rho^i s^i \frac{1}{i!}. \quad (6.21)$$

При $i > s$ эта вероятность

$$p_i = p_0 \rho^i s^s \frac{1}{s!}. \quad (6.22)$$

Вероятность наличия не более i требований в системе

$$p_{\leq i} = \sum_{j=0}^i p_j = p_0 \sum_{j=0}^i \frac{(\lambda\mu)^j}{j!} \quad \text{при } i \leq s, \quad (6.23)$$

$$p_{\leq i} = 1 - p_0 s^s \frac{1}{s!} \rho^{i+1} \frac{1}{1-\rho} \quad \text{при } i \geq s-1.$$

В частности, вероятность нахождения менее s требований

$$p_{< s} = p_{\leq s-1} = 1 - p_0 s^s \rho^s \frac{1}{s! (1-\rho)}. \quad (6.24)$$

Среднее число требований в очереди v и в системе u находится по формулам (4.3) и (4.4). Несложные выкладки, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, показывают, что

$$v = s^s \rho^{s+1} \frac{1}{s!(1-\rho)^2} p_0. \quad (6.25)$$

Распределение длительности ожидания находится тем же путем, что и для однолинейной системы. Если при поступлении требование застает в системе еще i требований, причем $i > s$ (вероятность этого события есть p_i), то в очереди на обслуживание перед данным требованием находится $i-s$ требований. Следовательно, требованию придется ожидать, пока не закончится обслуживание $i-s+1$ требований, чтобы занять освобождающийся аппарат. Поэтому длительность ожидания — это сумма $i-s+1$ случайных величин, каждая из которых есть промежуток времени между последовательными окончаниями обслуживания (выходами требований из системы). Так как работают все s аппаратов, то интенсивность обслуживания есть $\mu^{-1}s$, а указанные промежутки имеют экспоненциальное распределение с параметром $\mu^{-1}s$. Сумма $i-s+1$ таких величин имеет согласно формуле (5.10) распределение Эрланга с параметрами $\lambda = s\mu^{-1}$ и $l = i-s+1$. Итак, если в системе имеется i требований, то функция распределения длительности ожидания

$$P\{\Gamma \leq x/i\} = 1 - P_{<i-s} \left(\frac{xs}{\mu} \right) = 1 - e^{-\mu^{-1}sx} \sum_{j=0}^{i-s} \frac{(\mu^{-1}sx)^j}{j!}.$$

Безусловная функция распределения длительности ожидания

$$P\{\Gamma \leq x\} = \sum_{i=0}^{s-1} p_i + \sum_{i=s}^{\infty} P\{\Gamma \leq x/i\} p_i,$$

где первая сумма соответствует вероятности не ожидать.

После некоторых упрощений получаем такое выражение для функции распределения длительности ожидания:

$$P\{\Gamma \leq x\} = 1 - (1 - p_{<s}) e^{-\mu^{-1}s(1-\rho)x} \quad \text{при } x \geq 0. \quad (6.26)$$

Среднее время ожидания

$$\gamma = p_0 \mu \rho^s s^{s-1} \frac{1}{s!(1-\rho)^2}. \quad (6.27)$$

Аналогичным образом можно получить функцию распределения длительности нахождения требования в системе

$$P\{W \leq x\} = 1 - e^{-\mu^{-1}x} + \frac{1 - p_{<s}}{s - \rho s - 1} e^{-\mu^{-1}s(1-\rho)x} (1 - e^{\mu^{-1}(s-\rho s-1)x}). \quad (6.28)$$

Среднее время нахождения требования в системе подсчитывается по формуле (4.6).

При вычислениях по приведенным формулам следует пользоваться табл. PVI—PVIII.

В качестве примера рассмотрим задачу определения потребного фонда самолетных радиолакационных изделий определенного вида (см. разд. 4.1.). Пусть имеются две установки, на которых производится обслуживание (проверка и ремонт) изделий ($s=2$). Интенсивность потока неисправных изделий (требований) составляет $\lambda=0,2$ 1/ч. Среднее время обслуживания одного изделия равняется 6 ч. Необходимо найти такое число изделий оборотного фонда n_0 , при котором вероятность простоя самолетов не превысит 0,01.

Предположим, что число изделий оборотного фонда равно n . Простой не будет иметь место тогда, когда число неисправных изделий (требований в системе) не превышает n . Следовательно, необходимо найти минимальное n , при котором вероятность $p_{\leq n}$ не менее 0,99.

Непосредственные вычисления показывают, что $\rho=0,2 \cdot 6/2=0,6$;

$$1 - \rho = 0,4; (1 - \rho)^2 = 0,16; \rho s = 1,2; (\rho s)^s / s! = 0,72;$$

$$p_0 = (1 + 1,2 + 0,72/0,4)^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Пусть $n=5$. Тогда $\rho^{n+1}=0,6^6 \approx 0,046656$ и по формуле (6.23) находим

$$p_{\leq 5} = 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6^6 \cdot \frac{1}{0,4} \approx 1 - \frac{1}{0,8} \cdot 0,046656 \approx 0,9417 < 0,99.$$

Последовательно увеличивая число n , находим, что необходимо $n_0 = 10$ изделий, так как $p_{\leq 9} \approx 0,9874 < 0,99$; $p_{\leq 10} \approx 0,9924 > 0,99$. Интересно найти и другие характеристики рассматриваемой системы. Среднее число изделий v , ожидающих обслуживания, и среднее число неисправных изделий u вычисляются по формулам (6.25) и (4.4):

$$v = 0,72 \cdot 0,6 \cdot \frac{1}{0,16} \cdot \frac{1}{4} = 0,675; u = 0,675 + 1,2 = 1,875.$$

Среднее время ожидания изделием начала обслуживания находится по формуле (4.8):

$$\gamma = 0,675/0,2 = 3,375 \text{ ч.}$$

Вероятность того, что изделие будет принято на обслуживание без ожидания,

$$p_{< 2} = 1 - \frac{1}{4} \cdot 0,72 \cdot \frac{1}{0,4} = 0,55.$$

Функция распределения времени ожидания начала обслуживания, согласно (6.26),

$$P\{\Gamma \leq x\} = 1 - (1 - 0,55)e^{-\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 0,4x} \approx 1 - 0,45e^{-0,13x}.$$

В частности, вероятность ожидать изделию начала обслуживания менее 1 ч $P\{\Gamma \leq 1\} = 1 - 0,45e^{-0,13} = 1 - 0,45 \cdot 0,8781 \approx 0,6$.

6.5. Бесконечно линейная система

Часто при рассмотрении реальных ситуаций оказывается, что аппаратов так много, что в математической модели их число можно считать бесконечно большим. Точнее говоря, число аппаратов таково, что требованиям, как правило, не приходится ожидать начала обслуживания. Очевидно, что это соответствует случаю, когда фактический коэффициент загрузки весьма мал (например, менее 0,5).

Допущение о бесконечном числе аппаратов удобно тем, что при этом значительно упрощаются расчетные формулы и их доказательство.

В других ситуациях допущение о бесконечном числе аппаратов обусловлено тем, что понятие обслуживающего аппарата четко не определено. Рассмотрим, например, процесс ожидания пассажирами в аэровокзале начала посадки на свой рейс. Обслуживанием здесь является пребывание пассажира в аэровокзале. Число обслуживающих аппаратов, т. е. мест в аэровокзале, четко не определено, поскольку как бы ни был переполнен аэровокзал, с каждой минутой момент вылета всех пассажиров приближается, т. е. идет обслуживание всех требований. Естественно в этих условиях при построении математической модели считать число аппаратов бесконечным.

Итак, рассматривается система, на вход которой поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Длительность обслуживания каждого требования — экспоненциальная со средним значением μ , число аппаратов — бесконечно большое.

В силу последнего обстоятельства ни одному требованию не придется ожидать, т. е. все находящиеся в системе требования обслуживаются. Если в системе i требований, то суммарная интенсивность их обслуживания составляет $i\mu^{-1}$. Поэтому интенсивность перехода $i \rightarrow i-1$ есть $v_i^- = i\mu^{-1}$. Так как входящий поток пуассоновский, то интенсивность перехода $i \rightarrow i+1$ будет $v_i^+ = \lambda$. Подставляя это в формулу (6.3), получаем вероятность отсутствия требований в системе

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \lambda / j\mu^{-1} \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^i}{i!} \right)^{-1} = e^{-\lambda\mu}. \quad (6.29)$$

Вероятность нахождения в системе i требований определяется по формуле (6.2):

$$p_i = e^{-\lambda\mu} \prod_{j=1}^i \lambda / j\mu^{-1} = \frac{(\lambda\mu)^i}{i!} e^{-\lambda\mu}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.30)$$

Это есть распределение Пуассона с параметром $\lambda\mu$, так что для вычислений по этой формуле можно пользоваться соответствующей таблицей (см. табл. IVII).

Вероятность того, что требований в системе не более i ,

$$P\{V \leq i\} = e^{-\lambda\mu} \sum_{j=0}^i \frac{(\lambda\mu)^j}{j!}. \quad (6.31)$$

При вычислениях следует пользоваться табл. PVIII при $a = \lambda\mu$.

Так как для распределения Пуассона с параметром a среднее и дисперсия равны a , то среднее число требований в системе и дисперсия его

$$u = \lambda\mu. \quad (6.32)$$

6.6. Однолинейная система с ограниченным числом мест для ожидания

Рассматриваемая система аналогична системе из разд. 6.3: пуассоновский поток требований с интенсивностью λ , один аппарат, экспоненциально распределенная длительность обслуживания со средним μ , но предполагается, что общее число мест в системе (мест в очереди плюс одно место обслуживания) равно n . Последнее условие означает, что если прибывающее требование застаёт в системе менее n требований, то оно принимается на обслуживание или в очередь. Если число заставляемых требований равно n , то требование получает отказ (теряется).

В данном случае, как несложно видеть, имеем:

$$v_i^+ = \lambda, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad v_i^+ = 0, \quad i = n, n+1, \dots$$

$$v_i^- = \mu^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

По формуле (6.3) находим вероятность отсутствия требований в системе:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i \lambda\mu\right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^n (\lambda\mu)^i\right)^{-1} = \frac{1 - \lambda\mu}{1 - (\lambda\mu)^{n+1}}. \quad (6.33)$$

Эта вероятность всегда больше нуля, так как сумма в формуле (6.3) состоит из конечного числа слагаемых и, следовательно, конечна. Поэтому стационарное состояние системы существует всегда при $n < \infty$. Физически это ясно и непосредственно: очередь не может расти бесконечно, поскольку число мест ограничено.

Теперь, основываясь на формуле (6.2), можно показать, что вероятность наличия в очереди и системе i требований

$$p_i = (\lambda\mu)^i \frac{1 - \lambda\mu}{1 - (\lambda\mu)^{n+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.34)$$

Вероятность того, что в системе не более i требований,

$$p_{\leq i} = P\{U \leq i\} = \frac{1 - (\lambda\mu)^{i+1}}{1 - (\lambda\mu)^{n+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.35)$$

Коэффициент использования аппарата $\rho' = 1 - p_0$.

Среднее число требований в системе

$$u = \frac{\lambda\mu}{1 - \lambda\mu} - (n + 1)(\lambda\mu)^{n+1} (1 - (\lambda\mu)^{n+1})^{-1}. \quad (6.35)$$

Требование получает отказ, если застает в системе n требований, вероятность чего p_n . Следовательно, вероятность отказа

$$p_n = (\lambda\mu)^n \frac{1 - \lambda\mu}{1 - (\lambda\mu)^{n+1}}. \quad (6.37)$$

Среднее число требований, получающих отказ в течение единицы времени,

$$\lambda p_n = \lambda (\lambda\mu)^n \frac{1 - \lambda\mu}{1 - (\lambda\mu)^{n+1}}. \quad (6.38)$$

6.7. Многолинейная система с отказами

Предположим, что имеется s обслуживающих аппаратов, а мест для ожидания начала обслуживания нет. Если вновь поступившее требование застает все аппараты занятыми, то оно получает отказ и теряется. Если при поступлении хотя бы один аппарат оказывается свободным, то требование немедленно принимается на обслуживание. Пусть, как и прежде, поток пуассоновский с интенсивностью λ , обслуживание экспоненциальное со средним μ .

В рассматриваемом случае интенсивности переходов определяются выражениями

$$v_i^+ = \lambda, \quad i = 0, 1, \dots, s-1; \quad v_i^+ = 0, \quad i = s, s+1, \dots;$$

$$v_i^- = i\mu^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Отметим, что так как $v_i^+ = 0$ при $i \geq s$, то значения v_i^- для $i > s$ можно не определять. Кроме того, сумма (6.4) содержит конечное число слагаемых и поэтому сама конечна. Отсюда следует, что установившийся режим существует всегда.

Вероятность отсутствия требований в системе

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^i \lambda\mu^j \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^s (\lambda\mu)^i \frac{1}{i!} \right)^{-1}. \quad (6.39)$$

Вероятность наличия в системе i требований

$$p_i = \frac{(\lambda\mu)^i}{i!} p_0. \quad (6.40)$$

В частности, вероятность занятости всех аппаратов, т. е. вероятность отказа

$$p_s = \frac{(\lambda\mu)^s}{s!} p_0. \quad (6.41)$$

Вероятность наличия в системе не более i требований

$$p_{\leq i} = P \{U \leq i\} = p_0 \sum_{j=0}^i (\lambda \mu)^j \frac{1}{j!}. \quad (6.42)$$

Среднее число требований в системе

$$u = \lambda \mu \left(1 - p_0 \frac{1}{s!} (\lambda \mu)^s \right). \quad (6.43)$$

Так как все требования, находящиеся в системе, обслуживаются, то u есть одновременно среднее число занятых аппаратов. Поскольку общее число аппаратов s , то коэффициент использования аппаратов $\rho' = u/s$.

6.8. Однолинейная система с конечным потоком требований

Отличие этой системы от рассмотренной в разд. 6.2 заключается во входящем потоке требований. Если там он был пуассоновским, то теперь предполагается, что имеется m объектов (станков, наземных радиолокационных станций), подлежащих обслуживанию. Если объект исправен, то он непрерывно работает. В процессе работы объект отказывает в случайные моменты времени независимо от других объектов. Распределение продолжительности безотказной работы является экспоненциальным с параметром λ . Следовательно, интенсивность отказов исправно работающего объекта (т. е. число отказов за единицу времени непрерывной работы) есть λ .

Итак, предположим, что имеется один обслуживающий аппарат. Требованием на обслуживание является отказавший объект, а обслуживанием — восстановление работоспособности объекта. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним значением μ . Как только аппарат закончит обслуживание очередного требования (объекта), то он немедленно переходит к обслуживанию других требований (отказавших объектов), если такие имеются. Обслуженный объект сразу начинает работать. Если при отказе объекта аппарат свободен, то он немедленно приступает к обслуживанию. Если аппарат занят, то объект простаивает в ожидании начала обслуживания.

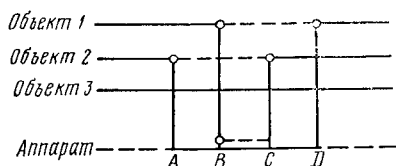


Рис. 16. Схема обслуживания

Рис. 16 поясняет рассматриваемую систему обслуживания. Изображенному случаю соответствуют три объекта, обслуживаемых одним аппаратом. Сплошные линии на рисунке указывают на исправную работу объектов, а пунктирные — на простои. Горизонтальная ось является осью времени. Как видно, третий объект все время работал ис-

правно. Первым отказал второй объект в момент A . Так как аппарат был в это время свободен, то он приступил к обслуживанию этого объекта. В момент B отказал первый объект. Поскольку аппарат был занят обслуживанием, то первый объект простаивал в ожидании до момента C — момента окончания обслуживания второго объекта. Обслуживание его закончилось в момент D . Итак, простой составили: для первого объекта в течение интервала времени BD (причем, в интервале BC был простой в ожидании обслуживания); для второго объекта — в течение интервала AC ; для обслуживающего аппарата — до момента A и после момента D .

Рассмотрим подробнее описанную систему. Пусть из m объектов $m-i$ работают и, следовательно, i — простаивают. Обозначим соответствующую вероятность p_i . Суммарная интенсивность отказов $m-i$ работающих объектов есть $\lambda(m-i)$. Следовательно, $v_i^+ = \lambda(m-i)$ при $i=0, 1, 2, \dots, m$ и $v_i^+ = 0$ при $i > m$. Из i простаивающих объектов обслуживается только один, причем с интенсивностью μ^{-1} . Поэтому интенсивность перехода $i \rightarrow i-1$ есть μ^{-1} при $i > 0$ и нуль при $i=0$.

Используем теперь формулу (6.3). Так как при $m < \infty$ число состояний системы конечно, то конечна и сумма (6.4) и установившийся режим существует при любых λ и μ . Вероятность отсутствия требований (объектов) на обслуживании

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^m \frac{i}{j=1} \prod \lambda_{\mu}(m-j+1) \right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i=1}^m (\lambda_{\mu})^i m! / (m-i)! \right)^{-1} = \\ = \left(m! (\lambda_{\mu})^m \sum_{i=0}^m (\lambda_{\mu})^{-i} / i! \right)^{-1}. \quad (6.44)$$

Вероятность того, что будут простаивать i объектов, из которых только одно обслуживается,

$$p_i = p_0 \prod_{j=1}^i \lambda_{\mu}(m-j+1) = p_0 (\lambda_{\mu})^i m! / (m-i)!. \quad (6.45)$$

Это выражение можно записать более удобной формулой, позволяющей использовать при вычислениях таблицы распределения Пуассона:

$$p_i = \left(e^{-\frac{1}{\lambda_{\mu}}} \left(\frac{1}{\lambda_{\mu}} \right)^{m-i} \frac{1}{(m-i)!} \right) \left(e^{-\frac{1}{\lambda_{\mu}}} \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{\lambda_{\mu}} \right)^j \frac{1}{j!} \right)^{-1}. \quad (6.46)$$

Среднее число всех простаивающих объектов

$$v = \sum_{i=1}^m i p_i. \quad (6.47)$$

Коэффициент использования объектов составит

$$\frac{m-v}{m} = 1 - \frac{v}{m}. \quad (6.48)$$

Коэффициент использования (загрузки) обслуживающего аппарата

$$\rho = 1 - p_0. \quad (6.49)$$

Так как ρ — это доля времени, в течение которого аппарат занят, а μ — средняя длительность одного обслуживания, то среднее количество обслуженных аппаратом объектов за единицу времени составит $\rho\mu^{-1}$. Поскольку режим установившийся, то среднее число обслуженных объектов равно среднему числу отказов. Следовательно, среднее число отказов объектов (поступлений на обслуживание) за единицу времени

$$\rho\mu^{-1} = (1 - p_0)\mu^{-1}. \quad (6.50)$$

Пусть ω есть средний простой объекта, приходящийся на один отказ (среднее время пребывания в системе обслуживания). Тогда $\omega\rho\mu^{-1}$ есть суммарный простой всех объектов в течение часа. С другой стороны, этот суммарный простой равен v . Отсюда находим выражение для среднего простоя ω :

$$\omega = \mu v / \rho. \quad (6.51)$$

Типичным примером может служить процесс обслуживания одним рабочим группы автоматических станков на авиаремонтном заводе. Пусть имеются 3 станка ($m=3$), интенсивность отказа станка $\lambda=1$ 1/ч, среднее время обслуживания $\mu=0,1$ ч. По формуле (6.44) находим вероятность того, что все станки исправны и работают:

$$p_0 = (3! \cdot 0,1^3 (1 + 0,1^{-1} + 0,1^{-2}/2! + 0,1^{-3}/3!))^{-1} = 0,732.$$

Вероятности того, что простаивают один, два и все станки определяются по формуле (6.45):

$$p_1 = 0,732 \cdot 0,1 \cdot 3 = 0,220; \quad p_2 = 0,044; \quad p_3 = 0,004.$$

Среднее число простаивающих станков $v = 1 \cdot 0,220 + 2 \cdot 0,044 + 3 \times 0,004 = 0,320$. Коэффициент использования рабочего времени $\rho = 1 - 0,732 = 0,268$.

6.9. Однолинейная система с ожиданием при произвольном распределении длительности обслуживания

Рассмотрим однолинейную систему, на которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Предполагается, что ограничения на длину очереди и на время пребывания требований в ней отсутствуют. Распределение длительности обслуживания одного требования произвольное, однако предполагается, что среднее значение μ и дисперсия длительности обслуживания конечны и плотность распределения $f(x)$ существует.

Выведем формулы для среднего числа требований в системе n и среднего времени ожидания начала обслуживания требованием y . Выражение для n справедливо при любой дисциплине обслуживания, не зависящей от фактических длительностей обслуживания

требований. Выражение для γ будет выведено в предположении дисциплины строгой очереди: первым пришел — первым обслужен. Формулы для γ и u , которые будут ниже приведены, называются формулами Поллачека — Хинчина — по имени французского математика Ф. Поллачека и советского математика А. Я. Хинчина, впервые их получившими. Они являются одним из фундаментальных результатов теории массового обслуживания и очень широко применяются на практике.

В рассматриваемом случае коэффициент загрузки обслуживающего аппарата $\rho = \lambda \mu$. Если он меньше единицы, то существует установившийся режим работы (это ясно из физических соображений и можно доказать строго). Будем в дальнейшем предполагать, что $\rho < 1$, и исследовать установившийся режим.

Сосредоточим внимание на моментах убывтия требований из системы. Обозначим Q число требований, которое оставляет после себя в системе некоторое убывающее требование, Q' число требований, остающееся в системе после убывтия следующего требования. Обозначим Z число требований, поступающих за время обслуживания этого следующего требования. Случайные величины Q и Q' связаны таким соотношением:

$$Q' = \begin{cases} Q - 1 + Z & \text{при } Q > 0, \\ Z & \text{при } Q = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Действительно, если $Q = 0$, то первое из рассматриваемых требований оставляет систему пустой. Поэтому в момент убывтия следующего требования в системе остается столько требований, сколько поступило за время обслуживания этого требования, т. е. Z . Если $Q > 0$, то второе требование уже находилось в системе в момент убывтия первого. При убывтии второго требования число требований в системе по сравнению с первоначальным уменьшится на единицу и увеличится на Z — число поступивших за время обслуживания требований. Выражение (6.52) можно записать более компактно, если использовать следующее обозначение, называемое единичной функцией Хевисайда:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (6.53)$$

Заметим, в частности, что $U(2) = 1$; $U(0) = 0$. Теперь эквивалентным формуле (6.52) будет следующее выражение:

$$Q' = Q + Z - U(Q). \quad (6.54)$$

Далее понадобится математическое ожидание $E(Z)$ и дисперсия $D(Z)$ числа требований, поступающих в систему за время обслуживания одного требования. Найдем эти характеристики.

Предположим, что длительность обслуживания требования в точности равна x . Так как входящий поток пуассоновский, то число требований за время x будет иметь распределение Пуассона с параметром $a = \lambda x$. Среднее значение при этом составит λx . Следовательно, условное математическое ожидание числа поступающих требований при условии, что длительность обслуживания есть x ,

равно λx . Безусловное математическое ожидание получается интегрированием этого выражения.

Вероятность того, что длительность обслуживания заключена в интервале $(x; x+dx)$, есть $f(x)dx$. Поэтому безусловное математическое ожидание получится, если умножить λx на $f(x)$ и проинтегрировать в бесконечных пределах по x от 0 до ∞ :

$$E(Z) = \int_0^{\infty} \lambda x f(x) dx = \lambda \mu, \quad (6.55)$$

так как через μ была обозначена средняя длительность обслуживания, вычисляемая по формуле (5.4).

Аналогично находим второй начальный момент числа требований $E(Z^2)$, поступающих за длительность обслуживания. Если длительность обслуживания есть x , то этот момент, как следует из свойств распределения Пуассона, есть $\lambda x + (\lambda x)^2$. Поэтому

$$E(Z^2) = \int_0^{\infty} (\lambda x + (\lambda x)^2) f(x) dx = \lambda \mu + \lambda^2 \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \lambda \mu + \lambda^2 \mu_2,$$

где μ_2 — второй начальный момент длительности обслуживания, выражающийся через дисперсию длительности обслуживания σ^2 по формуле

$$\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Возвратимся снова к рассмотрению основного соотношения (6.54). В стационарном режиме вероятностные свойства случайных величин Q' и Q , очевидно, одинаковы. В частности,

$$E(Q') = E(Q); \quad E((Q')^2) = E(Q^2). \quad (6.56)$$

Возьмем математические ожидания от левой и правой частей соотношения (6.54). С учетом выражения (6.56) получаем:

$$E(U(Q)) = E(Z) = \lambda \mu = \rho.$$

$U(Q)$ равно нулю, если обслуженное требование оставляет систему пустой, и единице, если после его ухода в системе требования еще остаются. Следовательно, $E(U(Q))$ есть вероятность того, что уходящее из системы требование не оставит систему пустой:

$$E(U(Q)) = 1 - P\{Q=0\}, \text{ т. е. } P\{Q=0\} = 1 - \rho. \quad (6.57)$$

Опять рассмотрим соотношение (6.54). Возведем обе части его в квадрат и возьмем математические ожидания:

$$E((Q')^2) = E(Q^2) + E(Z^2) + E(U(Q)^2) + 2E(QZ) - 2E(QU(Q)) - 2E(ZU(Q)).$$

Заметим, что $(U(Q))^2 = U(Q)$ и $QU(Q) = Q$. Тогда с учетом выражений (6.56) получаем

$$0 = E(Z^2) + E(U(Q)) + 2E(QZ) - 2E(Q) - 2E(ZU(Q)).$$

Так как Q и Z , а также $U(Q)$ и Z независимы, то имеем

$$E(QZ) = E(Q)E(Z) = E(Q)\lambda\mu;$$

$$E(ZU(Q)) = E(Z)E(U(Q)) = (\lambda\mu)^2.$$

Поэтому

$$0 = \lambda\mu + \lambda^2\mu_2 + \lambda\mu + 2E(Q)\lambda\mu - 2E(Q) - 2(\lambda\mu)^2.$$

Отсюда находим выражение для среднего значения Q :

$$E(Q) = \frac{\lambda(2\mu + \lambda\mu_2 - 2\lambda\mu^2)}{2(1 - \lambda\mu)}.$$

Оно может быть также записано в виде

$$E(Q) = \rho + \frac{\lambda^2\mu_2}{2(1 - \rho)} = \rho + \lambda^2 \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2(1 - \rho)}. \quad (6.58)$$

Установим теперь связь между вероятностями $P\{Q=i\}$ и вероятностями нахождения i требований в системе p_i . Оказывается, что в рассматриваемом случае

$$P\{Q=i\} \equiv p_i,$$

т. е. эти вероятности совпадают.

Это обстоятельство интерпретируется следующим образом. В случае пуассоновского потока требований p_i — это есть доля требований, застающих при своем поступлении i требований в системе. С другой стороны $P\{Q=i\}$ — это доля требований, которые при уходе из системы оставляют в ней i требований. Если рассмотреть траекторию реализации процесса обслуживания (см. рис. 15), то p_i — это доля (вероятность) скачков траектории типа $i \rightarrow i+1$, а $P\{Q=i\}$ — это доля (вероятность) скачков $i+1 \rightarrow i$. Поскольку рассматривается стационарный режим работы системы и перескоки через состояния недопустимы, то доля скачков $i \rightarrow i+1$ равна доле скачков $i+1 \rightarrow i$, т. е.

$$P\{Q=i\} \equiv p_i, \quad u = E(Q).$$

Напомним также, что p_i есть доля времени, в течение которого в системе находится ровно i требований (т. е. вероятность нахождения i требований в системе).

