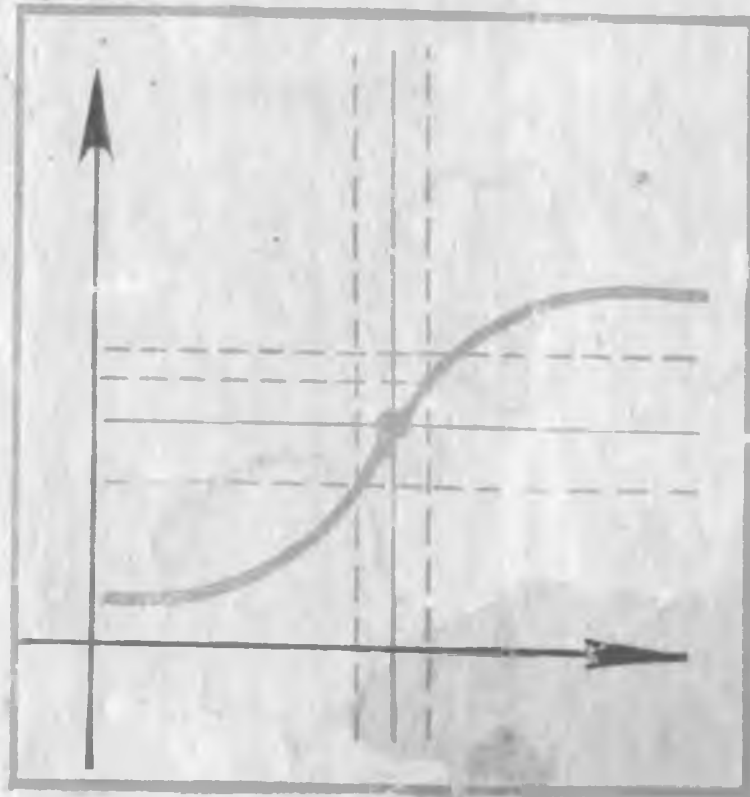


МАТЕМАТИКА КУРСИ

ТЕХНИКУМЛАР

УЧУН

I
ҚИСМ



АВТОРЛАР КОЛЛЕКТИВИ:

В. Н. МАТВЕЕВ, А. А. МАТЮШКИН - ГЕРКЕ,
Н. В. БОГОМОЛОВ, С. М. КОЗЛОВСКИЙ

Ушбу китоб техникумлар учун 1974 йилда тасдиқланган программага мувофиқ ленинградлик бир группа авторлар томонидан ёзилган икки қисмдан иборат «Техникумлар учун математика курси»нинг биринчи қисмидир.

Китоб СССР олий ва махсус ўрта таълим вазирлигининг махсус ўрта таълим бўйича Илмий - методик кабинети тақлифига мувофиқ экспериментал ўқув қўлланма сифатида тайёрланган.

Мазкур китоб ва унинг таржимаси туғрисидаги ўз тақлиф ва иштакларингизни махсус ўрта таълим бўйича Илмий-методика кабинетига (адреси: 111024, Москва, Е - 24, 3 - я Кабельная ул, д.1) ва «Ўқитувчи» нашриётининг физика - математика редакциясига, (700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30) юборишингизни сўраймиз.

М 20203 — 205
353(06) — 78 138 — 78

© Главная редакция Физико-математической литературы, Издательства «Наука», 1976

© «Ўқитувчи» нашриёти, ўзбекчага таржима, 1978

Мамлакатимизда махсус ўрта таълимнинг бундан бугунги ривожига барча фанларни ўқитишни анча яхшилаш ва такомиллаштиришни тақозо этади. Унинг мазмуни ва методлари фан ва техника ривожининг ҳозирги замон кўлами ва келажигига мувофиқ бўлиши лозим. Бу нарсани маълум даражада математика ўқитишга ҳам тааллуқлидир.

Техникумларда математика ўқитиш ўқувчиларнинг математикавий билимларни техникавий масалаларни ечиш востаси сифатида эгаллашларига қаратилган бўлиши лозим. Математика ўқитиш математика маданиятини ривожлантириш билан бир қаторда ўқувчиларнинг илмий ва мантикий фикрлаш қобилиятларини ўстириш вазифасини ҳам кўзда тутади.

Ҳавола қилинаётган «Техникумлар учун математика курси» янги программага мувофиқ ёзилган дарсликдир.

Дарсликни ёзишда математика ўқитишнинг умумий мақсадлари: тадқиқотларнинг математик методларини эгаллаш; математик тушунчалар тилини эгаллаш; маълум кўламда математик маълумотларга эга бўлиш кўзда тутилди. Айтилган мақсадларга мувофиқ авторлар олдида турган асосий вазифалардан бири программа материалини иложи борича ихчам баён қилишдан иборат эди. Бу вазифанинг ҳал этилишига мактаб математика программасига асосланган тушунчалар назарияси, математик логика ва вектор ҳисоб элементларини ўз вақтида киритилиши ёрдам берди. Таърифлар ва формулировкаларнинг баён қилиниши мантиқи ва аниқлигини бузмасдан, бизнингча, материалнинг тақсимланиши ва баён қилиниши услубларини рационаллаштириш ҳисобига китоб ҳажмини ихчамлаштиришга эришдик, бунда информация миқдорини камайтирмасдан, балки баъзи ўринларда мавжуд дарслик ва қўлланмаларга қараганда орттирилди ҳам.

Ҳозирги замон мутахассиси олдида қўйиладиган асосий талаблардан бири шуки, у ўз билимларини мустақил тулдир олиши, заруратга қараб эса мутлақо янги бўлимлар ва фанларни эгаллай олишидир. Мутахассисларни ўқитишнинг мазмуни ва методлари энг аввало уларни ана шундай фаолиятга мумкин қадар максимал тайёрлаши лозим.

Ҳозир асосий инженерлик - техникавий масалалар юқори илмий савияда, чуқур ривожланган математик аппарат ёрдамида ҳал этилади. Бунда қўлланиладиган математик мо-

делларнинг аксарияти кўп ўлчовли моделлардир. Ҳозирги замон техникасига оид адабиётларида тегишли математик тил: векторлар ва улардан олинган функциялар, вектор қийматли функциялар, матрицалар, уларга таянадиган тушунчаларнинг кенг қўлланилиши ана шу шарт билан белгиланади.

