

В. А. ВЯЗГИН, В. В. ФЕДОРОВ

Математические методы автоматизированного проектирования

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Прикладная математика»



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1989

БКК 22.19
В99
УДК 518

Рецензенты: кафедра теории управления и исследования операций Московского физико-технического института (зав. кафедрой акад. Н. Н. Моисеев) и д-р физ.-мат. наук, проф. Р. Г. Строггин (Горьковский государственный университет)

Вязгин В. А., Федоров В. В.
В99 Математические методы автоматизированного проектирования: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 1989. — 184 с.

ISBN 5-06-000050-8

В пособии рассматриваются теоретико-методические вопросы автоматизации проектирования сложных технических систем, включая методы агрегирования, декомпозиции и координации, методы принятия проектно-конструкторских решений, модели иерархических систем проектирования, методы управления процессом проектирования и др. Основное внимание уделяется управляемым динамическим системам, представляющим важный класс объектов проектирования. Теоретические конструкции иллюстрируются примерами, имеющими практическое значение.

В 1602110000(4309000000)—502 88—89
001(01)—89

БКК 22.19
518

Учебное издание

**Вязгин Виктор Александрович,
Федоров Вячеслав Васильевич**

Математические методы автоматизированного проектирования

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова*. Редактор *Ж. И. Яковлева*. Мл. редакторы *Н. П. Майкова*, *Г. В. Вяткоха*. Художественный редактор *В. И. Пономаренко*. Оформление художника *А. И. Шаварда*. Технический редактор *Т. Д. Гарина*. Корректор *С. К. Завьялова*

ИБ № 8024

Изд. № ФМ-898. Сдано в набор 20.04.89. Подп. в печать 20.09.89. Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 11,27 усл. печ. л. 11,5 усл. кр.-отт. 10,95 уч. изд л. Тираж 17 000 экз. Зак. № 1339. Цена 35 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Московская типография № 8 Государственного комитета СССР по печати,
101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

ISBN 5-06-000050-8

© В. А. Вязгин, В. В. Федоров, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Предисловие | 4 |
| Глава 1. Введение | 6 |
| § 1. Структура жизненного цикла сложной технической системы | 6 |
| § 2. Проектирование и автоматизация | 10 |
| § 3. Новые информационные технологии и автоматизация проектирования | 12 |
| Глава 2. Постановка и примеры задач проектирования | 19 |
| § 1. Структурно-параметрическое описание объекта проектирования | 20 |
| § 2. Модели функционирования объектов проектирования | 25 |
| § 3. Бинарные отношения | 36 |
| § 4. Общая постановка задачи проектирования | 40 |
| § 5. Примеры постановок задач проектирования | 52 |
| Глава 3. Последовательный анализ в задачах проектирования | 64 |
| § 1. Общая схема последовательного анализа вариантов | 64 |
| § 2. Синтез аппроксимирующих отношений и критериев | 69 |
| § 3. Примеры синтеза критериев и технических характеристик | 73 |
| § 4. О методах решения многокритериальных задач | 81 |
| Глава 4. Последовательный анализ вариантов в проектировании динамических систем | 92 |
| § 1. Постановка задачи | 92 |
| § 2. Синтез отношений в последовательном анализе вариантов динамических систем | 94 |
| § 3. Алгоритмы последовательного анализа вариантов | 98 |
| § 4. Оптимизация алгоритмов последовательного анализа | 100 |
| § 5. Модельный пример | 104 |
| Глава 5. Иерархические структуры принятия проектных решений | 110 |
| § 1. Декомпозиция и агрегирование в задачах проектирования | 110 |
| § 2. Обоснование декомпозиции | 116 |
| § 3. Иерархические схемы проектирования | 119 |
| § 4. Учет неопределенных факторов в процессе проектирования | 126 |
| Глава 6. Фрагмент подсистемы принятия проектно-конструкторских решений САПР ЛА | 135 |
| § 1. Структурно-параметрическая модель ЛА | 136 |
| § 2. Модели функционирования летательного аппарата | 142 |
| § 3. Критерии эффективности | 147 |
| § 4. Системы частных критериев | 154 |
| § 5. Формирование облика маневренного летательного аппарата | 160 |
| § 6. Фрагмент иерархической схемы проектирования летательного аппарата | 164 |
| Заключение | 173 |
| Приложение. Позиционные дифференциальные игры | 175 |
| Основные обозначения | 182 |
| Литература | 183 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для решения ключевой задачи ускорения научно-технического прогресса предусматривается внедрить автоматизированные системы в различные сферы хозяйственной деятельности и в первую очередь в проектирование, управление оборудованием и технологическими процессами. Особую роль автоматизация играет в развитии машиностроительного комплекса, сокращении сроков разработки и освоении новой техники, повышении производительности и надежности вновь создаваемых видов техники, снижении затрат на производство.

Автоматизация проектирования — область прикладных исследований, обусловленная необходимостью внедрения современных математических методов и средств вычислительной техники в проектирование различных систем и объектов. Она объединяет два основных направления работ: построение общей теории проектирования сложных систем и объектов и разработку систем автоматизированного проектирования (САПР) на базе современной вычислительной техники.

Первое направление включает: формирование математического аппарата, пригодного для описания объекта проектирования и среды его функционирования; создание на основе этого аппарата математической модели объекта проектирования и среды, в которой он будет функционировать; разработку методов принятия проектно-конструкторских решений, цель которых — создание объекта заданного назначения. Второе направление содержит: работы по созданию пакетов прикладных программ, объединенных в проблемно-ориентированные подсистемы; разработку системного матобеспечения, объединяющего эти подсистемы в единую управляемую диалоговую систему; реализацию в этой системе определенной иерархической процедуры проектирования, удовлетворяющей требованиям общей теории проектирования.

Появление САПР должно привести к созданию новой технологии проектирования, суть которой состоит в предоставлении инженеру возможности традиционную совокупность этапов проектирования рассматривать как единую задачу проектирования во всей сложности ее внутренних взаимосвязей. Реализация таких систем предполагает наличие мощной вычислительной техники и математического обеспечения высокого уровня.

Новая технология предъявляет высокие требования к уровню инженерной подготовки. Она позволяет концентрировать усилия инженера на решении творческих проблем в вопросах интерпретации результатов расчетов и испытаний. Исторически же обстоятельства складывались так, что с ростом сложности объектов проектирования требовалась все более узкая специализация инженеров. Такое положение противоречит возросшим требованиям к сокращению сроков выполнения проектов и повышению их качества. Возникла необходимость в интегрированном использовании современных математических методов на базе ЭВМ.

Предлагаемая книга посвящена проблемам автоматизации проектирования сложных технических систем. Специфика проектируемых объектов (в основном это управляемые динамические системы) определила ее содержание и структуру. Большая часть посвящена математическим вопросам принятия проектных решений, включающим постановку задач проектирования, построение декомпозиционных схем проектирования, их обоснование, синтез критериев оценки эффективности функционирования объектов и др. Уделено определен-

ное внимание и вопросам программного, информационного, организационного обеспечения и практической реализации САПР. Читателям, которые хотят глубже познакомиться именно с этими проблемами, рекомендуем обратиться к списку литературы по оптимальному и автоматизированному проектированию, приведенному в конце книги.

Общая направленность пособия потребовала разработать соответствующий математический аппарат, который обладает достаточной общностью и может быть использован при решении широкого класса задач проектирования. Для понимания материала книги не требуется предварительного знакомства со специальными разделами теории принятия решений, необходимые сведения излагаются в основном тексте.

Наиболее сложные понятия и факты, относящиеся к позиционным дифференциальным играм, рассмотрены в Приложении. Однако в основном тексте книги можно ограничиться содержательными рассуждениями.

Таким образом, пособие может быть полезно при подготовке специалистов по прикладной математике, работающих в области математического обеспечения систем автоматизированного проектирования. Оно может служить основой самостоятельного специального курса и дополнением к курсу «Исследование операций», читаемому в вузах, на факультетах и институтах повышения квалификации. При отборе материала, вошедшего в пособие, учитывался опыт чтения соответствующих курсов на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова и в отраслевом институте повышения квалификации кадров, а также имеющаяся по проектированию литература.

Авторы благодарны рецензентам — профессорам Ю. Н. Павловскому и Р. Г. Стронгину, полезные замечания которых были учтены при доработке рукописи.

Авторы

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассматривается структура жизненного цикла сложной системы, анализируется одна из важнейших его стадий — стадия проектирования. Обосновывается необходимость автоматизации проектирования и создания систем автоматизированного проектирования (САПР), реализующих новую технологию проектирования на основе комплексного использования средств вычислительной техники и современных математических методов.

§ 1. Структура жизненного цикла сложной технической системы

Одно из важных требований системного подхода при разработке сложных технических систем (ТС) заключается в необходимости рассматривать ТС во «времени» и «пространстве». Описание существования ТС во «времени» приводит к понятию «жизненного цикла», а в «пространстве» — к понятию «внешней среды», с которой взаимодействует ТС в процессе функционирования.

Рассмотрим более подробно структуру жизненного цикла сложной технической системы. Под жизненным циклом ТС понимается структура процесса ее разработки, производства и эксплуатации, охватывающего время от возникновения идеи создания системы до снятия ее с эксплуатации. Жизненный цикл (рис. 1), как правило, включает следующие стадии (фазы):

- I. Формирование требований к системе и разработку технического задания (ТЗ).
- II. Проектирование.
- III. Изготовление, испытания и доводку опытных образцов ТС.
- IV. Серийное производство.
- V. Эксплуатацию и целевое применение.

Стадию I также называют *внешним проектированием* или *макропроектированием*. Здесь выясняются цели, ради достиже-

ния которых создается система, уточняется круг решаемых ею задач, исследуются свойства внешней среды, определяются характеристики ее воздействия на систему и др. Результатом внешнего проектирования является техническое задание (ТЗ) на разработку проекта, содержащее основные требования к системе и взаимодействию ее с внешней средой, обеспечивающие решение стоящих перед системой задач.

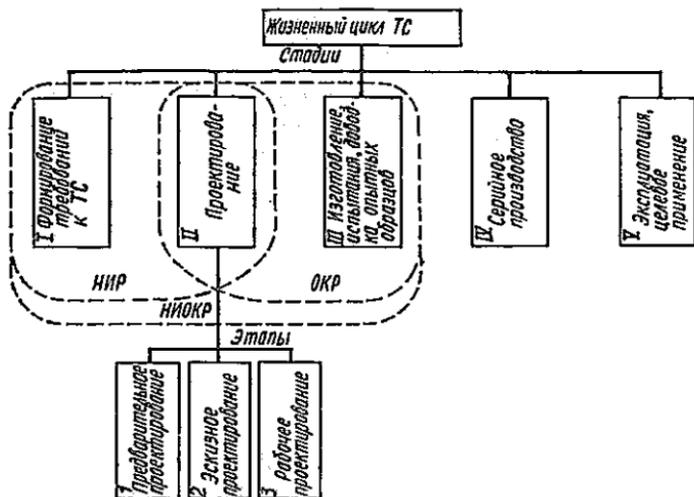


Рис. 1

Стадию II называют *внутренним проектированием* или *микрпроектированием*. Здесь определяют внутренняя структура системы, технические решения ее подсистем и элементов, их конструкция, параметры, режимы эксплуатации и др. Цель внутреннего проектирования состоит в разработке всей необходимой проектно-конструкторской документации, составляющей рабочей проект системы, который удовлетворяет требованиям ТЗ, т. е. требованиям внешнего проектирования.

На I и II стадиях выполняются научно-исследовательские работы (НИР), на стадиях II и III — опытно-конструкторские работы (ОКР); таким образом, на стадиях I—III проводится весь цикл научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР).

Стадия III завершает собственно разработку системы.

Отметим условность выделенных стадий жизненного цикла. Так, например, часто рассматривается VI стадия — стадия модернизации (модификации) системы.

В соответствии с ГОСТ 22487—77 стадия II жизненного цикла — (внутреннее) проектирование, связывающая научные исследования с практической реализацией, является процессом разработки описания, достаточного для создания еще не существующей ТС, который осуществляется преобразованием первичного описания (ТЗ), оптимизацией заданных характеристик ТС и алгоритмов ее функционирования, устранением не-

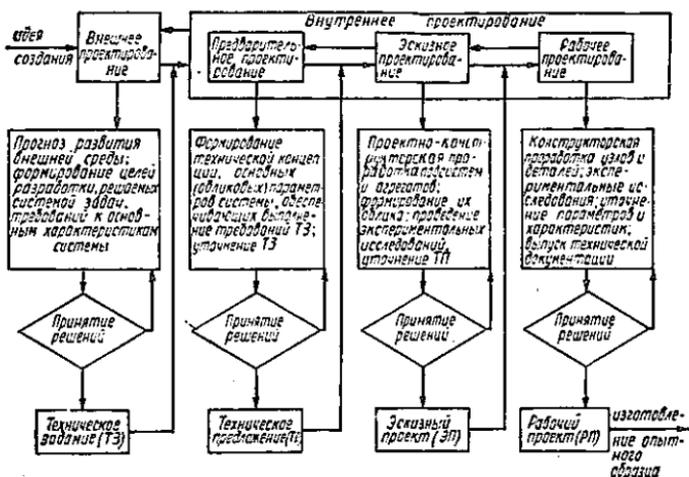


Рис. 2

корректности первичного описания и последовательным представлением детализируемой системы на различных языках для различных этапов проектирования.

С информационной точки зрения проектирование — процесс преобразования входной информации об объекте проектирования, состоянии знаний в рассматриваемой области, опыте проектирования объектов аналогичного назначения в выходную информацию в виде проектно-конструкторской и технологической документации, выполненной в заданной форме и объеме и содержащей описание объекта, необходимое для его практической реализации, т. е. производства.

С точки зрения принятия решений проектирование — процесс принятия проектно-конструкторских решений, результат которого — получение удовлетворяющего ТЗ описания ТС заданной степени детализации.

В стадии II (внутреннее проектирование), в свою очередь, выделяют (рис. 1) следующие этапы:

1. Предварительное (предэскизное) проектирование.
2. Эскизное проектирование.
3. Рабочее (техническое) проектирование.

На этапах предварительного проектирования формируются *техническая концепция и основные (обликовые) параметры системы, обеспечивающие выполнение требований ТЗ* (рис. 2).

В дальнейшем, говоря о предварительном проектировании, будем называть его также этапом *формирования облика*. На данном этапе, по существу, происходит основная «увязка» требований внешнего проектирования с возможностями проектирования внутреннего.

Так, например, для летательного аппарата (ЛА) на этом этапе определяются его основные геометрические, весовые, энергетические и другие параметры, дается оценка летно-технических, технико-экономических, эксплуатационных и других характеристик.

Характерным для этапа предварительного проектирования является отсутствие

структуризации системы, принятие решений по вопросам, относящимся к системе в целом (рис. 3). Итогом этого этапа является техническое предложение на разработку проекта.

Основная задача эскизного проектирования — уточнение параметров и характеристик системы, связанное с проектно-конструкторской проработкой ее основных подсистем и агрегатов и формированием их облика. Последнее осуществляется на основе иерархической уровневой структуризации системы (рис. 3) и сопровождается комплексными расчетами и экспериментальными исследованиями.

Для ЛА здесь синтезируется геометрическая модель, формируются общие виды и компоновочные разрезы, разрабатывается конструктивно-силовая схема на основе прочностного расчета, формируется облик основных подсистем и агрегатов: силовой установки, систем оборудования, управления и др. Создаются аэродинамические модели и полноразмерный макет ЛА. Проводятся экспериментальные исследования моделей, позволяющие уточнить аэродинамический расчет ЛА, расчет его устойчивости и управляемости, а также штопора, флаттера, весовой и прочностной. Результат выполнения этапа — эскизный проект (рис. 2). Наконец, на этапе рабочего проектирования проект окончательно детализируется (рис. 3).

Итогом является рабочий проект, содержащий комплект конструкторской документации, инструкций по производству ее элементов, эксплуатации и др. (рис. 2).

Основное внимание при дальнейшем изложении материала

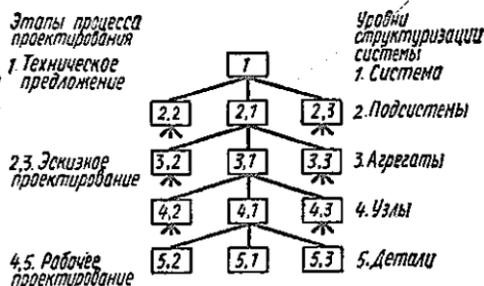


Рис. 3

будет уделено второй стадии жизненного цикла системы — внутреннему проектированию. Анализ этого процесса позволит построить структуру подсистемы проектно-конструкторских решений САПР.

§ 2. Проектирование и автоматизация

Рассмотренный в § 1 жизненный цикл ТС, а точнее часть его, касающаяся проектирования, позволяет сделать ряд выводов.

Жизненный цикл ТС отражает характерную для сложных систем невозможность полной централизации в одном звене обработки информации и принятия решений по управлению (проектированию) системой. Это приводит к необходимости формирования *иерархической структуры* системы проектирования, соответствующей *уровневой декомпозиции* объекта проектирования и *этапной декомпозиции* процесса проектирования.

Цель выполняемых на различных этапах разработки системы расчетных и экспериментальных исследований — уточнить ее параметры и характеристики, принять наиболее рациональные проектно-конструкторские решения. Отсюда следует итерационно-циклический характер процесса проектирования, выражающийся в чередовании процедур синтеза и анализа решений. На рис. 2 это изображено в виде обратных связей между этапами процесса проектирования.

Процесс проектирования сложной технической системы протекает преимущественно «сверху — вниз», т. е. имеет нисходящий характер. При этом по мере «проработки» проекта увеличивается подробность описания (детализации) системы. Проектно-конструкторские решения принимаются в условиях неопределенности, связанных с «грубым» описанием системы на ранних этапах, необходимостью согласования принимаемых на всех уровнях иерархии решений, использованием упрощенных моделей проектируемой системы и методов оценки ее характеристик, неполнотой информации, получаемой в вычислительных, полунатурных и натуральных экспериментах, и др. Весь ход разработки проекта системы, следовательно, можно интерпретировать как последовательный процесс снятия неопределенности.

Разработкой системы необходимо *управлять*. Целью управления может быть получение оптимального проекта с минимальными затратами ресурса (времени, средств и т. п.). Управлять можно выбором альтернатив, подлежащих проработке (конкурс проектов), определением «глубины проработки» выбранной альтернативы, структуры и объема проводимых при этом экспертиз, расчетов, экспериментальных исследований.

Отмеченные особенности носят объективный характер. Они, хотя и в разной степени, присущи практическому проектирова-

нию, осуществляемому в современных проектно-конструкторских организациях, как «ручному» (с ограниченным использованием ЭВМ), так и автоматизированному (с использованием интегрированных САПР, охватывающих основные этапы проектирования).

Следует отличать автоматизированные системы проектирования (АСПР) от САПР. Первые характеризуются использованием ЭВМ для автоматизации работ, ранее выполнявшихся вручную (инженерные расчеты, выпуск конструкторской документации, обработка результатов эксперимента и др.), без существенной перестройки традиционного процесса проектирования. Вторые реализуют новую технологию проектирования, рассчитанную на широкое использование современной вычислительной техники и математических методов. Отсюда следует, что создание САПР может потребовать решения сложных организационно-технических проблем, связанных, например, с перестройкой структуры конструкторского бюро (КБ) (разработчик), структуры связей КБ с организациями и предприятиями, осуществляющими внешнее проектирование (заказчик), ведущими разработку отдельных подсистем и агрегатов (смежники), занимающимися серийным производством и эксплуатацией. Все эти вопросы широко обсуждаются в литературе по автоматизированному проектированию и нашли отражение в существующих стандартах [14, 23—25, 27, 28].

Современная техника отличается большой сложностью, поэтому сроки и стоимость ее проектирования и производства резко возросли. Сократить эти сроки и повысить качество проектирования можно только на основе автоматизации, комплексного применения вычислительной техники и математических методов. Проблема качества также актуальна. Так, суммарные затраты на обеспечение качества («стоимость качества») достигают 10—20% стоимости продукции. При этом 50—70% общих причин дефектов готовой машиностроительной продукции связано с ошибками в проектно-конструкторских решениях, 20—30% — с недостатками технологических процессов, 5—15% возникают по вине рабочих. Следовательно, главная цель состоит в том, чтобы выявить потенциальные источники дефектов еще на стадии проектирования.

Отметим, что исправление ошибки на стадии подготовки технической документации обходится гораздо дешевле, чем на стадии опытного производства и тем более серийного производства и эксплуатации. Эффект от автоматизации определяется прежде всего огромными возможностями современных ЭВМ и успехами математического моделирования. Использование достижений техники и прикладной математики (а также смежных дисциплин) — необходимое условие создания развитых САПР. Внедрение интегрированных САПР, охватывающих основные

этапы жизненного цикла сложных ТС, позволит повысить качество проектных решений при тех же ограничениях на время и стоимость проектирования или сократить сроки и стоимость проектирования при заданном качестве (требованиях ТЗ). Современные интегрированные САПР позволяют, например, в 2—3 раза сократить время проектирования и доводки ЛА, в 3—5 раз время подготовки их производства. При этом затраты на разработку снижаются на 50—80% [32]. Здесь, правда, следует иметь в виду, что с точки зрения конкретной проектной организации САПР часто «удорожает» проект (на 20—30%), но это многократно окупается в дальнейшем (качественный проект позволяет значительно экономить материалы, людские и энергетические ресурсы, сократить сроки изготовления и эксплуатационные расходы).

В последнее время проводятся интенсивные работы по созданию гибких автоматизированных производств (ГАП) [13], в структуру которых включают и САПР. Большое значение в связи с этим придается развитию подсистем САПР — автоматизированных систем конструирования (АСК), обеспечивающих инженерно-конструкторские работы на этапе рабочего проектирования и автоматизированных систем технологической подготовки производства (АСТПП).

Итак, разработка и внедрение САПР — одна из характерных черт нашего времени. В следующем параграфе будет показано, что это является и отражением объективных процессов.

§ 3. Новые информационные технологии и автоматизация проектирования

Научные и опытно-конструкторские разработки в настоящее время — главный фактор ускорения экономического роста развитых промышленных стран. В связи с развитием многочисленных и разнообразных научных направлений в последние годы при обсуждении народнохозяйственных проблем все чаще говорят об *информатике* и автоматизации проектирования.

Информатика, новые информационные технологии появились в ответ на потребность в новых способах обработки информации.

К моменту появления (в 40-х годах) первых ЭВМ примерно треть всех занятых в хозяйстве США занималась переработкой информации. К 1985 г. данная категория составляла уже 45% всех занятых, к концу текущего века эта цифра может возрасти до 65%, если сохранятся действующие тенденции [2]. Ускоряется процесс накопления знаний: если в 50-х годах объем знаний удваивался за 10—15 лет, то теперь это время сократилось до 3—5 лет. Таким образом, отрасль обработки информации становится «узким местом» в общественном производстве, что

в значительной мере определяет темпы его развития. Положение усугубляется тем, что до последнего времени рост производительности труда в сфере материального производства заметно превышал ее рост в сфере обработки информации.

Информация стала «дефицитом», возросла ее стоимость. Поэтому интенсифицировалась торговля наукоемкими изделиями. (Наукоемкими принято называть изделия, в которых затраты на исследования и разработку достигают 6% и более от общей стоимости жизненного цикла. К ним относятся, например, проекты и образцы новой техники. В традиционных изделиях машиностроения эта доля равна примерно 2—3%).

Спрос на информационные ресурсы заставил разрабатывать индустриальные методы переработки информации. Действительно, в конце 70-х — начале 80-х годов в развитых капиталистических странах возникла новая отрасль хозяйства, занятая производством индустриальных систем переработки информации, включающих ЭВМ и современные интегрированные системы сбора, хранения, передачи и переработки информации. Именно эта новая отрасль определяет технический уровень хозяйства. В этих странах объем продажи средств электроники и связи теперь почти в 5 раз больше, а объем продажи ЭВМ — в 2,5 раза больше объема продажи металлообрабатывающего оборудования *).

Индустриальные системы переработки информации включают супер-ЭВМ и развитые на их основе сети ЭВМ. С их помощью создаются глобальные информационно-справочные системы и банки данных. Супер-ЭВМ используются для решения научных и прикладных задач наивысшей сложности. На основе ЭВМ среднего класса развиваются локальные вычислительные сети, которые, как правило, функционально ориентированы и используются в научных исследованиях, проектировании и конструировании, управлении производством. МикроЭВМ, управляющие промышленными роботами и гибкими производственными технологиями, работают в составе функционально ориентированных систем, управляющих производством. И наконец, это персональные ЭВМ, использующиеся и в управлении производством, и в научных исследованиях, и в домашнем хозяйстве.

В нашей стране работа по созданию новых информационных технологий началась с применения математических методов и ЭВМ для планирования и управления народным хозяйством. В государственные планы включались программы создания АСУ (автоматизированных систем управления) во всех звеньях народного хозяйства. Планировалась «стыковка» АСУ с АСУТП

* Подробнее см.: Громов Г. В. Национальные информационные ресурсы. М., Наука, 1985.

(автоматизированными системами управления технологическими процессами) «снизу» и с АСПР (автоматизированными системами плановых расчетов) «сверху».

Все автоматизированные системы должны были быть реализованы на единой сети вычислительных центров. К середине 70-х годов возникла идея создания САПР. В рамках САПР получила широкую популярность концепция АРМ (автоматизированных рабочих мест конструкторов, научных работников, плановиков и т. п.). Результатом реализации программ по созданию АСУ, САПР и др. явилось в первую очередь накопление значительного опыта разработки информационных систем управления технико-экономическими объектами. Вместе с тем первоначально поставленные глобальные цели этих программ не были достигнуты. Вот почему в последние годы возникло новое научное направление — информатика.

В чем же суть новых информационных технологий и каковы конкретные причины и предпосылки их возникновения? Основным источником системы сбора, передачи, преобразования, хранения и представления в удобном виде разнообразной информации являются ЭВМ. Эта информация предназначена, например, для справок, консультации и обучения лиц, принимающих решения в разных областях профессиональной деятельности и в быту.

Чтобы использовать ЭВМ, необходимо представить информацию в формализованном виде. Поэтому новые информационные технологии требуют всегда формализации представления данных. Значит, внедрение новых информационных технологий означает «продвижение» формализованных методов в новые области деятельности, где прежде они не применялись.

Какие же формализованные средства дали возможность использовать ЭВМ в новых, далеких от математики областях? Это прежде всего языки и системы программирования, системы управления базами данных, средства представления и обработки текстовой и графической информации, средства диалога человека с ЭВМ. Таким образом, успехи системного программирования явились одной из основ новой информационной технологии, «внешней» предпосылкой ее возникновения. Но была еще одна «внутренняя» причина — потребности развития науки, техники, проектного дела, производства, т. е. традиционных способов получения новой информации.

Наука с древнейших времен занимается сбором и переработкой информации. Так что научные методы познания — одна из самых старых информационных технологий. Более того, это самые совершенные из информационных технологий, так как научные методы — это методы качественного преобразования информации. Строгая научная теория выстраивает исходный «неорганизованный» поток информации в немногие причинно-следствен-

ные связи, которые позволяют дедуктивно выводить новую информацию о реальном мире. Однако традиционный научный метод является индивидуальным, медленным методом переработки информации, противоположностью индустриального метода. Эволюция же самой науки вызвала потребность в новой информационной технологии.

Научный метод познания всегда сочетал и сочетает *анализ* и *синтез*. Цель анализа — преодолеть видимую сложность явлений окружающего мира, «разложить» сложные явления и установить их причины. Античная наука содержала элементы анализа, посленьютоновская физика систематически использовала метод синтеза для предсказания течения и взаимодействия явлений реального мира. Именно анализ дал возможность сформулировать основные понятия и принципы, отражающие фундаментальные свойства движения материи. Кризисы, случавшиеся в физике, только способствовали углублению анализа, заставляли критически пересматривать основные ее принципы.

В физике сформировалась высокая культура использования математического моделирования для описания реального мира и методов математического анализа, исследования моделей и получения качественных и количественных свойств изучаемых явлений и процессов. Параллельно культура математического моделирования и анализа распространялась на другие естественные науки и проникала в инженерное дело.

Вычислительные машины впервые были применены в механике и физике. Быстродействие ЭВМ дало возможность решать задачи, требующие трудоемких вычислений, способствовало обогащению математического анализа новыми численными методами. Качественно расширился круг проблем, для решения которых можно было использовать математические методы.

Если в самом начале применения ЭВМ в научных исследованиях математические модели и методы использовались для изучения хотя и сложных, но изолированных природных процессов, то вскоре их стали внедрять при анализе сложных технических проектов, например проекта использования энергии атома.

Использование анализа при проектировании сложных систем привело к постановке задачи синтеза системы с заданными свойствами. Проектировщика уже не удовлетворяет анализ только одного варианта системы, он стремится сравнить различные альтернативы системы, чтобы выбрать из них лучшую, а это уже попытка решать задачу синтеза. При этом возникает ряд вопросов. Где взять описание множества возможных вариантов системы? Как сформулировать цели, ради которых создается система, и условия ее функционирования? Как среди всех возможных вариантов системы найти «наиболее соответст-

вующий поставленным целям»? Оказалось, что специалисты (инженер, конструктор, математик) каждый самостоятельно не могут решить эти проблемы. Необходимо совместно сформулировать задачу синтеза системы и дать ее строгую формальную постановку, иначе невозможно будет использовать математические модели и ЭВМ. Таким образом, для постановки и решения задачи синтеза сложной технической системы нужен системный подход, а следовательно, необходимы специалисты по системному анализу. Итак, задача синтеза сложной системы представляет собой новую и чрезвычайно сложную проблему. Для ее решения необходимо качественное преобразование информационных технологий. Есть только один путь создания таких технологий — это использование научных методов: математического моделирования, математического анализа, методов принятия решений и т. д. Технической основой, на которой могут быть реализованы новые информационные технологии, является ЭВМ. Из сказанного становится очевидной ключевая роль математической модели в новых информационных технологиях.

В сфере проектирования новые информационные технологии связывают с автоматизацией проектирования и конструирования, с разработкой систем автоматизированного проектирования и конструирования (САПР и АСК). Системы автоматизации проектирования могут стать эффективным средством при одном условии. Математическое обеспечение САПР надо сделать таким, чтобы оно правильно отражало сущность процесса проектирования. Стоимость создания математического обеспечения САПР многократно превышает стоимость технического обеспечения САПР сложных систем. Как правило, разработка математического обеспечения САПР — задача, которая может быть решена лишь объединенными усилиями многих организаций при условии межотраслевой кооперации.

Только при соответствующем математическом обеспечении САПР будут эффективны при решении кардинальных проблем проектирования, а не только служить инструментом, повышающим производительность труда конструктора. Между тем успехи использования ЭВМ при решении разнообразных задач информационного обслуживания приводят к мысли, что сами ЭВМ с их большой памятью и быстродействием, оснащенные комфортной периферией и соответствующим системным программным обеспечением, и представляют собой новую информационную технологию. В связи с этим в проектировании много говорится о преобразовании, представлении и обработке графической информации, об автоматизации выпуска чертежей. Конечно, современные системы электронной обработки данных являются основой, без которой не может быть реализована новая информационная технология. Однако качество решения сложных со-

временных задач проектирования лишь частично зависит от параметров ЭВМ.

Успехи применения ЭВМ пока в основном объясняются прямой эксплуатацией большого быстродействия и памяти современных вычислительных машин. Но быстродействие и память имеют пределы, в то время как сложность решаемых задач со временем только увеличивается. К числу таких задач относятся и синтез сложных технических систем. Попытки решать ее, эксплуатируя ЭВМ даже в режиме хорошо налаженного диалога «человек — ЭВМ», все реже приводят к успеху. Следовательно, без научного анализа проблемы проектирования сложных систем, без разработки общей теории проектирования сложных систем (специального раздела теории принятия решений и системного анализа) и ее приложений к конкретным предметным областям дальнейший прогресс в автоматизации проектирования невозможен.

Построить теорию проектирования можно лишь на основе изучения процесса проектирования конкретных систем, применения современных математических методов и дисциплин, использования математических моделей, системного подхода, т. е. с привлечением всего арсенала современной науки. Разработка такой теории и даст, по сути, ядро новой информационной технологии в проектировании.

Сделанные в предыдущих параграфах выводы об особенностях процесса проектирования и связи проектирования сложных систем с информатикой, созданием новых информационных технологий могут служить методологической основой решения проблем формализации процесса проектирования и построения его математической модели. При этом прежде всего выделяются вопросы постановки задачи проектирования, создания методов решения проектных задач и управления ходом разработки проекта системы.

Гл. 2 посвящена постановке задачи проектирования. Здесь авторы преследовали две цели. Во-первых, стремились показать, что постановка задачи проектирования сложной системы — проблема, требующая математического моделирования предметной области и привлечения современного аппарата теории принятия решений. Во-вторых, доказать невозможность решения задачи проектирования непосредственным использованием существующих стандартных методов оптимизации. По сути дела, здесь делается вывод о необходимости построения иерархической структуры процесса автоматизированного проектирования, в том или ином виде уже реализованной в практике работы современных КБ.

В гл. 3 и 4 предлагаются алгоритмы последовательного анализа вариантов решения задач проектирования динамических

систем. Особенностью этих методов является следующее. Реализация их происходит при фиксированном описании технической системы. Однако отсев альтернатив обеспечивается построением иерархической системы критериев (отношений), связанных с задачей внешнего проектирования.

Гл. 5 содержит модель процесса проектирования, основанную на различных по степени подробности (агрегирование) описаниях системы. Основное внимание уделено проблеме согласования моделей (задач) принятия решений в иерархических схемах проектирования. Вместе с результатами гл. 3 и 4 это позволяет организовать различные иерархические схемы проектирования в САПР. Реализация таких схем приводит к организации диалога конструктора с ЭВМ в САПР.

Гл. 6 иллюстрирует основные теоретические построения. Описан фрагмент САПР летательного аппарата, которая построена на сформулированных принципах. Разбор реальной САПР сложной технической системы выходит за рамки учебного пособия, поскольку потребовал бы глубокого проникновения в предметную область, в задачи технического, системного математического и организационного обеспечения САПР. Таким образом, здесь учтена основная направленность книги — математические модели и методы принятия проектных решений.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА И ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Настоящая глава является одной из основных в книге. В ней обсуждается постановка задачи проектирования технической системы и приводятся примеры такой постановки.

Основная цель главы состоит в том, чтобы выделить проблемы, которые возникают при постановке задач, и показать, что попытки решения «в лоб» задач проектирования для действительно сложных систем обречены на неудачу (в следующих главах мы убедимся, что в САПР процессы постановки задачи проектирования и ее решения неразрывно связаны между собой). Таким образом, для автоматизированного проектирования с полным основанием можно сказать, что постановка задачи наполовину уже дает ее решение.

Применение вычислительной техники и математических методов при проектировании сложных технических систем возможно только в том случае, если имеются их адекватные математические модели. Разработка математических моделей объектов проектирования — творческая задача, при решении которой необходимо использовать знания и опыт, накопленные современной математикой, механикой, физикой и другими науками. Важнейшее условие при этом — применение основных принципов математического моделирования [2, 9, 11] для разработки взаимно дополняющих и уточняющих друг друга математических моделей систем и процессов.

Возможность построения иерархии моделей имеет важнейшее значение в процессе автоматизированного проектирования и создания САПР. Каждому этапу проектирования можно сопоставить свою модель объекта и тем самым избежать необоснованного усложнения задачи. Например, при выборе парка машин на этапе внешнего проектирования машины можно описывать различными показателями: стоимости, производительности, трудоемкости изготовления и другими агрегированными параметрами. Эти показатели являются, в свою очередь, сложными функциями других параметров, более детально описывающих машины на этапах внутреннего проектирования, где уже ис-

пользуются подробные математические модели. Отсюда вытекает, что автоматизировать с помощью ЭВМ проектирование сложного технического объекта до стадии рабочего проектирования можно, лишь разработав адекватные и, как правило, сложные математические модели. При этом процесс автоматизированного проектирования имеет общие черты с вычислительным экспериментом [9].

В математической модели проектируемого объекта выделяют структурно-параметрическое описание собственно объекта и описание поведения объекта во времени и внешней среде. Последнее называют обычно *моделью функционирования*. Таким образом, математическая модель проектируемого объекта состоит из двух частей: структурно-параметрического описания объекта с помощью набора проектных параметров и модели его функционирования. Принятое выделение из единой математической модели объекта указанных частей достаточно условно. Однако оно полезно, так как в САПР каждую из частей модели разрабатывают, как правило, группы специалистов определенного профиля (см. § 4 и рис. 6).

§ 1. Структурно-параметрическое описание объекта проектирования

Под структурно-параметрическим описанием объекта проектирования будем понимать такое его описание, которое показывает, из каких подсистем, блоков, агрегатов, деталей состоит данный объект, как эти компоненты соединены и взаимодействуют между собой, каковы их весовые, габаритные характеристики и т. п. Структурно-параметрическое описание должно давать возможность генерировать множество альтернатив объекта, быть достаточно подробным, соответствующим этапу процесса проектирования, и доставлять информацию для моделей функционирования. Часто структурно-параметрическое описание не составляет труда (как правило, это типично для сравнительно простых объектов).

Пример 1.1. Рассмотрим двухзвенный манипулятор промышленного робота, работающий в цилиндрической системе координат, изображенный на рис. 4. Его кинематическая схема (структура) в данном случае жестко фиксирована. Параметрическое описание состоит в указании длины звена l и массы звеньев m_1, m_2 с моментами инерции $J_1 = \frac{m_1 l^2}{12}$, $J_2 = \theta m$ соответственно. Массами и инерционными характеристиками движущихся частей приводов для простоты пренебрегаем. Проектными параметрами в простейшем случае можно считать массы m_1, m_2 .

Для сложных объектов проектирования предложены различные методы структурно-параметрического описания ОП: систематического покрытия поля, отрицания и конструирования, морфологического ящика [5, 16, 17], комбинаторного файла [33] и др. Рассматриваемой в книге модели иерархической системы проектирования наиболее адекватно описание ОП, которое дается его структурно-параметрическим И/ИЛИ-графом.

Как известно [7, 49], И/ИЛИ-граф представляет собой граф, в котором множество вершин разбито на два класса: И-вершины (изображенные на рис. 5 в виде кругов) и ИЛИ-вершины (изображенные в виде квадратов). Каждая И-вершина содержательно интерпретируется как подсистема ОП определенного уровня иерархии. ИЛИ-вершины соответствуют альтернативным внутренним структурам подсистем. Так, на рис. 6 планер летательного аппарата можно рассматривать как «летающий фюзеляж» 1 или как «летающее крыло» 2. В свою очередь, «летающий фюзеляж» включает горизонтальное оперение, фюзеляж, шасси, вертикальное оперение. Аналогично, «летающее крыло» состоит из крыла, шасси и вертикального оперения.

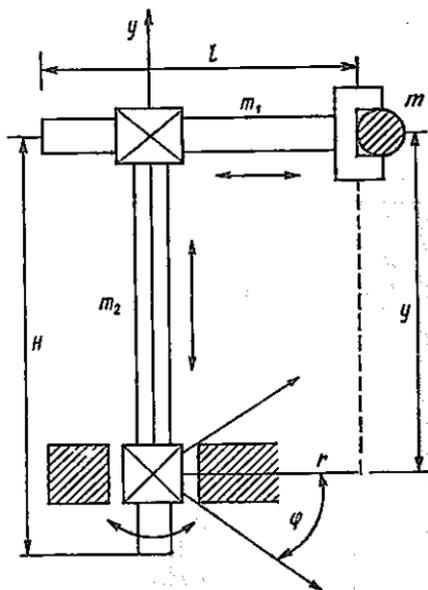


Рис. 4

Графы И/ИЛИ широко используют в исследованиях по «искусственному интеллекту» [7, 49]. Эти графы, в частности, описывают разбиение исходной проблемы, которую предстоит решить, на подзадачи. Переходы от ИЛИ-вершины к И-вершинам называют операцией «раскрытия» ИЛИ-вершины. В задачах проектирования ИЛИ-вершины графа соответствуют операторам декомпозиции подсистем ОП различных уровней иерархии, а выбор и «раскрытие» ИЛИ-вершины определяют проработку внутренней структуры ОП.

Итак, И/ИЛИ-деревья способны дать «язык» описания всевозможных допустимых структур ОП и его подсистем. Множество таких описаний упорядочивается выделением уровней структурного описания ОП, отвечающих глубине проработки структуры ОП и его подсистем на различных этапах проектирования. Например, этапу предварительного проектирования

авиационного комплекса (АК) отвечает двухуровневое поддерево с корневой И-вершиной (АК) и висячими И-вершинами: летательный аппарат (ЛА), бортовое оборудование (БО), полезная нагрузка (ПН). Этапу эскизного проектирования отвечает И/ИЛИ-поддерево, которое в качестве висячих И-вершин имеет следующие агрегаты: крыло, фюзеляж, оперение, шасси, воздухозаборник, двигатель, сопло, топливную и гидравлическую системы, систему электроснабжения, радио- и оптолокационные станции и др. [41]. Этапу рабочего проектирова-

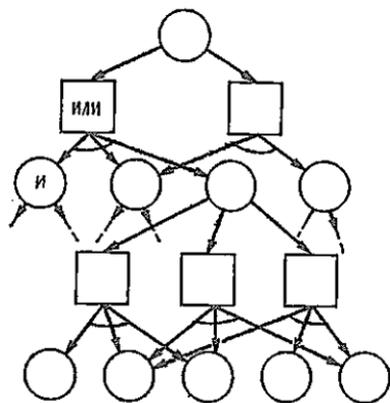


Рис. 5

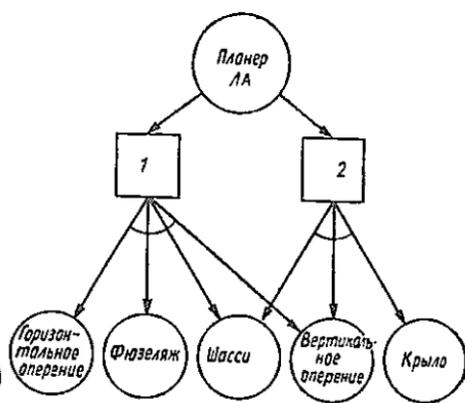


Рис. 6

ния отвечает все И/ИЛИ-дерево с висячими И-вершинами (детальными конструкциями).

Для проектирования задания только структуры ОП недостаточно. Дело в том, что параметры (характеристики) подсистем, составляющих ОП, могут отличаться. Например, подсистемы авиационного комплекса могут иметь различную массу, объем, стоимость и т. п. Следовательно, возникает необходимость в *параметрическом*, наряду со *структурным*, описании ОП. Обычно такое описание дается конечным набором (вектором) параметров. Варьируя значения параметров в определенных пределах с учетом необходимых ограничений, удается отразить возможность включения в структуру ОП различных по характеристикам подсистем. Более того, необходимо иметь *несколько уровней параметрического описания*, соответствующих фиксированному уровню структуризации ОП. Различным уровням параметрического описания соответствуют, как правило, векторы проектных параметров разной размерности. Например, описание ЛА на этапе предварительного проектирования может осуществляться 10—15 проектными параметрами на верхнем уров-

не и 80—100 параметрами на нижнем [32]. Пример одного из структурно-параметрических описаний ЛА приведен в гл. 6.

Для того чтобы показать, как «накладываются» друг на друга структурное и параметрическое описание ОП, структурируем вершины И/ИЛИ-графа (см. рис. 5). На рис. 7, а представлена И-вершина в виде «линейки» из И-подвершин. Переходы между И-подвершинами осуществляются на основе *дезагрегирования* (детализации) параметрического описания соответствующей подсистемы ОП. Наиболее *агрегированному* (обоб-

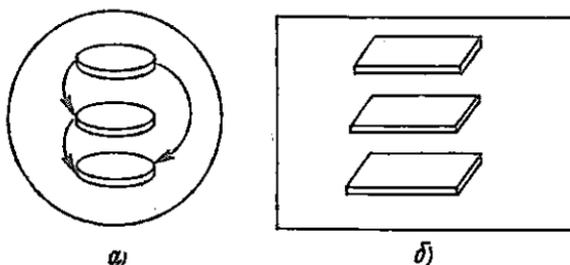


Рис. 7

щенному) описанию соответствует верхняя (рис. 7, а) И-подвершина, самому детальному описанию — нижняя И-подвершина. Чтобы конкретизировать общие рассуждения, можно обратиться к § 1 гл. 5 и далее вновь вернуться к настоящему параграфу. Как показано в § 1, каждому переходу-ребру на рис. 7, а сопоставляется функция *дезагрегирования*, задающая точно-множественное отображение векторов параметрических описаний разных уровней.

Похожую «линейную» структуру имеют ИЛИ-вершины (рис. 7, б). Каждой ИЛИ-вершине соответствует свое, как правило, точно-точечное отображение (§ 3 гл. 5). Задание этих отображений отвечает различным вариантам выделения подсистем из системы. На рис. 7, б это отражено так: ИЛИ-подвершины не связаны между собой в отличие от И-подвершин на рис. 7, а. Часто считают, что уровень параметрического описания всех И-подвершин один и тот же.

Если теперь построить все «линейки» И-, ИЛИ-вершин, то получим *структурно-параметрический И/ИЛИ-граф (дерево)* ОП, который содержит все возможные допустимые варианты структурно-параметрического описания ОП и его подсистем. Конкретный вариант такого описания дается И/ИЛИ-деревом и получается отождествлением каждой И-вершины с одной из ее подвершин (фиксация параметрического описания), выделения из каждой группы дочерних ИЛИ-вершин, имеющих общую И-вершину (родителя), одной ИЛИ-вершины и отождест-

вления последней с одной из ее подвершин (фиксация структурного описания).

Формализацию структурно-параметрического описания завершает его отождествление с вектором *проектных (конструктивных) параметров* $x \in E^N$; часть компонент вектора x описывает таким образом структуру ОП.

Структурно-параметрический И/ИЛИ-граф содержит *иерархию описаний* ОП $\{x_i \in E^{N_i}, i = \overline{0, k}\}$, порождаемую введенными выше уровнями структурного и параметрического описаний. Размерности N_i векторов проектных параметров x_i связаны, как правило, неравенствами: $N_0 > N_1 > \dots > N_k$; вектор x_k дает агрегированное описание ОП этапа предварительного проектирования, вектор x_0 отвечает детальному описанию ОП этапа рабочего проектирования. Переход с i -го уровня на $(i-1)$ -й, $i = \overline{=k, k-1, \dots, 1}$, осуществляется на основе проектно-конструкторской проработки проекта «в глубину».

Отметим следующее. Очевидно, не все значения x_i допустимы. Будучи формализованной, «допустимость» того или иного значения x_i определяется его принадлежностью к множеству (области поиска) $X_i \subset E^{N_i}$, выделяемому из E^{N_i} некоторым семейством ограничений. В практике проектирования множество X_i задается ограничениями двух типов в виде

$$X_i = \bar{X}_i \cap \tilde{X}_i.$$

Первую группу ограничений, выделяющих из E^{N_i} множество \bar{X}_i , которые не влияют непосредственно на качество функционирования ОП (см. § 2—5), и отражающих геометрические и функциональные связи между его структурными составляющими, опыт разработчика системы и т. п., относят, наряду с x_i , к структурно-параметрическому описанию ОП. Применительно к ЛА это, например, компоновочные ограничения [32].

Вторая группа ограничений, выделяющая из E^{N_i} множество \tilde{X}_i , непосредственно связана с качеством функционирования ОП и формализует требования ТЗ, поступающего от заказчика системы на стадии внешнего проектирования (см. § 1 и 2 гл. 1, § 2—5). Для ЛА это, например, ограничения на значения его основных летно-технических характеристик [39].

Отметим также два важных обстоятельства, сопутствующих формированию И/ИЛИ-графа ОП. Первое связано с построением «статической» части графа — его ядра, отражающего сложившиеся традиции и опыт проектирования систем аналогичного назначения, прошлые технические решения, достигнутый уровень техники и технологии, развитие фундаментальных и прикладных научных дисциплин, имеющих отношение к разработке ОП, и т. д. В этой связи ядро И/ИЛИ-графа можно рассмат-

ривать как «банк прототипов». Возможно, не все содержимое «банка» просматривалось в прошлом, не все альтернативы подвергались анализу и оценке, но в целом проектирование, не выходящее за рамки ядра структурно-параметрического И/ИЛИ-графа, не выходит за рамки известного метода «прототипов» [41].

Второе обстоятельство связано с формированием «динамической» части И/ИЛИ-графа, с его продолжением путем включения новых И-ИЛИ-вершин: описаний, появляющихся в ходе разработки ОП (а это занимает длительное время), новых образцов техники, расширения их функциональных возможностей, создания новых методов инженерного расчета на новых, более мощных ЭВМ и др. Продолжение графа в ходе разработки ОП объясняет одну из причин итерационно-циклического характера проектирования.

Отметим, наконец, что структурно-параметрическое описание ОП с использованием И/ИЛИ-графов отвечает решению важнейшей задачи — *декомпозиции проектирования*, включающей уровневую декомпозицию объекта проектирования и этапную декомпозицию процесса проектирования, объективная необходимость которой отмечалась в § 1, 2 гл. 1. Декомпозиция задач проектирования в значительной мере снижает остроту проблемы их практической реализации на современных ЭВМ, однако И/ИЛИ-граф сложного ОП имеет сложную структуру. Эффективная работа с ним требует создания специальных методов. Развитие традиционных методов оптимизации на графах потребует метризации пространства структурно-параметрических описаний [17]. Не менее важным представляется использование методов искусственного интеллекта [7, 49], связывающих правила раскрытия вершин И/ИЛИ-графа (проработка проекта) с экспертной информацией (знаниями и опытом конструктора).

§ 2. Модели функционирования объектов проектирования

В одной книге, а тем более в параграфе невозможно описать полный набор моделей функционирования, используемых при проектировании технических систем. Поэтому ограничимся рассмотрением только одного класса математических моделей, на котором будем иллюстрировать методы принятия проектных решений. Это модели функционирования управляемых динамических систем, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Выделение этого класса систем оправдано тем, что он содержит модели, адекватно отражающие функционирование современных изделий машиностроения, технологических процессов, экономических и биологических систем и др. [3, 4, 6, 8, 10, 29].

При построении математических моделей функционирования проектируемых объектов полезно следующее классическое понятие динамической системы [1].

Динамическая система S определяется заданием множеств и функций.

I. Множества: T — моментов времени t ; Z — состояний z ; \mathcal{W} — мгновенных значений входных воздействий ω ; Ω — допустимых входных воздействий $\omega: T \rightarrow \mathcal{W}$; Y — мгновенных значений выходных сообщений y ; Γ — допустимых выходных сообщений $\gamma: T \rightarrow Y$.

При этом:

1) T есть упорядоченное подмножество множества вещественных чисел;

2) Ω удовлетворяет следующим условиям:

1⁰ Нетривиальность. $\Omega \neq \emptyset$.

2⁰ Сочленение входных воздействий. Пусть $\omega(t', t'') \in \Omega$ — сужение $\omega \in \Omega$ на $(t', t'') \cap T$. Тогда если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $t_1 < t_2 < t_3$, то найдется такое $\omega'' \in \Omega$, что $\omega''_{(t_1, t_2)} = \omega_{(t_1, t_2)}$, $\omega''_{(t_2, t_3)} = \omega'_{(t_2, t_3)}$.

II. Переходная функция

$$\varphi(x; \cdot): T \times T \times Z \times \Omega \rightarrow Z,$$

значениями которой служат состояния $z(t) = \varphi(x; t, t_0, z_0, \omega) \in Z$, в которых оказывается система S в момент времени $t \in T$, если в начальный момент $t_0 \in T$ она была в начальном состоянии $z(t_0) = z_0 \in Z$ и если на нее действовало входное воздействие $\omega \in \Omega$. Здесь $x \in X$ — вектор проектных параметров системы S , определяющий ее переходную функцию.

Функция φ обладает следующими свойствами:

1⁰ Направление времени. Функция φ определена для всех $t \geq t_0$.

2⁰ Согласованность. $\varphi(x; t_0; t_0, z_0, \omega) = z_0$.

3⁰ Полугрупповое свойство. Для любых $t_1 < t_2 < t_3$, $z \in Z$, $\omega \in \Omega$,

$$\varphi(x; t_3; t_1, z, \omega) = \varphi(x; t_3; t_2, \varphi(x; t_2; t_1, z, \omega), \omega).$$

4⁰ Причинность. Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega_{(t_0, t]} = \omega'_{(t_0, t]}$, то $\varphi(x; t; t_0, z, \omega) = \varphi(x; t; t_0, z, \omega')$.

III. Выходное отображение $\eta(x; \cdot): T \times Z \rightarrow Y$, определяющее выходные величины $y(t) = \eta(x, t, z(t))$ и, как переходная функция, зависящее от значений проектных параметров x динамической системы S . Отображение $(t_0, t] \rightarrow Y$, которое задается соотношением $\tau \rightarrow \eta(x; \tau; \varphi(x; \tau; t_0, z_0, \omega))$, $\tau \in (t_0, t]$, называется отрезком выходной величины, т. е. сужением $Y_{(t_0, t]}$ некоторого $\gamma \in \Gamma$ на $(t_0, t]$.

Формально описанную динамическую (детерминированную) систему обозначают так:

$$S = (X, T, Z, \mathcal{W}, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta). \quad (2.1)$$

Пару отображений (φ, η) называют также оператором функционирования системы S . В определении (2.1) пока не говорится о происхождении входных воздействий ω . Далее, при постановке и решении задач проектирования будет удобно различать контролируемые (управления) и неконтролируемые входные воздействия, описывающие влияние внешней среды. Обозначим управления через u , а воздействие внешней среды через μ . Таким образом, в (2.1) множество допустимых входных воздействий Ω есть некоторое множество функций $\omega = (u, \mu)$, отображающих T в $\mathcal{W} \subseteq U \times M$.

Приведенное определение используют в основном для выработки общего подхода к моделированию, выделения единства в разнообразии приложений, уточнения используемой терминологии и классификации систем. Для того чтобы получить практически полезные выводы, на объекты, входящие в (2.1), накладывают дополнительные требования. Таким образом приходят к следующим системам: стационарным, с непрерывным и дискретным временем, конечномерным, конечным (автоматам), линейным, гладким и т. д. Например, сужение

класса общих динамических систем в результате ряда предположений, в том числе о непрерывной дифференцируемости переходной функции φ по t , где $t \in E^1$ — множество вещественных чисел, приводит к *гладким* динамическим системам [1]. Они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и, следовательно, могут быть исследованы с помощью достаточно разработанного аппарата теории дифференциальных уравнений и оптимального управления.

Рассмотрим примеры моделей функционирования динамических систем. Следуя классификации, принятой в [6], выделим прежде всего *модели без управления*:

$$\dot{z} = f(t, z, x), \quad (2.2)$$

где z — вектор *фазовых переменных* (состояний), t — время, x — набор проектных параметров. Множество значений x , соответствующее технически реализуемым объектам, описывается при разработке структурно-параметрической модели объекта проектирования.

Если задать начальное условие $z(t_0) = z_0$ и предположить, что функция f обладает определенными свойствами (см., например, [4, 29, 36]), то на $[t_0, \infty)$ существует единственное решение дифференциального уравнения (2.2): $z(x; t) = z(x; t; t_0, z_0)$. Далее, говоря о дифференциальных уравнениях, будем считать, что всегда выполнены стандартные условия существования, единственности и бесконечной продолжимости их решений.

Кроме связи (2.2) в моделях без управления обычно существуют *фазовые ограничения*

$$z \in Z(x), \quad (2.3)$$

выполнение которых следует обеспечить за счет выбора проектных параметров x для любого решения уравнения (2.2).

Пример 2.1. Колебания виброплощадки, предназначенной для производства железобетонных изделий, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений [43]:

$$m_1 \ddot{x}_1 + f(x) \dot{x} + \mu k_3 \dot{x}_1 + P(x) + k_3 x_1 = k_0 p (\sin vt + \mu \nu \cos vt), \quad (2.4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - f(x) \dot{x} + \mu k_2 \dot{x}_2 - P(x) + k_2 x_2 = -k_0 p (\sin vt + \mu \nu \cos vt),$$

где x_1 и x_2 смещения масс m_0 и m_2 ; $x = x_1 - x_2$;

$$P(x) = (k_1 + k_0)x + \sigma(x)k_6(x + e);$$

$$f(x) = \mu_1 [k_1 + k_0 + \sigma(x)k_6];$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq e, \\ 1 & \text{при } x < e. \end{cases}$$

Здесь k_0 — жесткость приводных упругих связей; k_1 — жесткость

линейных основных упругих связей; k_6 — жесткость буферов; k_2 — жесткость опорных амортизаторов под рамой; k_3 — жесткость опорных амортизаторов под рабочим органом; ρ — эксцентриситет привода; m_0 — масса рабочего органа; m_2 — масса уравновешивающей рамы; $e_{\text{нач}}$ — зазор в буферах без технологической нагрузки; ν — рабочая частота; m — масса полезной нагрузки, которая считается в рассматриваемом варианте заданной; k_m — коэффициент присоединения массы полезной нагрузки; $m_1 = m_0 + k_m m$ — приведенная масса рабочего органа; μ — коэффициент внутренних сопротивлений в резиновых упругих связях; k_μ — коэффициент приведения сопротивления; $\mu_1 = \mu + k_\mu m$ — приведенный коэффициент внутренних сопротивлений; e — зазор в буферах.

Чтобы привести систему (2.4) к виду (2.2), следует положить $z = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x)$ и дополнить систему (2.4) уравнениями

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_5 = z_1 - z_3.$$

Вектор проектных параметров

$$x = (k_0, k_1, k_6, k_2, k_3, \rho, m_0, m_2, e_{\text{нач}}, \nu). \quad (2.5)$$

Фазовые ограничения вида (2.3) связаны с нагрузкой на упругую подвеску и резиновые амортизаторы, а также обеспечивают реализацию рабочих режимов в дорезонансной области. Они задаются через проектные параметры и коэффициенты линеаризованной системы (2.4), т. е. в конечном счете формулируются с привлечением лишь проектных параметров и величин, указанных выше [43].