В частности, при $i=0$ мы уже получили это соотношение (см. формулу 6.57).

Найдем теперь выражение для среднего времени пребывания требования в системе. Предположим, что некоторому требованию пришлось находиться в системе время x . Среднее число требований, поступивших за это время, составляет λx . Так как среднее значение x есть по определению ω , то среднее число требований, поступающих за время пребывания требования в системе, равно $\lambda\omega$. С другой стороны среднее число требований, поступающих за время пребывания данного требования в системе, это среднее число требований $E(Q)$, остающихся после ухода данного требования

из системы. Напомним, что рассматривается дисциплина строгой очереди. Поэтому $E(Q) = \lambda \omega$. Отсюда находим

$$w = \frac{E(Q)}{\lambda} = \mu + \lambda \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2(1 - \rho)}. \quad (6.59)$$

Среднее время ожидания начала обслуживания

$$\gamma = w - \mu = \lambda \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2(1 - \rho)}. \quad (6.60)$$

Интересно проанализировать, как влияет дисперсия длительности обслуживания σ^2 на среднюю длительность ожидания γ . В случае экспоненциального распределения длительности обслуживания $\sigma^2 = \mu^2$. Поэтому

$$\gamma = \lambda \frac{\mu^2}{1 - \rho},$$

что соответствует формуле (6.17), выведенной для этого случая. В случае постоянной длительности обслуживания $\sigma^2 = 0$, так что

$$\gamma = \lambda \frac{\mu^2}{2(1 - \rho)}. \quad (6.61)$$

Сопоставление формул (6.17) и (6.61) показывает, что при одинаковых коэффициентах загрузки ρ средняя длительность ожидания γ уменьшается для случая постоянной длительности обслуживания по сравнению с экспоненциальной в 2 раза.

6.10. Приближенное выражение для средней длительности ожидания в многолинейной системе с произвольным распределением длительности обслуживания

Отличие модели, рассматриваемой в этом разделе, от модели, изученной в предыдущем, состоит только в том, что система обслуживания многолинейна. Для столь общего случая существует следующий метод нахождения приближенного значения среднего времени ожидания, предложенный в работе [29].

Пусть, как и раньше, λ — интенсивность потока требований, μ и σ — среднее значение и среднее квадратическое отклонение длительности обслуживания, s — число обслуживающих аппаратов. В первую очередь по приведенным в разд. 6.4 формулам вычисляем среднее значение времени ожидания для случая, когда время обслуживания имеет экспоненциальное распределение. Обозначим это значение, найденное при заданных λ , μ и s , через γ' . Тогда среднее время ожидания γ , соответствующее нашему случаю, приблизительно равно этому значению γ' , умноженному на поправочный коэффициент $\Delta(k)$:

$$\gamma = \gamma' \Delta(k). \quad (6.62)$$

Поправочный коэффициент $\Delta(k)$ вычисляется по формуле

$$\Delta(k) = \frac{k^2 + 1}{2}, \quad (6.63)$$

где $k = \sigma/\mu$ — коэффициент вариации времени обслуживания.

Значения $\Delta(k)$ при разном k представлены на рис. 17. Из формулы (6.62) при $k=1$ для экспоненциального распределения длительности обслуживания (когда $\mu = \sigma$ и $k=1$) вытекает формула (6.17), а для постоянной длительности обслуживания (когда $\sigma = k=0$) — формула (6.61). Поэтому противоречия с ранее выведенными формулами не наблюдается.

В качестве примера рассмотрим процесс технического обслуживания самолетов по форме 1. Найдем среднее время ожидания в случае произвольного распределения длительности обслуживания, если имеется $s=7$ бригад, интенсивность поступления самолетов составляет $\lambda = 2^{1/4}$, характеристики длительности обслуживания самолета одной бригадой: $\mu = 3$ ч, $\sigma = 1$ ч.

Коэффициент загрузки обслуживающих аппаратов (бригад)

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \mu}{s} = \frac{2 \cdot 3}{7} \approx 0,86.$$

По формуле (6.27) вычислим среднее время ожидания в случае экспоненциального распределения. Для этого найдем вначале ρ_0 . Так как $\rho s = 6$, то из табл. PVIII находим, что при $a=6$

$$\sum_{i=0}^{s-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a} = \sum_{i=0}^6 \frac{6^i}{i!} e^{-6} = 0,6063.$$

Из табл. PVII находим, что $e^{-6} = 0,0025$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{s-1} \frac{a^i}{i!} = \frac{0,6063}{0,0025} = 242,52.$$

Далее, с помощью табл. PVII находим, что

$$\frac{(\rho s)^s}{s!} e^{-\rho s} = \frac{6^7}{7!} e^{-6} = 0,1377.$$

Поэтому
$$\frac{(\rho s)^s}{s!} = e^{\rho s} \left(e^{-\rho s} \frac{(\rho s)^s}{s!} \right) = \frac{0,1377}{0,0025} = 55,08.$$

Теперь по формуле (6.20) получаем

$$\rho_0 = \left(\frac{55,08}{1 - 0,86} + 242,52 \right)^{-1} \approx \frac{1}{635} \approx 0,00158.$$

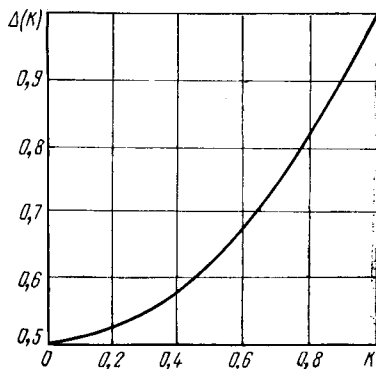


Рис. 17. График значений поправочных коэффициентов

Используя предыдущие результаты, по формуле (6.27) находим:

$$\gamma' = \frac{\mu}{s(1-\rho)^2} \cdot \frac{(\rho s)^s}{s!} p_0 = \frac{3}{7(1-0,86)^2} \cdot 55,08 \cdot 0,00158 \approx 1,9 \text{ ч.}$$

Приступим к вычислению γ . Коэффициент вариации в нашем случае

$$k = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{3}.$$

По формуле (6.63) или из графика рис. 17 находим, что поправочный коэффициент $\Delta(k)$ приблизительно равен 0,56. Следовательно, искомое среднее время ожидания (простой самолета в ожидании начала обслуживания) составляет

$$\gamma = \Delta(k) \cdot \gamma' = 0,56 \cdot 1,9 \approx 1,1 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания требования в системе (средний календарный, как принято говорить, простой самолета на обслуживании) вычисляется по формуле (4.6)

$$w = \gamma + \mu = 1,1 + 3 = 4,1 \text{ ч.}$$

Среднее число самолетов, простаивающих в ожидании начала обслуживания v и всего на обслуживании u , определяется формулами (4.7) и (4.8):

$$v = \lambda \gamma = 2 \cdot 1,1 = 2,2; \quad u = \lambda w = 2 \cdot 4,1 = 8,2.$$

Имеются нормативы простоев самолетов на обслуживании. Если расчетные значения γ и w выше нормативных, то необходимо или увеличить число бригад s или уменьшить среднее время обслуживания μ .

6.11. Однолинейная система с относительными приоритетами

В практических системах массового обслуживания обычно требования имеют различные приоритеты: в случае очереди при выборе требований на обслуживание одним из них отдается предпочтение перед другими. Это может быть вызвано такими обстоятельствами, как различные величины убытков от простоев разных требований в ожидании начала обслуживания, различная срочность обслуживания требований, обеспечение целесообразной организации обслуживания и т. п. Например, при комплектовании грузов на самолеты в первую очередь обслуживаются скоропортящиеся и срочные грузы. В процессе управления воздушным движением в зоне аэродрома при назначении порядка посадки самолетов предпочтение отдается более многоместным и тяжелым самолетам и т. д.

Наличие приоритетов в системах обслуживания приводит к необходимости решения следующих задач: определение характеристик длительности ожидания начала обслуживания для требований

различных приоритетов; нахождение такого правила назначения приоритетов, которое бы обеспечило оптимальное значение выбранного критерия эффективности, и т. д. Этих проблем ранее не возникало, так как все требования имели один приоритет и выбор на обслуживание происходил обычно по правилу: «первым пришел — первым обслужен».

В математической постановке задача формулируется так. Каждое поступающее требование принадлежит к одному из k классов. Чем меньше номер класса, тем выше приоритет относящихся к нему требований, так что наибольший приоритет имеют требования первого класса, а наименьший — k -го. Требования каждого класса поступают независимо от требований других классов. Моменты поступлений требований i -го класса ($i=1, 2, \dots, k$) образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ_i . Распределение длительности обслуживания требований i -го класса ($i=1, 2, \dots, k$) произвольное со средним значением μ_i и дисперсией σ_i^2 , которые постулируются конечными. Предполагается, что обслуживающий аппарат один и что длина очереди и длительность ожидания не ограничены.

Наличие приоритетов сказывается в тот момент времени, когда заканчивается обслуживание некоторого требования и встает вопрос о выборе следующего требования на обслуживание. Будем предполагать, что из очереди выбирается требование с наибольшим приоритетом (наименьшим номером класса). Если таких требований в очереди несколько, то из них выбирается требование, поступившее раньше других.

Рассмотренная дисциплина обслуживания носит название «относительных приоритетов». Характерная ее особенность заключается в том, что если в момент поступления требования в систему в ней находится на обслуживании требование с низшим приоритетом (по сравнению с поступившим), то прерывание обслуживания не происходит и новое требование становится в очередь. В момент окончания обслуживания из очереди принимается требование согласно описанному выше правилу.

Другой приоритетной дисциплиной обслуживания являются «абсолютные приоритеты». В отличие от относительных приоритетов здесь в момент поступления требования более высокого приоритета обслуживание требования более низкого приоритета, происходящее в этот момент, прерывается. Новое требование принимается на обслуживание, а вытесненное требование становится в очередь. Прерванное обслуживание продолжается после того, как в системе не останется требований с более высоким приоритетом.

Итак, рассмотрим случай относительных приоритетов. Основной здесь является формула для среднего времени ожидания начала обслуживания требованием, имеющим i -ый приоритет:

$$\gamma_i = \frac{\theta}{2 \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mu_j \right) \left(1 - \sum_{j=1}^i \lambda_j \mu_j \right)}, \quad (6.64)$$

где $\theta = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$.

Среднее время ожидания в очереди произвольного требования

$$\gamma = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} \gamma_i = \frac{\theta}{2\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mu_j\right) \left(1 - \sum_{j=1}^i \lambda_j \mu_j\right)}, \quad (6.65)$$

где $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ — суммарная интенсивность всех потоков.

Эта формула получается, если осреднить средние значения (6.64) с учетом вероятности (частоты) требований каждого приоритета λ_i/λ [10, с. 279—281].

Формулы (6.64) и (6.65) позволяют анализировать влияние приоритетов на средние длительности ожиданий начала обслуживания. В более общем случае можно считать, что за единицу времени нахождения требования i -го приоритета в очереди (или системе) насчитывается удельный убыток, равный c_i .

Тогда аналогично формуле (6.65) находим, что средний убыток за единицу времени от пребывания требований всех приоритетов в очереди

$$c = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \gamma_i = \sum_{i=1}^k \frac{\theta \lambda_i c_i}{2 \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mu_j\right) \left(1 - \sum_{j=1}^i \lambda_j \mu_j\right)}. \quad (6.66)$$

Ясно, что при $c_i \equiv 1$ это есть суммарное среднее время нахождения всех требований в очереди, приходящееся на единицу времени (такое же выражение получим, если исходить из формулы (6.65)).

Формулы (6.64) — (6.66) были выведены в предположении, что порядок убывания приоритетов задается последовательностью 1, 2, ..., k . Теперь возникает задача: как задавать приоритеты, чтобы выражение (6.66) — суммарные средние убытки — были минимальны? Несложно показать [10, с. 106], что оптимальный порядок приоритетов такой, при котором убыванию приоритетов соответствует возрастание отношения

$$\frac{\text{среднее значение длительности обслуживания}}{\text{удельный убыток от пребывания требования в системе}} = \frac{\mu_i}{c_i}. \quad (6.67)$$

Иными словами, чем меньше это отношение, тем выше должен быть приоритет.

Предположим, что удельные убытки c_i одинаковы для всех приоритетов.

Тогда оптимальное правило (6.67) назначает приоритеты в порядке возрастания средних длительностей обслуживания, так что высшему приоритету отвечает минимальная длительность.

Классическим примером рассмотренной системы является модель работы взлетно-посадочной полосы (ВПП). Предположим, что имеется одна ВПП, обеспечивающая взлет и посадку самолетов Ту-134 и Як-40. Операция посадки имеет приоритет над операцией взлета, а самолеты Ту-134 — над самолетами Як-40. В соответствии с этим возникают четыре ($k=4$) приоритетных класса требований: 1) посадка самолета Ту-134; 2) посадка самолета Як-40; 3) взлет самолета Ту-134; 4) взлет самолета Як-40. Интенсивности поступлений этих требований примем равными:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 3 \frac{1}{\text{ч}} = \frac{1}{20} \frac{1}{\text{мин}}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 7 \frac{1}{\text{ч}} = \frac{7}{60} \frac{1}{\text{мин}}.$$

Длительности обслуживания (занятости ВПП при соответствующих операциях) являются постоянными и равными: $\mu_1 = 2,5$ мин, $\mu_2 = 2$ мин, $\mu_3 = 3$ мин, $\mu_4 = 2,5$ мин.

Найдем средние времена ожидания разрешения на посадку самолетами Ту-134 и Як-40 и средний убыток за единицу времени, если себестоимости летного часа этих самолетов принять равными $c_1 = 650$ руб. и $c_2 = 350$ руб.

Так как длительности обслуживания постоянны, то $\alpha_i = 0$ и

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mu_i^2 = \frac{1}{60} [3 \cdot 2,5^2 + 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 7 \cdot 2,5^2] \approx 1,96 \text{ мин.}$$

Среднее время ожидания посадки для самолетов Ту-134 (первый класс требований), согласно формуле (6.64),

$$\gamma_1 = \frac{1,96}{2(1 - 2,5/20)} = \frac{1,96}{1,75} = 1,12 \text{ мин.}$$

Для самолетов Як-40 среднее время ожидания посадки

$$\gamma_2 = \frac{1,96}{2(1 - 2,5/20)(1 - (2,5/20 + 2 \cdot 7/60))} = \frac{1,96}{1,75 \cdot 0,64} = 1,75 \text{ мин.}$$

Средний убыток за час от вынужденного ожидания самолетами в воздухе разрешения на посадку вычисляется по формуле (6.66):

$$c = 3 \cdot 650 \cdot 1,12/60 + 7 \cdot 350 \cdot 1,75/60 = 107,8 \text{ руб.}$$

Является ли рассматриваемая система приоритетов оптимальной? Применим критерий (6.67). Для первого класса требований находим, что $\mu_1/c_1 \approx 0,004$. Для второго класса получаем $\mu_2/c_2 \approx 0,006$.

Так как первое число меньше второго, то система приоритетов оптимальна, т. е. обеспечивает минимальный средний убыток.

Оптимальность рассматриваемой системы приоритетов легко проверить и непосредственно. Поменяем, например, местами при-

оритеты требований первого и второго классов. Иными словами, пусть операция посадки самолета Як-40 имеет приоритет над операцией посадки самолета Ту-134. Тогда расчеты, аналогичные вышеприведенным, показывают, что среднее время ожидания начала обслуживания требованиями первого приоритета (посадка самолетов Як-40) составит 1,28 мин, а второго приоритета (посадка самолетов Ту-134) 2 мин.

При этом средний убыток за час будет равняться $7 \cdot 350 \cdot 1,28/60 + 3 \cdot 650 \cdot 2/60 \approx 117,8$ руб., т. е. возрастет по сравнению с предыдущим на 10 руб.

6.12. Многолинейная система с относительными приоритетами

Будем предполагать, что имеется несколько обслуживающих аппаратов, а распределение длительности обслуживания для всех приоритетов экспоненциальное с одним и тем же средним значением μ . В этом случае [19, с. 281] среднее время ожидания начала обслуживания для требования i -го приоритета

$$\gamma_i = \frac{\theta}{\left(1 - \frac{\mu}{s} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j\right) \left(1 - \frac{\mu}{s} \sum_{j=1}^i \lambda_j\right)}, \quad (6.68)$$

где

$$\theta = \frac{\mu (s\rho)^s}{s \cdot s! (1 - \rho) \left[\sum_{j=0}^{s-1} (s\rho)^j / j! + (s\rho)^s (s! (1 - \rho))^{-1} \right]}, \quad (6.69)$$

$$\rho = \lambda \mu / s.$$

Средняя длительность ожидания для требования i -го приоритета будет конечна, если

$$\frac{\mu}{s} \sum_{j=1}^i \lambda_j < 1. \quad (6.70)$$

В этом случае выражение (6.69) будет справедливо, если даже $\rho > 1$.

В качестве примера рассмотрим работу узла связи аэропорта по приему и обработке телеграмм. Имеются четыре категории срочности телеграмм. Нормативное время, в течение которого должны быть обработаны телеграммы, соответственно составляет 5 мин, 15 мин, 30 мин, 5 ч. Доли телеграмм 1-й, 2-й, 3-й и 4-й категорий соответственно равны 65, 20, 10 и 5%. Пусть $\lambda = 100$ телеграмм в 1 ч, $\mu = 3$ мин.

Читателю предлагается найти минимальное число аппаратов, при котором средние времена обработки не превышают нормативных значений.

6.13. Система с групповым обслуживанием требований

Рассматриваемая система описывается следующим образом: поток требований является пуассоновским с параметром λ ; обслуживание происходит мгновенно, но только в доступные для обслуживания моменты времени, причем промежутки времени между этими моментами имеют распределение Эрланга с параметрами λ_n и l ; максимальное число требований, которое может быть обслужено в любой момент обслуживания, равно s .

Известно [15, 19], что математическое ожидание и дисперсия числа требований, находящихся в такой системе непосредственно перед началом обслуживания, составляют:

$$E(U_*) = \sum_{j=1}^l (z_j - 1)^{-1}; \quad D(U_*) = \sum_{j=1}^l z_j (z_j - 1)^{-2}. \quad (6.71)$$

В этих выражениях $z_1, z_2, \dots, z_l$ являются корнями уравнения

$$z^c \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n} (1 - z) \right)^l - 1 = 0, \quad (6.72)$$

которые по абсолютной величине больше единицы.

Математическое ожидание и дисперсия времени пребывания требования в системе соответственно равняются:

$$w = E(W) = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{j=1}^l (z_j - 1)^{-1} - \lambda \frac{l-1}{2\lambda_n} \right] = \frac{1}{\lambda} E(U_*) - \frac{l-1}{2\lambda_n}; \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} D(W) &= \lambda^{-2} \left(\sum_{j=1}^l (z_j - 1)^{-2} + \lambda^2 \frac{(l-1)(l-5)}{12\lambda_n^2} \right) = \\ &= \lambda^{-2} \left(D(U_*) - E(U_*) + \lambda^2 \frac{(l-1)(l-5)}{12\lambda_n^2} \right). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Среднее значение u числа требований в системе в произвольный момент времени получается умножением выражения (6.73) на λ . Среднее значение числа требований, остающихся в системе после очередного обслуживания, есть $E(U_*) - \lambda l / \lambda_n$.

Если промежутки времени между обслуживаниями близки к постоянным, то следует взять достаточно большое значение l (например, $l \geq 10$) и, считая среднее значение этого времени μ заданным, вычислить λ_n по формуле $\lambda_n = l/\mu$. Если указанные промежутки являются постоянными и равными μ , то при больших s следует пользоваться формулами:

$$E(W) = \frac{\mu}{2}; \quad D(W) = \frac{1}{12} \mu^2; \quad E(U_*) = D(U_*) = \lambda \mu. \quad (6.75)$$

Среднее время пребывания требования в системе
 (табулированы величины $\frac{\lambda E(W)}{c}$)

	c	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=\infty$		c	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=\infty$
$\rho=0,9$	1	9,00	6,75	6,00	4,50	$\rho=0,8$	1	4,00	3,00	2,67	2,00
	2	6,83	4,60	3,86	2,38		2	3,08	2,09	1,77	1,123
	3	6,11	3,88	3,15	1,69		3	2,77	1,79	1,47	0,843
	6	5,39	3,17	2,44	1,017		6	2,46	1,50	1,182	0,581
	12	5,02	2,82	2,09	0,698		12	2,31	1,35	1,041	0,467
	24	4,84	2,64	1,92	0,552		24	2,23	1,28	0,971	0,421
	∞	4,66	2,47	1,75	0,450		∞	2,15	1,21	0,902	0,400

Таблица 23

Дисперсия времени пребывания требования в системе
 (табулированы величины $c^{-2}\lambda^2 D(W)$)

	c	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=\infty$		c	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=\infty$
$\rho=0,9$	1	81,00	44,55	34,80	18,90	$\rho=0,8$	1	16,00	8,60	6,64	3,47
	2	46,64	20,30	13,92	4,75		2	9,46	4,05	2,74	0,890
	3	37,28	14,32	9,06	2,14		3	7,66	2,91	1,83	0,417
	6	29,00	9,39	5,26	0,576		6	6,05	1,97	1,113	0,138
	12	25,23	7,32	3,75	0,139		12	5,32	1,58	0,827	0,0713
	24	23,44	6,38	3,09	0,0956		24	4,97	1,40	0,703	0,0566
	∞	21,72	5,51	2,50	0,0675		∞	4,64	1,23	0,541	0,0533

Для облегчения расчетов можно пользоваться табл. 22 и 23 [26], в которых принято $\rho = \frac{l\lambda}{\lambda_n c} = \frac{\lambda\mu}{c}$. Случай постоянных промежутков между обслуживаниями обозначен здесь $l=\infty$.

Отметим, что если $l=1$ (экспоненциальное распределение промежутков времени между обслуживаниями), то $\lambda_n = 1/\mu$ и единст-

венный неизвестный корень z_1 определяется по следующей формуле

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2a} (-b + \sqrt{b^2 + 4ad}), \quad (6.76)$$

где
$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} c(c-1) - \frac{1}{6} c(c-1)(c-2) \right),$$

$$b = \frac{\lambda_n}{\lambda} c - \frac{1}{2} c(c-1), \quad d = c - \frac{\lambda}{\lambda_n}.$$

Это выражение получается из формулы (6.72), если представить z в виде $z = 1 + \xi$ и, предположив, что ξ достаточно малое число, разложить z^c по формуле бинома Ньютона; затем ограничиться только членами ξ первых трех степеней и решить полученное квадратное уравнение относительно ξ .

В качестве примера рассмотрим организацию продажи авиабилетов по аэробусному методу. Согласно последнему, пассажир приобретает билет прямо в самолете (аэробусе). Какой в этом случае будет длительность ожидания пассажиром до получения места в самолете?

Пусть вместимость самолета $c = 100$, интенсивность прибытия пассажиров, желающих вылететь данным рейсом, $\lambda = 40$ 1/ч, средняя длительность между вылетами самолетов $\mu = 2$ ч.

Коэффициент загрузки самолета $\rho = \lambda\mu/c = 40 \cdot 2/100 = 0,8$. Если промежутки между вылетами самолетов имеют экспоненциальное распределение ($l=1$), то из табл. 22, принимая $c = \infty$, находим $w = E(W) = 2,15c/\lambda = 215/40 \approx 5,37$ ч. При использовании формулы (6.76) получается близкий результат: $z_1 = 1 + 1/212$; $w = (\lambda(z_1 - 1))^{-1} = 212/40 = 5,3$ ч. Мы видим, что длительность ожидания w велика. Она резко падает, как следует из табл. 22, с увеличением регулярности отправки самолетов, т. е. с ростом l при тех же значениях μ и ρ . Так при постоянных промежутках между вылетами ($l = \infty$) w уменьшается более чем в 5 раз.

Рассмотренный пример интересен тем, что в нем была установлена зависимость между коммерческой загрузкой (ρ), частотой движения самолетов, средним временем ожидания пассажиром вылета и пр. Это позволяет найти экономически обоснованные нормативы коммерческой загрузки, исходя из допустимого среднего времени ожидания и других факторов.

6.14. Применение теории матриц для исследования систем массового обслуживания

Возвратимся к модели, описанной в разд. 6.2. Будем предполагать выполненными свойства а) и б), но освободимся от условия в), ограничивающего возможность перехода системы только соседними состояниями. Будем считать, что число состояний системы конечно и равно n . Находясь в состоянии i , система может перейти в любое другое состояние, причем среднее число переходов $i \rightarrow j$ за единицу времени пребывания системы в состоянии i равно v_{ij} .

Обозначим p_i вероятность нахождения системы в состоянии i в стационарном режиме. Из условия равновесия, которое имеет место при стационарном режиме, вытекает, что вероятности p_i должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} v_{1i}p_1 + v_{2i}p_2 + \dots + v_{ji}p_j + \dots + v_{ni}p_n = \\ = v_{i1}p_1 + v_{i2}p_2 + \dots + v_{ij}p_j + \dots + v_{in}p_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть переписаны в виде:

$$v_{1i}p_1 + v_{2i}p_2 + \dots + v_{ji}p_j + \dots - \left(\sum_{j \neq i} v_{ij} \right) p_i + \dots + v_{ni}p_n = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда могут быть найдены искомые вероятности состояний, если дополнительно использовать условие нормировки

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Обозначим A матрицу порядка $n \times n$, в которой i -ая строка ($i = \overline{1, n-1}$) имеет элементы $v_{1i}, v_{2i}, \dots, -\sum_{j \neq i} v_{ij}, \dots, v_{ni}$, а последняя строка состоит из единиц. Пусть e_n — вектор порядка n , в котором последний (n -ый) элемент есть 1, а остальные — нули. Обозначим x вектор порядка n , состоящий из искомых вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда вышеприведенные уравнения могут быть записаны в матричной форме

$$Ax = e_n.$$

Решая это уравнение относительно x , находим

$$x = A^{-1}e_n.$$

Итак, задача сводится к отыскиванию обратной матрицы A^{-1} . Если это можно сделать аналитически, то получаем явные выражения для вероятностей. В противном случае прибегают к численному решению и используют, например, метод Жордана-Гаусса.

Глава 7

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

7.1. Исследование эффективности работы аэродрома

Основными элементами аэродрома являются взлетно-посадочная полоса (ВПП), рулежные дорожки (РД) и места стоянки самолетов (МС). В большинстве существующих аэропортов имеется одна ВПП. По мере увеличения интенсивности движения самолетов возникает необходимость в строительстве второй ВПП. Эффективность ввода в строй новой ВПП может быть оценена с помощью формулы (4.9), позволяющей соизмерить затраты на строительство и эксплуатацию ВПП с уменьшением убытков от вынужденного пребывания самолетов в воздухе в ожидании посадки.