Турли - туман технологик процессларни текшириш шунинг кўрсатадики, қатор ҳолларда детерминлаштирилган моделлар анча қўпол бўлиб чиқади, математик тавсифлашда керакли аниқлик даражасига эришиш учун эса, кўп сонли параметрларнинг контрол қилиб бўлмайдиган функциясини тасодифий ўзгаришини ҳисобга олиш талаб қилинади. Эҳтимоллар назарияси, математик статистика ва уларга қўшни фанлар ролининг ортиши ана шу билан изоҳланади.

Ҳозирги замон илмий-техникавий тараққиёти мутахассисларнинг математик тайёргарлигини такомиллаштириш ва кучайтиришни талаб этаётганлигини эътиборга олиб, авторлар ҳозирги вақтда киритилаётган программада мажбурий материал сифатида кўзда тутилаётган бўлимлар ва темалар билан бир қаторда, шунингдек, бундай масалалар доирасидан четга чиқадиган баъзи масалаларни ҳам кўриб чиқишни мақсадга мувофиқ деб топдилар, бундай қилишдан мақсад, бу масалалар билан курснинг традицион қисми орасидаги боғланишни белгилаш, бу масалаларни баён қилишда ўқитувчилар олдиндан тайёргарлик кўришлари учун имкон беришдан иборат.

Дарсликда программага мувофиқ икки йил давомида 380-420 ўқув соати ҳажмида ўрганишга мўлжалланган математика курси баён қилинади. Дарсликдан, шунингдек, математика курсини ўн йиллик таълим базасида ўқитишда фойдаланиш мумкин.

Дарслик 21 бобдан иборат. Ҳар бир бобда «Такрорлаш учун саволлар ва машқлар» шунингдек, уларга доир «Ечилишлар, кўрсатмалар ва жавоблар» бор, бу нарса математика ўқитишнинг бутун процессини ушбу дарсликдан фойдаланиб, қўшимча равишда бирор - бир масалалар тўпламига мурожаат қилмасдан ташкил қилишга имкон беради.

1-БОБ

СОНЛИ ТЎПЛАМЛАР

1. 1-§. Ҳақиқий сонлар

1. 1. 1. Рационал сонлар тўплами. Математиканинг асосий тушунчаларидан бири сон тушунчасидир. Бу тушунча узоқ ривожланиш йўлини босиб ўтиб, янгича мазмун билан бўйиди. Бу параграфда сон тушунчаси ривожланишининг қисқача обзори берамиз.

Практикада натурал сонлар тарихан биринчи бўлиб юзага келди ва фанга киритилди. Натурал сонлар алоҳида, фанда айтилишича, дискрет буюмлар миқдорини (сонини) масалан, жамоадаги кишилар сонини, қўлдаги бармоқлар сонини санаш учун воситадир.

Натурал сонлар чексиз тўплами ташкил этади, уни N ҳарфи билан белгилаш қабул қилинган:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Буюмларни санаш учун яроқли бўлган натурал сонлар амалда бошқа мақсадлар, жумладан, кесмаларнинг узунликларини ва физикавий катталикларни ўлчаш учун кифоя қилмай қолди. Бирнинг улушлари ва бу улушлари миқдорини киритиш зарурати юзага келди. Масалан, бирор катталикни n та бўлакка бўлиб, бу бўлаклардан m таси олинган бўлса, у ҳолда янги, *каср сон* деб аталадиган $\frac{m}{n}$ сон киритилади. Янги сон (эндиликда бизга маълум бўлган) m ва n натурал сонлар жуфтнинг тайин комбинацияси эканлигини айтиб ўтамиз.

Кейинчалик, ўлчашнинг ана шу эҳтиёжлари танлаб олинган саноқ боши нуқтасидан икки қарама-қарши томонга ўзгариши мумкин бўлган миқдорларни ўлчаш имконига эга бўлиш — маънавий сонларни киритиш зарурати олиб келди: жумладан, саноқ боши сифатида денгиз сатҳи олинадиган бўлса, у ҳолда тоғнинг ҳолатини бел-

гилаш учун мусбат сон — тоғнинг баландлиги, денгизнинг чуқурлиги ҳолатини белгилаш учун эса манфий сон олинади. Пружинага таъсир этаётган кучларни ўлчашда пружинани чузувчи кучларни мусбат деб ҳисоблаш мақсадга мувофиқ, у ҳолда пружинани қисувчи кучлар манфий бўлади.

Шундай қилиб, ҳар бир натурал ёки каср сонга *манфий сон* мос қўйилади. Агар (мусбат) сонни a (ёки $+a$) ҳарфи билан ёзадиган бўлсак, у ҳолда унга мос «қарама-қарши» (манфий) сон *сундай* ёзилади: $-a$.

Юқорида кўрсатилган барча сонлар қаторига 0 сони киритилади, у ўлчашда бошланғич нуқта, белгига (ёки санашда буюмнинг йўқлигига) мос келади.

Мумкин бўлган барча мусбат ва манфий бутун ва каср сонлар ҳамда 0 сонидан иборат тўплам *рационал сонлар тўплами* дейилади ва Q ҳарфи билан белгиланади.

Натурал сонларга қарама-қарши бўлган манфий сонлар *бутун манфий сонлар* дейилади ва улар натурал сонлар ҳамда 0 сони билан биргаликда *бутун сонлар* тўпламини ташкил қилади; бу тўплам Z ҳарфи билан белгиланади.

Бутун сонлар каср кўринишида ёзилиши ҳам мумкин, масалан,

$$5 = \frac{5}{1}, \quad -3 = \frac{-3}{1}.$$

Шундай қилиб, ҳар қандай рационал сон $\frac{m}{n}$ кўринишида тасвирланади, бу ерда m — исталган бутун сон ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), n — натурал сон.

Равшанки, N тўплам Z га, Z тўплам эса Q га киради:

$$N \subset Z \subset Q$$

(бу ерда $\subset$ — бир тўпламнинг бошқа тўпламга кириш белгиси; $A \subset B$ бундай ўқилади: A тўплам B тўпламга киради ёки A тўплам B тўпламнинг *қисм тўплами*), демак, Z тўплам N тўпламнинг кенгайтмаси, Q эса Z тўпламнинг, ва демак, N тўпламнинг кенгайтмасидир.