Описывая модель функционирования (2.4) и (2.5), мы предполагаем внешнюю нагрузку m заданной. В действительности полезная нагрузка изменяется в определенном диапазоне в зависимости от условий работы. Заранее предсказать ее нельзя. Поэтому более соответствующей реальности была бы модель (2.4) с неопределенным фактором — полезной нагрузкой. То же относится и к общей модели: в правую часть уравнения (2.2) следует включить воздействие внешней среды.

Таким образом, от модели (2.2), (2.3) приходим к следующей модели функционирования:

$$\dot{z} = f(t, z, x, \mu), \quad (2.6)$$

где к прежним переменным, ограничениям и требованиям добавилось воздействие μ : $T \rightarrow M$ на проектируемую систему со стороны внешней среды. Заметим, что μ может быть как функцией времени, так и постоянной величиной.

Пример 2.2. В качестве объекта, функционирование которого описывается уравнением (2.6), рассмотрим систему «регулятор Уатта — паровая машина» [2].

Фазовыми переменными являются: угловая скорость Ω вращения маховика паровой машины; угол φ , характеризующий положение грузиков регулятора, и его производная. К проектным параметрам системы относятся: масса m грузика регулятора; момент инерции J маховика относительно оси его вращения; передаточное число n , $\omega = n\Omega$, связывающее угловые скорости маховика паровой машины Ω и грузиков регулятора ω ; φ_0 — положение грузиков, соответствующее стандартному режиму Ω_0 работы машины; b' — коэффициент трения скольжения между валом и муфтой регулятора; l, λ — длины связей, задающих кинематику регулятора; A_0, k' — величины, определяющие механическую работу, которую совершит насыщенный расширяющий пар в тепловом цикле паровой машины.

К неконтролируемым (внешним) параметрам относится момент внешней нагрузки M_2 .

Сделаем ряд упрощающих предположений. Не будем принимать во внимание деформацию деталей, влияющую на силу трения и преобразование сил давления пара на поршень в крутящий момент на маховике; массу всех деталей по сравнению с массой маховика; связи между деталями будем считать идеальными; идеализируем также тепловой цикл паровой машины, считая процессы равновесными, и т. д. (подробно см. [2]).

Тогда уравнения движения паровой машины, регулируемой центробежным регулятором, принимают вид

$$\begin{cases} J\dot{\Omega} = M_1^0 + k(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - M_2, \\ m\ddot{\varphi} = mn^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - m\frac{g}{l} \sin \varphi - b\dot{\varphi} \sin^2 \varphi, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $M_1^0 = \frac{2}{\pi} A_0$, $k = \frac{2}{\pi} k'$, $b = 4b' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, g — ускорение свободного падения.

Для того чтобы записать уравнения (2.7) в виде (2.6), следует положить

$$z = (\Omega, \varphi, \dot{\varphi}), \quad x = (m, J, n, \varphi_0, \Omega, \omega_0, b', l, \lambda, A_0, k'); \quad \mu = M_2,$$

и ввести еще одно уравнение $\dot{z}_2 = z_3$. В уравнениях (2.7), приведенных к виду (2.6), не описано пока множество M возмущающих воздействий на систему.

Между величинами, входящими в x , имеются связи, так что число компонент вектора проектных параметров может быть уменьшено до числа независимых компонент. В задачах автоматизированного проектирования подобная минимизация размерности вектора проектных параметров часто оказывается существенной.

Приведенная модель по современным понятиям довольно простая. Однако ее составление потребовало привлечения фундаментальных законов механики и термодинамики.

Пример 2.3. Задача выбора параметров механических балансовых спусковых регуляторов является составной частью общей проблемы автоматизированного проектирования хронометрических приборов.

Основными проектными параметрами баланса, подлежащими определению, являются средний радиус x_1 , параметры сечения обода x_2 (ширина), x_3 (высота) и жесткость спирали x_4 . Неопределенным фактором считают амплитуду y колебаний баланса и положение механизма.

При горизонтальном положении механизма фазовая переменная z — добротность спускового регулятора (основная энергетическая характеристика, учитывающая потери энергии не только в балансовом осцилляторе, но и в системе обратной связи и системе привода), может быть записана в виде [47]:

$$z = F(x, y) = \frac{x_4 y^2}{\theta(x, y)}, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \theta(x, y) = & c_1 + c_2 x_1 x_2 x_3 y + [x_1^{-3/2} x_2^{-1/2} x_3^{-1/2} x_4^{-1/2} (c_3 + c_4 x_1^3 (x_2 + x_3) + \\ & + c_5 x_1^3) + c_6 x_4] y^2 + [c_7 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4 (x_2 + x_3) + c_8 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4 + \\ & + c_9 x_4^{1,4} (x_1^2 - c_{10})^{-0,6}] y^3. \end{aligned}$$

Обозначим через $y(x, \theta)$ единственный положительный корень кубического относительно y уравнения $\theta(x, y) = \theta$, $\theta > 0$. Тогда ограничения на неопределенный фактор y задаются в виде

$$y(x, \theta_1) \leq y \leq y(x, \theta_2), \quad (2.9)$$

а ограничения на проектные параметры x записываются следующим образом:

$$y_1 \leq y(x, \theta_1), \quad y(x, \theta_2) \leq y_2, \quad x'_i \leq x_i \leq x''_i, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (2.10)$$

при этом $\theta_1, \theta_2, y_1, y_2, x'_i, \dots, x''_i$ — константы.

Неравенства (2.10) определяют как параметры технически реализуемых балансов, так и ограничения, вытекающие из требований технического задания.

Очевидно, описанная модель функционирования получается из общей модели (2.6) при $\mu = y$. Между допустимыми значениями x и y имеется зависимость, определяемая ограничениями (2.9), (2.10).

Более интересный с точки зрения приложений класс составляют модели с управлением. Многие из них описываются обык-

новенным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(t, z, x, u, \mu), \quad (2.11)$$

где к прежним переменным добавилось *управляющее воздействие* u . Обычно на него накладывается ограничение

$$u \in U(z, x, \mu), \quad (2.12)$$

зависящее от значений фазовых переменных z , проектных параметров x из множества X и, возможно, от внешних воздействий μ , а также вводятся фазовые ограничения

$$z \in Z(x, \mu). \quad (2.13)$$

Модели вида (2.11)—(2.13) отражают функционирование управляемых динамических систем.

Пример 2.4. Уравнения движения манипулятора (см. рис. 4) имеют вид ^{*})

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(r, \dot{\varphi}) \\ b_2(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) \\ a_3 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где $a_1 = m + m_1$, $a_2(r) = (m + m_1)r^2 - m_1 l r + m_1 l^2 / 3 + 6m_2$, $a_3 = m + m_1 + m_2$, $b_1(r, \dot{\varphi}) = [m_1 l / 2 - (m + m_1)r] \dot{\varphi}^2$,
 $b_2(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = 2[(m + m_1)r - m_1 l / 2] \dot{r} \dot{\varphi}$.

Напомним (см. пример 1.1), что здесь, m_1, m_2 —массы звеньев манипулятора, l —длина верхнего звена, m —масса груза в схвате, $q = (r, \varphi, y)$ —цилиндрические (обобщенные) координаты.

Уравнения (2.14) представляют собой систему второго порядка относительно (r, φ, y) . Стандартным приемом (введением переменных $z_1 = z_4$, $z_2 = z_5$, $z_3 = z_6$, $z_4 = r$, $z_5 = \varphi$, $z_6 = y$) система (2.14) приводится к виду (2.11). Управлениями u_1, u_2, u_3 являются усилия в приводах, развиваемые, например, электромоторами.

На управления u и фазовые переменные z наложены ограничения типа (2.12), (2.13):

$$|u_i| \leq \hat{u}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

$$0 \leq r \leq l, \quad |\dot{r}| \leq \dot{r}_0, \quad |\dot{\varphi}| \leq \dot{\varphi}_0, \quad 0 \leq y \leq H. \quad (2.16)$$

^{*}) Бурдаков С. Ф., Дьяченко В. А., Тимофеев А. Н. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. М., Высшая школа, 1986.

Проектными параметрами, как мы условились в примере 1.1, считаем $x = (m_1, m_2)$ — массы звеньев манипулятора; неопределенным фактором является масса m груза в схвате, $0 \leq m \leq m^0$.

Отметим, что в достаточно общем случае^{*}), в том числе и в нашем примере, уравнения движения (уравнения Лагранжа второго рода) манипулятора записываются следующим образом:

$$A(q, x, \mu) \ddot{q} + b(q, \dot{q}, x, \mu) = u. \quad (2.17)$$

Здесь $A(\cdot)$, $b(\cdot)$ — соответственно положительно определенная матричная и векторная функции. Таким образом, модель функционирования манипулятора является частным случаем модели (2.11) — (2.13).

Пример 2.5. В [39] получены общие уравнения движения летательного аппарата (ЛА). Приведем упрощенные уравнения, описывающие движения центра масс ЛА. Они выводятся из общих уравнений при следующих предположениях. Не учитывается суточное вращение Земли и ее вращение вокруг Солнца, Земля считается плоской, а скорость ЛА небольшой по сравнению со скоростями космических объектов, полет ЛА происходит в плотных слоях атмосферы на небольших углах атаки α , так что можно принять $\cos \alpha \approx 1$. Кроме того, предполагается, что вектор тяги двигателя направлен по главной оси инерции, совпадающей с осью симметрии ЛА, угол скольжения ЛА в полете равен нулю.

Тогда уравнения движения центра масс ЛА принимают [39] вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \psi, & \dot{H} &= V \sin \theta, & \dot{z}_g &= -V \cos \theta \sin \psi, \\ \frac{G}{g} \dot{V} &= P - X - G \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\frac{G}{g} V \dot{\theta} \cos \psi = (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - G \cos \theta,$$

$$\frac{G}{g} V \dot{\psi} \cos \theta = -(P \sin \alpha + Y) \sin \gamma.$$

Поясним смысл переменных, входящих в (2.18). Первые три уравнения задают координаты центра масс ЛА в земной системе координат: H — высота полета; V — скорость; θ и ψ — соответственно угол наклона траектории ЛА и угол курса; γ —

^{*}) Динамика и управление роботами/Под ред. Е. И. Юревича М., Наука, 1984.

угол крена; α — угол атаки; G — вес ЛА; P — тяга двигателя; g — ускорение свободного падения; X, Y — аэродинамические силы, действующие на ЛА.

Фазовыми переменными в (2.18) являются $z = (x_g, H, z_g, V, \theta, \psi)$; $u = (\alpha, \gamma, \epsilon)$ — управления, где ϵ — коэффициент дросселирования двигателя, определяющий его тягу P , $0 \leq \epsilon \leq 1$, значение $\epsilon = 1$ соответствует максимальной тяге P_{\max} , а $\epsilon = 0$ — минимальной тяге P_{\min} . Таким образом, ЛА управляется углами атаки, крена и тягой двигателя. Воздействие внешней среды, в данном случае атмосферы, описывается некоторым набором параметров μ , от которых зависят аэродинамические силы X и Y .

На фазовые переменные и управления наложены ограничения вида (2.12), (2.13):

$$z \in Z = \left\{ z \mid H \geq 0, \frac{\rho(H) V^2}{2} \leq q_{\max}, \frac{V}{a(H)} \leq M_{\max} \right\}, \quad (2.19)$$

$$u \in U = \{ u \mid -\pi \leq \gamma \leq \pi, 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{доп}}, 0 \leq \epsilon \leq 1 \}. \quad (2.20)$$

Здесь $\rho(H)$ — плотность воздуха; $a(H)$ — скорость звука на высоте H ; $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор; q_{\max}, M_{\max} — максимальные допустимые скоростной напор и число Маха (отношение скорости полета к скорости звука); $\alpha_{\text{доп}}$ — предельно допустимый угол атаки, задающие ограничения по прочности конструкции ЛА, аэродинамическому нагреву, флаттеру, устойчивости. Ограничения на внешние воздействия (состояние атмосферы) сформулировать гораздо труднее. На практике часто задают некоторые гипотетические внешние воздействия, вид которых согласуется с экспериментальными данными.

К проектным параметрам x относятся [32] геометрические параметры крыла, фюзеляжа и оперения ЛА, площадь входа, степени сжатия и двухконтурности, допустимая температура газов перед турбиной двигателя, материал конструкции и др. Эти параметры определяют правые части уравнений (2.18), в том числе позволяют рассчитать аэродинамические силы в стандартной атмосфере. Описание множества значений вектора x , соответствующего технически реализуемым вариантам ЛА, представляет собой самостоятельную проблему, отдельные аспекты которой рассмотрены в гл. 6.

Итак, модель функционирования ЛА (2.18) — (2.20), описывающая движение ЛА как материальной точки постоянной массы, имеет вид (2.11) — (2.13). Отметим, что для практического использования модели необходимо уметь рассчитывать вес ЛА, а также аэродинамические силы и тягу двигателя при допустимых значениях высоты и скорости полета. Это, в свою очередь, требует привлечения довольно сложных моделей и методов, яв-

ляющихся, таким образом, составными частями модели функционирования ЛА.

Приведенная модель движения ЛА в рамках сделанных допущений допускает уточнения. Отметим некоторые из них.

Если из правой части первого уравнения (2.18) вычесть $X_{\text{ш}}$ — силу сопротивления, создаваемую тормозными щитками, то в модели появятся дополнительные возможности торможения ЛА. Обычно полагают $X_{\text{ш}} = qSc_{x\text{ш}}\delta$, где S — площадь крыла ЛА, $c_{x\text{ш}}$ — коэффициент сопротивления тормозных щитков, а $\delta \in [0, 1]$ — степень их выпуска, включаемая в число управляющих воздействий.

Далее, систему (2.18) можно дополнить еще одним уравнением

$$\dot{G} = -c_p P, \quad (2.21)$$

где c_p — удельный расход топлива двигателем. Это уравнение задает изменение веса ЛА в полете. Тогда получим модель функционирования ЛА как *материальной точки переменной массы*.

Модифицируя уравнения (2.18), можно учесть дополнительные возможности управления, связанные с изменением направления вектора тяги относительно ЛА. Детальный анализ динамических характеристик ЛА может потребовать увеличения степеней свободы, например перехода к уравнениям движения ЛА как абсолютно твердого или упругого тела и т. д. Линеаризация этих уравнений используется для оценки характеристик управляемости и устойчивости ЛА [39].

До сих пор мы говорили об усложнении уравнений (2.18) для более полного описания функционирования ЛА. Остановимся теперь на возможностях получения из (2.18) достаточно простых моделей, часто используемых на практике.

Представим аэродинамические силы в виде

$$X = qSc_x, \quad Y = qSc_y, \quad (2.22)$$

где c_x , c_y — соответственно коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы. Если угол атаки α достаточно мал, то между c_x и c_y существует зависимость, называемая *параболической полярной* [32, 41]:

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2. \quad (2.23)$$

Здесь c_{x0} , B — коэффициенты поляры, зависящие от числа Маха и высоты полета. Введем далее проекции *перегрузки*

$$n_x = \frac{P - X}{G}, \quad n_y = \frac{P \sin \alpha + Y}{G}. \quad (2.24)$$

и положим $P \sin \alpha \approx 0$. Тогда, в силу (2.23), получим отсюда связь

$$n_x = \frac{P}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} - \frac{BG/S}{q} n_y^2. \quad (2.25)$$

В самолетостроении величина P/G называется *тяговооруженностью*, а G/S — *удельной нагрузкой* на крыло.

Учитывая зависимости (2.22) — (2.25), перепишем теперь динамические уравнения системы (2.18) в виде

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_x - \sin \theta), \\ V\dot{\theta} = g(n_y \cos \gamma - \cos \theta), \\ V\dot{\psi} \cos \theta = -gn_y \sin \gamma. \end{cases} \quad (2.26)$$

Система уравнений (2.21), (2.26) представляет собой наиболее простой вариант модели функционирования ЛА из используемых в гл. 6. К ней следует добавить ограничение (2.19) и ограничение

$$u \in U = \{u \mid 0 \leq n_y \leq n_{y\max}, -\pi \leq \gamma \leq \pi, 0 \leq \epsilon \leq 1\} \quad (2.27)$$

и считать управляющими воздействиями $u = (n_y, \gamma, \epsilon)$. Ограничение по перегрузке в (2.27) отражает как управляемость, устойчивость и прочность конструкции ЛА, так и физиологические возможности летчика.

Таким образом, ЛА является хорошим примером сложной управляемой динамической системы, для которой существует иерархия моделей функционирования, которую можно использовать на различных стадиях проектирования. Эти модели появились в результате длительных исследований, проведенных специалистами различного профиля. Наличие хорошо отработанных моделей в значительной степени определило успехи в проектировании и разработке ЛА.

Среди моделей с управлением целесообразно выделить модели, пригодные для анализа *конфликтных ситуаций*. Их можно записать в следующем виде:

$$\dot{z} = f(t, z, u, v, x, y, \mu), \quad (2.28)$$

$$u \in U(z, x, y), \quad v \in V(z, x, y), \quad (2.29)$$

$$z \in Z(x, y), \quad (x, y) \in X^2. \quad (2.30)$$

В отличие от системы (2.11) в правой части (2.28) содержатся еще параметры v и y . Параметр v интерпретируется как управляющее воздействие на другую техническую систему с проектными параметрами y , а фазовая переменная отражает взаимодействие систем x и y . Это взаимодействие происходит во

внешней среде, влияние которой описывается параметром μ в правой части уравнения (2.28).

Приведенные примеры иллюстрируют общую модель (2.28)—(2.30). Однако их вряд ли можно признать вполне удовлетворительными, поскольку в этих примерах отсутствовали те или иные компоненты модели. Это, конечно, не означает, что модель (2.29)—(2.30) является чрезмерно общей.

Далее будет показано, что модель (2.28)—(2.30) естественно использовать для описания игровых ситуаций, в которых u и v выбирают «игроки», преследующие собственные цели. В игровую схему укладываются многие важные формы функционирования проектируемых динамических объектов. Например, модель (2.28)—(2.30) отражает взаимодействие двух ЛА в маневренном воздушном бою [29].

Существует связь между моделями функционирования динамических систем (2.2), (2.3), (2.6), (2.11)—(2.13) и (2.28)—(2.30) и общим определением (2.1) динамической системы. Фактически мы определяли лишь переходную функцию динамической системы, проектные параметры, состояния (фазовые переменные и мгновенные значения входных воздействий). Входные величины отождествлялись с состояниями, а множества входных воздействий (управлений) и неконтролируемых факторов не определялись. Выбор класса управлений тесно связан с характером конкретной решаемой задачи и с наличием той или иной информации о моделируемом процессе. Некоторые наиболее часто используемые классы управлений будут введены в § 5. Описание множества внешних воздействий также непростая проблема. С одной стороны, следует рассматривать все существенные воздействия; исключение даже некоторых из них может полностью «обесценить» результаты, вытекающие из модели функционирования. С другой стороны, нельзя слишком расширять данное множество за пределы реально существующих внешних воздействий, так как это приводит к неприемлемым (и не соответствующим действительности) оценкам функционирования системы.

Приведенных примеров достаточно для того, чтобы иллюстрировать далее постановки задач проектирования и методы принятия проектных решений. Но эти примеры далеко не исчерпывают математических моделей функционирования динамических систем. Так, даже оставаясь в рамках обыкновенных дифференциальных уравнений, бывает необходимо учесть влияние случайных параметров, поступление информации в процессе измерений, действия нескольких «игроков» при различных гипотезах об их информированности и коллективных действиях и т. п. Некоторые подходы к моделированию сложных систем в таких ситуациях изложены, например, в [3, 4, 6, 10, 30].

§ 3. Бинарные отношения

В дальнейшем при постановке и изучении задач проектирования сложных объектов используется аппарат теории выбора и принятия решений. В настоящем параграфе кратко излагаются необходимые определения и факты [5, 17, 40].

1. Основные определения. Бинарным отношением на множестве альтернатив X называется множество R упорядоченных пар $R \subseteq X \times X = X^2$. Если элементы (альтернативы) $x, y \in X$ находятся в отношении R , то наряду с записью $(x, y) \in R$ применяется запись xRy .

Бинарное отношение R на X называется *полным*, если любые два элемента из множества X связаны отношением R .

Дополнение \bar{R} бинарного отношения R определяется следующим образом: $x\bar{R}y$ означает, что $(x, y) \notin R$, т. е. неверно, что x находится в отношении R с y .

Бинарное отношение R на множестве X называется:

рефлексивным, если xRx для всех $x \in X$;

симметричным, если из xRy следует yRx для всех $x, y \in X$;

асимметричным, если из xRy следует $y\bar{R}x$ для всех $x, y \in X$;

антисимметричным, если для всех $x, y \in X$ из xRy, yRx следует, что $x=y$;

транзитивным, если для всех $x, y, z \in X$ из xRy, yRz следует xRz ;

эквивалентностью, если R транзитивно, рефлексивно и симметрично;

квазипорядком, если R транзитивно и рефлексивно;

порядком, если R транзитивно и антисимметрично.

Используется и *обратное* к R отношение $R^{-1}: xR^{-1}y$ тогда и только тогда, когда yRx . В случае, если одновременно xRy и yRx , альтернативы x и y называются *несравнимыми*.

Понятие бинарного отношения позволяет формализовать операции попарного сравнения альтернатив, широко используемые на практике. Существуют различные способы представления бинарных отношений. На конечном множестве альтернатив X бинарное отношение удобно задавать в виде матрицы (элемент a_{ij} матрицы равен 1, если x_iRx_j , и 0 в противном случае) или в виде графа (дуга графа направлена от вершины графа x_i к x_j тогда и только тогда, когда x_iRx_j). Используя представление отношения в виде графа, легко дать геометрическую интерпретацию приведенных свойств бинарных отношений.

Выше бинарное отношение было определено как подмножество множества пар $X \times X = X^2$. Поэтому для отношений R_1 и R_2 на X можно ввести *объединение* $R_1 \cup R_2$, *пересечение* $R_1 \cap R_2$ и т. д., используя обычные теоретико-множественные операции. Далее потребуются лишь понятия объединения, пересечения, дополнения \bar{R} и включения $R_1 \subseteq R_2$ бинарных отношений. Будет использовано также понятие транзитивного замыкания.

Транзитивным замыканием бинарного отношения R на множестве X называется пересечение R^t всех транзитивных отношений на X , содержащих R . Оно может быть определено и следующим эквивалентным образом: $xR^t y$ тогда и только тогда, когда существует цепочка $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$, для которой $xRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_mRy$.

2. **Функция выбора** [5]. Пусть множества альтернатив X принадлежат некоторому множеству A . Обозначим через $C(X)$ подмножество альтернатив, которые выделены лицом, принимающим решение (ЛПР), из X (случай $C(X) = \emptyset$ не исключается). Отображение, ставящее в соответствие (*допустимому*) *предъявлению* $X \subseteq A$ множество $C(X)$, называется *функцией выбора*, а $C(X)$ — *выбором* из X . Функции выбора появляются, когда нарушается *аксиома независимости от непрichастных альтернатив*, требующая, чтобы результат сравнения двух альтернатив зависел только от них и не зависел от наличия и отсутствия некоторой третьей альтернативы. С одной стороны, к процедурам, не удовлетворяющим аксиоме независимости, следует относиться довольно осторожно, так как порождаемые ими механизмы выбора обладают рядом нерегулярных свойств. Но следует отметить, что многие реально встречающиеся процедуры не удовлетворяют этой аксиоме, хотя и являются интуитивно приемлемыми [17]. Пусть, например, в качестве множества альтернатив выступает некоторая выпуклая плоская фигура и требуется найти такую ее точку, которая, будучи использована в качестве точки опоры, обеспечит горизонтальное положение фигуры. Такой точкой, т. е. наилучшей альтернативой, является центр тяжести, а все остальные точки упорядочены в зависимости от расстояния до центра тяжести. Однако такое правило выбора не удовлетворяет аксиоме независимости от непрichастных альтернатив, так как добавление к фигуре новых точек изменяет положение центра тяжести.

Обычно на функции выбора накладывают некоторые условия, описывающие зависимость $C(X)$ при разных X . Для примера приведем три из них.

Условие наследования:

$$\text{если } X' \subseteq X, \text{ то } C(X) \cap X' \subseteq C(X').$$

Смысл его состоит в следующем. Если рассмотреть выбор из произвольного множества и выбор из некоторого его подмножества, то все альтернативы, которые были выбраны из исходного множества и вошли в рассматриваемое подмножество, будут выбраны также из этого подмножества. Например, если техническая система, созданная в какой-то стране, признана лучшей на мировом уровне, то она должна быть лучшей и в данной стране.

Условие независимости от отвергнутых альтернатив (или условие отбрасывания):

$$\text{если } C(X) \subseteq X' \subseteq X, \text{ то } C(X') = C(X).$$

Интерпретировать его можно, например, так: если проведен конкурс, в котором проект x не включен в число лучших, то в конкурсе, в котором участвуют все те же проекты, что и в первом конкурсе, за исключением x , состав победителей останется прежним.

Условие согласованности:

$$C(X) \cap C(X') \subseteq C(X \cup X'),$$

т. е. альтернативы, которые выбраны из X и X' , будут также выбраны из объединения этих множеств.

Из определения функции выбора следует, что задание бинарного отношения соответствует заданию некоторой функции выбора, определенной на множестве пар элементов. С другой стороны, с бинарным отношением R можно связать функцию выбора

$$C^R(X) = \{x \in X \mid y \bar{R} x, \forall y \in X\}.$$

Функция выбора C^R называется *функцией выбора, порожденной отношением R* , или *нормальной*. Можно привести примеры, показывающие, что не всякая функция выбора является нормальной. Однако при конечном множестве альтернатив A функция выбора нормальна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям наследования и согласованности. Далее, любая функция

выбора представима в виде некоторой комбинации нормальных, т. е. допускает декомпозицию на нормальные функции выбора [5].

Таким образом, при выполнении двух «естественных» условий изучение функций выбора сводится к изучению соответствующих бинарных отношений. Следовательно, рассматривая проблемы принятия проектных решений, можно ограничиться лишь бинарными отношениями. При этом в принципе не будет утрачена общность результатов и в то же время охвачен достаточный для большинства приложений круг задач.

3. Модели выбора. Удобно рассматривать пару (X, R) , состоящую из множества X и бинарного отношения R на нем. Такую пару (частный случай алгебраической системы) назовем *моделью**) *выбора*.

Элемент $x \in X$ называется *наилучшим* в модели (X, R) , если он не менее предпочтителен, чем любой другой из X , т. е. если xRy справедливо для любого $y \in X$.

Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в модели (X, R) , если yRx влечет xRy . Множество всех максимальных в (X, R) элементов обозначим через $\text{Max}(X, R)$.

Подмножество $Y \subseteq X$ внешне устойчиво в (X, R) , если для любого $x \in X \setminus Y$ найдется $y \in Y$ такое, что yRx .

Если $\text{Max}(X, R)$ внешне устойчиво в (X, R) , то $\text{Max}(X, R)$ называется *ядром отношения R в X* .

Для краткости множество $\text{Max}(X, R)$ далее будем называть *ядром*, не требуя его внешней устойчивости в (X, R) .

Путь R — квазипорядок на X . Он порождает на множестве X *отношение эквивалентности*

$$I_R = \{(x, y) \in X^2 \mid xRy, yRx\}.$$

Классом эквивалентности, порожденным элементом x , называется множество

$$I_R(x) = \{y \in X \mid yI_Rx\}.$$

Легко видеть, что $I_R(x) = I_R(y)$ тогда и только тогда, когда xI_Ry . Таким образом, любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Итак, эквивалентность на множестве определяет естественное его разбиение на такие непересекающиеся непустые классы элементов, что два элемента исходного множества принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Множество классов эквивалентности по отношению I_R , на которое распадается $Y \subseteq X$, обозначим Y/I_R .

Пусть $Y, Z \subseteq X$. Символом $(Z \subseteq Y) \mid I_R$ будем обозначать *включение Z в Y с точностью до эквивалентности I_R* , что имеет место тогда и только тогда, когда $Z \cap K \neq \emptyset$ влечет $Y \cap K \neq \emptyset$ для каждого $K \in Z/I_R$. Это означает, что для каждого $z \in Z$ найдется $y \in Y$ такое, что yI_Rz .

*) Термин «модель» имеет различный смысл, ясный из контекста.

Если выполняются включения $(Z \subseteq Y) | I_R$ и $(Y \subseteq Z) | I_R$, то множества Z и Y равны (совпадают) с точностью до эквивалентности I_R , что обозначается символом $(Z = Y) | I_R$. Отметим, что при этом множества Z и Y могут и не содержать общих элементов, т. е. $Z \cap Y = \emptyset$.

Нами будут рассматриваться также отображения одних моделей в другие.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется гомоморфизмом модели (X, R) в модель (Y, Q) , если для всяких $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 R x_2$ следует $f(x_1) Q f(x_2)$.

§ 4. Общая постановка задачи проектирования

1. Постановка задачи. Постановка задачи проектирования осуществляется в несколько этапов (рис. 8). На первом этапе

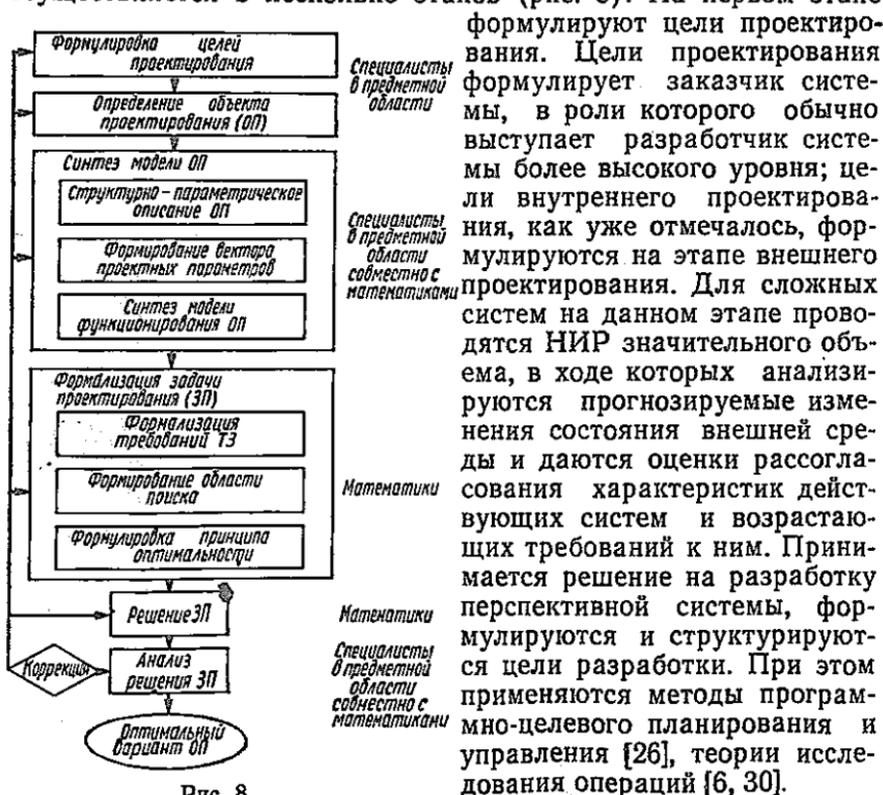


Рис. 8

формулируют цели проектирования. Цели проектирования формулирует заказчик системы, в роли которого обычно выступает разработчик системы более высокого уровня; цели внутреннего проектирования, как уже отмечалось, формулируются на этапе внешнего проектирования. Для сложных систем на данном этапе проводятся НИР значительного объема, в ходе которых анализируются прогнозируемые изменения состояния внешней среды и даются оценки рассогласования характеристик действующих систем и возрастающих требований к ним. Принимается решение на разработку перспективной системы, формулируются и структурируются цели разработки. При этом применяются методы программно-целевого планирования и управления [26], теории исследования операций [6, 30].

На следующем этапе определяется объект проектирования. Часто данный этап тривиален, так как не содержит альтернатив. Однако для сложных систем различной природы (физических, технических, экономических, биологических и др.) он мо-

жет оказаться непростым. Достаточно вспомнить многочисленные примеры проектирования заводов без учета качества сырья, на котором им предстоит работать, наличия рабочей силы, условий сбыта продукции и т. п. Обычно на этом этапе решаются два вида задач. Первая связана с формированием концепции проектируемой системы. Поясним ее суть на примере [20]. Пусть известно, что в сложной системе для решения поставленных задач должно иметься транспортное средство. На данном этапе в результате анализа делается заключение, что транспортным средством с нужными качествами может быть ЛА. Далее, среди всех возможных ЛА выделяются беспилотные или пилотируемые, определяется способ базирования, средства решения задач и т. п. Фактически здесь решается часть задачи формирования облика (см. гл. 1) с учетом как целей проектирования, так и возможностей других этапов (внутреннего) проектирования, возможностей производства, условий эксплуатации. Особенностью является то, что концепция формируется в условиях большой неопределенности опытными экспертами-специалистами предметной области. Математики здесь могут помочь, как правило, участвуя в моделировании систем более высокого, чем проектируемый объект, уровня и в математическом обеспечении проводимых экспертиз.

Создание математической модели объекта проектирования происходит на следующем этапе (рис. 8). Для ее формулировки нужно иметь математическое описание собственно технической системы в виде набора проектных параметров и ограничений, составляющее структурно-параметрическую модель объекта проектирования, и модель функционирования.

Решение задачи выделения проектных параметров и построения математической модели, описывающей структуру проектируемой системы и характеристики составляющих ее компонент, возможно только на основе детального анализа конкретного класса систем. Как правило, такой анализ проводится совместно инженерами-специалистами данной предметной области, имеющими практический опыт проектирования, и математиками-специалистами в области автоматизированного проектирования с применением ЭВМ, в свою очередь обладающими опытом математического моделирования, владеющими методами решения задач на ЭВМ. Только в результате такого взаимодействия может быть создана модель, отражающая опыт проектирования, достижения в области технологии, появление новых технических решений, которая будет пригодна для создания САПР. Для сложных технических систем поставленная задача является чрезвычайно трудной, требующей проведения больших исследований в предметной области. Некоторое представление о возникающих здесь проблемах дает гл. 6, в которой рассматривается принятие проектных решений на начальных этапах проектирования ЛА.

Удобный «язык» представления иерархии структурно-параметрических описаний объекта проектирования дают рассмотренные в § 1 И/ИЛИ-графы.

Следующей задачей является построение модели функционирования проектируемого объекта ^{*}), о которой говорилось в § 2. По своей сложности она не уступает первой. Однако положение несколько облегчается тем, что математическим моделям функционирования важнейших классов уделяется большое внимание в прикладных и фундаментальных исследованиях. Эти модели постоянно уточняются и совершенствуются. Математические модели функционирования в ряде практически важных случаев являются в значительной мере «инвариантными» по отношению к проектируемым объектам. Точнее, изменение структуры и параметров объекта в широких пределах приводит лишь к изменению коэффициентов и функциональных зависимостей математической модели. Переход к качественно иной математической модели требуется, только когда существенно изменяется в сторону детализации описание проектируемого объекта либо появляются принципиально новые технические возможности [2, 10].

Так, в примере 2.5 уравнения движения ЛА как материальной точки с точностью до значений коэффициентов и функций в правых частях дифференциальных уравнений остаются неизменными для ЛА, построенного по любой компоновочной схеме («нормальной» схеме и схемам «утка» или «бесхвостка») [32, 41]. Однако если имеются возможности для создания ЛА, обладающего большой тяговооруженностью, с отклоняемым вектором тяги, летающего на больших углах атаки, то следует перейти к другой, более точной модели функционирования. Это выразится как в изменении уравнений движения, так и моделей, по которым рассчитываются аэродинамические характеристики ЛА и характеристики силовой установки.

Из сказанного следует, что невозможно дать универсальный рецепт построения моделей объекта и его функционирования, невозможно создать и «универсальную» САПР. Можно лишь говорить об общих принципах, на которых должны базироваться САПР, и об относительной инвариантности математического и программного обеспечения объектно-ориентированных систем автоматизированного проектирования.

На следующих этапах постановки задачи проектирования появляется ее строгая математическая формулировка, ориентированная на использование ЭВМ. Эти этапы проводятся в основном математиками (рис. 8), однако участие специалистов предметной области полностью не исключается. Так, например, не все

^{*}) Иногда обе задачи объединяют в одну — задачу построения математической модели проектируемого объекта. Здесь же, как уже отмечалось, удобно их различать.

требования ТЗ удастся сразу формализовать. Это относится, например, к требованиям эстетичности внешнего вида системы, комфорта, удобства использования и т. п., которые определяются экспертным путем. В данной ситуации можно при формулировке задачи проектирования использовать результаты математической обработки экспертиз либо предусмотреть участие эксперта в отбраковке вариантов системы, генерируемых в ЭВМ на основе структурно-функциональной модели объекта. Сказанное относится и к формированию области поиска решения и принципа оптимальности. Особенно сложен последний этап. Дело в том, что, используя формальные конструкции, удастся добиться лишь приближения к тем принципам оптимальности, которыми оперирует заказчик (ЛПР) при оценке системы. Как правило, представления ЛПР об оптимальности намного богаче по содержанию, чем те, которые он сообщил в ТЗ и которые удалось выявить и формализовать математику. Следовательно, можно ожидать, что после постановки задачи проектирования на ЭВМ в процессе решения и анализа будет корректироваться ее постановка по меньшей мере за счет уточнения принципа оптимальности. Это соответствует современным представлениям о процессе математического моделирования [2, 9, 11]. Таким образом, схема, изображенная на рис. 8, описывает только одну итерацию постановки задачи проектирования. В процессе решения возможно как возникновение обратных связей на рис. 8, отражающих коренное изменение задачи проектирования, так и повторение этапов, которое связано с уточнением постановки и решения. Одной из задач математического моделирования процесса проектирования является описание процессов постановки и решения задач проектирования на основе иерархии математических моделей объекта.

Перейдем к строгой математической постановке задачи проектирования.

Пусть варианты технической системы (альтернативы) описываются набором (вектором) параметров $x \in E^N$ размерности N , принимающим значения из множества X . Параметры x будем называть *проектными* или *конструктивными* в том случае, когда они детально описывают техническую систему на стадии ее конструирования. Задание множества X отражает опыт проектирования систем аналогичного назначения, требования к системе, формируемые на этапе внешнего проектирования, физические законы функционирования и пр. Обычно X «вырезается» из множества всех технически реализуемых вариантов проектируемой системы некоторой совокупностью ограничений (равенств и неравенств), вытекающих из требований технического задания и структурно-параметрического описания системы.

Используя модели функционирования, можно анализировать поведение альтернатив проектируемого объекта во времени и внешней среде. Сравнение результатов функционирования для

всевозможных пар альтернатив из X определяет на множестве X бинарное отношение *сравнительной эффективности* *): альтернатива x эффективнее альтернативы y тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \Phi$ или (см. § 3) в инсй записи $x\Phi y$.

Под *задачей проектирования* понимается задача выделения ядра — множества максимальных элементов из X по бинарному отношению Φ :

$$X^* = \text{Max}(X, \Phi). \quad (4.1)$$

Предполагается, что решение задачи (4.1) существует, т. е. множество X^* непусто. Более того, в задачах проектирования, поставленных в «замкнутой» форме, естественно считать, что решение — множество X^* — состоит из одного элемента. В самом деле, процесс проектирования должен закончиться выбором из допустимого множества альтернатив X определенной единственной альтернативы, которая наилучшим образом соответствовала бы цели проектирования. Формально это означает, что бинарное отношение Φ , которым обладает проектировщик — *оперирующая сторона* [30], таково, что $|X^*| = 1$. Часто это связано с полнотой отношения Φ , т. е. с тем, что для любых $x, y \in X$ выполняется по крайней мере, одно из следующих соотношений: $x\Phi y, y\Phi x$.

Однако (см. гл. 3—6) для сложных систем практическая реализация постановки задачи проектирования в форме (4.1) с полным отношением Φ невозможна. Данное обстоятельство объективно связано со сложностью объекта проектирования и отражает характерную для сложных систем невозможность полной централизации всех процессов сбора и обработки информации и принятия решений. Необходима декомпозиция задачи проектирования, отражающая уровневую декомпозицию объекта проектирования и этапную декомпозицию процесса проектирования и приводящая к иерархической структуре системы проектирования. При этом решаемые на различных уровнях иерархии *частные задачи проектирования*, также формализуемые в виде (4.1) и содержательно связанные с выбором подсистем объекта проектирования, описанного с определенной степенью детализации, имеют *частичные* отношения Φ , неполнота которых отражает неполноту располагаемой информации при принятии проектно-конструкторских решений. Например, на этапе предварительного проектирования (см. § 1 гл. 1), где формируется облик системы, неполнота Φ связана с невозможностью достаточно точной оценки характеристик будущего объекта. На этапе эскизного проектирования это может быть связано с параллельной проработкой подсистемы (см. § 3 гл. 5) и т. д.

*) Под эффективностью понимается приспособленность системы к выполнению стоящих перед ней задач.

Учитывая все это, в дальнейшем при изучении задач проектирования будем основываться только на тех или иных постулируемых свойствах отношения Φ в (4.1), нигде явно не предполагая единственность решения, т. е. одноэлементности множества X^* .

Примеры постановок задач проектирования в форме (4.1) приведены в § 5. Остановимся на одном достаточно общем и в то же время простом способе задания бинарных отношений, используемом в системах принятия проектных решений.

Часто отношение Φ порождается параметрическим семейством (системой) критериев сравнительной эффективности

$$\varphi_A = \{\varphi^\alpha : X^2 \rightarrow E^1, \alpha \in A\}. \quad (4.2)$$

Общая схема такова. Пусть Δ_A — заданное множество функций

$$\delta(\cdot) : A \rightarrow E^1,$$

где A — множество значений параметра α в (4.2).

Положим, что $(x, y) \in \Phi$ тогда и только тогда, когда

$$\delta(\cdot) \in \Delta_A, \delta(\alpha) = \varphi^\alpha(x, y), \alpha \in A. \quad (4.3)$$

Пример 4.1. 1) Пусть $A = [1, m]$;

$$\varphi_A = \{\varphi^i : X^2 \rightarrow E^1, i = 1, \dots, m\}.$$

Положим

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi_A(x, y) \in \Delta\}, \quad (4.4)$$

где $\Delta \subset E^m$ — заданное подмножество E^m .

Бинарное отношение (4.4) образовано по общей схеме (4.2), (4.3). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно принять в (4.3) в качестве Δ_A множество всех функций $\delta(i) = \varphi^i(x, y)$, $i \in A$, график которых $\delta(A) = (\delta(1), \dots, \delta(m))$ лежит в множестве Δ . Заметим, что бинарное отношение (4.4) может оказаться нетранзитивным. Конкретная постановка задачи проектирования с бинарным отношением в данной форме рассматривается в гл. 4.

2) Как и в примере 1, $A = [1, m]$,

$$\varphi_A = \{\varphi^i : X^2 \rightarrow E^1, i = 1, \dots, m\},$$

где $\varphi^i(x, y) = W^i(x) - W^i(y)$; $W^i : X \rightarrow E^1$ — критерий эффективности, $i = 1, \dots, m$. Бинарное отношение задается в виде (4.4):

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi_A(x, y) \in \Delta\}.$$

Здесь Δ — конус из неотрицательного ортанта E_+^m пространства E^m . Как и в предыдущем случае, можно показать, что Φ образовано по общей схеме (4.2), (4.3).

В качестве Δ будем выбирать следующие конусы:

$$\Delta_1 = E_+^m, \Delta_2 = \{r \in E_+^m \mid r > 0\}, \Delta_3 = \{r \in E_+^m \mid r \neq 0\}.$$

В соответствии с определением *векторный критерий эффективности* $W(x) = (W^1(x), \dots, W^m(x))$ и конусы Δ_i , $i=1, 2, 3$, задают следующие бинарные отношения на X :

$$\begin{aligned} x \Phi_1 y &\leftrightarrow W^i(x) \geq W^i(y), \quad i=1, \dots, m, \\ x \Phi_2 y &\leftrightarrow W^i(x) > W^i(y), \quad i=1, \dots, m, \\ x \Phi_3 y &\leftrightarrow W^i(x) \geq W^i(y), \quad i=1, \dots, m; \quad W(x) \neq W(y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отношение Φ_2 называют отношением *строгого доминирования* или *отношением Слейтера*, а Φ_3 — *отношением Парето*.

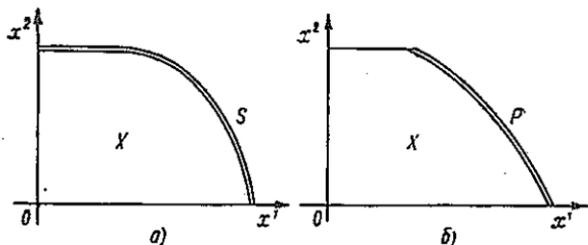


Рис. 9

Ядра этих отношений, т. е. множества максимальных в X элементов, обозначим соответственно $S(X, W)$ и $P(X, W)$. Для случая $m=2$, $W^1=x^1$, $W^2=x^2$ они изображены на рис. 9. Ядро P называют множеством *эффективных (оптимальных по Парето)*, а S — множеством *полуэффективных (слабоэффективных, оптимальных по Слейтеру)* точек.

Отношение Парето Φ_3 является «асимметричной частью» отношения Φ_1 . Поэтому

$$\text{Max}(X, \Phi_1) = \text{Max}(X, \Phi_1 | I_{\Phi_1}) = P(X, W).$$

В том случае, когда множество X — компакт (например, конечно), а $W(x)$ — непрерывная на X вектор-функция, множество Парето и множество полуэффективных точек внешне устойчивы [40].

Если $m=1$, т. е. бинарное отношение определяется единственным критерием эффективности $W(x)$, все ядра $\text{Max}(X, \Phi_i)$, $i=1, 2, 3$, совпадают с множеством

$$\text{Arg max}_{x \in X} W(x).$$

Примерами постановок задач проектирования в такой форме являются задачи оптимального проектирования ЛА, где в качестве критерия служит величина, обратная взлетному весу [41], специализированной ЭВМ, где критерием является производительность машины [19], и др.

3) Пусть $A = [1, m] \times Z$,

$$\varphi_A = \{\varphi_z : X^2 \rightarrow E^m, z \in Z\},$$

$$\varphi_z(x, y) = \psi(z, x) - \psi(z, y). \quad (4.6)$$

Определим бинарное отношение

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \psi(z, x) - \psi(z, y) \in \Delta, \forall z \in Z\}, \quad (4.7)$$

где Δ — один из конусов примера 2.

Данное бинарное отношение образовано по схеме (4.2), (4.3), где Δ_A — множество всех функций $\delta(i, z) = \varphi_z^i(x, y)$, $(i, z) \in A$, проекции $\delta(\cdot, z)$ графиков которых при каждом фиксированном $z \in Z$ принадлежат Δ .

В (4.6), (4.7) обычно Z — это допустимое множество векторов $z \in E^n$, связанных с моделью функционирования системы (переменные состояния, входа, выхода). Вектор $\psi : Z \times X \rightarrow E^m$ аналогичен критерию эффективности из примера 2 и называется *вектором технических характеристик* системы.

Примером постановки задачи проектирования с бинарным отношением в такой форме служит задача проектирования воздушно-реактивного двигателя ЛА, где техническими характеристиками служат тяговооруженность и величина, обратная удельному расходу топлива; параметром z является число Маха (скорость полета), высота полета и режим работы двигателя. Формальные методы получения технических характеристик в задачах проектирования управляемых динамических систем будут развиты в гл. 3 и применены в гл. 6.

Приведенные примеры не исчерпывают многообразия способов задания бинарных отношений. Например, на практике распространено введение бинарного отношения на основе информации, получаемой от экспертов в результате их опроса по специальным методикам с последующей ее обработкой [5, 6, 31]. Для простоты всюду можно считать бинарные отношения отношениями Парето на конечных множествах, наиболее употребительными в практических приложениях или даже отношениями полного порядка, заданными скалярным критерием эффективности.

Вернемся к задаче проектирования. Выделенные компоненты X и Φ задачи (4.1) взаимодействуют друг с другом. Имеется в виду, что изменение X , например в результате появления новых технических возможностей, побуждает ставить перед системой новые цели, т. е. изменять отношение Φ . Обратное, стремление решить иные задачи заставляет искать пути достижения целей. Обычно проводятся соответствующие НИР, используются новые физические принципы, материалы и технологии, что в конечном счете изменяет множество X , как правило, за счет расширения множества технически реализуемых альтернатив. Подобного рода

примеры можно найти в любой области техники, в том числе и самолетостроении.

Трудности описания множества X и бинарного отношения Φ в задаче проектирования, как задаче принятия решения, приводят к тому, что иногда приходится различать в составе *оперирующей стороны* [30] *лицо, формирующее решение* (ЛФР), и *лицо, принимающее решение* (ЛПР) [5, 31]. В САПР-человеко-машинной системе эти функции также выполняются различными подсистемами, соответственно генерирующими альтернативы проектируемого объекта и принимающими проектные решения.

2. Существование решения задачи проектирования. Выше предполагалось, что задача проектирования (4.1) имеет решение, т. е. $X^* \neq \emptyset$. Однако в ряде случаев данное предположение не выполняется и, следовательно, само понятие решения и постановка задачи нуждаются в уточнении и развитии.

Рассмотрим сначала условия, обеспечивающие непустоту множества $X_\Phi^* = \text{Max}(X, \Phi)$.*)

Функция $\chi_\Phi: X^2 \rightarrow E^1$, удовлетворяющую условиям

$$\chi_\Phi(x, y) = \begin{cases} > 0, & \text{если } x\Phi y \wedge y\bar{\Phi}x, \\ 0, & \text{если } x\Phi y \wedge y\Phi x \vee x\bar{\Phi}y \wedge y\bar{\Phi}x, \\ < 0, & \text{если } x\bar{\Phi}y \wedge y\bar{\Phi}x, \end{cases} \quad (4.8)$$

назовем *функцией, представляющей бинарное отношение Φ* .

Каждая представляющая отношение Φ функция, очевидно, имеет вид

$$\chi_\Phi(\cdot) = \alpha(\cdot) \cdot \chi_\Phi(\cdot),$$

где $\alpha(\cdot): X^2 \rightarrow (0, \infty)$, а

$$\alpha_\Phi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\Phi y \wedge y\bar{\Phi}x, \\ 0, & \text{если } x\Phi y \wedge y\Phi x \vee x\bar{\Phi}y \wedge y\bar{\Phi}x, \\ -1, & \text{если } x\bar{\Phi}y \wedge y\bar{\Phi}x. \end{cases} \quad (4.9)$$

Пусть

$$B[\chi_\Phi] = \{x_0 \in X \mid \chi_\Phi(x_0, x) \geq \chi_\Phi(x_0, x_0) \geq \geq \chi_\Phi(y, x_0), \forall x, y \in X\}$$

— множество точек $x_0 \in X$, пара (x_0, x_0) которых является *седловой точкой* функции $\chi_\Phi(\cdot)$ на множестве X^2 [30]. Из (4.8) следует, что как только пара $(x_0, y_0) \in X^2$ является седловой точкой

) Вместо X_Φ^ будем, как в (4.1), писать X^* , когда из контекста ясно, о каком бинарном отношении Φ идет речь.

функции $\chi_\Phi(\cdot)$, то $x_0, y_0 \in B[\chi_\Phi]$. Таким образом, множество всех седловых точек функции $\chi_\Phi(\cdot)$ на X^2 совпадает с $B^2[\chi_\Phi]$.

Теорема 4.1. Для любой функции $\chi_\Phi(\cdot)$, представляющей бинарное отношение Φ , имеет место равенство

$$B[\chi_\Phi] = X_\Phi^* \quad (4.10)$$

Следствие. Множество X_Φ^* не пусто тогда и только тогда, когда представляющая функция $\chi_\Phi(\cdot)$ имеет седловую точку.

Доказательство. Пусть $x_0 \in B[\chi_\Phi]$. Тогда из (4.8) и неравенства

$$\chi_\Phi(x_0, x) \geq \chi_\Phi(x_0, x_0) = 0, \quad \forall x \in X$$

следует либо $x_0 \Phi x \wedge x \bar{\Phi} x_0$, либо $x_0 \Phi x \wedge x \Phi x_0 \vee x_0 \bar{\Phi} x \wedge x \bar{\Phi} x_0$, что влечет включение $x_0 \in X_\Phi^* = \text{Max}(X, \Phi)$.

Итак, $B[\chi_\Phi] \subseteq X_\Phi^*$. Обратно, пусть $x_0 \in X_\Phi^*$. В силу (4.8) и максимальности x_0 , в модели (X, Φ) выполняются неравенства

$$\chi_\Phi(x_0, x) \geq 0 = \chi_\Phi(x_0, x_0), \quad \chi_\Phi(y, x_0) \leq 0 = \chi_\Phi(x_0, x_0)$$

для всех $x, y \in X$, откуда следует включение $x_0 \in B[\chi_\Phi]$ и $X_\Phi^* \subseteq B[\chi_\Phi]$. Равенство (4.10) таким образом доказано. \blacktriangle

Опираясь на известные результаты по представлению бинарных отношений векторными критериями [5] и теоремы существования седловых точек [30], в качестве следствий из теоремы 4.1 можно получить различные утверждения о существовании решения задачи (4.1). Ограничимся здесь следующими двумя фактами.

Теорема 4.2. Пусть

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi(x, y) \geq 0\},$$

где X — выпуклый компакт в E^N , $\varphi: X^2 \rightarrow E^1$ — кососимметричная (т. е. $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$), квазивогнутая и полунепрерывная сверху по x функция. Тогда $X_\Phi^* \neq \emptyset$.

Теорема 4.3 [40.] Пусть

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid W(x) - W(y) \geq 0, W(x) \neq W(y)\}$$

— отношение Парето по векторному критерию $W(\cdot): X^2 \rightarrow E^m$, где X — компакт в E^N , $W(\cdot)$ — полунепрерывная сверху по x функция. Тогда $X_\Phi^* \neq \emptyset$.

В ряде случаев, в частности, когда $X_\Phi^* = \emptyset$, представляет интерес задача проектирования парка технических систем. Пусть X — конечное множество альтернатив: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$. Введем множество

$$M = \left\{ \mu \in E^L \mid \mu \geq 0, \sum_{i=1}^L \mu^i = 1 \right\}$$

и на нем бинарное отношение

$$\Psi = \{(\mu, \nu) \in M^2 \mid \chi_{\Psi}(\mu, \nu) \geq 0\},$$

где

$$\chi_{\Psi}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu^i \chi_{\Phi}(x_i, x_j) \nu^j,$$

$\chi_{\Phi}(\cdot)$ — кососимметричная функция (4.8), представляющая бинарное отношение Φ .

Модель (M, Ψ) называется *смешанным расширением* модели (X, Φ) .

Множество M — выпуклый компакт в E^L , функция $\chi_{\Psi}(\cdot)$ представляет отношение Ψ , непрерывна, вогнута по μ и выпукла по ν .

Рассмотрим задачу отыскания ядра

$$M \rightarrow M_{\Psi}^* = \text{Max}(M, \Psi). \quad (4.11)$$

Теорема 4.4. Для любой модели (X, Φ) , $|X| < \infty$ ядро M_{Ψ}^* ее смешанного расширения (M, Ψ) не пусто, выпукло и компактно. Прямое произведение $M_{\Psi}^* \times M_{\Psi}^*$ совпадает с множеством седловых точек функции $\chi_{\Psi}(\cdot)$ на M^2 .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 и опирается на существование седловой точки непрерывной выпукло-вогнутой функции на произведении выпуклых компактов.

Задача (4.11) интерпретируется как задача формирования структуры парка систем, отождествляемой с вектором $\mu \in M$.

Пусть предполагается серийное производство проектируемой системы в достаточно большом количестве единиц Q . Это могут быть станки, например, выполняющие некоторые технологические операции, ЭВМ, летательные аппараты определенного назначения и т. п. Тройка (X, Q, μ) определяет парк систем, в котором i -я альтернатива представлена в количестве $\mu_i Q$ единиц. Конечно, здесь есть определенная идеализация, так как невозможно на практике создать слишком много вариантов систем, а реальным является лишь производство нескольких из них достаточно большими сериями. В связи с этим возникает задача «приближения» оптимальной структуры парка (4.11) структурами, отвечающими требованиям практики.

В соответствии с теоремой 4.4 оптимальная структура парка систем существенно зависит от используемой представляющей функции $\chi_{\Phi}(\cdot)$. Выбор последней должен отражать условия сравнения альтернатив по эффективности, т. е. строиться на основе моделирования операции целевого применения системы. Приведем пример.

Пример 4.2. Пусть имеются два парка систем со структурами μ и ν и случайный механизм генерации пар альтернатив (x, y) , осуществляющий независимый и равновероятный выбор x из парка со структурой μ и y из парка со структурой ν . Альтернативы x и y сравниваются по бинарному отношению эффективности Φ . В качестве функции, представляющей Φ , возьмем функцию $\chi_{\Phi}(\cdot)$ из (4.9). Положим:

$$I = \{(i, j) \in [\overline{1, L}] \times [\overline{1, L}] \mid x_i \Phi x_j\},$$

$$J = \{(i, j) \in [\overline{1, L}] \times [\overline{1, L}] \mid x_j \Phi x_i\},$$

$$P(\mu > \nu) = \sum_{(i, j) \in I} \mu^i \nu^j,$$

$$P(\nu > \mu) = \sum_{(i, j) \in J} \mu^i \nu^j.$$

Нетрудно видеть, что $P(\mu > \nu)$ ($P(\nu > \mu)$) — вероятность события: альтернатива парка μ (ν) эффективнее альтернативы парка ν (μ), и $\mu \Psi \nu \leftrightarrow P(\mu > \nu) \geq P(\nu > \mu)$.