Пусть Φ — капитальные вложения в строительство новой ВПП, e — годовые эксплуатационные расходы на ее содержание. Тогда годовые приведенные расходы, связанные с новой ВПП, составят $E_0\Phi + e$, где E_0 — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений. Обозначим $\omega^{(1)}$ суммарное время, которое в течение года вынуждены ожидать самолеты в воздухе разрешения на посадку при одной ВПП, а $\omega^{(2)}$ — при двух ВПП. Если ε есть себестоимость одного летного часа, то вторую ВПП строить экономически выгодно, когда

$$\varepsilon\omega^{(1)} > \varepsilon\omega^{(2)} + E_0\Phi + e. \quad (7.1)$$

Итак, мы обрисовали общую схему оценки экономической эффективности строительства новой ВПП. Основная проблема, очевидно, сводится к определению величин $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$. При этом можно учитывать приоритеты самолетов, как это описано в разд. 6.11. Для простоты в дальнейшем это не делается.

Приведенная формула справедлива, если имеет место непрерывный рост интенсивности движения самолетов. В противном случае вводятся некоторые изменения.

Будем считать известным прогноз на будущее интенсивности движения самолетов в данном аэропорту. В течение одного года эта интенсивность будет меняться в зависимости от времени года и периода суток. Разобьем все время года на k периодов, в каждом из которых интенсивность можно считать постоянной. Обозначим $\lambda_i^{(j)}$ — $i=1, 2, \dots, j=1, k$, продолжительность j -го периода i -го года, $h_i^{(j)}$, часовую интенсивность взлетов и посадок в течение этого периода. Величины $\{h_i^{(j)}\}$ и $\{\lambda_i^{(j)}\}$ считаются известными.

Оценим суммарный непроизводительный налет самолетов в случае наличия одной ВПП. С этой целью рассмотрим процесс посадки самолетов как процесс массового обслуживания с ожиданием. Требованием на обслуживание здесь является запрос на посадку, а обслуживающим аппаратом — ВПП. Продолжительность «обслуживания» равна длительности занятости ВПП. Многочисленные исследования, проведенные в отечественных и зарубежных аэропортах, показали [3, 27, 28], что поток взлетов и посадок можно считать пуассоновским. Следовательно, в случае одной ВПП процесс посадки самолетов описывается системой массового обслуживания с ожиданием такого вида: пуассоновский поток требований, произвольное время обслуживания, один обслуживающий аппарат, дисциплина строгой очереди. Среднее время ожидания обслуживания в этом случае рассчитывается по формуле *

$$\gamma = \mu \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right),$$

где μ — среднее время занятости ВПП на взлет или посадку; σ —

* Рассмотрение приоритетных очередей приводит к другому выражению для γ (формулы 6.64 и 6.70), оставляя всю методику расчетов неизменной.

среднеквадратическое отклонение времени занятости; ρ — коэффициент загрузки ВПП ($\rho = \lambda \mu$); λ — интенсивность взлетов и посадок.

Так как число посадок в точности равно числу взлетов, то при общей интенсивности взлетов и посадок λ интенсивность посадок составит $0,5\lambda$. Следовательно, среднее число посадок за j -ый период i -го года составит $0,5\lambda_i^{(j)}$. Поэтому в случае одной ВПП суммарное среднее время, которое тратят самолеты за i -й год на ожидание посадки,

$$w_i^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^k h_i^{(j)} \mu^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right) \frac{(\lambda_i^{(j)})^2}{1 - \mu \lambda_i^{(j)}}. \quad (7.2)$$

В случае двух ВПП будем считать, что одна из них работает на посадку, а вторая на взлет. Обозначим μ_* и σ_* среднее значение и среднее квадратическое отклонение времени занятости ВПП одной посадкой. Тогда суммарное за i -й год время ожидания самолетами разрешения на посадку

$$w_i^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k h_i^{(j)} \mu_*^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_*}{\mu_*} \right)^2 \right] \frac{(0,5\lambda_i^{(j)})^2}{1 - 0,5\mu_*\lambda_i^{(j)}}. \quad (7.3)$$

Остановимся теперь на выборе показателя экономической эффективности. Сооружение новой ВПП связано с одновременными дополнительными капитальными вложениями Φ (руб). Обозначим e (руб.) годовую сумму эксплуатационных расходов на содержание новой ВПП (без учета амортизационных отчислений). Пусть ε_i есть себестоимость летного часа для i -го года (индекс i указывает, что в связи с изменением типов эксплуатируемых самолетов себестоимость может меняться).

В качестве показателя экономической эффективности примем приведенные затраты ε^* (руб.). Так как постоянная составляющая при сравнении вариантов может не учитываться, то в нашем случае приведенные затраты равны сумме эксплуатационных расходов из-за непроизводительного налета и произведения дополнительных капитальных вложений, связанных с новой ВПП, на нормативный коэффициент эффективности E_0 .

Если имеется одна ВПП и новую ВПП решено не сооружать, то приведенные затраты равны эксплуатационным расходам на непроизводительный налет, которые за T лет составят:

$$\varepsilon_T^{*(1)} = \sum_{i=1}^T \varepsilon_i w_i^{(1)} (1 + E_0)^{-(i-1)}, \quad (7.4)$$

где $(1 + E_0)^{-1}$ — коэффициент приведения затрат к текущему моменту времени.

Если новую ВПП решено ввести к l -му году эксплуатации ($l = 2, 3, \dots$), то приведенные затраты за T лет составят (считаем, что капитальные затраты вносятся к началу $(l - 1)$ -го года):

$$\mathcal{E}_T^{*(2)}(l) = \begin{cases} \mathcal{E}_{l-1}^{*(1)} + \Phi(1 + E_0)^{-(l-2)} + \sum_{i=l}^T (\mathcal{E}_i w_i^{(2)} + e)(1 + E_0)^{-(l-1)} & \text{при } T \geq l, \\ \mathcal{E}_{l-1}^{*(1)} + \Phi(1 + E_0)^{-(l-2)} & \text{при } T = l - 1, \\ \mathcal{E}_T^{*(1)} & \text{при } T < l - 1. \end{cases} \quad (7.5)$$

Итак, методика определения экономически обоснованного срока внедрения второй ВПП заключается в следующем. Вычисляем значения приведенных затрат $\mathcal{E}_T^{*(1)}$ (вторая ВПП не строится), $\mathcal{E}_T^{*(2)}(T)$ (вторая ВПП вводится к последнему T -му году), ..., $\mathcal{E}_T^{*(2)}(2)$ (вторая ВПП вводится сразу — ко второму году рассматриваемого периода T). Если минимальным является значение $\mathcal{E}_T^{*(1)}$, то экономически целесообразно вторую ВПП в течение T лет не строить, а если $\mathcal{E}_T^{*(2)}(l^*)$, то вторую ВПП следует построить к l^* -му году эксплуатации.

Рассмотрим численный пример. Будем считать, что взлеты и посадки происходят только в течение периода суток, равного 10 ч. За этот период интенсивность взлетов и посадок будем считать постоянной. Будем далее считать, что в другое, а также в зимнее время длительность ожидания посадки в силу незначительной интенсивности движения пренебрежимо мала. Тогда в расчет можно принимать только летний период, продолжительностью в 150 дней, так что $h=1500$. Примем $\lambda_{ii}=\lambda+i\beta$; $\mu=\mu_*$ и $\sigma=\sigma_*=0$ (продолжительность посадки постоянна). Тогда выражения (7.2) и (7.3) принимают вид:

$$w_i^{(1)} = \frac{1}{4} h \mu^2 \frac{(\lambda + i\beta)^2}{1 - \mu(\lambda + i\beta)};$$

$$w_i^{(2)} = \frac{1}{8} h \mu^2 \frac{(\lambda + i\beta)^2}{1 - 0,5\mu(\lambda + i\beta)}.$$

Пусть $E_0=0,1$; $\Phi=1,5 \cdot 10^6$ руб.; $\mathcal{E}_i=500$ руб.; $e=9 \cdot 10^4$ руб.; $\mu=3$ мин; $\lambda=6$ 1/ч; $\beta=1$.

Результаты расчетов приведенных затрат на рис. 18. Вертикальные скачки графиков функций приведенных затрат $\mathcal{E}^*$ соответствуют единовременным капитальным вложениям на сооружение второй ВПП. Из рисунка видно, что экономически наиболее эффективным является внедрение второй ВПП к шестому году эксплуатации. Если, например, ВПП будет внедрена уже ко 2-му году эксплуатации, то это приведет к увеличению приведенных затрат за восемь лет эксплуатации на 420 тыс. руб. Так как нормативный срок окупаемости составляет 10 лет, то внедрение второй ВПП во всех случаях является экономически обоснованным.

Остановимся теперь на оценке эффективности строительства новой РД. Наличие дополнительной РД позволяет повысить пропускную способность ВПП, так как прибывающие и улетающие

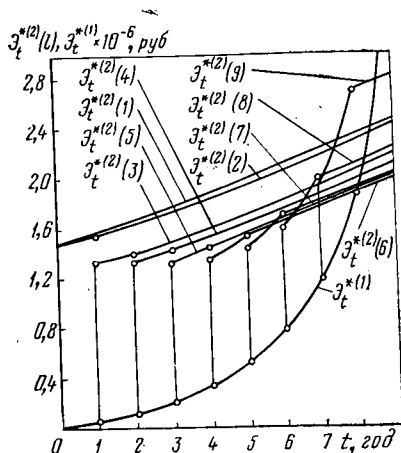


Рис. 18. Зависимость приведенных затрат от времени

самолеты, используя эту РД, скорее освобождают ВПП. Это находит свое отражение в уменьшении среднего времени занятости ВПП μ , что влечет уменьшение среднего времени ожидания самолетами посадки γ и величины ω . Поэтому критерием, как и прежде, является выражение (7.1), в котором под Φ следует понимать капитальные вложения в новую РД.

В заключение рассмотрим задачу определения потребного числа МС. Последние можно трактовать как систему массового обслуживания с ожиданием или с отказами. При занятости всех МС самолеты устанавливаются на непредназначенные для этой цели места (РД, площадки запуска двигателей

и пр.). Если после освобождения МС самолеты перебуксовываются, то МС следует рассматривать как систему с ожиданием, иначе — с отказами.

Для определения потребности в МС вначале на основе статистики следует оценить среднее значение и дисперсию времени занятости самолетом МС (иначе — времени пребывания самолета в аэропорту). В качестве примера в табл. 24 приведены сгруппированные данные о продолжительности стоянок самолетов Ту-104, совершающих дневные рейсы по маршрутам Москва — Сочи — Москва и Ленинград — Сочи — Ленинград. Эти данные относятся к последним числам августа 1969 г.

Оценки среднего значения и дисперсии по несгруппированным данным составили 1,2 ч и 0,19 ч².

Затем следует задаться величиной λ_c — интенсивностью прибытия самолетов — и допустимыми значениями критериев эффективности — вероятностью отказа или средним временем ожидания. Далее по формулам разд. 6.4 и 6.7 определяется то минимальное число МС, при котором допустимые значения не превышаются. Ясно, что если МС специализированы по типам самолетов, то соответствующие МС следует рассчитывать по отдельности.

Таблица 24

Продолжительности стоянки самолетов в аэропорту Сочи

Продолжительность стоянки, ч	0—1,0	1,0—1,1	1,1—1,2	1,2—1,3	1,3—1,5	1,5—2,0	2,0—2,6	Всего
Число наблюдений	25	45	42	15	11	16	18	172

В некоторых аэропортах МС делятся на две группы. МС первой группы более комфортабельны (они лучше механизированы, расположены ближе к аэровокзалу и т. п.). Поэтому желательно так планировать процесс использования МС, чтобы максимизировать число самолетов, обслуживаемых на МС первой группы.

В соответствии с изложенным примем такое правило: если вновь прибывающий самолет имеет стоянку менее x мин и имеется хотя бы одна свободная МС первой группы, то самолет направляется на это МС. В противном случае самолет направляется на МС второй группы.

Пусть s — число МС первой группы, $F(y)$ — функция распределения продолжительности стоянки самолетов в аэропорту. Если общая интенсивность прибывающих самолетов λ_c , то интенсивность самолетов, поступающих на МС первой группы, согласно сформулированному правилу, есть $\lambda = \lambda_c F(x)$. Среднее время занятости са-

молетом МС первой группы $\mu = \frac{1}{F(x)} \int_0^x (1 - F(y)) dy$. Следова-

тельно, вероятность отказа самолету в постановке на МС первой группы p_s вычисляется по формуле (6.41). Среднее число самолетов, обслуживаемых на МС первой группы, есть $\lambda(1 - p_s)$. Максимизируя это значение по x , находим оптимальную величину x .

Для практики предлагается сделать соответствующие выкладки для распределения, задаваемого табл. 24, и экспоненциального распределения $F(y) = 1 - e^{-\theta y}$.

Впервые в нашей стране теория массового обслуживания была применена для расчета потребности в МС В. И. Черниковым.

7.2. Планирование обслуживания пассажиров в аэровокзале

Основным видом наземного обслуживания вылетающих пассажиров является регистрация билетов и оформление багажа. В настоящее время наибольшее распространение находят два метода регистрации — свободный и фиксированный. При свободном методе пассажир может пройти регистрацию на любой стойке, а при фиксированном — лишь на той, которая выделена только на соответствующий рейс. Следовательно, в первом случае имеет место полностью доступная система массового обслуживания, а во втором — неполностью доступная.

Рассмотрим задачу определения потребного числа стоек для регистрации при свободном методе. В табл. 25 представлены данные Е. Л. Пина по длительности регистрации билета и обработки багажа одного пассажира при свободном методе, полученные в 1969 г. Используя эти данные и считая процесс свободной регистрации процессом массового обслуживания с ожиданием, можно найти минимальное число аппаратов (стоек для регистрации), при котором критерии эффективности обслуживания не хуже заданных (см. разд. 6.4 и 6.10). В практике работы международных авиакомпаний исходят из одного из следующих условий: 1) среднее время ожида-

Характеристики длительности регистрации билетов и оформления багажа пассажиров по свободному методу

Аэропорт	Объем выборки	Оценка среднего, с	Оценка дисперсии, с ²
Внуково	170	77	970
Домодедово	220	47	889

ния пассажиром в очереди начала регистрации не должно превышать 3 мин; 2) вероятность ожидания более 15 мин не должна превышать 0,01.

Для проведения расчетов необходимо также знать интенсивность поступления пассажиров на регистрацию λ . Она может быть рассчитана по формуле

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i n_i \eta_i \theta_i, \quad (7.6)$$

где k — количество эксплуатируемых типов самолетов; n_i — вместимость самолета i -го типа; λ_i — интенсивность движения самолетов i -го типа; η_i — процент коммерческой загрузки самолета i -го типа; θ_i — доля пассажиров самолета i -го типа, регистрирующихся в аэропорту.

Расчет свободной системы регистрации с помощью методов теории массового обслуживания впервые в нашей стране был осуществлен В. П. Инюшиным и И. Я. Русиновым.

Рассмотрим задачу определения потребного числа мест для регистрации при фиксированном методе. В данном случае требованием на обслуживание является рейс, так как каждому рейсу выделяется своя стойка. Пусть μ_i и σ_i^2 — среднее значение и дисперсия продолжительности занятости стойки рейсом, выполняемым i -ым типом самолета. Тогда среднее значение μ и дисперсия σ^2 длительности занятости стойки одним рейсом (безотносительно к типу самолета) составят:

$$\mu = \frac{1}{\lambda_c} \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda_c} \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) - \mu^2, \quad (7.7)$$

где $\lambda_c = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Используя эти значения, интенсивность потока требований λ_c и допустимые значения критериев эффективности обслуживания, по формулам разд. 6.4 и 6.10 можно решить поставленную задачу.

При проектировании аэровокзалов и планировании их работы важно правильно рассчитать потребную единовременную вместимость аэровокзала и его отдельных помещений. В данном случае

Характеристики распределения времени пребывания
улетающих пассажиров в аэропортах

Аэропорт	Исследователь	Год	Съем выборки, чел.	Оценка сред., ч	Оценка коэф. вариации
Алма-Ата Волгоград	А. А. Соколов	1937	128	1,35	0,49
	Е. Л. Пин	1969		1,27	0,55
	А. М. Андронов				
Горький Домодедово	А. А. Соколов	1967	138	1,40	0,58
	Е. Л. Пин	1969	470	2,14	0,57
	А. М. Андронов				
Казань Ленинград	А. А. Соколов	1967	117	1,33	0,55
	»	1967	246	1,20	0,55
	В. П. Инюшин	1966		0,95	0,47
Могилев Симферополь	А. А. Соколов	1967	58	1,09	0,58
	»	1967	164	1,93	0,43
	М. В. Комский	1960		1,00	0,50
Сочи	А. М. Андронов				
	Е. Л. Пин	1969	399	1,29	0,57
Тбилиси Челябинск	А. А. Соколов	1937	106	1,30	0,62

требованием является пассажир, а обслуживание заключается в пребывании пассажира в аэровокзале. Процесс пребывания пассажиров в аэровокзале (или какой-то его зоне) может быть описан системой массового обслуживания с бесконечным числом аппаратов (см. разд. 6.5). Обозначим μ среднее время пребывания пассажира в аэровокзале (зоне), λ — интенсивность прибытия пассажиров (отметим, что последняя может быть рассчитана по формуле 7.6). Средние значения и коэффициенты вариации времени пребывания пассажиров в некоторых аэропортах приведены в табл. 26.

Пусть аэровокзал рассчитан на s пассажиров. Тогда перегрузка наступает, если число пассажиров в аэровокзале более s . Вероятность данного события, согласно формуле (6.31), составляет

$$P\{U > s\} = 1 - e^{-\lambda\mu} \sum_{j=0}^s (\lambda\mu)^j \frac{1}{j!}.$$

Если задана допустимая вероятность перегрузки p_* , которая не может быть превышена, то потребная вместимость s определяется из уравнения

$$p_* \geq 1 - e^{-\lambda\mu} \sum_{j=0}^s (\lambda\mu)^j \frac{1}{j!}.$$

Так как обычно s велико, то можно воспользоваться нормальным приближением пуассоновского распределения

$$e^{-a} \sum_{i=0}^s a^i / i! \approx \Phi\left(\frac{s-a}{\sqrt{a}}\right). \quad (7.8)$$

Это приводит к следующей формуле для определения потребной вместимости аэровокзала:

$$s_* = \lambda \mu + \sqrt{\lambda \mu} \Phi^{-1}(1 - p_*), \quad (7.9)$$

где $\Phi^{-1}(1 - p_*)$ — квантиль стандартного нормального распределения, отвечающий вероятности $1 - p_*$ (см. табл. П1).

Описанная модель не является вполне точной. Спецификой функционирования аэровокзала является групповой характер поступления части требований (прилетающих пассажиров) и групповой характер обслуживания части требований (вылетающих пассажиров). Поэтому, строго говоря, необходимо исходить из модели с неординарным пуассоновским потоком. В нашей стране впервые расчет одновременной вместимости аэровокзалов с помощью таких моделей провел А. А. Соколов.

Можно привести другие модели массового обслуживания, пригодные для расчета потребного числа тех или других элементов аэровокзала. Например, расчет числа камер хранения производится на основе модели с отказами, описанной в разд. 6.7. Исходными здесь являются интенсивность потока пассажиров λ , доля пассажиров, желающих воспользоваться услугами камеры хранения, средняя длительность хранения вещей одного пассажира, допустимая вероятность отказа пассажиру вследствие занятости всех камер хранения.

7.3. Планирование перронного обслуживания самолетов при пуассоновском потоке требований

В зависимости от характера конкретной задачи могут быть предложены различные модели процесса обслуживания самолетов на перроне.

Следует различать системы, в которых практически не допускается ожидания начала обслуживания (например, обслуживание самолета в транзитном аэропорту при кратковременной стоянке), и в которых допускается (например, послеполетное обслуживание самолетов, вылетающих на следующие сутки). Модели, учитывающие фактическое расписание и возможность ожидания начала обслуживания, могут быть исследованы только с помощью метода статистического моделирования (см. разд. 8.7). Если же ожидание не допускается, то даже в случае учета расписания может быть предложен метод, являющийся промежуточным между аналитическим и эмпирическим (см. разд. 8.4). Хотя приводятся рассуждения о техническом обслуживании самолетов, излагаемые методы применимы для любых видов коммерческого обслуживания самолетов на перроне.

Основной задачей, возникающей при организации технического обслуживания самолетов на перроне, является задача определения числа технических перронных бригад и средств аэродромной механизации, которые необходимо иметь в каждое время суток. Расчеты значительно упрощаются в тех случаях, когда поток можно считать

пуассоновским. Оказывается, что такое предположение правомерно делать довольно часто.

В качестве примера рассмотрим задачу об оптимальной организации технических перронных бригад. Предположим, что имеется 30 авиатехников и авиамехаников. Их можно организовать в 5 бригад по 6 человек в каждой или в 6 бригад по 5 человек. Какая организация труда обеспечит минимальные простои самолетов на обслуживании? Напомним, что простой w складывается из времени ожидания γ и времени обслуживания μ . Чем больше численность бригады, тем меньше число бригад s . Поэтому может случиться, что самолетам чаще придется ожидать начала обслуживания, т. е. что γ будет больше.

Пусть известно, что при шести исполнителях в бригаде средняя продолжительность обслуживания равна 1 ч, при пяти исполнителях — 1,15, а коэффициент вариации в обоих случаях равен 1/3. Это может быть известно из опыта работы отдельных бригад, организованных по-разному, или из построения и анализа сетевых графиков (см. разд. 5.5).

Предположим, что интенсивность потока требований $\lambda = 4 \text{ 1/ч}$. Найдем средний простой в случае организации 6 бригад. Коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{\lambda \mu}{s} = \frac{4 \cdot 1,15}{6} = 0,77.$$

При $\rho = 0,77$; $\mu = 1,15 \text{ ч}$ и $s = 6$ среднее время ожидания γ' при экспоненциальном распределении длительности обслуживания составит, как показывает расчет (см. разд. 6.10 или [12, рис. П1]):

$$\gamma' = 0,35 \cdot \mu = 0,4 \text{ ч.}$$

По рис. 17 или формуле (6.63) находим, что при $k = 1/3$ поправочный коэффициент $\Delta(k)$ составит 0,56. Следовательно, среднее время ожидания будет (см. формулу 6.62):

$$\gamma = 0,56 \gamma' = 0,22 \text{ ч.}$$

Вычисляем средний простой на обслуживании:

$$w = \mu + \gamma = 1,15 + 0,22 = 1,37 \text{ ч.}$$

Произведя такие же вычисления для случая 5 бригад, найдем, что средний простой равен 1,3 ч. Следовательно, если интенсивность потока равна 4 1/ч , то выгодней организовать 5 бригад по 6 человек. Однако, как показывают аналогичные расчеты, при интенсивности, равной $4,6 \text{ 1/ч}$, меньшие простои дает организация 6 бригад. При интенсивности, равной приблизительно 4,4 — одинаковые. Поэтому, если интенсивность меньше 4,4 треб./час, то следует организовать 5 бригад, а если больше, то 6 бригад.

Примерная зависимость средних простоев самолетов на обслуживании w от интенсивности потока λ для $s = 5$ и $s = 6$ изображена на рис. 19.

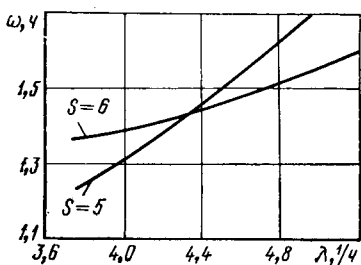


Рис. 19. Зависимость простоев ω от интенсивности потока λ

максимизации производительности, было бы неправильным. Действительно, если интенсивность потока λ мала (т. е. мала нагрузка), то целесообразнее комплектовать более многочисленными бригадами, так как иначе некоторые бригады будут простаивать из-за отсутствия работы. Следовательно, в каждом конкретном случае необходимо произвести расчет, аналогичный приведенному, и выбрать ту организацию, которая обеспечивает минимальные простои самолетов.

Рассмотрим теперь задачу об определении потребного количества средств аэродромной механизации. В данном случае поток требований может быть пуассоновским, даже если интенсивность прилетов и вылетов самолетов невелика. Это объясняется тем, что потребность в некоторых средствах механизации возникает не при каждом техническом обслуживании. Например, необходимость заправки самолета маслом, спецжидкостями и газами возникает случайно, если замеры покажут, что имеющегося количества недостаточно. Поэтому детерминированная составляющая потока требований, задаваемая наличием расписания, здесь не так существенна.

Будем исходить из того, что продолжительность стоянки самолета на перроне равна 1 ч. Вследствие наличия случайных колебаний может случиться, что время ожидания заправки (например, топливом) плюс время заправки превысит эту величину. Спрашивается, сколько топливозаправщиков необходимо иметь, чтобы относительное число таких случаев не превышало, например, 7%?

В разд. 5.4 было установлено, что поток требований на заправку самолета топливом можно считать пуассоновским с интенсивностью λ , равной 1/6 1/мин. Предположим, что длительность заправки распределена по экспоненциальному закону со средним значением μ , равным 20 мин. Нас интересует полное время пребывания требования в системе (т. е. ожидание самолетом заправки плюс время заправки). По формуле (6.28) находим вероятность того, что это время меньше x :

$$P\{W < x\} = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} + \frac{1 - p_{<s}}{s - \rho s - 1} e^{-\frac{s(1-\rho)}{\mu} x} (1 - e^{-\frac{s-\rho s-1}{\mu} x}).$$

Приведенный пример является очень поучительным. Типичной при этом является формула (5.29), отражающая зависимость среднего времени обслуживания одной бригадой μ от числа исполнителей t . В этой формуле 60 — нормативная трудоемкость обслуживания, так что $0,28 + 0,21 t$ — производительность труда одного исполнителя, если численность бригады t . Производительность как функция t вначале растет, а затем падает. Однако формировать бригады исходя только из соображения

Необходимо подобрать такое минимальное число аппаратов (топливозаправщиков) s , при котором эта вероятность при x , равном 1 ч, была бы больше 0,93.

В среднем в течение одного обслуживания поступает $20/6 \approx 3,3$ требований.

Следовательно, минимальное количество аппаратов, при котором пропускная способность выше интенсивности потока требований, равна четырем. При этом коэффициент загрузки

$$\rho \approx \frac{\lambda \mu}{s} = \frac{20}{4 \cdot 6} \approx 0,83.$$

Подсчитаем вероятность $P\{W \leq x\}$ при x , равном 60 мин, и s , равном 4. Для этого предварительно найдем $1 - \rho_{<s}$ и ρ_0 . Расчеты по формулам (6.20) и (6.24) показывают, что

$$\rho_0 = \left[\frac{(0,83 \cdot 4)^4}{4! \cdot 0,17} + \sum_{i=0}^3 \frac{(0,83 \cdot 4)^i}{i!} \right]^{-1} \approx \frac{1}{47};$$

$$\rho_{<s} = 1 - \frac{(0,83 \cdot 4)^4}{4! \cdot 0,17} \rho_0 \approx 0,34.$$

Поэтому

$$P\{W \leq 60\} = 1 - e^{-\frac{60}{20}} + \frac{1 - 0,34}{4 - 0,83 \cdot 4 - 1} e^{-\frac{4(1-0,83)}{20} \cdot 60} (1 - e^{\frac{4-0,83 \cdot 4-1}{20} \cdot 60}) \approx 0,775.$$

Таким образом, при наличии четырех топливозаправщиков в среднем 22,5% самолетов не будут заправлены в срок. Поэтому необходимо иметь не менее пяти топливозаправщиков. Тогда:

$$\rho \approx 0,67; \rho_0 \approx \frac{1}{31}; \rho_{<s} \approx 0,68; P\{W \leq 60\} \approx 0,93.$$

Следовательно, для того чтобы в среднем не менее 93% самолетов были заправлены в срок, достаточно пяти топливозаправщиков.