Ўқувчининг диққатини алоҳида шунга жалб қиламизки, сон тушунчаси дейилганда соннинг фақат мавжудлиги эмас, балки сонлар устида амалларнинг қонунлари ва улар орасидаги баъзи муносабатлар ҳам тушунилади. Бунда асосий амаллар сонларни «қўшиш» ва «кўпайтириш», улар орасидаги асосий муносабат эса сонларни таққослаш,

яъни иккита сондан қайси бири кичик (катта) эканлигини (бундай таққослаш, яъни, бошқача айтганда, тартибланганлик мумкин бўлса) аниқлашдир.

Рационал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳамда бу сонлар учун таққослаш муносабати қуйидаги асосий қонунларга (хоссаларга) бўйсунди:

1. $a + b = b + a$,
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$,
3. $a + 0 = a$,
4. $a + (-a) = 0$,
5. $a \cdot b = b \cdot a$,
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
7. $a \cdot 1 = a$,
8. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$),
9. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
10. $a < b$ ва $b < c \Rightarrow a < c$,
11. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,
12. $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ($c > 0$) ва $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ ($c < 0$).

Бу ерда a, b, c — агар аксинчаси айтилмаган бўлса, исталган сонлар, 0 ва 1 орқали ягона ноль ва бир сонлари белгиланган, улар 3- ва 7-хоссаларга (исталган a учун) ягона қарам-қарши сон ($-a$) мавжуд, исталган $a \neq 0$ учун $\frac{1}{a}$ тесқари сон (y ҳам ягона) мавжуд.

Рационал сонларнинг юқорида кўрсатилган хоссалари рационал сонлар устида аввалдан маълум бўлган арифметик амалларни асослашга имкон беради

1—4-хоссалар қўшиш қонунларидир; 1-хосса *ўрин алмаштириш қонун*и ёки *коммутативлик қонун*и деган ном билан юритилади; 2-хосса *группалаш қонун*и ёки *ассоциативлик қонун*и ифодалайди; кўпайтиришнинг 5—6-қонунлари ҳам шуларга ўхшаш; 9-хосса қўшиш амалини кўпайтириш амали билан боғлайди ва *кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот ёки дистрибутивлик қонун*и дейилади; 10—12-хоссалар сонларнинг *тартибланганлик* (таққослаш) хоссаларидир. Бунда 10-хосса *транзитивлик хоссаси* дейилади, 11 ва 12-хоссалар эса *тэнгсизликларни кўпайтириш* ва уларни нолдан фарқли сонга кўпайтириш қондаларини ифодалайди.

12-хоссадан

$$a \cdot 0 = 0$$

эканлигини эътиборга олинадиган бўлса, рационал сонлар учун маълум бўлган ушбу ишоралар қондалари келиб чиқади:

$$(+)(+) = +, (+)(-) = -, (-)(-) = +.$$

Рационал сонлар тўпламида

$$b + x = a \text{ ва } bx = a \quad (b \neq 0)$$

кўринишдаги тенгламалар ечилишга эга. Бундай ечилишга эгалик исталган тайин b сон учун қарама-қарши сон ва исталган $b \neq 0$ сон учун тескари сон мавжудлиги билан таъминланади.

Алгебрада 1—9-хоссаларга бўйсунадиган амаллар бажариш мумкин бўлган ҳар қандай сонлар тўплами *майдон* дейилади.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўплами *майдондир*. Бунда ҳар бир рационал сон бу майдоннинг *элементи* дейилади.

1—2-хоссаларни қаноатлантирадиган тўплам эса *тартибланган майдон* дейилади.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўплами тартибланган сонли тўламдир.

Гировардида рационал сонлар тўпламининг *Архимед хоссаси* деб аталадиган муҳим бир хоссасини айтиб ўтамиз. У ушбу даъводан иборат: исталган a рационал сон учун шундай n натурал сон мавжудки, $n > a$ бўлади. Бу хоссадан исталган иккита a (бунда $a > 0$) ва b рационал сонлар учун шундай n натурал сон мавжудки, $na > b$ бўлиши келиб чиқади. (Нима учун? Бу фактни геометрик талқин этинг.)

Мактаб математика курсидан маълумки, исталган мусбат рационал сон $\frac{m}{n}$ каср (бир жуфт сон) кўринишида тасвирланишидан ташқари ўнли каср кўринишида ҳам тасвирланиши мумкин; шу билан бирга баъзи сонлар чекли ўнли каср кўринишида ёзилиши ҳам мумкин, масалан, $\frac{3}{4} = 0,75$, баъзи сонларни эса бундай кўринишда ёзиб бўлмайди, бу нарса махражнинг тузилишига боғлиқ бўлиб, бу ҳолда чексиз даврий каср кўринишидаги ёзув юзага келади, масалан,

$$\frac{1}{6} = 0,1666 \dots = 0,1(6).$$

Шундай қилиб, ҳар қандай рационал сон бутун сонларнинг $\frac{m}{n}$ нисбати кўринишида тасвирланиши мумкинлиги билан бир қаторда, бунга тенг кучли бўлган бундай таърифни ҳам беришимиз мумкин: ҳар қандай рационал сон чексиз даврий ўнли каср кўринишида тасвирланиши мумкин.

Эслатма. Биз бунда

$$0,75 = 0,75(0)$$

деб ёзишимиз лозим, бинобарин, $0,74(9)$ сонини $0,75(0)$ га тенг деб ҳисоблашимиз мумкин.

1. 1. 2. Рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурлиги. Практика эҳтиёжлари, шунингдек, математиканинг ўзининг эҳтиёжлари, унинг мантиқий ривожланиши рационал сонлар тўплами турли масалаларни ҳал этишда етарли эмаслигини кўрсатади.

Масалан, бундай масалани қарайлик: томони қабул қилинган ўлчов бирлигида 1 сонига тенг бўлган квадрат берилган: бу квадрат диагонаlining узунлигини ифодаловчи x сонни топиш лозим. Пифагор теоремасига мувофиқ,

$$x^2 = 2 \text{ ёки } x = \sqrt{2}.$$

Шундай қилиб, масала квадрат тенгламани ечишга, ёки бошқача айтганда $\sqrt{2}$ символини яроқли рационал сон востасида ифодалашга (ихтёримизда бошқа сонлар ҳозирча йўқ!) келтирилди.

Лекин бутун сонлар орасида квадрати 2 га тенг сонни топа олмаимиз, чунки

$$1^2 < 2, \quad 2^2 > 2.$$

Демак, изланаётган сонни касрлар орасидан топишга уриниб кўриш, яъни

$$x = \frac{m}{n}$$

деб олиш лозим (m ва n сонлар ўзаро tub албатта, акс ҳолда уларни қисқартирган бўлар эдик).