Для парка с оптимальной структурой $\mu^* \in M$ в этом случае не найдется другого парка $\mu \in M$ такого, что $P(\mu > \mu^*) > P(\mu^* > \mu)$, т. е. μ^* — наилучший «в среднем» парк.

Отметим, что смешанное расширение (M, Ψ) модели (X, Φ) соответствует смешанному расширению (M, M, χ_{Φ}) матричной игры, описываемой тройкой $\langle X, X, \chi_{\Phi} \rangle$, где множество допустимых альтернатив X является множеством чистых стратегий каждого из игроков, а $\chi_{\Phi}(\cdot)$ — функция выигрыша. Теорема 4.4 представляет по сути известный результат теории матричных игр о существовании цены игры в смешанных стратегиях [30]. Указанное соответствие дает возможность использовать аппарат теории матричных игр для изучения задач проектирования, в частности для исследования состава оптимального парка систем, построения методов отыскания максимальных альтернатив и т. д.

Следует отметить, что более широко рассматриваемая задача проектирования парка систем с учетом таких факторов, как многообразие их использования, возможность группового («в смежах») применения и др., приведет, вообще говоря, к отличной от Ψ трансформации отношения Φ .

3. О других постановках задачи проектирования. Ядро не является единственно возможным решением задачи проектирования. В зависимости от свойств модели (X, Φ) приемлемыми могут оказаться и другие понятия решения: множество всех мажорант модели (X, Φ) [5], ядро смешанного расширения (M, Ψ) модели (X, Φ) , ядро модели (X, Φ^t) , где Φ^t — транзитивное замыкание отношения Φ и др. Не является всеобъемлющим и язык бинарных отношений. По-видимому, наиболее общей постановкой

задачи проектирования является следующая:

$$X \rightarrow X^* = C(X), \quad (4.12)$$

где $C(\cdot)$ — некоторая функция выбора (см. § 3). Всякая функция выбора представима в виде композиции нормальных функций выбора, определяемых бинарными отношениями, поэтому излагаемые далее результаты и конструкции можно перенести на задачу (4.12). Впрочем, как показывает практика автоматизированного проектирования сложных технических объектов, язык бинарных отношений и постановка (4.1) применимы для широкого круга задач проектирования.

§ 5. Примеры постановок задач проектирования

Итак, в § 4 было показано, что для формулировки задачи проектирования нужно иметь математическую модель, состоящую из структурно-параметрической модели объекта и модели функционирования, и формулировку целей проектирования (см. рис. 8). Построение математической модели проектируемого объекта требует глубокого понимания предметной области. Поэтому, чтобы привести примеры задач проектирования, понимание которых не требует специальных знаний, используем модели функционирования динамических систем из § 2. Опираясь на них, нам фактически осталось привести примеры формализации целей проектирования.

Цель проектирования в общей постановке задачи (4.1) выражалась в максимизации по бинарному отношению предпочтения Φ , заданному на множестве альтернатив X проектируемого объекта. Наиболее простым является случай, когда бинарное отношение Φ представляет собой полный порядок (см. § 3), определяемый на множестве X скалярной функцией $W(x)$ — критерием эффективности. Тогда задача (4.1) состоит в отыскании

$$\text{Arg extr}_{x \in X} W(x), \quad (5.1)$$

где extr есть \min или \max в зависимости от цели проектирования.

В качестве $W(\cdot)$ при проектировании технических систем часто выбирают такие показатели, влияющие на эффективность, как вес или стоимость. Если задача (5.1) может быть решена в исходной постановке на ЭВМ с помощью известных методов оптимизации, то процесс автоматизированного проектирования на этом заканчивается. Создание системы оптимального проектирования заключается в формулировке целевого функционала $W(\cdot)$, разработке математических моделей и методов и соответствующего математического обеспечения для постановки, решения и, если потребуется, коррекции задачи на ЭВМ. В настоящее время подобные системы оптимального проектирования функциониру-

ют в самых разных предметных областях (см., например, [12, 15, 16, 18, 19, 23, 25, 32, 35, 37, 48]).

Часто задача (5.1) появляется в результате «свертки» векторного критерия в скалярный либо упорядочения частных критериев по важности — выделения главного критерия.

Пример 5.1. В задаче проектирования виброплощадки (пример 2.1) качество оценивалось по шести критериям: массе машины, асимметрии закона колебаний рабочего органа, динамическим усилиям в приводе, динамической нагрузке на фундамент и двум характеристикам стабильности ускорения [43]. В одном из рассматриваемых вариантов задачи проектирования было предложено считать наиболее важным критерием массу машины $W(x) = x_7 + x_8$, остальные критерии переводились в ограничения, которые варьировались. Кроме того, накладывались ограничения, обеспечивающие соответствие закона колебаний рабочего органа требованиям технического задания (ТЗ) и ограничения на величину возмущающей силы. Вместе с другими условиями из примера 2.1 они описывают в (5.1) множество X технически реализуемых альтернатив, удовлетворяющих требованиям ТЗ. Задача проектирования виброплощадки на основе модели функционирования (2.4) решалась в диалоговом режиме с применением специально разработанного метода оптимизации.

Задача (5.1) часто ставится при проектировании отдельных подсистем или агрегатов более сложной системы, причем не всегда отслеживается влияние этого агрегата на функционирование системы в целом. Подобный произвол в выборе критерия при решении задачи (5.1) может привести к тому, что, «оптимизируя» части системы, мы спроектируем далеко не лучшее целое. По аналогии с программированием такой подход можно назвать проектированием «снизу — вверх». Итак, решая частные задачи проектирования подсистем, все равно нужно иметь модель функционирования системы, т. е. простота задачи в данном случае оказывается обманчивой.

Пример 5.2. В задаче проектирования спускового балансового регулятора (пример 2.3) в качестве критерия была принята его добротность (2.8), которую желательно повышать. По неопределенному параметру y (амплитуде баланса) была проведена «свертка» на основе принципа гарантированного результата. В итоге задача (5.1) формулировалась как задача отыскания

$$\operatorname{arg} \max_{x, y} [\min F(x, y)] \quad (5.2)$$

при ограничениях (2.10) на x и (2.9) на y . Для решения максимальной задачи (5.2) со связанными переменными был применен алгоритм из [47].

Приведем данные расчетов для одного из вариантов задачи, соответствующему определенному набору констант, задающих ог-

раничения (2.9), (2.10) и целевую функцию (2.8). Добротность спускового регулятора в реально существующем механизме, отвечающем рассматриваемому набору констант при изменении амплитуды баланса в заданных пределах, менялась от 41, 99 до 44, 26, т. е. минимальное значение было равно 41, 99 (напомним, что добротность колебательной системы — это безразмерная величина, показывающая отношение запасенной энергии системы и энергии, рассеянной при автоколебаниях). В результате расчетов был найден набор параметров, для которого минимальное значение добротности оказалось равным 61, 57. Таким образом, относительное улучшение составило 46,6%. Отметим ограниченный характер полученного результата, поскольку добротность — не единственный критерий при проектировании балансового спускового регулятора, являющегося одной из подсистем хронометрического прибора. Поэтому были решены и другие варианты задачи, учитывающие, в частности, различные положения механизма. Окончательный анализ решений и выбор лучшего из них были предоставлены конструкторам. Таким образом, здесь решение оптимизационной задачи (5.1) не исчерпывало проблемы проектирования. Проектное решение принималось конструкторами на основе собственного отношения предпочтения.

Итак, можно сказать, что реальные задачи проектирования многокритериальны по своей сути. Задача оптимизации (5.1) носит вспомогательный характер и появляется, как правило, в процессе решения многокритериальной задачи проектирования в диалоговом режиме. Так, даже в относительно простых примерах 5.1 и 5.2 окончательный выбор происходил по некоторому отношению сравнительной эффективности, носителем которого являлся конструктор (ЛПР). Таким образом, уже эти примеры иллюстрируют общую постановку задачи проектирования (4.1).

Рассмотрим теперь некоторые особенности постановки задач проектирования для динамических систем. Начнем с систем, функционирование которых описывается моделями без управления. В § 2 отмечалось, что модель (2.2) не вполне адекватна реальности, поскольку не включает воздействие внешней среды. Поэтому, говоря о моделях без управления, будем рассматривать модель (2.6). Постановку задачи проектирования, связанной с моделью функционирования (2.6), продемонстрируем на примере регулятора Уатта.

Пример 5.3. Рассмотрим функционирование регулятора Уатта в условиях, которые заранее нельзя предполагать известными. Так, например, момент внешней нагрузки M_2 в уравнениях (2.7) определяется условиями работы паровой машины и не может быть предсказан. Начальная цель проектирования регулятора Уатта формулируется качественным образом: система соответствует предъявляемым требованиям, если, будучи выведена из стандартного режима (Ω_0, φ_0), а затем предоставленная сама себе, са-

мостоятельно возвращается в состояние (Ω_0, φ_0) . Математически это условие формулируется как свойство асимптотической устойчивости системы (2.7) в окрестности стационарного состояния (Ω_0, φ_0) . Требование асимптотической устойчивости представляет собой требование ТЗ к регулятору. Одновременно оно накладывает ограничение на импульсное внешнее воздействие. Таким образом, здесь, как и в примере 2.4, описать ограничения на внешние входные воздействия в явном виде непросто. Все варианты регулятора, которые удовлетворяют ТЗ, пока считаются равноценными. Технически реализуемыми считаем регуляторы с положительными значениями конструктивных параметров.

Используя математический аппарат теории устойчивости, можно показать, что требованием ТЗ удовлетворяют регуляторы, для которых [2]

$$\frac{b}{m} J \eta > \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}. \quad (5.3)$$

Здесь использованы обозначения из примера 2.2, а $\eta = \frac{d\Omega_0}{dM_2^0}$ ха-

рактеризует зависимость угловой скорости вращения вала машины в стационарном режиме Ω_0 от величины стандартной внешней нагрузки на машину M_2^0 (степень неравномерности хода машины). Очевидно, $\eta = \eta(x)$ — функция конструктивных параметров регулятора и паровой машины.

Неравенство (5.3) «вырезает» в пространстве конструктивных параметров $\{x\}$ множество X альтернатив регулятора, удовлетворяющих ТЗ, и дает рецепты по их конструированию.

Неравенство (5.3) не определяет однозначно набор проектных параметров x регулятора, поэтому можно уточнить выбор x , улучшая другие динамические характеристики системы, например, увеличивая скорость сходимости $(\Omega(t), \varphi(t))$ к (Ω_0, φ_0) при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, на множестве X ЛПР определяет, анализируя и сопоставляя характеристики переходного процесса, некоторое довольно сложное отношение предпочтения. Именно это отношение участвует в реальной постановке задачи проектирования регулятора и определяет ее окончательное решение. Приведенные рассуждения подтверждают утверждение о том, что постановка и решение задачи проектирования взаимосвязаны. В данном случае это выражалось в уточнении бинарного отношения сравнительной эффективности по ходу решения задачи. Далее в гл. 5 будет показано, что в процессе решения задачи может выявляться и множество технически реализуемых вариантов проектируемого объекта, удовлетворяющих требованиям ТЗ.

Ситуация, описанная в примере 5.3, типична для задач проектирования систем автоматического управления (САУ), функционирование которых описывается моделью (2.6). Однако воз-

никает вопрос, насколько предпочтение ЛПР отражает способность решать задачи целевого применения объекта, для которого проектируется САУ. Ответ на него можно получить, если в соответствии с требованиями системного подхода проанализировать функционирование объекта вместе с САУ. Когда такой возможности нет, приходится при решении задачи проектирования САУ полагаться на накопленный опыт и интуицию проектировщика, что не исключает ошибок и, следовательно, пересмотра проекта.

Рассмотрим возможные постановки задачи проектирования для объектов с управлением. Начнем с объектов, модель функционирования которых имеет вид (2.11)—(2.13). Для них естественна постановка задачи проектирования с бинарным отношением предпочтения, определяемым из решения задач оптимального управления [6, 8, 36].

В § 5 задавались лишь мгновенные значения управляющих воздействий и ничего не говорилось о классах управлений, являющихся аналогом стратегии в теории исследования операций [3, 4, 30], или допустимых входных воздействий в определении (2.1) динамической системы. Формирование управления зависит прежде всего от имеющейся информации о фазовой переменной z . Ограничимся рассмотрением двух случаев.

Первый случай. Отсутствует или не может быть использована информация о фазовой переменной, и управление выбирается как функция времени $u = u(t)$ — *программное управление*. С практической точки зрения естественно использовать кусочно-непрерывные функции $u(t)$. При этом если правая часть f дифференциального уравнения (2.11) обладает определенными свойствами (см. например, [4, 8]), то для любого управления $u(t)$, заданного на $[t_0, \infty)$, существует единственное бесконечно продолжимое решение, выходящее из любой точки $z_0 = z(t_0)$.

Второй случай. Управляющее воздействие формулируется как функция $u = u(t, z)$ по принципу *обратной связи* на основе информации о времени t и фазовой переменной z . Такое управление называют синтезирующим [8] или *позиционной стратегией*, если речь идет о конфликтной ситуации [4]. Отметим, что в примерах 2.2, 5.3 регулятор Уатта осуществлял управление паровой машиной также в режиме обратной связи. Однако вид закона обратной связи (закона регулирования) был жестко фиксирован конструкцией регулятора, конкретное управление определялось заданием проектных параметров — массы грузиков, передаточного числа, коэффициента трения и т. п.

При использовании синтезирующих управлений возникают трудности при определении понятия решения дифференциального уравнения. Они связаны с тем, что в случае разрывного характера управления $u(t, z)$ по переменной z «не работают» стандартные теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений. Выход из положения состоит в обобще-

нии классического понятия решения. Одно из обобщений связано с конструктивными движениями *) [4]. Отметим содержательный смысл этого нового понятия; в дальнейшем при разборе примеров можно не прибегать к формальным конструкциям из [4, 10], а ограничиться интуитивным уровнем понимания и строгости. Идеальные конструктивные движения получаются предельным переходом от ломаных Эйлера, следовательно, обращаясь к ломаным Эйлера, мы совершаем переход от абстрактных определений стратегии и движения к реализуемым на практике процедурам управления.

Проблемы, имеющие место при постановке задач проектирования, аналогичны проблемам, которые возникают при составлении модели операции [30]: требуется определить цель операции, множество стратегий и описать обстановку проведения операции. Понятие стратегии постоянно совершенствуется в связи с возникновением новых способов получения, переработки информации и использования ресурсов. Поэтому невозможно дать раз и навсегда определенные стратегии, нельзя построить и общую модель функционирования управляемого динамического объекта, а также поставить для него общую задачу проектирования. В частности, определение (2.1) динамической системы, которое казалось в § 2 довольно общим, не охватывает возможности применения синтезирующих управлений, порождающих конструктивные движения (нарушается, например, требование единственности решения — однозначности переходной функции динамической системы). Отсюда следует, что умение ставить задачи проектирования, как и умение моделировать, приходит с опытом, с решением конкретных задач на основе общих принципов.

Пусть $z(t) = z(x; t_0, z_0, u(\cdot))$ — решение дифференциального уравнения (2.16), соответствующее $u(\cdot)$ **, с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Определим функционал

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, z, u, x) dt, \quad (5.4)$$

где момент времени t , задается, например, из условия попадания в заданное целевое множество. Теперь, решая задачу оптимального управления (2.11) — (2.13), (5.4), можно найти критерий эффективности технической системы с проектными параметрами x :

$$W(x) = \underset{u}{\text{extr}} J(x, u). \quad (5.5)$$

Оптимальный вариант проектируемой системы находится из решения экстремальной задачи (5.1).

Итак, вид задачи проектирования для управляемой динамической системы формально такой же, как для системы без управления. Однако сложность их различна, поскольку критерий

*) См. Приложение.

**) Мы не оговариваем здесь вид управления и пр. С разнообразными, строго поставленными задачами оптимального управления можно ознакомиться, например, в [8, 36].

эффективности (5.5) определяется через решение задачи оптимального управления, представляющую собой самостоятельную трудную проблему [6, 8, 36]. Таким образом, задача (5.1) проектирования достаточно сложной управляемой динамической системы не может быть решена простым перебором множества X .

Функционалов вида (5.4), описывающих качество функционирования объекта, может быть несколько. В таком случае, в силу (5.5), они задают векторный критерий эффективности

$$W(x) = (W^1(x), \dots, W^m(x)), \quad (5.6)$$

определяющий, в свою очередь, бинарное отношение Φ на множестве X . Например, Φ — отношение Парето или отношение строгого доминирования, введенное в (4.5).

Пример 5.4. Сложность задач проектирования динамических систем хорошо видна уже на примере 2.4 манипулятора промышленного робота. Его функционирование на принятом нами уровне детализации описывается уравнениями типа (2.17).

Многие критерии эффективности, принятые в робототехнике, могут быть представлены в виде *)

$$W^i(x) = E_{a,b} \max_{\mu} \min_{q(\cdot)} J^i(a, b, z, x, \mu), \quad (5.7)$$

$$J^i(a, b, z, x, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} g^i(q, \dot{q}, x, \mu) dt. \quad (5.8)$$

Здесь (a, b) — случайная пара точек из рабочей зоны манипулятора, подчиненная известному закону распределения вероятностей; E — символ математического ожидания; μ — неопределенный фактор, например неизвестные массо-инерционные характеристики груза в схвате; t_0, t_1 — фиксированные моменты, выбираемые в соответствии со временем, необходимым для перевода схвата из точки a в точку b рабочей зоны; $z = (q, \dot{q})$ — траектория движения в пространстве обобщенных координат; x — проектные параметры манипулятора.

Распределения вероятностей точек (a, b) рабочей зоны, множество значений неопределенного фактора μ , моменты t_0, t_1 (точнее время $T(a, b) = t_1 - t_0$), функции g^i являются обычно экзогенными параметрами. Они находятся из решения задачи внешнего проектирования, в которой манипулятор рассматривается как часть той или иной производственной системы.

В (5.7), (5.8) имеются также ограничения

$$F(q(t_0), x) = a, \quad F(q(t_1), x) = b,$$

задаваемые трехмерной вектор-функцией F , отражающей зависи-

*) Динамика и управление роботами/Под ред. Е. И. Юревича М., Наука, 1984.

мость положения схвата в рабочей зоне манипулятора от обобщенных координат q и проектных параметров x . Функции g^i в (5.8) часто принимаются в виде

$$g^i = \langle z, \Omega_1 z \rangle + \langle u, \Omega_2 u \rangle, \quad i = 1, \overline{m},$$

где $z = (q, \dot{q})$, Ω_1, Ω_2 — неотрицательно определенные матрицы соответствующей размерности. Легко видеть, что в (5.7) задача отыскания внутреннего минимума по $q(\cdot)$ представляет собой вариационную форму некоторой задачи оптимального управления и получается из нее исключением управления при помощи уравнения динамики (2.17).

Определение критерия эффективности (5.7) осложняется не только необходимостью решать задачи оптимального управления, но и операциями максимума по μ и осреднения по a, b в (5.7). Ясно, что даже для простейшего манипулятора (2.14) — (2.16) из примера 2.4 решение задачи (5.5) «в лоб» требует значительных ресурсов ЭВМ.

Пример 5.5. Рассмотрим задачу проектирования ЛА с наибольшей дальностью полета. Для ее постановки в общем случае следует решить задачу оптимального управления с функционалом вида (5.4) и уравнениями движения, например (2.18), (2.21) при ограничениях (2.19), (2.20). Учитывая сложности решения задачи оптимального управления, ограничимся в данном примере крейсерским полетом ЛА на заданной высоте H с постоянной скоростью V и не будем учитывать этапы взлета, набора высоты, снижения и посадки.

Уравнения горизонтального крейсерского полета получаются из (2.18) при $\dot{V} = 0, \theta = 0, \dot{\psi} = 0, \gamma = 0, P \sin \alpha \simeq 0$ и имеют вид

$$\begin{cases} P - X = 0, \\ G - Y = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

где $X = qSc_y, Y = qSc_y, q = \frac{\rho V^2}{2}, c_x = c_{x0} + Bc_y^2$

(см. пример 2.5),

$$\dot{G} = -c_p P. \quad (5.10)$$

Пусть G_H — начальный вес ЛА, $G(t)$ — текущий вес в момент времени t , G_T — вес топлива. Тогда горизонтальная дальность полета L со скоростью V равна

$$L = V \cdot T, \quad (5.11)$$

где T — время полета, определяемое из условия

$$G(T) = G_H - G_T.$$

Из второго уравнения (5.9) находим $G - Y = \frac{\rho V^2}{2} Sc_y$; тогда

первое уравнение (5.9) можно переписать в виде

$$0 = P - X = P - \frac{\rho V^2}{2} S (c_{x0} + Bc_y^2) = P - \frac{\rho V^2}{2} S c_{r0} - \frac{2BG^2}{\rho V^2 S}.$$

Отсюда определяется необходимая тяга двигателя как функция веса ЛА:

$$P = \frac{\rho V^2}{2} S c_{x0} + \frac{2BG^2}{\rho V^2 S} = \varphi(G). \quad (5.12)$$

Функция (5.12) определяет режим работы двигателя и, следовательно, удельный расход топлива C_p , который также является некоторой известной функцией веса ЛА: $C_p = \psi(G)$.

Подставляя эти функции в уравнение (5.10), перепишем его в виде

$$\dot{G} = -f(G),$$

где $f(G) = \varphi(G)\psi(G)$, или $dt = -\frac{dG}{f(G)}$.

Интегрируя, находим отсюда время полета на высоте H со скоростью V :

$$T(H, V) = \int_{G_H - G_T}^{G_H} \frac{dG}{f(G)}$$

и из (5.11) определяем дальность полета:

$$L(H, V) = V \int_{G_H - G_T}^{G_H} \frac{dG}{f(G)}. \quad (5.13)$$

В рассмотренном примере удалось определить критерий (5.5) в виде (5.13) благодаря тому, что фазовые ограничения $H, V = \text{const}$ однозначно определили управление (5.12), так что не потребовалось решать задачу оптимального управления, используя, например, принцип максимума Понтрягина [8]. В общем случае рассчитывать на это, конечно, нельзя.

Для летательного аппарата можно сформулировать и векторный критерий эффективности (5.6). Обычно в нем участвуют маневренные характеристики (например, время разворота) и «интегральные» характеристики (например, максимальная дальность полета, время разгона и набора высоты). Некоторые из этих характеристик, подобно (5.13), могут зависеть от значений фазовых переменных (H, V); в таком случае бинарное отношение на множестве X часто задается в виде (4.7). Стремление исключить фазовые переменные иногда выражается в фиксации H, V , как было в рассмотренном примере. Можно поступить и иным

образом: выбрать в (5.13) значения H, V , соответствующие максимальной дальности полета, либо применить принцип гарантированного результата (5.2) и т. п. Более подробно вопросы подобной «свертки» технических характеристик по фазовым переменным рассмотрены в гл. 3 и 4.

Обратимся к наиболее общему примеру управляемой динамической системы из § 2, функционирование которой описывалось системой (2.28)—(2.30).

Для иллюстрации рассмотрим упрощенный вариант:

$$\dot{z} = f(z, u, v, x, y), \quad (5.14)$$

$$u \in U(x), v \in V(y), z \in Z, \quad (5.15)$$

$$x, y \in X.$$

Напомним, что здесь z — фазовая переменная из пространства E^n ; u, v — управления двух «игроков», располагающих техническими системами с проектными параметрами x и y соответственно.

Ограничения (5.15) означают, что возможности управления «игроков» зависят от проектных параметров технических систем. Так, в примере 2.5 было показано, что для ЛА всегда имеются ограничения по перегрузке, определяемые управляемостью и устойчивостью, прочностью конструкции и выносливостью летчика. Последнее в (5.15) ограничение может трактоваться как ограничения минимальной высоты полета (из соображений безопасности), скорости полета (нагрев конструкции), запаса топлива. Конкретный вид этих ограничений для летательного аппарата указан в примере 2.5.

Рассмотрим *позиционные дифференциальные игры сближения-уклонения* альтернатив $x, y \in X$ ([4]).

Альтернатива x , распоряжаясь выбором позиционного управления u , решает задачу сближения (встречи) с целевым множеством $G_i, i = 1, \dots, m$: привести точку $z(t)$ на множество G_i , не покидая множества Z — жизненного пространства игрока x . Альтернатива (игрок) y решает задачу уклонения: не допустить попадания точки $z(t)$ на целевое множество G_i до ее выхода из множества Z .

Для ЛА игра сближения-уклонения допускает различные интерпретации. Например, она описывает конфликтное взаимодействие двух ЛА при перехвате. Один ЛА «перехватчик» является преследователем, другой ЛА — уклоняющейся «целью». При $m=1$ целевое множество G_1 описывает зону поражения, в которой перехватчик может применить свое «оружие» [4, 29].

Будем предполагать, что рассматриваемые игры удовлетворяют всем требованиям, при которых справедлива *теорема об альтернативе* [4]. Эта теорема утверждает, что все множество пози-

ций $\{t, z\}$ разбивается на две части. Первая часть, которую обозначим через $\Sigma_i(x, y)$, состоит из всех позиций, для которых, как для начальных, разрешима задача сближения с G_i в Z . Оставшаяся часть пространства позиций составлена из позиций $\{t, z\}$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача уклонения от некоторой окрестности целевого множества G_i вплоть до выхода из окрестности множества Z .

Пусть на множестве всех подмножеств пространства позиций $\{t, z\}$ введена вероятностная мера $\mu_i, i=1, \dots, m$. Например, она может задавать «частоту», с которой в процессе функционирования встречаются те или иные начальные позиции. Так, при моделировании маневренного боя двух ЛА мера μ_i , являясь экзогенным, т. е. внешним, параметром, вытекающим из моделей более высокого уровня (внешнего проектирования), отражает представления проектировщиков об исходных положениях ЛА в начале воздушного боя.

Определим i -й критерий сравнительной эффективности

$$\varphi^i(x, y) = \mu_i(\Sigma_i(x, y)) - \mu_i(\Sigma_i(y, x)),$$

$$i = 1, \dots, m, \quad (5.16)$$

и бинарное отношение сравнительной эффективности

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi(x, y) \in \Delta\}, \quad (5.17)$$

где $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, а Δ — одно из подмножеств ортанта E_+^m из § 4. Таким образом, бинарное отношение (5.16), (5.17) задано так же, как в (4.4). Отметим, что оно может быть нетранзитивным.

Если зафиксировать «эталонные» объекты x_i , то в силу (5.16) можно задать критерий эффективности

$$W(x) = (W^1(x), \dots, W^m(x)), \quad (5.18)$$

где $W^i(x) = \varphi^i(x, x_i), i = 1, \dots, m$, который в соответствии с (4.4) определяет транзитивное отношение Φ . Например, это одно из бинарных отношений (4.6).

Теперь можно поставить задачу проектирования с использованием построенного бинарного отношения Φ .

Для условного примера с ЛА решение задачи проектирования для отношения Φ , определенного в (5.16), (5.17), означает нахождение альтернатив, наилучшим образом показавших себя в маневренном воздушном бою, а для отношения Φ , определенного векторным критерием (5.18), — нахождением альтернатив — наилучших «перехватчиков» «целей» x_1, \dots, x_m .

Покажем, что игровые задачи охватывают широкий круг задач проектирования динамических систем и, в частности, задачи проектирования неконфликтных систем (2.11) — (2.13).

Для этого положим в (5.14), (5.15)

$$z = (z^1, z^2), f(\cdot) = (f^1(\cdot), f^2(\cdot)),$$

где

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = f^1(z^1, u, x), \\ \dot{z}^2 = f^2(z^2, v, y), \end{cases}$$

$$z^1, z^2 \in E^k, Z = Z^1 \times E^k. \quad (5.19)$$

Целевые множества зададим в виде

$$G_i = G_i^1 \times E^k, i = 1, \dots, m. \quad (5.20)$$

Предположим, что определен функционал вида

$$\gamma = \varphi(z^1[f], u[f], x), \quad (5.21)$$

который оценивает исход *дифференциальной игры* [3, 4, 29].

Тогда дифференциальная игра типа рассмотренной игры сближения-уклонения с целевым множеством (5.20) и целевым функционалом (5.21), очевидно, сводится к задаче оптимального управления для объекта, описываемого первым из уравнений (5.19), тем же целевым функционалом, целевым множеством $G_i^1, i=1, \dots, m$, в пространстве позиций $\{t, z^1\}$ и ограничениями на допустимые управления и фазовые переменные:

$$u \in U(x), z^1 \in Z^1.$$

Задавая соответствующим образом функционал γ , целевые множества и фазовые ограничения, отсюда можно получить, как известно [4, 10, 29], разные задачи оптимального управления и, следовательно, задачи проектирования систем вида (2.11)—(2.13).

Итак, игровые модели охватывают широкий круг задач управления движением, решение которых используется на практике для оценки эффективности динамических систем. Казалось бы, и рассмотрение большого круга задач проектирования динамических управляемых систем следует вести с общей игровой точки зрения. Однако это не так. Целесообразно выделение и исследование отдельно задач проектирования, связанных с задачами оптимального управления, поскольку методы и теория оптимального управления в настоящее время значительно лучше разработаны, чем теория дифференциальных игр.

ГЛАВА 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В настоящей главе рассмотрена общая схема широко используемого метода последовательного анализа и отсева вариантов, который наиболее адекватен специфике проектных задач, возникающих на различных, ранних, этапах проектирования технических систем. Развитие схемы последовательного анализа вариантов в многошаговые дискретные управляемые процессы позволит строить методы управления процессом проектирования.

Следует отметить, что идея последовательного анализа и отбраковки вариантов, основанная на постулируемых свойствах функций, используется во многих методах оптимизации. Далее будет предложена общая схема последовательного анализа в задачах проектирования и ее конкретная реализация, учитывающая специфику проектирования динамических систем. Применение общей схемы, таким образом, не исключает, а, напротив, предполагает широкое использование других, «традиционных» методов оптимизации. Как показывает опыт решения практических проектно-поисковых задач, данные методы целесообразно использовать при решении многочисленных вспомогательных оптимизационных задач для ускорения сходимости предложенного метода последовательного анализа вариантов, а также как основной инструмент решения задач проектирования агрегатов, узлов и деталей, возникающих на поздних этапах проектирования.

§ 1. Общая схема последовательного анализа вариантов

Рассмотрим задачу проектирования, поставленную в § 4 гл. 2, как задачу отыскания ядра

$$X \rightarrow X^* = \text{Max}(X, \Phi) \quad (1.1)$$

модели (X, Φ) , где X — множество конкурирующих вариантов проекта (альтернатив), предполагаемое конечным^{*)}, Φ — бинарное отношение сравнительной эффективности на X .

*) Многие приводимые ниже результаты непосредственно переносятся на случай бесконечного X .

Как уже отмечалось, характерными при решении задачи проектирования (1.1) сложной системы являются трудности, связанные как с большой мощностью $|X|$ множества X , так и со сравнением альтернатив по отношению Φ . Последнее обусловлено решением соответствующих оптимизационных задач, постановкой экспериментов на имитационных моделях функционирования системы, проведением экспертиз и др.

Решение задачи проектирования простым перебором оказывается нереализуемым на базе современных ЭВМ и вычислительных

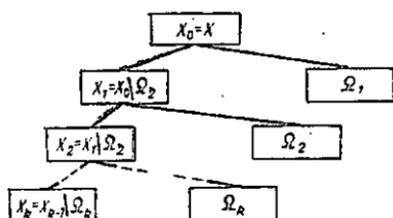


Рис. 10

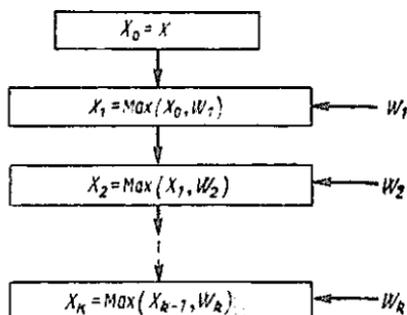


Рис. 11

комплексов обозримого будущего. Поэтому при автоматизации проектирования требуется разработка специальных методов решения задачи (1.1).

К последним относятся методы, основанные на идее *последовательного анализа вариантов* [6, 22] и, как правило, существенно использующие специфику решаемых задач.

Принципиальная схема последовательного анализа варианта изображена на рис. 10. На j -й итерации метода на основе некоторого «правила отбраковки», определяемого содержанием рассматриваемой задачи, имеющееся множество альтернатив X_{j-1} сужается до $X_j = X_{j-1} \setminus \Omega_j$:

$$X_{j-1} \rightarrow X_j = X_{j-1} \setminus \Omega_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad X_0 = X. \quad (1.2)$$

Альтернативы из Ω_j отбраковываются и дальше не рассматриваются. Решением служит получаемое на выходе, т. е. на k -м шаге процедуры (1.2), множество X_k .

Схему (1.2) иногда интерпретируют как процесс построения дерева с отсечением ветвей [6].

При решении конкретных задач методом последовательного анализа вариантов центральной является проблема разработки правил отбраковки. К последним предъявляются по крайней мере два требования. Во-первых, правила отбраковки должны быть со-

гласованы с отношением эффективности Φ с тем, чтобы выход схемы (1.2) — множество X_k — должным образом аппроксимировало искомое ядро X^* (1.1). Приемлемыми с практической точки зрения могут считаться следующие соотношения:

$$1) X_k \supseteq X^*; \quad 2) X_k = X^*; \quad 3) (X_k \subseteq X^*) | I_\Phi. \quad (1.3)$$

Во-вторых, правила отбраковки должны реализовываться «быстрыми» алгоритмами, что необходимо для практического решения задач (1.2) на современных ЭВМ.

Конкретизация общей схемы (1.2) приведена на рис. 11.

Пусть $V_j, j = \overline{1, k}$, — заданные бинарные отношения на X . Положим $W_j = V_j^t$, если $\Phi = \Phi^t$, и $W_j = V_j$, если $\Phi \neq \Phi^t$. Напомним, что V_j^t здесь означает транзитивное замыкание отношения V_j (см. § 3 гл. 2).

Введем также отношение

$$W = \bigcup_{j=1}^k W_j$$

— объединение отношений $W_j, j = \overline{1, k}$.

Рассмотрим следующую схему последовательного анализа вариантов:

$$X_{j-1} \rightarrow X_j = \text{Max}(X_{j-1}, W_j), \quad j = \overline{1, k}, \quad (1.4)$$

с начальным условием

$$X_0 = X. \quad (1.5)$$

Потребуем для нее выполнения одного из условий (1.3). Тогда (1.3) — (1.5) можно рассматривать как краевую задачу для многошагового дискретного управляемого процесса (1.4); роль управлений здесь играют отношения $W_j, j = \overline{1, k}$. Достаточные условия, обеспечивающие решение краевой задачи (1.3) — (1.5), определяет следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $W = \Phi$. Тогда для схемы (1.4) — (1.5):

- 1) $X_k \supseteq X^*$, если $X_k \neq \emptyset$, Φ антисимметрично;
- 2) $X_k = X^*$, если $X_k \neq \emptyset$, Φ антисимметрично и X^* внешне устойчиво в (X, Φ) ;
- 3) $X_k = X^*$, если Φ — порядок;
- 4) $(X_k = X^*) | I_\Phi$, если Φ — квазипорядок.

Доказательство этой теоремы нетрудно провести самостоятельно. Далее получим ее как следствие более общей теоремы из § 3 гл. 5. Теорема обосновывает схему (1.4) — (1.5) последовательной отбраковки альтернатив в задаче (1.1), поскольку утверждает, что в результате будет найдено подходящее решение исходной задачи. Раскроем содержательный смысл теоремы. Для того чтобы переход от задачи (1.1) к схеме последовательного анали-

за вариантов (1.4) — (1.5) имел смысл, требуется, чтобы отношения V_j были «проще», чем Φ , т. е. задавались с помощью «быстрых» алгоритмов. В то же время V_j должны быть достаточно представительными, чтобы сравнение альтернатив по V_j давало информацию о сравнении по Φ . Обычно это означает, что в отличие от трудно вычисляемых критериев и отношений эффективности, отражающих глобальные цели проектирования системы, отношения V_j порождаются ее основными техническими характеристиками, для расчета которых разработаны и традиционно используются в практике проектирования достаточно «быстрые» алгоритмы. В дальнейшем мы неоднократно поясним сказанное и построим формальные методы синтеза отношений для схемы (1.4) с требуемыми свойствами.

Здесь же укажем на одну трудность, с которой придется столкнуться в дальнейшем.

Пусть, например, $z \in E^n$ — вектор параметров, связанных с моделью функционирования системы (переменные состояния, входа, выхода), который принимает значения из множества Z . Вектор технических характеристик $\omega_j(\cdot)$ есть отображение

$$\omega_j : X \times Z \rightarrow E_j^n.$$

Таким образом, $\omega_j = \omega_j(x, z)$ — функция z . Если бы удалось «свернуть» технические характеристики $\omega_j(\cdot)$ по z , т. е. перейти к критериям эффективности, то отношения V_j , определяющие W_j в (1.4) — (1.5), можно задать в виде (4.5) гл. 2.

Построение такого оператора свертки — важная и довольно трудная задача. Далее мы остановимся на этом подробнее, конкретизировав вид свертки для задачи проектирования динамической системы. Пока отметим, что на практике часто применяют свертку, которая состоит в осреднении по z либо просто в фиксации значения $z = z^*$ или конечного числа значений z . Выбор z^* происходит на основе опыта конструктора. Понятно, что такой подход может привести к ошибкам в проектировании по схеме (1.4).

Поясним это на примере летательного аппарата. Технические характеристики ЛА, такие, как дальность полета, скороподъемность, угловая скорость разворота, зависят от фазовых переменных — высоты и скорости. Фиксация их значений фактически определяет в соответствии с (4.5) гл. 2 бинарное отношение сравнительной эффективности, которое может быть использовано в схеме (1.4), (1.5) для выделения предпочтительных вариантов ЛА. Выбор значений фазовых переменных должен производиться на основе моделей функционирования высокого уровня и прогноза характеристик внешней среды. Неправильный их выбор равносильно глобальной ошибке, исправить которую уже невозможно

на других стадиях процесса проектирования. В качестве иллюстрации приведем следующий факт *).

Тактическая доктрина конца 30-х годов исходила из того, что воздушная война будет происходить на больших высотах. Во всех странах мира стремились поднять потолок полета боевых самолетов. Истребитель МИГ-3 обладал серьезными преимуществами перед «Мессершмиттом» не только по высоте и скорости, но и по вооружению. На нем было пять огневых точек вместо трех у «Мессершмитта». Но в первые же месяцы войны убедились, что немецкие легчики на истребителях «Мессершмитт» не ведут боя на невыгодных для себя высотах. Наоборот, они стремились завязать все бои на малой высоте, где более тяжелый МИГ проигрывал в маневре. К тому же продолжительность полета МИГ на малых высотах оказалась недостаточной.

Когда все эти обстоятельства стали очевидными, конструкторы МИГа попытались облегчить самолет за счет снятия части оружия. Но это не помогло, и в результате было принято решение о прекращении производства самолетов МИГ-3.

Этот пример показывает, что принципиальная ошибка, допущенная в области технической политики, несмотря на затрату огромных усилий и средств, в конце концов неизбежно приводит к неудаче.

История техники знает и прямо противоположные примеры, когда правильный прогноз экзогенных параметров внешней среды обеспечивал создание исключительно удачных систем, полностью отвечающих своему целевому назначению. В области авиастроения достаточно вспомнить такие самолеты, как ИЛ-2 и АН-2.

Таким образом, введение свертки технических характеристик по фазовым переменным представляет собой сложную проблему. С содержательной точки зрения она связана со стремлением проектировщиков характеризовать техническую систему критериями, зависящими лишь от конструктивных параметров, но никак не от значений фазовых переменных в модели функционирования. С формальной точки зрения свертка целесообразна в процессе автоматизированного проектирования, поскольку она позволяет построить более «сильные» бинарные отношения сравнительной эффективности W_j и тем самым повысить эффективность отбраковки вариантов в схеме последовательного анализа (1.4), (1.5).

Условия $V_j \subseteq \Phi$ в теореме 1.1 не что иное, как условия аппроксимации «изнутри» отношения Φ более «простыми» отношениями V_j . Они гарантируют, что в методе последовательного анализа вариантов не будут отсеяны оптимальные по Φ варианты.

*) Яковлев А. С. Советские самолеты. М., Наука, 1975, с. 251.

Содержательно включение $V_j \in \Phi$ означает, что альтернатива с лучшими техническими характеристиками (лучшая по отношению V_j), эффективнее, т. е. лучше по глобальному отношению сравнительной эффективности Φ .

Равенство $W = \Phi$ отражает «полноту» рассматриваемых векторов $\omega_j(\cdot)$ и операторов свертки, т. е. более эффективная альтернатива обладает по крайней мере одним вектором лучших характеристик $\omega_j(\cdot)$, $j=1, \dots, k$, «усредненных» в соответствии с оператором свертки.

Таким образом, для реализации схемы последовательного анализа вариантов нужно построить отношения V_j , в указанном смысле согласованные с Φ . Часто это делают, опираясь на здравый смысл и опыт решения задач проектирования, например назначая критерии — характеристики типа стоимости, веса или летно-технических характеристик (ЛТХ) для летательного аппарата. Здесь, конечно, не исключены ошибки, приводящие в схеме (1.4) к потере эффективных альтернатив. Поэтому актуальна разработка методов анализа согласованности отношений V_j с Φ в практических задачах проектирования. Еще более важным для целей автоматизированного проектирования является создание формальных методов синтеза отношений и критериев, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1. Сделать это можно, используя специфику задач проектирования и информацию об отношении сравнительной эффективности Φ .

§ 2. Синтез аппроксимирующих отношений и критериев

В § 1 уже отмечалась важность решения задачи синтеза аппроксимирующих отношений в методе последовательного анализа вариантов на базе формальных процедур. Ниже рассмотрены задачи синтеза для управляемых динамических систем, моделирующих широкий класс проектируемых технических объектов.

1. Конструкция аппроксимирующего отношения. Пусть варианты проектируемого объекта задаются вектором его проектных параметров $x \in X \subset E^n$. Функционирование системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, x), \quad z \in E^n, \quad u \in E^m, \quad (2.1)$$

и ограничениями на допустимые фазовые переменные z , управление u :

$$z \in Z(x) = \{z \mid g_j(z) \leq \omega_j(x), \quad j=1, \dots, l\}, \quad u \in U(z, x). \quad (2.2)$$

Для системы (2.1), (2.2) предполагается, что функции f , ω_j , g_j непрерывны по совокупности переменных, множество $Z(x)$ компактно при каждом $x \in X$, отображение $U(\cdot)$ замкнутозначно и непрерывно (по Хаусдорфу).

В практике проектирования достаточно распространенной является ситуация, когда разработчики системы не имеют возможности непосредственно оценивать эффективность ее вариантов или сравнительную эффективность по отношению Φ на X .

В этом случае особенно важен этап «формирования облика» системы (см. § 1 гл. 1), основной задачей которого является построение множества вариантов системы, учитывающих возможности «внутреннего» проектирования, с одной стороны, и содержащие варианты, удовлетворяющие требованиям «внешнего» проектирования—с другой. Неполнота информации об отношении Φ приводит к формализации задачи формирования облика как задачи многокритериальной оптимизации. Одной из центральных проблем здесь является проблема построения систем критериев, которые задают аппроксимирующие Φ отношения, участвующие в общей схеме последовательного анализа вариантов из § 1.

Рассмотрим дифференциальное включение (уравнение в контаингенциях):

$$\dot{z} \in G(z, x) = \text{co} \{ f \in E^n \mid f = f(z, u, x), u \in U(z, x) \}, \quad (2.3)$$

$$z(t_0) = z_0,$$

где $\text{co } A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A . Обозначим через $D(x)$ множество допустимых решений $z(t) = z(t; t_0, z_0, x)$ этого дифференциального включения, удовлетворяющих условию $z(t) \in Z(x)$ (множество обобщенных движений [4] системы S с параметрами x).

Отметим, что переход от исходного уравнения (2.1), (2.2) к дифференциальному включению (2.3) с содержательной точки зрения обоснован, если каждое обобщенное решение может быть с любой степенью точности приближено классическим решением. Требуемые условия указаны, например, в [4, 36]; во всех приведенных конкретных примерах они заведомо выполняются. Удобства перехода от (2.1), (2.2) к (2.3) связаны с выпуклостью множеств $G(z, x)$ и возможностью применения для работы с ними аппарата опорных функций [42].

Предположим, что отношение Φ на X удовлетворяет условию

$$D(y) \subseteq D(x) \rightarrow x\Phi y. \quad (2.4)$$

Это условие является «универсальным», поскольку выполняется для широкого круга задач проектирования, в которых оценка качества функционирования системы связана с решением задач управления движением. Включение $D(y) \subseteq D(x)$ означает, что альтернатива x может повторить любое движение (траекторию) альтернативы y и не исключено, что обладает еще дополнительными возможностями. Например, один ЛА способен совершать те же маневры, что и другой. Ясно, что для любой разумной це-

ли проектирования управляемого динамического объекта гипотеза (2.4) должна быть справедливой. В каком-то смысле (2.4) задает минимальную информацию об отношении сравнительной эффективности в задаче проектирования.

Отметим, что не естественно, вообще говоря, полагать, что из строгого включения $D(y) \subset D(x)$ вытекает строгое предпочтение x над y , порожденное бинарным отношением Φ . Дело в том, что движения из разности $D(x) \setminus D(y)$ могут не реализоваться при оптимальном функционировании объектов. Наконец, движения из $D(x) \setminus D(y)$ могут быть слишком сложными для использования в практике управления объектом.

Пусть Σ — n -мерная, единичная сфера,

$$\delta(s, z, x) = \max_{f \in G(z, x)} \langle s, f \rangle, \quad s \in \Sigma,$$

— опорная функция множества $G(z, x)$ [42].

Введем на X бинарное отношение V_1 , положив xV_1y тогда и только тогда, когда

$$\omega_j(x) \geq \omega_j(y), \quad j = 1, \dots, l;$$

$$\delta(s, z, x) \geq \delta(s, z, y) \quad \forall z \in Z(y), \quad \forall s \in \Sigma. \quad (2.5)$$

Отношение V_1 транзитивно. Интересующее нас свойство устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (2.4). Тогда отношение V_1 (2.5) аппроксимирует «изнутри» отношение Φ , т. е. для всяких $x, y \in X$ из xV_1y следует $x\Phi y$.

Доказательство. Пусть xV_1y . Тогда из первой группы неравенств (2.5) следует включение $Z(y) \subseteq Z(x)$, из второй группы и известных свойств опорных функций выпуклых множеств [42] имеем $G(z, y) \subseteq G(z, x) \quad \forall z \in Z(y)$. Отсюда и из (2.3) следует, что всякое движение, реализуемое альтернативой y , реализуется также альтернативой x , т. е. $D(y) \subseteq D(x)$. Данное включение вместе с (2.4) влечет $x\Phi y$. \triangle

Схема последовательного анализа вариантов (1.4) в данном случае принимает вид

$$X_1 = \text{Max}(X, V_1), \quad X_2 = \text{Max}(X_1, \Phi). \quad (2.6)$$

Для ядра X_2 справедлива теорема 1.1. Итак, показано, что при минимальных требованиях (2.4) на отношение Φ задачу проектирования можно решать, используя двухэтапную процедуру (2.6). При этом реализуется декомпозиция задачи проектирования, связанная с заменой «сложного» исходного отношения Φ иерархической двухуровневой системой согласованных отношений $\{V_1, \Phi\}$, в которой V_1 задается значительно проще на основе (как следует из (2.5)) вычисления опорных функций, т. е. решения конечномерных оптимизационных задач.

2. Условия существования технических характеристик. На практике бинарное отношение, аппроксимирующее изнутри отношение Φ , часто задают вектором технических характеристик проектируемого объекта (см. § 4 гл. 2).

Положим xV_2y в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} \omega_j(x) &\geq \omega_j(y), \quad j=1, \dots, l, \\ W^i(z, x) &\geq W^i(z, y) \quad \forall z \in Z(y), \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если отношение V_2 , заданное с помощью (2.7), удовлетворяет теореме 2.1, то набор W будем называть вектором технических характеристик системы. Обычно к W^i предъявляют два требования. С одной стороны, W^i должны быть достаточно простыми, быстро вычислимыми для того, чтобы их было целесообразно использовать при отбраковке вариантов системы. С другой стороны, отношение (2.7), соответствующее W , обязано «хорошо» представлять глобальное отношение эффективности Φ . Эти требования противоречивы. Например, если Φ задается сложным критерием F , то можно было бы просто положить $W=F$. При этом, очевидно, выполнено второе требование, но не выполнено первое. Стремление к компромиссу приводит к тому, что следует искать простые нетривиальные векторы технических характеристик, для которых отношение V_2 из (2.7) служит хорошим приближением к Φ .

Достаточные условия существования искомого технических характеристик дают следующие утверждения.

1) Пусть справедливо представление

$$G(z, x) = \{f \in E^n \mid h_i(f, z, x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m\}$$

при всех $z \in Z(x)$, где

$$h_i(f, z, x) = \varphi_i(f, z) - W^i(z, x).$$

Тогда $W^i(z, x)$ образуют искомый вектор технических характеристик.

Доказательство немедленно следует из определений (2.5), (2.7) отношений V_1, V_2 .

2) Обозначим

$$\Delta(z, x, y) = \min_{s \in \Sigma} [\delta(s, z, x) - \delta(s, z, y)].$$

Если

$$\text{sign } \Delta(z, x, y) \geq \text{sign } \min_{1 \leq i \leq m} U_i(z, x, y), \quad (2.8)$$

где $U_i(z, x, y) = W^i(z, x) - W^i(z, y)$, то $W^i(z, x)$ образуют вектор технических характеристик. В частности, если для фиксированных $s^i \in \Sigma$, $i = \overline{1, m}$

$$\Delta(z, x, y) = \min_{1 \leq i \leq m} [\delta(s^i, z, x) - \delta(s^i, z, y)],$$

то можно положить $W^i = \delta(s^i, z, x)$.

В соответствии с замечаниями к теореме 2.1, в случае конечности X требование строгости одного из неравенств в (2.7) можно опустить.

Подведем некоторые итоги. Для управляемой динамической системы при выполнении условия (2.4) предложен формальный способ получения простого универсального отношения V_1 , аппроксимирующего изнутри отношение Φ в задаче проектирования. Действительно, для формирования V_1 требуется решать лишь конечномерную задачу оптимизации при вычислении опорной функции, в то время как Φ определяется через решение задачи управления системой на множестве всех движений.

Построение векторов технических характеристик на основе достаточных условий 1), 2) аппроксимации изнутри происходит неоднозначно. В принципе в схеме отбраковки вариантов (2.6) достаточно использовать отношение (2.5); нет никакой необходимости применять технические характеристики. Как правило, технические характеристики требуются для интерпретации результатов решения в терминах, привычных конструктору.

Обратим внимание на зависимость опорных функций в (2.5) и критериев в (2.7) от фазовой переменной z . Это означает, что две альтернативы сравнимы по отношениям V_1, V_2 только тогда, когда одна из них «превосходит» другую при всех допустимых значениях фазовых переменных. Это условие, вообще говоря, снижает эффективность отбраковки альтернатив на первом шаге в схеме (2.6), что может привести к необходимости сравнения по глобальному отношению Φ значительного числа альтернатив системы. Именно стремление сделать отбраковку более эффективной привело в § 1 к идее «свертки» по фазовым переменным. Однако, как будет показано в следующей главе, такое повышение эффективности схемы (2.6) требует дополнительной к (2.4) информации об отношении Φ .

Продемонстрируем на модельных примерах технику получения технических характеристик систем с описанными выше свойствами. Более сложный пример, имеющий прикладное значение, будет рассмотрен в гл. 6.

§ 3. Примеры синтеза критериев и технических характеристик

Пример 3.1. Пусть движение проектируемого объекта описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{z}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \\ -x^1 z^2 + x^2 u \end{pmatrix}, \quad z^1 z^2, u \in E^3, \quad (3.1)$$

ограничениями на проектные параметры

$$x \in X = \{x \in E^2 | (\bar{x}^2/(\bar{x}^1)^3)(x^1)^3 \leq x^2 \leq (\bar{x}^2/\bar{x}^1)x^1; x^1 \geq 0\},$$

где $\bar{x}^1, \bar{x}^2 > 0$ (рис. 12) и допустимые управления $|u| \leq 1$. Кроме того, задано фазовое ограничение

$$|z^2| \leq x^2 / x^1, \quad (3.2)$$

которое означает, что скорость объекта не превышает его собственной максимальной скорости. Параметр x^1 в (3.1), (3.2) интерпретируется как коэффициент лобового сопротивления объекта, а x^2 — как максимальная сила тяги двигателя.

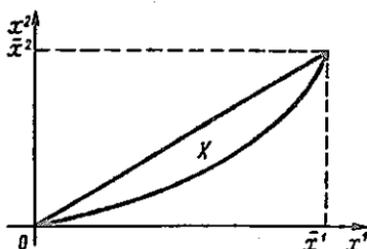


Рис. 12

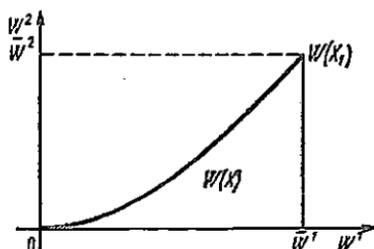


Рис. 13

Для задания отношения Φ на X будем рассматривать дифференциальную игру преследования — убегания объекта (3.1) с «эталонным» объектом

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_*^1 \\ \dot{z}_*^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_*^2 \\ f(z_*, u_*) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $z_*^1, z_*^2 \in E^3, z_* = (z_*^1, z_*^2)$.

Преследующему «игроку» P подчинен объект (3.1), убегающему «игроку» E — «эталонный» объект (3.3).

Позиционные стратегии «игроков» и соответствующие им конструктивные движения определим, следуя [4]. Преследование считается завершённым, когда $z^1 = z_*^1$. Время преследования ограничено величиной T .

Обозначим через $Z_*(x)$ множество начальных позиций (z, z_*) в игре, из которых P располагает стратегией, гарантирующей ему завершение преследования за время, не превосходящее T . Будем считать, что начальная позиция игры (z, z_*) — случайная величина с распределением вероятностей, задаваемым мерой μ , которая сосредоточена на множестве (3.2).

Положим

$$r(x) = \mu(Z_*(x))$$

и

$$x\Phi y \leftrightarrow r(x) \geq r(y). \quad (3.4)$$

Очевидно, отношение Φ транзитивно и удовлетворяет условию (2.4), постулирующему связь Φ с включением множеств обобщенных движений системы (3.1).

Для отыскания технических характеристик воспользуемся результатами предыдущего параграфа. Для этого сначала вычислим опорную функцию множества

$$G(z, x) = \text{co} \{ f = (f^1, f^2) \in E^6 \mid f^1 = z^2, f^2 = -x^1 z^2 + x^2 u, |u| \leq 1 \}$$

— замыкания выпуклой оболочки вектограммы правых частей системы (3.1).

Пусть $s = (s^1, s^2) \in \Sigma$, где

$$\Sigma = \{ s = (s^1, s^2) \in E^6 \mid \max(|s^1|, |s^2|) = 1 \}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta(s, z, x) &= \max_{|u| \leq 1} [\langle s^1, z^1 \rangle + \langle s^2, -x^1 z^2 + x^2 u \rangle] = \\ &= \langle s^1, z^2 \rangle - x^1 \langle s^2, z^2 \rangle + x^2 |s^2|. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \Delta(z, x, y) &= \min_{s \in \Sigma} [\langle s^1, z^2 \rangle - x^1 \langle s^2, z^2 \rangle + x^2 |s^2| - \langle s^1, z^2 \rangle + \\ &+ y^1 \langle s^2, z^2 \rangle - y^2 |s^2|] = \min_{s \in \Sigma} [(x^2 - y^2) |s^2| + (y^1 - x^1) \langle s^2, z^2 \rangle] \geq \\ &\geq \min [0; x^2 - y^2 - |x^1 - y^1| \cdot |z^2|]. \end{aligned}$$

Оценим знак этой величины. Положим $W^1(x) = x^2/x^1$, $W^2(x) = x^1 x^2$ и пусть $W^1(x) \geq W^1(y)$, $W^2(x) \geq W^2(y)$. Заметим, что при любом соотношении между x^1 и y^1 в силу этих неравенств $x^2 \geq y^2$.

Тогда при ограничении (3.2), т. е. $|z^2| \leq y^2/y^1$, верны следующие оценки.

Если $x^1 \geq y^1$, то

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - |x^1 - y^1| \cdot |z^2| &= x^2 - y^2 - \\ - (x^1 - y^1) \cdot |z^2| &\geq x^2 - y^2 - (x^1 - y^1) \cdot y^2/y^1 = x^2 - \frac{x^1 y^2}{y^1} \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку $W^1(x) \geq W^1(y)$.

Если $y^1 \geq x^1$, то

$$x^2 - y^2 - |x^1 - y^1| \cdot |z^2| \geq x^2 - y^2 - (y^1 - x^1) \frac{y^2}{y^1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + \frac{x^1 y^2}{y^1} - 2y^2 = y^2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^1}{y^1} - 2 \right) \geq \\
 &\geq y^2 \left(2 \sqrt{\frac{x^1 x^2}{y^1 y^2}} - 2 \right) \geq 0,
 \end{aligned}$$

так как $W^2(x) \geq W^2(y)$.

Итак, мы доказали, что всегда

$$\text{sign } \Delta(z, x, y) \geq \text{sign } \min [W^1(x) - W^1(y); W^2(x) - W^2(y)].$$

Отсюда в силу (2.8) вытекает, что система критериев

$$W^1(x) = \frac{x^2}{x^1}, \quad W^2(x) = x^1 x^2 \quad (3.5)$$

является вектором технических характеристик, порождающих отношение $\{(x, y) \in X^2 \mid W^i(x) \geq W^i(y), i=1, 2\}$, аппроксимирующее отношение Φ (3.4) изнутри.