Заметим, что если расчеты вести по среднеарифметическим значениям, то получается четыре топливозаправщика, и при этом в 3 раза увеличивается число самолетов, которые не будут заправлены в срок.

В рассмотренном примере было принято, что продолжительность заправки имеет экспоненциальное распределение. В действительности здесь скорее будет иметь место произвольное распределение. Однако формул для подсчета вероятности $P\{W \leq x\}$ для такой системы не имеется. Расчет, основанный на экспоненциальном распределении, приводит к тому, что показатели эффективности получаются хуже действительных. Следовательно, расчет ведется на худший случай.

Поэтому число выбранных заправщиков заведомо обеспечит заданные условия.

8.1. Общие положения

Часто при решении производственных задач необходимо учитывать наличие расписания движения самолетов. Это имеет место в двух случаях: во-первых, когда интенсивность прибытия самолетов невелика, а отклонения фактических моментов прибытия от расписания незначительны; во-вторых, когда интенсивность прибытия самолетов велика, однако столь непостоянна, что нельзя выделить периоды времени, в течение которых поток можно считать стационарным и пуассоновским. (Напомним, что для выделения таких периодов необходимо, чтобы длина каждого периода в несколько раз превышала среднюю длительность обслуживания — см. разд. 5.4). Соответствующая последнему ситуация изображена на рис. 12.

8.2. Исследование интенсивности прибытия улетающих пассажиров в аэропорт

Если расписание вылетов самолетов из данного аэропорта известно, то поток пассажиров, прибывающих в аэропорт из города, можно исследовать, не прибегая к стандартным статистическим методам, изложенным в разд. 5.4. При этом статистическим методом должна быть лишь оценена функция распределения $F(x)$ времени, за которое до вылета по расписанию прибывает пассажир в аэропорт. $F(x)$ — это функция распределения длительности нахождения улетающего пассажира в аэропорту, если предполагать строгое выполнение расписания вылетов самолетов.

Будем считать, что $F(x)$ не зависит от конкретного рейса, т. е., что $F(x)$ одинакова для всех пассажиров. Разумеется, функция $F(x)$ будет различной для разных аэропортов, так как заблаговременность прибытия пассажиров зависит, в основном, от удаленности аэропорта от города.

Для оценки функции $F(x)$ следует пользоваться теми же методами, что применялись в разд. 5.2 для анализа продолжительности обслуживания. Более того, нахождение пассажира в аэропорту можно считать своего рода обслуживанием, так что ссылка на разд. 5.2 кажется вполне очевидной.

Анализ распределения времени, за которое прибывает пассажир в аэропорт до вылета, проводится на основе данных о фактических значениях этого времени $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти данные получают в результате специального обследования, в процессе которого у каждого прибывающего пассажира узнают номер рейса и затем вычисляют время, за которое до вылета он прибыл.

Исследования, проведенные в различных аэропортах, показали, что распределение времени, за которое прибывают пассажиры в

аэропорт до вылета, хорошо аппроксимируется распределением Релея. Функция и плотность распределения имеют вид

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \quad x \geq 0,$$

$$f(x) = \frac{2}{\alpha^2} x e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \quad x \geq 0,$$

со средним $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha \approx 0,886\alpha$, дисперсией $\alpha^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ и коэффициентом вариации $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \approx 0,54$. Здесь α — параметр распределения ($\alpha > 0$).

Как видно из приведенных формул, распределение Релея имеет один параметр. Это обстоятельство облегчает практическое использование данного распределения. Оценкой неизвестного параметра α является величина $\mu^*/0,886$, где μ^* — оценка среднего времени, за которое до вылета по расписанию прибывают пассажиры в аэропорт.

Возможность применения распределения Релея объясняется тем, что для всех обследованных аэропортов коэффициент вариации времени пребывания пассажиров в аэропорту близок к 0,54 (см. табл. 26).

В дальнейшем будем исходить из распределения Релея с параметром α .

Оценим интенсивность прибытия улетающих пассажиров в аэропорт, иначе — интенсивность потока этих пассажиров. Если t есть некоторый момент времени суток, а $\lambda(t)$ — указанная интенсивность для этого момента, то $\lambda(t)\Delta t$ при малых Δt есть среднее число пассажиров, прибывающих в интервале $(t, t+\Delta t)$. Интенсивность $\lambda(t)$ должна быть вычислена при условии, что заданы: расписание вылетов самолетов; вместимость и коэффициент коммерческой загрузки каждого самолета; значение параметра α распределения $F(x)$ времени, за которое прибывают пассажиры в аэропорт до вылета.

Перенумеруем все рейсы, вылетающие после рассматриваемого момента времени t и обозначим $t_1, t_2, \dots$ моменты вылетов этих рейсов (предполагается, что $t < t_1 < t_2 \dots$). В момент t в аэропорту могут находиться пассажиры со всех этих рейсов. Вероятность того, что пассажир с i -го рейса прибудет в интервале $(t, t+\Delta t)$ в аэропорт, есть $F(t_i - t + \Delta t) - F(t_i - t)$.

Обозначим n_i вместимость i -го рейса, а η_i — коэффициент коммерческой загрузки. Тогда $n_i\eta_i$ есть среднее число пассажиров, улетающих i -ым рейсом.

Среднее число пассажиров с i -го рейса, прибывающих в аэропорт в интервале $(t, t+\Delta t)$, будет

$$n_i\eta_i [F(t_i - t + \Delta t) - F(t_i - t)].$$

Общее среднее число пассажиров, прибывающих в аэропорт в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ со всех рейсов, есть

$$\sum n_i \eta_i [F(t_i - t + \Delta t) - F(t_i - t)],$$

где суммирование ведется по всем рейсам, вылетающим позже момента времени t .

Оценку интенсивности $\lambda(t)$ получим, если поделим приведенное выражение на Δt :

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum n_i \eta_i [F(t_i - t + \Delta t) - F(t_i - t)]. \quad (8.1)$$

Если произвести вычисления по формуле (8.1) для моментов времени, кратных Δt , то можно построить гистограмму интенсивности прибытия пассажиров в координатах « $t - \lambda^*(t)$ ». Можно также воспользоваться методом наименьших квадратов и найти аналитическую функцию $\lambda(t)$, хорошо описывающую гистограмму $\lambda^*(t)$.

В качестве примера рассмотрим условное расписание, состоящее из пяти рейсов. Моменты вылетов этих рейсов t_i и вместимости самолетов n_i приведены в табл. 27. Коэффициенты коммерческой загрузки положим равными $\eta_i = 0,8$, так что $n_1 \eta_1 = 80$; $n_2 \eta_2 = 48$; $n_3 \eta_3 = 80$; $n_4 \eta_4 = 88$; $n_5 \eta_5 = 48$. Предположим, что пассажиры прибывают в среднем в аэропорт за 1 ч, так что оценка параметра α распределения $F(x)$ составляет $\alpha^* = 1/0,886 \approx 1,14$ 1/ч = 68 мин.

Найдем интенсивность прибытия пассажиров за период с 10 ч 00 мин по 12 ч 00 мин. Для этого разобьем этот период на пятнадцатиминутные интервалы ($\Delta t = 15$ мин). Формула (8.1) в данном случае принимает вид:

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{15} \sum n_i \eta_i \left[e^{-\left(\frac{t_i - t}{68}\right)^2} - e^{-\left(\frac{t_i - t + 15}{68}\right)^2} \right], \quad (8.2)$$

где суммирование следует производить для таких i , что $t_i \geq t$.

Вычисления удобно оформить в виде табл. 28. Предварительно следует заполнить табл. 29. Отметим, что нахождение значений функции e^{-x} производится с помощью табл. ПVI.

При заполнении табл. 28 следует вначале вычислить $x = t_i - t$ и найти число в последней строке табл. 29, соответствующее этому x . Найденное число следует умножить на произведение $n_i \eta_i$, отвечающее данному i , и занести в табл. 28.

Суммируя все числа каждой колонки табл. 28 и поделив сумму на 15, получаем оценку $\lambda^*(t)$ для данного t .

Гистограмма интенсивности $\lambda^*(t)$ представлена на рис. 20. Аналогичная гистограмма, построенная для всего периода суток, позволяет выделить интервалы примерно постоянной ин-

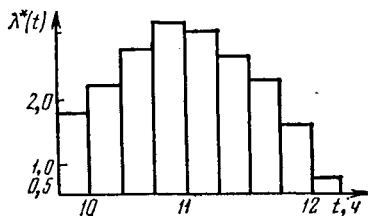


Рис. 20. Гистограмма интенсивности $\lambda^*(t)$, пасс./мин

Условное расписание

Таблица 27

Номер рейса, t	1	2	3	4	5
Время вылета, t_i Вместимость самолета, n_i	11.00 100	11.15 60	11.45 100	12.00 110	12.15 60

Порядок вычислений по формуле (8.2)

Таблица 28

№ рейса, i	$t=10.00$	$t=10.15$	$t=10.30$	$t=10.45$	$t=11.00$	$t=11.15$	$t=11.30$	$t=11.45$	$t=12.00$
1	$0,17 \times 80 = 13,6$	$0,18 \times 80 = 14,4$	$0,18 \times 80 = 14,4$	$0,13 \times 80 = 10,4$	$0,05 \times 80 = 4,0$	—	—	—	—
2	$0,12 \times 48 = 5,8$	$0,17 \times 48 = 8,2$	$0,18 \times 48 = 8,6$	$0,18 \times 48 = 8,6$	$0,13 \times 48 = 6,2$	$0,05 \times 48 = 2,4$	—	—	—
3	$0,05 \times 80 = 4,0$	$0,08 \times 80 = 6,4$	$0,12 \times 80 = 9,6$	$0,17 \times 80 = 13,6$	$0,18 \times 80 = 14,4$	$0,18 \times 80 = 14,4$	$0,13 \times 80 = 10,4$	$0,05 \times 80 = 4,0$	—
4	$0,02 \times 88 = 1,8$	$0,05 \times 88 = 4,4$	$0,08 \times 88 = 7,0$	$0,12 \times 88 = 10,6$	$0,17 \times 88 = 15,0$	$0,18 \times 88 = 15,8$	$0,18 \times 88 = 15,8$	$0,13 \times 88 = 11,4$	$0,05 \times 88 = 4,4$
5	$0,02 \times 48 = 1,0$	$0,02 \times 48 = 1,0$	$0,05 \times 48 = 2,4$	$0,08 \times 48 = 3,8$	$0,12 \times 48 = 5,8$	$0,18 \times 48 = 8,2$	$0,18 \times 48 = 8,6$	$0,18 \times 48 = 8,6$	$0,13 \times 48 = 6,2$
Сумма	26,2	34,4	42,8	47,0	45,4	40,9	34,8	24,0	10,6
Интенсивность, λ^*	1,75	2,29	2,80	3,13	3,03	2,72	2,32	1,60	0,71

Вспомогательная таблица

Таблица 29

x	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
$\left(\frac{x}{68}\right)^2$	0	0,049	0,196	0,441	0,784	1,225	1,764	2,401	3,136	3,969
$e^{-\left(\frac{x}{68}\right)^2}$	1,00	0,95	0,82	0,64	0,46	0,29	0,17	0,09	0,04	0,02
$e^{-\left(\frac{x}{68}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x+15}{68}\right)^2}$	0,05	0,13	0,18	0,18	0,17	0,12	0,08	0,05	0,02	0,02

тенсивности потока λ^* и оценить эту интенсивность. Дальнейшие расчеты проводятся по изложенным в гл. 6 моделям массового обслуживания, причем предполагается, что входящий поток является в течение каждого интервала пуассоновским с параметром λ^* . (Отметим, что полученная гистограмма не типична, поскольку не учитывает все рейсы по расписанию).

8.3 Анализ отклонения прилетов самолетов от расписания

В предыдущем параграфе отклонения прилетов и вылетов от расписания не учитывались. Для их учета необходимо провести статистический анализ отклонений. Распределение отклонений от расписания и само расписание дают вместе эмпирическое задание потока требований (см. разд. 5.4). Отклонения вылетов обуславливаются отклонениями прилетов и продолжительностей обслуживания, поэтому наибольший интерес представляют отклонения прилетов, которые и рассмотрим.

Исходными для исследования служат статистические данные о фактических отклонениях прилетов от расписания. Необходимо подобрать такое распределение, которое достаточно хорошо сглаживает эти данные. Соответствующая методика аналогична той, которая применялась для статистического анализа продолжительности обслуживания (см. разд. 5.2). При этом желательно каждый прилетающий рейс анализировать по отдельности. Если это оказывается невозможным (из-за недостатка статистики), то следует объединить данные рейсов, имеющих примерно одинаковый характер отклонения от расписания — например, рейсов, выполняемых самолетами одного типа и одного управления.

Кроме сравнительно малого объема статистики, трудность подбора аппроксимирующего распределения состоит также в том, что отклонения от прилетов могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Это обстоятельство не позволяет использовать рассмотренное выше распределение Эрланга, а также такие хорошо известные распределения, как логарифмически нормальное, Вейбулла и т. п.

Первое исследование, посвященное указанной проблеме, было проведено Фриндом [27]. Он предложил случайную величину отклонения Z аппроксимировать композицией нормального и логарифмически нормального законов, т. е. представлять ее в виде

$$Z = X + e^Y,$$

где X и Y — нормально распределенные случайные величины.

Такое распределение довольно хорошо согласуется со статистическими данными.

Однако практически использовать его трудно, так как определение оценок параметров нормальной и логнормальной компонент по статистическим данным весьма трудоемко.

Как уже отмечалось, возможность принятия случайной величиной (отклонением) как отрицательных, так и положительных зна-

чений затрудняет подбор подходящего аппроксимирующего распределения. Поэтому В. А. Пашенко было предложено по отдельности аппроксимировать отрицательные (Z_-) и положительные (Z_+) отклонения. Если обозначить через p вероятность задержки, то величина Z сформируется так:

$$Z = \begin{cases} Z_- & \text{с вероятностью } 1 - p, \\ Z_+ & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

В. А. Пашенко рассматривал случай, когда Z_- и Z_+ имеют экспоненциальное распределение.

Изложенный метод весьма прост, однако, как показала обработка большого числа выборок, он не обеспечивает достаточно хорошей аппроксимации статистических данных.

Для организации обслуживания самолетов основное значение имеет прогнозирование небольших по величине отклонений, которые являются преобладающими. В. М. Бродским предложено аппроксимировать такие отклонения нормальным распределением. В большинстве случаев согласие оказывается достаточно хорошим. Недостатком этого способа является довольно искусственное установление границы, определяющей «большие» и «небольшие» отклонения.

Для описания отклонений прилетов самолетов от расписания предлагается следующая модель, основанная на выше рассмотренных подходах. Самолет, выполняющий данный рейс, с вероятностью $1 - p_0$ может прилететь практически по расписанию, и с вероятностью p_0 опоздать. В первом случае отклонение прилета самолета от момента по расписанию $Z^{(1)}$ невелико, с равной вероятностью может быть меньше и больше нуля и обусловлено такими факторами, как колебание летного времени, небольшие отклонения от момента вылета самолета с предыдущего пункта посадки и т. п. Будем предполагать, что случайная величина $Z^{(1)}$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 . Если самолет опаздывает, то величина опоздания $Z^{(2)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_0 .

Итак, отклонение прилета

$$Z = \begin{cases} Z^{(1)} & \text{с вероятностью } 1 - p_0, \\ Z^{(2)} & \text{с вероятностью } p_0, \end{cases}$$

где

$$P\{Z^{(1)} \leq x\} = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (8.3)$$

$$P\{Z^{(2)} \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda_0 x}, & x > 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Функция распределения, математическое ожидание и дисперсия величины отклонения определяются формулами:

$$F_z(x) = P\{Z \leq x\} = \begin{cases} (1 - p_0) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right), & x \leq 0; \\ (1 - p_0) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + p_0(1 - e^{-\lambda_0 x}), & x > 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

$$E(Z) = p_0 \lambda_0^{-1}, \quad D(Z) = (1 - p_0) \sigma_0^2 + 2p_0 \lambda_0^{-2} - p_0^2 \lambda_0^{-2}. \quad (8.6)$$

Для использования формулы (8.5) необходимо знать параметры распределения p_0 , σ_0 и λ_0 . Пусть для их оценки имеется n данных об отклонениях прилетов $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Обозначим n_1 число данных, меньших нуля. Для оценки неизвестной вероятности p_0 естественно использовать наблюдаемую частоту события $\{Z < 0\}$, т. е. полагать:

$$1 - p_0^* = \begin{cases} 2 \frac{n_1}{n} & \text{при } n_1 < \frac{n}{2}, \\ 1 & \text{при } n_1 \geq \frac{n}{2}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Оценку λ_0 можно получить, приравняв эмпирическое среднее μ_0^* , подсчитанное по выборке, и теоретическое математическое ожидание:

$$\lambda_0^{*-1} = \frac{\mu_0^*}{p_0^*}, \quad (8.8)$$

где $\mu_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ и предполагается, что $p_0^* > 0$ (иначе λ_0^* не определяется).

Дисперсия σ_0^2 оценивается по n_1 данным $Z_1', Z_2', \dots, Z_{n_1}'$, меньшим нуля. Так как заведомо известно, что эти данные относятся к нормальной составляющей $Z^{(1)}$, то

$$\sigma_0^{*2} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (Z_i')^2 \quad (8.9)$$

при $n_1 > 0$ и эта оценка не определяется при $n_1 = 0$.

Для проверки применимости и облегчения использования распределения (8.5) была составлена программа для ЭЦВМ «Минск-22». Программа предусматривает вычисление четырех первых моментов выборки, вычисление значений и печать графиков функций распределения и плотности, а также проверку гипотезы о данном распределении с помощью критерия χ^2 Пирсона. В табл. 30 и 31 представлены результаты статистической обработки некоторых данных в одном из аэропортов (по данным Г. А. Любарского). На рис. 21 показаны графики накопленной частоты и теорети-

Анализ статистических данных по отклонениям прилетов
рейса № 3332 в аэропорт

№ п/п, j	Границы ин- тервала, $t_{j-1}-t_j$	Длина интер- вала, Δt_j	Число наблю- дений, α_j	Накопленная частота	Частость, h_j	Оценка функ- ции распреде- ления, $F^*(t_j)$	Оценка плот- ности распре- деления, $f^*(t_j)$	Оценка веро- ятности попа- дания в ин- тервал, $p^*(j)$	$(\alpha_j - np^*(j))^2$ * (j)
1	-30; -15	15	3	0,022	0,001	0,017	0,001		
2	-15; -10	5	7	0,073	0,010	0,076	0,012	0,076	0,022
3	-10; -5	5	16	0,189	0,023	0,220	0,032	0,144	0,800
4	-5; 0	5	35	0,443	0,051	0,450	0,052	0,230	0,345
5	0; 5	5	34	0,689	0,049	0,700	0,050	0,250	0,002
6	5; 10	5	18	0,819	0,026	0,855	0,024	0,155	0,542
7	10; 15	5	13	0,913	0,019	0,925	0,013	0,070	1,124
8	15; 25	10	6	0,957	0,009	0,960	0,002	0,035	0,305
9	25; 150	125	6	1,000	0,008	0,999	0,000	0,039	0,067
Сумма		—	138	—	—	—	—	—	3,207

Таблица 31

Аппроксимация данных об отклонениях прилетов самолетов в аэропорт

№ п/п	№ рейса	Количество выборочных данных, n	Оценки параметров			Число степеней свободы, ν	Значение критерия χ^2 -Пирсона	Критиче- ский уро- вень зна- чимости
			ρ_0^*	λ_0^*	σ_0^{*2}			
1	H-386	153	0,020	0,002	42,8	4	3,360	50 %
2	3332	138	0,100	0,035	52,4	4	3,207	50 %
3	3311	140	0,186	0,032	22,4	4	6,551	15 %
4	H-302	134	0,418	0,028	36,0	4	8,184	7 %
5	851	142	0,535	0,047	37,7	4	7,738	10 %
6	H-388	127	0,654	0,027	57,5	4	12,680	1 %
7	853	152	0,789	0,018	17,0	4	13,320	1 %
8	3428	86	0,279	0,078	162,0	4	11,166	3 %
9	3338	67	0	—	206,0	4	9,557	5 %

ческой функции распределения задержки времени прилетов само-
летов одного рейса. Из табл. 31 видно, что распределение (8.5) да-
ет достаточно хорошее сглаживание при значениях ρ_0 , не превос-
ходящих 0,65.

8.4. Аналитическая модель обслуживания, учитывающая расписание движения самолетов в аэропорту

Рассмотрим метод расчета потребности в обслуживающем пер-
сонале и средствах механизации, которые работают на перроне и
необходимы для обеспечения прилетов и вылетов самолетов. Отли-
чительной особенностью предлагаемого метода является то, что он

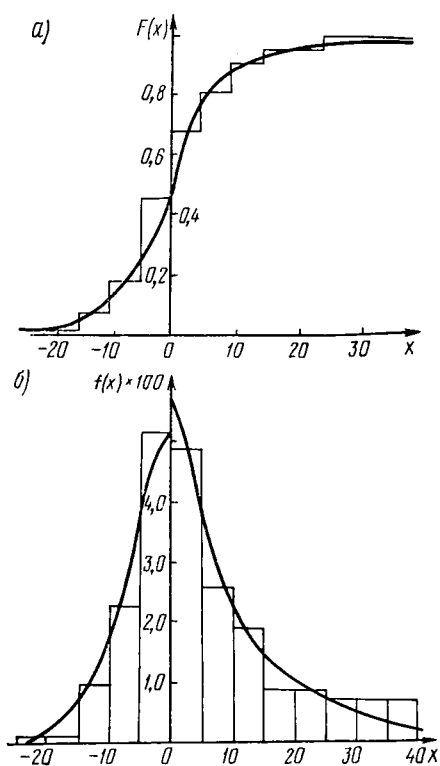


Рис. 21. Аппроксимация отклонений прилетов самолетов от расписания

образом: вначале для данного момента определяется распределение числа аппаратов, которые могут потребоваться в данный момент, а потом устанавливается то число аппаратов, которое будет достаточным в $\alpha \cdot 100\%$ случаев, где α — заданная вероятность удовлетворения спроса.

Использование обслуживающих аппаратов каждого вида может планироваться тремя способами: 1) по прилетам самолетов; 2) по вылетам; 3) как по вылетам, так и по прилетам. Первые два случая соответствуют одноразовому использованию обслуживающего аппарата на одном самолете, а третий — двухразовому. По прилету обычно планируется работа дежурных по встрече пассажиров, разгрузчиков багажа, водителей МА-7 (зимой). По вылету планируется работа дежурных по посадке, загрузчиков багажа пассажиров, водителей водозаправщиков, АПА, тягачей, МА-7 (летом). По прилету и вылету планируется работа бригад по техобслуживанию самолетов, а также водителей автолифтов и грузовых машин.

Описанный порядок планирования соответствует организации работ на перроне аэропорта Домодедово. Здесь бригады дежурных

учитывает не только расписание и нормативную длительность обслуживания, но и случайные отклонения прилетов и вылетов от расписания и фактических продолжительностей выполнения различных операций от нормативных. В основу метода расчета положено следующее правило: в тот момент, когда возникает потребность в обслуживающем персонале или каком-либо средстве механизации, это требование должно быть удовлетворено с большой степенью вероятности.

Расчет потребности должен производиться отдельно для различных специальностей исполнителей и средств механизации. Как обычно, будет для унификации называть обслуживающим аппаратом тот объект, потребность в котором рассматривается. Задача заключается, таким образом, в определении для каждого момента суток потребного числа обслуживающих аппаратов каждого типа. Согласно сформулированному правилу, эта задача должна решаться следующим

по встрече пассажиров и дежурных по посадке работают автономно, как и бригады по загрузке и разгрузке багажа. Буксировщики используются обычно по вылету. Для другой организации работ следует произвести соответствующие изменения.

а) Планирование по прилетам самолетов

Рассмотрим некоторый момент времени суток t , который будет называться текущим моментом. Необходимо найти распределение спроса на данный вид обслуживающего аппарата в этот момент. Зафиксируем некоторый момент прилета самолета, который вызывает потребность в обслуживающем аппарате этого вида. Так как прилет может осуществиться по сравнению с расписанием как с опережением, так и с опозданием, то указанному моменту прилета могут соответствовать самолеты, прилетающие как позже, так и раньше текущего момента времени t . Введем следующие обозначения:

t_j — рассматриваемый момент прилета j -го самолета по расписанию;

Z — случайная величина отклонения от момента прилета по расписанию;

T — фактическая продолжительность обслуживания данным видом аппарата;

l — время, через которое после прилета потребуется данный вид обслуживающего аппарата.

Величины t_j и l предполагаются неслучайными, а Z и T — случайными. Значение l определяется сетевым графиком обслуживания прилетающего самолета. Распределение величин Z и T устанавливается на основании статистических данных. Рис. 22 поясняет физический смысл рассмотренных величин. Из рисунка видно, что в текущий момент времени (t) на данном прилетающем самолете должен быть задействован обслуживающий аппарат, если выполняется условие

$$t_j + Z + l < t < t_j + Z + l + T. \quad (8.10)$$

Это эквивалентно выполнению события

$$\{Z < t - t_j - l; t - t_j - l < T + Z\}.$$

Обозначая вероятность данного события $p_j(t)$, находим

$$p_j(t) = F_Z(t - t_j - l) - F_{Z+T}(t - t_j - l), \quad (8.11)$$

где $F_Z(x)$ — функция распределения случайной величины Z ;

$F_{Z+T}(x)$ — функция распределения суммы $Z + T$.

Следовательно, если распределение случайных величин Z и T , а следовательно, и $Z + T$ известно, то по формуле (8.11) можно найти вероятность $p_j(t)$ того, что в момент времени t обслуживанием

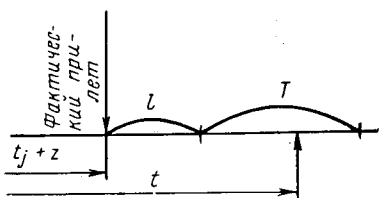


Рис. 22. Схема обслуживания самолета по прилету

данного (j -го) прилетающего самолета должен быть занят аппарат рассматриваемого вида.

Обозначим $\mu_j(t)$ и $\sigma_j^2(t)$ математическое ожидание и дисперсию числа аппаратов, которые необходимы в момент времени t для обслуживания j -го рейса. Пусть одновременно требуется для обслуживания j -го рейса s_j аппаратов данного типа. Тогда из элементарных теорем теории вероятностей [3] следует, что

$$\begin{aligned}\mu_j(t) &= s_j p_j(t); \\ \sigma_j^2(t) &= s_j^2 p_j(t) [1 - p_j(t)].\end{aligned}\tag{8.12}$$

Математическое ожидание $\mu(t)$ и дисперсия $\sigma^2(t)$ общего числа аппаратов данного вида, потребных в момент времени t для обслуживания всех прилетающих рейсов, составляют:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \sum_j \mu_j(t) = \sum_j s_j p_j(t); \\ \sigma^2(t) &= \sum_j \sigma_j^2(t) = \sum_j s_j^2 p_j(t) [1 - p_j(t)],\end{aligned}\tag{8.13}$$

где суммирование производится по всем моментам прилетов.