Бу масалани текшириш принципиал жиҳатдан муҳим теоремага олиб келади.

1. 1-теорема. *Квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас.*

Ҳақиқатан, айтайлик,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

тенглик ўринли бўлсин; бу ерда m ва n — ўзаро туб сонлар. У ҳолда $m^2 = 2n^2$. Бундан m^2 натурал сон жуфт эканлиги келиб чиқади, бу ҳолда эса m соннинг ўзи ҳам жуфт (нега?), бинобарин,

$$m = 2p,$$

бу ерда p — натурал сон. Энди

$$4p^2 = 2n^2$$

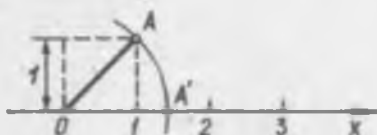
га эга бўламиз, бундан $n^2 = 2p^2$ эканлиги, яъни n^2 сон жуфтлиги, яъни n соннинг ўзи ҳам жуфтлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, m ва n сонларнинг иккаласи ҳам жуфт, яъни улар ўзаро туб эмас деган хулосага келдик, бу эса улар ўзаро туб деган дастлабки фаразimizга зиддир. Теорема исбот қилинди.

Бу теоремадан квадратнинг диагоналига ҳеч бир сонни унинг узунлиги сифатида мос қўйиш мумкин эмаслиги келиб чиқади, бу эса исталган кесма узунликка эгаллиги ҳақидаги интуитив тасаввурimizга зиддир.

Шунингдек, кўп учрайдиган ва π орқали белгиланган айлана узунлигининг диаметрига нисбати ҳам рационал сон орқали тасвирланиши мумкин эмаслиги маълум.

Агар рационал сонларни сон ўқида нуқталар билан тасвирлайдиган бўлсак, у ҳолда ҳар бир рационал сонга битта ва фақат битта нуқта мос келади.



1. 1-расм

Энди сон ўқи кесмасида томони 1 га тенг квадрат ясаймиз (1. 1-расм).

Циркулни квадратнинг диагоналига тенг қилиб очиб, сон ўқида нуқта белгилаймиз. Квадрат диагоналининг узунлиги ҳеч бир рационал сон билан тасвирланмаслигини

кўрсатганимизга биноан, ўқнинг белгиланган бу нуқтасига ҳеч қандай рационал сон мос келмайди. Демак, сон ўқи рационал сонларнинг ўзи билан тўлиқ қопланмайди.

Энди кўриб турибмизки, рационал сонлар тўплами практика эҳтиёжларини, геометрик катталикларни ўлчаш эҳтиёжларини ва тенгламаларини, масалан,

$$x^n = a \quad (1. 1)$$

(бу ерда n ва a — рационал мусбат сонлар) типдаги тенгламаларни ечиш эҳтиёжларини тўла қондира олмайди.

1. 1. 3. **Ҳақиқий сонлар тўплами.** Рационал сонлар тўламининг етарли эмаслиги масаласини ҳал этиш вазифаси энди қуйидагидан иборат эканлиги кўриниб турибди: кенгайтирилган, шундай янги сонлар тўламинини яратиш керакки, бу тўпланда сон ўқининг ҳар бир нуқғаси учун сон қиймат топилсин ва бу тўпланда, масалан, (1. 1) кўринишдаги исталган тенглама ечилишга эга бўлсин.

Янги тўплам қисм тўплам сифатида ўз ичига рационал сонлар тўплами Q ни олиши ҳамда асосий амаллар ва муносабатлар — қўшиш, кўпайтириш, сонларни таққослашга имкон бериши лозим. Бунда янги тўпландаги амалларнинг қонунлари Q тўпламга нисбатан ҳам қўлланиладиган бўлиб, улар бу тўплам учун илгари аниқланган ўша натижаларга олиб келиши лозим (перманентлик принципи).

1. 1-таъриф. *Ҳақиқий сон деб чексиз ўнли касрга айтилади.*

1.1-мисол, $x_1 = 0,1212212221 \dots$

Бу ерда кўп нуқта касрнинг чексизлигини, ёзув структураси эса такрорланиш йўқлигини, яъни каср даврий эмаслигини билдиради.

1.2-мисол, $x_2 = 130, 535353 \dots = 130, (53)$.

Бу чексиз ўнли каср даврийдир.

1.3-мисол, $x_3 = \sqrt{2} = 1,41412 \dots$

Ўнг томонда даврий бўлмаган ўнли каср турибди.

1.4-мисол, $x_4 = \pi = 3,14159 \dots$

π сони ҳам чексиз даврий бўлмаган ўнли каср билан тасвирланади.

Мусбат ҳақиқий сонлар учун қуйидаги амаллар ва таққослаш қоидалари аниқланади.

1. Даврида тўққиз сони бўлмаган¹

$$\alpha_1 = a, a_1 a_2 \dots a_k \dots \text{ ва } \alpha_2 = b, b_1 b_2 \dots b_k \dots$$

сонлар

$$a = b \text{ ва } a_k = b_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

бўлганда ва фақат шундагина *тенгадир*.

2. α_1 сон α_2 сондан

¹ Даврида 9 сони бўлган сонларни уларга тенг ва даврида ноль бўлган сонларга алмаштирилади (жумладан, қаранг: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., Гостехиздат, т. 1., 1948, 25—26-бет).

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

тенглик ўринли бўлсин; бу ерда m ва n — ўзаро туб сонлар. У ҳолда $m^2 = 2n^2$, бундан m^2 натурал сон жуфт эканлиги келиб чиқади, бу ҳолда эса m соннинг ўзи ҳам жуфт (нега?), бинобарин,

$$m = 2p,$$

бу ерда p — натурал сон. Энди

$$4p^2 = 2n^2$$

га эга бўламиз, бундан $n^2 = 2p^2$ эканлиги, яъни n^2 сон жуфтлиги, яъни n соннинг ўзи ҳам жуфтлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, m ва n сонларнинг иккаласи ҳам жуфт, яъни улар ўзаро туб эмас деган хулосага келдик, бу эса улар ўзаро туб деган дастлабки фаразимизга зиддир. Теорема исбот қилинди.