Построим теперь множество X_1 в соответствии со схемой проектирования (2.6). Оказывается (рис. 13), что оно состоит из одной точки: $X_1 = X_2 = X^* = \{\bar{x}\}$ и $W(X_1) = \{W\}$, где $W = (W^1, W^2) = (W^1(\bar{x}), W^2(\bar{x}))$. Следовательно, решение задачи проектирования объекта (3.1) получено уже на первом шаге процедуры (2.6), и не требуется решения дифференциальных игр преследования — убегания, определяющих функции $r(\cdot)$ в (3.4). Конечно, это случилось благодаря специально подобранным данным задачи проектирования, в общем случае решения задач управления движением избежать не удается.

Пример 3.2. Пусть известно, что оптимальное управление системой (3.1) не требует торможения тягой. Будучи формализованным, данное предположение позволяет во всех приведенных выше выражениях и выкладках сферу Σ заменить на множество

$$\Sigma(z) = \{s = (s^1, s^2) \in \Sigma \mid \langle s^2, z^2 \rangle \geq 0\}.$$

Это дает систему критериев (технических характеристик)

$$W_1^1(x) = x^2, \quad W_1^2(x) = x^1 x^2. \quad (3.6)$$

Нетрудно убедиться, что из $W(x) \geq W(y)$ следует $W_1(x) \geq W_1(y)$.

Отметим, что, как следует из решения контрольного примера Понтрягина, условие $W_1(x) \geq W_1(y)$, $W_1(x) \neq W_1(y)$ гарантирует объекту (3.1) с проектными параметрами x завершение преследования аналогичного объекта с проектными параметрами y за конечное время из произвольной начальной позиции.

Пример 3.3. Предположим теперь, что преследователю P в игре с объектом (3.3) запрещено торможение тягой двигате-

$$\langle u, z^2 \rangle \geq 0.$$

Тогда при $s \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \delta(s, z, x) &= \max_{\substack{|u| < 1 \\ \langle u, z^2 \rangle > 0}} [\langle s^1, z^2 \rangle + \langle s^2, -x^1 z^2 + x^2 u \rangle] = \\ &= \langle s^1, z^2 \rangle - x^1 \langle s^2, z^2 \rangle + x^2 \max_{\substack{|u| < 1 \\ \langle u, z^2 \rangle > 0}} \langle u, s^2 \rangle = \\ &= \langle s^1, z^2 \rangle - x^1 \langle s^2, z^2 \rangle + x^2 \cdot \begin{cases} 1, & \varphi \leq \pi/2, \\ \sin \varphi, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases} \end{aligned}$$

где φ — величина наименьшего угла между векторами s^2 и z^2 . Учитывая, что $\langle s^2, z^2 \rangle = |z^2| |s^2| \cos \varphi$, окончательно получаем

$$\delta(s, z, x) = \langle s^1, z^2 \rangle - x^1 |z^2| |s^2| \cos \varphi + x^2 \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \sin \varphi, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta(s, z, x) - \delta(s, z, y) &= (y^1 - x^1) |z^2| |s^2| \cos \varphi + \\ &+ (x^2 - y^2) \cdot \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \sin \varphi, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим $W_2^1 = x^2/x^1$, $W_2^2 = x^2$, $W_2^3 = x^1$ и пусть $W_2^i(x) \geq W_2^i(y)$; $i=1, 2, 3$; $|z^2| \leq y^2/y^1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(z, x, y) &= \\ &= \min_{0 < \varphi < \pi} \left[(y^1 - x^1) |z^2| \cos \varphi + (x^2 - y^2) \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \sin \varphi, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \right] \geq \\ &\geq \min \left[(x^2 - y^2) + (y^1 - x^1) \frac{y^2}{y^1}; (x^1 - y^1) |z^2| \right] = \\ &= \min \left[x^1 \left(\frac{x^2}{x^1} - \frac{y^2}{y^1} \right); (x^1 - y^1) |z^2| \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено неравенство (2.8) для системы технических характеристик:

$$W_2^1(x) = \frac{x^2}{x^1}, \quad W_2^2(x) = x^2, \quad W_2^3(x) = x^1. \quad (3.7)$$

Система технических характеристик (3.7) отличается от систем (3.5), (3.6). В систему (3.7) входит три критерия, причем W_2^3 характеризует лобовое сопротивление объекта, что естественно, поскольку торможение тягой двигателя не применяется.

Отметим ясный инженерный смысл полученных характеристик: W_2^1 — скоростная характеристика (максимальная скорость); W_2^2 — характеристика маневренности (разворот и разгон); W_2^3 — характеристика торможения.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу выбора параметров манипулятора. Его уравнения движения в общем виде (2.17) приведены в примере 2.4:

$$A(q, x, \mu) \ddot{q} + b(q, \dot{q}, x, \mu) = u,$$

где $q \in E^n$ — обобщенные координаты, x — проектные параметры, μ — неопределенный фактор (масса груза в схвате); $u \in E^n$ — усилия в приводах; $A(\cdot)$, $b(\cdot)$ соответственно положительно определенная матричная и векторная функции.

На управления наложены ограничения

$$u \in U(x) = \{u \mid -\hat{u}(x) \leq u \leq \hat{u}(x)\}. \quad (3.8)$$

Будем предполагать (не совсем на практике обоснованно), что «лучше» по отношению сравнительной эффективности Φ тот манипулятор, у которого множество движений шире. Тогда, как и в предыдущих примерах, построение отношения, аппроксимирующего изнутри Φ , сводится к проверке неравенства (2.5) для опорных функций при всех значениях неопределенного фактора.

Предварительно запишем уравнения движения в виде системы первого порядка:

$$\dot{z}^1 = z^2, \quad \dot{z}^2 = A^{-1}(z^1, x, \mu) [u - b(z^1, z^2, x, \mu)].$$

Опорная функция для этой системы представляется следующим образом:

$$\delta(s, z, x, \mu) = \max_u \{ \langle \sigma, z^2 \rangle + \langle \tau, A^{-1}(\cdot) [u - b(\cdot)] \rangle \},$$

где $s = (\sigma, \tau) \in \Sigma$.

Легко видеть, что неравенства (2.5) имеют место тогда и только тогда, когда

$$A^{-1}(q, y, \mu) [U(y) - b(q, \dot{q}, y, \mu)] \subseteq A^{-1}(q, x, \mu) [U(x) - b(q, \dot{q}, x, \mu)],$$

а поскольку ограничения на u имеют вид (3.8), то их можно заменить неравенствами

$$-\hat{u}(x) \leq A(q, x, \mu) A^{-1}(q, y, \mu) [v - b(q, \dot{q}, y, \mu)] + b(q, \dot{q}, x, \mu) \leq \hat{u}(x), \quad (3.9)$$

которые должны выполняться для любых v , удовлетворяющих условию

$$-\hat{u}(y) \leq v \leq \hat{u}(y).$$

Преобразуем (3.9) к более удобному виду. Обозначим для краткости

$$b = b(q, \dot{q}, x, \mu) - A(q, x, \mu) A^{-1}(q, y, \mu) b(q, \dot{q}, y, \mu), \\ A = A(q, x, \mu) A^{-1}(q, y, \mu) = \| a_{ij} \|.$$

Тогда условие (3.9) можно записать в виде

$$-\hat{u}(x) \leq b + Av \leq \hat{u}(x) \quad (3.10)$$

при всех $-a(y) \leq v \leq a(y)$. Поскольку экстремумы $\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, n$ достигаются в крайних точках множества $U(y)$, неравенства (3.10) равносильны включению отрезков

$$[b_i - (|A| \hat{u}(y))_i, b_i + (|A| \hat{u}(y))_i] \subseteq [-\hat{u}_i(x), \hat{u}_i(x)], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.11)$$

где $|A|$ обозначает матрицу, составленную из модулей элементов матрицы A .

При $b_i \geq 0$ включение (3.11) выполняется, если $b_i + (|A| \hat{u}(y))_i \leq \hat{u}_i(x)$, а при $b_i \leq 0$, когда $b_i - (|A| \hat{u}(y))_i \geq -\hat{u}_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Оба эти неравенства можно записать в виде

$$|b_i| + (|A| \hat{u}(y))_i \leq \hat{u}_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$|b(q, \dot{q}, x, \mu) - A(q, x, \mu) A^{-1}(q, y, \mu) b(q, \dot{q}, y, \mu)| + \\ + |A(q, x, \mu) A^{-1}(q, y, \mu)| \hat{u}(y) \leq \hat{u}(x). \quad (3.12)$$

Используем теперь бинарное отношение между x и y , задаваемое неравенством (3.12), в модельной задаче выбора параметров простейшего манипулятора на рис. 4^{*}). Его уравнения движения (2.14) — (2.16) приведены в примере 2.4 гл. 2. Проектными параметрами являются массы $x = (m_1, m_2)$ звеньев манипулятора из допустимого множества

$$X = \{x \mid M_1 \leq m_1 + m_2 \leq M_2, m_1 \geq m_1^0, m_2 \geq m_2^0\},$$

где $m_1^0 + m_2^0 \leq M_1, M_2 \geq M_1 > 0, m_i^0 > 0, i = 1, 2$. Здесь m_1^0, m_2^0 могут задавать ограничения, вытекающие из необходимой прочности звеньев. Неопределенным фактором $\mu = m, 0 \leq m \leq m^0$, является масса груза в схвате.

Первое из скалярных неравенств (3.12) в силу (2.14) — (2.16) в результате несложных преобразований можно привести

* Этот пример предложен А. Г. Перевозчиковым.

к виду

$$\frac{l\dot{\varphi}^2}{2} \left| \frac{m_1}{m+m_1} - \frac{m'_1}{m+m'_1} \right| \leq \frac{\hat{u}_1}{m+m_1} - \frac{\hat{u}_1}{m+m'_1} \quad (3.13)$$

при всех $|\dot{\varphi}| \leq \dot{\varphi}_0$, $m \in [0, m^0]$. Здесь штрих означает проектные параметры альтернативы y .

Положим

$$W^1(x) = m_1. \quad (3.14)$$

Пусть $m_1 \leq m'_1$; тогда (3.13) превращается в неравенство

$$W^2(x, m) \leq W^2(y, m), \quad m \in [0, m^0],$$

где

$$W^2(x, m) = - \frac{\hat{u}_1 + \frac{l\dot{\varphi}_0^2}{2} m_1}{m + m_1}. \quad (3.15)$$

Второе скалярное неравенство (3.12) приводится к виду

$$2r\dot{\varphi} \left| \frac{B}{C} - \frac{B'}{C'} \right| \leq \frac{\hat{u}_2}{C} - \frac{\hat{u}_2}{C'},$$

где

$$B(x, m, r) = (m + m_1)r - m_1 l / 2, \quad (3.16)$$

$$C(x, m, r) = (m + m_1)r^2 - m_1 l r + m_1 \frac{l^2}{3} + \theta m_2 \geq \frac{m_1^0 l^2}{12} > 0.$$

Раскрывая модуль, приходим к неравенствам

$$W^i(x, m, r) \leq W^i(y, m, r), \quad i = 3, 4,$$

при всех $m \in [0, m^0]$, $r \in [0, 1]$, где

$$W^3(x, m, r) = - \frac{\hat{u}_2 + 2r_0 \dot{\varphi}_0 B(x, m, r)}{C(x, m, r)}, \quad (3.17)$$

$$W^4(x, m, r) = \frac{2r_0 \dot{\varphi}_0 B(x, m, r) - \hat{u}_2}{C(x, m, r)}. \quad (3.18)$$

Наконец, третье скалярное неравенство (3.12) эквивалентно тому, что

$$\hat{u}_3 \left[\frac{1}{m + m_1 + m_2} - \frac{1}{m + m'_1 + m'_2} \right] \geq 0$$

при любых $m \in [0, m^0]$, т. е.

$$W^5(x) \leq W^5(y)$$

при

$$W^5(x) = m_1 + m_2. \quad (3.19)$$

Итак, мы получили, что улучшение проектных параметров манипулятора соответствует уменьшению величин (3.14)–(3.19), т. е. вектор-функция $W(x, m, r) = (W^1, \dots, W^5)$ образует вектор технических характеристик (на этот раз подлежащих уменьшению). Полученный набор из пяти характеристик представляет собой минимальную систему. Действительно, выпуклая оболочка вектограммы системы (2.14) в силу диагональности матрицы $A(\cdot)$ и ограничений (2.15) является параллелепипедом в трехмерном пространстве $(\bar{r}, \varphi, \bar{y})$. Параллелепипед же вполне описывается тремя длинами сторон и тремя координатами центра, причем одна из них — третья — фиксирована (см. (2.14)).

Заметим, что вектор технических характеристик определяется неединственным образом, например, вместо (3.18) можно взять $W^4 = B/C$. Это и не удивительно, ведь мы описываем простой геометрический факт — включение выпуклых оболочек — параллелепипедов, что можно сделать многими способами.

Рассмотрим предельный случай, когда $m^0 = 0$, $\theta = 0$, т. е. масса схвата с грузом и момент инерции вертикального звена пренебрежимо малы по сравнению с массами m_1 , m_2 звеньев манипулятора. Из (3.15)–(3.18) находим, что

$$W^2(x) = -\frac{\hat{u}_1}{m_1} - \frac{l\dot{\varphi}_0^2}{2},$$
$$W^{3,4}(x, r) = -\frac{\hat{u}_2}{m_1 \left(r^2 - rl + \frac{l^2}{3} \right)} \mp \frac{2r\dot{\varphi}_0 \left(r - \frac{l}{2} \right)}{r^2 - rl + \frac{l^2}{3}},$$

т. е. сравнение альтернатив из X по этим характеристикам равносильно сравнению по W^1 . Итак, остается двумерный векторный критерий $W(x) = (m_1, m_1 + m_2)$ и сразу можно найти множество X^* из X , состоящее из единственной точки $x^* = (m_1^0, M_1 - m_1^0)$. Таким образом, в рассмотренном примере построенное отношение позволило полностью решить задачу проектирования.

§ 4. О методах решения многокритериальных задач

Метод последовательного анализа вариантов из § 1 для своей реализации требует не только синтеза аппроксимирующих бинарных отношений, но и решения задачи отыскания их ядер — множества максимальных элементов. Важный и распространенный класс таких задач составляют задачи многокритериальной оптимизации. Они характеризуются тем, что бинарное отношение

на множестве альтернатив, из которого следует осуществить выбор, связано с набором показателей — критериев, образующих векторный критерий эффективности. Это бинарное отношение порождается различными способами. Так, если

$$W(x) = (W^1(x), \dots, W^m(x)) \quad (4.1)$$

— векторный критерий на множестве X , то бинарное отношение может быть отношением Парето или отношением Слейтера из § 4 гл. 2.

В других случаях бинарное отношение на X задается *системой предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР)*. Таким образом, предполагается, что основным источником информации является человек, располагающий сведениями, достаточными для принятия (единственного) решения. Выявление системы предпочтений ЛПР представляет собой одну из главных проблем при решении многокритериальных задач. Обычно процедуры выявления предпочтений ЛПР строятся на языке векторных оценок альтернатив, т. е. на основе значений векторного критерия (4.1).

Так, понимаемая многокритериальная задача относится к числу *слабоструктуризованных задач*, в которых центр тяжести смещен в сторону определения, что следует считать наилучшей альтернативой в задаче с несколькими целевыми функциями, которые противоречивы и достигают максимума в различных точках множества альтернатив.

Вычислительные трудности как бы отходят на второй план. В настоящее время разработаны многочисленные процедуры решения многокритериальных задач, предложена их классификация (см., например [17, 31]). Наиболее эффективными представляются человекомашинные процедуры, основанные на «диалоге» ЛПР с ЭВМ (другое название *адаптивные процедуры* [17]). Такие процедуры, безусловно, необходимы и при решении задач проектирования сложных систем. Объясняется это тем, что для последовательного анализа и отбраковки вариантов проектируемого объекта недостаточно одних формальных приемов и рано или поздно приходится обращаться к конструктору, играющему роль ЛПР.

В отличие от сказанного, при отыскании множества Парето или множества Слейтера по критерию (4.1) методологические проблемы не возникают, поскольку уже четко определено понятие решения многокритериальной задачи. Остаются трудности вычислительного характера, типичные для экстремальных задач. В настоящее время большинство работ по оптимизации посвящено обычным (однокритериальным) экстремальным задачам, численные методы для многокритериальных задач менее разработаны. В этом параграфе кратко остановимся на задачах поиска эффективных (оптимальных по Парето) и слабоэффективных

(оптимальных по Слейтеру) альтернатив. Методы их решения интенсивно развиваются; имеются реализованные на ЭВМ программы, пакеты программ и программные системы. О некоторых из них упоминается ниже.

Ряд алгоритмов основан на скаляризации — сведении к параметрическому семейству задач скалярной оптимизации [40].

Можно доказать, что если $x_* \in P(X, W)$ — эффективная точка в линейной многокритериальной задаче (с линейными критериями (4.1) на многограннике X), то существует вектор λ ,

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in E^m / \lambda_i > 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

такой, что x_* является решением задачи линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i W^i(x) \rightarrow \max_{x \in X} \quad (4.2)$$

Обратно, для любого $\lambda \in \Lambda$ решение задачи (4.2) является эффективной точкой [40].

Отсюда вытекает, что для отыскания $P(X, W)$ можно использовать хорошо разработанные методы линейного программирования.

Решение нелинейных многокритериальных задач представляет собой значительно более сложную проблему. Переходя к ней, рассмотрим вначале возможности алгоритмов градиентного типа.

Пусть на компакте $X \subset E^n$ заданы m положительных непрерывных дифференцируемых критериев (4.1).

Определим

$$X_0(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} \left[\min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i W^i(x) \right], \quad (4.3)$$

где, как и ранее, $\lambda \in \Lambda$. Тогда [40] множество полуэффективных точек $S(X, W)$ можно представить в следующем виде:

$$S(X, W) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_0(\lambda). \quad (4.4)$$

Представление (4.4) подсказывает следующую процедуру аппроксимации множества полуэффективных точек. Зададим на множестве Λ сеть $\{\lambda^k\}_{k=1}^K$. Для каждого значения λ^k , $k=1, \dots, K$ решим задачу отыскания $X_0(\lambda^k)$. Если сеть $\{\lambda^k\}$ достаточно плотна в Λ , то можно ожидать, что множество $\bigcup_{k=1}^K X_0(\lambda^k)$ является хорошей аппроксимацией для $S(X, W)$. Практическая реализация такого подхода требует решения максиминных задач типа (4.3). В настоящее время для них предложен ряд алгорит-

мов градиентного типа. Однако их применение ограничено двумя обстоятельствами.

Во-первых, методы градиентного типа, даже в случае сходимости к глобальному оптимуму, позволяют найти не все множество (4.3), а лишь некоторую его точку. При этом можно рассчитывать только на аппроксимацию образа множества $S(X, W)$ в m -мерном критериальном пространстве.

Во-вторых, при большом числе узлов в сети $\{\Lambda^k\}$ решение всех задач (4.3) невозможно в силу ограничений по времени, отведенному на расчеты. Для того чтобы преодолеть эту трудность, следует при решении очередной задачи учитывать информацию, полученную на предыдущих этапах. Все это приводит к идее использования *нестационарных процессов математического программирования** для нахождения аппроксимации множества полуэффективных точек.

В том случае, когда в многокритериальной задаче о векторном критерии (4.1) имеется лишь самая общая информация (а такая ситуация типична для задач проектирования сложных объектов), естественно применять методы, основанные на этой информации и вычислении только значений критериев. Такие методы интенсивно разрабатывались для однокритериальных многоэкстремальных оптимизационных задач, хорошо себя зарекомендовали и в настоящее время «переносятся» на задачи отыскания множеств эффективных и полуэффективных точек [21, 38, 43, 45]. Отметим методы *неравномерных покрытий*** и методы, основанные на *информационно-статистическом подходе* [45].

Основная проблема, которая возникает при разработке методов решения многоэкстремальных многокритериальных задач, заключается в достижении при заданной точности возможно наименьшего количества вычислений значений критериев и экономии потребной памяти ЭВМ. Сделать это удастся только на основе имеющейся о задаче информации. Для пояснения сказанного опишем схему построения алгоритмов, оптимальных на классе многокритериальных задач [46].

Пусть $Y=W(X)$ — образ множества X при отображении $W(\cdot)$. Введем на Y бинарное отношение \geq , положив $y \geq y_* \leftrightarrow \leftrightarrow y^i \geq y_*^i, i=1, \dots, m; y \neq y_*$.

Очевидно, бинарное \geq на Y порождает на множестве X отношение Парето по критерию $W(\cdot)$. Множество Y_* всех макси-

*) Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. М., Наука, 1979.

***) Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке)//ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 6, с. 1390—1403; Попов Н. М. Приближенное решение многокритериальных задач с функциональными ограничениями//ЖВМ и МФ, 1986, 26, № 10, с. 1468—1481.

мальных по отношению \geq векторов $y \in Y$ будем здесь называть множеством Парето.

Определение 4.1. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$, $\varepsilon^1 > 0, \dots, \varepsilon^m > 0$. Множество Y_ε^* называется ε -аппроксимацией по Парето множества Y_* , если векторы множества Y_ε^* попарно несравнимы и

$$\sup_{y_* \in Y_*} \inf_{y_*^* \in Y_\varepsilon^*} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{y_*^i - y_*^{*i}}{\varepsilon^i} \leq 1.$$

Иными словами, для любого $y_* \in Y_*$ найдется такой вектор $y_*^* \in Y_\varepsilon^*$, что $y_*^{*i} \geq y_*^i - \varepsilon^i$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Цель состоит в том, чтобы, выбрав надлежащим образом точки $x_1, \dots, x_N \in X$ и вычислив в них значения $W(\cdot)$, выделить во множестве $Y^* = \{W(x_1), \dots, W(x_N)\}$ подмножество Y_ε^* являющееся ε -аппроксимацией по Парето множества Y_* . При этом число N точек должно быть минимальным, при котором можно гарантировать достижение поставленной цели.

Предположим, что

$$|W^i(x') - W^i(x'')| \leq M_i \rho(x', x''), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

где M_1, \dots, M_m — известные константы, а ρ — метрика (условие Липшица). Кроме того, для упрощения построений положим

$$\varepsilon^1/M_1 = \dots = \varepsilon^m/M_m = \delta. \quad (4.6)$$

Класс всех вектор-функций (многокритериальных задач) $W(\cdot)$, удовлетворяющих (4.5), обозначим через \mathcal{F} .

Любой алгоритм решения поставленной задачи состоит из двух этапов.

На первом этапе, производя основные вычисления (в данном случае вычисляя значения $W(\cdot)$ в точках x_1, \dots, x_N), получают информацию о задаче из класса \mathcal{F} . В зависимости от характера поступления, хранения и использования информации можно выделить различные классы алгоритмов.

Применение *последовательных (адаптивных) алгоритмов* предполагает наличие перед выбором точки очередного основного вычисления информации о результатах всех предыдущих основных вычислений и возможности для ее хранения и обработки. При этом точку очередного вычисления находят как значение вектор-функции, аргументом которой служит накопленная информация.

Подмножество множества всех последовательных алгоритмов составляют *пассивные алгоритмы*, соответствующие функциям-константам. Их применение не предполагает поступления какой-либо информации и делает поэтому оправданным выбор всех точек x_1, \dots, x_N до начала вычислений.

Второй этап состоит в построении на основании полученной информации подмножества Y^e . На практике второй этап начинается не обязательно после завершения первого, и в случае, если применяется последовательный алгоритм, промежуточные результаты второго этапа могут использоваться на первом этапе при выборе точек основных вычислений.

В данной задаче подмножество Y^e состоит из векторов, не улучшаемых на множестве Y^e . Эффективная организация вычислений второго этапа не вызывает сомнений, поэтому в дальнейшем под алгоритмом будем понимать лишь способ выбора точек

$$X^e = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Назовем алгоритм *оптимальным (минимаксным)* на данном классе алгоритмов, если он решает любую задачу из \mathcal{F} за N шагов (произведя N основных вычислений), и не существует алгоритма, принадлежащего тому же классу, который решал бы любую задачу из \mathcal{F} менее чем за N шагов.

Будем предполагать, что в X существует конечная δ -сеть, где число δ задано в (4.6).

Справедливо следующее утверждение [46]:

1) алгоритм, в качестве $X^e = \{x_1, \dots, x_{N(\delta)}\}$ выбирающий δ -сеть с минимальным числом элементов, оптимален в классе пассивных алгоритмов;

2) не существует последовательного алгоритма, который решал бы любую задачу из \mathcal{F} менее чем за $N(\delta)$ шагов.

Таким образом, применение последовательных алгоритмов не позволяет уменьшить число основных вычислений $N(\delta)$ при решении наихудшей задачи из \mathcal{F} . Однако существуют алгоритмы, которые в благоприятных случаях позволяют решать задачу значительно быстрее.

Назовем алгоритм *последовательно-оптимальным*, если в любой ситуации, сложившейся в ходе решения задачи, он позволяет гарантировать получение искомого решения за минимально возможное в этой ситуации число шагов. Последовательно-оптимальный алгоритм является оптимальным в классе всех последовательных.

Построение последовательно-оптимального алгоритма требует решения сложных вспомогательных задач, что делает затруднительной его практическую реализацию. Ограничимся поэтому построением одного из оптимальных алгоритмов, который, не являясь последовательно-оптимальным, все же в благоприятных случаях значительно сокращает по сравнению с пассивным алгоритмом число основных вычислений и в то же время допускает достаточно простую программную реализацию.

На первом шаге в качестве точки x_1 основного вычисления выбирается произвольная точка δ -сети на X с $N(\delta)$ элементами. В качестве x_2 выбирается любая другая точка той же сети.

Пусть сделано i шагов ($i \geq 2$) и значения $W(\cdot)$ вычислены в точках x_1, \dots, x_i . Определим функции

$$\varphi_j^i(x) = \min_{1 \leq l < i} \{W^l(x_l) + M_{j\rho}(x, x_l)\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Вектор-функция $\varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^m)$ является точной мажорантой для вектор-функций из \mathcal{F} , принимающих в точках x_i значения, которые были вычислены (рис. 14, а).

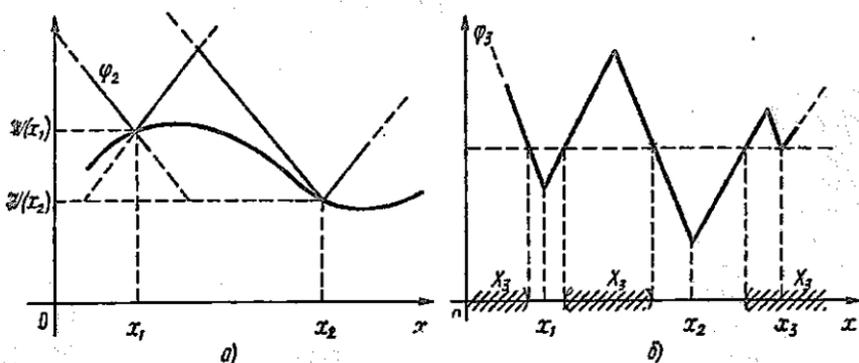


Рис. 14

Положим (рис. 14, б)

$$X_i = X \setminus \bigcup_{l=1}^i \{x \mid \varphi_i(x) \leq W(x_l) + \varepsilon\} = X \setminus \bigcup_{l=1}^i \prod_{j=1}^m \{x \mid \varphi_j^i(x) \leq W^j(x_l) + \varepsilon^j\} = X \setminus \bigcup_{l=1}^i \prod_{j=1}^m \bigcup_{p=1}^l \left\{x \mid \rho(x, x_p) \leq \frac{W^j(x_l) - W^j(x_p) + \delta}{M_j}\right\}.$$

Если $X_i = \emptyset$, то вычисления прекращают. Если $X_i \neq \emptyset$, то обозначим через $N_i(\delta)$ минимальное число элементов, принадлежащих X , но не обязательно X_i , из которых можно образовать δ -сеть для X_i .

На $(i+1)$ -м шаге в качестве x_{i+1} выбирается произвольная точка δ -сети для X_i с $N_i(\delta)$ элементами.

Определенный таким образом алгоритм обозначим через α . Как показано в [46], он оптимален.

Непосредственная реализация алгоритма α на ЭВМ для случая произвольных X и ρ сложна из-за необходимости построения на каждом шаге δ -сетей с минимальным числом элементов, что требует, в свою очередь, решения сложных геометрических задач построения оптимальных покрытий.

Сделаем поэтому ряд упрощающих предположений.

Пусть X является n -мерным координатным параллелепипедом с ребрами длины $2\delta m_1, \dots, 2\delta m_n$; $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|$.

Разобьем X на $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ координатных параллелепипедов с ребрами длины 2δ . Обозначим центры параллелепипедов через u_1, \dots, u_N . Ясно, что $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ — δ -сеть на X с минимальным числом элементов и, следовательно, $N = N(\delta)$.

Основное упрощение исходного алгоритма α состоит в том, что после i шагов в качестве δ -сети для множества X_i выбирается δ -сеть, содержащая только точки множества U . Такой сетью является

$$U_i = U \setminus \bigcup_{l=1}^i \{u \mid \varphi_l(u) \leq W(x_l)\}. \quad (4.7)$$

Очевидно, в (4.7) достаточно брать объединение только тех множеств, которые соответствуют векторам $W(x_l)$, не доминируемым векторами $W(x_j)$, $j = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, i$.

Принятые допущения позволяют построить достаточно простую программную реализацию алгоритма многокритериальной оптимизации, хотя при этом число элементов множества U_i может оказаться больше $N_i(\delta)$.

Для организации работы алгоритма в памяти выделяется массив из N элементов. Элемент, соответствующий j -й точке (точке u_j), находится на j -м месте в массиве (необходимо иметь программу, устанавливающую взаимно-однозначное соответствие между номерами и координатами точек) и содержит после i шагов следующие записи: m компонент вектор-функции $W(\cdot)$ для элементов определяемого ниже списка А, m компонент вектор-функции $\varphi_i(\cdot)$ для элементов списка Б, а также необходимые указатели.

На первом шаге случайно равновероятно выбирается номер $j_1 \in \{1, \dots, N\}$, принимается $x_1 = u_{j_1}$, вычисляется $W(x_1)$ и органиуются два связанных списка.

В список А включается элемент, соответствующий точке x_1 , в список Б — остальные элементы. Для элементов списка Б вычисляются значения φ_1 .

Пусть сделано i шагов, вычислены векторы $W(x_1), \dots, W(x_i)$. В списке А содержатся элементы, соответствующие тем из вычисленных векторов, которые не доминируются векторами множества $\{W(x_1), \dots, W(x_i)\}$. Элементы, соответствующие доминируемым векторам, находятся в числе исключенных элементов. Список Б состоит из неисключенных элементов.

На $(i+1)$ -м шаге случайно равновероятно выбирается элемент из списка Б. Пусть выбран j -й элемент массива. Вектор $\varphi_i(u_j)$ сравнивается поочередно с векторами $W(x_l)$ списка А.

Если $\varphi_i(u_j) \leq W(x_l)$, то выбирается элемент, соседний с j -м в списке Б, сам j -й элемент исключается и вектор φ_i , соответствующий вновь выбранному элементу, сравнивается поочередно с векторами $W(x_l)$ списка А.

В противном случае принимается $x_{i+1} = u_j$, вычисляются

$$\varphi_{i+1}^p(u_l) = \min\{\varphi_i^p(u_l), W^p(x_{i+1}) + M_{p,p}(x_{i+1}, u_l)\}, \quad p = 1, \dots, m$$

для всех точек u_l , относящихся к элементам списка Б.

Вектор $W(x_{i+1})$ сравнивается поочередно с векторами $W(x_l)$ списка А. Если $W(x_{i+1}) \leq W(x_l)$ для некоторого l , то j -й элемент массива (соответствующий $W(x_{i+1})$) исключается. В противном случае из списка А исключаются векторы, доминируемые вектором $W(x_{i+1})$ (если таковые найдутся), а j -й элемент включается в список А.

Вычисления прекращаются, если список Б пуст. Векторы $W(x_l)$ списка А дают искомое решение.

Отметим, что предложенный алгоритм несмотря на его очевидные недостатки по сравнению с оптимальным пассивным алгоритмом, т. е. методом полного перебора элементов множества U (большая потребная память, а также необходимость организации списков, вычисления векторов φ_i , сравнения их с W и т. д.), способен при высокой сложности основных вычислений принести значительную экономию машинного времени.

Можно разработать различные модификации такого алгоритма на случаи, когда наряду с условием $x \in X$ имеются ограничения типа неравенств, константы M_1, \dots, M_m в (4.5) неизвестны либо известны неточно или требуется приближенно найти не все множество неуплучшаемых векторов Y_* , а какое-то его подмножество.

Использование для решения многокритериальных задач идей скалярной глобальной оптимизации является естественным. В настоящее время разработан и реализован на ЭВМ ряд алгоритмов многокритериальной оптимизации для класса задач, удовлетворяющих условию Липшица. Эти алгоритмы используют лишь значения вектор-функции W и по-разному перерабатывают (не обязательно оптимальным образом) информацию, накопленную в ходе решения задачи. По-видимому, именно алгоритмы такого типа наиболее пригодны для решения задач проектирования на этапе формирования облика системы, когда нельзя требовать детальной информации о поведении оптимизируемых функций, ограничений, а также в случае дискретного множества альтернатив X .

Программная реализация алгоритмов на ЭВМ является сложной задачей. От способов хранения и поиска информации, оценки констант Липшица во многом зависят время и размерность решаемых задач.

Методы последовательного анализа вариантов ориентированы на использование переборных алгоритмов типа тех, о которых говорилось выше. В свою очередь, это требует аппроксимации множества вариантов конечным множеством. Однако при этом возникают определенные сложности. Рассмотрим следующий пример.

Пусть A, B — два подмножества из E^n . Введем

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y)$$

— отклонение A от B и

$$h(A, B) = \max [d(A, B), d(B, A)] \quad (4.8)$$

— «расстояние» между A и B (метрика Хаусдорфа).

Допустим, что множество Y есть квадрат, изображенный на рис. 15. На нем заданы естественные бинарные отношения:

$$y_1 > y_2 \leftrightarrow y_1^i > y_2^i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$y_1 \geq y_2 \leftrightarrow y_1^i \geq y_2^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad y_1 \neq y_2.$$

Тогда множество максимальных точек по первому отношению $>$ — множество полуэффективных точек есть $S(Y) = CBA$, а множество Парето — ядро отношения \geq состоит из одной точки $P(Y) = \{B\}$.

Придадим множеству Y «возмущения» 1 и 2, соответствующие штриховым линиям на рис. 15.

Возмущенное множество Y^ε является ε -приближением к Y в метрике Хаусдорфа (4.8). В то же время $S(Y^\varepsilon)$ в случае 2 и $P(Y^\varepsilon)$ в случае 1 никак нельзя считать приближением для $S(Y)$ и $P(Y)$ соответственно, поскольку

$$S(Y^\varepsilon) = \{B\}, \quad P(Y^\varepsilon) = DBE$$

при любом $\varepsilon \neq 0$.

Итак, мы показали, что сколь угодно малые возмущения множества альтернатив Y могут приводить к конечным погрешностям в определении множеств Парето и множеств полуэффективных точек. Другими словами, задача отыскания ядра бинарного отношения в общем случае является неустойчивой. Эффект неустойчивости может сказаться при применениях сеточных аппроксимаций в численных методах и при наличии погрешностей в вычислении критериев, задающих отношения, поскольку все это равносильно возмущениям множеств альтернатив в метрике (4.8). Следовательно, при решении неустойчивых задач нужно применять специальные приемы (методы регуляризации). Некоторые методы регуляризации и аппроксимации многокритериальных задач приведены в [44]*.

* См. также: Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. М., Наука, 1987.

С проблемами аппроксимации многокритериальных задач тесно связаны вопросы оценки максимального числа недоминируемых альтернатив в конечных множествах [5, 17, 40]. Эти оценки имеют определенную ценность при реализации методов автоматизированного проектирования на ЭВМ, поскольку дают представление о потребной машинной памяти.

Отметим, что существующие методы решения многокритериальных задач далеко не равноценны с точки зрения их апробированности и применимости в схемах автоматизированного проектирования.

Предпочтение, по-видимому, следует отдать алгоритмам переборного типа, которые ориентированы на поиск глобального оптимума и требуют лишь самой общей информации о задаче. Методы решения линейных многокритериальных задач

могут дополнять их. Например, если найдено первое приближение для множества эффективных точек, то его целесообразно уточнить. Для этого следует линеаризовать задачу в окрестности найденных точек и применить соответствующий алгоритм.

Алгоритмы градиентного типа широко используют на многих этапах проектирования. Наибольший эффект они дают на стадии проектирования «от прототипа» и проектирования отдельных подсистем, когда можно четко поставить однокритериальные задачи оптимизации. Таковы, например, задачи минимизации веса конструкций, стоимости и т. п. Однако на некоторых этапах их использование затруднительно. Это связано с дискретным характером задач либо с недостаточной степенью формализации. Последнее типично для задачи внутреннего проектирования сложных систем, в которых процессы решения и постановки задачи идут параллельно.

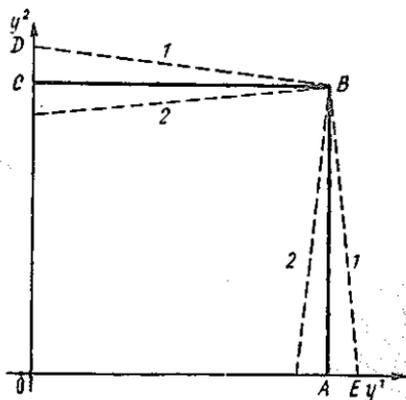


Рис. 15

ГЛАВА 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой главе общая схема последовательного анализа вариантов применена для решения задач проектирования управляемых динамических систем. В какой-то мере общая схема уже проиллюстрирована в § 2 и 3 предыдущей главы. Однако там она свелась фактически к одному шагу «отбраковки» альтернатив, что может оказаться неэффективным в сложных задачах. Причиной этого было наличие лишь минимальной информации об отношении сравнительной эффективности в задаче проектирования. Теперь предположим, что бинарное отношение обладает еще рядом естественных для данного класса задач проектирования свойств. Благодаря этому удастся построить более эффективные методы последовательного анализа вариантов, чем в гл. 3.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим пару позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения [4, 10] альтернатив $x, y \in X$, описываемую уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v, x, y), \quad z \in E^n, \quad (1.1)$$

ограничениями на допустимые управления u, v

$$u \in U(x, y), \quad v \in V(x, y), \quad (1.2)$$

областями существования системы (1.1) Z_1, Z_2 , заданными в фазовом пространстве $\{z\}$, и целевыми множествами $G_1 \subseteq Z_1, G_2 \subseteq Z_2$. В первой игре альтернатива x , распоряжаясь выбором управления u решает задачу $(G_1, Z_1)_u$ -сближения ([10], с. 58): привести точку $z(t)$ на G_1 , не выходя из Z_1 ; во второй игре альтернатива y , распоряжаясь выбором v , решает задачу $(G_2, Z_2)_v$ -сближения: привести $z(t)$ на G_2 , не выходя из Z_2 . Предполагается, что рассматриваемые игры удовлетворяют всем ограничениям работы [4], при которых справедлива теорема об альтернативе ([4], с. 68).

Данные игры уже рассматривались в § 5 гл. 2 при постановке задачи проектирования, где отмечалось, что ими описывается широкий круг задач конфликтного и неконфликтного управления, моделирующих практически важные взаимодействия реальных объектов. Говоря о летательных аппаратах, сюда можно отнести маневренный воздушный бой, прорыв зоны противоздушной обороны, наведение на маневрирующую цель, функционирование при наличии помех и неточной информации и др.

Пусть $\mu(\cdot)$ — вероятностная мера, заданная на множестве всех подмножеств пространства $\{z\}$, $\Sigma_1(x, y)$ и $\Sigma_2(x, y)$ — множества всех начальных состояний z_0 системы (1.1), из которых разрешимы задачи (G_1, Z_1) -сближения и (G_2, Z_2) -сближения соответственно. Критерий сравнительной эффективности $\varphi: X^2 \rightarrow E^1$ определим следующим равенством:

$$\varphi(x, y) = \mu(\Sigma_1(x, y)) - \mu(\Sigma_2(x, y)). \quad (1.3)$$

Отметим, что все приводимые ниже утверждения непосредственно переносятся на задачи проектирования в многокритериальной постановке; каждый частный критерий сравнительной эффективности $\varphi^i(\cdot)$, $i = \overline{1, m}$ при этом определяется, вообще говоря, своей моделью оценки эффективности, т. е. функцией $f^i(\cdot)$, множествами $U^i(\cdot), V^i(\cdot), Z_1^i, Z_2^i, G_1^i, G_2^i$ и мерой $\mu^i(\cdot)$.

В соответствии с § 4 гл. 2 бинарное отношение Φ на множестве альтернатив X зададим в виде

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi(x, y) \in \Delta\},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, а Δ — один из конусов неотрицательного ортанта пространства E_+^m :

$$\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}, \quad \Delta_1 = E_+^m, \quad \Delta_2 = \{r \in E_+^m \mid r \neq 0\}, \quad \Delta_3 = \{r \in E_+^m \mid r > 0\}.$$

Задача проектирования технической системы, функционирование которой оценивается через решение сформулированных позиционных игр, ставится как задача отыскания ядра:

$$X \rightarrow X^* = \text{Max}(X, \Phi). \quad (1.4)$$

Отметим некоторые ее особенности. Согласно определению (1.3) бинарное отношение Φ может оказаться нетранзитивным, т. е. имеет место ситуация, отмеченная еще в гл. 2. Можно лишь утверждать, что отношение, порожденное конусом $\Delta \in \{\Delta_2, \Delta_3\}$, асимметричное. Таким образом, нетранзитивность отношения сравнительной эффективности в задачах проектирования вовсе не является «вырожденным» случаем, порожденным несовершенством представлений ЛПР об эффективности. Скорее это типичная для задач проектирования динамических систем ситуация, возможность которой обязательно следует принимать во внимание, разрабатывая методы решения.

Далее, допустим, что система (1.1), (1.2) «распадается» на два независимых уравнения, описывающих движения x и y соответственно. Очевидно, из включения $D(y) \subseteq D(x)$ множеств обобщенных движений альтернатив x и y обязательно следует $x \Phi y$. Таким образом, отношение сравнительной эффективности, определенное с помощью (1.3), удовлетворяет в этом случае условию (2.4) гл. 3. Следовательно, в задаче (1.4) мы обладаем не меньшей информацией, чем в задаче проектирования из гл. 3. Эту дополнительную информацию об отношении Φ мы попытаемся выявить и использовать для развития метода последовательного анализа вариантов при решении задачи проектирования (1.1) — (1.4).

Наконец, в силу произвольной зависимости функции $f^i(\cdot)$ и множеств $U^i(\cdot)$, $V^i(\cdot)$ от проектных параметров часть компонент векторов x и y может описывать структуру проектируемой системы. Таким образом, задача (1.4) является в общем случае задачей структурно-параметрического синтеза проектируемой системы.

Как уже неоднократно отмечалось, трудности вычисления критериев $f^i(\cdot)$, задающих отношение Φ на X , не позволяют прямыми методами поиска решить на ЭВМ задачу (1.4) при достаточно большом числе $|X|$ элементов множества X . Поэтому целесообразно применить метод последовательного анализа вариантов, общая схема которого описана в гл. 3. Конкретизируя эту схему, покажем, что трудности конкретизации превосходят трудности разработки общей абстрактной схемы. Подобная ситуация, по-видимому, характерна для теории автоматизированного проектирования сложных систем.

§ 2. Синтез отношений в последовательном анализе вариантов динамических систем

Рассмотрим задачу синтеза бинарных отношений, которые в общей схеме последовательного анализа вариантов служили для отбраковки неперспективных альтернатив. При этом потребуем, чтобы сравнение альтернатив по синтезируемым отношениям представляло собой значительно менее трудоемкую задачу, чем сравнение их по глобальному отношению эффективности Φ . Выполнение этого требования, как уже отмечалось, позволит приблизиться к практической реализации схемы (1.4) из гл. 3 на современных ЭВМ.

Пусть $r \in E^n$, $\varepsilon, \delta, \lambda, \nu > 0$. Положим

$$\begin{aligned} \chi_1(r, z, x, y) &= \min_{u \in U(x, y)} \max_{v \in V(x, y)} \langle r, f(z, u, v, x, y) \rangle, \quad \chi_2(r, z, x, y) = \\ &= \min_{v \in V(x, y)} \max_{u \in U(x, y)} \langle r, f(z, u, v, x, y) \rangle, \quad \chi_j(\varepsilon, \lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) = \end{aligned}$$

$$= \sup_{r \in E^n, z \in Z_j^e} (\chi_j(r, z, x_1, y_1) - \lambda \chi_j(r, z, x_2, y_2)), \quad (2.1)$$

где Z_j^e — ε -окрестность множества Z_j , $j=1, 2$.

Введем отношения

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, \lambda; \delta, \nu) &= \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (X^2)^2 \mid ; \\ &x_1(\varepsilon, \lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) \leq 0, \kappa_2(\delta \nu; x_1, y_1; x_2, y_2) \leq 0\}; \quad (2.2) \\ \Psi &= \bigcup \Psi(\varepsilon, \lambda; \delta \nu) \text{ по } \varepsilon, \lambda, \delta, \nu > 0, \end{aligned}$$

а также верхний срез отношения Ψ (2.2):

$$\Psi_+ [x_0, y_0] = \{(x, y) \in X^2 \mid (x, y) \Psi (x_0, y_0)\}. \quad (2.3)$$

Можно показать, что Ψ — квазипорядок на X^2 .

Основное свойство отношения $\Psi_+[\cdot]$ (2.3) устанавливает следующая теорема:

Теорема 2.1. Для всяких $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$

$$x_1 \Psi_+ [x_2, y_2] y_1, x_2 \Phi y_2 \Rightarrow x_1 \Phi y_1. \quad (2.4)$$

Доказательство. Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$, $\varepsilon, \lambda > 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу $(G_1, Z_1)_{\frac{\mu}{\lambda}}$ -сближения системы:

$$\dot{z} = \rho f(z, u_1, v_1, x_1, y_1) + (1 - \rho) \lambda f(z, u_2, v_2, x_2, y_2), \quad (2.5)$$

$$\rho \in \{0, 1\}, u_j \in U(x_j, y_j), v_j \in V(x_j, y_j), j=1, 2. \quad (2.6)$$

Игрок, решающий задачу сближения, распоряжается управлением $\bar{u} = (\rho, u_1, u_2)$. Можно показать, что из выполнимости условий, при которых справедлива теорема об альтернативе ([4], с. 68), для системы (1.1), (1.2) § I с $(x, y) = (x_1, y_1)$ и $(x, y) = (x_2, y_2)$ следует их выполнимость для системы (2.5), (2.6).

Через $\tilde{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2)$ обозначим множество всех начальных состояний z_0 системы (2.5), из которых задача $(G_1, Z_1)_{\frac{\mu}{\lambda}}$ -сближения разрешима.

Лемма 2.1. Пусть

$$\kappa_1(\varepsilon, \lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) \leq 0. \quad (2.7)$$

Тогда

$$\tilde{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) = \Sigma_1(x_1, y_1) \supseteq \Sigma_1(x_2, y_2). \quad (2.8)$$

Доказательство. Если фиксировать $\rho(\cdot) \equiv 1$, то задача $(G_1, Z_1)_{\frac{\mu}{\lambda}}$ -сближения перейдет в задачу $(G_1, Z_1)_{\mu}$ -сближения из § 1 для системы (1.1) с $(x, y) = (x_1, y_1)$. Аналогично при $\rho \equiv 0$ и $\lambda = 1$ рассматриваемая задача $(G_1, Z_1)_{\frac{\mu}{\lambda}}$ -сближения перейдет в задачу $(G_1, Z_1)_{\mu}$ -сближения из § 1 для системы (1.1) с $(x, y) = (x_2, y_2)$. Отсюда вытекает, что

$$\tilde{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) \supseteq \Sigma_1(x_1, y_1), \quad (2.9)$$

$$\tilde{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) \supseteq \Sigma_1(x_2, y_2)$$

при любом $\lambda > 0$. В последнем нетрудно убедиться, сделав замену времени $t = \lambda \tau$ в автономной системе (2.5). Таким образом, параметр $\lambda > 0$ задает отношение времени в играх альтернатив (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Пусть $M \in \{t, z\}$ — максимальный \bar{u} -стабильный мост в игровой задаче $(G_1, Z_1)_{\bar{u}}$ -сближения; позиционная стратегия $\bar{u}^*(\cdot) = (\rho^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))$, гарантирующая сближение, определяется правилом экстремального прицеливания ([4]), с. 57):

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{v_1 \in V(x_1, y_1) \\ v_2 \in V(x_2, y_2)}} \langle r, \rho^* f(z, u_1^*, v_1, x_1, y_1) + (1 - \rho^*) \lambda f(z, u_2^*, v_2, x_2, y_2) \rangle = \\ & = \min_{\substack{u_1 \in U(x_1, y_1) \\ u_2 \in U(x_2, y_2)}} \max_{\substack{v_1 \in V(x_1, y_1) \\ v_2 \in V(x_2, y_2)}} \langle r, \rho f(z, u_1, v_1, x_1, y_1) + \\ & \quad + (1 - \rho) \lambda f(z, u_2, v_2, x_2, y_2) \rangle = \\ & = \min_{\rho \in \{0, 1\}} \left[\rho \min_{u_1 \in U(x_1, y_1)} \max_{v_1 \in V(x_1, y_1)} \langle r, f(z, u_1, v_1, x_1, y_1) \rangle + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \rho) \lambda \min_{u_2 \in U(x_2, y_2)} \max_{v_2 \in V(x_2, y_2)} \langle r, f(z, u_2, v_2, x_2, y_2) \rangle \right] = \\ & = \min \left[\min_{u_1 \in U(x_1, y_1)} \max_{v_1 \in V(x_1, y_1)} \langle r, f(z, u_1, v_1, x_1, y_1) \rangle, \right. \\ & \quad \left. \lambda \min_{u_2 \in U(x_2, y_2)} \max_{v_2 \in V(x_2, y_2)} \langle r, f(z, u_2, v_2, x_2, y_2) \rangle \right] = \\ & = \min_{u_1 \in U(x_1, y_1)} \max_{v_1 \in V(x_1, y_1)} \langle r, f(u_1, v_1, x_1, y_1) \rangle, \quad (2.10) \end{aligned}$$

где $r = z - z^*$, z^* — ближайшая к z точка множества $M_t = \{(\tau, z) \in M \mid \tau = t\}$.

Последнее равенство в (2.10) следует из неравенства (2.7) и определения (2.1) функции $\kappa_1(\cdot)$. Равенство (2.10) показывает, что стратегия сближения $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \rho^*(\cdot))$ может быть определена следующим образом: $\rho^*(\cdot) \equiv 1$, $u_2^*(\cdot)$ — произвольная функция, $u_1^*(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \max_{v_1 \in V(x_1, y_1)} \langle r, f(z, u_1^*, v_1, x_1, y_1) \rangle = \\ & = \min_{u_1 \in U(x_1, y_1)} \max_{v_1 \in V(x_1, y_1)} \langle r, f(z, u_1, v_1, x_1, y_1) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что множество M является u -стабильным в игре $(G_1, Z_1)_u$ -сближения из § 1 для системы (1.1) с $(x, y) = (x_1, y_1)$. Учитывая, что множества $\bar{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2)$ и $\Sigma_1(x_1, y_1)$ являются проекциями максимальных \bar{u} -стабильного моста, в игре $(G_1, Z_1)_{\bar{u}}$ -сближения для системы (2.5) и u -стабильного моста в игре $(G_1, Z_1)_u$ -сближения для системы (1.1) соответственно в пространство $\{z\}$, имеем

$$\bar{\Sigma}_1(\lambda; x_1, y_1; x_2, y_2) \subseteq \Sigma_1(x_1, y_1). \quad (2.11)$$

Сопоставление (2.9), (2.11) доказывает (2.8) и, следовательно, лемму.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Аналогично лемме 2.1 доказыва-
ется, что из

$$x_2(\delta, \nu; x_2, y_2; x_1, y_1) \leq 0 \quad (2.12)$$

следует

$$\Sigma_2(x_2, y_2) \subseteq \Sigma_2(x_1, y_1). \quad (2.13)$$

Пусть $x_1 \Psi_+ [x_2, y_2] y_1$. Тогда для некоторых $\varepsilon, \lambda, \delta, \nu > 0$ выполняются нера-
венства (2.7), (2.12) и, следовательно, включения (2.8), (2.13). В силу моно-
тонности меры $\mu(\cdot)$ имеем

$$\mu(\Sigma_1(x_1, y_1)) \geq \mu(\Sigma_1(x_2, y_2)), \quad \mu(\Sigma_2(x_2, y_2)) \geq \mu(\Sigma_2(x_1, y_1)).$$

Отсюда и из определения (1.3) критерия $\varphi(\cdot)$ следует

$$\varphi(x_1, y_1) \geq \varphi(x_2, y_2). \quad (2.14)$$

Пусть, далее, $x_2 \Phi y_2$. Тогда из (2.14) и определения отношения Φ вытекает
 $x_1 \Phi y_1$ и, таким образом, справедливо (2.4). \blacktriangle

Следствие. Пусть отношение Φ рефлексивно и $\Psi_0 =$
 $= \cup \Psi_+ [x, x]$ по $x \in X$. Тогда как только $x \Psi_0 y$, то $x \Phi y$.

Доказательство. Пусть $x \Psi_0 y$. Тогда найдется $x_1 \in X$ та-
кой, что $x \Psi_+ [x_1, x] y$. В силу рефлексивности Φ имеем $x_1 \Phi x_1$. Ис-
пользуя (2.4), получаем $x \Phi y$. \blacktriangle

Пусть $\theta \subseteq X^2$. Введем обозначение

$$\cup_{(x,y) \in \theta} \Psi_+ [x, y] = \Psi_+ [\theta].$$

Используя теорему 2.1, можно представить отношение Φ за-
дачи (1.4) в виде объединения отношений $\Psi_+ [\cdot]$ (2.3), т. е. как
раз в том виде, который требуется для сходимости схемы последо-
вательного анализа вариантов. Справедлива следующая теоре-
ма.

Теорема 2.2. Пусть $\theta \subseteq \Phi$. Тогда

$$\Psi_+ [\theta] \subseteq \Phi. \quad (2.15)$$

Равенство в (2.15) имеет место тогда и только тогда, когда
множество θ внешне устойчиво в модели (Φ, Ψ^{-1}) .

Доказательство. Из теоремы 2.1 вытекает, что из $(x, y) \in \Phi$ следу-
ет $\Psi_+ [x, y] \subseteq \Phi$ откуда, в свою очередь, следует (2.15).

Докажем второе утверждение теоремы. Очевидно, $(x, y) \in \Psi_+ [x, y]$. От-
сюда и из (2.15) имеем

$$\Psi_+ [\Phi] = \Phi.$$

Пусть множество θ внешне устойчиво в (Φ, Ψ^{-1}) . Тогда для всякого $(x,$
 $y) \in \Phi$ найдется $(x_\theta, y_\theta) \in \theta$ такое, что $(x, y) \Psi (x_\theta, y_\theta)$ и, следовательно,
 $(x, y) \in \Psi_+ [x_\theta, y_\theta]$. Отсюда следует

$$\Psi_+ [\theta] = \Phi. \quad (2.16)$$

Обратно пусть имеет место (2.16). Тогда для каждого $(x, y) \in \Phi$ найдется
 $(x_\theta, y_\theta) \in \theta$ такое, что $(x, y) \in \Psi_+ [x_\theta, y_\theta]$ и следовательно, $(x, y) \Psi (x_\theta, y_\theta)$.
Это означает, что множество θ внешне устойчиво в (Φ, Ψ^{-1}) . \blacktriangle

Следствие. Равенство в (2.15) имеет место тогда и только тогда, когда

$$(\theta \supseteq \text{Max}(\Phi, \Psi^{-1})) \mid I_{\Psi}.$$

Условие (2.4) отвечает принципу принятия решений «по прецеденту». Именно, если известно, что альтернатива x_2 эффективнее альтернативы y_2 и, кроме того, «взаимоотношение» альтернатив x_1 и y_1 «не хуже» взаимоотношения x_2 и y_2 , что устанавливается бинарным отношением $\Psi_{+}[\cdot]$ (2.3), то можно с уверенностью утверждать, что и альтернатива x_1 эффективнее y_1 . Этот факт открывает возможность накопления информации о «прецедентах», например в базах знаний САПР, и использования ее как своеобразный свод «законов проектирования» при принятии решений в задачах проектирования.

Итак, показано, что отношения $\Psi_{+}[\cdot]$ удовлетворяют условиям, которые в § 1 гл. 3 мы назвали условиями аппроксимации «изнутри» отношения Φ и «полноты». Отношения $\Psi_{+}[\cdot]$ являются гораздо более простыми, чем отношение Φ , так что их можно использовать в схеме последовательного анализа вариантов при решении задачи проектирования (1.4).

§ 3. Алгоритм последовательного анализа вариантов

В предыдущем параграфе была подготовлена база для реализации общей схемы последовательного анализа вариантов. А именно, сконструировано семейство бинарных отношений (2.3), аппроксимирующих отношение Φ «изнутри» и обладающих, как показано в теореме 2.2, свойством (2.16) «полноты».

Решение задачи проектирования для динамической системы (1.1), (1.2) по схеме последовательного анализа вариантов свелось к отысканию подходящего множества θ в (2.16). После того как такое множество найдено, требование реализуемости метода последовательного анализа вариантов быстрыми алгоритмами обычно выполняется, так как вычисление значений функции $x_j(\cdot)$, $j=1, 2$ в (2.1) и задание с их помощью отношений $\Psi_{+}[\cdot]$ (2.3) представляют собой значительно менее трудоемкую операцию, чем задание отношения Φ на множестве X . В самом деле, $\Psi_{+}[\cdot]$ определяется решением несложных конечномерных задач, а Φ — решением позиционных дифференциальных игр сближения — уклонения.