Следовательно, для применения формулы (8.13) предварительно необходимо для каждого прилетающего самолета по описанной выше процедуре вычислить $p_j(t)$.

Общая численность в аппаратах данного вида складывается из потребностей, вызванных каждым прилетом. Если интенсивность движения самолетов в данном аэропорту высока, то число прилетов велико. Следовательно, в этом случае на основании центральных предельных теорем теории вероятностей [3, 21] можно утверждать, что общая потребность имеет нормальное распределение с параметрами $\mu(t)$ и $\sigma^2(t)$, определяемыми по формуле (8.13).

Следовательно, количество аппаратов $s(\alpha, t)$, потребных в момент времени t для того, чтобы с вероятностью α обеспечить все прилеты, вычисляется по формуле

$$s(\alpha, t) = \mu(t) + \sigma(t) \Phi^{-1}(\alpha),\tag{8.14}$$

где $\Phi^{-1}(\alpha)$ — квантиль стандартного нормального распределения, отвечающий уровню α и определяемый табл. П1.

Для использования приведенных формул необходимо знать функции распределения $F_Z(x)$ и $Z_{Z+\tau}(x)$. Выражения для этих функций будут приведены ниже.

б) Планирование по вылетам самолетов

В данном случае следует рассмотреть несколько вариантов, отвечающих различным типам рейсов. Выделим начальные рейсы. Для применения приведенных формул будем под t_j и Z понимать фактическое время вылета по расписанию и отклонение от него, а под l — время, за которое до вылета потребуются данный вид обслуживающего аппарата. Тогда рис. 22 и формулы (8.10) и (8.11) останутся справедливыми, если величину l брать с обратным знаком

(см. рис. 23). Если $T > l$, то происходит дополнительная (по отношению к Z) задержка вылета. Обычно можно полагать в данном случае $Z = 0$. При необходимости следует собрать статистические данные о распределении Z и обработать их. После определения $p_j(t)$ используются формулы (8.12) — (8.14).

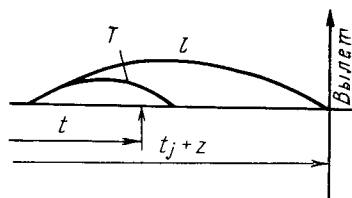


Рис. 23. Схема обслуживания самолета по вылету

Рассмотрим теперь обратные и транзитные рейсы, находящиеся на перроне в течение некоторого дневного периода. Эти рейсы можно условно классифицировать на два вида: рейсы с продолжительной стоянкой и рейсы с кратковременной стоянкой. Будем считать, что для первых рейсов продолжительность стоянки так велика, что момент вылета самолета весьма мало зависит от фактического момента прилета (т. е. продолжительность стоянки достаточно для нивелирования, сглаживания отклонения прилета). В этом случае методика расчета аналогична той, которая была описана вначале этого пункта (рис. 23).

Для рейсов с кратковременной стоянкой будем считать, что момент вылета в основном определяется моментом прилета. В этом случае методика планирования та же, что и в случае планирования по прилету.

в) Планирование по прилетам и вылетам самолетов

В данном случае следует учитывать такие типы рейсов: первоначальные, конечные, транзитные и обратные с продолжительной стоянкой, транзитные и обратные с кратковременной стоянкой.

Планирование обеспечения первоначальных рейсов должно осуществляться в соответствии с методикой *б* (по вылету), а конечных — *а* (по прилету).

Планирование обеспечения транзитных и обратных рейсов с продолжительной стоянкой следует производить в два этапа: отдельно по прилету и отдельно по вылету. Большая продолжительность стоянки позволяет здесь с достаточной для практических целей точностью считать моменты прилетов и вылетов взаимно независимыми.

Остановимся на планировании обеспечения транзитных и обратных рейсов с кратковременной стоянкой. Соответствующая схема приведена на рис. 24. Здесь обслуживающий аппарат используется дважды. На рисунке l_1 обозначается время, спустя которое после момента прилета самолета первый раз (по прилету) потребуется данный обслуживающий аппарат, а T_1 — фактическая продолжительность занятости на этом обслуживании. Величина l_2 показывает время, спустя которое после окончания первого обслуживания данным типом аппарата вновь потребуется этот тип аппарата (по вылету).

Величина T_2 есть фактическая длительность второго обслуживания.

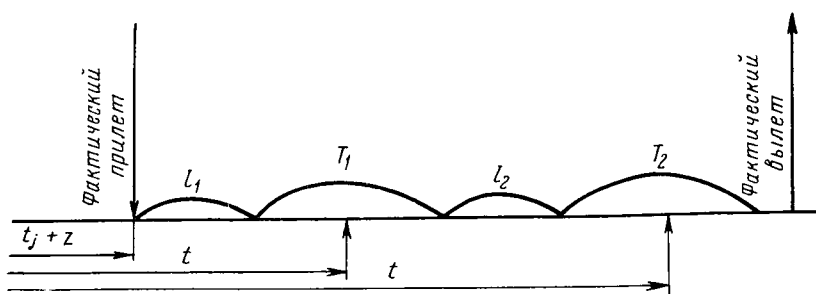


Рис. 24. Схема обслуживания самолета по прилету и вылету

Найдем выражение для вероятности $p_j(t)$ того, что в момент t потребуется данный вид обслуживающего аппарата. Указанное событие эквивалентно выполнению хотя бы одного из двух событий:

$$\{t_j + Z + l_1 < t < t_j + Z + l_1 + T_1\};$$

$$\{t_j + Z + l_1 + T_1 + l_2 < t < t_j + Z + l_1 + T_1 + l_2 + T_2\}.$$

Так как данные события несовместимы, то искомая вероятность равна:

$$p_j(t) = F_Z(t - t_j - l_1) - F_{Z+T_1}(t - t_j - l_1) + F_{Z+T_1}(t - t_j - l_1 - l_2) - F_{Z+T_1+T_2}(t - t_j - l_1 - l_2), \quad (8.15)$$

где $F_{Z+T_1+T_2}(x)$ — функция распределения суммы $Z+T_1+T_2$. Остальные вычисления производятся по методике а: для каждого рейса j и момента t по формулам (8.12) находятся величины $\mu_j(t)$ и $\sigma_j^2(t)$, а затем используются выражения (8.13) и (8.14).

Для использования приведенных формул необходимо знать функции распределения $F_Z(x)$, $F_T(x)$, $F_{Z+T}(x)$ и т. д. Будем вначале исходить из простейших распределений для Z и T .

Пусть Z и T имеют нормальное распределение с параметрами $E(Z) = \mu_0$; $D(Z) = \sigma_0^2$; $E(T) = \mu$; $D(T) = \sigma^2$. Тогда

$$F_Z(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_0}{\sigma_0}\right); \quad F_{Z+T}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_0 - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}}\right). \quad (8.16)$$

Подставляя это в (8.11), находим $p_j(t)$, что позволяет воспользоваться формулами (8.12) — (8.14).

Пусть теперь имеет место модель формирования задержки самолета, изложенная в разд. 8.3, т. е. рассмотрим более сложные распределения. Тогда $F_Z(x)$ вычисляется по формуле (8.5).

Для продолжительности обслуживания примем модель, рассмотренную в разд. 5.3, так что функция распределения $F_T(x)$ определяется по формуле (5.21). Несложные вычисления показывают, что

при $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
 F_{Z+T}(x) = & (1 - p_0)(1 - p) \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}} \right) + \\
 & + (1 - p_0)p \left[\Phi \left(\frac{x}{\sigma_0} \right) - e^{-\lambda \left(x - \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{2} \right)} \Phi \left(\frac{x - \lambda_0 \sigma_0^2}{\sigma_0} \right) \right] + \\
 & + p_0(1 - p) \left[\Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) - e^{-\lambda_0 \left(x - \mu - \frac{\lambda_0 \sigma^2}{2} \right)} \Phi \left(\frac{x - \mu - \lambda_0 \sigma^2}{\sigma} \right) \right] + \\
 & + p_0 p \left[1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} e^{-\lambda_0 x} \right], \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

а при $x < 0$ последнее из четырех слагаемых следует отбросить.

Остановимся на формуле $F_{Z+T_1+T_2}(x)$, входящей в выражение (8.15). Будем для простоты считать, что дополнительные работы могут иметь место только 1 раз, а именно, при обслуживании по прилету. В этом случае они учитываются в T_1 . Обозначим p — вероятность наличия дополнительных работ; m_1 , m_2 , σ_1^2 , σ_2^2 — средние значения и дисперсии продолжительности выполнения основных работ по прилету и вылету.

В данном случае для $F_{Z+T_1}(x)$ справедлива формула (8.17), в которой μ и σ следует заменить на m_1 и σ_1 . Для функции $F_{Z+T_1+T_2}$ справедлива та же формула (8.17) при $\mu = m_1 + m_2$ и $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Рассмотрим численный пример. В табл. 32 приведено условное расписание, состоящее из трех пунктов, а также значения параметров распределения величины отклонений прилетов от расписания.

Будем интересоваться количеством исполнителей, необходимых для технического обслуживания самолетов по прилету. Параметры распределения длительности обслуживания приведены в той же табл. 32. Для моментов времени $t' = 9$ ч 30 мин = 570 мин и $t'' = 10$ ч 00 мин = 600 мин найдем средние значения и дисперсию потребного числа исполнителей, а также количество исполнителей,

Таблица 32

Исходные данные

№ рейса, j	Тип самолета	Время прилета, t_j	Параметры распределения отклонения прилетов			Параметры распределения длительности обслуживания			
			p_0	$\lambda_j, \frac{1}{\text{мин}}$	$\sigma_0, \text{мин}$	p	$\mu, \text{мин}$	$\lambda, \frac{1}{\text{мин}}$	$\sigma, \text{мин}$
1	Ту-104	9.20	0,1	0,05	5,0	0,2	80	0,0083	20
2	Ил-18	9.36	0,15	0,03	6,5	0,25	90	0,0056	30
3	Ил-18	9.50	0,5	0,03	6,0	0,25	90	0,0056	30

обеспечивающее вновь прибывающему самолету не ожидать с вероятностями 0,9 и 0,95.

При этом будем считать, что каждый прилетающий самолет обслуживают два человека, обслуживание начинается спустя 10 мин после прилета для самолета Ту-104 и 15 мин — для Ил-18. Перерывы в обслуживании отсутствуют.

Согласно приведенной методике, вероятность того, что в момент времени $t' = 9$ ч 30 мин понадобятся исполнители для обслуживания самолета Ту-104, прилетающего рейсом № 1, определяется по формуле (8.11):

$$p_1(t') = F_Z(t' - t_1 - l_1) - F_{Z+T}(t' - t_1 - l_1),$$

где функции распределения $F_Z(x)$ и $F_{Z+T}(x)$ определяются по формулам (8.5) и (8.17). Параметры, фигурирующие в этих формулах, берем из табл. 32 (первая строка). После подстановки, используя табл. IV и VI, получаем

$$\begin{aligned} p_1(t') &= F_Z(570 - 560 - 10) - F_{Z+T}(570 - 560 - 10) = \\ &= F_Z(0) - F_{Z+T}(0) = (1 - 0,1) \Phi(0) - (1 - 0,1)(1 - 0,2) \Phi\left(\frac{-80}{\sqrt{5^2 + 20^2}}\right) - \\ &\quad - (1 - 0,1) 0,2 \left[\Phi(0) - e^{-0,0083 \left(-\frac{0,0083 \cdot 25}{2}\right)} \Phi\left(0 - \frac{0,0083 \cdot 25}{5,0}\right) \right] - \\ &\quad - 0,1(1 - 0,2) \left[\Phi\left(-\frac{80}{20}\right) - e^{-0,05 \left(-80 - \frac{0,05 \cdot 400}{2}\right)} \Phi\left(0 - \frac{80 - 0,05 \cdot 400}{20}\right) \right] - \\ &\quad - 0,1 \cdot 0,2 \left(1 - \frac{0,05}{0,05 - 0,0083} e^0 - \frac{0,0083}{0,0083 - 0,05} e^0 \right) = 0,447. \end{aligned}$$

Среднее число исполнителей, занятых в момент $t' = 9$ ч 30 мин на самолете Ту-104,

$$\mu_1(t') = s_1 p_1(t') = 2 \cdot 0,447 = 0,894.$$

Дисперсия составит

$$\sigma_1^2(t') = s_1^2 p_1(t') [1 - p_1(t')] = 4 \cdot 0,447 (1 - 0,447) = 0,99.$$

Т а б л и ц а 33

Расчет потребности в исполнителях

№ рейса, j	Тип самолета	Время прилета t_j , мин	$t' = 9$ ч 30 мин			$t'' = 10$ ч 00 мин		
			$p_j(t')$	$\mu_j(t')$	$\sigma_j^2(t')$	$p_j(t'')$	$\mu_j(t'')$	$\sigma_j^2(t'')$
1	Ту-104	9.20	0,447	0,894	0,990	0,930	1,860	0,256
2	Ил-18	9.36	0,001	0,002	0,004	0,798	1,596	0,645
3	Ил-18	9.50	—	—	—	0,196	0,392	0,630
Сумма				0,896	0,994		3,848	1,531

Потребная численность исполнителей

№ по пор.	t	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$s(0,9; t)$	$s(0,95; t)$
1	9.30	0,896	0,994	2,18	2,54
2	10.00	3,848	1,531	5,81	6,36

Выполняя аналогичные вычисления для момента t'' и для остальных рейсов в моменты t' и t'' , получим среднее и дисперсию числа занятых в эти моменты исполнителей по каждому рейсу. Суммируя эти величины, получаем среднее и дисперсию общего числа занятых в моменты t' и t'' исполнителей. Соответствующие расчеты приведены в табл. 33.

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned}\mu(t') &= 0,896; \quad \mu(t'') = 3,848; \\ \sigma^2(t') &= 0,994; \quad \sigma^2(t'') = 1,531.\end{aligned}$$

Найдем потребное в момент t' число исполнителей, обеспечивающее немедленное начало обслуживания с вероятностью $\alpha=0,9$. По формуле (8.14)

$$\begin{aligned}s &= (s, t') = s(0,9; 570) = \mu(t') + \sigma(t') \Phi^{-1}(\alpha) = \\ &= 0,896 + \sqrt{0,994} \cdot 1,282 = 2,18.\end{aligned}$$

В табл. 34 приведено потребное число исполнителей в моменты t' и t'' , соответствующие вероятностям 0,9 и 0,95.

Из рассмотренного видно, что ручные вычисления довольно трудоемки. Поэтому целесообразно использовать электронные вычислительные машины. Соответствующая программа для ЭЦВМ «Минск-22» была составлена А. М. Литвинчуком. Она позволяет полностью автоматизировать все вычисления и печатать таблицы и графики потребного числа исполнителей (или средств механизации) в течение суток.

8.5. Детерминированное моделирование процесса обслуживания

Рассмотренные аналитические модели массового обслуживания имеют ограниченное применение. Они основывались, как правило, на предположении о пуассоновском входящем потоке требований и о простейшем механизме обслуживания (идентичность аппаратов, отсутствие перерывов в работе и т. п.). В тех случаях, когда эти предпосылки не имеют места, следует прибегать к моделированию процесса обслуживания. Процедура детерминированного и статистического моделирования, которая потом применяется для анализа

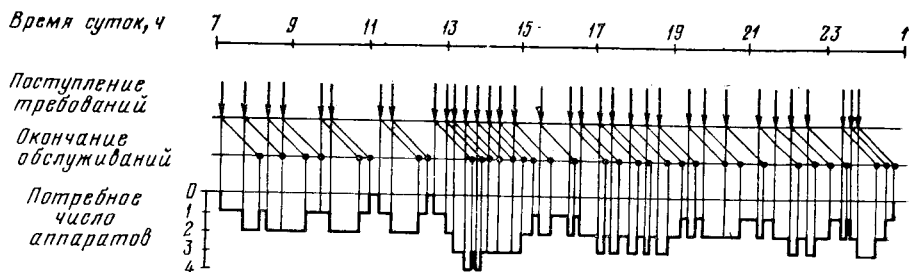


Рис. 25. Схема процесса обслуживания

технического обслуживания потоков самолетов, будет изложена ниже.

Предполагается, что моменты поступления требований и продолжительности обслуживания неслучайны и известны заранее. Соответствующие модели называются детерминированными. Модели, в которых учитывается элемент случайности, называются стохастическими (или вероятностными).

Методы расчета детерминированных процессов обслуживания, излагаемые в данном разделе, применяются в настоящее время в ГА при определении количества технических перронных бригад и самолетов, потребных для обеспечения расписания. Остановимся вначале на определении количества технических перронных бригад, необходимых для встречи и обслуживания самолетов по прилету. Предположим, что все самолеты, прилетающие в данный аэропорт, обслуживаются по регламенту кратковременная стоянка (КВС). Будем далее исходить из того, что продолжительность каждого обслуживания постоянна и равна 1 ч. Определим потребное число бригад из условия, что самолеты не должны ожидать начала обслуживания.

Эта задача аналогична рассмотренной в разд. 7.3. Разница состоит в том, что там поток требований задавался аналитически и был пуассоновским, а здесь он задается эмпирически и является детерминированным (отклонений от расписания нет).

Для решения задачи необходимо построить график прилетов самолетов по расписанию. Такой график изображен на второй горизонтальной прямой диаграммы, представленной на рис. 25. Вертикальные стрелки показывают моменты прилетов по расписанию. В каждый из таких моментов необходимо иметь свободную бригаду, которая сразу могла бы приступить к обслуживанию. Через час после начала обслуживания бригада оканчивает обслуживание и может приступить к обслуживанию следующего самолета. Моменты окончания обслуживания показаны точками на следующей горизонтальной прямой.

В рассматриваемой задаче прилеты самолетов образуют поток требований. Обслуживающими аппаратами являются технические перронные бригады. Требования (самолеты) не будут ожидать начала обслуживания, если в каждый момент времени число требова-

ний, которым необходимо произвести обслуживание (т. е. которые находятся в системе), не превышает имеющегося количества аппаратов. Заметим, что количество требований, которым необходимо произвести обслуживание, в каждый момент времени определяется как разность числа поступивших и обслуженных до этого момента времени требований. Иными словами, это разница количества точек, отмеченных на двух средних горизонтальных прямых диаграммы. Изменение этой величины по времени суток изображено на нижней горизонтальной прямой диаграммы. Следовательно, на этой прямой показано потребное количество аппаратов для каждого момента времени суток, т. е. график потребного количества аппаратов. В момент поступления требования это количество возрастает на единицу, а в момент окончания обслуживания — уменьшается. Это соображение позволяет строить график последовательно слева направо, как это показано на рис. 25.

Из графика видно, например, что в 12 ч требуются два обслуживающих аппарата, а в 24 ч — три. Практически с 7 до 13 ч необходимо иметь два аппарата, с 13 до 14 ч — четыре аппарата и с 14 по 1 ч ночи — три аппарата. Следовательно, можно рекомендовать следующую организацию обслуживания самолетов по прилету. Технические перронные бригады организуются в три смены. Первая смена, состоящая из двух бригад, работает ежедневно с 7 до 14 ч. Вторая и третья смены состоят каждая из 3 бригад. Они работают через день по 12 ч с 13 ч до 1 ч ночи. Кроме того, необходимо, очевидно, предусмотреть еще две бригады, которые поочередно должны подменять бригады первой смены по выходным дням и дежурить ежедневно с часа ночи до 7 ч утра, когда прилеты по расписанию не предусмотрены.

В рассмотренной задаче предполагалось, что все самолеты по прилету проходят обслуживание при кратковременной стоянке и что продолжительности всех обслуживаний одинаковы. Однако эти ограничения не являются существенными. Та же методика применима и тогда, когда они не выполняются, например, когда некоторым самолетам по прилету требуется произвести послеполетное обслуживание. Существенно только то, что заранее должны быть известны продолжительности обслуживаний, так как это позволяет точно определить моменты окончания обслуживания самолетов. Следовательно, изложенный метод позволяет для любого детерминированного процесса обслуживания определять число аппаратов, при котором требованиям не придется ожидать начала обслуживания.

Как уже говорилось, этот же метод применяется при подсчете количества самолетов, потребных для обеспечения расписания. В этом случае обслуживающим аппаратом является самолет, а обслуживание заключается в выполнении рейса. Моментом поступления требования следует считать тот момент, когда необходимо начать подготовку самолета к рейсу. Этот момент определяется исходя из времени вылета самолета по расписанию и времени, необходимого для подготовки к рейсу. Продолжительность обслуживания

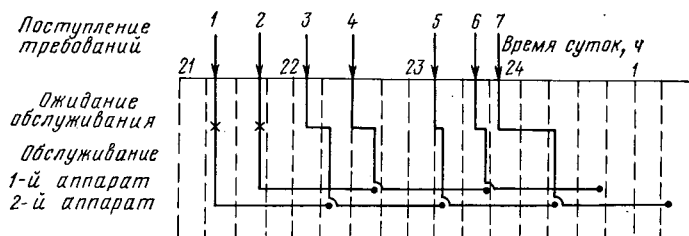


Рис. 26. Схема процесса обслуживания при наличии двух бригад

данного требования равна продолжительности соответствующего рейса плюс время, необходимое для предполетной подготовки и обслуживания самолета после возвращения из рейса. Построение диаграммы, аналогичной представленной на рис. 25, позволяет определить минимальное число самолетов, необходимое для выполнения заданного расписания движения.

Остановимся теперь на детерминированном варианте задачи, рассмотренной в разд. 7.3. Здесь уже допускается ожидание начала обслуживания. Наибольший интерес в данном случае представляет определение при заданном количестве аппаратов среднего времени ожидания начала обслуживания.

Вернемся снова к задаче об определении потребного количества технических перронных бригад. Предположим, нас интересует, можно ли на период с 21 до 1 ч ночи иметь две бригады вместо трех (рис. 25). Сколько времени придется самолетам ожидать начала обслуживания?

Решение таких задач может быть получено с помощью диаграмм, аналогичных представленной на рис. 26. На верхней части этой диаграммы изображены моменты поступления требований. Внизу показаны длительности обслуживания, причем окончание каждого обслуживания отмечено точкой. В середине показаны продолжительности ожидания. Если требованию не пришлось ожидать, как, например первому, то на месте, показывающем продолжительность ожидания, ставится крестик.

Положим, что в 21 ч оба имеющихся аппарата свободны. Тогда первым двум требованиям не придется ожидать начала обслуживания. В момент поступления третьего требования оба аппарата оказываются занятыми, поэтому требование ожидает до момента освобождения одного из аппаратов. Из диаграммы видно, что первым освобождается второй аппарат, который и принимает на обслуживание третье требование.

Аналогичным способом можно проследить и за другими требованиями.

Построенная диаграмма позволяет определить продолжительность ожидания каждым требованием. Легко вычислить, что третье требование ожидало около 13 мин, четвертое — 12 мин, пятое —

4 мин, шестое — 6 мин и седьмое — 30 мин. Следовательно, среднее время ожидания начала обслуживания

$$\gamma = \frac{13 + 12 + 4 + 6 + 30}{7} \approx 9 \text{ мин.}$$

С помощью диаграммы можно вычислить и другие показатели эффективности обслуживания, например коэффициент загрузки. Располагаемый фонд времени двух аппаратов за период с 21 по 1 ч 30 мин составил $2 \times 270 = 540$ мин. В течение этого периода аппараты были заняты $60 \times 7 = 420$ мин. Отсюда коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{420}{540} = 0,8.$$

Приведенный способ расчета является графическим. Это создает известные неудобства, когда необходимо проследить за процессом обслуживания большого числа требований. В этом случае вместо графического можно применять эквивалентный ему табличный способ. Решение рассмотренного выше примера этим способом представлено в табл. 35. Моменты поступления требований заданы. Поступившее требование принимается на обслуживание тем аппаратом, который раньше оканчивает обслуживание предыдущих требований. Если момент окончания обслуживания этим аппаратом предшествует моменту поступления, то ожидать начала обслуживания не приходится. В противном случае время ожидания подсчитывается как разность моментов начала обслуживания и поступления. Конец обслуживания определяется прибавлением к моменту начала обслуживания длительности обслуживания (1 ч).

8.6. Метод статистического моделирования

Статистическое как и детерминированное моделирование заключается в непосредственном моделировании процесса обслуживания потока требований (самолетов). Разница состоит только в том, что в детерминированном случае момент поступления и продолжительность обслуживания каждого требования были неслучайны и известны заранее. В общем случае они могут быть случайными. Поэтому при необходимости в первую очередь следует определить распределение соответствующих случайных величин, как это было описано в разд. 5.2 и 5.4. Далее, необходимо иметь источник случайных чисел, имеющих то распределение, которое было установлено в результате анализа. Вырабатываемые этим источником числа принимаются в процессе моделирования за интересующие нас случайные величины — продолжительности обслуживания или промежутки времени между поступлениями.

Остановимся на источниках случайных чисел. В качестве последних служат специальные датчики или таблицы. Датчики применяются при моделировании на ЭЦВМ, а таблицы — при моделировании вручную. Табл. ПИХ содержит 320 случайных чисел $\xi_{0,1}$, имеющих нормальное распределение (5.6) со средним значением и

Исследование детерминированного

№ аппарата	1 требование				2 требование				3 требование				4 требо	
	Поступление	Начало обслуживания	Продолжительность ожидания	Конец обслуживания	Поступление	Начало обслуживания	Продолжительность ожидания	Конец обслуживания	Поступление	Начало обслуживания	Продолжительность ожидания	Конец обслуживания	Поступление	Начало обслуживания
I					21.42	21.42	0	22.42					22.30	22.42
II	21.18	21.18	0	22.18					22.05	22.18	0.13	23.18		

средним квадратическим отклонением, равными соответственно 0 и 1. Если необходимо получить нормально распределенные случайные числа $\xi_{\mu;\sigma}$ со средним значением μ и средним квадратическим отклонением σ , то необходимо воспользоваться формулой

$$\xi_{\mu;\sigma} = \mu + \sigma \xi_{0;1}. \quad (8.18)$$

Предположим, например, что продолжительность выполнения некоторой работы по техническому обслуживанию самолета является случайной и имеет нормальное распределение со средним $\mu = 12$ мин и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$ мин. Имитируем семь продолжительностей выполнения этой работы. Для этого вырабатываем семь случайных чисел, имеющих указанное распределение, и принимаем их за упомянутые продолжительности. С этой целью выпишем из табл. ПИХ семь первых случайных чисел $\xi_{0;1}$, округляя их до второго знака после запятой: 0,60; 0,89; 1,36; 0,40; 1,40; 0,61; 1,06. Для получения нужного распределения применим формулу (8.18), которая при $\mu = 12$ и $\sigma = 2$ примет вид

$$\xi_{12;2} = 12 + 2 \cdot \xi_{0;1}.$$

В результате находим, что первая продолжительность равна:

$$\xi_{12;2}^{(1)} = 12 + 2 \cdot 0,60 = 13,2 \text{ мин.}$$

Поступая аналогично, находим все 7 продолжительностей, вычисленных с точностью до 0,1:

13,2; 13,8; 14,7; 12,8; 14,8; 13,2; 14,1.

Таким образом, мы восстановили случайные колебания продолжительности выполнения работы.