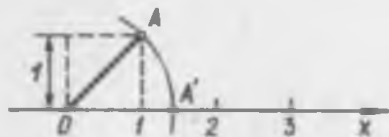
Бу теоремадан квадратнинг диагонаliga ҳеч бир сонни унинг узунлиги сифатида мос қўйиш мумкин эмаслиги келиб чиқади, бу эса исталган кесма узунликка эгаллиги ҳақидаги интуитив тасаввуримизга зиддир.

Шунингдек, қўп учрайдиган ва π орқали белгиланган айлана узунлигининг диаметрига нисбати ҳам рационал сон орқали тасвирланиши мумкин эмаслиги маълум.

Агар рационал сонларни сон ўқида нуқталар билан тасвирлайдиган бўлсак, у ҳолда ҳар бир рационал сонга битта ва фақат битта нуқта мос келади.

Энди сон ўқи кесмасида томони 1 га тенг квадрат ясаймиз (1. 1-расм).

Циркулни квадратнинг диагонаliga тенг қилиб очиб, сон ўқида нуқта белгилаймиз. Квадрат диагоналининг узунлиги ҳеч бир рационал сон билан тасвирланмаслигини



1. 1-расм

кўрсатганимизга биноан, ўқнинг белгиланган бу нуқтасига ҳеч қандай рационал сон мос келмайди. Демак, сон ўқи рационал сонларнинг ўзи билан тўлиқ қопланмайди.

Энди кўриб турибмизки, рационал сонлар тўплами практика эҳтиёжларини, геометрик катталикларни ўлчаш эҳтиёжларини ва тенгламаларини, масалан,

$$x^n = a \quad (1. 1)$$

(бу ерда n ва a — рационал мусбат сонлар) типдаги тенгламаларни ечиш эҳтиёжларини тула қондира олмайди.

1. 1. 3. **Ҳақиқий сонлар тўплами.** Рационал сонлар тўпламининг етарли эмаслиги масаласини ҳал этиш вазифаси энди қуйидагидан иборат эканлиги кўриниб турибди: кенгайтирилган, шундай янги сонлар тўпламини яратиш керакки, бу тўпланда сон ўқининг ҳар бир нуқтаси учун сон қиймат топилсин ва бу тўпланда, масалан, (1. 1) кўринишдаги исталган тенглама ечилишга эга бўлсин.

Янги тўплам қисм тўплам сифатида ўз ичига рационал сонлар тўплами Q ни олши ҳамда асосий амаллар ва муносабатлар — қўшиш, кўпайтириш, сонларни таққослашга имкон бериши лозим. Бунда янги тўпландаги амалларнинг қонунлари Q тўпламга нисбатан ҳам қўллаиладиган бўлиб, улар бу тўплам учун илгари аниқланган ўша натижаларга олиб келиши лозим (перманентлик принципи).

1. 1-таъриф. *Ҳақиқий сон деб чексиз ўнли касрга айтилади.*

1.1-мисол. $x_1 = 0,1212212221 \dots$

Бу ерда кўп нуқта касрнинг чексизлигини, ёзув структураси эса такрорланиш йўқлигини, яъни каср даврий эмаслигини билдиради.

1.2-мисол. $x_2 = 130, 535353 \dots = 130, (53)$.

Бу чексиз ўнли каср даврийдир.

1.3-мисол. $x_3 = \sqrt{2} = 1,41412 \dots$

Ўнг томонда даврий бўлмаган ўнли каср турибди.

1.4-мисол. $x_4 = \pi = 3,14159 \dots$

π сони ҳам чексиз даврий бўлмаган ўнли каср билан тасвирланади.

Мусбат ҳақиқий сонлар учун қуйидаги амаллар ва таққослаш қоидалари аниқланади.

1. Даврида тўққиз сони бўлмаган¹

$$\alpha_1 = a, a_1 a_2 \dots a_k \dots \text{ ва } \alpha_2 = b, b_1 b_2 \dots b_k \dots$$

сонлар

$$a = b \text{ ва } a_k = b_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

бўлганда ва фақат шундагина *тенгдир*.

2. α_1 сон α_2 сондан

¹ Даврида 9 сони бўлган сонларни уларга тенг ва даврида ноль бўлган сонларга алмаштирлади (жумладан, қаранг: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., Гостехиздат, т. 1., 1948, 25—26-бет).

ламанинг илдиши $2 + \sqrt{3}$ каби сонлар, бошқа кўпгина алгебраик тенгламаларнинг илдишлари, шунингдек, математикада муҳим бўлган π , e сонлар ва алгебраик тенгламаларнинг илдишлари бўлмайдиган бошқа кўпгина сонлар бор.

Энди ҳақиқий сонлар ва сон ўқининг нуқталари орасидаги боғланиш ҳақидаги ушбу даъвои таърифлаш мумкин:

Ҳақиқий сонлар тўплами ва сон ўқи нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

Бу ҳар бир ҳақиқий сонга сон ўқининг битта нуқтаси мос келибгина қолмасдан, балки сон ўқининг ҳар бир нуқтасига битта ҳақиқий сон мос келишини англатади.

1. 1. 5. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати. Барча ҳақиқий сонлар учун ўринли бўлган 4-хоссага мувофиқ, ҳар бир α мусбат ҳақиқий сонга $-\alpha$ манфий ҳақиқий сон мос келади. Шу сабабли α рационал соннинг мактаб математика курсидан маълум бўлган $|\alpha|$ абсолют қиймати тушунчаси ҳақиқий сонлар учун ҳам умумлаштирилади. Таърифга кўра:

$$|\alpha| = \begin{cases} \text{агар } \alpha \geq 0 & \text{бўлса, } \alpha, \\ \text{агар } \alpha < 0 & \text{бўлса, } -\alpha. \end{cases}$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1. $|\alpha| \geq 0$, $|-a| = a$, $a < |a|$, $-a < |a|$.
2. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.
3. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.
4. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.
5. $|\frac{\alpha}{\beta}| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ($\beta \neq 0$).

1. 2-§. Комплекс сонлар

1. 2. 1. Сон тушунчасини янада кенгайтиришнинг зарурлиги. Фан ва практиканинг янада ривожланиши юқорида киритилган ҳақиқий сонлар тўпламининг етарли эмаслигини кўрсатди.

Ташқи кўриниши жуда содда

$$x^2 + 1 = 0$$

тенгламани ечишга уринишнинг ўзиёқ, сон тушунчасини янада кенгайтириш зарурлигини кўрсатади. Бундан ташқари электротехникада ва физиканинг турли бўлимларида

мураккаб табиатли катталиклар қараладики, уларни ҳақиқий сонлар тушунчаси қамрай ололмайди.