Отметим также, что на практике, как правило, пара векторов $\omega(z, u, x)$, $\omega(z, v, y)$ технических характеристик системы полностью определяет зависимость правой части $f(\cdot)$ уравнения (1.1) и множеств $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ от конструктивных параметров x , y . Таким образом, отношения $\Psi_{+}[\cdot]$ порождаются определяемой в (2.1) «сверткой» технических характеристик проектируемой системы. Этот вопрос ранее был рассмотрен в § 1 гл. 3.

Вернемся к рассмотрению схемы последовательного анализа вариантов (1.4) из гл. 3:

$$X_{j-1} \rightarrow X_j = \text{Max}(X_{j-1}, W_j), \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad X_0 = X, \quad (3.1)$$

где $W_j = V_j^t$, если $\Phi = \Phi^t$, и $W_j = V_j$, если $\Phi \neq \Phi^t$; V_j — заданные отношения на X .

Из теоремы 1.1 гл. 3 и 2.2 настоящей главы непосредственно имеем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть множество $\theta = \{x_j, y_j\}, j = \overline{1, k}$ внешне устойчиво в (Φ, Ψ^{-1}) и $V_j = \Psi_+[x_j, y_j], j = 1, k$. Тогда для схемы (3.1):

- 1) $X_k \supseteq X^*$, если $X_k \neq \emptyset$ и Φ антисимметрично;
- 2) $X_k = X^*$, если $X_k \neq \emptyset$, Φ антисимметрично и X^* внешне устойчиво в (X, Φ) ;
- 3) $X_k = X^*$, если Φ — порядок;
- 4) $(X_k = X^*) | I_\Phi$, если Φ — квазипорядок.

Опишем алгоритм последовательного анализа вариантов, который в соответствии с теоремой 3.1 должен быть не чем иным, как алгоритмом отыскания множества θ , внешне устойчивого в (Φ, Ψ^{-1}) .

Обозначим через Ω множество всех подмножеств $\theta \subseteq \Phi$, удовлетворяющих условию (2.16).

Очевидно, из $\theta_1 \in \Omega, \theta_1 \subseteq \theta_2$ следует $\theta_2 \in \Omega$. Это свойство может быть положено в основу следующего алгоритма последовательного анализа вариантов.

Алгоритм \mathfrak{A}

Шаг 0. Положить $j = 1, X_0 = X$.

Шаг 1. Найти альтернативы $x_j, y_j \in X_{j-1}$ такие, что $x_j \Phi y_j, y_j \Phi x_j$. Если таких альтернатив нет, то остановиться.

Шаг 2. Положить $X_{j-1} = X_{j-1} \setminus \{y_j\}, W_j = \Psi^+[x_j, y_j]$, если $\Phi = \Phi^t$, и $W_j = \Psi_+[x_j, y_j]$, если $\Phi \neq \Phi^t$. Построить множество $X_j = \text{Max}(X_{j-1}, W_j)$. Если $X_j = \emptyset$, то остановиться. Иначе положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 1.

Сходимость описанного алгоритма последовательного анализа к решению задачи проектирования устанавливает следующий аналог теоремы 1.1 гл. 3.

Теорема 3.2. Алгоритм \mathfrak{A} сходится за конечное число k шагов к множеству X_k , удовлетворяющему утверждениям 1) — 4) теоремы 3.1.

Опустим строгое доказательство теоремы 3.2, отметив лишь, что оно легко следует из доказательства теоремы 1.1 гл. 3. Опираясь на последнюю, нетрудно установить включения $X_j \supseteq X^*$ для случаев 1) — 3) теоремы и $(X_j \supseteq X^*) | I_\Phi$ для случая 4). Кроме того, очевидно монотонное убывание функции $p(j) = |X_j|$, что доказывает конечность алгоритма \mathfrak{A} . Отсюда и из условий останова алгоритма непосредственно следуют утверждения теоремы 3.2.

В случае рефлексивности отношения Φ целесообразно модифицировать алгоритм \mathcal{A} , заменив шаг 0 на следующий.

Шаг 0. Положить $j=1$, $X_0 = \text{Max}(X, \Psi_0)$.

Здесь $\Psi_0 = \bigcup \Psi_j[x, x]$ по $x \in X$. Теорема 3.2 при этом остается справедливой, что вытекает из следствия к теореме 2.1.

Простейшим вариантом схемы последовательного анализа вариантов (3.1) служит следующая двухэтапная схема:

$$X \rightarrow X_1 = \text{Max}(X, \Psi_0), X_1 \rightarrow X_2 = \text{Max}(X_1, \Phi), \quad (3.2)$$

сходимость которой устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть отношение Φ рефлексивно. Тогда для схемы (3.2) выполняются утверждения 1)–4) теоремы 3.1 с $k=2$.

Сделаем теперь ряд замечаний по поводу алгоритма \mathcal{A} . Прежде всего это по сути дела схема целого семейства алгоритмов. Дело в том, что, описывая шаг 1, мы никак не конкретизировали процедуру выбора очередной пары альтернатив x_j, y_j , которые нужно сравнивать по отношению Φ . Конечность работы алгоритма всегда гарантирована в силу конечности множества альтернатив X . Однако действительное число итераций сильно зависит от выбора x_j, y_j . Таким образом, здесь имеются большие возможности управления и, в частности, оптимизации алгоритма \mathcal{A} . В заключение этого параграфа обратим внимание, что метод последовательного анализа вариантов никоим образом не освобождает от необходимости решения сложных задач управления динамической системой (1.1), (1.2). Он позволяет лишь сократить число таких задач. В этом смысле первый и последний примеры из § 3 гл. 3 представляют собой исключение из правила: там схема (3.2), благодаря специально подобранным данным, позволила найти решение задачи проектирования $X^* = X_2 = X_1$ уже на первом шаге.

§ 4. Оптимизация алгоритмов последовательного анализа

Качество работы алгоритма из § 3 в значительной степени определяется числом сравнений альтернатив по отношению Φ , выполняемых на шаге 1. Действительно, в данной задаче проектирования каждое подобное сравнение есть очень трудоемкая операция — решение позиционной дифференциальной игры сближения — уклонения.

Количество таких операций зависит от организации процесса выбора сравниваемых альтернатив и от «представимости» отношения Φ отношениями $\Psi_+[\cdot]$ в виде (2.16). Это представление определяет минимальное количество итераций k , за которое может быть получено решение X^* при наиболее удачном выборе сравниваемых на шаге 1 альтернатив.

Обозначим через $\rho = |\text{Max}(\Phi, \Psi^{-1})|/I_{\Psi}$ * число классов эквивалентности по отношению Ψ , на которые распадается ядро $\text{Max}(\Phi, \Psi^{-1})$. Очевидно, $1 \leq \rho \leq |\Phi|$, если $\Phi \neq \emptyset$, и $k \leq \rho$.

В случае, когда существует в (Φ, Ψ^{-1}) наилучший элемент (см. § 3, гл. 1) (x_*, y_*) , получаем, что $k = \rho = 1$, и для нахождения X^* достаточно одной итерации алгоритма \mathfrak{A} , если для сравнения по отношению Φ на шаге 1 взять альтернативы x_* , y_* .

В неблагоприятном случае $k = \rho = |\Phi|$, и работа алгоритма \mathfrak{A} сводится к перебору всего множества Φ .

Таким образом, величину $\rho/|\Phi|$ можно принять в качестве одного из показателей, характеризующего алгоритм \mathfrak{A} .

В ряде случаев полезна оценка этой величины сверху.

Пусть, например, отношение Φ полное. Тогда

$$|\Phi| \geq |X|(|X| - 1)/2, \quad \rho \leq |\text{Max}(X^2, \Psi^{-1})|/I_{\Psi},$$

$$\frac{\rho}{|\Phi|} \leq \eta = \min \left\{ 1, \frac{2|\text{Max}(X^2, \Psi^{-1})|/I_{\Psi}}{|X|(|X| - 1)} \right\}. \quad (4.1)$$

Заметим, что вычисление оценки η не требует сравнения альтернатив по отношению эффективности Φ .

Оценка (4.1) указывает на важность управления выбором последовательности сравниваемых альтернатив (x_j, y_j) , $j=1, 2, \dots, k$. В крайних случаях $\eta \ll 1$ и $\eta \simeq 1$ такое управление, по-видимому, не даст значительного эффекта, в других случаях оно может оказаться существенным.

Задачу организации процесса сравнений альтернатив можно решать в управляемой САПР, снабженной соответствующей управляющей системой. Рассмотрим простейший вариант подобной организации управления.

Пусть отношение Φ полно и антисимметрично. Тогда для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, имеет место одно из соотношений: $x\Phi y$ или $y\Phi x$.

Возьмем пару $(x, y) \in X^2_{j-1}$, $x \neq y$. Если $x\Phi y$, то на j -й итерации алгоритма \mathfrak{A} множество X_{j-1} перейдет в $X_j = \text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[x, y])$; если $y\Phi x$ — в $X_j = \text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[y, x])$.

Для сравнения по Φ на j -й итерации выберем пару (x_j, y_j) из условия

$$(x_j, y_j) = \arg \min_{\substack{(x, y) \in X^2_{j-1} \\ x \neq y}} \max \{ |\text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[x, y])|, \\ |\text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[y, x])| \}.$$

Такой способ выбора (x_j, y_j) дает, очевидно, локально оптимальный алгоритм последовательного анализа вариантов, где в каче-

* $|A|$ Обозначает число элементов множества A .

стве принципа оптимальности выступает принцип гарантированного результата.

Другим возможным способом повышения «качества» алгоритма последовательного анализа вариантов является синтез отношений на основе продолжения задачи оценки эффективности проектируемой системы на более широкий класс управляемых динамических систем. Поясним эту идею.

Пусть X_* — множество всех конечномерных векторов x^* , $X \subset X_*$. В силу произвольной зависимости правых частей $f(\cdot)$ уравнений (1.1) и множества $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ (1.2) от конструктивных параметров x , y систем замена x , y , X , Φ на x^* , y^* , X_* , Φ_* дает продолжение задачи сравнения вариантов системы на более широкий класс систем, ограниченный лишь условиями, при которых справедлива теорема об альтернативе ([4], с. 68). Отношение Φ при этом является сужением Φ_* на множество X .

Пусть аналогично (2.2), (2.3)

$$\Psi_*(\varepsilon, \lambda; \delta, \nu) = \{((x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)) \in (X_*^2)^2 \mid, \\ x_1(\varepsilon, \lambda; x_1^*, y_1^*; x_2^*, y_2^*) \leq 0, x_2(\delta, \nu; x_2^*, y_2^*; x_1^*, y_1^*) \leq 0\},$$

$$\Psi_* = \bigcup \Psi_*(\varepsilon, \lambda; \delta, \nu) \text{ по } \varepsilon, \lambda, \delta, \nu > 0,$$

$$\Psi_+[x^*; y^*] = \{(x, y) \in X^2 \mid (x, y) \Psi_*(x^*, y^*)\}.$$

Очевидно, отношения Ψ_* , $\Psi_+[x^*, y^*]$ обладают всеми свойствами отношений Ψ , $\Psi_+[x, y]$, установленными в теореме 2.1.

Условие (2.4) теоремы 2.1 переписанное в виде

$$x\Psi_+[x^*, y^*]y, x^*\Phi y^* \Rightarrow x\Phi y, \quad (4.2)$$

дает следующий метод оценки сравнительной эффективности вариантов проектируемой системы.

Пусть $\theta_* \subset X_*$ — множество «эталонных» систем, попарное сравнение которых по отношению Φ_* представляет более простую задачу, чем сравнение по Φ альтернатив из X . Если паре $(x, y) \in X^2$ можно поставить в соответствие пару $(x^*, y^*) \in \theta_*^2$, удовлетворяющую (4.2), то $x\Phi y$. При этом, как следует из (2.14), $\Phi(x, y) \geq \Phi(x^*, y^*)$, т. е. подмена сравнения x с y сравнением x^* с y^* позволяет получить оценку снизу сравнительной эффективности альтернатив x , y .

В качестве θ_* целесообразно выбрать множество, составленное полностью или отчасти из динамических систем, математическое описание которых проще описания функционирования проектируемой системы. Например, если движение системы описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, то множество θ_* может включать линейные системы. Реализация данной возможности в конкретных задачах проектирования иногда оказывается решающей, так как оценка эффективности на базе решения поставленных выше задач управления движе-

нием, в частности дифференциальных игр, сталкивается с серьезными трудностями.

Из теоремы 2.3 следует, что найдется конечное множество $\theta_* \subseteq \Phi_*$ такое, что

$$\Psi_+[\theta_*] = \Phi.$$

В качестве θ_* достаточно взять θ из (2.16). Обозначим через Ω_* (Ω) множество всех таких θ_* (θ); очевидно, $\Omega \subseteq \Omega_*$ и поэтому

$$\min_{\theta_* \in \Omega_*} |\theta_*| \leq \min_{\theta \in \Omega} |\theta|.$$

Это неравенство говорит о том, что возможно увеличение эффективности схемы последовательного анализа в результате уменьшения количества итераций алгоритма \mathcal{A} за счет расширения X до X_* . Пусть величина $\tau = \tau(x^*, y^*)$ характеризует трудоемкость вычисления $\phi(x^*, y^*)$ при решении задачи (1.4) на ЭВМ, например, потребное для этого машинное время. Очевидно,

$$\min_{\theta_* \in \Omega_*} \sum_{(x^*, y^*) \in \theta_*} \tau(x^*, y^*) \leq \min_{\theta \in \Omega} \sum_{(x, y) \in \theta} \tau(x, y).$$

На практике левая и правая части данного неравенства могут оказаться величинами разных порядков, что необходимо учитывать при разработке соответствующих вычислительных схем в САПР, т. е. при планировании вычислений в управляемой САПР.

Подводя итог, опишем модификацию алгоритма \mathcal{A} для процесса автоматизированного проектирования.

До начала решения задачи проектирования зададим отношение Φ_* на конечном подмножестве $\omega_* \subset X_*$, отвечающем системам сравнительно простой структуры, например линейным, и поместим необходимую информацию в базу данных САПР.

Пусть оказалось $(x_i^*, y_i^*) \in \Phi_*$, $i = \overline{1, l}$. Далее, разработаем метод синтеза пары $(x^*, y^*) \in X_*^2$ такой, что $x^* \Phi_* y^*$, $y^* \bar{\Phi}_* x^*$, и для заданного множества $Y \subseteq X$ пересечение $Y^2 \cap \Psi_+[x^*, y^*]$ не пусто. Простейший способ такого синтеза состоит в переборе всевозможных пар альтернатив из Y и сравнении их по Φ . Дополнительное требование, чтобы мощность пересечения $Y^2 \cap \Psi_+[x^*, y^*]$ была в определенном смысле наибольшей, выполнимо при учете специфики рассматриваемой задачи проектирования.

Дадим описание модифицированного алгоритма последовательного анализа вариантов, использующего такой предварительный анализ задачи, например, для полного антисимметричного отношения Φ .

Алгоритм \mathfrak{B} .

Шаг 0. Решить рекуррентное уравнение

$$Y_{i-1} = \text{Max}(Y_i, V_i), \quad i = l, l-1, \dots, 1; \quad Y_l = \text{Max}(X, V),$$

где V — отношение из схемы (3.2), $V_i = \Psi^+[x_i^*, y_i^*]$, если $\Phi = \Phi^*$,

и $V_i = \Psi_+[x_i^*, y_i^*]$, если $\Phi \neq \Phi^t$. Если $Y_0 \neq \emptyset$, то остановиться. Иначе положить $j=1$, $X_0 = Y_0$.

Шаг 1. Найти альтернативы $(x_j^*, y_j^*) \in X_{j-1}$ такие, что*

$$(x_j^*, y_j^*) = \arg \min_{(x^*, y^*)} \max \{ | \text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[x^*, y^*]) | , \\ | \text{Max}(X_{j-1}, \Psi_+[y^*, x^*]) | \},$$

где минимум берется по $(x^*, y^*) \in X_{j-1}$, $x^* \neq y^*$, для которых $X_{j-1} \cap \Psi_+[x^*, y^*] \neq \emptyset$.

Сравнить x_j^* , y_j^* по отношению Φ . Пусть оказалось, что $x_j^* \Phi y_j^*$, $y_j^* \bar{\Phi} x_j^*$.

Шаг 2. Положить $V_j = \Psi^t_+[x_j^*, y_j^*]$, если $\Phi = \Phi^t$, и $V_j = \Psi_+[x_j^*, y_j^*]$, если $\Phi \neq \Phi^t$.

Построить множество $X_j = \text{Max}(X_{j-1}, V_j)$. Если $X_j = \emptyset$, то остановиться. Иначе положить $j=j+1$ и перейти к шагу 1. Сходимость алгоритма \mathfrak{B} за конечное число шагов доказывается так же, как для алгоритма \mathfrak{A} из § 3.

§ 5. Модельный пример

Реализация метода последовательного анализа вариантов в САПР динамических систем требует применения вычислительной техники. В этом параграфе рассмотрим модельный пример, иллюстрирующий работу модифицированного алгоритма \mathfrak{B} .

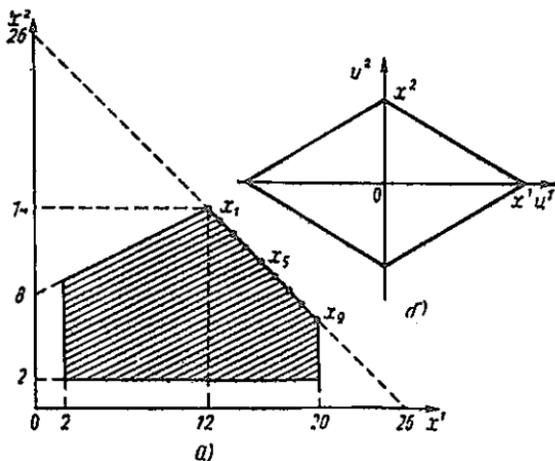


Рис. 16

1) Данный выбор (x_j^, y_j^*) соответствует сформулированному выше требованию «максимальной» мощности множества $X_{j-1} \cap \Psi_+[x^*, y^*]$

Пусть варианты проектируемой системы описываются вектором $x = (x^1, x^2)$, принимающим значения из X — подмножества целочисленных точек множества (рис. 16, а):

$$\{x \in E^2 \mid 2 \leq x^1 \leq 20, 2 \leq x^2 \leq \min(-x^1 + 26, 0.5x^1 + 8)\}.$$

Число элементов множества X равно $|X| = 181$.

Для задания критерия сравнительной эффективности $\varphi: X^2 \rightarrow E^1$ рассмотрим пару позиционных дифференциальных игр из § 1 сближения-уклонения альтернатив $x, y \in X$, описываемых уравнениями

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = u - v; \quad z_1, z_2, u, v \in E^2, \quad (5.1)$$

ограничениями на допустимые управления (рис. 16, б)

$$u \in U(x) = \{u \in E^2 \mid |u^1| x^2 + |u^2| x^1 \leq x^1 x^2\}, \\ v \in V(y) = U(y), \quad (5.2)$$

областями существования системы (5.1) $Z_1 = Z_2 = Z = E^4$ и целевыми множествами $G_1 = G_2 = G = \{z = (z_1, z_2) \in Z \mid \|z_1\| \leq 5\}$.

Рассмотрим игровую задачу $(G, Z)_u$ -сближения в момент времени $\theta = 1$. Пусть $\Sigma = \{s \in E^2 \mid \|s\| = 1\}$ — единичная сфера в E^2 . Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *Игровая задача $(G, Z)_u$ -сближения в момент времени $\theta = 1$ разрешима из начальной позиции $(0, z_0)$ тогда и только тогда, когда*

$$\max_{s \in \Sigma} [0,5(\max(|s^1| y^1, |s^2| y^2) - \max(|s^1| x^1, |s^2| x^2) + \langle s, z_{20} \rangle + \langle s, z_{10} \rangle)] \leq 5. \quad (5.3)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру с фиксированным временем окончания $\theta = 1$, описываемую управлениями (5.1), ограничениями (5.2), функционалом платы

$$I(z(\cdot)) = \|z_1(1)\|,$$

минимизируемым альтернативой x и максимизируемым альтернативой y .

В [3] показано, что значение цены игры $\kappa(0, z_0)$ в позиции $(0, z_0)$ совпадает с программным максимумом рассматриваемой игры и равно $\max\{0, \kappa(0, z_0)\}$, где

$$\kappa(0, z_0) = \max_{s \in \Sigma} \min_{u \in U(x)} \max_{v \in V(y)} \langle s, 0,5(u - v) + z_{20} + z_{10} \rangle \\ = \max_{s \in \Sigma} [0,5(\max(|s^1| y^1, |s^2| y^2) - \max(|s^1| x^1, |s^2| x^2) + \langle s, z_{20} \rangle + \langle s, z_{10} \rangle)].$$

Отсюда и из известных свойств функции цены игры следует, что задача $(G, Z)_u$ -сближения в момент времени $\theta = 1$ из позиции $(0, z_0)$ разрешима тогда и только тогда, когда $\kappa(0, z_0) \leq 5$. ▲

Аналогично лемме 5.1 можно показать, что игровая задача (G, Z) -сближения в момент времени $\vartheta=1$ разрешима из начальной позиции $(0, z_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{z \in Z} [0,5(\max(|s^1| x^1, |s^2| x^2) - \max(|s^1| y^1, |s^2| y^2)) + \langle s, z_{z_0} \rangle + \langle s, z_{10} \rangle] \leq 5. \quad (5.4)$$

Обозначим через $\Sigma_1(x, y)$ ($\Sigma_2(x, y)$) множество начальных состояний z_0 системы (5.1), удовлетворяющих (5.3) ((5.4)). Будем считать, что вероятностная мера μ равномерно сосредоточена на множестве

$$Z_0 = \{z \in Z \mid z_1^1 = z_2^1 = z_3^2 = 0; \quad z_1^2 = 0.1 \cdot k, \quad k = \overline{51, 100}\}.$$

Таким образом,

$$\mu(\Sigma_j(x, y)) = 0.02 \mid \Sigma_j(x, y) \cap Z_0 \mid; \quad j = 1, 2.$$

Положим

$$\varphi(x, y) = \mu(\Sigma_1(x, y)) - \mu(\Sigma_2(x, y)),$$

$$F = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi(x, y) \geq 0\}, \quad \Phi = F^t,$$

где F^t — транзитивное замыкание отношения F . Определенное таким образом отношение Φ полно, рефлексивно и транзитивно.

Найдем решение $\text{Max}(X, \Phi)$ задачи проектирования, используя алгоритм \mathfrak{B} из предыдущего параграфа.

Пусть $r = (r^1, r^2, r^3, r^4)$, $r_1 = (r^1, r^2)$, $r_2 = (r^3, r^4)$. Тогда в силу (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, z, x, y) &= \min_{u \in U(x)} \max_{v \in V(y)} (\langle r_1, z_2 \rangle + \langle r_2, u - v \rangle) = \\ &= \langle r_1, z_2 \rangle - \max(|r^3| x^1, |r^4| x^2) + \max(|r^3| y^1, |r^4| y^2), \\ \gamma_2(r, z, x, y) &= \min_{v \in V(y)} \max_{u \in U(x)} (\langle r_1, z_2 \rangle + \langle r_2, u - v \rangle) = \\ &= \langle r_1, z_2 \rangle + \max(|r^3| x^1, |r^4| x^2) - \max(|r^3| y^1, |r^4| y^2). \end{aligned}$$

Так как мы фиксировали время окончания игр сближения, в (2.1) следует, учитывая смысл λ , положить $\lambda = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \kappa_1(r, z; x_1, y_1; x_2, y_2) &= \gamma_1(r, z, x_1, y_1) - \gamma_1(r, z, x_2, y_2) = \\ &= -\max(|r^3| x_1^1, |r^4| x_1^2) + \max(|r^3| y_1^1, |r^4| y_1^2) + \\ &+ \max(|r^3| x_2^1, |r^4| x_2^2) - \max(|r^3| y_2^1, |r^4| y_2^2). \end{aligned}$$

$$\kappa_2(r, z; x_2, y_2; x_1, y_1) = \kappa_1(r, z; x_1, y_1; x_2, y_2).$$

Используя эти выражения, нетрудно показать, что $(x_1, y_1) \Psi(x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\max(x_1^1, \tau x_1^2) + \max(y_2^1, \tau y_2^2) \geq \max(x_1^1, \tau x_2^2) + \max(y_1^1, \tau y_1^2) \quad (5.5)$$

для всех $\tau \geq 0$.

Построим отношение Ψ_0 из следствия к теореме 2.1. Положив в (5.5) $x_2 = y_2$ и обозначив $x_1 = x$, $y_1 = y$, получим, что $x\Psi_0 y$ тогда и только тогда, когда

$$\max(x^1, \tau x^2) \geq \max(y^1, \tau y^2) \quad \forall \tau \geq 0,$$

что эквивалентно неравенствам $x^1 \geq y^1$, $x^2 \geq y^2$. Итак,

$$\Psi_0 = \{(x, y) \in X^2 \mid x^1 \geq y^1, x^2 \geq y^2\}.$$

Опишем *первую итерацию* алгоритма \mathfrak{B} .

Шаг 0. Построить множество $X_0 = \text{Max}(X, \Psi_0)$. Как видно из рис. 15, а, $X_0 = \{x_i, i = \overline{1, 9}\}$, где $x_i = (11 + i, 15 - i)$.

Для краткости будем ниже отождествлять альтернативы x_j с натуральными числами j , множество X_0 — с отрезком $J_0 = [1, 9]$.

Рассмотрим введенные в § 2 бинарные отношения Ψ на J_0^2 и $\Psi_+[i, j]$ на J_0 :

Возьмем $(i, j), (k, l) \in J_0^2$ и положим $a = \min(i, l)$, $b = \max(i, l)$, $c = \min(j, k)$, $d = \max(j, k)$. Данные равенства вместе с функцией $\tau(m) = \tau_m$ от натурального m

$$\tau_m = \frac{11 + m}{15 - m}$$

определяют числа $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d$ при $m = a, b, c, d$.

Лемма 5.2. Для всяких $(i, j), (k, l) \in J_0^2$ условие $(i, j)\Psi(k, l)$ выполняется тогда и только тогда, когда $a + b = c + d$ и $\tau_a \leq \tau_c$.

Доказательство. В соответствии с (5.5), $(i, j)\Psi(k, l)$ тогда и только тогда, когда для $\forall \tau \geq 0$

$$\begin{aligned} y_{ii}(\tau) = \max\{11 + i, \tau(15 - i)\} + \max\{11 + l, \\ \tau(15 - l)\} > \max\{11 + j, \tau(15 - j)\} + \\ + \max\{11 + k, \tau(15 - k)\} = y_{jk}(\tau). \end{aligned} \quad (5.6)$$

При $\tau = 0, \tau \rightarrow \infty$ из (5.6) можно получить $i + l \geq j + k$, $-i - l \geq -j - k$, куда следует

$$a + b = i + l = j + k = c + d.$$

Завершает доказательство рис. 17, а взаимного расположения кривых $y_{ii}(\tau), y_{jk}(\tau)$. \blacktriangle

Воспользовавшись леммой 5.2, можно построить отношения

$$\Psi_+[k, k + p] = \{(1, 1 + p), (2, 2 + p), \dots, (k, k + p)\},$$

(5.7)

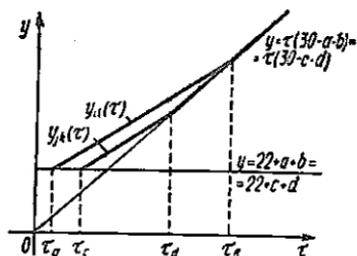
$$\Psi_+[k + p, k] = \{(9, 9 - p), (8, 8 - p); \dots, (k + p, k)\}$$

на J_0 ; $k=1$; 9 , $p=0$; $9-k$ (рис. 17, б). Используя (5.7), сделаем следующий шаг 1-й итерации.

Шаг 1. Найти

$$(k, l) = \arg \min_{(i, j) \in J_0^2} \max \{ | \text{Max}(J_0, \Psi_+^t [i, j]) | , \\ | \text{Max}(J_0, \Psi_+^t [j, i]) | \}.$$

Таких пар четыре (4,5), (5,4) и (5,6), (6,5). При этом (см. рис. 17, б)



$$\text{Max}(J_0, \Psi_+^t [4, 5]) = \{1, 6, 7, 8, 9\},$$

$$\text{Max}(J_0, \Psi_+^t [5, 4]) = \{1, 2, 3, 9\},$$

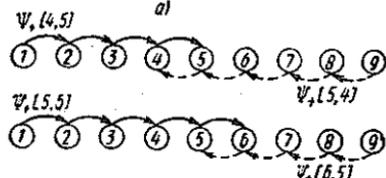
$$\text{Max}(J_0, \Psi_+^t [5, 6]) = \{1, 7, 8, 9\},$$

$$\text{Max}(J_0, \Psi_+^t [6, 5]) = \{1, 2, 3, 4, 9\}.$$

Выберем пару (4,5). Расчет критерия сравнительной эффективности $\varphi(\cdot)$ с использованием (5,3), (5,4) дает $\varphi(x_4, x_5) = -0,1$ и, следовательно, $x_5 \Phi x_4$, $x_4 \Phi x_5$.

Шаг 2. Построить множество

$$J_1 = \text{Max}(J_0, \Psi_+^t [5, 4]) = \{1, 2, 3, 9\}.$$



б)
Рис. 17

Вторая итерация.

Шаг 1. Найти

$$(k, l) = \arg \min_{(i, j) \in J_1^2} \max \{ | \text{Max}(J_1, \Psi_+^t [i, j]) | , \\ | \text{Max}(J_1, \Psi_+^t [j, i]) | \}.$$

Таких пар две: (2,3), (3,2). При этом

$$\text{Max}(J_1, \Psi [2, 3]) = \text{Max}(J_1, \Psi_+^t [3, 2]) = \{1, 9\}.$$

Совпадение множеств $\text{Max}(J_1, \Psi_+^t [3, 2])$ и $\text{Max}(J_1, \Psi_+^t [2, 3])$ говорит о том, что на этой итерации нет надобности сравнивать альтернативы x_2 и x_3 по эффективности, так как при любом исходе сравнения

$$J_2 = \text{Max}(J, \Psi_+^t [2, 3]) = \text{Max}(J_1, \Psi_+^t [3, 2]) = \{1, 9\}.$$

Таким образом, шаг 2 здесь тривиален.

Третья итерация.

Шаг 1 тривиален. Сравнение альтернатив x_1 и x_9 по Φ на шаге 2 приводит к результату $x_1\Phi x_9$, $x_9\Phi x_1$, так как $\varphi(x_1, x_9) = 0$. Шаг 2 тривиален и дает множество $J_3 = \{1, 9\}$.

На шаге 1 *четвертой итерации* работа алгоритма \mathfrak{B} заканчивается.

В соответствии с теоремой 3.2 получаем, что

$$(X_3 = \text{Max}(X, \Phi)) \mid I_\Phi,$$

$$X_3 = \{x_1, x_9\} = \{(12, 14), (20, 6)\}.$$

Итак, для решения данной модельной задачи проектирования методом последовательного анализа вариантов потребовалось всего два сравнения альтернатив по отношению эффективности Φ . Напомним, что исходное количество альтернатив 181.

Завершая обсуждение метода последовательного анализа вариантов в проектировании динамических систем, еще раз отметим следующее. Предложенные алгоритмы никоим образом не освобождают от необходимости решения сложных, в том числе и игровых, задач управления движением. Последовательный анализ позволяет лишь уменьшить число таких задач и, значит, выделить на каждую из них большие ресурсы ЭВМ в процессе автоматизированного проектирования. Таким образом, разработка методов решения задач оптимального управления, дифференциальных игр по-прежнему чрезвычайно актуальна для создания САПР динамических систем.

ГЛАВА 5. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Поставленная в § 4 гл. 2 общая задача проектирования сложной технической системы состоит в отыскании ядра отношения Φ на множестве значений проектных параметров X , соответствующем технически реализуемым системам. Для задачи проектирования сложной системы характерны большая размерность вектора конструктивных параметров $x \in X$, сложность структуры X , а также трудности вычисления критерия сравнительной эффективности, задающего бинарное отношение Φ на X . Последнее связано с решением сложных оптимизационных задач, как мы видели в гл. 4, или с проведением трудоемких имитационных экспериментов.

В связи с этим в гл. 3 и 4 развивались методы последовательного анализа вариантов для решения задач проектирования. Однако эти методы были «одноуровневыми», реализованными в фиксированном пространстве $\{x\}$ конструктивных параметров. Часто такой подход оказывается недостаточно эффективным, так как реализация алгоритмов поиска ядер отношений (см. § 4 гл. 3) на ЭВМ невозможна из-за большой размерности задачи. Поэтому при создании САПР требуется разработка специальных методов решения задач проектирования, позволяющих справиться с размерностью реальных задач. Такие методы могут быть построены на основе декомпозиции задачи проектирования.

§ 1. Декомпозиция и агрегирование в задачах проектирования

Рассмотрим общую постановку задачи проектирования из § 4 гл. 2. Пусть варианты технической системы (альтернативы) задает вектор проектных параметров $x \in E^N$ размерности N , принимающий значения из множества X . Это означает, что выбор конкретного $x \in X$ с определенной степенью детализации определяет конструкцию системы, т. е. можно создать систему с вектором проектных параметров x . Множество X обычно задается не-

которой системой ограничений, вытекающих как из физических законов функционирования систем подобного назначения, так и из опыта проектирования, эксплуатации, требований технического задания. Отметим, что x может давать далеко не самое подробное описание системы. Основное требование состоит в том, чтобы задание $x \in X$ не вызывало сомнений в реализации проекта системы с параметрами x .

Сравнение альтернатив по эффективности определяет на X некоторое бинарное отношение Φ : альтернатива x эффективнее y тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \Phi$.

Под задачей проектирования технической системы понимается задача отыскания ядра

$$X \rightarrow X^* = \text{Max}(X, \Phi). \quad (1.1)$$

При этом предполагается, что ядро X^* не пусто.

Постановка задачи проектирования в виде (1.1) является достаточно общей, она включает в себя многие практически важные случаи, как это показано было в гл. 2.

Отношение Φ на X задается обычно через решение сложных задач. Используются для этой цели также эксперименты на имитационных моделях функционирования и неформальные процедуры [5, 6, 31].

Введем новые проектные параметры системы:

$$x_{k+1} = f_{k+1}(x_k), X_{k+1} = f_{k+1}(X_k), x_k \in X_k \subset E^{N_k},$$

где $N_{k+1} \leq N_k$, $k=0, 1, \dots, m-1$; $N_0=N$, $x_0=x$, $X_0=X$. Каждый вектор x_{k+1} получается из x_k агрегированием с помощью вектор-функции f_{k+1} и дает более целостное описание системы, чем x_k , если $N_{k+1} < N_k$; m — число уровней агрегирования.

Пусть на k -м уровне агрегирования задано отношение Φ_k . Предполагается, что построение ядра по отношению Φ_{k+1} менее трудоемкая задача, чем построение ядра по Φ_k . На практике эта трудоемкость в значительной мере определяется машинным временем вычисления значений критерия W_k , порождающего Φ_k . Так, в рассмотренной в гл. 3 и 4 задаче проектирования динамической управляемой системы вычисление Φ связано с решением сложных задач траекторной оптимизации (оптимального управления, дифференциальных игр), а W_1 — с расчетом основных технических характеристик системы, используемым в практике проектирования.

Примеры агрегирования, используемые на практике, разнообразны.

Так, в самолетостроении вектор x_k значительной размерности может описывать крыло достаточно сложной формы, а x_{k+1} — эквивалентное по основным аэродинамическим характеристикам трапециевидное крыло. Традиционно принимают $x_{k+1} = (S, \chi, \lambda, \eta)$, где S — площадь крыла, χ — стреловидность, λ — удлинение,

η — сужение крыла [41]. Критерии W_k, W_{k+1} представляют собой, например, дальность полета, вычисляемую на основе этих описаний различными по точности методами.

При проектировании на этапе формирования облика широко используются аналитические зависимости — функции, содержащие эмпирические коэффициенты. Как правило, эти коэффициенты представляют собой аппроксимацию некоторых других функций от проектных параметров, «слабо изменяющихся» при варьировании аргументов в определенных пределах. Примерами такого агрегирования являются так называемые весовые формулы [41, 50].

На практике распространен способ агрегирования, состоящий в исключении из вектора проектных параметров x_k некоторых несущественных на следующем $(k+1)$ -м уровне координат. Геометрически это означает проектирование x_k на соответствующее подпространство пространства проектных параметров.

Пример 1.1. При проектировании манипуляторов промышленных роботов естественным образом выделяются математические модели по крайней мере четырех уровней ^{*)}.

Кинематическая модель наиболее агрегированная. Она задается функцией, связывающей обобщенные координаты q манипулятора с положением схвата в неподвижной системе координат рабочей зоны. Проектными параметрами являются типы сочленений и длины звеньев кинематических пар. Так, для манипулятора, изображенного на рис. 4, достаточно задать длину вертикального и горизонтального звеньев (H, l) .

Механическая модель описывает динамику движения манипулятора. Ее общий вид приведен в (2.17) гл. 2. Здесь к проектным параметрам кинематического уровня добавляются массо-инерционные характеристики звеньев и ограничения на усилия, развиваемые в приводах манипулятора.

Электромеханическая модель манипулятора отличается от механической тем, что здесь появляются проектные параметры приводов, а к уравнению движения добавляется уравнение динамики приводов. Исключая моменты (усилия) в приводах, получают следующие типичные уравнения движения системы манипулятор — приводы (ср. с. (2.17) гл. 2):

$$\tilde{A}(q, x, \mu) \ddot{q} + \tilde{b}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}, x, \mu) = \omega,$$

где ω — вектор управляющих (электродвигателями) воздействий. Критерии перечисленных трех уровней могут быть записаны в виде (5.7), (5.8) гл. 2.

Еще более детальной является электромеханическая модель с учетом механизмов стабилизации и адаптации. В ней к проектным

^{*)} Динамика и управление роботами/Под ред. Е. И. Юрвича М., Наука, 1984.

параметрам добавляются характеристики стабилизирующих и адаптивных алгоритмов системы управления роботом.

Итак, проектирование манипуляторов — хороший пример, когда имеется иерархия математических моделей функционирования, проектных параметров и критериев. Это во многом определяет современные успехи робототехники.

В дальнейшем нас будут интересовать не столько функции агрегирования $f_{h+1}(\cdot)$, сколько обратные функции $f_{k+1}^{-1}(\cdot)$, восстанавливающие по заданному X_{h+1} его прообразы X_h . Это связано с тем, что процесс проектирования (в том числе и автоматизированного) идет сверху-вниз, от агрегированного ко все более детальным описаниям объекта.

Не следует считать, что $f_{h+1}(\cdot)$, $f_{k+1}^{-1}(\cdot)$ обязаны задаваться аналитически. Напротив, чаще всего процедура их вычисления на ЭВМ сложна, носит, как правило, интерактивный характер, используются экспериментальные данные, важен опыт проектировщика и т. п. Пусть построены функции агрегирования $f_{h+1}(\cdot)$ (точнее, функции дезагрегирования $f_{k+1}^{-1}(\cdot)$) и бинарные отношения Φ_h . Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$X_k^* = \text{Max}(f_{k+1}^{-1}(X_{k+1}^*), \Phi_k), \quad k = m-1, m-2, \dots, 0, \quad (1.2)$$

с начальным условием $X_m^* = \text{Max}(X_m, \Phi_m)$. Здесь $\Phi_0 = \Phi$, $f_{k+1}^{-1}(X_{k+1}^*)$ — полный прообраз множества X_{k+1}^* при отображении $f_{h+1}: X_h \rightarrow X_{h+1}$.

В качестве решения задачи проектирования примем множество X_0^* . Заметим, что соотношения (1.2) похожи на рекуррентные соотношения, встречающиеся в гл. 3, и отличаются наличием обратных отображений $f_{k+1}^{-1}(\cdot)$.

Процесс нахождения X_0^* из (1.2) удобно записывать в виде диаграммы

$$X_{k+1}^* \rightarrow X_k^* = \text{Max}(f_{k+1}^{-1}(X_{k+1}^*), \Phi_k). \quad (1.3)$$

Его можно интерпретировать как процесс детализации проекта при переходе от одного уровня описания системы к другому, т. е. как процесс синтеза проекта. С формальной точки зрения (1.3) — одна из схем последовательного анализа вариантов, поскольку на каждом шаге решения уравнения (1.2) сокращается по сравнению с $|X_k|$ число вариантов проекта, подвергаемых детализации на следующем шаге. Следует ожидать, что при соответствующих свойствах f_h , Φ_h построение множества X_0^* , в отличие от «прямого» отыскания ядра (1.1), может быть практически реализовано на современных ЭВМ.

Как уже говорилось, за решение задачи проектирования (1.1) принимается решение X_0^* уравнения проектирования (1.2).

Решение X_0^* можно считать приемлемым представлением ядра X^* , если:

- а) $X^* = X_0^*$;
 б) $X^* \subseteq X_0^*$;

или

- в) $(X^* = X_0^*) | I_\Phi$;
 г) $(X^* \subseteq X_0^*) | I_\Phi$ — в случае транзитивности Φ .

Требование включения X^* в множество X_0^* хотя бы с точностью до эквивалентности, порожденной отношением Φ (§ 3 гл. 2), естественно, поскольку при этом не теряется ни одного «оптимального» варианта проекта системы.

В общем случае множество X_0^* , найденное из (1.2), может не содержать ни одного «оптимального» проекта из ядра X^* . Поэтому для корректности перехода от задачи (1.1) к (1.2), т. е. для выполнения одного из условий а)–г), отношения Φ_h и агрегирование f_h должны быть определенным образом согласованы. Сформулируем условия согласования и выясним их смысл.

Условия согласования отношений предпочтения и агрегирования на разных уровнях иерархии будут использованы в следующем параграфе для обоснования декомпозиции задачи проектирования (1.1) по схеме (1.2) или, что то же самое, по схеме (1.3).

Определение 1.1. *Отношение Φ_h называется f_{h+1} -согласованным с отношением Φ_{h+1} , если для всяких $\bar{x}, \bar{y} \in X_{h+1}$ таких, что $\bar{x} \Phi_{h+1} \bar{y}$, и всякого $y \in f_{h+1}^{-1}(\bar{y})$ найдется $x \in f_{h+1}^{-1}(\bar{x})$, удовлетворяющее условию $x \Phi_h y$.*

Отношение Φ_{h+1} называется f_{h+1} -согласованным с Φ_h , если

$$\left. \begin{array}{l} x \Phi_h y \\ y \bar{\Phi}_h x \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{k+1}(x) \Phi_{k+1} f_{k+1}(y), \\ f_{k+1}(y) \bar{\Phi}_{k+1} f_{k+1}(x). \end{array} \right.$$

Другими словами, здесь f_{h+1} — гомоморфизм моделей (X_h, Φ_h) , $(X_k, \bar{\Phi}_k)$ в модели (X_{k+1}, Φ_{k+1}) , $(X_{k+1}, \bar{\Phi}_{k+1})$ соответственно.

Наконец, отношения Φ_k, Φ_{k+1} вполне согласованы, если Φ_{k+1} является f_{k+1} -согласованным с Φ_k и $\bar{\Phi}_k$ — f_{k+1} -согласованным с Φ_{k+1} .

Приведем формальный пример, иллюстрирующий определение.

Пример 1.1. Пусть $m=1$; $X_0 = X = \{x_0(i), i=1, 2, 3\}$;

$$X_1 = \{x_1(i), i=1, 2, 3\}; f_1(x_0(i)) = x_1(i); i=1, 2, 3;$$

$$W_0(x_0(1)) = (3, 5, \alpha); W_0(x_0(2)) = (5, 2, 3 - \alpha);$$

$$W_0(x_0(3)) = (6, 8, 2); W_1(x_1(1)) = (8, 7);$$

$$W_1(x_1(2)) = (10, 6); W_1(x_1(3)) = (9, 7).$$

Отношения $\Phi = \Phi_0$ и Φ_1 на X_0 и X_1 задаются как отношения Парето по критериям W_0 и W_1 соответственно.

Итак, $y^0 \in \text{Max}(Y, R)$. Отсюда в силу транзитивности R и максимальности элемента k следует, что $y^0 \in K \cap \text{Max}(Y, R)$. Требуемое включение тем самым доказано. \blacktriangle

Покажем теперь, что

$$(\text{Max}(Y, R) \subseteq \text{Max}(X, R)) \mid I_R.$$

Пусть $K \cap \text{Max}(Y, R) \neq \emptyset$, $K \in X \mid I_R$ и $k \in K \cap \text{Max}(Y, R)$. Если $k \notin \text{Max}(X, R)$, то найдется элемент $x \in X$ такой, что xRk , kRx . В силу внешней устойчивости Y существует $y \in Y$, yRx . Отсюда вытекает противоречие с предположением: yRk , kRy , т. е. $k \notin \text{Max}(Y, R)$. Включение $(\text{Max}(Y, R) \subseteq \text{Max}(X, R)) \mid I_R$ установлено.

Доказанные два включения согласно введенному выше определению означают, что

$$(\text{Max}(Y, R) = \text{Max}(X, R)) \mid I_R. \quad \blacktriangle$$

Теперь доказательство теоремы 2.2 проводится по индукции, при этом используются леммы 1.1 и 2.1.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и Φ антисимметрично. Тогда $X^* \subseteq X_0^*$, а в случае внешней устойчивости X^* в (X, Φ) справедливо равенство $X^* = X_0^*$.

Итак, теоремы 2.1 и 2.2 обосновывают схему декомпозиции (1.3) для достаточно широкого класса задач проектирования. Так, условия внешней устойчивости заведомо выполняются в случае, когда отношения Φ_i задаются векторными критериями (см. § 4 гл. 2), непрерывными на компактах X_i , либо когда X — конечное множество. Следовательно, в практических ситуациях, как правило, следует ожидать совпадения множества X_0^* с решением задачи проектирования.

Можно показать, что требование внешней устойчивости является в известном смысле необходимым: без его выполнения возможно строгое включение $X^* \subset X_0^*$.

Приводим следующий пример.

Пример 2.1. Пусть $\Phi = \Phi_1$ — отношения Парето, порожденные критерием $W(x) = (x^1, x^2)$. Множество X — треугольник $OB D$ с единственной граничной точкой E на стороне BD (рис. 18). Функция агрегирования f_1 переводит отрезки GE и EH в точку E , а остальные точки множества X оставляет на месте. Очевидно, здесь имеет место f_1 -согласованность Φ с Φ_1 (но нет полной согласованности). Внешней устойчивости ядра отношения Φ , т. е. точки E нет. Решая уравнение (1.2) при $m=1$, получим ядро X_0^* — ломаную GEH , содержащую точку E в качестве собственного подмножества.

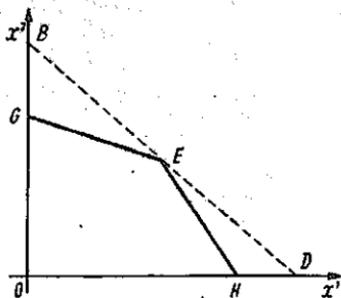


Рис. 18

До сих пор не использовалась полная согласованность отно-

шений предпочтения, поскольку для обоснования схемы декомпозиции она не потребовалась.

Выясним смысл полной согласованности.

Теорема 2.3. Пусть $\Phi_j, \Phi_{j+1}, j=0, \dots, m-1$ вполне согласованы. Тогда уравнение проектирования (1.2) записывается в виде

$$D_k = f_{k+1}^{-1}(D_{k+1}), \quad k = m-1, \dots, 0, \quad (2.1)$$

$$D_m = \text{Max}(X_m, \Phi_m),$$

т. е. $D_k = X_k^*$ при всех k .

Доказательство. Пусть доказано, что $\text{Max}(f_{k+2}^{-1}(X_{k+2}^*), \Phi_{k+1}) = D_{k+1}$. Допустим, что существует точка $x_k \in D_k \setminus X_k^*$. Тогда $x_{k+1} = f_{k+1}(x_k) \in D_{k+1} = X_{k+1}^*$. Найдется точка x_k^* такая, что $x_k^* \Phi_k x_k, x_k^* \bar{\Phi}_k x_k^*$. Отсюда в силу полной согласованности имеем $x_{k+1}^* = f_{k+1}(x_k^*) \Phi_{k+1} x_{k+1}$ и $x_{k+1}^* \bar{\Phi}_{k+1} x_{k+1}^*$. Таким образом, $x_{k+1} \notin X_{k+1}^*$, что противоречит индуктивному предположению. \blacktriangle

Следствие. Из леммы 2.1 и теоремы 2.2 вытекает, что при внешней устойчивости ядра $\text{Max}(X_m, \Phi_m)$ в (X_m, Φ_m) решение уравнения (2.1) дает решение задачи проектирования (1.1).

Покажем, что при внешней устойчивости ядер и f_{j+1} -согласованности Φ_j с Φ_{j+1} уравнение (1.2) не сводится к (2.1), т. е. полная согласованность в теореме 2.3 существенна.

Пример 2.2. Пусть Φ_0, Φ_1 — отношения Парето, которые задаются векторными критериями $W_0 = (x^1, x^2)$ и $W_1 = (x_1^1, x_1^2)$ соответственно на множествах X, X_1 , изображенных на рис. 19, а. Итак, здесь функция агрегирования $f_1(x) = (x^1 - x^2 + 1; x^2)$ деформирует квадрат X в параллелограмм X_1 , сохраняя ординату точек. Множества Парето внешне в данном случае устойчивы, имеется f_1 -согласованность Φ_0 с Φ_1 (см. рис. 19, б). Полной согласованности нет, так как (рис. 19, а) $A\Phi_0 N$, но $A'\bar{\Phi}_1 N^1$. При этом $D_1 = X_1^* = A'N', f_1^{-1}(D_1) = AN \neq \{A\} = X^*$.

Как уже отмечалось в § 1, на практике полное согласование встречается сравнительно редко. Вот почему обоснование схемы декомпозиции было проведено лишь при условии согласования.

Сведение схемы (1.3) к (2.1) говорит о том, что отношения $\Phi_{m-1}, \Phi_{m-2}, \dots, \Phi_1, \Phi_0$ не отсеивают неэффективные варианты проектируемой системы в процессе решения уравнения (1.2). Существенным оказывается лишь отношение Φ_m на верхнем уровне иерархии и функции агрегирования. Другими словами, вся информация о задаче проектирования содержится в Φ_m и $f_k, k=1, m$, т. е. отношение Φ «свертывается» в Φ_m (аналог свертывания векторного критерия). Это является еще одним аргументом в пользу того, что полная согласованность, по-видимому, редко

встречается в проектировании, поскольку при агрегировании часть информации о системе утрачивается.

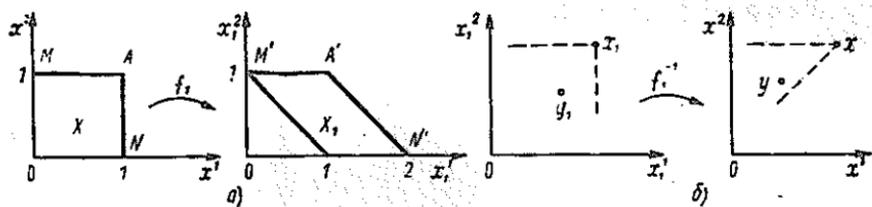


Рис. 19

Учитывая сказанное, далее будем использовать лишь условия согласования, отказавшись от полной согласованности.

§ 3. Иерархические схемы проектирования

Иерархический подход к процессу проектирования, изложенный выше, нуждается в развитии. Дело в том, что любая сложная техническая система при достаточно подробном описании распадается на подсистемы, дальнейшее проектирование каждой из которых ведется в какой-то степени независимо от других. Так, например, самолет на определенной стадии проектирования может рассматриваться как система, состоящая из подсистем-агрегатов: крыла, фюзеляжа, двигателя и т. д. Именно блочная структура сложных систем обеспечивает успех их практического проектирования. Это обстоятельство нельзя не учитывать при создании систем автоматизированного проектирования, при распараллеливании процесса автоматизированного проектирования.

Описать иерархический процесс проектирования технических систем с учетом их блочной структуры можно на основе функций агрегирования, введенных в § 1. Однако удобнее использовать для формулировки и обоснования соответствующих результатов более общую точку зрения. При этом в качестве следствий из них будут получены доказательства теорем, приведенных выше.

Изложим сначала формальные конструкции, дадим их обоснование, а затем уже перейдем к рассмотрению содержательного смысла построений.

Пусть $d^i: 2^X \rightarrow 2^{X_i}$, $F_i = 1, \dots, s$ — заданные отображения и отношения на $X_i = d_i(X)$. Положим $\Phi_i = F_i$, если $\Phi = \Phi^i$; $\Phi_i = F_i$, если $\Phi \neq \Phi^i$.

На множестве всех подмножеств 2^X множества X^*) зададим вспомогательное бинарное отношение \tilde{R} , положим $a\tilde{R}b$ тогда и

*) Напомним, что X — конечное множество; t — символ транзитивного замыкания.

только тогда, когда множество a внешне устойчиво в $(a \cup b, \Phi)$; $a, b \in 2^X$.

Рассмотрим следующие две схемы декомпозиции задачи проектирования (1.1): «параллельную» схему

$$X_j \rightarrow A_j = \text{Max}(X_j, \Phi_j), \quad j = 1, \dots, s,$$

$$A = \bigcup_{j=1}^s d_j^{-1}(A_j) \rightarrow A_0 = \text{Max}(A, \Phi); \quad (3.1)$$

«последовательную» схему

$$B_{j+1} \rightarrow B_j = \text{Max}(d_j d_{j+1}^{-1}(B_{j+1}), \Phi_j), \quad j = s-1, \dots, 0, \quad (3.2)$$

где $B_s = \text{Max}(X_s, \Phi_s)$; $\Phi_0 = \Phi$; $d_0: 2^X \rightarrow 2^X$ — тождественное преобразование, $d_j d_{j+1}^{-1}$ — композиция отображений $d_{j+1}^{-1}(\cdot)$ и $d_j(\cdot)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть отображения $d_j^{-1}(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, являются гомоморфизмами*¹ моделей (X_i, F_i) в модель $(2^X, R)$. Тогда для схем (3.1) ((3.2)) выполняются условия:

- 1) $X^* \subseteq A_0$ ($X^* \subseteq B_0$), если $A_0 \neq \emptyset$ ($B_0 \neq \emptyset$) и Φ антисимметрично;
- 2) $X^* = A_0$ ($X^* = B_0$), если $A_0 \neq \emptyset$ ($B_0 \neq \emptyset$), Φ антисимметрично и X^* внешне устойчиво в (X, Φ) ;
- 3) $X^* = A_0$ ($X^* = B_0$), если Φ -порядок;
- 4) $(X^* = A_0) \mid I_\Phi$ ($(X^* = B_0) \mid I_\Phi$), если Φ — квазиупорядок.

Для доказательства этой общей теоремы потребуются две леммы, описывающие свойства введенного выше отношения R на 2^X .

Лемма 3.1. Если отображение $d^{-1}(\cdot)$ есть гомоморфизм модели (Y, G) вчет транзитивность R .

Доказательство. Пусть: $a_1 R a_2$, $a_2 R a_3$; $a_1, a_2, a_3 \in 2^X$. Тогда, по определению R , из $a_2 R a_3$ следует, что для любого $x \in a_3$ возможны два случая:

а) $x \in a_2$;

б) найдется $y \in a_2$ такое, что $y \Phi x$.

Из $a_1 R a_2$ следует: в случае а) либо $x \in a_1$, либо найдется $z \in a_1$ такое, что $z \Phi x$; случае б) либо $y \in a_1$, либо найдется $z \in a_1$ такое, что $z \Phi y$.

В последнем случае в силу транзитивности Φ из $y \Phi x$, $z \Phi y$ следует $z \Phi x$. Итак, для всякого $x \in a_3$ либо $x \in a_1$, либо существует $z \in a_1$, для которого $z \Phi x$. По определению R это значит, что $a_1 R a_3$, т. е. $R = R^1$. \blacktriangle

Лемма 3.2. Если отображение $d^{-1}(\cdot)$ есть гомоморфизм модели (Y, G) в модель $(2^X, R)$, то $d^{-1}(\cdot)$ — гомоморфизм (Y, G^1) в $(2^X, R^1)$.

Доказательство. Пусть $y G^1 z$; $y, z \in Y$. Тогда, по определению, найдутся $x_1, \dots, x_m \in Y$ такие, что $y G x_1$, $x_1 G x_2, \dots, x_m G z$. Отсюда $a^1 R a^1$, $a^1 R a^2, \dots, a^m R b$, где $a^i = d^{-1}(x^i)$, $a = d^{-1}(y)$, $b = d^{-1}(z)$. Последнее означает, что $a R^1 b$. Таким образом, операция транзитивного замыкания G и R сохраняет гомоморфность отображения $d^{-1}(\cdot)$. \blacktriangle

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала «параллельную» схему (3.1).

1) Покажем, что $X^* \subseteq d_j^{-1}(A_j)$, $j = 1, \dots, s$.

*¹ См. § 3, гл. 2.

Допустим противное: найдется $x \in X^* \setminus d_j^{-1}(A_j)$. Тогда $x_j = d_j(x) \notin A_j = \text{Max}(X_j, \Phi_j)$ и, следовательно, найдется $y_j \in X_j$ такое, что $y_j \Phi_j x_j$, $x_j \neq y_j$. Положим $a = d_j^{-1}(y_j)$, $b = d_j^{-1}(x_j)$. Очевидно, $x \in b$, $a \cap b = \emptyset$.