8.7. Статистическое моделирование процессов обслуживания

Проиллюстрируем технику статистического моделирования потока требований на задаче обслуживания самолетов по прилету (см. разд. 8.5). При исследовании детерминированного случая са-

процесса обслуживания

вание		5 требование				6 требование				7 требование			
Продолжитель- ность ожидания	Конец обслужи- вания	Поступление	Начало обслужи- вания	Продолжитель- ность ожидания	Конец обслужи- вания	Поступление	Начало обслужи- вания	Продолжитель- ность ожидания	Конец обслужи- вания	Поступление	Начало обслужи- вания	Продолжитель- ность ожидания	Конец обслужи- вания
0.12	23.42	23.14	23.18	0.04	24.18	23.36	23.42	0.06	24.42	23.48	24.18	0.30	1.18

молеты прибывали точно по расписанию, а продолжительность обслуживания каждого самолета равнялась 1 ч. Учтем теперь отклонения от расписания и случайные колебания продолжительности обслуживания. Пусть в результате анализа статистических данных установлено, что отклонения от расписания распределены нормально со средним значением $\mu_0=6$ мин и средним квадратическим отклонением $\sigma_0=10$ мин. Продолжительность обслуживания также имеет нормальное распределение с параметрами $\mu=60$ мин, $\sigma=20$ мин. Требуется узнать, как будут справляться две технические перронные бригады с обслуживанием самолетов, прилетающих после 21 ч, если расписание прилетов следующее (см. рис. 25 и табл. 35):

21.18; 21.42; 22.05; 22.30; 23.14; 23.36; 23.48.

Имитируем вначале продолжительности обслуживания первых 7 самолетов. Для этого используем формулу (8.18), которая при $\mu=60$ и $\sigma=20$ преобразуется к виду

$$\xi_{60; 20} = 60 + 20\xi_{0; 1}. \quad (8.19)$$

В качестве величин $\xi_{0; 1}$ берем первые 7 значений случайных чисел из таблицы ПИХ, приведенных в разд. 8.6. Произведем вычисления и запишем результаты в первую строку табл. 36.

Имитируем прилеты самолетов в течение одних суток. Для этого выработаем семь (по числу прилетов) нормально распределенных величин с параметрами $\mu=6$ мин и $\sigma=10$ мин, которые примем за отклонения от расписания, имевшиеся в данные сутки. С этой целью возьмем из табл. ПИХ семь нормальных чисел и преобразуем их по формуле (8.18), которая при указанных значениях параметров примет вид:

$$\xi_{6; 10} = 6 + 10\xi_{0; 1}. \quad (8.20)$$

Поскольку семь первых чисел табл. ПИХ нами были уже использованы, возьмем следующие семь чисел, округляя их до первого знака после запятой:

Продолжительности обслуживания

№ реализации	№ требования							Всего
	1	2	3	4	5	6	7	
1	72	78	87	68	88	72	81	546
2	38	77	72	35	22	31	56	331
3	89	21	59	99	47	77	41	433
4	73	66	49	64	62	88	42	444
5	36	43	102	77	47	73	81	459
6	65	40	44	112	58	44	63	426
7	53	25	50	91	51	52	73	395
8	39	17	71	32	84	57	86	386
9	66	69	69	29	11	37	71	352
10	62	61	26	66	36	30	60	341
Всего	593	497	629	673	506	561	654	4113

—0,8; 0,7; 0,4; 0,9; 1,0; 0,0; 0,8.

Применяя преобразование по приведенной формуле, получим:

—2; 13; 10; 15; 16; 6; 14.

Следовательно, в рассматриваемые сутки первый самолет прилетел раньше расписания на 2 мин, второй опоздал на 13 мин и т. д. Фактические моменты прилета самолетов определим, прибавляя к моментам прилета по расписанию полученные отклонения. Например, первый самолет прилетел в 21.16, второй в 21.55 и, продолжая так далее, находим:

21.16; 21.55; 22.15; 22.45; 23.30; 23.42; 0.02.

Эти значения дают моменты прилета самолетов в рассматриваемые сутки. Занесем их в первую строку табл. 37. Продолжительности обслуживания были выработаны раньше и представлены в табл. 36. Следовательно, имеются все необходимые данные, чтобы просмотреть процесс обслуживания в течение одних суток аналогично тому, как это было сделано в детерминированном случае (см. табл. 35). Соответствующие результаты приведены в первой строке табл. 38 и 39. Они показывают, что время ожидания начала обслуживания третьим самолетом составило 13 мин, четвертым — 28 мин и т. д., а суммарное время ожидания всеми самолетами — 186 мин. Обслуживание последнего самолета закончено в 2 ч 44 мин.

Итак, промоделирован процесс обслуживания самолетов по прилету. Так как при этом рассматривался период времени, соответствующий только одним суткам, то получена лишь одна реализация случайного процесса. Конечно, в данном случае на основании

одной реализации нельзя делать окончательных выводов, так же как и нельзя их делать на основании наблюдений за работой бригад в течение столь непродолжительного времени. Не исключено, что в рассматриваемом случае процесс протекал «нетипично». Обратим, например, внимание на то, что продолжительности всех обслуживаний превышали среднее значение, равное 1 ч. Это довольно редкий случай*, поскольку в среднем половина всех обслуживаний должна длиться более 1 ч, а половина — менее 1 ч. Следовательно, выпал «трудный» день, когда вследствие случайного стечения обстоятельств длительности всех обслуживаний превышали обычную норму. Поэтому для получения правильных выводов необходимо основываться на результатах многих реализаций.

Поступая так же, как и раньше, проиграем десять реализаций рассматриваемого процесса. При этом для выработки продолжительностей обслуживания будем использовать нечетные семерки случайных чисел табл. ПИХ, а именно числа с номерами: 1—7; 15—21; 29—35 и т. д. Применяя к ним преобразование (8.19), получим продолжительности обслуживания, которые приведены в табл. 36. Крайние строка и столбец этой таблицы служат для проверки, т. е. для вычисления среднего арифметического времени обслуживания. Так как суммарная продолжительность обслуживания 70 требований составила 4113 мин, то среднее арифметическое равно 58,8 мин. Это значение близко к истинному, равному 1 ч.

Для выработки отклонений от расписания используем четные семерки табл. ПИХ (числа с номерами 8—14, 22—28, 36—42 и т. д.). Отклонения от прилетов, вычисленные по формуле (8.20), представлены в табл. 37. Складывая их с моментами прилета по расписанию, определяем фактические моменты прилета в каждой из реализаций (табл. 37). Заметим, что в некоторых случаях последовательность прибытия самолетов нарушена. Так, в пятой реализации первый самолет прибывает в 21.48, а второй в 21.35. Упорядочим по времени (в случае необходимости) моменты прилетов самолетов и занесем их в табл. 38. Эти данные, а также данные о продолжительностях обслуживания (табл. 36), являются исходными для моделирования. Соответствующие расчеты приведены в табл. 38. В процессе моделирования принималось, что первым двум прибывающим требованиям (самолетам) не приходится ожидать начала обслуживания и что первым начинает работу второй аппарат. Кроме того, если в момент прибытия требования оба аппарата оказывались свободными, то требование поступало на тот аппарат, который до этого раньше освободился.

По табл. 38 вычисляем время ожидания начала обслуживания каждым требованием (табл. 39). Эти данные позволяют оценить различные показатели эффективности обслуживания. Так как суммарное время ожидания начала обслуживания всеми 70 требованиями составило 669 мин, то среднее время ожидания равно приблизительно 9,6 мин. Оценим далее вероятность того, что продол-

* Вероятность наблюдаемого события равна $0,5^7 = 1/128$.

Поступление требований

№ реализации	1 требование		2 требова- ние		3 требование		4 требование		5 требование		6 требование		7 требова- ние	
	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление	Отклонение	Поступление
1	-2	21.16	13	21.55	10	22.15	15	22.45	16	23.30	6	23.42	14	0.02
2	10	21.28	-11	21.31	-6	21.59	-8	22.22	0	23.14	-12	23.24	13	0.01
3	9	21.27	13	21.55	-6	21.59	12	22.42	5	23.19	-4	23.32	20	0.08
4	-5	21.13	-6	21.36	19	22.24	17	22.47	10	23.24	0	23.36	-3	23.45
5	30	21.48	-7	21.35	4	22.09	-8	22.22	-3	23.11	1	23.37	19	0.07
6	-18	21.00	8	21.50	20	22.25	1	22.31	4	23.18	14	23.50	19	0.07
7	-9	21.09	13	21.55	15	22.20	-4	22.26	9	23.23	26	0.02	0	23.48
8	3	21.21	12	21.54	14	22.19	-2	22.28	24	23.38	7	23.43	0	23.48
9	-2	21.16	23	22.05	26	22.31	1	22.31	24	23.38	7	23.43	15	0.03
10	-7	21.11	4	21.46	-9	21.56	-1	22.29	15	23.29	0	23.36	9	23.57

Моделирование процесса

№ реали- зации	№ аппа- рата	1 требование			2 требование			3 требование		
		Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания	Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания	Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания
1	I				21.55	21.55	23.13			
2	II	21.16	21.16	22.28	21.31	21.31	22.48	22.15	22.28	23.55
3	I	21.28	21.28	22.06	21.55	21.55	22.16	21.59	22.06	23.18
4	II	21.27	21.27	22.56	21.36	21.36	22.42	21.59	22.16	23.15
5	I	21.13	21.13	22.26	21.48	21.48	22.31	22.24	22.26	23.15
6	II	21.35	21.35	22.11	21.50	21.50	22.30	22.09	22.11	23.53
7	I	21.00	21.00	22.05	21.55	21.55	22.20	22.25	22.25	23.09
8	II	21.09	21.09	22.02	21.54	21.54	22.11	22.20	22.20	23.10
9	I	21.21	21.21	22.00	22.05	22.05	23.14	22.19	22.19	23.30
10	II	21.16	21.16	22.22	21.46	21.46	22.47	22.31	22.31	23.40
	II	21.11	21.11	22.13				21.56	22.13	22.39

жительность ожидания превысит заданную величину, например, 30 мин. По таблице находим, что из 70 рассмотренных самолетов 6 ожидали больше чем 30 мин. Следовательно, искомая вероятность равна приблизительно 0,09. Далее, в 5 из 10 случаев обслуживания последнего самолета заканчивалось позже 1 ч 20 мин ночи.

Так как среднее время ожидания равно 9,6 мин, то в среднем суммарная продолжительность ожидания семью самолетами за сутки составит $9,6 \times 7 = 67$ мин. Для первой реализации процесса обслуживания эта величина оказалась равной 186 мин. Это еще раз указывает на то, что достоверные выводы можно получить только на основании многих реализаций. Необходимое число реализаций зависит от желаемой точности результатов, от характера реализуемого процесса и от тех показателей эффективности, которые следует определить. Так, для вычисления средних значений случайных величин (среднего времени ожидания, средней длины очереди и т. д.) требуется не менее 20—30 независимых наблюдений. Наряду с вычислением средних значений полезно определить средние квадратические отклонения, характеризующие меру разброса случайных величин. Очевидно, чем меньше разброс, тем более достоверны полученные результаты. Для оценки распределения случайной величины требуется не менее 80—100 наблюдений.

обслуживания

Таблица 38

4 требование			5 требование			6 требование			7 требование		
Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания	Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания	Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания	Поступле- ние	Начало обслужи- вания	Конец обслужи- вания
22.45	23.13	0.21									
22.22	22.48	23.23	23.30	23.55	1.23	23.42	0.21	1.33			
			23.14	23.18	23.40	23.24	23.24	23.55	0.02	1.23	2.44
			23.19	23.19	0.06	23.32	0.06	1.23	0.01	0.01	0.57
22.42	22.56	0.35							0.08	0.35	1.16
22.47	22.47	23.51				23.36	23.51	1.19			
22.22	22.31	23.48	23.24	23.24	0.26				23.45	0.26	1.08
			23.11	23.48	0.35				0.07	0.35	1.56
22.31	22.31	0.23				23.37	22.53	1.06			
			23.18	23.18	0.16	23.50	0.16	1.00	0.07	0.23	1.26
22.26	22.26	23.57				23.48	23.57	0.49			
			23.23	23.23	0.14				0.02	0.14	1.27
22.28	22.28	23.00	23.38	23.38	1.02	23.43	23.43	0.40	23.48	0.40	2.06
						23.43	23.43	0.20			
22.31	23.14	23.43	23.38	23.40	23.51				0.03	0.03	1.14
			23.29	23.29	0.05				23.57	0.05	1.05
22.29	22.39	22.45				23.36	23.45	0.15			

Продолжительности ожидания

№ реализации	№ требования							Всего
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	0	13	28	25	39	81	186
2	0	0	7	26	4	0	0	37
3	0	0	17	14	0	34	27	92
4	0	0	2	0	0	15	41	58
5	0	0	2	9	37	16	28	92
6	0	0	0	0	0	26	16	42
7	0	0	0	0	0	9	12	21
8	0	0	0	0	0	0	52	52
9	0	0	0	43	2	0	0	45
10	0	0	17	10	0	9	8	44
Всего	0	0	58	130	68	148	265	669

В приведенном примере было рассмотрено 10 реализаций. Каждая реализация давала семь данных. Однако эти данные были зависимыми, так как время прилета и продолжительность обслуживания каждого самолета влияли на время ожидания самолетов, прилетающих позднее. Поэтому следует считать, что было сделано только 10 наблюдений. Следовательно, если бы пример не носил иллюстрированный характер, число реализаций надо было бы увеличить.

С ростом числа реализаций и количества случайных величин, которые необходимо вырабатывать для одной реализации, объем вычислительных работ растет, поэтому обычно моделирование с помощью метода статистических испытаний осуществляется на электронных цифровых вычислительных машинах. При этом процедура моделирования остается той же, что и при рассмотренном выше «ручном» моделировании, но все операции выполняются машиной по заранее составленной программе.

Из изложенного примера видно, что метод статистических испытаний является очень мощным. Например, принципиальных трудностей не возникло бы, если каждый прилет самолета характеризовался своими законами распределения отклонения от расписания и продолжительности обслуживания. Метод статистического моделирования более полно изложен в работах Н. П. Бусленко [5].

РАЗДЕЛ III

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Глава 9

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГА

9.1. Формулировка задач математического программирования

В разделах I и II рассматривалось построение математических моделей, описывающих зависимость одних переменных (зависимых) от других (независимых). Часто в качестве независимых переменных фигурировали те величины, значения которых мы можем выбирать по своему усмотрению (говорят — «которыми можем управлять»). Примерами таких переменных являются численность исполнителей, число ВПП и т. п. В качестве зависящих от них переменных выступают выбранные показатели эффективности, например, приведенные затраты от простоев требований (самолетов) в ожидании обслуживания и от содержания дополнительных аппаратов (исполнителей, ВПП).

Конечной целью построения математической модели является определение таких значений независимых переменных, которые обеспечивают оптимальное значение зависимой переменной, выбранной в качестве основного показателя эффективности. В частности, можно интересоваться числом ВПП или исполнителей, обеспечивающих минимальные приведенные затраты и т. п.

Если для отыскания оптимального решения достаточно просмотреть небольшое количество возможных вариантов, то особых проблем при этом не возникает. Однако часто оказывается, что число вариантов так велико, что прямой перебор всех их является или весьма трудоемким, или даже практически невозможным. Дело осложняется также обычно тем, что на независимые переменные накладываются некоторые ограничения, которые должны быть выполнены. Эти ограничения могут касаться, например, общего числа располагаемых исполнителей или капитальных вложений, максимально допустимого времени пребывания требований в системе обслуживания и т. п.

В тех случаях, когда прямой перебор всех вариантов нецелесообразен, следует использовать методы математического програм-

мирования. Общая задача математического программирования формулируется следующим образом [22]:

найти значения n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые неотрицательны:

$$x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1)$$

удовлетворяют m ограничениям

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m, \quad (9.2)$$

и максимизируют функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.3)$$

Условия (9.1) называются условиями *неотрицательности переменных*, а (9.2) — *ограничениями задачи*. Функция (9.3) называется *целевой функцией*. Предполагается, что f и $g_1, g_2, \dots, g_m$ — известные функции, а $b_1, b_2, \dots, b_m$ — заданные постоянные.

Набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих условиям (9.1) и (9.2), называется *допустимым* решением задачи математического программирования. Допустимое решение называется *оптимальным*, если никакое другое допустимое решение не даст большего значения целевой функции (9.3).

В качестве ограничений (9.2) могут фигурировать условия, по которым некоторые или все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ должны принимать только целые числа.

Задача математического программирования, описываемая условиями (9.1) — (9.3), является достаточно общей и охватывает большинство встречающихся на практике случаев. Покажем как другие случаи могут быть приведены к данному. Если необходимо не максимизировать функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, а минимизировать, то достаточно в формуле (9.3) вместо f рассматривать эту же функцию со знаком минус. Далее, если требование неотрицательности отсутствует, то вместо каждой переменной x_i следует ввести две неотрицательные переменные x'_i, x''_i и заменить ее на их разность, т. е. положить $x_i = x'_i - x''_i$. Тогда значения x_i могут быть отрицательными (если $x'_i < x''_i$). Наконец, если в ограничениях (9.2) имеется противоположное неравенство, то достаточно вместо g_i и b_i рассматривать $-g_i$ и $-b_i$. Если же в ограничениях (9.2) имеет место строгое равенство, то вместо одного неравенства $g_j \leq b_j$ следует рассматривать два: $g_j \leq b_j$ и $-g_j \leq -b_j$.

Приведем несколько примеров задач математического программирования, опирающихся на модели массового обслуживания и регрессионные модели. Рассмотрим вначале задачу организации технического обслуживания самолетов. Предположим, что необходимо организовать n бригад, каждая из которых специализирована по обслуживанию одного типа самолета. Располагаемая численность исполнителей равна b и ее необходимо распределить между бригадами так, чтобы средний простой, приходящийся на одно обслуживание, был минимальным.

Обозначим x_i число исполнителей в i -ой бригаде. Тогда процесс обслуживания самолетов одного типа описывается системой мас-

сового обслуживания следующего вида: пуассоновский поток требований с интенсивностью λ_i , один обслуживающий аппарат (бригада), средняя длительность одного обслуживания, $\mu_i = (\mu_i)$, коэффициент вариации длительности обслуживания $k = 1/3$. Запись $\mu_i(x_i)$ означает, что средняя длительность обслуживания зависит от числа исполнителей в бригаде x_i . Эта зависимость может, например, иметь вид формулы (5.28), в частности формулы (5.29), и считается известной.

Средняя длительность пребывания самолета i -го типа в системе обслуживания w_i складывается из времени ожидания γ_i и времени обслуживания μ_i . Так как все эти величины зависят от численности исполнителей в бригадах, то $w_i(x_i) = \gamma_i(x_i) + \mu_i(x_i)$. При известном $\mu_i(x_i)$ среднее время пребывания требования в системе обслуживания подсчитывается по формуле (6.59) и считается, следовательно, величиной известной. (В этой формуле следует принять $\mu = \mu_i$, $\lambda = \lambda_i$, $\sigma = k\mu_i$, $\rho = \lambda_i\mu_i$).

Средний простой, приходящийся на одно обслуживание, вычисляется по формуле

$$w = \frac{1}{\lambda} \sum \lambda_i w_i = \frac{1}{\lambda} \sum \lambda_i \mu_i(x_i) \left[1 + \frac{\lambda_i \mu_i(x_i) (1 + k^2)}{2 [1 - \lambda_i \mu_i(x_i)]} \right], \quad (9.4)$$

где $\lambda = \sum \lambda_i$ — общая интенсивность всех потоков.

Так как общее число исполнителей равно b , то суммарная численность бригад не должна превышать этой величины:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b. \quad (9.5)$$

Итак, задача заключается в определении значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые являются неотрицательными — условие (9.1), удовлетворяют неравенству (9.5) и минимизируют функцию цели (9.4).

Сформулированная задача является частным случаем общей задачи математического программирования (9.1) — (9.3). В качестве функции цели здесь фигурирует сумма (9.4), число ограничений $m = 1$ и единственное ограничение g_1 имеет вид (9.5).

В выражениях (9.1) — (9.3), кроме независимых и зависимых переменных, обычно фигурируют постоянные, называемые параметрами. Если значения этих параметров неизвестны, то они должны быть оценены с помощью регрессионных методов. Так, в предыдущем примере зависимость (5.29) средней длительности обслуживания от числа исполнителей была получена в результате регрессионного анализа.

9.2. Классификация задач математического программирования

Задачи математического программирования классифицируются в зависимости от вида функции цели (9.3), вида ограничений (9.2) и наличия или отсутствия условий целочисленности переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Наиболее хорошо изученными к настоящему времени являются задачи *линейного программирования*, которые характери-

зуются тем, что функция цели (9.3) и ограничения (9.2) являются линейными:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum c_i x_i, \quad g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{ji} x_i.$$

Задача линейного программирования формулируется так:

найти неотрицательные значения n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяют m линейным ограничениям:

[illegible]

и максимизируют линейную функцию цели

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (9.7)$$

где $\{b_j\}$, $\{c_l\}$, $\{a_{jl}\}$ — известные постоянные.

Любая другая задача математического программирования, которая отличается от линейной или нелинейностью функции цели, или нелинейностью ограничений, или наличием требования целочисленности переменных, называется *нелинейной задачей*. Важный класс нелинейных задач представляют *целочисленные задачи линейного программирования*. От задач линейного программирования (9.6)—(9.7) они отличаются только наличием условия целочисленности переменных $x_1, \dots, x_n$. Если это условие касается всех переменных, то говорят о *полностью целочисленной задаче*. Если это условие распространяется только на некоторые из переменных, то говорят о *частично целочисленной задаче*.

Частным случаем целочисленной задачи линейного программирования является задача с булевыми переменными. В этих задачах условие целочисленности заменяется на более ограничительное: переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ должны принимать только значения 0 или 1:

$$x_i = 0 \text{ или } 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.8)$$

Обобщением задачи линейного программирования (9.6) — (9.7) является *задача квадратичного программирования*. Отличие ее от линейной задачи состоит только в том, что функция цели (9.7) является не линейной, а квадратичной:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i x_j = \quad (9.9)$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n x_i (s_{i1}x_1 + s_{i2}x_2 + \dots + s_{in}x_n),$$

Ясно, что линейная функция (9.7) получается отсюда как частный случай при $s_{ij}=0$.

Последний класс задач, который будет рассмотрен, являются задачами динамического программирования. Эти задачи характер-

ны тем, что целевую функцию и ограничения можно представить в виде суммы слагаемых, каждое из которых зависит только от одной переменной.

Ограничимся вначале случаем, когда ограничение (9.2) всего одно, т. е. $m=1$. Для него задача динамического программирования звучит так:

найти неотрицательные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие ограничению

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b \quad (9.10)$$

и максимизирующие функцию цели

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (9.11)$$

Условие неотрицательности переменных может быть заменено на более общее. Предположим, что значение переменной x_i должно принадлежать некоторому множеству значений, которое обозначим I_i . Тогда к формулам (9.10) и (9.11) дополняется условие

$$x_i \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.12)$$

В частности, если I_i есть неотрицательная полуось $(0, \infty)$, то это означает требование неотрицательности. Если I_i есть множество чисел $0, 1, 2, \dots$, то это соответствует условию целочисленности. Если I_i состоит из двух чисел 0 и 1 , то это значит, что переменные должны быть булевыми.

Задача динамического программирования (9.10) — (9.12) сформулирована для случая одного ограничения (9.10), говорят — одного ресурса b . В общем случае может иметься m ограничений, т. е. m ресурсов $b_1, b_2, \dots, b_m$, так что (9.10) — (9.11) заменяются на

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_{ji}(x_i) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (9.13)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (9.14)$$

где $\{x_i\}$ — переменные задачи.

Физическая интерпретация задачи (9.10) — (9.11) динамического программирования при $g_i(x_i) = x_i$ обычно формулируется как задача о распределении имеющегося ресурса. Если имеется ресурс одного вида, то задача называется одноресурсовой и описывается формулами (9.10) и (9.11). Предполагается, что имеется n объектов, между которыми необходимо распределить имеющийся ресурс объема b . Доход, приносимый от выделения ресурса размера x_i на i -ый объект, равен $f_i(x_i)$. Требуется так распределить ресурс между объектами, т. е. найти такие $\{x_i\}$, которые максимизируют общий доход, определяемый выражением (9.11).

Примером задачи динамического программирования является задача (9.4) — (9.5), сформулированная в разд. 9.1. В общем слу-

чае имеется не один, а несколько видов ресурса, что соответствует постановке задачи (9.13)—(9.14). В этих формулах x_i — «основной» ресурс; $g_{ji}(x_i)$ ресурс j -го вида, выделяемый на i -ый объект; $f_i(x_i)$ — доход от выделения на i -ый объект основного ресурса в размере x_i . К такому виду могут быть приведены многие задачи, встречающиеся на практике.

К настоящему времени в теории математического программирования наибольшие успехи достигнуты в решении линейных задач (9.6)—(9.7). Разработанные алгоритмы и программы позволяют решать на современных быстродействующих вычислительных машинах общие линейные задачи размера до $m=200$ и $n=1000$.

Условия целочисленности и нелинейности ограничений и целевой функции существенно усложняют решение. Например, задача (9.6), (9.9) с булевыми переменными при числе ограничений $m \leq 99$ решается на ЭЦВМ «Минск-32» при $n=100$ за 12 мин, а при $n=180$ за 27 мин*.

Объем вычислений задачи квадратичного программирования (9.6)—(9.7), (9.9) с n переменными и m ограничениями примерно такой же, как при решении задачи линейного программирования с $3n+2m$ переменными и $n+m$ ограничениями [22, стр. 226].

Метод динамического программирования является весьма эффективным при одном ограничении. Он позволяет решать задачи (9.10)—(9.11) практически при любом числе переменных n , если только множества возможных значений переменных I_i не слишком велики. Однако с ростом числа m ограничений (9.13) объем вычислений катастрофически растет, а именно, растет в m -ой степени. Одновременно с этим с такой же скоростью растет необходимый объем памяти ЭВМ. Поэтому уже при $m \geq 4$ метод динамического программирования обычно оказывается малопригодным.

В последующем будут рассмотрены типичные задачи оптимального планирования и управления в ГА, однако алгоритмы решения задач математического программирования не приводятся. Это объясняется тем, что такие алгоритмы излагаются в специальных курсах по математическому программированию [6, 11, 18, 22] и что реализация их вручную на практических занятиях или на производстве осуществима только для задач очень малой размерности, имеющих чисто иллюстративный характер. Поэтому основной акцент ниже будет сделан на формализацию возникающих задач в терминах математического программирования.

9.3. Задача распределения самолетов по авиалиниям

Рассмотрение типичных задач математического программирования, встречающихся в практике планирования работы ГА, начинаем с этой задачи по двум причинам. Во-первых, она относится к классу распределительных задач линейного программирования,

* Экономика и математические методы. Т. XI, 1, 1975. 195 с.

являющемуся наряду с классом транспортных задач наиболее важным.

Во-вторых, расстановка самолетов по авиалиниям является одной из узловых проблем, в значительной степени определяющей эффективность эксплуатации авиационной техники.

Данная задача была одной из первых задач математического программирования, успешно примененных на практике. Впервые с математических позиций она была рассмотрена А. Р. Фергюсоном и Дж. Б. Данцигом в 1956 г. [22, стр. 178]. Далее она изучалась многими другими авторами.

В простейшей постановке задача звучит так. Имеется l авиалиний, по которым необходимо расставить самолеты. Пусть a_i означает спрос на перевозки для i -ой линии в некоторых единицах (например, в пассажирах или тонно-километрах). В наличии имеется k типов самолетов. Обозначим b_j располагаемый налет часов j -го типа самолетов, который может быть использован в рассматриваемом периоде.