Шу муносабат билан сон тушунчасини янада кенгайтириш эҳтиёжи юзага келди.

1. 2. 2. Комплекс сонлар. Комплекс сонлар ва улар устида амалларни аксиоматик тарзда, ҳақиқий сонларнинг бизга маълум хоссаларидан фойдаланиб аниқлаймиз.

Комплекс сон деб ҳақиқий сонларнинг тартибланган жуфти (a, b) га айтилиди, яъни $a \neq b$ бўлса, u ҳолда $(a, b) \neq (b, a)$ ва $(a, b) = (c, d)$ бўлса, u ҳолда $a = c, b = d$.

Комплекс сонлар учун қўшиш ва қўпайтириш амаллари ушбу таърифлар (аксиомалар) орқали киритилади:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Комплекс сонлар майдон тушунчасининг барча талабларини (1—9-хоссалар; 1. 1. 1 га қаранг) қаноатлантириши ни осонгина текшириш мумкин. Шу билан бирга комплекс сонлар орасида кичик (катта) муносабатини 10—12-хоссаларни сақлаган ҳолда киритиш мумкин эмас экан. Шу сабабли комплекс сонлар тўплами тартибланмаган майдондир. У С ҳарфи билан белгиланади.

Қўшиш ва қўпайтириш амалларига тесқари амалларни аниқлаймиз.

1. (a, b) ва (c, d) комплекс сонлар айирмасини топинг. Таърифга кўра бу шундай (x, y) комплекс сонни топишни англатадики,

$$(c, d) + (x, y) = (a, b)$$

бўлсин. Қўшиш аксиомасига кўра

$$(c + x, d + y) = (a, b),$$

бундан тартибланган жуфтлар хоссасига биноан

$$c + x = a \text{ ва } d + y = b.$$

Демак,

$$x = a - c \text{ ва } y = b - d.$$

Шундай қилиб,

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

2. (a, b) ва $(c, d) \neq 0$ комплекс сонлар бўлинмасини топинг. Таърифга биноан, бу шундай (x, y) комплекс сонни топишни англатадики,

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y)$$

бўлсин. Кўпайтириш қондасига мувофиқ

$$(a, b) = (cx - dy, cy + dx),$$

бундан

$$a = cx - dy \text{ ва } b = cy + dx.$$

Ҳосил қилинган системани ечиб, топамиз:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \text{ ва } y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

1. 7-чисол. $z_1 = (2, 7)$ ва $z_2 = (3, -1)$ комплекс сонлар берилган. Уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси, бўлимасини ва z_1 нинг иккинчи даражасини топинг.

Ечилиши.

$$1. z_1 + z_2 = (2, 7) + (3, -1) = (5, 6).$$

$$2. z_1 - z_2 = (2, 7) - (3, -1) = (-1, 8).$$

$$3. z_1 \cdot z_2 = (2, 7) \cdot (3, -1) = (13, 19).$$

$$4. z_1 : z_2 = (2, 7) : (3, -1) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{23}{10} \right).$$

$$5. z_1^2 = (2, 7) \cdot (2, 7) = (-45, 28).$$

Келгусида бизга (a, b) комплекс сон ёзилишининг қулидаги формаси керак бўлади:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1). \quad (1. 2)$$

Бу формуланинг тўғрилигига комплекс сонларни кўпайтириш қондасидан фойдаланиб, осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b). \quad (1. 3)$$

Сўнгра комплекс сонларни қўшиш қондасидан фойдаланиб,

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

ни топамиз, бу эса (1,2) нинг тўғрилигини исботлайди.

Энди комплекс сонлар тўпламидан иккинчи элементлари нолга тенг бўлган жуфтларни ажратамиз.

Айтайлик,

$$z_1 = (a, 0) \text{ ва } z_2 = (b, 0)$$

бўлсин. Булар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини бу амаллар учун аниқланган қоидалар бўйича бажарамиз:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0);$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0);$$

$$(a, 0) : (b, 0) = \left(\frac{a}{b}, 0 \right) \quad (b \neq 0).$$

Бу билан бир вақтда a ва b ҳақиқий сонларни оладиган бўлсак, уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси мос равишда қуйидагиларга тенг бўлади:

$$a + b, a - b, a \cdot b \text{ ва } \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$$

Шундай қилиб, $(a, 0)$ кўринишдаги жуфтлар устида амаллар тегишли a ҳақиқий сонлар устидаги амаллар билан бир хил бўлади.

Шу сабабли $(a, 0)$ кўринишидаги жуфтни тегишли a ҳақиқий сон билан айнанлаштириб,

$$(a, 0) = a \quad (1.4)$$

қилиб ёзамиз. Шундай қилиб, ҳақиқий сонлар тўплами комплекс сонлар тўпламига кирар экан:

$$R \subset C.$$

Энди комплекс сонларнинг бошқа қисм тўплами — жуфтининг биринчи элементи ноль бўлган, яъни $(0, b) (b \neq 0)$ кўринишдаги сонларни қарайлик. Бизни бундай комплекс соннинг квадрати қизиқтиради:

$$(0, b)^2 = (-b^2, 0).$$

Бундан кўриниб турибдики, биринчи элементи нолга тенг бўлган комплекс соннинг квадрати энди иккинчи элементи 0 га тенг бўлган комплекс сонга тенг бўлиб, шу билан бирга биринчи элемент манфий сон; (1.4) га келишувга биноан

$$(0, b)^2 = -b^2$$

деб ёзамиз. Биз мутлақо янги фактга эга бўлдик: тайин кўринишли комплекс соннинг квадрати манфий ҳақиқий сондир (бу эса ҳақиқий сонлар тўпламида мумкин эмас: у

ерда нолдан фарқли исталган соннинг квадрати мусбат сон эди).

(0, 1) жуфт учун i символни киритамиз:

$$(0, 1) = i.$$

У ҳолда

$$i^2 = -1.$$

Энди исталган (a, b) комплекс сонни (1.2), (1.3) ва (1.4) дан фойдаланиб,

$$(a, b) = a + bi$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу форма *комплекс соннинг алгебраик формаси* дейилади.

$a + bi$ ва $a - bi$ комплекс сонлар *ўзаро қўшма комплекс сонлар* дейилади. Уларнинг йиғиндиси ва қўпайтмаси ҳақиқий сонлардир:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Энди ҳақиқий коэффициентли исталган квадрат тенгламани еча оламиз. Бунда илдизлар комплекс бўлса, улар албатта ўзаро қўшма бўлади (нима учун?)