В силу гомоморфности $d_j^{-1}(\cdot)$ множество a внешне устойчиво в $(a \cup b, \Phi)$, т. е. найдется $y \in a$ такое, что $y \Phi x$. Из максимальной x в (X, Φ) следует $x \Phi y$, из антисимметричности Φ имеем $x = y$, что невозможно в силу $a \cap b = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает включения $X^* \subseteq d_j^{-1}(A_j)$, $j = 1, \dots, s$.

Отсюда следует $X^* \subseteq A$ и $X^* \subseteq A_0$.

2) Докажем, что $A_0 \subseteq X^*$; вместе с полученным выше включением это даст требуемое равенство. Допустим противное: найдется $x \in A_0 \setminus X^*$. В силу внешней устойчивости X^* в (X, Φ) существует $y \in X^*$, $y \Phi x$, $x \neq y$. Из включения $X^* \subseteq A$, доказанного в 1), следует $y \in A$, а из максимальной x в $(A, \Phi) - x \Phi y$, что невозможно в силу антисимметричности Φ .

3) Следует из 1), 2), так как порядок антисимметричен, а ядро X^* внешне устойчиво в (X, Φ) .

4) Докажем, что $(X^* \subseteq d_j^{-1}(A_j)) \mid I_\Phi$. Допустим противное; тогда найдется множество $P \in X^* \mid I_\Phi$, для которого $P \cap d_j^{-1}(A_j) = \emptyset$. Возьмем $x \in P$ и положим $x_j = d_j(x)$. Очевидно, $x_j \notin A_j$. Найдется $y_j \in A_j$ такое, что $y_j \Phi_j x_j$. Из гомоморфности $d_j^{-1}(\cdot)$ следует внешняя устойчивость множества $a = d_j^{-1}(y_j)$ в модели $(a \cup b, \Phi)$, где $b = d_j^{-1}(x_j)$. Отсюда следует, что для $x \in b$ найдется $y \in a$ такое, что $y \Phi x$. В силу максимальной x в (X, Φ) и свойств Φ отсюда следует включение $y \in P$ и неравенства $d_j^{-1}(y_j) \cap P \neq \emptyset$, $d_j^{-1}(A_j) \cap P \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает требуемое и вместе с ним включения $(X^* \subseteq A) \mid I_\Phi$, $(X^* \subseteq A_0) \mid I_\Phi$.

Докажем, что $(A_0 \subseteq X^*) \mid I_\Phi$. Допустим противное; тогда найдется $P \in A_0 \mid I_\Phi$ такое, что $P \cap X^* = \emptyset$. Возьмем $y \in P$. В силу внешней устойчивости X^* в (X, Φ) и установленного выше включения $(X^* \subseteq A) \mid I_\Phi$ найдется $x \in A \cap X^*$ такое, что $x \Phi y$. В силу максимальной y в (A, Φ) отсюда следует $y \Phi x$ и $x \in P \cap X^* \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает требуемое и вместе с ним утверждение 4) теоремы.

Проведем теперь доказательство для «последовательной» схемы (3.2).

1) Докажем по индукции, что $X^* \subseteq d_j^{-1}(B_j)$, $j = s, \dots, 0$. Включение $X^* \subseteq d_s^{-1}(B_s)$ следует из доказательства утверждения 1) для схемы (3.1).

Пусть $X^* \subseteq d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})$. Допустим, что найдется $x \in X^* \setminus d_j^{-1}(B_j)$. Положим $x_j = d_j(x)$. Очевидно $x \in d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})$ согласно сделанному предположению и $x_j \in d_j$, $d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})$, $x_j \notin B_j$. Поэтому найдется $y_j \in d_j$, $d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})$, $y_j \Phi_j x_j$, $y_j \neq x_j$. В силу гомоморфности отображения $d_j^{-1}(\cdot)$ множество $a = d_j^{-1}(y_j)$ внешне устойчиво в $(a \cup b, \Phi)$, где $b = d_j^{-1}(x_j)$. Отсюда следует, что найдется $y \in a$, $y \neq x$ такое, что $y \Phi x$, поскольку $a \cap b = \emptyset$, $x \in b$. Из максимальной x в (X, Φ) вытекает $x \Phi y$, из антисимметричности Φ имеем $x = y$. Полученное противоречие доказывает 1). Утверждения 2), 3) для схемы (3.2) доказываются как и для схемы (3.1).

4) Из рефлексивности Φ непосредственно следует рефлексивность R . Таким образом, на основании леммы 3.1, если Φ — квазиупорядок, то и R — ква-

зипорядок. В силу леммы 3.2 $d_j^{-1}(\cdot)$ — гомоморфизм модели $(X_j, \Phi_j) = (X_j, F_j^f)$ в модель $(2^X, \bar{R}) = (2^X, \bar{R}^t)$.

Докажем по индукции, что $(X^* \subseteq d_j^{-1}(B_j)) \mid I_\Phi$, $j=s, s-1, \dots, 0$. Покажем сначала, что $(X^* \subseteq d_s^{-1}(B_s)) \mid I_\Phi$. Допустим противное; тогда найдется множество $P \in X^* \mid I_\Phi$, для которого $P \cap d_s^{-1}(B_s) = \emptyset$.

Возьмем $x \in P$ и положим $x_s = d_s(x)$. Очевидно, $x_s \notin B_s$. В силу транзитивности Φ_s ядро B_s внешне устойчиво в (X_s, Φ_s) и, следовательно, существует $y_s \in B_s$, $y_s \Phi_s x_s$. Из гомоморфности $d_s^{-1}(\cdot)$ следует внешняя устойчивость множества $a = d_s^{-1}(y_s)$ в $(a \cup b, \Phi)$, где $b = d_s^{-1}(x_s)$ и, значит, $y \Phi x$ для некоторого $y \in a$. Отсюда вытекает, что $y \in P$, т. е. $d_s^{-1}(B_s) \cap P \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

Пусть показано, что $(X^* \subseteq d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})) \mid I_\Phi$. Допустим, что найдется $P \in X^* \mid I_\Phi$, $P \cap d_j^{-1}(B_j) = \emptyset$. Выберем $x \in P \cap d_{j+1}^{-1}(B_{j+1})$ и положим $x_j = d_j(x)$, $x_j \notin B_j$.

В силу транзитивности Φ_j ядро B_j внешне устойчиво в $(d_j \cdot d_{j+1}^{-1}(B_{j+1}), \Phi_j)$, т. е. найдется $y_j \in B_j$, $y_j \Phi_j x_j$. Из гомоморфности $d_j^{-1}(\cdot)$ следует внешняя устойчивость множества $a = d_j^{-1}(y_j)$ в $(a \cup b, \Phi)$, где $b = d_j^{-1}(x_j)$. Поэтому найдется $y \in a$, $y \Phi x$, что влечет $y \in P$, $d_j^{-1}(B_j) \cap P \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает включение $(X^* \subseteq d_j^{-1}(B_j)) \mid I_\Phi$ и, в частности, $(X^* \subseteq B_0) \mid I_\Phi$ при $j=0$.

Докажем, наконец, что $(B_0 \subseteq X^*) \mid I_\Phi$. Допустим противное: найдется $P \in B_0 \mid I_\Phi$, $P \cap X^* = \emptyset$. Возьмем произвольное $x \in P$. В силу внешней устойчивости ядра X^* в (X, Φ) и включения $(X^* \subseteq d_1^{-1}(B_1)) \mid I_\Phi$ найдется $y \in X^* \cap d_1^{-1}(B_1)$, $y \Phi x$. В силу максимальной x в $(d_1^{-1}(B_1), \Phi)$ это означает $y \in P$, $P \cap X^* \neq \emptyset$. Противоречие доказывает включение $(B_0 \subseteq X^*) \mid I_\Phi$ и утверждение 4) теоремы. \blacktriangle

З а м е ч а н и е. Второй этап в схеме (3.1) можно заменить следующим:

$$A = \bigcap_{j=1}^s d_j^{-1}(A_j) \rightarrow A_0 = \text{Max}(A, \Phi). \quad (3.3)$$

При этом утверждения 1) — 3) теоремы 3.1 останутся без изменения; утверждение 4) перестает, вообще говоря, быть верным.

Приведем содержательную трактовку схем (3.1), (3.2). Пусть проектируемая система S состоит из подсистем S_j , $j=1, \dots, s$. Варианты подсистемы S_j описываются вектором конструктивных параметров $x_j = d_j(x)$. В простейшем случае $x = (x_1, \dots, x_s)$; в общем случае одни и те же конструктивные параметры могут участвовать в описании различных подсистем, т. е. подсистемы могут

«пересекаться». Отношения Φ и F_j задаются, например, как в § 1 гл. 3 через свертки технических характеристик системы и подсистем соответственно. Схема (3.1) отвечает параллельному, (3.2) — последовательному проектированию подсистем.

Например, базовый ЛА состоит из планера и силовой установки. Планер, в свою очередь, включает крыло, фюзеляж, оперение, шасси и т. д. Схема (3.1) означает параллельное проектирование силовой установки и планера на нижнем уровне иерархии и ЛА — на верхнем. Схема (3.2) — это проектирование силовой установки на нижнем уровне и ЛА в целом на верхнем уровне.

Гомоморфизм отображения $d_j^{-1}(\cdot)$ в теореме означает, что более совершенную подсистему S_j можно включить в систему S , повысив эффективность последней.

Процесс проектирования в самом общем виде может быть описан как последовательное «сжатие» множества конкурирующих вариантов системы. Рассмотренные в гл. 3 и 4 схемы последовательного анализа вариантов дают метод такого сжатия и могут служить основой для построения в САПР различных иерархических схем внутреннего проектирования технических систем. Их конкретная архитектура может формироваться главным конструктором системы в процессе проектирования с использованием САПР. Условия, обеспечивающие увязку всех принятых в ходе проектирования решений, дают соответствующие комбинации теорем 3.1 и 1.1 гл. 3.

Пример такой иерархической схемы приведен на рис. 20. В ней реализован метод последовательного анализа вариантов (1.2) гл. 3. Для отыскания X_{l-1}^* используется «параллельная» схема декомпозиции (3.1), а для нахождения X_{l-2}^* — «последовательная» схема (3.2). Комбинируя (1.2) гл. 3, (3.1), (3.2), можно построить широкое множество различных иерархических схем проектирования. Говоря о практической реализации таких схем автоматизированного проектирования на ЭВМ, уже сейчас нельзя не отметить сложные проблемы, связанные с описанием объекта проектирования, с передачей информации в САПР, диалогом и т. д. Особенно это относится к параллельным схемам проектирования. Они вполне соответствуют сложившейся практике проектирования подсистем сложной технической системы в КБ и, вероятно, окажутся полезными при создании САПР на многомашинной основе.

Необходимо отметить следующее. Выбор параметров связей между подсистемами выходит за рамки проблемы проектирования подсистем и относится ко всей системе в целом. В САПР эти вопросы должны решаться специальной управляющей программой, роль которой аналогична роли главного конструктора в КБ: *координировать* действия подсистем и решать оптимизационные задачи в схеме (3.1). Таким образом, управление САПР техниче-

ских систем с блочной структурой не сводится только к передаче информации между САПР подсистем. В процессе управления должно происходить оперативное решение задач оптимизации, т. е. получение новой информации, которая отсутствует на уровне подсистем. Далее, при создании САПР системное математическое обеспечение должно учитывать специфику проектируемого объекта, в противном случае оно может оказаться слишком громоздким и неэффективным. Отсюда следует, что к созданию инвари-

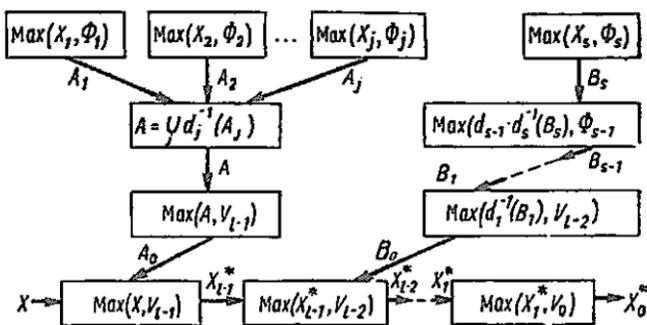


Рис. 20

антного математического обеспечения САПР нужно подходить осторожно. Разработчики САПР для успешной работы обязаны изучить объект проектирования. Когда речь идет о действительно сложных технических системах, такой подход, как правило, себя оправдывает и позволяет избежать лишних затрат.

Докажем теорему 1.1 гл. 3 как следствие теоремы 3.1. Для этого положим в «последовательной» схеме (3.2): $d_j(\cdot) : E^N \rightarrow E^N$ — тождественное преобразование: $s=l, \Phi_j=V_j, j=1, \dots, l-1, X_s=B_s=X, B_j=X_j^*$. При этом схема (3.2) для $j=l-1, \dots, 1$ перейдет в

$$X_{j+1}^* \rightarrow X_j^* = \text{Max}(X_{j+1}^*, V_j), X_l^* = X.$$

Далее, из (3.2) следует, что при $j=1, \dots, l-1$ $\text{Max}(X_l^*, V_j) = X_l^*$.

Отсюда в силу условия $\Phi = \dot{V} = \bigcup_{j=0}^{l-1} V_j$

$$X_0^* = \text{Max}(X_l^*, V_0) = \text{Max}(X_l^*, \bigcup_{j=0}^{l-1} V_j) = \text{Max}(X_l^*, \Phi).$$

Итак, схема (3.2) содержит (1.2). Из включения $V_j \subseteq \Phi$ следует, что отображение $d_j(\cdot)$ есть гомоморфизм модели (X, V_j) в модель (X, Φ) . Теперь справедливость теоремы 1.1 гл. 3 вытекает из общей теоремы 3.1.

Покажем как «последовательная» схема (3.2) соотносится со схемой декомпозиции на основании агрегирования, изученной в § 1 и 2. Пусть

$f_j : E^{N_{j-1}} \rightarrow E^{N_j}$, $N_j \leq N_{j-1}$; $j=1, 2, \dots, m$, — заданные функции агрегирования проектных параметров системы и F_j — бинарные отношения на множествах $X_j = f_j(X_{j-1})$, $X_0 = X$. Положим $\Phi_j = F_j^t$, если $\Phi = \Phi^t$ и $\Phi_j = F_j$, если $\Phi \neq \Phi^t$.

На булеане 2^{X_j} , как и раньше, зададим отношение \bar{R}_j , положив $a_j R_j b_j$ тогда и только тогда, когда множество a_j внешне устойчиво в $(a_j \cup b_j, F_j)$; $a_j, b_j \in 2^{X_j}$. Рассмотрим схему проектирования, аналогичную (1.3)

$$X_{j+1}^* \rightarrow X_j^* = \text{Max}(f_{j+1}^{-1}(X_{j+1}^*), \Phi_j), \quad j = m-1, \dots, 0,$$

где $X_m^* = \text{Max}(X_m, \Phi_m)$, $\Phi_0 = \Phi$.

Формально схема (3.3) получается из «последовательной» схемы (3.2), если в последней ввести отображение

$$d_j(\cdot) = f_j \circ f_{j-1} \circ \dots \circ f_1(\cdot) \quad (3.4)$$

как суперпозицию функций агрегирования $f_1(\cdot), \dots, f_j(\cdot)$. Предположим, что $f_j^{-1}(\cdot)$ являются гомоморфизмами моделей (X_j, F_j) модели $(2^{X_{j-1}}, \bar{R}_{j-1})$, $j=m, \dots, 1$. Тогда введенные в (3.4) отображения $d_j(\cdot)$ порождают гомоморфизмы $d_j^{-1}(\cdot)$ моделей (X_j, F_j) в модель $(2^X, \bar{R})$.

Отсюда и из теоремы 3.1 непосредственно следует теорема 3.2.

Теорема 3.2. Пусть отображения $f_j^{-1}(\cdot)$, $j=1, \dots, m$ являются гомоморфизмами моделей (X_j, F_j) в модель $(2^{X_{j-1}}, \bar{R}_{j-1})$. Тогда для схемы (3.3) выполняются следующие условия:

- 1) $X^* \subseteq X_0^*$, если $X_0^* \neq \emptyset$ и Φ антисимметрично;
- 2) $X^* = X_0^*$, если $X_0^* \neq \emptyset$, Φ антисимметрично и X^* внешне устойчиво в (X, Φ) ;
- 3) $X^* = X_0^*$; если Φ — порядок;
- 4) $(X^* = X_0^*) \mid I_\Phi$, если Φ — квазипорядок.

Теорема 3.2 является аналогом теорем 2.1 и 2.2 из предыдущего параграфа. Существенным однако является то, что она доказана при более слабом условии гомоморфности $f_j^{-1}(\cdot)$, чем условие согласования из определения 1.1. В самом деле, f_{j+1} -согласованность Φ_j с Φ_{j+1} влечет гомоморфность $f_{j+1}^{-1}(\cdot)$, обратное, вообще говоря, неверно.

Еще одно отличие теоремы 3.2 состоит в том, что для реализации схемы (3.3) требуется знание лишь множественно-множественного отображения $f_{j+1}^{-1} : 2^{X_{j+1}} \rightarrow 2^{X_j}$ и несущественно отображение точек. Последнее связано с постановкой задачи проектирования как задачи поиска ядра X^* .

Теоремы 3.1 и 3.2 показывают, до какой степени могут быть ослаблены условия согласования при сохранении корректности декомпозиции задачи проектирования.

Отмеченная общность не умаляет значения теорем 2.1, 2.2, обосновывающих схему декомпозиции на основе агрегирования. Условия согласования § 1, достаточные для гомоморфности f_{j+1}^{-1} являются наглядными, имеющими ясный инженерный смысл. Проверка их выполнимости вполне возможна, в сложных случаях согласованные отношения могут формироваться конструктором на

основании опыта проектирования. Кроме того, «пошаговый» характер агрегирования облегчает его практическое применение, поскольку для сложной системы невозможно сразу перейти от обобщенного к исходному подробному описанию.

§ 4. Учет неопределенных факторов в процессе проектирования

Целесообразность применения иерархических схем проектирования в САПР во многом определяется тем, насколько «простыми» являются математические модели на верхних, агрегированных уровнях иерархии. Требование «простоты» моделей на ранних этапах проектирования, как правило, вступает в противоречие с их точностью, адекватностью описанию проектируемой системы на этапе рабочего проектирования. Так, например, для задачи проектирования летательного аппарата с минимальным весом существуют алгоритмы предэскизных, эскизных и исполнительных весовых расчетов ([50], с. 48). Предэскизные оценки взлетного веса ЛА могут производиться по функционально-корреляционным формулам (системам уравнений) прикидочного расчета первого и второго приближений и т. д. Каждая из формул характеризуется своей областью применимости и точностью.

Таким образом, в иерархических схемах проектирования следует учитывать неопределенность, возникающую из самой природы математического моделирования, состоящего в идеализации, упрощении изучаемых явлений, в выделении их наиболее существенных черт и свойств. При автоматизации проектирования это приводит к необходимости построения иерархических декомпозиционных схем внутреннего проектирования, соответствующих схемам § 3 и отражающих последовательное снятие неопределенностей, присущих процессу проектирования сложных систем.

Рассмотрим задачу проектирования, состоящую в выделении из конечного множества X_0 альтернатив технической системы множества всех максимальных по отношению Φ_0 альтернатив:

$$X_0 \rightarrow X^* = \text{Max}(X_0, \Phi_0). \quad (4.1)$$

Общую постановку задачи проектирования конкретизируем, предположив, что отношение Φ_0 на X_0 задается векторным критерием эффективности $W: X_0 \rightarrow E^m$ в виде

$$\Phi_0 = \{(x_0, y_0) \in X_0^2 \mid W(x_0) \geq W(y_0), W(x_0) \neq W(y_0)\}. \quad (4.2)$$

Таким образом, бинарное отношение Φ_0 является отношением Парето, а решение задачи проектирования X_0^* — множеством Парето по векторному критерию W . Далее будем исследовать «последовательную» схему проектирования с учетом неопределенных факторов. Для этого, как и в § 3, введем иерархию описаний технической системы:

$$x_i \in X_i \subset E^{N_i},$$

связанных с x_0 функциями агрегирования

$$d_i: X_0 \rightarrow X_i, x_i = d_i(x_0), X_i = d_i(X_0), i = 0, 1, \dots, s.$$

Положим $d_i^{-1}: X_i \rightarrow 2^{X_0}$. Здесь $N_0 \geq N_1 \geq \dots \geq N_s$, т. е. с ростом уровня иерархии степень агрегированности описания технической системы не убывает, вектор x_s дает самое «грубое» описание на этапе технического предложения, вектор x_0 — ее детальное описание на этапе рабочего проектирования.

Предположим, что на i -м уровне иерархии имеется алгоритм (модель) $f_i(x_i, \varepsilon_i)$ приближенного расчета значений векторного критерия W , где $\varepsilon_i \in \mathcal{E}$ — вектор параметров неопределенности, $i = 0, 1, \dots, s$. Естественно трактовать ε_i как погрешность, связанную с неточностью оценок характеристик технической системы и, следовательно, значения критерия ее эффективности на ранних этапах проектирования. Отметим, что совпадающим описаниям технической системы могут отвечать разные алгоритмы ($f_i \neq f_{i-1}$ при $x_i = x_{i-1}$), отличающиеся как точностью оценки W , так и потребным ресурсом ЭВМ для реализации расчета. Параметры ε_i считаем неопределенными факторами [30], для которых известна лишь область $\mathcal{E}_i(\cdot)$ их изменения и не предполагается существования функции распределения. Это означает, что в процессе проектирования ε_i могут принимать самые «неблагоприятные» значения.

Предположение 4.1. Для любого $x_i \in X_i$ и любого $x_0 \in \mathcal{E}_i^{-1}(x_i)$ найдется $\varepsilon_i \in \mathcal{E}_i(x_i)$ такое, что

$$f_i(x_i, \varepsilon_i) = W(x_0), i = 0, 1, \dots, s. \quad (4.3)$$

Иначе условие (4.3) можно записать в виде включения $W(x_0) \in f_i(x_i, \mathcal{E}_i)$, где

$$f_i(x_i, \mathcal{E}_i) = \{f_i \in E^m \mid f_i = f_i(x_i, \varepsilon_i), \varepsilon_i \in \mathcal{E}_i(x_i)\}.$$

Таким образом, значение критерия эффективности $W(x_0)$ каждой альтернативы $x_0 \in X_0$ может быть получено на i -м уровне путем вычисления величины $f_i(x_i, \varepsilon_i)$ с $x_i = d_i(x_0)$ и некоторыми, вообще говоря, неизвестно какими параметрами $\varepsilon_i \in \mathcal{E}_i(x_i)$. Очевидно, данное предположение есть не что иное, как требование «корректности» используемой на i -м уровне иерархии расчетной модели.

Пример 4.1. Пусть $f_i(x_i, \varepsilon_i) = \varphi_i(x_i) + \varepsilon_i$, где $\varphi_i(x_i) \in W d_i^{-1}(x_i)$. Тогда предположение (4.3) всегда может быть выполнено за счет расширения множества $\mathcal{E}_i(x_i)$. Последнее, однако, означает увеличение диапазона погрешностей вычисления W и снижает «работоспособность» моделей в системе проектирования.

Определим покомпонентно следующие вектор-функции:

$$f_i^{\min}(x_i) = \min f_i(x_i, \varepsilon_i) \text{ по } \varepsilon_i \in \mathcal{E}_i(x_i), \quad (4.4)$$

$$f_i^{\max}(x_i) = \max f_i(x_i, \varepsilon_i) \text{ по } \varepsilon_i \in \mathcal{E}_i(x_i).$$

На множествах X_i введем бинарные отношения Φ_i , положив $x_i \Phi_i y_i$ тогда и только тогда, когда

$$f_i^{\min}(x_i) \geq f_i^{\max}(y_i), f_i^{\min}(x_i) \neq f_i^{\max}(y_i), i = 0, 1, \dots, s.$$

Пример 4.2. Пусть, как в предыдущем примере, $f_i(x_i, \varepsilon_i) = \varphi_i(x_i) + \varepsilon_i$, где $\varphi_i = (\varphi_i^1, \varphi_i^2)$, $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2)$, $\mathcal{E}_i(x_i) \equiv \mathcal{E}_i$ — прямоугольник со сторонами $\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2$. Отношение Φ_i , определенное с помощью (4.4), иллюстрирует рис. 21. На этом рисунке $x_i^1 \Phi_i y_i^2$, а точки x_i^2 и y_i^2 несравнимы по бинарному отношению Φ_i .

Рассмотрим следующий «последовательный» алгоритм решения задачи проектирования (4.1), (4.2):

$$X_i^* \rightarrow X_{i-1}^* = \text{Max}(g_i^{-1}(X_i^*), \Phi_{i-1}), \quad (4.5)$$

где $g_i^{-1} = d_{i-1} \circ d_i^{-1}$, $i = s, s-1, \dots, 1$, $X_s^* = \text{Max}(X_s, \Phi_s)$.

Далее в теореме 4.1 будет установлена его сходимость к решению задачи проектирования при выполнении предположения 4.1.

Возможность практической реализации алгоритма (4.5) определяется мощностью $|X_i^*|$ множеств X_i^* . Большое число вариантов технической системы невозможно «проработать» достаточно детально. Это означает, что, если $|X_i^*|$ велики,

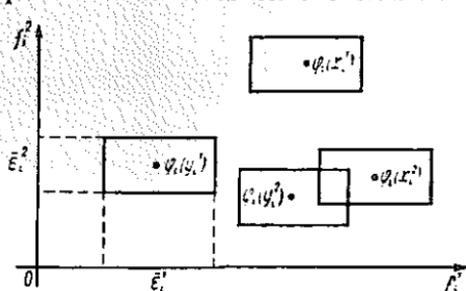


Рис. 21

то используемые вычислительные модели неэффективны с точки зрения отбраковки альтернатив и их, вообще говоря, следует доработать или заменить. Другой подход к повышению эффективности алгоритма (4.5) заключается в преобразовании его в управляемый дискретный многошаговый процесс и управлении на этой основе процессом проектирования.

Уточним понятие «проработка альтернативы». В широком смысле оно означает проведение комплекса научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, цель которых дальнейшее формирование внутренней структуры системы, уточнение ее параметров и характеристик и, следовательно, оценка эффективности для принятия проектно-ко-

структурских решений. В более узком смысле проработка альтернативы связана с реализацией процедур синтеза и анализа проектно конструкторских решений на ЭВМ.

Пусть $h_{ij}^{-1} = g_{j+1}^{-1} \circ \dots \circ g_i^{-1}$, если $j < i$ и h_{ii}^{-1} — тождественное преобразование.

Формализация результатов проработки альтернативы $y_i \in X_i$ в альтернативу $y_j \in h_{ij}^{-1}(y_i)$ возможна путем введения параметрического семейства отображений

$$\pi = \pi[y_i, y_j], \quad (4.6)$$

зависящих от проектных параметров альтернатив y_i, y_j .

Будучи примененным к множеству $f_i(x_i, \mathcal{E}_i)$, отображение (оператор) (4.6) дает множество

$$\pi[y_i, y_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i) \subseteq E^m$$

— уточненную оценку эффективности альтернативы x_i .

Новая информация о системе, полученная в ходе проработки альтернативы y_i , снижает неопределенность оценки эффективности не только для самой альтернативы y_i , но и, вообще говоря, для альтернатив $x_i \neq y_i$. Поэтому в дальнейшем будем считать справедливым предположение более сильное, чем предположение 4.1.

Предположение 4.2. Отображение π является «сжимающим», т. е.

$$\pi[y_i, y_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i) \subseteq f_i(x_i, \mathcal{E}_i),$$

причем

$$W(x_0) \in \pi[y_i, y_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i) \quad (4.7)$$

для всех $x_i, y_i \in X_i, y_j \in h_{ij}^{-1}(y_i)$,

$x_0 \in d_i^{-1}(x_i), i = \overline{0, s}$, а $\pi[y_i, y_i]$ — тождественный оператор.

Кроме общего свойства (4.7) отображений (4.6) естественно предположить также, что при $x_i \neq y_i$

$$\pi[x_i, x_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i) \subset \pi[y_i, y_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i).$$

Далее, можно ввести отображение

$$\pi[y_i, y_i, \dots, y_{ik}], \quad (4.8)$$

соответствующее последовательной проработке альтернатив $y_{ij} \in h_{i_{j-1}i_j}^{-1}(y_{i_{j-1}}), j = \overline{1, k}$.

Сделать это можно, например, с помощью суперпозиции отображений (4.6). Наконец, можно определить и отображение

$$\pi[y_i^{(1)}, y_j; y_j^{(2)}, y_l; \dots; y_l^{(k)}, y_{ll}], \quad (4.9)$$

соответствующее параллельной проработке альтернатив $y_i^k \in X_i$, $k = \overline{1, l}$, на различные уровни иерархии описания проектируемой системы. Корректно определенные отображения (4.8), (4.9), так же как и (4.6), должны обладать «сжимающим» свойством (4.7).

Конкретная реализация отображений (4.6) — (4.9), как и «алгебра» действий над ними, осуществляется с использованием как формального процессора (ЭВМ), так и неформального (конструктора, использующего САПР). В самом деле, отображение h_{ij}^{-1} является неоднозначным (точечно-множественным) и в выборе конкретной альтернативы $y_i \in h_{ij}^{-1}(y_j)$ может помочь опыт и интуиция конструктора. Здесь же может использоваться ЭВМ. Например, выбор y_i из множества $h_{ij}^{-1}(y_j)$ часто происходит на базе решения задач оптимизации параметров подсистем с критериями, заданными конструктором и традиционно используемым в практике проектирования. Таким образом, здесь открываются широкие перспективы для организации различных интерактивных процедур [17, 22]. Более того, и сами отображения $g_j^{-1}(\cdot)$ могут формироваться в процессе решения задачи проектирования, т. е. в процессе реализации схемы (4.5). Это иллюстрирует уже неоднократно высказанное в предыдущих разделах положение, что постановка и решение задачи проектирования сложных систем связаны в единый процесс «постановки — решения» задачи. Свойство (4.7) дает возможность на i -м уровне иерархии использовать полученную информацию для дальнейшего сужения множества конкурирующих альтернатив, образовав обратную связь j -х уровней $j = i-1, i-2, \dots$, с i -м уровнем. Для иллюстрации рассмотрим пример.

Пример 4.3. На рис. 22 изображены альтернативы x_i, y_i , несравнимые по отношению Φ_i из примера 4.2. После проработки альтернативы y_i их оценки эффективности стали более точными (рис. 22), в результате чего x_i, y_i уже сравнимы. Это позволяет отбраковать альтернативу y_i как доминируемую.

Формализуем сказанное. Пусть альтернатива $y_i \in X_i$ проработана в $y_j \in h_{ij}^{-1}(y_i)$. Определим на множестве X_i бинарное отно-

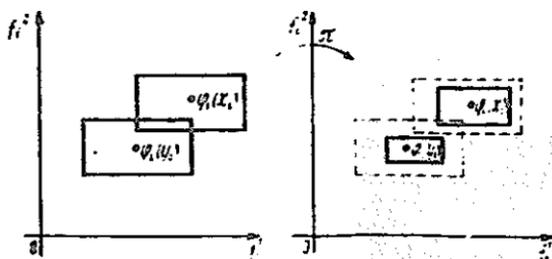


Рис. 22

шение $\Phi_i [y_i, y_j]$, положив $x_i \Phi_i [y_i, y_j] z_i$ тогда и только тогда, когда

$$f_{\pi}^{\min}(x_i) \geq f_{\pi}^{\max}(z_i), f_{\pi}^{\min}(x_i) \neq f_{\pi}^{\max}(z_i).$$

Здесь $f_{\pi}^{\min}(x_i) \in E^m$ определяется покомпонентной минимизацией вектора f_i по множеству $\pi[y_i, y_j] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i)$, а $f_{\pi}^{\max}(z_i)$ — покомпонентной максимизацией f_i по множеству $\pi[y_i, y_j] \cdot f_i(z_i, \mathcal{E}_i)$. Из включений (4.7) и определения отношения Φ_i следует, что

$$\Phi_i \subseteq \Phi_i [y_i, y_j] \text{ и } \Phi_i = \Phi_i [y_i, y_j].$$

Рассмотрим многошаговый дискретный управляемый процесс, включающий следующие этапы:

$$1) X_s \rightarrow y_s \in X_s, y_s \rightarrow y_{j_s} \in h_{s j_s}^{-1}(y_s),$$

$$2) X_s \rightarrow X_s^* = \text{Max}(X_s, \Phi_s [y_s, y_{j_s}]),$$

(4.10)

$$3) g_{i+1}^{-1}(X_{i+1}^*) \rightarrow y_i \in g_{i+1}^{-1}(X_{i+1}^*), y_i \rightarrow y_{j_i} \in h_{i j_i}^{-1}(y_i),$$

$$4) g_{i+1}^{-1}(X_{i+1}^*) \rightarrow X_i^* = \text{Max}(g_{i+1}^{-1}(X_{i+1}^*), \Phi_i [y_i, y_{j_i}]),$$

$$i = s - 1, s - 2, \dots, 0.$$

На этапах 1) и 3) здесь осуществляется выбор альтернативы для проработки и ее проработка до некоторого уровня иерархии. На этапах 2) и 4) происходит оптимизация по бинарным отношениям, построенным на основе информации, которая получена в ходе проработки. При этом обратная связь j_i -го уровня с i -м в проектировании реализуется в форме итеративных циклов проектирования (рис. 23).

Решение задачи проектирования (4.1), (4.2) по декомпозиционной схеме (4.10) обосновывает следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (4.7). Тогда процесс

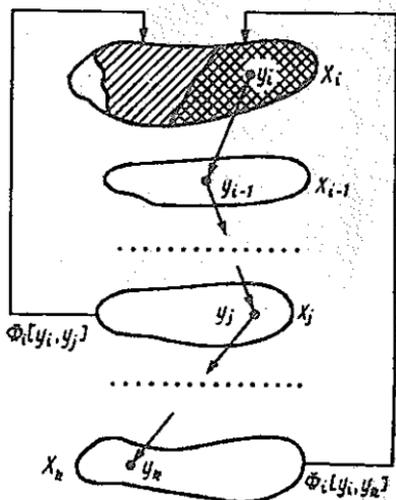


Рис. 23

(4.10) с произвольными y_i, y_{j_i} , $i = \overline{0, s}$, приводит к множеству X_0^* , являющемуся решением задачи проектирования (4.1), (4.2), т. е. $X_0^* = X^*$.

Доказательство. Заметим, что бинарные отношения Φ_i на множествах X_i , введенные с помощью (4.4), являются асимметричными и транзитивными. На множестве 2^{X_0} всех подмножеств множества X_0 введем бинарное отношение R_0 , положив $Y_0 R_0 Z_0$ тогда и только тогда, когда множество Y внешне устойчиво в модели $(Y_0 \cup Z_0, \Phi_0)$.

В силу теоремы 3.1 утверждение доказано, если будет установлено, что при любом выборе y_i, y_{j_i} , играющих в процессе (4.10) роль управлений, отображения $d_i^{-1}(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, s$, являются гомоморфизмами моделей $(X_i, \Phi_i[y_i, y_{j_i}])$ в модель $(2^{X_0}, R_0)$.

Пусть $x_i \Phi_i[y_i, y_{j_i}] z_i$. Согласно (4.7), для любого $z_0 \in d_i^{-1}(z_i)$ множество $\pi[y_i, y_{j_i}] \cdot f_i(z_i, z_0)$ содержит $W(z_0)$, т. е.

$$W(z_0) \subset f_i^0$$

при некотором $f_i^0 \in \pi[y_i, y_{j_i}] \cdot f_i(z_i, \mathcal{E}_i)$. Аналогично, для любого $x_0 \in d_i^{-1}(x_i)$ найдется $f_i^* \in \pi[y_i, y_{j_i}] \cdot f_i(x_i, \mathcal{E}_i)$ такое, что

$$W(x_0) = f_i^*$$

Отсюда и из определения отношения $\Phi_i[y_i, y_{j_i}]$ получаем, что

$$W(z_0) = f_i^0 \subset f_i^{\max}(z_i) \subset f_i^{\min}(x_i) \subset f_i^* = W(x_0),$$

причем хотя бы одно из неравенств не обращается в равенство. Итак, $W(x_0) \supseteq W(z_0)$, $W(x_0) \neq W(z_0)$ при $x_0 \in d_i^{-1}(x_i)$, $z_0 \in d_i^{-1}(z_i)$, т. е. $x_0 \Phi_0 z_0$ и, следовательно, $d_i^{-1}(\cdot)$ — гомоморфизм модели $(X_i, \Phi_i[y_i, y_{j_i}])$ в модель $(2^{X_0}, R_0)$. \blacktriangle

Следствие. Если $y_{j_i} = y_i$, то (4.10) переходит в (4.5) и из теоремы следует обоснование схемы (4.5).

Обсудим содержание теоремы 4.1. Глубина проработки альтернатив y_i в процессе (4.10) определяется выбором $j_i \in [0, i]$. Чем глубже проработка, тем, с одной стороны, сложнее и объемнее решаемые задачи и, следовательно, больше затраты ресурсов; с другой стороны, тем эффективнее должен быть отсеиваемых вариантов по отношениям $\Phi_i[y_i, y_{j_i}]$, формулируемым по принципу обратной связи, тем меньшее число альтернатив нуждается в дальнейшей проработке и, следовательно, меньше затраты ресурсов, потребных для проектирования (см. рис. 23). Таким образом, существует «оптимальная» глубина проработки соответствующей «оп-

тимальной» альтернативы, повышающая эффективность схемы (4.10). В задачах проектирования сложных объектов выбор альтернативы на каждом шаге процедуры (4.10), как и глубина ее проработки в САПР, должны определяться на основании опыта конструктора. Таким образом, как уже отмечалось выше, здесь открываются широкие возможности для организации различных процедур. Эти возможности еще более расширяются, если от процесса (4.10) перейти к следующему:

$$X_s^0 = X_s,$$

$$1) X_s^p \rightarrow y_s^{(p)} \in X_s^p, y_s^{(p)} \rightarrow y_{j_{sp}} \in h_{j_{sp}}^{-1}(y_s^{(p)});$$

$$2) X_s^p \rightarrow X_s^{p+1} = \text{Max}(X_s^p, \Phi_s[y_s^{(p)}, y_{j_{sp}}]), \quad p=0, 1, \dots, r_s-1;$$

$$X_i^0 = g_{i+1}^{-1}(X_{i+1}^{r_{i+1}}), \quad (4.11)$$

$$3) X_i^q \rightarrow y_i^{(q)} \in X_i^q, y_i^{(q)} \rightarrow y_{j_{iq}} \in h_{j_{iq}}^{-1}(y_i^{(q)}),$$

$$4) X_i^q \rightarrow X_i^{q+1} = \text{Max}(X_i^q, \Phi_i[y_i^{(q)}, y_{j_{iq}}]),$$

$$q=0, 1, \dots, r_i-1; \quad i=s-1, s-2, \dots, 0.$$

В отличие от (4.10) в схеме (4.11) на i -м уровне иерархии отбраковка альтернатив (этапы 2) и 4)) осуществляется на основе последовательной проработки r_i альтернатив $y_i^{(q)}$, $q=0, r_i-1$ на соответствующую глубину, т. е. реализуется метод последовательного анализа и отсева вариантов. Таким образом, в (4.11) учитываются как «горизонтальные» связи между альтернативами на фиксированном уровне иерархии, так и «вертикальные» связи между соседними уровнями иерархии. «Горизонтальные» связи, отражающие уменьшение неопределенности, могут задаваться с помощью операторов типа (9) и правил действий над ними, определяемых спецификой задачи.

Дополнительные диалоговые возможности в процессе (4.11) реализуются при выборе управлений, в роли которых выступают $y_i^{(q)}$, j_{iq} , $y_{j_{iq}}$. Здесь, как и в обычных задачах оптимизации, в принципе можно использовать пассивные и последовательные стратегии-управления. Однако в задачах проектирования, учитывая их сложность, следует преимущественно применять последовательные (адаптивные) алгоритмы, использующие уже полученную ранее информацию, о проектируемом объекте. Это обусловлено тем, что знания, получаемые в процессе проектирования, не пропадают «даром» — проработка даже неудачных проектов уточняет представления об оптимальности. В данном пособии это нашло отражение в предположении (4.7) и определении отношений $\Phi_i[y_i, y_i]$.

Рассмотренные схемы (4.10), (4.11) проектирования сложной технической системы могут служить основой разработки архитектуры САПР внутреннего проектирования. Оставаясь строго обоснованными, схемы допускают на различных этапах использование как формальных, так и неформальных методов принятия решений, что и соответствует концепции автоматизированного проектирования.

Схема (4.10) может быть проинтерпретирована, помимо проектирования, в самых разных областях.

Так, например, если рассматривать (4.1), (4.2) как задачу принятия решений при выполнении некоторой операции, то схема (4.10) описывает функционирование иерархической системы автоматизированного управления, вырабатывающей рациональные стратегии. Очевидно, как и в проектировании, принятие решений в сложных операциях может происходить в режиме реального времени только на основе иерархического подхода. Управление в схеме (4.10) в общей задаче принятия решений определяют программу «обучения». Это склывается в том, что отношения $\Phi_i [y_i, y_{ji}]$ являются более широкими, чем Φ_i , т. е. уточнение отношения Φ_0 происходит в той или иной степени при любом выборе управлений. Таким образом, даже принятие неудачных решений приносит пользу при обучении.

Приведем более конкретный пример. Рассмотрим задачу отыскания глобального экстремума функции $f(x)$, принадлежащей классу Липшица с известной константой. Широкий класс алгоритмов основан на вычислении лишь значений $f(x)$. Проводя аналогию между этими алгоритмами (см. § 4 гл. 2) и схемами проектирования (4.10), (4.11), можно сказать, что вычисления $f(x)$ в точках x^1, x^2, \dots соответствуют «проработке» альтернатив в проектировании, а построение мажорант для функции $f(x)$ по вычисленным значениям используется для задания операторов «сжатия» неопределенности в оценке экстремума. Данные мажоранты и являются критериями первого уровня иерархии в схеме (4.10), определяющими $f(x)$ с погрешностью, уменьшающейся с ростом числа проработанных альтернатив — точек вычисления $f(x)$. Подобную связь схемы (4.10) можно установить и с другими алгоритмами решения задач численного анализа.

Необходимо отметить принципиальное отличие приведенного примера от задачи проектирования сложной системы. В задачах проектирования основные вычислительные затраты связаны с проработкой альтернатив проекта, выбор «оптимальных» управлений, как правило, полностью предоставлен конструктору. В экстремальных задачах, напротив, проработка альтернативы с формальной точки зрения выглядит тривиальной — это просто вычисление $f(x)$. «Горизонтальные» связи явно присутствуют и определяются мажорантами, построенными с помощью условия Липшица. Поэтому на первый по трудоемкости план выходит проблема формирования оптимальных стратегий — алгоритмов поиска экстремума.

Проиллюстрируем на примере, имеющем практическое значение, основные теоретические положения и результаты предыдущих разделов.

ГЛАВА 6. ФРАГМЕНТ ПОДСИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНО-КОНСТРУКТОРСКИХ РЕШЕНИЙ САПР ЛА

В настоящей главе на примере двухуровневого фрагмента подсистемы принятия проектно-конструкторских решений САПР маневренного ЛА будут проиллюстрированы основные методы и конструкции, изложенные выше. Пример был бы более убедительным, если бы он содержал полное описание подсистемы принятия решений для летательного аппарата или какой-либо другой сложной технической системы. Однако сделать это в рамках одной главы или даже целой книги практически невозможно.

Выбор ЛА в качестве примера обусловлен рядом причин, важное место среди которых занимает достаточная разработанность связанных с ним прикладных дисциплин и возможность познакомиться с последними [39, 32, 34].

В первых двух параграфах главы даны примеры структурно-параметрического описания ЛА и моделей его функционирования как управляемой динамической системы. Данные модели достаточно адекватно описывают ЛА и его функционирование на этапе предварительного проектирования (см. § 1, 2 гл. 2). В § 3 на основе изучения конфликтного взаимодействия двух управляемых динамических систем, описываемого некоторой позиционной дифференциальной игрой качества, вводятся критерии сравнительной эффективности и порождаемые ими бинарные отношения. Отмечаются значительные трудности теоретического и практического характера, связанные с их вычислением. Декомпозиции задачи проектирования путем перехода от «сложных» критериев эффективности к «более простым» иерархическим системам частных критериев посвящен § 4. Здесь осуществляется синтез систем частных критериев, обладающих следующим свойством: порождаемое ими отношение Парето аппроксимирует изнутри отношения эффективности из § 3. В § 5 описана постановка задачи формирования облика маневренного ЛА как задачи оптимизации его основных агрегированных (обликовых) проектных парамет-

ров по критериям эффективности на множестве допустимых альтернатив. Приводится двухэтапная схема последовательного анализа вариантов для решения задачи формирования облика.

В § 6 иллюстрируется формализация процесса конструкторской проработки проекта «в глубину» на примере одной из задач этапа эскизного проектирования — задачи формирования облика топливной системы ЛА. Моделирование топливной системы, оценка ее характеристик и, наконец, оптимизация ее проектных параметров позволяют по принципу обратной связи снять неопределенность в задаче формирования облика ЛА, связанную с агрегированным описанием его топливной системы. Кратко обсуждаются также задачи, возникающие на последующих этапах проектирования.

§ 1. Структурно-параметрическая модель ЛА

1. Проектные параметры. В гл. 2 отмечалось, что в процессе постановки задачи проектирования структурно-параметрическая модель проектируемого объекта строится специалистами в данной предметной области и математиками, занимающимися созданием САПР. Как следует из результатов гл. 5, для автоматизированного проектирования требуется иерархическая система моделей объекта. В настоящем параграфе кратко опишем одну из структурно-параметрических моделей ЛА, которая может быть использована на этапе формирования облика, рассмотрим возможность ее уточнения и развития.

Введем набор $x = (\pi, p)$, где π — набор дискретных переменных (*признаков*), описывающих тип компоновочной схемы — структуру ЛА; p — набор параметров, принимающих непрерывные значения. Если придать признакам конкретные значения, то они определяют тип компоновочной схемы ЛА. По сути дела, π описывает граф из § 1 гл. 2 структуры ЛА, т. е. представляет собой один из способов структурного описания объекта проектирования. Обычно набор признаков $\pi = (\pi^1, \pi^2, \dots)$ составляется по матрице признаков компоновочных схем [32] и состоит в указании, например, следующих переменных, принимающих конечное число ($2 \div 4$) значений:

π^1 — признак наличия или отсутствия горизонтального оперения (ГО);

π^2 — признак расположения ГО (ГО впереди или позади крыла);

π^3 — признак, описывающий расположение воздухозаборников;

π^4 — признак, задающий расположение двигателей (в едином фюзеляже — пакете, в изолированных отсеках фюзеляжа — мотогондолах, под крылом и т. п.);

λ^5 — признаки, описывающие размещение экипажа («рядом», «тандем»);

λ^6 — признаки размещения главной опоры шасси и т. д.

Далее могут идти признаки, уточняющие размещение ГО и вертикального оперения (ВО), схему воздухозаборника, стреловидность и конфигурацию передней кромки крыла (прямая или обратная стреловидность, передняя кромка крыла с наплывом или без наплыва), тип двигательной установки, компоновочную схему главной опоры шасси, ... Вводя несколько десятков признаков компоновочной схемы, удастся, во-первых, описать достаточно большое количество вариантов компоновочных схем ЛА и, во-вторых, добиться высокой степени детализации компоновочной схемы.

Отметим, что не все значения признаков совместимы между собой. Следовательно, при их задании нужно иметь в САПР формальные методы проверки признаков на непротиворечивость. Далее, в самолетостроении постоянно появляются все новые варианты компоновочных схем ЛА, что должно отражаться в появлении новых компоновочных признаков.

Опишем множество альтернатив ЛА, соответствующих одному из вариантов компоновочной схемы, параметрами p . Для определенности выберем «нормальную» компоновочную схему [32, 41]. Она соответствует следующему набору признаков:

ГО и ВО расположены на фюзеляже позади крыла;
воздухозаборники расположены сбоку фюзеляжа;
два двигателя данного типа размещены внутри фюзеляжа;
крыло трапецевидное прямой стреловидности, без наплывов, фиксированной геометрии,

главная стойка шасси размещена в фюзеляже, уборка ее в полете происходит вперед.

Не будем учитывать ряд деталей, несущественных на начальной стадии формирования облика (например, не указываем расположение крыла на фюзеляже по высоте, количество колес главной стойки шасси, считаем заданным вес полезной нагрузки и ее объем или средний удельный вес, фиксируем число и размещение членов экипажа и т. д.). Это вызвано тем, что степень детализации должна соответствовать чувствительности используемых на данном этапе проектирования процедур вычислений основных характеристик ЛА. Здесь реализуется известный принцип вычислительной математики, состоящий в том, что точность входной информации должна соответствовать точности вычислений. На последующих этапах проектирования ЛА его описание должно уточняться по мере применения все более совершенных методов расчета и учета особенностей технологии и производства.

2. Модель фюзеляжа. Разобьем фюзеляж условно на три отсека: головной отсек 1, центральный отсек 2 и хвостовой отсек 3. Будем считать, что в отсеке 1 размещаются экипаж и полезная

нагрузка, по бокам отсека 1 находятся воздухозаборники, в отсеке 2 — главное шасси, каналы подвода воздуха к двигателям и топливные баки, в отсеке 3 — двигатели.

Обозначим через l_i , B_i , H_i соответственно длину, высоту и ширину i -го отсека, $i = 1, 2, 3$. Очевидно (рис. 24),

$$B_1 \leq B_2 = B_3 = B_\phi, H_1 = H_2 = H_3 = H_\phi, \quad (1.1)$$

где B_ϕ , H_ϕ — ширина и высота фюзеляжа.

На начальном этапе проектирования обычно задаются коэффициентом, определяющим площадь сечения фюзеляжа, который равен отношению площади этого сечения к площади описанного вокруг него прямоугольника. Тогда, зная величины, входящие в (1.1), для отсека 1 можно найти площадь сечения, положение центра тяжести x_{T1} , площадь омываемой поверхности $S_{ом1}$ и другие параметры, которые потребуются далее.

Последние две величины вычисляют, исходя из заданного веса полезной нагрузки, ее средней плотности при определенных гипотезах о форме носовой части. Например, можно считать, что отсек 1 есть объединение конуса и цилиндра с круговыми основаниями. Величина B_1 в (1.1) однозначно определяется полезной нагрузкой и размещением экипажа. Окончательно получаем, что параметры носовой части фюзеляжа полностью определены, как только задана ее высота H_1 .

Перейдем к описанию отсека 2. Ширина $B_\phi = B_2$ его определяется в первом приближении диаметром $d_{вх}$ входа двигателя и коэффициентами, отражающими компоновку двигателей и каналов подвода воздуха к ним в фюзеляже, зависимость размера фюзеляжа от параметров главного шасси и, следовательно, от прочности взлетно-посадочной полосы (ВПП) (чем прочнее ВПП, тем меньше размер колес шасси). Аналогично, высота $H_2 = H_\phi$ также является функцией только $d_{вх}$ и некоторых эмпирических коэффициентов.

Указанные коэффициенты в действительности являются агрегированными проектными параметрами, которые слабо меняются при изменении других параметров в довольно широких диапазонах и поэтому могут быть приняты постоянными на первом этапе.

Далее, как и для отсека 1, задаваясь формой сечения фюзеляжа, можно получить выражение для максимальной площади поперечного сечения отсека, т. е. для *миделя* фюзеляжа в зависимости от $d_{вх}$.

Аналогично вычисляют основные геометрические характеристики отсека 3 по $d_{вх}$, поскольку длина двигателя данного типа связана с $d_{вх}$. Таким образом, получаем модель фюзеляжа ЛА, в которой его параметры однозначно определяются двумя величинами — проектными параметрами $d_{вх}$ и l_2 (рис. 24) из простейших геометрических соображений. Однако простота здесь обманчива. Для того чтобы добиться такого результата, потребовалось,

во-первых, выделить слабо меняющиеся *безразмерные проектные параметры* — коэффициенты и, во-вторых, найти их значения, обработав статистический материал по ЛА данного типа и обратившись к моделям двигателя, шасси, полезной нагрузки и т. п.

3. Модель крыла и оперения. Выше мы условились рассматривать базовое трапециевидное крыло прямой стреловидности без наплывов (рис. 25).

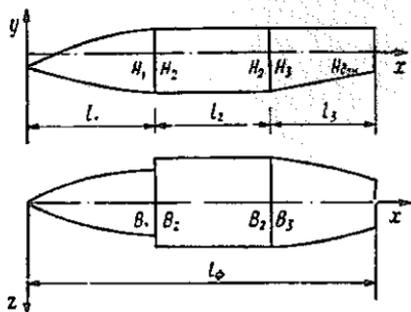


Рис. 24

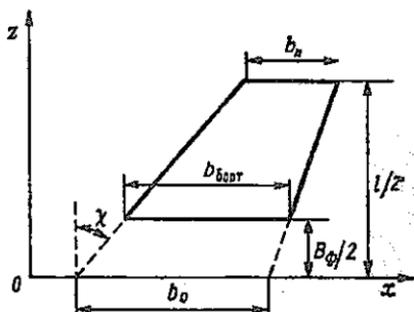


Рис. 25

Очевидно, трапециевидное в плане крыло однозначно определяется следующими параметрами: площадью крыла S , удлинением λ , сужением η и стреловидностью по передней кромке χ . Между ними и величинами на рис. 25 существуют [41] следующие зависимости:

$$l = \sqrt{\lambda S}, \quad b_k = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\lambda(1+\eta)}}, \quad b_0 = \frac{2\sqrt{S}\eta}{\sqrt{\lambda(1+\eta)}}.$$

Значение b_0 называется *корневой хордой* крыла, b_k — *концевой хордой*, l — *размахом* крыла.

По ним и ширине фюзеляжа B_ϕ вычисляется $b_{\text{борт}}$ — *бортовая хорда* крыла.

Зная перечисленные параметры крыла, можно найти на нем стреловидность любой линии, делящей хорды крыла в определенной пропорции. В § 2 потребуются χ_c — стреловидность по линии максимальных толщин профилей крыла и $\chi_{1/4}$ — угол стреловидности по 1/4 хорд.

Внутреннее строение крыла схематично изображено на рис. 26. Предполагается, что крыло образовано подобными профилями, для которых фиксированы относительная толщина, а также относительное положение по хорде максимальной толщины профиля и коэффициент, характеризующий тип профиля (ромбовидный, чечевицеобразный и др.) и кривизну [41]. В крыле находится топливный бак-кессон (заштрихован на рис. 26). Его границы зада-

ются координатой z_T по размаху крыла и относительными хордами носка $\bar{b}_{нос}$ и хвостика $\bar{b}_{хв}$ крыла:

$$b_{нос} = \bar{b}_{нос} \cdot b_{борт}, \quad b_{хв} = \bar{b}_{хв} \cdot b_{борт}.$$

Если наложить ограничение снизу на толщину топливного бака в крыле, то варьируемые проектные параметры S , λ , η , χ , $\bar{b}_{нос}$, $\bar{b}_{хв}$ определяют форму крыла и объем бака, т. е. максимальное количество топлива, которое можно в нем разместить.

Оперение (ГО и ВО) будем на начальной стадии формирования облика ЛА считать подобным крылу с некоторыми коэффициентами подобия. Строго говоря, вид и положение ГО и ВО должны определяться из условий балансировки и устойчивости ЛА. Чтобы провести балансировку, необходимо знать положение аэродинамического фокуса, среднюю аэродинамическую хорду, моментные аэродинамические характеристики [32, 41]. Однако это нецелесообразно, да и невозможно сделать с удовлетвори-

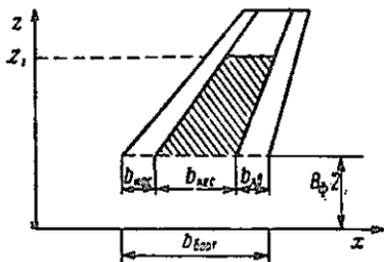


Рис. 26

тельной точностью при данной степени детализации компоновки ЛА. Поэтому, начиная формировать облик ЛА на основе уравнений его движения как материальной точки, можно подобрать упомянутые коэффициенты подобия по статистическим данным, которые показывают, что вариации этих коэффициентов для известных ЛА незначительны. Дальнейшее уточнение параметров оперения возможно на следующих стадиях проектирования, когда ЛА в модели функционирования рассматривается, например, как твердое тело.

4. Компоновочные ограничения. Итак, для описания с принятой степенью детализации компоновки ЛА и, как увидим дальше, для вычисления основных весовых и аэродинамических характеристик планера достаточно следующих девяти агрегированных параметров: $p = (d_{вх}, l_2, S, \lambda, \eta, \chi, \bar{b}_{нос}, \bar{b}_{хв}, k_{ш})$, где девятый параметр $k_{ш}$ отражает изменение длины стойки главного шасси при уборке в фюзеляж.

Примем следующие допущения:

1) положение центра тяжести x_T ЛА определяется отсеками 1 и 3, т. е. считается, что центр тяжести отсека 2 совпадает с центром тяжести ЛА, а изменением центра тяжести из-за крыла, ГО и ВО можно пренебречь;

2) ЛА при стоянке не должен опрокидываться на хвост.