Часовая производительность полета самолета j -го типа на i -ой линии составляет a_{ij} единиц, а доход за 1 ч полета c_{ij} руб. Перечисленными задачи являются x_{ij} — число часов налета самолетов j -го типа на i -ой авиалинии.

В этих обозначениях задача распределения самолетов по авиалиниям выглядит так:

найти неотрицательные переменные $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{lk}$ удовлетворяющие $m = k + l$ ограничениям

$$\sum_{i=1}^l x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (9.15)$$

$$\sum_{j=1}^k x_{ij} a_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

и максимизирующие функцию цели

$$f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{lk}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k c_{ij} x_{ij}. \quad (9.16)$$

Сделаем несколько замечаний по данной постановке задачи. Назначение самолетов определенного типа на некоторые авиалинии может быть запрещено. Это обстоятельство учитывается тем, что соответствующему доходу c_{ij} должно быть приписано нулевое или отрицательное значение. В качестве ограничения задачи может фигурировать дополнительное требование о том, что на каждую авиалинию может быть поставлен только один тип самолета (это часто обуславливается соображениями удобства организации процесса эксплуатации).

Учет данного ограничения приводит к тому, что задача становится частично целочисленной: введем дополнительные булевы переменные y_{ij} , принимающие значения 1 или 0, судя по тому,

ставится самолет j -го типа на i -ю линию или нет. Тогда дополнительное требование записывается так:

$$y_{ij} = 0 \text{ или } 1, j = 1, 2, \dots, k; \sum_{j=1}^k y_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, l. \quad (9.17)$$

Необходимо также учесть связь дополнительных переменных y_{ij} с основными переменными x_{ij} , заключающуюся в том, что $y_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $x_{ij} > 0$. Эта связь учитывается введением следующих ограничений (напомним, что $x_{ij} \leq b_j$):

$$x_{ij} - y_{ij}b_j < 0. \quad (9.18)$$

Введение булевых переменных y_{ij} позволяет точнее описать левую функцию (9.16): доход от постановки самолета на линию складывается из переменной составляющей $c_{ij}x_{ij}$ и постоянной s_{ij} , независимой от налета часов на линии. Составляющая s_{ij} связана с подготовкой системы УВД на трассе аэропорта к приему данного типа самолета и пр. Поэтому от доходов $c_{ij}x_{ij}$ следует отнять составляющую $s_{ij}y_{ij}$.

При этом функция цели примет вид $\sum_i \sum_j (c_{ij}x_{ij} - s_{ij}y_{ij})$. Здесь мы имеем пример задачи с фиксированными доплатами.

Рассмотрим вычислительные аспекты задачи (9.15) — (9.16) и (9.15) — (9.18). Первая задача является стандартной задачей линейного программирования. Решение ее к тому же облегчается тем, что система ограничений имеет специфическую структуру. Действительно, каждое из ограничений (9.15) касается не всех переменных x_{ij} , а только части их, у которых фиксирован или первый индекс (i) или второй (j). Если систему (9.15) записать в матричном виде, то легко обнаружить, что матрица ограничений имеет блочную структуру. Задачи такого вида называются задачами *блочного линейного программирования*.

Для их решения Дж. Данцигом и Ф. Вульфом был разработан *принцип декомпозиции*, существенно повышающий эффективность вычислений. Его использование позволяет рассчитывать сеть основных авиалиний ГА, включающую более десяти типов самолетов и около 2000 линий (перелет «туда» и «обратно» считается один раз).

Задача (9.15) — (9.18) является частично целочисленной. До настоящего времени еще отсутствуют алгоритмы, позволяющие решать такие задачи для указанной выше размерности. На практике для решения подобных задач на ЭВМ используются эвристические методы оптимизации, основанные обычно на личном опыте и интуиции.

При практическом решении задач расстановки самолетов по авиалиниям часто приходится учитывать ряд дополнительных факторов, обусловленных конкретными условиями. Например, в упомянутой выше постановке задачи А. Р. Фергюсона и Дж. Данцига

учитывалось, что спрос на перевозки является в действительности случайной величиной. Соответствующий раздел математического программирования называется *стохастическим программированием*. Сложность решения этих задач весьма велика.

При постановке задачи предполагалось, что линии уже сформированы и выступают как исходные данные. В действительности линии обычно формируются одновременно с расстановкой самолетного парка. Исходными же данными являются пары городов (направления) и спрос на перевозки для них. Для любой пары городов перевозки можно организовать тремя способами: путем прямых (т. е. беспересадочных) беспосадочных линий, путем прямых линий с промежуточными посадками, путем нескольких линий и пересадок. Промежуточные посадки назначаются или исходя из ограничений по дальности беспосадочного полета самолета (так называемая «техническая» посадка), или из-за недостаточного спроса на перевозки по данному направлению. В последнем случае коммерческая загрузка линии повышается за счет того, что с одной промежуточной посадкой линия будет обслуживать уже не одно, а три направления. Линия формируется обычно так, чтобы частота движения самолетов на ней была не ниже 3 рейсов в неделю и это ограничение можно ввести в задачу (9.15) — (9.16). Одновременное рассмотрение задач формирования авиалиний и расстановки самолетов по ним приводит к задачам очень большой размерности, решение которых известными алгоритмами линейного программирования пока еще невозможно.

Задача расстановки самолетов по авиалиниям рассматривалась в рамках текущего (годового, квартального) планирования. Особенностью ее в рамках перспективного планирования является то, что часть самолетного парка мы можем заказывать по своему усмотрению. Обозначим z_j вместо b_j налет часов для тех типов самолетов, которые можно заказывать. Естественно, теперь z_j — это переменные, подлежащие определению. Формулы (9.15) и (9.16) остаются прежними, если заменить в них соответствующие b_j на z_j . При этом формулу (9.15) можно переписать в виде, отвечающем (9.2):

$$\sum_{i=1}^l x_{ij} - z_j \leq 0.$$

На новые переменные z_j должны быть наложены ограничения, связанные с располагаемым объемом капитальных вложений b на приобретение самолетного парка. Пусть k_j — покупная цена самолета j -го типа, h_j — максимальный налет часов на один самолет j -го типа. Введем дополнительные целочисленные переменные v_j , где v_j — число заказываемых самолетов j -го типа. Тогда наряду с вышеприведенными ограничениями появляются следующие:

$$v_j = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad z_j - h_j v_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad \sum v_j k_j \leq b.$$

В такой постановке задача относится к проблеме заказа авиационной техники.

9.4. Транспортные задачи

Транспортными называются задачи следующего вида. Имеется m пунктов производства (поставщиков) некоторого вида продукции и n пунктов потребления (потребителей). i -й поставщик может поставить продукции в размере b_i ед. j -му потребителю необходимо поставить a_j ед.

Предполагается, что $\sum a_j \leq \sum b_i$, т. е. возможности поставщиков превышают спрос.

Затраты, связанные с перевозкой единицы продукции от i -го поставщика j -му потребителю, составляют $c_{ij} \geq 0$. Необходимо составить план поставок продукции, минимизирующий суммарные транспортные затраты и полностью удовлетворяющий нужды потребителей, т. е. необходимо:

найти неотрицательные переменные $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}$, где x_{ij} — поставки i -го поставщика j -му потребителю, удовлетворяющие ограничениям:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (9.19)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и минимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (9.20)$$

Данная постановка несколько отличается от стандартной задачи математического программирования (9.1) — (9.2), однако, она легко может быть приведена к ней. Действительно, вместо затрат c_{ij} можно рассматривать прибыль, получаемую при перевозке единицы продукции из пункта i производства в пункт j потребления. Эта прибыль представляет собой разницу соответствующих доходов и расходов и должна быть неотрицательной, так как в противном случае данные перевозки невыгодны экономически. Формально можно вместо c_{ij} рассматривать новые постоянные $c - c_{ij}$, где c настолько велико, что $c - c_{ij} > 0$. Поэтому вместо минимизации (9.20) будем рассматривать максимизацию, понимая под c_{ij} величину прибыли и считая, что $c_{ij} \geq 0$. Ограничения (9.19) заменяются при этом следующими:

$$\sum x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \sum x_{ij} \leq a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.21)$$

В действительности, для оптимального решения в этой формуле вместо второго неравенства будет стоять равенство (как и в формуле 9.19), так как суммарные возможности поставщиков превышают спрос потребителей и каждая дополнительная перевозка еди-

ницы продукции обеспечивает увеличение функции цели на неотрицательную величину c_{ij} . Более того, эта постановка задачи в отличие от предыдущей не требует выполнения условия $\sum a_j \leq \sum b_i$.

При планировании деятельности гражданской авиации встречается большое количество задач, математическая формулировка которых дословно повторяет вышеприведенную. В качестве первой следует назвать задачу планирования поставок авиационных горючих и смазочных материалов (авиаГСМ). В роли поставщиков здесь выступают заводы-изготовители ГСМ, в роли потребителей — аэропорты ГА. Потребность каждого аэропорта рассчитывается исходя из планируемого налета часов самолетами различных типов и норм расхода ГСМ на летный час. При оценке прибыли учитывается удаленность аэропорта от завода, способы доставки и т. п. Если перевозка между некоторой парой (i, j) является недопустимой или явно нецелесообразной, то можно положить $c_{ij}=0$. При этом данная перевозка не войдет в оптимальное решение, если только вообще существуют решения без такого рода перевозок.

Аналогичным образом звучит задача планирования ремонта авиационной техники, состоящая в закреплении за каждой авиационно-технической базой (АТБ) определенного ремонтного завода. Отличие состоит только в том, что в этом случае единицы продукции являются неделимыми (самолеты, авиадвигатели). Поэтому в дополнение к ограничениям (9.21) необходимо добавить требование целочисленности переменных x_{ij} . Однако никаких осложнений при этом не возникает, если целочисленными являются постоянные a_j и b_i , участвующие в ограничениях задачи. Это связано со следующим замечательным свойством оптимальных решений транспортных задач: если постоянные ограничений задачи целочисленные, то транспортная задача всегда имеет целочисленное оптимальное решение независимо от коэффициентов целевой функции c_{ij} . Следовательно, при решении можно не заботиться о целочисленности.

Она будет обеспечена автоматически.

Для решения транспортных задач разработаны специальные алгоритмы, отличающиеся большим быстродействием по сравнению с алгоритмами решения общей задачи линейного программирования (9.1) — (9.3).

Эти алгоритмы базируются на том факте, что все постоянные a_{ij} в ограничениях (9.6) равны 0 или 1 (т. е. матрица ограничений состоит из нулей и единиц).

Как и при рассмотрении задачи распределения самолетов по авиалиниям, более детальная постановка задачи, точнее отражающая реальные условия, приводит к значительному усложнению задачи. Проиллюстрируем это на примере задачи планирования поставок авиаГСМ. В первую очередь учтем наличие фиксированных затрат. Если решено поставлять ГСМ из i -го завода j -му аэропорту, то это приводит к дополнительным затратам постоянной величины s_{ij} , не зависящей от объема поставок x_{ij} . Следовательно, прибыль от перевозки ГСМ в объеме x_{ij} из пункта i в пункт j со-

ставит 0 при $x_{ij}=0$ и $c_{ij}x_{ij}-s_{ij}$ при $x_{ij}>0$. Для учета фиксированной составляющей необходимо ввести булевы переменные y_{ij} , равные 0 при $x_{ij}=0$ (если перевозки $i \rightarrow j$ отсутствуют) и равные 1 при $x_{ij}>0$ (если перевозки $i \rightarrow j$ имеются). Формально они вводятся с помощью дополнительных к (9.21) ограничений (9.18). Целевая функция при этом принимает вид

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} - s_{ij}y_{ij}). \quad (9.22)$$

Введение $\{y_{ij}\}$ увеличивает вдвое количество переменных задачи. Однако принципиальная трудность возникает из-за того, что задача в силу соотношения (9.8) перестает быть транспортной. Такая задача с фиксированными доплатами называется *неоднородной транспортной задачей*.

Методы решения ее достаточно сложны.

Учтем теперь в задаче временной фактор. Планируемые поставки необходимо распределить по отдельным периодам. С этой целью рассматриваемый интервал времени разбивается на указанные периоды. Пусть τ — общее их число. Переменной x_{ij} будем приписывать дополнительно индекс t и понимать под x_{ijt} планируемую величину поставки авиаГСМ из пункта i в пункт j в периоде t , где $t = \overline{1, \tau}$. Считаем, что поставка x_{ijt} осуществляется в начале периода t . Будем считать заданными величины a_{jt}^0 , $j = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, \tau}$, где a_{jt}^0 — минимально допустимый объем (говорят «неснижаемый запас» ГСМ) в j -м аэропорту на конец периода t . Этот запас устанавливается путем увеличения планируемой потребности в ГСМ на определенную нормативную величину. a_{j0}^0 будем трактовать как начальный запас ГСМ в j -м аэропорту. Максимально допустимый объем ГСМ в j -ом аэропорту также ограничен имеющимися емкостями складов ГСМ.

Обозначим его a_{jt}^* для периода t . Наконец, известными считаемся a_{jt} — потребности аэропортов в ГСМ в периоде t . Как и прежде полагаем, что доход от перевозки ГСМ в размере x_{ijt} из i -го пункта в j -й аэропорт в период t приносит доход, равный 0 при $x_{ijt}=0$ и $c_{ijt}x_{ijt}-s_{ijt}$ при $x_{ijt}>0$.

По аналогии с формулой ограничений (9.18) введем булевы переменные y_{ijt} : $y_{ijt}=1$, если $x_{ijt}>0$ и $y_{ijt}=0$ если $x_{ijt}=0$, т. е. введем ограничения

$$x_{ijt} - y_{ijt}b_i \leq 0. \quad (9.23)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ijt} = 1. \quad (9.24)$$

С учетом перечисленных ограничений задача формулируется следующим образом:

найти неотрицательные переменные $\{x_{ijt}\}$ и $\{y_{ijt}\}$, максимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ijt}x_{ijt} - s_{ijt}y_{ijt}) \quad (9.25)$$

и удовлетворяющие условиям (9.23), (9.24) и следующим:

$$\sum_{j=1}^n x_{ijt} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, \tau; \quad (9.26)$$

$$a_{j,t-1}^{\circ} - \sum_{\xi=1}^{t-1} \left(\sum_{i=1}^n x_{ij\xi} - a_{j\xi} \right) - a_{j0}^{\circ} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t = 2, 3, \dots, \tau + 1, \quad (9.27)$$

$$a_{j0}^{\circ} - a_{jt}^* + \sum_{\xi=1}^{t-1} \left(\sum_{i=1}^n x_{ij\xi} - a_{j\xi} \right) + \sum_{i=1}^n x_{ijt} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, \tau. \quad (9.28)$$

В этих формулах ограничения (9.27) и (9.28) состоят в том, что объем ГСМ в j -м аэропорту в конце периода $t-1$, равный $a_{j0}^{\circ} + \sum_{\xi=1}^{t-1} \left(\sum_{i=1}^n x_{ij\xi} - a_{j\xi} \right)$, не должен быть меньше неснижаемого запаса a_{jt-1}° , а в начале периода t (после очередной поставки размера $\sum_{i=1}^n x_{ijt}$) — не больше имеющейся емкости a_{jt}^* . Соотношение (9.26) учитывает возможности $\{b_i\}$ заводов-поставщиков ГСМ. Можно учесть, что эти возможности меняются со временем, т. е. вместо b_i рассматривать b_{it} .

Задача (9.25)—(9.28) при $s_{ijt}=0$ является транспортной задачей. Поэтому единственное осложнение заключается в значительном увеличении размерности задачи. При $s_{ijt} \neq 0$ задача перестает быть транспортной и методы решения ее значительно усложняются [11, 22].

9.5. Календарное планирование производства

Рассмотрим задачу разработки некоторого проекта, например строительства или реконструкции аэропорта, капитального ремонта очередного самолета и т. п. [22, с. 266—271]. Проект включает большое количество работ, для проведения которых необходимы соответствующие ресурсы (рабочие различной профессии и квалификации, оборудование различного типа, запасные агрегаты различной номенклатуры и т. п.). Работы могут осуществляться в определенном порядке, обусловленном технологией производства. Необходимо составить график проведения работ, при котором потребные на каждый день ресурсы не превышают имеющихся и минимизируется выбранный критерий эффективности.

Предполагаем, что наименьшим рассматриваемым периодом являются сутки и что проект должен быть выполнен не более чем

за τ дней. Пусть общее количество работ равно n . Последовательность выполнения работ задается путем указания для каждой работы i множества $I(i)$, содержащего перечень номеров работ, которые должны быть выполнены до работы i .

Обозначим x_{it} долю i -й работы, выполняемой в t -й день. Работа i будет закончена к t -му дню, если $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{i,t-1} = 1$. Тогда условие окончания проекта за τ дней запишется так:

$$\sum_{t=1}^{\tau} x_{it} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.29)$$

Работа i не может быть начата в t -й день (т. е. $x_{it} = 0$), если нарушено условие

$$\sum_{j=1}^{t-1} x_{jt} = 1 \quad \text{для всех } j \in I(i). \quad (9.30)$$

(Знак $j \in I$ означает, что элемент j принадлежит множеству I). Чтобы ввести это логическое условие в постановку задачи, рассмотрим булевы переменные y_{it} : $y_{it} = 1$, если к t -му дню работа i закончена и $y_{it} = 0$ в противном случае. Формально эти переменные вводятся условием:

для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $t = 1, 2, \dots, \tau$

$$y_{it} = 0 \text{ или } 1; \quad y_{it} \leq \sum_{l=1}^{t-1} x_{il}. \quad (9.31)$$

Действительно, работа i выполнена к t -му дню, если $x_{i1} + \dots + x_{i,t-1} = 1$, и только в этом случае переменная y_{it} равна 1 (не исключена возможность, что $y_{it} = 0$, когда сумма равна 1; однако, для оптимального решения это не может случиться).

Теперь условия необходимости выполнения работ в заданной последовательности записываются в виде:

для $i = 1, 2, \dots, n$ и $t = 1, 2, \dots, \tau$

$$x_{it} \leq y_{jt} \quad \text{при всех } j \in I(i). \quad (9.32)$$

Учтем ограничения на располагаемые ресурсы. Пусть общее количество ресурсов равно m . Обозначим a_{ij} количество ресурса j -го вида, идущего на i -ю работу. Обозначим b_{jt} располагаемую в t -й день величину ресурса j -го вида.

Тогда условие расходования ресурсов в пределах их наличия запишется так:

для $j = 1, 2, \dots, m$ и $t = 1, 2, \dots, \tau$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_{it} \leq b_{jt}. \quad (9.33)$$

Пусть c_{jt} стоимость единицы ресурса j -го типа при расходовании ее в t -й день. Тогда первый вариант задачи выглядит так:

найти неотрицательные переменные $\{x_{it}\}$ и $\{y_{it}\}$, удовлетворя-

ющие условиям (9.29), (9.31) — (9.33) и минимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ijt} a_{ij} x_{ijt}. \quad (9.34)$$

В данном случае оптимальное решение обеспечит минимальные затраты при условии выполнения проекта в заданный срок. Оно указывает сроки начала и окончания каждой работы.

Зависимость стоимости единицы ресурса от номера суток объясняется возможностью сверхурочных работ в выходные и праздничные дни.

Предположим, что теперь желательно учесть убытки, которые имеются ежедневно, пока проект не завершен (например, от простоя самолетов на ремонте и т. п.). Обозначим эти убытки, отнесенные к одному дню, c . Если проект длился z суток, то убытки составят cz . Для подсчета планируемой длительности выполнения проекта введем булевы переменные $\{z_t\}$: z_t равно 0 или 1, судя по тому, завершен проект к t -му дню или нет. Так как проект будет выполнен к t -му дню в том и только в том случае, если выполнены все n работ, то переменные определяются из условия

$$z_t = 0 \text{ или } 1; \quad z_t \leq y_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.35)$$

Если хотя бы одно $y_{it} = 0$, то обязательно $z_t = 0$, если же все $y_{it} \neq 0$, то z_t может принять значение 0 или 1.

Однако, если стремиться минимизировать функцию (9.34), в которую добавляется слагаемое $c \sum z_t$, то z_t автоматически примет значение, равное 0.

Теперь можно учесть, что ежедневное изменение в потреблении ресурса определенного вида приводит к дополнительным затратам. Пусть g_{jt} и h_{jt} затраты, связанные с увеличением и уменьшением в t -й день по сравнению с предыдущим потреблением ресурса j -го вида на одну единицу. Введем обозначения v_{jt} и u_{jt} — размеры увеличения и уменьшения потребления ресурса j -го вида в t -й день. Потребуем, чтобы $v, u \geq 0$. Разность $v_{jt} - u_{jt}$ представляет собой общее изменение потребления j -го ресурса в t -й день по сравнению с предыдущим. С другой стороны это изменение, очевидно, равно:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} (x_{it} - x_{i,t-1}).$$

Итак, введенные величины полностью определяются соотношениями

$$v_{jt}, \quad u_{jt} \geq 0, \quad v_{jt} - u_{jt} = \sum_{i=1}^n a_{ij} (x_{it} - x_{i,t-1}), \quad (9.36)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad t = 2, 3, \dots, \tau.$$

Если теперь ввести соответствующие затраты в функцию цели, то окончательно задача формулируется следующим образом:

найти неотрицательные переменные $\{x_{it}\}$, $\{y_{it}\}$, $\{z_t\}$, $\{v_{jt}\}$ и $\{u_{jt}\}$, удовлетворяющие условиям (9.29) — (9.33), (9.35), (9.36) и минимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ijt} \alpha_{ij} x_{it} + c \sum_{t=1}^{\tau} z_t + \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^m (g_{jt} v_{jt} + h_{jt} u_{jt}). \quad (9.37)$$

В такой постановке задача является достаточно общей. Если, например, не накладывать ограничений (9.29) на срок окончания проекта τ , то величина τ должна быть взята достаточно большой (заведомо большей максимально возможной длительности). Тогда будет получено решение, экономически оптимальное в народнохозяйственном отношении.

Если в функции цели положим $c_{jt} = g_{jt} = h_{jt} = 0$, то решение даст минимально возможный срок выполнения всего проекта.

Описанная задача относится к обширному классу задач календарного планирования. Многие задачи этого класса формулируются в терминах «расписания обработки деталей на станках». Существенным отличием таких задач от нашей является учет длительности обработки каждой детали на каждом станке.

Задачи календарного планирования решаются, как правило, с помощью приближенных и эвристических методов. Точные алгоритмы применимы только к задачам небольшой размерности, не представляющим практического интереса.

9.6. Задачи в вариантной постановке

Вариантом решения задачи называется некоторое ее допустимое решение. Ранее явным образом все варианты (решения) не перечислялись. Они задавались неявно, путем указания системы ограничений, которым должны удовлетворять (см., например, формулу 9.6). При этом часто число вариантов оказывалось несчетным, так что даже перечислить все варианты было принципиально невозможно.

В противоположность этому на практике возникают ситуации, когда возможные варианты или различные фрагменты вариантов известны и фиксированы. Задача заключается в том, чтобы найти или «склеить» из фрагментов оптимальный вариант. Число возможных решений здесь конечно, однако может оказаться достаточно большим, так что прямой перебор вариантов является практически неосуществимым.

В простейшем случае вариантная постановка задачи такова. Имеется n объектов, например аэропортов или авиационных технических баз (АТБ). Для каждого объекта возможны несколько вариантов его развития. Обозначим число вариантов для i -го объекта k_i . При развитии i -го объекта по j -му варианту потребные капитальные вложения составляют d_{ij} , а получаемый доход c_{ij} . Пусть

общие капитальные вложения на развитие сети объектов b заданы, необходимо для каждого объекта сети указать вариант развития, обеспечивающий максимум общего дохода и укладывающийся в выделенные капвложения.

Для математической формулировки задачи введем булевы переменных x_{ij} : $x_{ij}=0$, если для i -го объекта вариант j не реализуется, и $x_{ij}=1$ — в противном случае. Итак, необходимо:

найти булевы переменные $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{ij}, \dots$, удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.38)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \cdot d_{ij} \leq b, \quad (9.39)$$

и максимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x_{ij}. \quad (9.40)$$

Сформулированная задача может быть решена методами динамического программирования (см. формулы 9.10—9.12). Это обстоятельство объясняется тем, что в ограничениях задачи динамического программирования может входить условие (9.12). В нашем случае множество I_{ij} возможных значений каждой переменной x_{ij} состоит из 0 и 1. Отметим, что если имеются ограничения не на один вид ресурса (капиталовложения), а на несколько (численность работников и т. п.), то условий (9.39) будет соответственно больше.

Рассмотрим различные обобщения сформулированной задачи. Рассмотрим для определенности задачу планирования развития сети АТБ, обслуживающих некоторый тип самолетов. В настоящее время остро стоит вопрос о концентрации технического обслуживания самолетов и создании опорных АТБ. Предполагается, что обслуживание самолетов по трудоемким формам регламента будет проводиться не во всех аэропортах базирования самолетов (т. е. не во всех АТБ), а только в опорных. В связи с этим для каждой АТБ необходимо решить, будут ли обслуживаться на ней самолеты, приписанные к соответствующему аэропорту или нет. Если не будут, то необходимо указать, кроме того, АТБ, в которую самолеты должны летать для проведения обслуживания. Если будут, то указать, самолеты каких других АТБ еще планируется обслуживать на данной базе.

Следует исходить из того, что для каждой АТБ может быть разработано некоторое количество вариантов ее развития. Они отражаются в фрагментах развития сети АТБ. Каждый фрагмент содержит наименование АТБ и опорной АТБ, в которой обслуживаются все самолеты перечисленных АТБ. Для каждого фрагмента рассчитывается величина критерия экономической эффективности

(например, дохода) и потребный объем капитальных вложений для реализации фрагмента. Обозначим эти величины для j -го фрагмента соответственно c_j и d_j . Пусть количество составленных фрагментов равно m , а общее число АТБ n . Математически каждый фрагмент описывается n — мерным вектором из 0 и 1. Если i -й элемент j -го фрагмента, который обозначим a_{ij} , равен 0, то i -ое АТБ не содержится в j -м фрагменте, а если 1, то содержится. Итак, j -й фрагмент описывается набором $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, а все фрагменты — матрицей (a_{ij}) .

Число фрагментов значительно больше числа АТБ, поскольку для большинства АТБ необходимо предусмотреть фрагменты, содержащие только одну эту АТБ.

Искомые переменными являются m булевых переменных x_j . Переменная x_j равна 1, если j -й фрагмент реализуется, и 0 — в противном случае. Теперь задача может быть сформулирована так:

найти переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$, максимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.41)$$

$$\sum_{j=1}^m d_j x_j \leq b. \quad (9.42)$$

Условие (9.41) означает, что каждое АТБ должно войти только в один фрагмент, условие (9.42), — что общие капитальные вложения на реализацию фрагментов не должны превышать имеющейся величины (как и прежде, количество условий типа (9.42) может быть увеличено).

Сформулированная задача является обобщением задачи (9.38) — (9.40). В теории математического программирования она относится к классу *комбинаторных задач* и носит название *задачи о покрытиях* [11, 22]. К ней сводятся многие прикладные задачи концентрации и размещения производства. В частности, аналогичную математическую запись имеют задачи создания кустовых складов авиационного технического имущества, базирования самолетов ГА и т. п.