Масалан,

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

тенглама

$$x_1 = 2 + 3i \text{ ва } x_2 = 2 - 3i$$

илдизларга эга.

Ушбу

$$x^2 + 1 = 0$$

тенглама (комплекс сонлар тўпламида) иккита

$$x_1 = i, x_2 = -i$$

ечимга эга эканлигини айтиб ўтамиз.

Комплекс соннинг алгебраик формаси қўшиш ва қўпайтириш амалларини қуйидаги қоида бўйича бажариш имконини беради: $a + bi$ кўринишидаги ифодаларни қўпхад деб қараб, бу қўпхадлар устида одатдаги алгебраик амалларни бажариш ва кейин i^2 ни -1 га алмаштириш лозим. Бу

қондани, жумладан, ўзаро қўшма сонларни кўпайтиришга қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

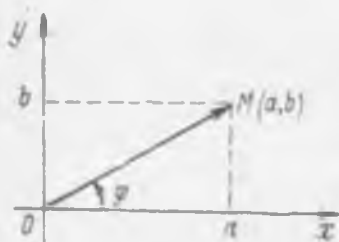
$$(a + bi)(\bar{a} - bi) = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2.$$

Кўрсатилган қондадан фойдаланиб, комплекс сонларни бўлишни бундай бажариш мумкин:

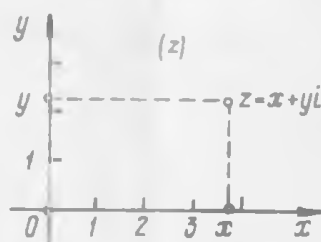
$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i. \end{aligned}$$

1. 2. 3. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири. Маълумки, ҳақиқий сонлар сон ўқининг нуқталари билан тасвирланиши мумкин a ҳақиқий сонга $a = (a, 0)$ комплекс сонлар тўпламининг элементи сифатида яна сон ўқининг нуқтаси мос келади.

Ҳақиқий бўлмаган исталган (a, b) комплекс сонни тасвирлаш учун текисликнинг нуқтаси талаб қилиниши равшан. (a, b) комплекс сонга текисликнинг координатлари $x = a$ ва $y = b$ бўлган (x, y) нуқтасини, яъни $M(a, b)$ нуқтани мос қўйилиши табиий (1. 2-расм). Шундай қилиб, биз xOy текислик нуқталари ва комплекс сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатдик.



1. 2-расм



1. 3-расм

(x, y) комплекс сонни z ҳарфи билан белгилаш қабул қилинган, демак,

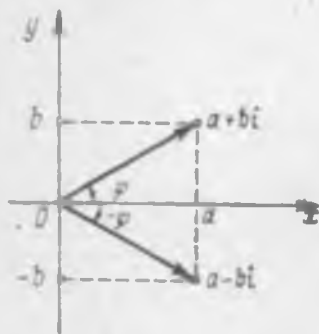
$$z = (x, y) = x + yi.$$

Комплекс сонлар тасвирланадиган xOy текислик z *комплекс текислик* дейилади (1. 3-расм).

$a + bi$ комплекс сонни тасвирлайдиган $M(a, b)$ нуқтаини шу соннинг ўзи билан айнанлаштирилади ва бу сон M нуқтада жойлашган деб айтилади. Шунингдек, $(a, b) =$

$= a + bi$ комплекс сонга мос келадиган $\vec{OM}$ вектор ҳақида ҳам гапириш мумкин (1. 2-расм).

Аввалдан $(0, b) = bi$ кўринишдаги комплекс сонлар соф мавҳум сонлар, i сон эса мавҳум бирлик деб аталиб келинди. a ва b сонлар $z = a + bi$ комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий қисми $\text{Re } z$ ва мавҳум қисми $\text{Im } z$ деб аталади¹.



1. 4-расм

Бунга мувофиқ равишда сонли комплекс текислиkning координата ўқлари ҳақиқий ва мавҳум ўқлар дейилади: ҳақиқий ўқда ҳақиқий сонлар, мавҳум ўқда эса соф мавҳум сонлар жойлашган.

Ўзаро қўшма $a + bi$ ва $a - bi$ комплекс сонлар ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик жойлашган (1. 4-расм).

Комплекс сонлар учун модули ва аргумент тушунчалари киритилиб, улар комплекс сонни ва комплекс текисликда уни тасвирлайдиган нуқтанинг вазиятини тўла аниқлайди.

$(a, b) = a + bi = z$ комплекс соннинг модули деб $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ ҳақиқий сонга айтилади (1. 2-расм); бу сон координаталар бошидан комплекс сонни тасвирлайдиган $M(a, b)$ нуқтагача бўлган масофага ёки $\vec{OM}$ векторнинг узунлигига тенг. Агар a ҳақиқий сонни комплекс соннинг хусусий ҳоли сифатида қарайдиган бўлсак, унинг

$$\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$$

модули a соннинг абсолют қиймати билан бир хил бўлади.

$z = a + bi$ комплекс соннинг модули ҳамда унинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларининг модуллари ушбу муносабатлар билан боғланган (1. 2-расм):

$$|a| = |\text{Re } z| < r, |b| = |\text{Im } z| < r, |z| < |a| + |b|.$$

Нолдан фарқли комплекс соннинг аргументи деб ҳақиқий ўқнинг мусбат қисмини $\vec{OM}$ вектор билан устма-уст тушгунча буриш лозим бўлган φ бурчакка айтилади. Агар

¹ Re ва Im — французча Reel ва Imaginaire сўзларининг бошланғич ҳарфлари.

буриш соат стрелкаси айланишига тескари бўлса, бу бурчак мусбат, акс ҳолда эса манфийдир.

Масалан, $1 + i$ ва $1 - i$ сонларнинг аргументлари мос равишда $\frac{\pi}{4}$ ва $-\frac{\pi}{4}$ га тенг (нима учун?). Мусбат ҳақиқий соннинг аргументи нолга тенг, манфий ҳақиқий соннинг аргументи эса π га тенг деб ҳисобланади.

bi соф мавҳум соннинг аргументи $b > 0$ бўлганда $\frac{\pi}{2}$ га, $b < 0$ бўлганда $-\frac{\pi}{2}$ га тенг.