Из рис. 27 находим длину отсека шасси

$$l_{ш} = k_{ш} \cdot h_{ш}, \quad (1.2)$$

где

$$h_{ш} = \frac{l_{\phi} - x_T - \left(H_{дон} - \frac{1}{2} H_{\phi} \right) \operatorname{tg} \alpha_{пос}}{\operatorname{tg} \alpha_{пос} + \operatorname{ctg} \alpha_{пос}}, \quad (1.3)$$

$\alpha_{пос}$ — посадочный угол, $H_{дон}$ — высота донной части фюзеляжа, и «вынос» колес шасси

$$e = \left(h_{ш} + H_{дон} - \frac{1}{2} H_{\phi} \right) \operatorname{tg} \alpha_{пос}. \quad (1.4)$$

Теперь можно сформулировать основные неравенства, определяющие множество вариантов нормальной компоновочной схемы ЛА:

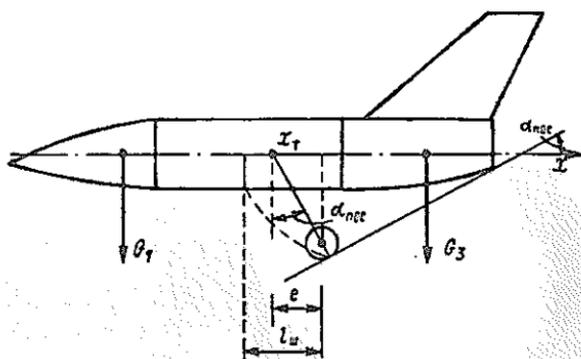


Рис. 27

$$x_T + e \leq l_1 + l_2 \quad (1.5)$$

— размещение шасси в отсеке 2 фюзеляжа при выполнении условия неопрокидывания ЛА;

$$l_1 \leq x_T + e - b_{кес} \quad (1.6)$$

— шпангоуты фюзеляжа, совмещенные со стенками кессона крыла, находятся в отсеке 2;

$$e \leq b_{кес}, \quad l_{ш} \leq b_{кес} \quad (1.7)$$

— центр тяжести ЛА и отсек шасси расположены между упомянутыми шпангоутами.

Кроме того, к этим ограничениям следует добавить условие размещения ГО и ВО позади крыла, ограничение на длину отсека 2, т. е. длину каналов подвода воздуха к двигателям и предварительное условие балансировки ЛА в виде расположения x_T на средней аэродинамической хорде $b_{САХ}$ [41].

Итак, ограничения (1.2) — (1.7), описывающие множество вариантов ЛА нормальной компоновочной схемы, учитывают в первом приближении как ряд технологических требований к конструкции, так и условия успешного функционирования ЛА (например, балансировку). Эти условия уточняются на последующих этапах проектирования.

Описание компоновки — не просто сумма геометрических описаний частей планера. В процессе его составления учтен ряд факторов, связанных с взаимным влиянием частей и агрегатов ЛА. Таким образом, уже на приведенном простом примере видно, что построение, структурно-параметрической модели объекта проектирования требует глубоких знаний предметной области и должно проводиться с участием высококвалифицированных специалистов. Более того, приведенная система ограничений, задающих варианты компоновочной схемы, есть не что иное, как один из способов представления части знаний о предметной области. С увеличением степени детализации могут потребоваться другие, более совершенные способы представления знаний, например, принятые в методах *искусственного интеллекта*, экспертных системах [49]. Таким образом, в любой степени автоматизированного проектирования в той или иной степени имеются элементы искусственного интеллекта. Их развитие, направленное на совершенствование структурно-параметрических моделей объектов с учетом достижений технологии, появлением новых физических эффектов и изобретений, является одной из важнейших задач при создании и сопровождении САПР сложных технических систем.

§ 2. Модели функционирования летательного аппарата

На этапе предварительного проектирования функционирование ЛА может быть описано моделью управляемой динамической системы, точнее, иерархическим семейством таких моделей. Ограничимся рассмотрением двух простейших моделей ЛА как материальной точки постоянной и переменной массы.

1. Модель функционирования ЛА как материальной точки постоянной массы. Дифференциальные уравнения, описывающие движение ЛА как материальной точки постоянной массы, имеют вид (см. § 2 гл. 2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \psi, \quad \dot{H} = V \sin \theta, \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \psi, \\ \dot{V} &= g \left(\frac{P}{G} - \frac{c_{x0} q}{G/S} - \frac{BQ/S}{q} n_y^2 - \frac{c_{x\text{мг}} q}{G/S} \delta - \sin \theta \right), \quad (2.1) \\ V \dot{\theta} &= g (n_y \cos \gamma - \cos \theta), \\ V \cos \theta \dot{\psi} &= -g n_y \sin \gamma. \end{aligned}$$

Еще раз напомним, что здесь x_g, H, z_g — координаты центра масс ЛА (H — высота); V — скорость, θ и ψ — угол наклона траектории и угол курса; $P/G, G/S$ — тяговооруженность и удельная нагрузка на крыло; c_{x0} и B — коэффициенты параболической поляры; $q = 0,5\rho V^2$ — скоростной напор, $\rho = \rho(H)$ — плотность воздуха; γ — угол крена; $c_{xщ}$ — коэффициент сопротивления тормозных щитков; δ — степень выпуска тормозных щитков; P — сила тяги двигателя; S — площадь крыла, G — вес, n_y — перегрузка.

Пусть ε — параметр, характеризующий режим работы двигателя, $z = (x_g, H, z_g, V, \theta, \psi)$ и $u = (n_y, \gamma, \delta, \varepsilon)$ — векторы фазовых переменных и управлений.

Их допустимые значения стеснены следующими ограничениями:

$$z \in Z = \left\{ z \mid H \geq 0, 0,5\rho V^2 \leq q_{\max}, \frac{V}{a(H)} \leq M_{\max} \right\}, \quad (2.2)$$

где $a(H)$ — скорость звука на высоте H ; q_{\max} и M_{\max} — максимально допустимые скоростной напор и число Маха (ограничения по прочности конструкции, флаттеру, аэродинамическому нагреву, устойчивости);

$$u \in U = \left\{ u \mid 0 \leq n_y \leq n_{y\max}, -\pi \leq \gamma \leq \pi, 0 \leq \delta, \varepsilon \leq 1 \right\}, \quad (2.3)$$

$$\text{где } n_{y\max} = \min \left\{ \frac{c_{y\text{доп}} q}{G/S}; \frac{n_y^p G^p}{fG} \right\}$$

— располагаемая перегрузка; $c_{y\text{доп}}$ — максимально допустимый коэффициент подъемной силы; n_y^p, G^p — расчетные величины перегрузки и веса, f — коэффициент запаса прочности (ограничения по «сваливанию» ЛА, прочности конструкции).

Как известно [32], уравнения (2.1) достаточно адекватно описывают движение ЛА при условии выполнимости следующих предположений: отсутствия бокового скольжения, малости углов атаки, сравнительно небольшой величины тяговооруженности и др. В том случае, когда данные предположения не выполняются, уравнения (2.1) и ограничения (2.2), (2.3) необходимо изменить. Например, при необходимости учитывать боковое скольжение два последних уравнения (2.1) следует заменить на следующие:

$$\begin{aligned} V\dot{\theta} &= g(n_y \cos \gamma - n_z \sin \gamma - \cos \theta), \\ V \cos \theta \dot{\psi} &= -g(n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma), \end{aligned} \quad (2.1')$$

где n_z — боковая перегрузка, а к ограничениям (2.3), определяющим множество U , добавить неравенство

$$|n_z| \leq n_{z\max}. \quad (2.3')$$

К изменению модели (2.1) — (2.3) приводит и появление новых возможностей управления ЛА, таких, как отклонение вектора тяги, непосредственное управление аэродинамическими силами и др.

2. Модель функционирования ЛА как материальной точки переменной массы. Дифференциальные уравнения, описывающие движение ЛА как материальной точки переменной массы, включают уравнения (2.1) и

$$\dot{G} = -c_s = -Pc_p, \quad (2.4)$$

где c_s и c_p — соответственно секундный и удельный расходы топлива [34]. К фазовым ограничениям (2.2), определяющим множество Z , добавляется следующее:

$$G_0 - G_\tau \leq G \leq G_0, \quad (2.5)$$

где G_0 — взлетный вес ЛА, G_τ — запас топлива.

Для рассматриваемой модели справедливы все замечания, сделанные при описании модели (2.1) — (2.3).

Введем новую фазовую переменную τ , положив $G_0(1-\tau) = G$. Тогда модель функционирования ЛА как материальной точки переменной массы, вытекающая из (2.1) — (2.5), включает следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \psi, \quad \dot{H} = V \sin \theta, \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \psi, \\ (1-\tau) \left[\frac{\dot{V}}{g} + \sin \theta \right] &= \frac{P}{G_0} - \frac{c_{x0}q}{G_0/S} - \frac{BG_0/S}{q} n_y^2 - \frac{c_{x\text{ин}}q}{G_0/S} \delta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(1-\tau) \left[\frac{V\dot{\theta}}{g} + \cos \theta \right] = n_y \cos \gamma,$$

$$-(1-\tau) \frac{V \cos \theta \dot{\psi}}{g} = n_y \sin \gamma,$$

$$\dot{\tau} = \frac{c_s}{G_0} = \frac{c_p P}{G_0},$$

и ограничения на допустимые значения фазовых переменных $z = (x_g, H, z_g, V, \theta, \psi, \tau)$ и управлений $u = (n_y, \gamma, \delta, \epsilon)$:

$$z \in Z = \left\{ z \mid H \geq 0, 0,5\rho(H)V^2 \leq q_{\max}, \right.$$

$$\left. \frac{V}{a(H)} \leq M_{\max}, 0 \leq \tau \leq \frac{G_\tau}{G_0} \right\}, \quad (2.7)$$

$$u \in U = \{ u \mid 0 \leq n_y \leq n_{y\max}^0, -\pi \leq \gamma \leq \pi, 0 \leq \delta, \epsilon \leq 1 \}, \quad (2.8)$$

где

$$n_{y\max}^0 = \min \left\{ \frac{c_{y\text{лон}}q}{G_0/S}, \frac{n_y^p G^p}{f G_0} \right\}.$$

Модели (2.1) — (2.3) и (2.6) — (2.8) будут использованы в § 4 для построения аппроксимирующих отношений и порождающих их систем частных критериев.

3. Расчетные модели. Вектор проектных параметров x , дающий структурно-параметрическое описание ЛА (см. § 1), должен определять функции, входящие в модели (2.1) — (2.3) и (2.6) — (2.8), т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P(H, V, \varepsilon, x), \quad G = G(x), \quad S = S(x), \quad B = B(H, V, x), \\ c_{x0} = c_{x0}(H, V, x), \quad c_{xш} = c_{xш}(H, V, x), \quad q_{\max} = q_{\max}(x), \\ M_{\max} = M_{\max}(x), \quad c_{y\text{дон}} = c_{y\text{дон}}(H, V, x) \\ n_y^p = n_y^p(x), \quad G^p = G^p(x), \quad G_0 = G_0(x), \quad G_T = G_T(x), \\ c_s = c_s(H, V, \varepsilon, x), \quad c_p = c_p(H, V, \varepsilon, x). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Величины (2.9) определяются на основе геометрического, весового, прочностного и аэродинамического расчетов ЛА, расчета высотно-скоростных и дроссельных характеристик его силовой установки. Методы таких расчетов разрабатываются специальными прикладными дисциплинами и отражают как фундаментальные научные знания, так и инженерный опыт создания и эксплуатации ЛА.

Ограничимся простейшими примерами весового и аэродинамического расчета одного из агрегатов ЛА — крыла [41, 50].

Пример 2.1. Вес крыла сверхзвукового маневренного самолета [41, с. 134] равен

$$G_{кр} = G_0 \left[k_t \varphi n_y^p \sqrt{\lambda S} \left(\alpha^1 \frac{\lambda}{\bar{c}_0} + \frac{\alpha^2}{\lambda} + \alpha^3 \right) + \frac{\alpha^4}{G_0/S} \right],$$

где k_t — температурный коэффициент; φ — коэффициент, учитывающий разгрузку крыла в полете; n_y^p — заданная нормами прочности расчетная перегрузка; G_0 — взлетный вес ЛА; G_0/S — нагрузка на крыло; λ , S и \bar{c}_0 — удлинение, площадь и относительная толщина крыла у борта фюзеляжа (см. § 1); $\alpha^1, \dots, \alpha^4$ — статистические коэффициенты.

Пример 2.2. Параболическая поляра имеет вид

$$c_x = c_{x0} + c_{xi} = c_{x0} + B c_y^2,$$

где c_{x0} , c_{xi} — коэффициенты лобового и индуктивного сопротивления, B — отвал поляры, c_y — коэффициент подъемной силы.

Коэффициент лобового сопротивления крыла c_{x0} вычисляется по формуле

$$c_{x0} = c_{xp} + c_{xв}, \quad (2.10)$$

где

$$c_{xp} = 2c_{f_{пл}} (1 + 3\bar{c}) [1 + \bar{c} (5M - 3)] \bar{S}_{ом} + \alpha^5 \bar{l}_{щ}$$

— коэффициент профильного сопротивления,

$$c_{f_{пл}} = \frac{\alpha^6}{(1 + 0,1M^2)^{2/3} (1g \operatorname{Re})^{\alpha^7}} \left(1 - \bar{x}_n + \frac{40}{\operatorname{Re}^{3/8}} \bar{x}^{5/8} \right)^{4/5}$$

— коэффициент трения плоской пластины,

$$\bar{S}_{ом} = 1 - k_{инт} \bar{S}_{инф}$$

— относительная площадь омываемой части крыла, $\bar{S}_{инф}$ — относительная площадь подфюзеляжной части крыла; $k_{инт}$ — коэффициент интерференции, зависящий от параметров структуры π (см. § 1), $\bar{l}_{щ}$ — относительная длина (размах) щелей на крыле; Re — число Рейнольдса, \bar{x}_n — относительная координата на хорде профиля точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, определяемая условием

$$\bar{x}_n = \min \left\{ \frac{10^{\alpha^6}}{\operatorname{Re}}; \sqrt{\bar{x}_c^2 + \bar{x}_f^2}; \bar{b}_{пр} \right\},$$

где \bar{x}_c и \bar{x}_f — относительные координаты местонахождения максимальной толщины и вогнутости профиля, $\bar{b}_{пр}$ — относительная хорда предкрылка,

$$n = 5 + [1,3 + 0,6M(1 - 0,25M^2)] \sqrt{1 - \left[\frac{1g \left(\frac{h}{b_{ср}} \operatorname{Re} \right) - 1}{2,2 - \frac{0,08M^2}{1 + 0,312M}} \right]^2}$$

h — средняя высота бугорков шероховатости поверхности крыла, α^6 , α^7 — статистические коэффициенты.

Второе слагаемое в (2.10) — коэффициент волнового сопротивления c_{zv} — также вычисляется по соответствующим формулам как функция числа Маха M , стреловидности χ по линии максимальной толщины, максимальной толщины профиля крыла \bar{c} , удлинения λ , показателя адиабаты $\kappa \approx 1,4$ воздуха, эмпирического коэффициента $k_{пр}$, связанного с формой профиля крыла, и др.

Аналогично, отвал поляры B является функцией удлинения крыла λ , угла стреловидности $\chi_{1/4}$ по линии $1/4$ хорд, угла стреловидности $\chi_{п.к}$ по передней кромке, максимальной толщины профиля \bar{c} и ряда статистических коэффициентов [41].

Хотя формулы, приведенные для расчета весовых и аэродинамических характеристик, выглядят достаточно сложными и учитывают большое число факторов, на самом деле они являются простейшими для использования лишь на начальных этапах проектирования ЛА. На последующих стадиях проектирования применяются более совершенные методы расчета.

Отметим, что материал § 1 и 2 иллюстрирует тот факт, что разделение модели проектируемого объекта на структурно-параметрическую модель собственно объекта и модель его функционирования носит вынужденный, искусственный характер (см. гл. 2). В самом деле, например, весовой расчет требуется уже в § 1 для определения центра тяжести ЛА в (1.5), (1.6). В то же время вес ЛА фигурирует и в моделях функционирования (2.1)—(2.3), (2.6)—(2.8). Аналогично, данные, полученные из модели двигателя (весовые, габаритные, высотно-скоростные и дроссельные характеристики), используются в структурно-параметрической модели и моделях функционирования ЛА.

§ 3. Критерии эффективности

Критерии эффективности для задач проектирования технических систем обычно формируются на основе моделирования операций их целевого применения. Для сложных систем операции, как правило, составляют многоуровневую иерархическую структуру и являются предметом исследования на стадии внешнего проектирования (см. § 1 гл. 1). В настоящем параграфе построим некоторые из таких критериев, считая, что одной из основных целевых задач при проектировании маневренного ЛА является взаимодействие, моделируемое дифференциальной игрой «воздушный бой» [29].

1. Формализация взаимодействия систем. Несложные преобразования рассмотренных в § 2 моделей (2.1)—(2.3) или (2.6)—(2.8) позволяют представить их в следующей стандартной форме.

Модель функционирования управляемой динамической системы включает дифференциальные уравнения

$$\dot{z} = f(z, u, x), \quad (3.1)$$

где $z \in E^n$ — вектор фазовых координат, $u \in E^r$ — вектор управляющих воздействий, $x \in E^N$ — вектор проектных параметров, описывающий вариант x (альтернативу) и ограничения на допустимые значения управлений и фазовых координат

$$u \in U(x), \quad z \in Z(x). \quad (3.2)$$

Наряду с проектируемой будем рассматривать «эталонную» систему, варианты которой отождествляются с вектором параметров $x_* \in E^{N^*}$, принимающим значения из конечного множества $X_* \subset E^{N^*}$, а функционирование описывается аналогично (3.1), (3.2):

$$\dot{z}_* = f_*(z_*, u_*, x_*), \quad (3.3)$$

$$u_* \in U_*(x_*), \quad z_* \in Z_*(x_*). \quad (3.4)$$

В (3.1)–(3.4) функции $f(\cdot, x)$, $f_*(\cdot, x_*)$ считаются непрерывными, множества $U(x)$, $U_*(x_*)$ — компактными, $Z(x)$, $Z_*(x_*)$ — замкнутыми. Предполагаются также выполненными условия, гарантирующие существование, единственность и неограниченную продолжимость решений обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

Системы (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4) функционируют на заданном отрезке времени $[0, T]$ и управляются «игроками» P , P_* с использованием стратегий $u = u(t, z, z_*)$, $u_* = u_*(t, z, z_*)$ соответственно. Под движением систем понимаются конструктивные движения (см. [4], а также Приложение). Символом $D(z^0, z_*^0, u)$ ($D(z^0, z_*^0, u_*)$) будем обозначать множество всех пар $(z(t), z_*(t))$, $0 \leq t \leq T$, $z(0) = z^0$, $z_*(0) = z_*^0$ движений систем (3.1), (3.3), отвечающих стратегии $u = u(t, z, z_*)$ ($u_* = u_*(t, z, z_*)$) игрока P (P_*) и всевозможным допустимым стратегиям игрока P_* (P).

Пусть в фазовом пространстве $\{z, z_*\} = E^{n+n_*}$ заданы замкнутые целевые множества $G = G(x, x_*)$ игрока P и $G_* = G_*(x, x_*)$ игрока P_* . Введем множества

$$H = H(x, x_*) = \{Z(x) \times E^{n_*}\} \setminus G_*(x, x_*),$$

$$H_* = H_*(x, x_*) = \{E^n \times Z_*(x_*)\} \setminus G(x, x_*)$$

— области существования систем (3.1), (3.3) соответственно. Выход точки (z, z_*) из множества H (H_*) будем интерпретировать как «уничтожение» игроком P_* (P) системы (3.1) ((3.3)).

Условимся считать, что цель игрока P — привести точку $(z(t), z_*(t))$ на множество $\bar{H}_* = E^{n+n_*} \setminus H_*$ (вывести из H_*), сохраняя ее в H , т. е. решить игровую задачу $(\bar{H}_*, H)_u$ -сближения [10]; цель игрока P_* — привести точку $(z(t), z_*(t))$ на множество $\bar{H} = E^{n+n_*} \setminus H$ (вывести из H), сохраняя ее в H_* , т. е. решить игровую задачу $(\bar{H}, H_*)_{u_*}$ -сближения. Иными словами, каждый из игроков стремится «уничтожить» систему противника первым.

Отметим, что формализованная таким образом конфликтная ситуация является позиционной дифференциальной игрой с *непротивоположными интересами* [4, 29]. Близкая дифференциальная игра вводилась в § 5 гл. 2, когда рассматривались примеры задач проектирования. Однако данная игра является более общей, так как содержит различные области существования альтернатив. Поэтому здесь необходимо заново описать качественную структуру решения поставленной игры.

Пусть $z^0 \in E^n$, $z_*^0 \in E^{n_*}$ — начальные состояния систем (3.1), (3.3).

Будем говорить, что для точки $(z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}$:

1) разрешима задача $(\bar{H}_*, H)_u$ -сближения (($\bar{H}, H_*)_{u_*}$ -сближения) к моменту времени T , если найдется стратегия сближения $u^c(\cdot)$ ($u_*^c(\cdot)$) игрока P (P_*) такая, что для всякого движения

$(z^c(\cdot), z_*(\cdot)) \in D(z^0, z_*^0, u^c)$ ($(z(\cdot), z_*^c(\cdot)) \in D(z^0, z_*^0, u_*^c)$) найдется $\tau \in [0, T]$ ($\tau_* \in [0, T]$) такое, что

$$\begin{aligned} (z^c(\tau), z_*(\tau)) &\in \bar{H}_*, (z^c(t), z_*(t)) \in H, \forall t \in [0, \tau] \\ ((z(\tau_*), z_*^c(\tau_*)) &\in \bar{H}, (z(t), z_*^c(t)) \in H_*, \forall t \in [0, \tau_*]), \end{aligned}$$

2) разрешима задача $(\bar{H}_*, H)_{u^*}$ -уклонения ($(\bar{H}, H_*)_{u^*}$ -уклонения вплоть до момента времени T , если найдется стратегия уклонения $u_*^y(\cdot)$ ($u^y(\cdot)$) игрока $P_*(P)$ такая, что для всякого $(z(\cdot), z_*^y(\cdot)) \in D(z^0, z_*^0, u_*^y)$ ($(z^y(\cdot), z_*(\cdot)) \in D(z^0, z_*^0, u^y)$) выполняется одно из двух условий:

- а) $(z(t), z_*^y(t)) \in H_*$ ($(z^y(t), z_*(t)) \in H$), $\forall t \in [0, T]$;
 б) найдется $\tau_* \in [0, T]$ ($\tau \in [0, T]$) такое, что
- $$\begin{aligned} (z(\tau_*), z_*^y(\tau_*)) &\in \bar{H}, (z(t), z_*^y(t)) \in H_*, \forall t \in [0, \tau_*], \\ ((z^y(\tau), z_*(\tau)) &\in \bar{H}_*, (z^y(t), z_*(t)) \in H, \forall t \in [0, \tau]). \end{aligned}$$

Через $\Omega^c = \Omega^c(x, x_*)$ ($\Omega_*^c = \Omega_*^c(x, x_*)$) обозначим множество точек $(z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}$ для которых разрешима задача $(\bar{H}_*, H)_{u^*}$ -сближения ($(\bar{H}, H_*)_{u^*}$ -сближения) к моменту времени T , через $\Omega_*^y = \Omega_*^y(x, x_*)$ ($\Omega^y = \Omega^y(x, x_*)$) — множество точек $(z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}$, для которых разрешима задача $(\bar{H}_*, H)_{u^*}$ -уклонения ($(\bar{H}, H_*)_{u^*}$ -уклонения) вплоть до момента времени T .

Множество Ω^c (Ω_*^c) естественно назвать зоной превосходства игрока $P(P^*)$, множество $H = \Omega^y \cap \Omega_*^y$ — зоной нейтральных исходов. Если начальное состояние систем принадлежит Ω^c (Ω_*^c), то оптимальное поведение игрока $P(P_*)$ гарантирует ему «уничтожение» системы (3.1) ((3.3)). Если же начальное состояние систем принадлежит множеству H , то оптимальное поведение каждого из игроков приводит к нейтральному исходу: системы (3.1), (3.3) уничтожаются одновременно либо продолжают существовать до конца игры.

Отметим, что введенные выше стратегии сближения и уклонения игроков зависят, вообще говоря, от начального состояния (z^0, z_*^0) систем, т. е. $u^y(t, z, z_*) = u^y(t, z, z_*; z^0, z_*^0)$, $u_*^y(t, z, z_*) = u_*^y(t, z, z_*; z^0, z_*^0)$ и т. д.

Пусть $\mu(\cdot)$ — вероятностная мера, заданная на множестве всех подмножеств пространства E^{n+n_*} (смысл меры μ раскрывается ниже).

При выполнении некоторых условий (а они, как правило, выполняются для широкого круга прикладных задач) справедливы следующие принимаемые здесь без доказательства утверждения.

Теорема 3.1. Фазовое пространство $\{z, z_*\} = E^{n+n_*}$ совпадает с точностью до множества меры нуль:

1) с объединением попарно непересекающихся множеств Ω^c , Ω_*^c , H , т. е.

$$\mu(E^{n+n_*} \setminus \{\Omega^c \cup \Omega_*^c \cup H\}) = 0;$$

2) с объединениями непересекающихся множеств Ω^c , Ω_*^y и Ω_*^c , Ω^y :

$$\mu(E^{n+n_*} \setminus \{\Omega^c \cup \Omega_*^y\}) = \mu(E^{n+n_*} \setminus \{\Omega_*^c \cup \Omega^y\}) = 0.$$

2. Критерии эффективности. Зоны «превосходства» Ω^c , Ω_*^c и зона «нейтральных исходов» H зависят только от векторов x , x_* проектных параметров систем (3.1), (3.3), т. е.

$$\Omega^c = \Omega^c(x, x_*), \Omega_*^c = \Omega_*^c(x, x_*), H = H(x, x_*),$$

и могут служить основной для введения критерия эффективности.

Будем считать, что начальное состояние систем (3.1), (3.3) (z^0, z_*^0) — случайная величина, а введенная выше вероятностная мера имеет следующий смысл: для всякого $F \subseteq E^{n+n_*}$ $\mu(F)$ — вероятность события $(z^0, z_*^0) \in F$.

Гиперстратегией $S(S_*)$ игрока $P(P_*)$ назовем параметрическое семейство стратегий

$$S = \{u(t, z, z_*; z^0, z_*^0), (z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}\},$$

$$(S_* = \{u_*(t, z, z_*; z^0, z_*^0), (z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}\}).$$

Выбором гиперстратегии игрок определяет свое поведение в целом, для всех возможных реализаций начальных состояний систем.

Гиперстратегия

$$S^0 = \{u^0(\cdot; z^0, z_*^0), (z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}\},$$

$$(S_*^0 = \{u_*^0(\cdot; z^0, z_*^0), (z^0, z_*^0) \in E^{n+n_*}\})$$

называется оптимальной, если:

$$u^0(\cdot; z^0, z_*^0) = u^c(\cdot; z^0, z_*^0) \text{ для } (z^0, z_*^0) \in \Omega^c,$$

$$u^0(\cdot; z^0, z_*^0) = u^y(\cdot; z^0, z_*^0) \text{ для } (z^0, z_*^0) \in H;$$

$$(u_*^0(\cdot; z^0, z_*^0) = u_*^c(\cdot; z^0, z_*^0) \text{ для } (z^0, z_*^0) \in \Omega_*^c,$$

$$u_*^0(\cdot; z^0, z_*^0) = u_*^y(\cdot; z^0, z_*^0) \text{ для } (z^0, z_*^0) \in H).$$

Рассмотрим пару гиперстратегий (S, S_*) . Через $v(v_*)$ обозначим вероятность «уничтожения» игроком $P(P_*)$, применяющим гиперстратегию $S(S_*)$, системы (3.3) ((3.1)), управляемой игроком $P_*(P)$ в соответствии с гиперстратегией $S_*(S)$. Очевидно, $v = v(S, S_*)$ ($v_* = v_*(S, S_*)$). Будем считать, что выбором гиперстратегии $S(S_*)$ игрок $P(P_*)$ стремится максимизировать функционал $v(\cdot)$ ($v_*(\cdot)$) и одновременно минимизировать функционал $v_*(\cdot)$ ($v(\cdot)$).

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и (S^0, S_*^0) — пара оптимальных гиперстратегий. Тогда для всех гиперстратегий S, S_*

$$\begin{aligned} v(S, S_*^0) &\leq v(S^0, S_*^0) = v^0 \leq v(S^0, S_*), \\ v_*(S^0, S_*) &\leq v_*(S^0, S_*^0) = v_*^0 \leq v_*(S, S_*^0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $v^0 = \mu(\Omega^c)$, $v_*^0 = \mu(\Omega_*^c)$.

Доказательство теоремы 3.2 нетрудно получить из теоремы 3.1 и определений оптимальных гиперстратегий игроков.

Из теоремы 3.2 следует, что в рассматриваемой игре с векторным критерием $(v(\cdot), -v_*(\cdot))$ существует пара гиперстратегий (S^0, S_*^0) , являющаяся седловой точкой для каждого из критериев; этот факт и позволяет назвать гиперстратегии S^0, S_*^0 оптимальными.

Величины v^0, v_*^0 зависят только от проектных параметров x, x_* систем (3.1), (3.3), т. е. $v^0 = v^0(x, x_*)$, $v_*^0 = v_*^0(x, x_*)$.

Предположим, что для всех $x \in X$ и $x_* \in X_*$ выполняются условия теоремы 3.1. Тогда определены функции

$$v^0: X \times X_* \rightarrow E^1, \quad v_*^0: X \times X_* \rightarrow E^1,$$

удовлетворяющие (3.5).

Пусть $X_* = \{x_*^i, i = \overline{1, \Lambda_*}\}$. Критерий эффективности $\varphi: X^2 \rightarrow E^{N_*}$ и порождаемое им отношение определим следующими условиями:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{v^0(x, x_*^j)}{v_*^0(x, x_*^j)} \frac{v_*^0(y, x_*^j)}{v^0(y, x_*^j)},$$

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi_j(x, y) > 1, j = \overline{1, N_*}\}. \quad (3.6)$$

Дадим содержательную интерпретацию бинарного отношения (3.6). Рассмотрим конфликт сторон \bar{P} и \bar{P}_* , располагающих достаточно большими количествами (парками) систем x и x_* соответственно, попарные взаимодействия которых моделируются рассмотренной выше дифференциальной игрой. Пусть произошло M взаимодействий, причем в $L(M, x, x_*)$ ($L_* = L_*(M, x, x_*)$) из них была «уничтожена» система (3.1) ((3.3)). Будем считать, что

начальные состояния систем образуют последовательность независимых случайных величин. Тогда

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{L(M, x, x_*)}{M} = v_0^0(x, x_*),$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{L_*(M, x, x_*)}{M} = v_0^0(x, x_*).$$

Отсюда следует, что при хФу:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{L(M, x, x_*)}{L_*(M, x, x_*)} < \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{L(M, y, x_*)}{L_*(M, y, x_*)}$$

для каждого $x_* \in X_*$. Это значит, что при достаточно большом числе взаимодействий в конфликте со стороны \bar{P}_* , располагающей системами x_* , оснащение стороны \bar{P} системами x предпочтительнее, чем системами y , так как в этом случае ее относительные потери меньше.

В основу формирования критерия эффективности $\varphi(\cdot)$ и отношения Φ может быть положен и принцип гарантированного результата. А именно, определим

$$\varphi(x, y) = \min_{x_* \in X_*} \frac{v^0(x, x_*)}{v_0^0(x, x_*)} - \min_{x_* \in X_*} \frac{v^0(y, x_*)}{v_0^0(y, x_*)},$$

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi(x, y) \geq 0\}. \quad (3.7)$$

Критерии (3.6), (3.7) относят к типу «целевая эффективность». Приведем примеры критериев другого типа — «стоимость — эффективность».

Пусть $r^0 = r^0(x)$ ($r_*^0 = r_*^0(x_*)$) — стоимость научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР) по созданию системы $x(x_*)$; $r^1 = r^1(x)$ ($r_*^1 = r_*^1(x_*)$) — стоимость серийного производства $x(x_*)$; $r^2 = r^2(x, x_*)$ ($r_*^2 = r_*^2(x, x_*)$) — стоимость эксплуатации системы $x(x_*)$ в условиях целевого применения в расчете на одно взаимодействие с системой $x_*(x_*)$.

Рассмотрим взаимодействие сторон \bar{P} и \bar{P}_* при условии

$$L = v_3 M = K, \quad L_* = v M = K_*, \quad (3.8)$$

где M — число взаимодействий систем; $K = K(x)$ ($K_* = K_*(x_*)$) — количество систем $x(x_*)$ в парке; $v = v(S, S_*; x, x_*)$ ($v_* = v_*(S, S_*; x, x_*)$) — вероятность «уничтожения» системы $x_*(x)$ «игроком» $P(P_*)$ в одном взаимодействии; $L = L(S, S_*; x, x_*)$ ($L_* = L_*(S, S_*; x, x_*)$) — количество «уничтоженных» систем стороны $\bar{P}(\bar{P}_*)$.

Ущерб стороны \bar{P} составит $\mu = r^0 + r^1 K + r^2 M$; стороны — \bar{P}_* — $\mu_* = r_*^0 + r_*^1 K_* + r_*^2 M$; относительный ущерб

$$\omega = \frac{r^0 + r^1 K + r^2 M}{r_*^0 + r_*^1 K_* + r_*^2 M}. \quad (3.9)$$

Будем считать, что выбором гиперстратегий S, S_* сторона P стремится минимизировать, а сторона P_* — максимизировать функционал $\omega = \omega(S, S_*)$ (3.9).

Рассмотрим вначале практически важный случай, когда затраты сторон на НИОКР значительно меньше производственных и эксплуатационных затрат, т. е. $r^0 \ll r^1 K + r^2 M$, $r_*^0 \ll r_*^1 K_* + r_*^2 M$. Тогда ими в (3.9) можно пренебречь и оценивать относительный ущерб функцией

$$\rho = \frac{r^1 K + r^2 M}{r_*^1 K_* + r_*^2 M}$$

или, учитывая (3.8),

$$\rho = \frac{r^1 v_* + r^2}{r_*^1 v + r_*^2}.$$

Из теоремы 3.2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и (S^0, S_*^0) — пара оптимальных гиперстратегий. Тогда для всех гиперстратегий S, S_*

$$\rho(S^0, S_*) \leq \rho(S^0, S_*^0) = \rho^0 \leq \rho(S, S_*^0),$$

где $\rho^0 = (r^1 v_*^0 + r^2) / (r_*^1 v^0 + r_*^2)$.

Очевидно, $\rho^0 = \rho^0(x, x_*)$. Аналогично (3.6) введем критерий эффективности $\varphi: X^2 \rightarrow E^{N_*}$ и отношение Φ :

$$\varphi_j(x, y) = \rho^0(x, x_*^j) / \rho^0(y, x_*^j), \quad j = \overline{1, N_*},$$

$$\Phi = \{(x, y) \in X^2 \mid \varphi_j(x, y) < 1, \quad j = \overline{1, N_*}\}.$$

Соотношение $x \Phi y$ в этом случае означает, что во взаимодействии с системами $x_*^j, j = \overline{1, N_*}$ система x эффективнее системы y с точки зрения относительного ущерба.

3. «Эталонные» системы. Рассмотрим возможные интерпретации множества X_* «эталонных» систем x_* .

Множество X_* может быть составлено из известных систем противоборствующей стороны, указанных в задании на разработку проекта, что соответствует задаче проектирования «под существующего противника».

Множество X_* может также описываться ограничениями, прогнозирующими возможности «противоборствующей» стороны в разработке аналогичных систем. В этом случае рассматривается задача проектирования «под перспективного противника».

Наконец, в отсутствие достоверной информации о «противнике», а также в ряде других случаев имеет смысл постановка задачи проектирования системы с $X_* = X$.

§ 4. Системы частных критериев

Вычисление критериев эффективности, рассмотренных в § 3,— сложная задача, для успешного решения которой современное состояние методов теории дифференциальных игр [3, 4, 10, 29] и вычислительной техники дает ограниченные возможности. Поэтому, как уже неоднократно отмечалось в предыдущих главах, возникает необходимость перехода от глобальных критериев к иерархическим структурам взаимосвязанных частных критериев, расчет которых сводился бы к решению значительно более простых задач. Точнее, необходима «достройка» структуры критериев внешнего проектирования, оценивающих приспособленность системы к решению целевых задач различного уровня, «нижними этажами» критериев внутреннего проектирования, оценивающих качество системы и ее подсистем различного уровня по их техническим характеристикам. Иными словами, необходима декомпозиция задачи проектирования.

Основываясь на моделях функционирования ЛА, описанных в § 2, построим системы частных критериев, порождающие бинарные отношения, которые аппроксимируют «изнутри» отношения эффективности из § 3. При этом используем метод § 2 гл. 3 и применим два подхода — геометрический и аналитический.

1. Модель ЛА как материальной точки постоянной массы. Вернемся к рассмотрению модели функционирования ЛА, включающей дифференциальные уравнения (2.1) и ограничения (2.2), (2.3). Для простоты будем считать (это обычно и принимается на практике), что ограничения модели q_{\max} , M_{\max} не зависят от проектных параметров x .

Зафиксируем значения фазовых переменных z и положим

$$P_{\min} = \min_{\epsilon \in [0,1]} P(\epsilon) = 0, \quad P_{\max} = \max_{\epsilon \in [0,1]} P(\epsilon).$$

Воспользуемся теперь тем, что система (2.1) содержит три уравнения, описывающие динамику ЛА. Это позволяет изобразить выпуклую оболочку $G(z, x)$ вектограммы правых частей уравнений (см. § 2 гл. 3) в трехмерном пространстве.

Введем пространство $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ с координатами

$$e_1 = \frac{\dot{V}}{g} + \sin \theta, \quad e_2 = \frac{\dot{\theta}V}{g} + \cos \theta, \quad e_3 = -\frac{\dot{\psi}V \cos \theta}{g}.$$

В этом пространстве выпуклая оболочка $G(z, x)$ имеет форму тела вращения, напоминающую пулю (рис. 28). Она ограничена параболической и цилиндрической поверхностями, а также плоскостью

$$G(z, x) = \{e \in E^3 \mid e_2^2 + e_3^2 + (e_1 - W^4)W^3 \leq 0, \\ e_2^2 + e_3^2 - (W^1)^2 \leq 0, \quad e_1 \geq -W^4\}, \quad (4.1)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} W^1 = n_{y\max}, \quad W^2 = \frac{c_{x0}q}{G/S} + \frac{BG/S}{q} n_{y\max}^2 + \frac{c_{xш}q}{G/S}, \\ W^3 = \frac{q}{BG/S}, \quad W^4 = \frac{P_{\max}}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Отсюда непосредственно видно, что с увеличением W^i , $i = \overline{1, 4}$, размеры «пули» (4.1) также увеличиваются, т. е. (4.2) действительно критерии.

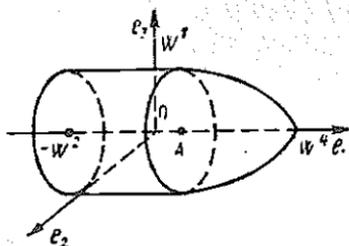


Рис. 28

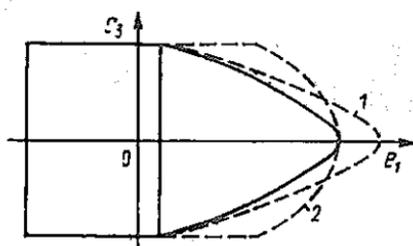


Рис. 29

Существует еще одна система критериев:

$$\left\{ \begin{array}{l} W^1 = n_{y\max}, \quad W^2 = \frac{c_{x0}q}{G/S} + \frac{BG/S}{q} n_{y\max}^2 + \frac{c_{xш}q}{G/S}, \\ W^3 = \frac{BG/S}{q}, \quad W^4 = \frac{P_{\max}}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} - \frac{BG/S}{q} n_{y\max}^2. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Она соответствует иному способу задания «пули» на рис. 28: критерий W^4 системы (4.3) определяет в отличие от (4.2) не вершину параболоида вращения, а точку A на оси e_1 пересечения параболоида с цилиндром.

Увеличение значений критериев систем (4.2) и (4.3) соответствует двум различным деформациям «пули», ведущим к увеличению ее размеров. Возрастание W^3 из системы (4.3) приводит к увеличению длины параболической части «пули», а возрастание W^3 из системы (4.2) — к увеличению размеров цилиндрической поверхности (штриховые линии 1 и 2 на рис. 29 соответственно).

Полученные системы критериев (4.2) и (4.3) являются функциями фазовых переменных H и V — высоты и скорости полета ЛА и проектных параметров, так что в соответствии с терминологией § 3 гл. 2 правильнее называть W^i техническими характеристиками.

Порождаемые ими бинарные отношения

$$W = \{(x, y) \in X^2 \mid W^i(H, V, x) \geq W^i(H, V, y), i = \overline{1, 4}, \\ \forall (H, V) \in Z\} \quad (4.4)$$

аппроксимирует изнутри, как показано в § 2 гл. 3, любое отношение эффективности Φ , удовлетворяющее условию

$$D(y) \subseteq D(x) \rightarrow x\Phi y, \quad (4.5)$$

где $D(x)$ — множество всех допустимых движений альтернативы x . В частности, (4.4) аппроксимирует изнутри отношения сравнительной эффективности, рассмотренные в § 3.

Критерии (4.2), как и критерии (4.3), полученные геометрическим путем, имеют ясный инженерный смысл. Так, $W^1 = n_{y \max}^1$ — располагаемая нормальная перегрузка (*характеристика разворота*); $W^2 = n_{x \min}^2$ — минимальная располагаемая продольная перегрузка (*характеристика торможения*), $W^3 = n_y^3$ (так как $B = \frac{1}{c_y} [41]$) — производная нормальной перегрузки по углу атаки (*характеристика несущей способности крыла*); $W^4 = n_{x \max}^4$ — максимальная располагаемая продольная перегрузка (*характеристика разгона ЛА*).

2. Модель ЛА как материальной точки переменной массы. Рассмотрим модель функционирования ЛА, включающую дифференциальные уравнения (2.6) и ограничения (2.7), (2.8). По-прежнему будем считать, что q_{\max} и M_{\max} в (2.7) не зависят от x .

Геометрический подход, рассмотренный в п. 1, к получению частных критериев в данном случае неприменим, поскольку динамику ЛА в системе (2.6) задают четыре уравнения.

Пусть $u^x = (n_y^x, \gamma^x, \delta^x, \varepsilon^x)$ — управление альтернативы x , U — множество (2.3) его допустимых значений. Определим

$$U_{xy} = \{(u^x, u^y) \in U(x) \times U(y) \mid n_y^x \geq n_y^y,$$

$$c_s(\varepsilon^x, x)/G_0(x) = c_s(\varepsilon^y, y)/G_0(y)\},$$

$$\Delta n_x(x, y) = n_x(u^x, x) - n_x(u^y, y),$$

$$\Delta n_x^-(x, y) = \max_{u^y} \min_{u^x} \Delta n_x(x, y),$$

$$\Delta n_x^+(x, y) = \min_{u^y} \max_{u^x} \Delta n_x(x, y).$$

Здесь $n_x = \frac{P}{G_0} - \frac{c_{x0}q}{G_0/S} - \frac{BG_0/S}{q} n_y^2 - \frac{c_{x \max}q}{G_0/S} \delta$ — продольная нагрузка.

Положим

$$c_{s\min} = \min_{\varepsilon \in [0,1]} c_s(\varepsilon) = 0, \quad c_{s\max} = \max_{\varepsilon \in [0,1]} c_s(\varepsilon),$$

$$\bar{W}^1 = n_{y\max}, \quad \bar{W}^2 = c_{s\max}/G_0, \quad \bar{W}^3 = G_T/G_0,$$

Можно убедиться, что

$$D(y) \subseteq D(x) \leftrightarrow \begin{cases} \Delta n_x^-(x, y) \leq 0 \leq \Delta n_x^+(x, y), \\ \bar{W}^i(x) \geq \bar{W}^i(y), \quad i=1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $D(x)$ — множество всевозможных вектор-функций $(x_g(\cdot), H(\cdot), z_g(\cdot), V(\cdot), \theta(\cdot), \psi(\cdot))$, соответствующих всем допустимым движениям системы (2.6) — (2.8).

Рассмотрим случай, когда тип двигателя, воздухозаборника и сопла фиксирован, так что все характеристики силовой установки ЛА являются функциями только площади входа в двигатель. При этом: $c_p = c_p^0$ не зависит от $S_{вх}$, $P = P^0 \cdot S_{вх}$, $c_s = c_s^0 \cdot S_{вх}$, где c_p^0 , c_s^0 , P^0 — расходные и тяговые характеристики силовой установки данного типа с $S_{вх} = 1$. Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{BG_0/S}{q}, \quad b = \frac{c_{x0}q}{G_0/S}, \quad c = \frac{c_{x\max}q}{G_0/S}, \quad \bar{W}^2 = \frac{S_{вх}}{G_0}.$$

Пусть $\bar{W}^i(x) \geq \bar{W}^i(y)$, $i=1, 2, 3$. Имеем

$$\Delta n_x^-(x, y) = \max_{\varepsilon} \Delta_1(\varepsilon; \Delta\varepsilon, x, y) + \max_{r_2} \min_{r_1} \Delta_2(r_1, r_2, x, y) - b(x) + b(y) - c(x) + c(y);$$

$$\Delta n_x^+(x, y) = \min_{\varepsilon} \Delta_1(\varepsilon, \Delta\varepsilon, x, y) + \min_{r_2} \max_{r_1} \Delta_2(r_1, r_2, x, y) - b(x) + b(y),$$

где

$$\varepsilon \in [0, 1], \quad 0 \leq r_1 \leq n_{y\max}^2(x), \quad 0 \leq r_2 \leq n_{y\max}^2(y),$$

$$\Delta_1(\varepsilon, \Delta\varepsilon, x, y) = P^0(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \bar{W}^2(x) - P^0(\varepsilon) \bar{W}^2(y),$$

$$\Delta_2(r_1, r_2, x, y) = r - a(x)r_1 + a(y)r_2$$

и $\Delta\varepsilon$ определяется из условия

$$c_s^0(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \bar{W}^2(x) = c_s^0(\varepsilon) \bar{W}^2(y).$$

Будем предполагать, что выполняются условия, допускающие линейные по $\Delta\varepsilon$ аппроксимации:

$$P^0(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = P^0(\varepsilon) + \frac{\partial P^0}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \cdot \Delta\varepsilon,$$

$$c_s^0(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = c_s^0(\varepsilon) + \frac{\partial c_s^0}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \cdot \Delta\varepsilon.$$

Тогда

$$\Delta n_x^+(x, y) = (\bar{W}^2(x) - \bar{W}^2(y))d - a(x)n_{y\max}^2(y) + \\ + a(y)n_{y\max}^2(y) - b(x) + b(y) \geq [\bar{W}^2(x)d - \\ - a(x)n_{y\max}^2(x) - b(x)] - [\bar{W}^2(y)d - a(y)n_{y\max}^2(y) - b(y)],$$

если $a(x) \geq a(y)$ и

$$\Delta n_x^+(x, y) = [\bar{W}^2(x)d - b(x)] - [\bar{W}^2(y)d - b(y)],$$

если $a(x) \leq a(y)$.

Далее,

$$\Delta n_x^-(x, y) = [\bar{W}^2(x)e - a(x)n_{y\max}^2(x) - b(x) - c(x)] - \\ - [\bar{W}^2(y)e - a(y)n_{y\max}^2(y) - b(y) - c(y)].$$

Здесь

$$d = \min_{\varepsilon} (P^0(\varepsilon))^2 \frac{\partial c_p^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg/ \frac{\partial c_s^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \\ e = \max_{\varepsilon} (P^0(\varepsilon))^2 \frac{\partial c_p^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg/ \frac{\partial c_s^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$$

и $\frac{\partial c_s^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} > 0$ в силу строгой монотонности функции $c_s^0(\cdot)$. Отсюда и из (4.6) находим два вектора технических характеристик маневренного ЛА:

$$\bar{W}^1 = n_{y\max}, \quad \bar{W}^2 = \frac{S_{\text{вх}}}{G_0}, \quad \bar{W}^3 = \frac{G_{\tau}}{G_0}, \\ \bar{W}^4 = -e \frac{S_{\text{вх}}}{G_0} + \frac{BG_0/S}{q} n_{y\max}^2 + \frac{c_{x0}q}{G_0/S} + \frac{c_{x\text{ш}}q}{G_0/S}, \quad (4.7)$$

$$\bar{W}^5 = \frac{BG_0/S}{q}, \quad \bar{W}^6 = d \frac{S_{\text{вх}}}{G_0} - \frac{BG_0/S}{q} n_{y\max}^2 - \frac{c_{x0}q}{G_0/S}$$

$$\bar{W}^1 = n_{y\max}, \quad \bar{W}^2 = \frac{S_{\text{вх}}}{G_0}, \quad \bar{W}^3 = \frac{G_{\tau}}{G_0}, \\ \bar{W}^4 = -e \frac{S_{\text{вх}}}{G_0} + \frac{BG_0/S}{q} n_{y\max}^2 + \frac{c_{x0}q}{G_0/S} + \frac{c_{x\text{ш}}q}{G_0/S}, \quad (4.8)$$

$$\bar{W}^5 = \frac{q}{BG_0/S}, \quad \bar{W}^6 = d \frac{S_{\text{вх}}}{G_0} - \frac{c_{x0}q}{G_0/S}.$$

Системы критериев (4.7), (4.8) порождают, аналогично (4.4), бинарные отношения, аппроксимирующие изнутри отношения эффективности Φ , удовлетворяющие условию (4.5).

3. Минимальные полные системы показателей маневренности. Важнейшим динамическим качеством ЛА является его маневренность. Однако понятие маневренности трактуется в литературе неоднозначно. По-видимому, наиболее широкая трактовка содержится в работах В. С. Пышнова, где под маневренностью понимается совокупность всех движений ЛА. Для количественной оценки маневренности применяются различные показатели: характеристики фигур пилотажа и маневров, перегрузка, предельные скорости полета, потолок и др.

Возникает проблема формирования системы показателей, обладающих следующими свойствами: 1) *минимальностью* (по числу показателей); 2) *полнотой*: доминирование по полной системе показателей гарантирует превосходство в маневренности (в смысле В. С. Пышнова). Актуальность данной проблемы особенно возрастает в связи с разработкой САПР, где системы показателей используются в качестве частных критериев для декомпозиции задачи формирования облика маневренного ЛА. Минимальность и полнота системы обеспечивают практическую реализуемость, эффективность и корректность декомпозиции задачи формирования облика ЛА.

Можно утверждать, что полученные выше наборы функций (4.2), (4.3), (4.7), (4.8) образуют *минимальные полные системы* показателей маневренности для рассмотренных моделей движения ЛА. Действительно, их полнота вытекает из (4.6). Минимальность следует из геометрических соображений: размеры «пули» на рис. 28 определяются тремя параметрами и еще один параметр требуется для того, чтобы зафиксировать ее расположение на оси e_1 .

Рассмотренная процедура формирования частных критериев позволяет строить их по произвольной вектограмме правых частей системы дифференциальных уравнений, описывающих движение ЛА. Это имеет важное значение, так как принципиально новые возможности перспективных ЛА (новые правые части уравнений) требуют разработки соответствующих критериев, оптимизация по которым адекватно отражает эти возможности. В противном случае, если формирование облика перспективного ЛА происходит на базе традиционных критериев, например чисел Эверлинга (чисел скорости, дальности, высоты), то оно фактически не выходит за неоправданно узкие для машинного проектирования рамки метода прототипов [41].

Проиллюстрируем сказанное примерами. Пусть к возможным управлениям системой (2.1) — (2.3) добавилось управление боковой аэродинамической силой. Как уже отмечалось в § 2, последние два уравнения системы (2.1) следует здесь заменить на (2.1'), а к ограничениям (2.3) — добавить ограничения (2.3'). Проведав выкладки, аналогичные приведенным выше, получим

систему критериев

$$W^1 = \sqrt{n_{y \max}^2 + n_z^2}, \quad W^2 = \frac{c_{x0}q}{G/S} + \frac{BG/S}{q} n_{y \max}^2 + \frac{c_{x \max}q}{G/S},$$

$$W^3 = \frac{q}{BG/S}, \quad W^4 = \frac{P_{\max}}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} + \frac{BG/S}{q} n_z^2.$$

Предположим теперь, что вдоль движений системы (2.1), отвечающих оптимальному функционированию ЛА, удельная энергия $E = H + V^2/(2g)$ не убывает, т. е. $\dot{E} = Vn_x \geq 0$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что техническими характеристиками являются:

$$W^1 = \frac{P_{\max}}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} = n_{x \max}, \quad W^2 = \left(\frac{qn_{x \max}}{G/S} \right)^{1/2} = n_{y \max}$$

где $n_{y \max}$ — перегрузка установившегося виража.

§ 5. Формирование облика маневренного летательного аппарата

Формирование облика ЛА осуществляется на этапе предварительного проектирования, где, как отмечалось в § 1 гл. 1, формируется техническая концепция системы, определяются ее основные параметры и характеристики, удовлетворяющие требованиям внешнего проектирования. Задача формирования облика может быть поставлена как задача оптимального структурно-параметрического синтеза ЛА в пространстве его агрегированных (обликовых) проектных параметров.

Итак, пусть x — вектор проектных параметров, дающий структурно-параметрическое описание вариантов проектируемого ЛА. Пример вектора x содержится в § 1. На допустимые значения наложены ограничения, выделяющие в пространстве $\{x\}$ множество X и обеспечивающие техническую реализуемость ЛА с проектными параметрами x . Примером таких ограничений могут служить компоновочные ограничения из § 1.

Формализация требований технического задания, являющегося выходом стадии внешнего проектирования жизненного цикла ЛА (см. § 1 гл. 1), приводит к ограничениям на качество функционирования ЛА. При этом используются модели функционирования ЛА, некоторые из которых рассмотрены в § 2. Приведем примеры таких ограничений.

Пример 5.1 (расчет потребного количества топлива). Будем считать, что потребное количество топлива G определяется требованиями реализуемости заданных в техническом задании профилей полета.

Пусть L — заданная дальность полета, $\bar{x}_g, H, \bar{z}_g, V, \bar{\theta}, \bar{\psi}$: $[0,$

$L \rightarrow E^1$ — заданные функции, определяющие профиль полета *). Ограничимся случаем, когда полет осуществляется в вертикальной плоскости с убранными тормозными щитками и, значит,

$$\tilde{x}_g(l) = l, \quad \tilde{z}_g(l) = \tilde{\psi}(l) = 0 \quad \text{для всех } l \in [0, L].$$

Из уравнений (2.6) движения ЛА как материальной точки переменной массы можно получить следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \tilde{\theta} = \frac{d\tilde{H}}{dl}, \quad \tilde{n}_y = (1 - \tilde{\tau}) \cos \tilde{\theta} \left[\frac{\tilde{V}^2}{g} \frac{d\tilde{\theta}}{dl} + 1 \right], \quad \tilde{\gamma} = 0,$$

$$\tilde{P} = (1 - \tilde{\tau}) G_0 \left[\frac{\tilde{V} \cos \tilde{\theta}}{g} \frac{d\tilde{V}}{dl} + \sin \tilde{\theta} \right] + \tilde{c}_{x0} \tilde{q} S + \frac{\tilde{B} G_0^2}{q S} \tilde{n}_y^2, \quad (5.1)$$

где $\tau: [0, L] \rightarrow E^1$ — функция, удовлетворяющая в соответствии с (2.6), уравнению

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dl} = \frac{\tilde{c}_p \tilde{P}}{G_0} \tilde{V} \cos \tilde{\theta} \quad (5.2)$$

и граничным условиям

$$\tilde{\tau}(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$\tilde{\tau}(L) = \frac{G_T}{G_0}, \quad (5.4)$$

означающим, что полет ЛА по профилю расходует полный запас топлива, а

$$\tilde{c}_{x0} = \tilde{c}_{x0}(\tilde{H}, \tilde{V}), \quad \tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{H}, \tilde{V}), \quad q = 0,5\rho(\tilde{H})\tilde{V}^2,$$

$\tilde{c}_p = c_p(\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\epsilon})$, $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\epsilon})$; \tilde{n}_y , $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\epsilon}$ — определяемые условиями (5.1) управления, потребные для полета ЛА по профилю.

Решение задачи Коши (5.2), (5.3) вместе с условием (5.4) связывают два параметра G_0 и G_T зависимостью

$$G_T = G_0 \tilde{\tau}(L; G_0). \quad (5.5)$$

Вторую функциональную связь параметров G_0 , G_T получим, используя уравнение весового баланса

$$G_0 = G_{\text{кон}} + G_{\text{с.у}} + G_{\text{об}} + G_T + G_{\text{ц.н}} + G_{\text{сл.н}}, \quad (5.6)$$

где $G_{\text{кон}}$ — вес конструкции; $G_{\text{с.у}}$ — вес силовой установки; $G_{\text{об}}$ — вес оборудования; G_T — вес топлива; $G_{\text{ц.н}}$ — вес целевой нагрузки; $G_{\text{сл.н}}$ — вес служебной нагрузки.

Для всех слагаемых в правой части (5.6) имеются формулы, определяющие их значения через взлетный вес G_0 , проектные

* Полет на дальность при заданной высоте и скорости рассматривался в примере § 5 гл. 2.

параметры ЛА, условия эксплуатации и содержащие эмпирические коэффициенты [41, 50]. В частности, вес крыла, входящий в вес конструкции планера ЛА, может быть определен, как в примере 2.1.

Подстановка этих зависимостей в (5.6) позволяет переписать уравнение весового баланса в виде

$$G_0 = f(G_0) + G_T. \quad (5.7)$$

Решение системы уравнений (5.5), (5.7) относительно G_0 , G_T дает значения взлетного веса и полного запаса топлива.