Следующей важной задачей является планирование развития сети аэропортов. При решении ее следует учитывать такое обстоятельство. Доходы, даваемые от развития аэропорта по данному варианту, зависят от того, по каким вариантам будут развиваться другие аэропорты. Действительно, если в аэропорту предусматривается эксплуатация нового самолета, то интенсивность его использования будет зависеть от того, какие еще аэропорты могут принимать данный тип самолета, т. е. по каким вариантам они развиваются. Приведенное соображение приводит к тому, что

функция цели задачи становится нелинейной, а именно, квадратичной.

Итак, рассматривается n аэропортов. Обозначим i ($i=1, \dots, n$) текущий индекс аэропорта. i -й аэропорт может развиваться по одному из k_i вариантов.

Введем булевы переменные x_{ij} ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, k_i$), равные 1 или 0, судя по тому, выбирается ли для i -го аэропорта вариант j или нет.

Если i -й аэропорт развивается по варианту j , а i' -й по варианту j' , то авиаперевозки по связи $i-i'$ приносят доход $c_{ijj'j'}$, который определяется: 1) наиболее экономичным типом самолета, который может эксплуатироваться на данной линии и приниматься в аэропортах i и i' при развитии по вариантам j и j' ; 2) планируемыми объемами перевозок по связи $i-i'$ при указанных вариантах развития аэропортов.

Каждый вариант развития аэропорта связан с дополнительными капитальными вложениями. Обозначим эту величину для i -го аэропорта при развитии его по j -му варианту d_{ij} . Общий объем вложений в сеть аэропортов b считается заданным. Задача заключается в определении варианта развития каждого аэропорта, при котором суммарный доход максимален, а потребные капитальные вложения не превосходят заданных.

Математическая постановка задачи выглядит так: найти переменные x_{ij} , $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, k_i$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, k_i \quad (9.43)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} d_{ij} < b; \quad (9.44)$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (9.45)$$

и максимизирующие функцию цели

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{j'=1}^{k_{i'}} x_{ij} x_{i'j'} c_{ijj'j'}. \quad (9.46)$$

Условия (9.45) фиксируют здесь тот факт, что каждый аэропорт должен развиваться только по одному варианту. Поэтому при данном i лишь одна переменная из $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i}$ принимает ненулевое значение, равное 1. Следовательно, из суммы $\sum_j x_{ij} d_{ij}$ только одно слагаемое положительно и сумма равна капитальным вложениям на реализацию соответствующего варианта развития аэропорта.

Отсюда ясно, что условие (9.44) представляет собой ограничение на общую сумму капитальных вложений.

Для пары аэропортов i и i' доход $c_{ij i' j'}$ будет реализован только в том случае, если аэропорт i развивается по варианту j , а аэропорт i' — по варианту j' . Это имеет место, когда одновременно $x_{ij}=1$ и $x_{i' j'}=1$. Все остальные $x_{i1}, \dots, x_{ik_i}$ и $x_{i'1}, \dots, x_{i' k_{i'}}$ равны нулю. Поэтому в двойной сумме

$$\sum_{j=1}^{k_i} \sum_{j'=1}^{k_{i'}} x_{ij} x_{i' j'} c_{ij i' j'}$$

только одно слагаемое отлично от нуля и функция (9.46) действительно даст значение суммарного дохода от всех аэропортов.

Отличительной особенностью этой задачи является квадратичная функция цели. Это обстоятельство существенно осложняет решение.

В настоящее время известно довольно большое число способов приближенного решения таких задач [11, 22].

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица ПП

Квантили $\Phi^{-1}(p)$ нормального распределения $\Phi(0; 1)$

p	$\Phi^{-1}(p)$	p	$\Phi^{-1}(p)$	p	$\Phi^{-1}(p)$	p	$\Phi^{-1}(p)$
0,01	-2,3268	0,26	-0,6433	0,51	0,0251	0,76	0,7063
0,02	-2,0537	0,27	-0,6128	0,52	0,0502	0,77	0,7388
0,03	-1,8808	0,28	-0,5828	0,53	0,0753	0,78	0,7722
0,04	-1,7507	0,29	-0,5534	0,54	0,1004	0,79	0,8064
0,05	-1,6449	0,30	-0,5244	0,55	0,1257	0,80	0,8416
0,06	-1,5548	0,31	-0,4958	0,56	0,1510	0,81	0,8779
0,07	-1,4758	0,32	-0,4677	0,57	0,1764	0,82	0,9154
0,08	-1,4051	0,33	-0,4399	0,58	0,2019	0,83	0,9542
0,09	-1,3408	0,34	-0,4125	0,59	0,2275	0,84	0,9945
0,10	-1,2816	0,35	-0,3853	0,60	0,2533	0,85	1,0364
0,11	-1,2265	0,36	-0,3585	0,61	0,2793	0,86	1,0803
0,12	-1,1750	0,37	-0,3319	0,62	0,3055	0,87	1,1264
0,13	-1,1264	0,38	-0,3055	0,63	0,3319	0,88	1,1750
0,14	-1,0803	0,39	-0,2793	0,64	0,3585	0,89	1,2265
0,15	-1,0364	0,40	-0,2533	0,65	0,3853	0,90	1,2816
0,16	-0,9945	0,41	-0,2275	0,66	0,4125	0,91	1,3408
0,17	-0,9542	0,42	-0,2019	0,67	0,4399	0,92	1,4051
0,18	-0,9154	0,43	-0,1764	0,68	0,4677	0,93	1,4758
0,19	-0,8779	0,44	-0,1510	0,69	0,4958	0,94	1,5548
0,20	-0,8416	0,45	-0,1257	0,70	0,5244	0,95	1,6449
0,21	-0,8064	0,46	-0,1004	0,71	0,5534	0,96	1,7507
0,22	-0,7722	0,47	-0,0753	0,72	0,5828	0,97	1,8808
0,23	-0,7388	0,48	-0,0502	0,73	0,6128	0,98	2,0537
0,24	-0,7063	0,49	-0,0251	0,74	0,6433	0,99	2,3268
0,25	-0,6745	0,50	-0,0000	0,75	0,6745		

Квантили χ^2 -распределения $K^{-1}(p; \nu)$

Число степеней свободы, ν	K^{-1} (0,1; ν)	K^{-1} (0,3; ν)	K^{-1} (0,5; ν)	K^{-1} (0,7; ν)	K^{-1} (0,9; ν)	K^{-1} (0,95; ν)	K^{-1} (0,99; ν)	K^{-1} (0,999; ν)
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,594	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3	16,3
4	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	27,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,10	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	10,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	2,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

Квантили распределения Стьюдента $S^{-1}(p; v)$

Число степеней свободы v	S^{-1} (0,6; v)	S^{-1} (0,7; v)	S^{-1} (0,8; v)	S^{-1} (0,9; v)	S^{-1} (0,95; v)	S^{-1} (0,99; v)	S^{-1} (0,995; v)	S^{-1} (0,999; v)
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	31,821	63,657	318,3
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	6,965	9,925	22,327
3	0,277	0,684	0,978	1,638	2,353	4,541	5,841	10,214
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	3,747	4,604	7,173
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	3,365	4,032	5,893
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	3,143	3,707	5,208
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,998	3,499	4,785
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,896	3,355	4,501
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,821	3,250	4,297
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,764	3,169	4,144
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,718	3,106	4,030
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,681	3,055	3,930
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,650	3,012	3,850
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,624	2,977	3,787
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,602	2,947	3,730
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,583	2,921	3,686
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,567	2,898	3,650
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,552	2,878	3,610
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,539	2,861	3,580
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,528	2,845	3,552
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,518	2,831	3,530
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,508	2,819	3,505
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,500	2,807	3,490
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,492	2,797	3,467
25	0,256	0,531	0,856	1,315	1,708	2,485	2,787	3,450
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,479	2,779	3,435
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,473	2,771	3,420
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,467	2,763	3,408
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,462	2,756	3,400
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,457	2,750	3,386
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,423	2,704	3,310
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,390	2,660	3,230
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	2,358	2,517	3,170
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090

Квантили распределения Фишера $F^{-1}(0,95; v_1, v_2)$

Таблица ПIV

Степень свободы для числителя v_1

v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,43	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,30	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,30	2,23	2,16	2,12	2,08	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,94	1,89	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,17	2,10	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,92	1,88	1,83	1,78	1,73	1,67	1,61
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Значения функций

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad \text{и} \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

z	$\Phi(z)$	$\varphi(z)$	z	$\Phi(z)$	$\varphi(z)$	z	$\Phi(z)$	$\varphi(z)$
0,00	0,500	0,399	0,66	0,745	0,321	1,32	0,907	0,167
0,02	0,508	0,399	0,68	0,752	0,317	1,34	0,910	0,163
0,04	0,516	0,399	0,70	0,758	0,312	1,36	0,913	0,158
0,06	0,524	0,398	0,72	0,764	0,308	1,38	0,916	0,154
0,08	0,532	0,398	0,74	0,770	0,303	1,40	0,919	0,150
0,10	0,540	0,397	0,76	0,776	0,299	1,42	0,922	0,146
0,12	0,548	0,396	0,78	0,782	0,294	1,44	0,925	0,141
0,14	0,556	0,395	0,80	0,788	0,290	1,46	0,928	0,137
0,16	0,564	0,394	0,82	0,794	0,285	1,48	0,930	0,133
0,18	0,571	0,392	0,84	0,800	0,280	1,50	0,933	0,130
0,20	0,579	0,391	0,86	0,805	0,276	1,55	0,939	0,120
0,22	0,587	0,389	0,88	0,811	0,271	1,60	0,945	0,111
0,24	0,595	0,388	0,90	0,816	0,266	1,65	0,950	0,102
0,26	0,603	0,386	0,92	0,821	0,261	1,70	0,955	0,094
0,28	0,610	0,384	0,94	0,826	0,256	1,75	0,960	0,086
0,30	0,618	0,381	0,96	0,831	0,252	1,80	0,964	0,079
0,32	0,626	0,379	0,98	0,836	0,247	1,85	0,968	0,072
0,34	0,633	0,376	1,00	0,841	0,242	1,90	0,971	0,066
0,36	0,641	0,374	1,02	0,846	0,237	1,95	0,974	0,060
0,38	0,648	0,371	1,04	0,851	0,232	2,00	0,977	0,054
0,40	0,655	0,368	1,06	0,855	0,227	2,05	0,980	0,049
0,42	0,663	0,365	1,08	0,860	0,223	2,10	0,982	0,044
0,44	0,670	0,362	1,10	0,864	0,218	2,15	0,984	0,040
0,46	0,677	0,359	1,12	0,869	0,213	2,20	0,986	0,035
0,48	0,684	0,355	1,14	0,873	0,208	2,25	0,988	0,032
0,50	0,691	0,352	1,16	0,877	0,204	2,30	0,989	0,028
0,52	0,698	0,348	1,18	0,881	0,199	2,40	0,992	0,022
0,54	0,705	0,345	1,20	0,885	0,194	2,50	0,994	0,017
0,56	0,712	0,341	1,22	0,888	0,189	2,60	0,995	0,014
0,58	0,719	0,337	1,24	0,892	0,185	2,70	0,997	0,010
0,60	0,726	0,333	1,26	0,896	0,180	2,80	0,997	0,008
0,62	0,732	0,329	1,28	0,900	0,176	2,90	0,998	0,006
0,64	0,739	0,325	1,30	0,903	0,171	3,00	0,999	0,004

Значения функции e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,0000	0,40	0,6703	0,80	0,4493	1,20	0,3012	1,60	0,2019
01	0,9900	41	6737	81	4449	21	2982	61	1999
02	9802	42	6570	82	4404	22	2952	62	1979
03	9704	43	6505	83	4360	23	2923	63	1959
04	9608	44	6440	84	4317	24	2894	64	1940
05	9512	45	6376	85	4274	25	2865	65	1920
06	9418	46	6313	86	4232	26	2837	66	1901
07	9324	47	6250	87	4190	27	2808	67	1882
08	9231	48	6188	88	4148	28	2780	68	1864
09	9131	49	6126	89	4107	29	2753	69	1845
10	9018	50	6065	90	4066	30	2725	70	1827
11	8958	51	6005	91	4025	31	2698	71	1809
12	8869	52	5945	92	3985	32	2671	72	1791
13	8781	53	5886	93	3946	33	2645	73	1773
14	8694	54	5827	94	3906	34	2618	74	1755
15	8607	55	5769	95	3867	35	2592	75	1738
16	8521	56	5712	96	3829	36	2567	76	1720
17	8437	57	5655	97	3791	37	2541	77	1703
18	8353	58	5599	98	3753	38	2516	78	1686
19	8270	59	5543	99	3716	39	2491	79	1670
20	8187	60	5488	1,00	3679	40	2466	80	1653
21	8106	61	5434	01	3642	41	2441	81	1637
22	8025	62	5379	02	3606	42	2417	82	1620
23	7945	63	5326	03	3570	43	2393	83	1604
24	7866	64	5273	04	3535	44	2369	84	1588
25	7788	65	5220	05	3499	45	2346	85	1572
26	7711	66	5169	06	3465	46	2322	86	1557
27	7634	67	5117	07	3430	47	2295	87	1541
28	7558	68	5066	08	3396	48	2276	88	1526
29	7483	69	5016	09	3362	49	2254	89	1511
30	7408	70	4966	10	3329	50	2231	90	1496
31	7334	71	4916	11	3296	51	2209	91	1481
32	7261	72	4868	12	3263	52	2185	92	1466
33	7189	73	4819	13	3230	53	2165	93	1451
34	7118	74	4771	14	3198	54	2144	94	1437
35	7047	75	4724	15	3166	55	2122	95	1423
36	6977	76	4677	16	3155	56	2101	96	1409
37	6907	77	4630	17	3104	57	2080	97	1395
38	6839	78	4584	18	3073	58	2060	98	1381
39	6771	79	4538	19	3042	59	2039	99	1367
								2,00	1353

Значения функции $P_n(a) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$

n	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6055	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
							0,0001	0,0002	0,0003	

n	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Значения функции $P_{\leq n}(a) = \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!} e^{-a}$

x	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4498	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9779	0,9659	0,9526	0,9371
3	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9976	0,9942	0,9909	0,9885
4	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5		1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997
6				1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
7						1,0000	0,9999	0,9999	0,9999
8									1,0000
n	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
0	0,3679	0,1357	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,7358	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012
2	0,9197	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062
3	0,9810	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212
4	0,9963	0,9473	0,8152	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550
5	0,9994	0,9834	0,9161	0,7851	0,6159	0,4457	0,3007	0,1912	0,1170
6	0,9999	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068
7	0,9999	0,9989	0,9881	0,9489	0,8656	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239
8	0,9999	0,9998	0,9962	0,9986	0,9318	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557
9	1,0000	0,9999	0,9989	0,9918	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874
10	1,0000	0,9999	0,9997	0,9972	0,9862	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060
11	1,0000	0,9999	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030
12		1,0000	0,9999	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758
13		1,0000	0,9999	0,9999	0,9992	0,9964	0,9872	0,9558	0,9261
14		1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9986	0,9945	0,9827	0,9585
15			1,0000	0,9999	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780
16			1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889
17			1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9996	0,9985	0,9947
18			1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9994	0,9976
19			1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9997	0,9989
20				1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9996
21					1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998
22					1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
23						1,0000	0,9999	0,9999	0,9999
24						1,0000	0,9999	0,9999	0,9999

Нормально распределенные числа $\xi_0; 1$

0,5955	-0,9567	-0,4525	1,7141	0,1166	-0,3035	-0,8648	-0,2762
0,8878	1,4399	-0,1673	1,9888	1,3912	1,1469	0,1408	1,1105
1,3596	0,6264	0,7770	-0,4714	-1,8767	-0,3315	-0,4552	0,5407
0,3961	0,3172	1,3063	1,7748	-0,7831	1,1407	-1,2317	-1,5495
1,3996	-0,5412	-0,3513	0,0959	-1,2982	-0,2092	1,4988	-0,8433
0,6103	0,2143	-1,7647	0,8872	1,2249	0,2244	1,3989	0,2175
1,0572	0,0863	-0,5204	0,1195	0,4177	-1,3384	-1,1699	-1,5144
-0,7934	1,4052	1,5732	0,0606	2,8545	0,1878	-0,0843	0,7661
0,7095	-0,8784	-0,4474	-1,6972	1,7019	-0,0541	0,7496	0,8885
0,4189	-1,1017	-0,3966	0,2764	-0,8211	-2,1006	0,3755	0,5803
0,9204	-1,1859	0,6551	-1,1844	-0,0327	2,6107	-1,5307	0,2634
1,0469	1,3231	-1,4720	-1,5188	0,1818	-0,3886	-1,1073	0,2446
0,0373	1,0704	0,6511	0,0283	1,3351	0,0447	1,0698	1,7287
0,8325	0,3653	0,9094	-1,2804	-0,3766	0,1126	-0,7246	-0,6078
-1,0980	-0,5706	-0,9678	-0,2011	-2,6891	0,7349	-0,2401	2,1936
0,8285	-0,9246	0,2817	0,2817	-1,8206	-0,9273	0,1009	0,4673
0,5849	-1,2114	1,9777	-0,7401	-2,1394	-0,1418	0,5652	-0,2171
-1,2694	-0,8690	-0,6200	0,8522	0,3989	-1,6043	1,3361	-0,3627
-1,8795	2,1241	-1,0324	-0,5972	-0,5367	-1,1800	1,2464	-0,9108
-1,4345	0,8420	-2,1421	0,3184	1,7609	-1,3321	-1,7929	-0,7298
-0,2127	-0,6388	0,6343	0,9895	-0,1026	0,4739	-1,5747	0,2136
0,4394	0,6535	-1,4222	0,5028	-0,9808	-0,7944	-0,1824	-1,2026
-1,7181	1,0547	1,1764	0,9064	-1,6218	0,5456	-0,2568	-0,0006
-1,1714	2,3965	-0,1719	-1,4232	0,6767	0,1161	0,5588	-0,1572
-1,4312	-1,3493	1,2580	1,5037	-0,2647	-1,2482	-0,3690	1,4047
-0,5767	-0,1932	-0,3199	-1,2330	1,1220	-0,1292	-1,9742	-0,2299
-1,7750	-1,3836	0,5768	0,8314	0,4712	-1,8326	0,0974	0,0229
0,6989	-0,9137	0,8286	-0,6841	0,2309	0,8760	-1,3196	0,8593
1,4547	-0,5137	-0,8159	1,6976	1,6808	-0,5607	1,6192	-1,5036
-1,9278	1,3322	1,7982	-0,2411	0,0470	0,7516	-1,2719	-1,1642
0,0307	0,2432	0,1295	0,9592	1,1758	-0,2544	-0,3663	1,8976
1,9745	-0,9768	-0,6119	-2,3175	-1,5597	0,1089	-0,8989	0,4925
0,6722	-0,8133	0,3077	-0,4988	-1,3960	-1,9540	-0,1807	-0,5275
0,8308	2,5666	0,4702	0,0564	0,2810	0,0845	0,4265	0,7492
0,9790	-0,0971	0,4413	-1,6344	0,5451	-0,4258	-0,5102	0,3929
0,3326	-0,7979	-1,5355	-1,3690	2,0035	0,8132	0,1999	-0,3996
0,6549	0,1661	-2,4684	-0,8117	-0,1016	0,8073	-0,0469	-2,2602
-1,2105	-2,3642	-1,1261	0,1402	0,1794	-0,8293	-0,1925	-1,5751
0,5716	0,2217	0,5378	0,1267	1,3062	0,7560	1,3532	0,5975
-0,0708	1,3550	-0,8212	-0,3456	-0,2365	1,1349	0,2758	0,0464

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М., «Мир», 1971. 536 с.
2. Андронов А. М. Теория массового обслуживания и научная организация труда в гражданской авиации. М., РИО МГА СССР, 1969. 118 с.
3. Андронов А. М. Краткий курс теории вероятностей и математической статистики для инженеров-экономистов гражданской авиации. Рига, РКИИ ГА, ч. I, 1970. 192 с. ч. II, 1971. 156 с.
4. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Мир», 1965. 457 с.
5. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., «Наука», 1964. 362 с.
6. Гасс С. Линейное программирование. М., ФМ, 1961. 304 с.
7. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1971. 432 с.
8. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М., «Статистика», 1973. 392 с.
9. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. М., «Наука», 1972. 232 с.
10. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. М., «Мир», 1966. 220 с.
11. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969. 368 с.
12. Кофман А. Методы и модели исследования операций. М., «Мир», 1969. 524 с.
13. Лизер С. Эконометрические методы и задачи. М., «Статистика», 1971. 144 с.
14. Мирошников А. В., Кравец А. С., Хижняк А. Н. Сетевое планирование и управление на воздушном транспорте. М., «Транспорт», 1971. 110 с.
15. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. М., «Машиностроение», 1969. 356 с.
16. Применение математики в экономических исследованиях. Под ред. акад. В. С. Немчинова. М., Издательство социально-экономической литературы. 1959. 488 с.
17. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968. 548 с.
18. Румянцева З. П. Математические методы в планировании гражданской авиации. М., «Транспорт», 1966. 190 с.
19. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее применения. М., «Сов. радио», 1971. 520 с.
20. Сборник задач по курсу Математические методы в планировании. Под ред. проф. И. Г. Попова. М., «Экономика», 1971, 167 с.
21. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965. 512 с.
22. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967. 508 с.
23. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., ФМ, 1963. 236 с.
24. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. М., «Наука», 1968. 488 с.

25. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. М., «Прогресс», 1974. 296 с.
26. Downton F. On Limiting Distributions Arising in Bulk Service Queues. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B.*, Vol. 18, 1956, pp. 265—274.
27. Friend J. K. Two Studies in Airport. Congestion. *Operat. Res. Quart.*, 1958, Vol. 9, No. 3.
28. Horonjeff R. The Planning and Design of Airports. Mc. Graw — Hill Book Company, 1962.
29. Lee A. M. Applied Queueing Theory. Macmillan — ST Martin's Press. London — Melbourne — Toronto — New-York, 1966.
30. Lee A. M., Longton P. A. Queueing Processes Associated with Airline Passenger Check — in. *Operat. Res. Quart.*, 1959, Vol. 10, No. 1, pp. 56—71.
31. Morse P. M. Queues, Inventories and Maintenance. New York, John Wiley, 1958.
32. Saaty T. L. Optimization in Integers and Related Extremal Problems. Mc. Graw — Hill Book Company, 1970.
33. Peck L. G., Hazelwood R. N. Finite Queueing Tables. New York, John Wiley, 1958.
34. Pollaczek F. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Wath. Z.*, 32, 1930. 64—100 und 729—750.
35. Potthoff G. Nichtschlangentheorie. Eisenbahntechnik, 1962, N 9.
36. The RAND Corporation. A Million Random Digits. Glencoe, The Free Press, 1955.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
<i>Раздел I</i>	
АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЯДОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ	7
Глава 1. Анализ регрессии в случае одной сопутствующей переменной	—
1.1. Общие положения	9
1.2. Метод наименьших квадратов	12
1.3. Случайные величины	16
1.4. Математическая модель	20
1.5. Случай различных дисперсий	21
1.6. Исследование точности модели	—
Глава 2. Анализ регрессии в случае нескольких сопутствующих переменных	28
2.1. Матрицы и вектора	33
2.2. Случайные вектора	35
2.3. Случай одной сопутствующей переменной в матричных обозначениях	42
2.4. Общий случай	48
2.5. Случай различных дисперсий	50
2.6. Проверка корректности модели	56
2.7. Алгоритм Жордана — Гаусса	59
2.8. Две сопутствующие переменные	61
2.9. Численный пример	64
Глава 3. Применения теории регрессии	—
3.1. Общие положения	67
3.2. Прогнозирование объемов авиационных перевозок	73
3.3. Нормирование трудовых затрат	77
3.4. Анализ эксплуатационных показателей	—
<i>Раздел II</i>	
АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	80
Глава 4. Формализация процессов массового обслуживания	—
4.1. Общие положения	85
4.2. Общие сведения о системах массового обслуживания	93
Глава 5. Статистический анализ процессов обслуживания	—
5.1. Вероятностные модели продолжительности обслуживания	100
5.2. Статистический анализ продолжительности обслуживания	106
5.3. Обобщенная модель формирования продолжительности обслуживания	108
5.4. Описание и статистический анализ потока требований	114
5.5. Применение регрессионных методов при статистическом анализе систем обслуживания	—

Глава 6. Аналитическое исследование процессов массового обслуживания 115

6.1. Общие положения	—
6.2. Простейшая модель массового обслуживания в общем случае	116
6.3. Простейшая однолинейная система с ожиданием	120
6.4. Многолинейная система с ожиданием	122
6.5. Бесконечнолинейная система	125
6.6. Однолинейная система с ограниченным числом мест для ожидания	126
6.7. Многолинейная система с отказами	127
6.8. Однолинейная система с конечным потоком требований	128
6.9. Однолинейная система с ожиданием при произвольном распределении длительности обслуживания	130
6.10. Приближенное выражение для средней продолжительности ожидания в многолинейной системе с произвольным распределением длительности обслуживания	134
6.11. Однолинейная система с относительными приоритетами	136
6.12. Многолинейная система с относительными приоритетами	140
6.13. Система с групповым обслуживанием требований	141
6.14. Применение теории матриц для исследования систем массового обслуживания	143

Глава 7. Применения теории массового обслуживания в гражданской авиации 144

7.1. Исследование эффективности работы аэродрома	—
7.2. Планирование обслуживания пассажиров в аэровокзале	149
7.3. Планирование перронного обслуживания самолетов при пуассоновском потоке требований	152

Глава 8. Анализ процессов обслуживания при наличии расписания поступления требований 156

8.1. Общие положения	—
8.2. Исследование интенсивности прибытия улетающих пассажиров в аэропорт	—
8.3. Анализ отклонения прилетов самолетов от расписания	160
8.4. Аналитическая модель обслуживания, учитывающая расписание движения самолетов в аэропорту	163
8.5. Детерминированное моделирование процессов обслуживания	171
8.6. Метод статистического моделирования	175
8.7. Статистическое моделирование процессов обслуживания	176

Раздел III

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Глава 9. Задачи математического программирования и их использование при планировании деятельности ГА 183

9.1. Формулировка задач математического программирования	—
9.2. Классификация задач математического программирования	185
9.3. Задача распределения самолетов по авиалиниям	188
9.4. Транспортные задачи	192
9.5. Календарное планирование производства	195
9.6. Задачи в вариантной постановке	198
Приложения	203
Список литературы	212

Александр Михайлович Андронов
Арнольд Николаевич Хижняк

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ
И УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ
ПРЕДПРИЯТИЙ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

Рецензенты А. Н. Субботин, В. В. Мова, В. М. Макаров

Редактор В. Л. Стерлигов
Обложка художника Г. П. Казаковцева
Технический редактор Р. А. Иванова
Корректоры О. М. Зверева, Г. В. Раубек

ИБ № 829

Сдано в набор 13/VIII 1976 г. Подписано к печати 4/I 1977 г.
Формат 60×90^{1/16}, Бумага тип. № 2 Печатных листов 13,5 Учетно-изд. листов 14,4
Тираж 2.000 экз. Т 01805 Изд. № 1—1/17 № 6956. Зак. тип. 1253. Цена 65 коп.
Изд-во «ТРАНСПОРТ», Москва, Басманный туп., 6а

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.