Пример 5.2 (максимальная угловая скорость установившегося виража). Установившийся вираж выполняется на постоянной высоте с постоянной скоростью. Из уравнений движения ЛА (2.1) имеем

$$\dot{\theta} = 0 \rightarrow n_y \cos \gamma = 1,$$

$$\dot{V} = 0 \rightarrow \frac{P}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} - \frac{BG/S}{q} n_y^2 = 0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{V} n_y \sin \gamma,$$

$$0 \leq n_y \leq n_{y \max}, \quad 0 \leq P \leq P_{\max}.$$

Положив $n_y \sin \gamma = u$, получим

$$\frac{P}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S} - \frac{BG/S}{q} (u^2 + 1) = 0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{V} u, \quad 0 \leq u \leq \sqrt{n_{y \max}^2 - 1}, \quad 0 \leq P \leq P_{\max}.$$

Из последних соотношений нетрудно найти

$$\dot{\psi}_{\max} = \frac{g}{V} \sqrt{n_{y \text{расп}}^2 - 1},$$

где располагаемая перегрузка $n_{y \text{расп}}$ определяется условиями

$$n_{y \text{расп}} = \min(n_{y \text{у.в.}}, n_{y \max}),$$

а

$$n_{y \text{у.в.}} = \sqrt{\left(\frac{P_{\max}}{G} - \frac{c_{x0}q}{G/S}\right) \frac{q}{BG/S}}$$

— перегрузка установившегося виража. Потребная тяга определяется равенствами

$$P = \begin{cases} P_{\max}, & n_{y \text{расп}} = n_{y \text{у.в.}}; \\ c_{x0}qS + \frac{BG^2/S}{q} n_{y \max}^2, & n_{y \text{расп}} = n_{y \max}. \end{cases}$$

Требования технического задания для приведенных примеров обычно формализуются в виде неравенств, например, в виде ограничения снизу на дальность полета и угловую скорость установившегося виража, которые требуется проверять для альтернатив ЛА при решении задачи формирования облика. Отсюда следует, что нужна разработка «быстрых» алгоритмов вычисления традиционных технических характеристик. Эти же характеристики, как правило, используются в САПР при визуализации результатов расчетов для пользователей-конструкторов.

Ограничения на качество функционирования ЛА «сжимают» множество X допустимых (по структурно-параметрическому описанию) значений проектных параметров до подмножества X . На X или на его конечной аппроксимации задается бинарное отношение Φ , порожденное одним или несколькими критериями сравнительной эффективности, примеры которых содержатся в § 3, 4. Задача формирования облика ставится как задача отыскания ядра модели (X, Φ) :

$$X \rightarrow X^* = \text{Max}(X, \Phi). \quad (5.8)$$

Трудности решения подобных задач обсуждались выше. Требование практической реализуемости задачи формирования облика на современных ЭВМ приводит к необходимости ее декомпозиции. На этапе предварительного проектирования, как отмечалось, проектируемая система рассматривается в целом, ее внутренняя структура не выявляется. Это выражается, в частности, в том, что учитываются не все признаки компоновочной схемы ЛА. Более того, для «устранения» трудностей комбинаторного характера при формировании облика ЛА можно фиксировать значения существенных признаков, опираясь на опыт эксперта (ЛПР) и тем самым сократить множество рассматриваемых альтернатив. Декомпозиция задачи формирования облика (5.8) осуществляется в первую очередь в критериальном пространстве путем синтеза легко вычисляемых бинарных отношений Φ_j , $j=1, k$, аппроксимирующих изнутри отношение Φ . Примером таких отношений являются отношения Парето Φ_1 , порождаемые частными критериями, построенными в § 4. Простейшая двухуровневая схема формирования облика ЛА имеет вид

$$X \rightarrow X_1 = \text{Max}(X, \Phi_1), X_1 \rightarrow X_2 = \text{Max}(X_1, \Phi). \quad (5.9)$$

При решении задачи построения ядер на каждой итерации схемы (5.9) могут быть использованы численные методы многокритериальной оптимизации, некоторые из которых упомянуты в § 4 гл. 3. Сходимость схемы (5.9) устанавливает теорема 1.1 гл. 3.

Теоретические оценки [5, 40] и опыт решения практических задач показывают достаточную эффективность схемы (5.9). Обычно количество конкурирующих вариантов проектируемой системы сокращается после первой итерации схемы на 2—3 порядка. Однако количество оставшихся вариантов (мощность множества X_1) может оказаться все-таки значительным и тогда вторую итерацию в (5.9) следует заменить многошаговой процедурой последовательного анализа вариантов с синтезом аппроксимирующих Φ отношений, описанной в гл. 4.

§ 6. Фрагмент иерархической схемы проектирования летательного аппарата

Рассмотренная в § 5 постановка задачи формирования облика ЛА не содержит параметров неопределенности, наличие которых, как отмечалось в § 4 гл. 5, является существенной чертой процесса принятия проектных решений при разработке сложных систем. Можно считать, что в задаче формирования облика ЛА, рассмотренной в § 5 отдельно, вне иерархической системы проектирования, уже осуществлена свертка по параметрам неопределенности, таким, как, например, статистические коэффициенты в весовых формулах для частей и агрегатов ЛА (см. § 2 и 5). Вопрос об адекватности такой свертки целям проектирования ЛА представляет самостоятельную проблему. Отметим лишь, что, по нашему мнению, ее решение невозможно без «погружения» задачи в иерархическую систему взаимосвязанных частных задач проектирования, т. е. систему проектирования. Методы снятия неопределенности в процессе проработки проекта «в глубину», а также тесно связанные с ними вопросы управления ходом проектирования могут быть получены развитием схем, рассмотренных в § 3 и 4 гл. 5.

В настоящем параграфе рассматривается двухуровневый фрагмент системы принятия проектных решений для ЛА. Верхний уровень занимает характерная для этапа предварительного проектирования задача формирования облика ЛА, нижний — присущие этапу эскизного проектирования задачи оптимизации функциональных подсистем ЛА: топливной, гидравлической, электроснабжения, жизнеобеспечения и др. [32, 41]. Ограничимся рассмотрением схемы, интерпретируемой как учет и снятие неопределенностей, связанной с проработкой *топливной системы* (ТС) ЛА. Прочие параметры неопределенности будем считать фиксированными.

1. Задача формирования облика ЛА. Уточним постановку задачи, содержащуюся в § 5, выделив явно агрегированное

описание ТС. Для этого уравнение (5.2) заменим следующим:

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \left(\frac{\tilde{c}_p \tilde{P}}{G_0} + \tilde{\alpha}^1 \right) \tilde{V} \cos \tilde{\theta}, \quad (6.1)$$

где функция $\tilde{\alpha}^1: [0, L] \rightarrow E^1$ оценивает количество топлива, сжигаемого на привод насосных агрегатов ТС при полете ЛА по заданному профилю. Граничные условия (5.3), (5.4) оставим без изменения. Решение краевой задачи (6.1), (5.3), (5.4) дает функциональную связь параметров G_0 , G_T и функции $\alpha^1(\cdot)$:

$$G_T = G_0 \tilde{\tau}(L; G_0, \tilde{\alpha}^1(\cdot)). \quad (6.2)$$

Уравнение весового баланса (5.6) из § 5 перепишем в виде

$$G_0 = h(G_0) + \alpha^2 G_0^{2/3} + G_T, \quad (6.3)$$

где $h(\cdot)$ — известная функция, $\alpha^2 G_0^{2/3} = G_{TC}$ — оценка веса топливной системы, α^2 — параметр неопределенности. Совместное решение уравнений (6.2), (6.3) определяет функции

$$G_0 = G_0(x_1, \alpha), \quad G_T = G_T(x_1, \alpha), \quad (6.4)$$

где x_1 — вектор проектных параметров, описывающий ЛА на уровне формирования облика, $\alpha = (\alpha^1(\cdot), \alpha^2)$ — параметр неопределенности, связанный с неточным заданием характеристик будущей ТС ЛА.

Не зная характеристик ТС, опираясь на опыт проектирования систем аналогичного назначения, можно лишь приближенно оценить значение параметра неопределенности α . Именно, пусть $B = B(x_1)$ — множество всех α , для которых система (6.2), (6.3) разрешима. Будем считать, что возможные значения α удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\alpha \in A(x_1) = \{ \alpha \in B(x_1) \mid 0 \leq \tilde{\alpha}^1(l) \leq \tilde{\alpha}_{\max}^1(x_1), \forall l \in [0, L], \\ \alpha_{\min}^2(x_1) \leq \alpha^2 \leq \alpha_{\max}^2(x_1), G_T(x_1, \alpha) \leq G_T^{\max}(x_1) \},$$

где $G_T^{\max}(x_1)$ — максимально возможный для ЛА с проектными параметрами x_1 вес топлива. Последний определяется размером отсеков планера ЛА, где могут быть размещены топливные баки. Аналогично, ограничения $\alpha_{\max}^1(x_1)$, $\tilde{\alpha}_{\min}^2(x_1)$, $\alpha_{\max}^2(x_1)$ в значительной мере определяются компоновкой ЛА и так называемыми тарировочными характеристиками топливных баков [35].

В силу соотношений (6.4) критерии эффективности, введенные в § 3, а также системы частных критериев, полученные в § 4, оказываются функциями параметра неопределенности α . Свернув по α так, как это сделано в § 4 гл. 5, можно поста-

вить задачу формирования облика ЛА. Ограничимся простым, наглядным и широко распространенным на практике примером задачи проектирования, когда критерием эффективности является взлетный вес ЛА, который требуется минимизировать.

Следуя подходу, изложенному в § 4 гл. 5, положим

$$\varphi^{\min}(x_1) = \min_{\alpha \in A(x_1)} G_0(x_1, \alpha),$$

$$\varphi^{\max}(x_1) = \max_{\alpha \in A(x_1)} G_0(x_1, \alpha),$$

$$\Phi_1 = \{(x_1, y_1) \in X_1^2 \mid \varphi^{\max}(x_1) < \varphi^{\min}(y_1)\}. \quad (6.5)$$

Задачу формирования облика ЛА можно теперь записать в знакомом виде

$$X_1 \rightarrow X_1^* = \text{Max}(X_1, \Phi_1), \quad (6.6)$$

где X_1 — конечное множество конкурирующих вариантов ЛА уровня формирования облика, примеры описания которого даны в § 1,5.

Решение задачи (6.6) существует в силу транзитивности отношения Φ_1 (6.5).

2. Оптимизация параметров топливной системы. Проработка варианта ЛА с агрегированными проектными параметрами x_1 в вариант с детальными проектными параметрами x_0 в данном случае связана с решением задачи проектирования ТС. Для простоты будем считать, что $x_0 = (x_1, r)$, где r — вектор проектных параметров, описывающий варианты ТС. Таким образом, агрегирование проектных параметров заключалось в «отбрасывании» их части — координат r вектора x_0 , несущественных на уровне формирования облика ЛА.

Проектными параметрами топливной системы r^i являются: параметры, задающие структуру системы, а также параметры трубопроводов, насосов, клапанов, кранов, фильтров и др. [35].

Модель функционирования ТС в общем виде включает систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= -h_i(w, v), \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{w}_{k+1} &= \sum_{i=1}^k h_i(w, v) - c_p \cdot P - \delta(w, v); \end{aligned} \quad (6.7)$$

ограничения на фазовые переменные $w = (w_1, \dots, w_{k+1})$ и управления $v = (v_1, \dots, v_l)$:

$$\begin{aligned} w_i &\in [0, W_i], \quad i = 1, \dots, k+1; \\ \sum_{i=1}^{k+1} W_i &= G_T, \quad v_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Здесь w_i, W_i — текущий и максимальный вес топлива в i -м баке ($(k+1)$ -й бак — расходный); v_j — переменная, описывающая режим работы j -го насоса (клапана, крана);

$$v_j = \begin{cases} 0 & \text{в холостом режиме (закрыт),} \\ 1 & \text{в рабочем режиме (открыт);} \end{cases}$$

$c_p \cdot P = c_s$ — секундный расход топлива на создание тяги P ; δ — секундный расход топлива на привод насосных агрегатов ТС. При фиксированных w, v правая часть системы уравнений (6.7) определяется гидравлическим расчетом ТС.

Пример 6.1. Пусть система состоит из трех топливных баков, двух труб и двух насосов (рис. 30). Для простоты будем считать, что баки имеют форму параллелепипедов с площадью оснований $S_i, i=1, 2, 3$. Кроме того, условимся, что давление газа в баках поддерживается постоянным и одинаковым во всех баках. Обозначим через $h_i = w_i/S_i, i=1, 2, 3$, уровни топлива в баках, через d_i, l_i — соответственно диаметры и длины трубопроводов. Рассмотрим фрагмент ТС, состоящий из первого и третьего баков и соединяющей их трубы с насосом. Течение жидкости в трубе подчиняется закону Бернулли. Для данного фрагмента он выглядит следующим образом:

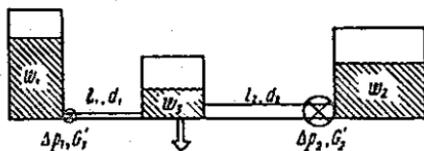


Рис. 30

$$(h_1 - h_3) \gamma_T + \Delta P_1 - \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \xi_1 \right) \gamma_T \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = 0, \quad (6.8)$$

где γ_T — удельный вес топлива; ΔP_1 — давление, создаваемое насосом; λ_1 — коэффициент линейных потерь давления; ξ_1 — сумма всех местных потерь давления; \bar{v}_1 — осредненная скорость потока. Для труб с небольшой относительной шероховатостью и не очень больших чисел Рейнольдса ($Re < 10^5$) коэффициент λ_1 может быть рассчитан по формуле

$$\lambda_1 = \frac{0,316}{4 \sqrt{Re}},$$

где $Re = \frac{\bar{v}_1 d_1}{\nu_T}$, ν_T — кинематическая вязкость топлива.

Пусть $G_1 = \gamma_T \bar{v}_1 \frac{\pi d_1^2}{4}$ — весовой расход топлива. Уравнение

(6.8) можно привести к виду

$$\Delta P_1 = \left(\frac{\omega_3}{S_3} - \frac{\omega_1}{S_1} \right) \gamma_T + \\ + 0,638 \frac{(G'_1)^2}{\gamma_T d_1^4} \left[12,95 \sqrt[4]{\frac{\nu_T \gamma_T d_1}{G'_1}} \frac{l_1}{d_1} + \xi_1 \right]. \quad (6.9)$$

Функционирование насоса описывается напорной характеристикой, определяющей зависимость перепада давления ΔP , создаваемого 1-м насосом, от расхода топлива G'_1 и конструктивных параметров насоса q_1 :

$$\Delta P_1 = f_1(q_1, G'_1), \quad (6.10)$$

где $f_1(\cdot)$ — заданная (как правило, таблично или графически) функция. Разрешив систему уравнений (6.9), (6.10) относительно G'_1 и ΔP_1 , получим

$$G'_1 = G'_1(\gamma_T, \nu_T; S_1, S_3; d_1, l_1, \xi_1, q_1; \omega_1, \omega_3), \\ \Delta P_1 = \Delta P_1(\gamma_T, \nu_T; S_1, S_3; d_1, l_1, \xi_1, q_1, \omega_1, \omega_3). \quad (6.11)$$

Итак, весовой расход G'_1 топлива из первого бака и перепад давления ΔP_1 , создаваемый 1-м насосом, есть функция следующих групп параметров: ν_T, γ_T — как правило, константы задачи проектирования ТС; S_1, S_3 — в данном примере определяются на уровне формирования облика ЛА; в более сложном случае подлежат уточнению на уровне проектирования ТС; d_1, l_1, ξ_1, q_1 — проектные параметры ТС; ω_1, ω_3 — режимные параметры (фазовые переменные).

Аналогично, рассматривая фрагмент ТС, состоящий из 2-го и 3-го баков и соединяющего их трубопровода с насосом, имеем

$$G'_2 = G'_2(\nu_T, \gamma_T; S_2, S_3; d_2, l_2, \xi_2, q_2; \omega_2, \omega_3), \\ \Delta P_2 = \Delta P_2(\nu_T, \gamma_T; S_2, S_3; d_2, l_2, \xi_2, q_2; \omega_2, \omega_3). \quad (6.12)$$

Секундный расход топлива δ_i на привод насоса есть функция конструктивных параметров насоса q_i и его мощности $N_i = \Delta P_i G'_i, i=1, 2$.

Пусть κ_T — теплотворная способность топлива, $\eta_i = \eta_i(q_i)$ — коэффициент полезного действия i -го насоса. Тогда

$$\delta_i = \eta_i \frac{\Delta P_i G'_i}{\kappa_T}, \quad i=1, 2.$$

Учитывая (6.11), (6.12), получим

$$\delta_i = \delta_i(\nu_T, \gamma_T, \kappa_T; S_i, S_3; d_i, l_i, \xi_i, q_i; \omega_i, \omega_3), \\ \delta = v_1 \delta_1 + v_2 \delta_2. \quad (6.13)$$

Соотношения (6.11)–(6.13) определяют модель (6.7) функционирования ТС в рассматриваемом примере:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -G_1'v_1, & \dot{w}_2 &= -G_2'v_2, \\ \dot{w}_3 &= v_1(G_1' - \delta_1) + v_2(G_2' - \delta_2) - c_p P.\end{aligned}$$

Из ограничений на качество функционирования ТС выделим два. Первое носит характер ограничений на фазовые переменные модели (6.7), связано с требованием центровки ЛА и формализуется в виде

$$c_{ц.т}(w) \in [a, b], \quad (6.14)$$

где $c_{ц.т}(w)$ — текущее положение центра тяжести ЛА, зависящее от остатков топлива в баках; $[a, b]$ — заданная «разбежка» центровки. Для рассматриваемого примера это ограничение имеет вид

$$a \leq \frac{c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} \leq b,$$

где $a, b, c_i, i = \overline{1, 3}$ — константы задачи проектирования ТС. Второе ограничение связано с обеспечением расходов топлива $\bar{c}_s = \bar{c}_p \bar{P}$ для создания потребной тяги при полете ЛА по заданным профилям (на заданных режимах), включая расчетные профили полета задачи формирования облика ЛА.

Для формулировки ограничения данного типа выполним в (6.7) замену переменных, положив $w_i = (1 - \vartheta_i) W_i, i = 1, \dots, k + 1, \vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{k+1})$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_i &= \bar{h}_i(\vartheta, W, v) / W_i, & i &= 1, \dots, k + 1, \\ \vartheta_{k+1} &= \left[- \sum_{i=1}^k \bar{h}_i(\vartheta, W, v) - c_p P - \delta(\vartheta, W, v) \right] / W_{k+1}.\end{aligned} \quad (6.15)$$

Чтобы описать функционирование ТС при полете ЛА по профилю, используемому на уровне формирования облика для оценки параметров G_0, G_r , систему уравнений (6.15) заменим следующей:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\vartheta}_i}{dt} &= \tilde{h}_i(\tilde{\vartheta}, W, v) / (W_i \tilde{V} \cos \tilde{\vartheta}), & i &= 1, \dots, k, \\ \frac{d\tilde{\vartheta}_{k+1}}{dt} &= \left[- \sum_{i=1}^k \tilde{h}_i(\tilde{\vartheta}, W, v) - \tilde{c}_p \tilde{P} - \tilde{\delta}(\tilde{\vartheta}, W, v) \right] / (W_{k+1} \tilde{V} \cos \tilde{\vartheta}), \\ \tilde{\vartheta}_i(0) &= 0, & \tilde{\vartheta}_i(L) &= 1, & i &= 1, \dots, k + 1, \\ \tilde{\vartheta}_i(t) &\in [0, 1], & \forall t &\in [0, L].\end{aligned} \quad (6.16)$$

Очевидно, ограничения (6.14) на качество функционирования ТС выполняются, если найдутся управления $v: [0, L] \rightarrow \{0, 1\}$, удовлетворяющие (6.14), (6.16).

Для оценки качества вариантов ТС, а также снятия неопределенности на уровне формирования облика ЛА потребуется весовая модель ТС, т. е. зависимость $G_{ТС}$ от проектных параметров r . В рассматриваемом примере

$$G_{ТС} = \sum_{i=1,2} \left[G_{Н_i}(q_i) + \frac{\pi}{4} d_i^2 l_i \gamma_T + \pi d_i \Delta_i \gamma_{M_i} \right],$$

где $G_{Н_i}$ — вес i -го насоса; Δ_i , γ_{M_i} — толщина стенки и удельный вес i -го трубопровода.

Пусть фиксированному вектору x_1 проектных параметров ЛА уровня формирования облика отвечает множество $R(x_1)$ допустимых значений r , которое является конечной аппроксимацией области в пространстве $\{r\}$ проектных параметров ТС, выделяемой описанными ограничениями на качество функционирования, а также другими ограничениями, формализующими опыт разработки ТС, технические, технологические, эксплуатационные, компоновочные и другие ограничения.

Задача проектирования ТС ставится как задача отыскания ее параметров $r^* = r^*(x_1) \in R(x_1)$ таких, что

$$G_{ТС}(r^*) = \min_{r \in R(x_1)} G_{ТС}(r). \quad (6.17)$$

Конструктивная проработка топливной системы позволяет определить ее вес $G_{ТС} = G_{ТС}(r)$, закон управления выработкой топлива $v_j: [0, L] \rightarrow \{0, 1\}$, $j = \bar{1}, l$, и соответствующие ему функции остатков топлива в баках $\vartheta_i: [0, L] \rightarrow [0, 1]$, $i = \bar{1}, k+1$ и, наконец, значение параметра неопределенности $\alpha = \alpha(x_1, r)$, представляющего ТС на уровне формирования облика ЛА, из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha^2 G_0^{2/3}(x_1, \alpha) &= G_{ТС}(r), \\ \bar{\alpha}^1(l) &= \bar{\delta}(\bar{\vartheta}(l), W, v(l)), \quad l \in [0, L]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Подставив найденное отсюда значение $\alpha = \alpha(x_1, r) = \alpha(x_0)$ в (6.2), (6.3), получим точные значения взлетного веса ЛА $G_0 = G_0(x_0)$ и полного запаса топлива $G_T = G_T(x_0)$.

3. Процедура последовательного анализа вариантов. Используем для решения рассматриваемой модельной задачи проектирования ЛА процедуру последовательного анализа, описанную в § 4 гл. 5.

Отметим, что для снятия неопределенности и решения задачи проектирования ЛА проработки альтернативы $x_1 \in X_1$ «в глубину» может заключаться в построении произвольного вариан-

та ТС $r \in R(x_1)$. Это подтверждают равенства (6.18). Однако формирование на основе такой проработки уточненного бинарного отношения и использование последнего для дальнейшего сжатия множества конкурирующих альтернатив ЛА уровня формирования облика тем эффективнее, чем меньший «вклад» во взлетный вес G_0 дает топливная система. Поэтому наилучшей является «проработка» $x_1 \rightarrow x_0 = (x_1, r^*(x_1))$, связанная с решением задачи проектирования ТС (6.17).

Итак, пусть $x_0 = (x_1, r)$,

$$X_0 = \{x_0 | x_0 = (x_1, r), x_1 \in X_1, r \in R(x_1)\}.$$

Введем, как и в гл. 5, функцию агрегирования $d_1: X_0 \rightarrow X_1$, $d_1(x_0) = x_1$, $d_1(X_0) = X_1$. Положим $d_1^{-1}: X_1 \rightarrow 2^{X_0}$, $d_1^{-1}(x_1) = \{(x_1) \times R(x_1)\}$. Пусть $u_1: X_1 \rightarrow \{0, 1\}$ — управление, смысл которого заключается в следующем: если $u_1(x_1) = 1$, то для ЛА с проектными параметрами x_1 решается задача проектирования ТС (6.17), в противном случае альтернатива x_1 не прорабатывается. На множестве X_1 введем отношение $\Phi_1[u_1]$, положив $x_1 \Phi_1[u_1] y_1$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $\varphi^{\max}(x_1) < \varphi^{\min}(y_1)$, если $u_1(x_1) = u_1(y_1) = 0$,
- 2) $G_0(x_1, r^*(x_1)) < \varphi^{\min}(y_1)$, если $u_1(x_1) = 1, u_1(y_1) = 0$,
- 3) $\varphi^{\max}(x_1) < G_0(y_1, r^*(y_1))$, если $u_1(x_1) = 0, u_1(y_1) = 1$,
- 4) $G_0(x_1, r^*(x_1)) < G_0(y_1, r^*(y_1))$, если $u_1(x_1) = u_1(y_1) = 1$.

Очевидно, $\Phi_1 \subseteq \Phi_1[u_1]$ и $\Phi_1 = \Phi_1[u_1]$, если $u_1[\cdot] \equiv 0$, где Φ_1 — введенное выше бинарное отношение.

Рассмотрим следующую двухэтапную процедуру (последовательного анализа вариантов) с управлением, реализующую решение задачи проектирования ЛА

$$X_0 \rightarrow X^* = \text{Max}(X_0, \Phi_0)$$

по двухуровневой схеме

$$\begin{aligned} X_1 \rightarrow X_1^* &= \text{Max}(X_1, \Phi_1[u_1]), \\ X_1^* \rightarrow X_0^* &= \text{Max}(d_1^{-1}(X_1^*), \Phi_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Используя теорему 4.1 гл. 5, можно показать, что для всякого управления $u_1[\cdot]$ имеет место равенство $X_0^* = X^*$.

Непосредственным обобщением схемы (6.19) служит многошаговый управляемый процесс — аналог процесса (4.11) гл. 5:

$$\begin{aligned} X_{1j}^* \rightarrow X_{1,j-1}^* &= \text{Max}(X_{1j}^*, \Phi_1[u_{1,j-1}]), \quad j = s, s-1, \dots, 1; \\ X_{1s}^* &= \text{Max}(X_1, \Phi_1[u_{1s}]), \\ X_{10}^* \rightarrow X_0^* &= \text{Max}(d_1^{-1}(X_{10}^*), \Phi_0), \end{aligned} \quad (6.20)$$

также сходящийся к множеству $X_0^* = X^*$ для всяких управлений u_{1j} , $j = s, s-1, \dots, 0$.

Представляется важной задача эффективного управления

процессами (6.19), (6.20), в частности, путем синтеза оптимальных алгоритмов последовательного анализа, пассивного (программного) для (6.19) и последовательного (позиционного) для (6.20). Для тех же целей, как уже отмечалось, могут использоваться опыт и интуиция конструкторов.

Подведем некоторые итоги. В настоящей главе на примере такой сложной технической системы, как ЛА, проиллюстрированы основные математические конструкции, связанные с принятием проектных решений.

В § 1—3 рассмотрена постановка задачи формирования облика ЛА, его структурно-параметрическая модель, модель функционирования и описание целей проектирования. Далее, в § 4 с помощью метода, рассмотренного в гл. 3, выведены технические характеристики маневренного ЛА, которые в § 5 использовались при формировании облика. Там же применялся метод последовательного анализа вариантов, развитый в гл. 4 для решения задач проектирования динамических управляемых систем. Наконец, в § 6 кратко описана двухуровневая иерархическая схема формирования облика ЛА, которая является частным случаем общих иерархических схем проектирования гл. 5. При этом «снимается» неопределенность, связанная с параметрами топливной системы. Таким образом, уже в данной простой двухуровневой процедуре процесс проектирования выступает как процесс устранения неопределенности — уточнения облика и характеристик ЛА.

Каковы же дальнейшие пути организации процесса автоматизированного проектирования ЛА? В § 3 гл. 5 говорилось, что описанные там схемы дают большую свободу для формирования иерархических процедур проектирования. Конкретный вид иерархии существенно зависит от принятой технологии автоматизированного проектирования. Можно лишь перечислить те задачи, которые должны быть решены при проектировании ЛА, однако их последовательность или распараллеливание определяются структурой САПР, которая может изменяться по мере автоматизации все большей части процесса проектирования и повышения требований к САПР.

На следующих этапах формирование облика, эскизного и рабочего проектирования ЛА требуется решать задачи детализации проекта. Они опираются на все более точные математические модели проектируемого объекта, включая модели функционирования ЛА в целом и его подсистем. К такому можно отнести, например, задачи выбора оперения ЛА, уточнения параметров силовой установки, проектирования системы управления, построения геометрических обводов и т. д. Решение и корректная увязка этих проектных задач в рамках интегрированной системы автоматизированного проектирования — важнейшая проблема при создании САПР летательных аппаратов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение абстрактных схем декомпозиции и последовательного анализа вариантов относится к общим математическим вопросам автоматизации проектирования. Материал, изложенный в настоящей книге, показывает, что проблемы проектирования не сводятся к проблемам оптимизации, хотя и содержат последние.

Дальнейшее обоснование схем автоматизированного проектирования может идти по нескольким направлениям. Одно из них состоит в отыскании все более общих условий согласования, обеспечивающих корректность декомпозиции задач проектирования. Как отмечалось, для этого, возможно, следует ввести в рассмотрение вместо бинарных отношений функции выбора. Целесообразно включить в схемы проектирования случайные и неопределенные (неконтролируемые) факторы. Появление в задачах проектирования неконтролируемых факторов обычно связано либо с недостаточной изученностью условий и законов функционирования проектируемой системы, либо с наличием активного «противника». Учет таких факторов требует обобщения принципов оптимальности (например, принципа гарантированного результата).

Другое направление работ связано с выделением классов систем, для которых возможна конструктивная конкретизация общих схем декомпозиции задач проектирования и условий координации принимаемых проектных решений, как, например, это намечено для класса управляемых динамических систем.

Системы автоматизированного проектирования, будучи сложными человеко-машинными системами, сами являются объектом проектирования. Изучение и выбор иерархических схем принятия проектных решений соответствуют стадии предварительного проектирования САПР. На более поздних этапах проектирования решаются проблемы математического, технического и организационного обеспечения САПР. Более того, САПР в процессе создания и развития проходят все типичные этапы жизненного цикла сложной системы, о которых говорилось в гл. I. В частности, должны быть реализованы этапы испытаний, сопровождения и модификации САПР, что требует немалых затрат.

Современные САПР должны обладать элементами «искусственного интеллекта», например иметь так называемые экспертные системы поддержки конструктора, отражающие знания о предметной области и опыт проектирования технических

объектов данного назначения. Например, экспертная система должна помогать конструктору — пользователю САПР генерировать возможные варианты объекта проектирования. Таким образом, разработка САПР приводит к проблемам представления знаний и поиска решений [49]. В настоящем пособии, по существу, рассматривалась лишь вторая часть этой единой комплексной проблемы.

Обсуждая проблемы автоматизированного проектирования управляемых динамических систем, мы полагали, что динамические возможности проектируемой системы используются в полной мере. Другими словами, предполагалось существование достаточно совершенной системы управления объектом. Между тем проектирование системы управления как соответствующей системы принятия и реализации решений в процессе функционирования — одна из важных задач проектирования. Специфика ее заключается в том, что в качестве объектов проектирования выступают алгоритмы управления, базирующиеся на получаемой информации о внешней среде, и, как правило, реализуемые на бортовых ЦВМ. Таким образом, речь идет о проектировании бортового математического обеспечения системы управления объектом. Еще существующее в настоящее время раздельное проектирование собственно управляемого объекта и системы управления носит вынужденный характер, обусловленный сложностью комплексной проблемы. О том, что речь здесь идет о действительно единой комплексной проблеме, говорит тот факт, что при создании систем не всегда очевидно разделение параметров на проектные и управляющие. Так, в примере из гл. 1 проектные параметры регулятора Уатта одновременно задавали закон управления — обратной связи.

В автоматизации проектирования можно поставить целый ряд проблем, начиная от самых общих математических и кончая специальными, типичными для конкретного класса систем, организационными и техническими. Состояние этих проблем в настоящее время различно. Например, имеются многочисленные исследования по системному программному обеспечению САПР, методам оптимизации, обеспечению диалога, описанию вариантов системы, инженерной графике, АСУ ТПП и т. д. В то же время недостаточно формализованы этапы проектирования «среднего» уровня, цепочка задач автоматизированного проектирования зачастую «прерывается» где-то между этапами начального синтеза проекта и конструирования системы.

Концентрация усилий на нерешенных вопросах, особенно концептуального и методологического характера, позволит, по мнению авторов, построить теорию автоматизированного проектирования сложных систем — специальный раздел теории принятия решений и системного анализа. В свою очередь, это найдет практическое воплощение в САПР следующего поколения.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЗИЦИОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Кратко изложим сведения из монографии [4], использованные в основном тексте.

1. Игровое управление. Рассмотрим управляемую систему, текущие состояния которой описываются ее фазовым вектором $z \in E^n$, изменяющимся во времени t в соответствии с дифференциальным уравнением движения

$$\dot{z} = f(t, z, u, v). \quad (\text{П.1})$$

Здесь f — заданная функция, отражающая динамические свойства системы; $u \in E^r$ и $v \in E^s$ — векторы управляющих воздействий (управления), подчиненные противоборствующим сторонам — первому и второму «игрокам» соответственно. Допустимые значения z, u, v могут быть стеснены какими-нибудь дополнительными ограничениями, отражающими кинематику и динамику управляемых объектов и возможности «игроков». По условиям задачи в пространстве позиций $\{t, z\}$ задается множество M , которое составляет цель первого «игрока». Кроме того, в том же пространстве позиций $\{t, z\}$ задается множество N , которое составляет жизненное пространство первого «игрока». Наконец, задается функционал

$$\gamma = \varphi(z[t], u[t], v[t], t_0 \leq t \leq \tau), \quad (\text{П.2})$$

который оценивает исход игры. Он определен для всех возможных реализаций $\{z[t], u[t], v[t]\}$, $t_0 \leq t \leq \tau$, процесса, конечные позиции которых $\{\tau, z(\tau)\}$ лежат на M , а текущие позиции $\{t, z[t]\}$ при всех значениях $t_0 \leq t \leq \tau$ содержатся в N . Здесь t_0 — момент начала процесса, τ — момент первого попадания $\{t, z[t]\}$ на множество M , т. е.

$$\{\tau, z[\tau]\} \in M, \quad \{t, z[t]\} \notin M, \quad t_0 \leq t < \tau. \quad (\text{П.3})$$

При этом необходимым условием успешного завершения игры для первого «игрока» наряду с (П.3) является

$$\{t, z[t]\} \in N, \quad t_0 \leq t \leq \tau. \quad (\text{П.4})$$

Для тех реализаций $\{z[t], u[t], v[t]\}$ ($t_0 \leq t$), для которых не

осуществляется значение τ , удовлетворяющее условиям (П.3), (П.4), часто удобно полагать $\gamma = \infty$.

Игра складывается из двух задач, отражающих противоположные интересы «игроков». В первой задаче первый «игрок» играет активную, а второй — пассивную роль. Во второй — наоборот. Активный «игрок» выбирает позиционный способ управления, указывающий для всякой реализующейся позиции $\{t, z[t]\}$ «управляющую силу», которая должна прилагаться к системе (П.1). Принцип выбора управляющей силы пассивным «игроком» не оговаривается. Задачи «игроков» предварительно можно сформулировать следующим образом.

Задача первого «игрока» — выбрать такой позиционный способ управления U , который при любых возможных действиях второго «игрока», во-первых, обеспечит встречу (П.3) позиции $\{t, z[t]\}$ с множеством M , сохраняя эту позицию в области N , т. е. гарантируя (П.4), и, во-вторых, обеспечит возможно меньшее значение γ .

Задача второго «игрока (противника)» — выбрать такой позиционный способ управления V , который при любых возможных действиях первого «игрока» или воспрепятствует встрече (П.3), (П.4), или, если эта задача неразрешима, обеспечит хотя бы возможно большее значение γ .

2. Стратегии и движения. Функцию f в правой части управления движения (П.1) полагаем непрерывной. Кроме того, при-

$$u \in P, \quad v \in Q, \quad (\text{П.5})$$

где P, Q — ограниченные замкнутые множества, характеризующие возможности управления «игроков».

Будем отождествлять стратегии U первого «игрока» с функциями $u(t, z)$ (обозначение: $U \div u(t, z)$), стесненными в соответствии с (П.5) только включением $u(t, z) \in P$. Пусть дана начальная позиция $\{t_*, z_*\}$ и выбрана стратегия $U \div u(t, z)$. Покроем полуось $t_* \leq t < \infty$ системой Δ полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ($\tau_0 = t_*, i = 0, 1, \dots$). Пусть, далее, $v[t] \in Q, (t \geq t_*)$ — какая-то интегрируемая реализация управления v . Назовем *ломаной Эйлера*

$$z_{\Delta}[t] = z_{\Delta}[t, t_*, z_*, U, v(\cdot)]$$

абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}_{\Delta}[t] = f(t, z_{\Delta}[t], u(\tau_i, z_{\Delta}[\tau_i]), v(t)),$$

$$(\tau_i \leq t < \tau_{i+1}, i = 0, 1, \dots),$$

удовлетворяющее начальному условию $z_{\Delta}[t_*] = z_*$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что выполняется неравенство

$$\|f(t, z, u, v)\| \leq x(1 + \|z\|), \quad x > 0,$$

обеспечивающее продолжительность решения этого уравнения на всю числовую полуось $[t_*, \infty)$.

Движением $z[t] = z[t, t_*, z_*, U]$, порожденным стратегией $U \div u(t, z)$ из позиции $\{t_*, z_*\}$, будем называть всякую функцию $z[t]$, для которой на всяком отрезке $t_* \leq t \leq \theta$ найдется последовательность ломаных $z_{\Delta(k)}[t, t_*, z^{(k)}, U, v^{(k)}[\cdot]]$, равномерно на $[t_*, \theta]$ сходящихся к $z[t]$ при условии $\limsup_{k \rightarrow \infty} (\tau_{i-1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z_*.$$

Стратегия U , вообще говоря, порождает целое множество движений; движение $z[t]$ не обязано быть решением уравнения (П.1).

Аналогично определяется класс стратегий $V \div v(t, z)$ второго «игрока» и порождаемые этими стратегиями движения.

3. Игра сближения — уклонения. Множества M и N из (П.3), (П.4) считаем замкнутыми в пространстве $\{t, z\}$; множества P и Q в условиях (П.5), полагаем ограниченными и замкнутыми. Кроме того, положим в (П.2) $\varphi \equiv \text{const}$. Таким образом, получаем следующие задачи.

Задача 1⁰. Найти стратегию $U \div u(t, z)$, которая обеспечивает встречу

$$\begin{aligned} \{\tau, z[\tau]\} &\in M; \{t, z[t]\} \notin M, \\ \{t, z[t]\} &\in N, \quad t_0 \leq t < \tau \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

для всякого движения $z[t] = z[t, t_0, z_0, U]$.

Пусть $H(N)$ и $G(M)$ — некоторые окрестности множеств N и M в пространстве $\{t, z\}$.

Задача 2⁰. Найти окрестности $H(N)$ и $G(M)$ и стратегию $V \div v(t, z)$, которая исключает встречу

$$\{\tau, z[\tau]\} \in G(M), \quad \{t, z[t]\} \in H(N), \quad t_0 \leq t < \tau \quad (\text{П.7})$$

для всякого движения $z[t] = z[t, t_0, z_0, V]$.

Нас будут интересовать задачи 1⁰, 2⁰, когда множество M лежит в области $t \leq \theta$. В таких случаях говорят о задаче 1⁰ сближения к моменту θ и о задаче 2⁰ уклонения вплоть до момента θ .

4. «Стабильный мост». Для решения задачи 1⁰ о сближении естественно попытаться построить в пространстве $\{t, z\}$ некоторое множество W_u , которое может играть роль «моста», соединяющего начальную позицию $\{t_0, z_0\}$ с целью M и лежащего целиком в N (рис. П.1).

Если такой мост W_u окажется настолько хорошим, что можно, выбирая u , все время при $t \geq t_0$ удерживать на нем позицию $\{t, z[t]\}$ до встречи с M , как бы ни действовал второй «игрок», то цель первого «игрока» достигнута. Итак, для решения задачи 1⁰ о сближении достаточно построить «мост» W_u , который обладал бы следующими свойствами:

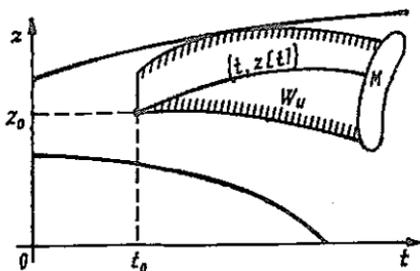


Рис. П.1

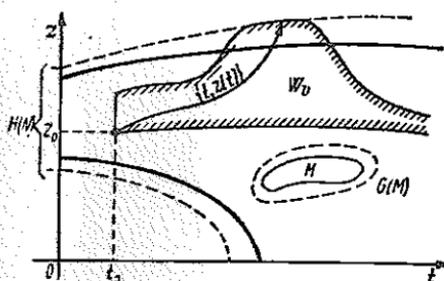


Рис. П.2

ладал бы следующими свой-

- 1_u) содержал начальную позицию $\{t_0, z_0\}$;
- 2_u) в какой-то момент $\theta \geq t_0$ обрывался на M ;
- 3_u) содержался целиком в N ;

4_u) существовала стратегия $U_c \div u_c(t, z)$, которая удерживает всякое движение $z[t] = z[t, t_*, z_*, U_c]$ ($t \geq t_*$) при любом выборе начальных условий $t_* \leq \theta$, $\{t_*, z_*\} \in W_u$ на «мосту» W_u вплоть до встречи с M .

Стратегия U_c , удовлетворяющая условию 4_u), решает задачу 1⁰ и гарантирует сближение с M к моменту θ .

Рассмотрим теперь задачу 2⁰ об уклонении. Для ее решения опять следует построить «мост» W_v (рис. П.2), который

обладал бы следующими свойствами:

- 1_v) содержал начальную позицию $\{t_0, z_0\}$;
- 2_v) не пересекался с $G(M)$;
- 3_v) существовала стратегия $V_c \div v_c(t, z)$, которая удерживает всякое движение $z[t] = z[t, t_*, z_*, V_c]$ при $\{t_*, z_*\} \in W_v$ на «мосту» W_v вплоть до выхода позиции $\{t, z[t]\}$ из области $H(N)$. Здесь $G(M)$, $H(N)$ — некоторые окрестности M и N .

Стратегия V_c , удовлетворяющая 3_v), разрешает задачу 2⁰.

Таким образом, каждая из задач 1⁰, 2⁰ сводится к построению подходящего «моста» вместе со способом управления.

Обратимся сначала к задаче 1⁰ о сближении. Пусть W — некоторое множество в пространстве $\{t, z\}$. Выберем $\{t_*, z_*\} \in W$. Предположим на время, что второй «игрок» на некоторый будущий полуинтервал времени $t_* \leq t < t^*$ выбрал постоянное управление $V \div v(t) = v_*$. Рассмотрим обобщенные движения $z(t)$, $z(t_*) = z_*$, которые определяются как решения $z(t) = z(t, t_*, z_*, V)$ следующего дифференциального уравнения в контингенциях

(дифференциального включения):

$$\dot{z}(t) \in \mathcal{F}_u(t, z(t), v_*), \quad (\text{П.8})$$

где $\mathcal{F}_u(t, z, v_*) = \text{co}\{f \mid f = f(t, z, u, v_*), u \in P\}$.

Положим, что множество W является u -стабильным, если при всяком выборе позиции $\{t_*, z_*\} \in W$ значения $t^* > t_*$ и вектора $v_* \in Q$ среди решений $z(t)$ уравнения (П.8) найдется по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условию

$$\{t^*, z(t^*)\} \in W \quad \text{или} \quad \{\tau^*, z(\tau^*)\} \in M \quad (\text{П.9})$$

при каком-то значении $\tau^* \in [t_*, t^*]$. Из (П.9) вытекает, что на «мосту» W , который не является u -стабильным, нельзя с помощью какой-либо стратегии $U \div u(t, z)$ удержать вплоть до встречи с M все движения $z[t, t_*, z_*, U]$, начинающиеся из всех возможных позиций $\{t_*, z_*\} \in W$. Это доказывает, что множество W , не являющееся u -стабильным, не годится в качестве «моста» W_u для решения задачи 1⁰.

Аналогично можно ввести v -стабильное множество для второго «игрока» в задаче 2⁰ об уклонении и показать, что множество, которое не является v -стабильным, не годится в качестве «моста» W_v для решения задачи 2⁰.

5. Маленькая игра. Зафиксируем какую-нибудь позицию $\{t_*, z_*\}$ и вектор s_* .

Маленькой игрой в позиции $\{t_*, z_*\}$ по вектору s_* назовем следующие две задачи: найти вектор $u^* \in P$, который удовлетворяет условию

$$\max_{v \in Q} \langle s_*, f(t_*, z_*, u^*, v) \rangle = \min_{v \in Q} \max_{u \in P} \langle s_*, f(t_*, z_*, u, v) \rangle, \quad (\text{П.10})$$

и найти вектор $v^* \in Q$, для которого

$$\min_{u \in P} \langle s_*, f(t_*, z_*, u, v^*) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s_*, f(t_*, z_*, u, v) \rangle. \quad (\text{П.11})$$

Далее будем считать, что существует седловая точка (u^*, v^*) , т. е.

$$\begin{aligned} \langle s, f(t, z, u^*, v) \rangle &\leq \langle s, f(t, z, u^*, v^*) \rangle \leq \\ &\leq \langle s, f(t, z, u, v^*) \rangle \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

для всякой позиции $\{t, z\}$ при всяком выборе вектора s .

Заметим, что условие (П.12) обязательно выполняется, если функция f в правой части уравнения (П.1) имеет вид суммы

$$f(t, z, u, v) = f^1(t, z, u) + f^2(t, z, v).$$

6. Экстремальная стратегия. Построим стратегию $U^e \div u^e(t, z)$, которую будем называть *экстремальной* к W -замкнутому множеству в пространстве позиций $\{t, z\}$.

Пусть $\{t_*, z_*\}$ — какая-то позиция. Если гиперплоскость $\Gamma_{t_*} = \{\{t, z\} | t = t_*\}$ не пересекается с W , то в качестве $u^e(t_*, z_*)$ можно выбрать любой вектор $u \in P$. Если же Γ_{t_*} пересекается с W , то выберем позицию $\{t_*, w_*\} \in W$, ближайшую в евклидовой метрике к позиции $\{t_*, z_*\}$. Теперь в качестве $u^e(t_*, z_*)$ следует взять любое из решений u^* для маленькой игры (П.10) в позиции $\{t_*, z_*\}$ по вектору $s_* = z_* - w_*$ (экстремальное прицеливание).

Аналогично определяется стратегия $V^e \div v^e(t, z)$, экстремальная множеству W , которая назначает в качестве $v^e(t, z)$ максимальный вектор v^* для маленькой игры (П.11) в позиции $\{t_*, z_*\}$ по вектору $s_* = w_* - z_*$.

Можно показать, что стратегия $U^e \div u^e(t, z)$, экстремальная к u -стабильному замкнутому множеству W , сохраняет на W позицию $\{t, z[t]\}$ для всякого начавшегося на нем движения $z[t, t_0, z_0, U^e]$ вплоть до встречи позиции с множеством M . Точно так же стратегия $V^e \div v^e(t, z)$, экстремальная к v -стабильному замкнутому множеству W , сохраняет на W позицию $\{t, z[t]\}$ для всякого начавшегося на нем движения $z[t, t_0, z_0, V^e]$, вплоть до выхода этой позиции из окрестности $H(N)$ множества N . Иначе говоря, экстремальные стратегии U^e и V^e образуют вокруг стабильных мостов барьеры, которые препятствуют соскальзыванию с них движений вплоть до того момента, когда будет достигнута цель первого или второго игрока соответственно.

7. Максимальный стабильный «мост». Предельно широкий u -стабильный «мост» W , который удовлетворяет условиям $2_u) - 4_u)$, построим следующим образом.

При данном фиксированном значении θ «уберем» из пространства $\{t, z\}$ все те позиции $\{t_*, z_*\} (t_* \leq \theta)$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача об уклонении хотя бы от одной окрестности $G(M)$ множества M внутри хотя бы одной окрестности $H(N)$ множества N на отрезке $[t_*, \theta]$. Выброшенные позиции $\{t_*, z_*\}$ образуют в каждой гиперплоскости Γ_{t_*} открытое множество.

Обозначим W^θ множество всех оставшихся позиций. Всякий u -стабильный мост W , лежащий целиком в N и обрывающийся на M при $t = \theta$, должен содержаться в W^θ .

Важный факт состоит в том, что все множество W^θ и составляет нужный максимальный u -стабильный мост W_u^θ , целиком лежащий в N и обрывающийся на M при $t = \theta$.

Рассмотрим теперь задачу уклонения от $G(M)$ внутри $H(N)$ на отрезке $[t_0, \theta]$. Необходимый максимальный v -стабильный «мост» W_v^θ , который удовлетворяет условиям $2_v)$ и $3_v)$, построим следующим образом.

При данном фиксированном θ «выбросим» из пространства $\{t, z\}$ все те позиции $\{t_*, z_*\} (t_* \leq \theta)$, для каждой из которых, как

для начальной, разрешима задача сближения к моменту θ с множеством $G^*(M)$ внутри множества $H^*(N)$, по крайней мере, при одном выборе окрестностей $G^*(M)$ и $H^*(N)$, вложенных вместе со своими замыканиями $\bar{G}^*(M)$ и $\bar{H}^*(N)$ в окрестности $G(M)$ и $H(N)$.

Множество всех оставшихся позиций обозначим символом W^θ . Всякий u -стабильный мост W , не пересекающийся с $G(M)$, должен содержаться в W^θ . Важно, что все множество W^θ и составляет нужный u -стабильный мост W^θ .

8. Альтернатива.

Теорема. Пусть для всех возможных $\{t, z\}$, s выполнено условие (П.12), дана начальная позиция $\{t_0, z_0\}$ и выбрано число $\theta \geq t_0$. Тогда либо найдется стратегия $U_c \div u_c(t, z)$, которая для всех движений $z[t] = z[t, t_0, z_0, U_c]$ обеспечит встречу

$$\{\tau, z[\tau]\} \in M$$

внутри N при условии $\tau \leq \theta$, либо найдется число $\epsilon_\theta > 0$ и стратегия $V_c \div v_c(t, z)$ такие, что для всех движений $z[t] = z[t, t_0, z_0, V_c]$ будет обеспечено уклонение вплоть до момента θ от ϵ_θ -окрестности $M^{(\epsilon_\theta)}$ множества M внутри ϵ_θ -окрестности $N^{(\epsilon_\theta)}$ множества N .

Из теоремы вытекает, что при всяком выборе θ все полупространство $t \leq \theta$ разбивается на две части: W_u^θ и E^θ . Часть W_u^θ складывается из всех позиций $\{t, z\}$, для которых, как для начальных, разрешима задача сближения с M внутри N к моменту θ . Множество W_u^θ является множеством замкнутым. Часть E^θ складывается из всех позиций $\{t, z\}$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача уклонения от некоторой ϵ -окрестности $M^{(\epsilon)}$ множества M внутри подходящей ϵ -окрестности $N^{(\epsilon)}$ множества N вплоть до момента θ . Множество E^θ является открытым в полупространстве $t \leq \theta$. Оно складывается из множеств $W_v^{[\theta, \epsilon]}$ ($\epsilon > 0$), каждое из которых является замкнутым в полупространстве $t \leq \theta$ множеством позиций $\{t, z\}$, для которых, как для начальных, разрешима задача уклонения от $M^{(\epsilon)}$ внутри $N^{(\epsilon)}$ вплоть до момента θ .

Следствие. Для всякой начальной позиции $\{t_0, z_0\}$ справедливо одно из двух утверждений: либо найдутся $\theta \geq t_0$ и стратегия $U_c \div u_c(t, z)$, которая для всех движений $z[t] = z[t, t_0, z_0, U_c]$ обеспечит встречу (П.6) внутри N при условии $\tau \leq \theta$; либо при всяком $\theta \geq t_0$ найдутся число $\epsilon_\theta > 0$ и стратегия $V_c \div v_c(t, z)$ такая, что для всех движений $z[t] = z[t, t_0, z_0, V_c]$ будет обеспечено уклонение (П.7) вплоть до момента θ от ϵ_θ -окрестности множества M внутри ϵ_θ -окрестности множества N .

Стратегии U_c и V_c , о которой идет речь в теореме об альтернативе, можно строить как экстремальные стратегии U^θ и V^θ к соответствующим стабильным мостам W_u^θ и $W_v^{[\theta, \epsilon]}$.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

E^n — n -мерное евклидово пространство

$x = (x^1, \dots, x^n)$ — вектор из E^n , $|x|$ — его евклидова норма, $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x, y из E^n .

$$\text{Arg max}_{x \in X} f(x) = \{x \in X \mid f(x) = \max_{y \in X} f(y)\}$$

$\arg \max_{x \in X} f(x)$ — точка множества $\text{Arg max}_{x \in X} f(x)$

$R \subseteq X \times X$ — бинарное отношение на множестве X

\bar{R} — дополнение бинарного отношения на X

R^{-1} — обратное к R отношение

R^+ — транзитивное замыкание отношения R

$I_R = R \cap R^{-1}$ — эквивалентность, порожденная квазипорядком R

Y_R/I_R — множество классов I_R -эквивалентности, на которые распадается множество Y

$xRy \rightarrow xGy$, или $R \subseteq G$ -отношение R является подотношением отношения G

$\text{Max}(X, R)$ — множество максимальных элементов (ядро) отношения R на X

$W(x) = (W^1(x), \dots, W^m(x))$ — векторный критерий

$P(X, W)$ — множество эффективных точек (множество Парето) на X по критерию $W(x)$

$S(X, W)$ — множество полужффективных точек (слабоэффективных, оптимальных по Слейтеру) на X по критерию $W(x)$

Σ — единичная сфера в E^n

$|X|$ — число элементов (мощность) конечного множества X

$\text{co } X$ — замыкание выпуклой оболочки множества X

$\delta(s, X)$, $s \in \Sigma$ — опорная функция множества X

▲ — конец доказательства

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., Мир, 1971.
2. *Краснощевков П. С., Петров А. А., Федоров В. В.* Информатика и проектирование. М., Знание, 1986 (сер. «Математика, кибернетика», № 10).
3. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., Наука, 1970.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974.
5. *Макаров И. М.* и др. Теория выбора и принятия решений. М., Наука, 1982.
6. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М., Наука, 1981.
7. *Нильсон Н.* Принципы искусственного интеллекта. М., Радио и связь, 1985.
8. *Поктрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.
9. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Вычислительный эксперимент. М.: Знание, 1983 (сер. «Математика, кибернетика», № 5).
10. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., Наука, 1983.
11. *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Вводные лекции по прикладной математике. М., Наука, 1984.

Дополнительная

12. *Батищев Д. И.* Методы оптимального проектирования. М., Радио и связь, 1984.
13. Гибкое автоматическое производство/Под общ. ред. С. А. Майорова, Г. В. Орловского, С. Н. Халкинова. Л., Машиностроение, 1985.
14. *Гуд Г. Х., Макол Р. Э.* Системотехника. Введение в проектирование больших систем. М., Сов. радио, 1962.
15. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств. М., Сов. радио, 1975.
16. *Дворянкин А. М., Половинкин А. И., Соболев А. И.* Методы синтеза технических решений. М., Наука, 1977.
17. *Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., Наука, 1986.
18. *Жак С. В.* Оптимизация проектных решений в машиностроении. Изд-во Ростовского ун-та, 1982.
19. *Журавлев Ю. П.* Системное проектирование управляющих ЦВМ. М., Наука, 1974.
20. *Ильичев А. В., Волков В. Д., Грущанский В. А.* Эффективность проектируемых элементов сложных систем. М., Высшая школа, 1982.
21. *Левин Г. М., Танаев В. С.* Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений. Минск, Наука и техника, 1978.
22. *Михалевич В. С., Волкович В. Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., Наука, 1982.
23. *Норенков И. П.* Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. М., Высшая школа, 1980.
24. *Нуждихин В. Г., Беседин А. Л.* Системы автоматизированного проектирования: создание и внедрение. М., Знание, 1984 (сер. «Наука и техника управления», № 8).
25. *Петренко А. И., Семенов О. И.* Основы построения систем автоматизированного проектирования. Киев, Вища школа, 1984.
26. *Поспелов Г. С., Ириков В. А.* Программно-целевое планирование и управление. М., Сов. радио, 1976.

27. Системы автоматизированного проектирования/Под ред. Дж. Адлана. М., Наука, 1985.
28. Энкарначчо Ж., Шлехтендаль Д. Автоматизированное проектирование. Основные понятия и архитектура. М., Радио и связь, 1986.
29. Айзек Р. Дифференциальные игры. М., Мир, 1967.
30. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М., Наука, 1971.
31. Емельянов С. В., Ларицев О. И. Многокритериальные методы принятия решений. М., Знание, 1985 (сер. «Математика, кибернетика». № 10).
32. Егер С. М., Лисейцев Н. К., Самойлович О. С. Основы автоматизированного проектирования самолетов. М., Машиностроение, 1986.
33. Капустян В. М., Махотенко Ю. А. Конструктору о конструировании атомной техники. М., Автоиздат, 1981.
34. Клячкин А. Л. Теория воздушно-реактивных двигателей. М., Машиностроение, 1969.
35. Лещинер Л. Б., Ульянов И. Е. Проектирование топливных систем самолетов. М., Машиностроение, 1975.
36. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., Наука, 1972.
37. Мишин В. П., Осин М. И. Введение в машинное проектирование летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1978.
38. Моцкус И. Б. Многоэкстремальные задачи в проектировании. М., Наука, 1967.
39. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1969.
40. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., Наука, 1982.
41. Проектирование самолетов/Под ред. С. М. Егера. М., Машиностроение, 1983.
42. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир, 1980.
43. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М., Наука, 1981.
44. Современное состояние теории исследования операций. М., Наука, 1979.
45. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М., Наука, 1978.
46. Сухарев А. Г. Об оптимальных методах решения многокритериальных задач//Изв. АН СССР, сер. «Техническая кибернетика», 1982. № 3. с. 67—73.
47. Сухарев А. Г., Федоров В. В. Об оптимальном отыскании максимума функции минимума при связанных переменных//Вестник Моск. ун-та, сер. 15, «Вычислительная математика и кибернетика», 1981, № 1, с. 45—50.
48. Терзян А. А. Автоматизированное проектирование электрических машин. М., Энергоатомиздат, 1983.
49. Уинстон П. Искусственный интеллект. М., Мир, 1980.
50. Шейнин В. М., Козловский В. И. Весовое проектирование и эффективность пассажирских самолетов. М., Машиностроение, 1977. Т. 1.