$a + bi$ ва $a - bi$ ўзаро қўшма комплекс сонларнинг модуллари тенг, аргументлари эса фақат ишора билан фарқ қилади (1.4-расм).

Иккита комплекс сон уларнинг модуллари тенг, аргументлари эса 2π га каррали сонга фарқ қилганда ва фақат шундагича тенгдир.

1-БОБГА ДОИР ТАҚРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай сонлар рационал сонлар дейилади?
2. Рационал сонлар тўплами майдон бўладими? Тартибланган майдон бўладими?
3. Рационал сонлар тўпламининг қайси хоссаси Архимед хоссаси деб аталади?
4. Томони 1 га тенг квадрат диагоналининг узунлигини ифодалайдиган рационал сон мавжудми?
5. Айлана узунлигининг диаметрига нисбати рационал сон билан ифодзланиши мумкинми?
6. Ҳақиқий сонлар тўплами қандай аниқланади?
7. Иккита комплекс соннинг йиғиндиси, кўпайтмаси қандай аниқланади?
8. Ҳақиқий сонлар тўплами тартибланган тўплам бўладими?
9. Ҳақиқий сонлар тўпламининг узлуксиз хоссасининг моҳияти нимадан иборат?
10. Рационал сон чексиз даврий бўлмаган ўнли каср балан тасвирланиши мумкинми?
11. Ҳақиқий сонлар ва сон ўқининг нуқталари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик нимадан иборат?
12. Комплекс сонлар тўплами тартибланган майдон бўладими?
13. Комплекс сонлар тўплами ва бирор текислик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилиши мумкинми?
14. Комплекс соннинг алгебранг формаси қандай аниқланади?
15. Ҳақиқий ва комплекс сонлар орасида қандай муносабат бор?
16. Нима учун ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламанинг комплекс илдизлари албатта ўзаро қўшма комплекс сонлар бўлади?
17. Комплекс сон ўзининг аргумент ва модули орқали бир қийматли аниқланадими?
18. Комплекс соннинг аргументи (модули) манфий ҳақиқий сон билан тасвирланиши мумкинми?

2-БОВ

ТЎПЛАМЛАР ВА ФУНКЦИЯЛАР

2.1- §. Тўпламлар

2.1.1. Асосий тушунчалар ва таърифлар. Ўқувчи *тўплам* тушунчаси билан бошланғич мактабданоқ таниш. Бу тушунчадан фойдаланиш мактаб математикасининг қатор масалаларини анча соддалаштириш, курснинг турли бўлимлари орасида чуқурроқ боғланишлар ўрнатишга имкон берди.

Ҳозирги даврда тўпламлар назарияси математиканинг кенг соҳасини ташкил этади. Бизнинг курсимизда тўпламлар назарияси элементлари ёрдамчи характерга эга бўлиб, келгуси баёнимизда фойдаланиладиган «тилни» ташкил этувчи тушунчаларни баён этиш билан чекланамиз.

Тўплам тушунчаси бошланғич, таърифланмайдиган тушунчалар жумласига киради. Агар ҳар бир объектга нисбатан, у тўпламга тегишли ёки тегишли эмаслигини аниқлаш мумкин бўлса, тўплам берилган дейлади.

Бунда бирор элемент тўпламга тегишли бўлса, у бу тўпламнинг *элементи* дейлади.

Тўпламларга мисоллар келтирамиз:

- 1) ушбу китобдаги сўзлар тўплами;
- 2) маркази берилган нуқтада бўлган айланалар тўплами;
- 3) N тўплам (натурал сонлар тўплами);
- 4) Z тўплам (бутун сонлар тўплами);
- 5) Q тўплам (рационал сонлар тўплами);
- 6) R тўплам (ҳақиқий сонлар тўплами);
- 7) C тўплам (комплекс сонлар тўплами);
- 8) IO дан катта бўлмаган мусбат жуфт сонлар тўплами.

Келтирилган мисолларда ҳар бир тўплам номнинг ўзи қайси элементлар бу тўпламга киритилганини кўрсатиб турибди.

Агар a объект A тўпламининг элементи бўлса (A га тегишли бўлса), бу қуйидагича белгиланади:

$$a \in A,$$

агар a объект A тўпламининг элементи бўлмаса, у бундай ёзилади:

$$a \notin A.$$

Масалан,

$$\frac{2}{3} \in Q, \text{ лекин } \sqrt{2} \notin Q.$$

Битта a элементдан иборат A тўпламини бундай белгилаймиз:

$$\{a\}.$$

Битта ҳам элементи бўлмаган тўплам *буш тўплам* дейилади. Масалан, қуйидагилар буш тўпламлардир:

1) параллел тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари тўплами;

2) $x^2 + 1 = 0$ тенгламининг ҳақиқий илдизлари тўплами. Буш тўплам одатда $\emptyset$ символ билан белгиланади.

~~A ва B тўпламлардан бирининг исталган ($\forall$) элементи~~
иккинчи тўпламга тегишли бўлса, бу тўпламлар *тенг* ($A = B$) дейилади.

A ва B тўпламлар тенглиги таърифини $\Leftrightarrow$ (бўлганда ва фақат шундагина), $\Rightarrow$ (келиб чиқади), $\wedge$ (ва) белгилардан фойдаланиб, бундай ёзиш мумкин:

$$(A = B) \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)),$$

(яъни A ва B тўпламлар бир хил элементларни ўз ичига олганда ва фақат шундагина тенгдир).

Масалан, 1 дан 10 гача бўлган натурал сонлар тўпламлари бу сонлар қайси тартибда жойлашганидан қатъи назар ўзаро тенгдир.

Агар B тўпламининг исталган элементи A тўпламга тегишли бўлса, B тўплам A тўпламининг *қисм тўплами* дейилади. Бунини қуйидагича ёзамиз:

$$B \subset A \text{ (баъзан } B \subseteq A).$$

Шундай қилиб,

$$(B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$$

A тўпламининг ўзи ва буш тўплам A тўпламининг *хосмас қисм тўпламлари* дейилади.

$$\emptyset \subset A, A \subset A.$$

A тўпламнинг қолган барча қисм тўпламлари унинг *хос қисм тўпламлари* дейилади.

2.1-мисол.

1) $N \subset Z.$

2) $Q \subset R.$

3) Берилган учбурчакнинг ичида ётган нуқталар тўплами бу учбурчакка ташқи чизилган айлана ичида ётган нуқталар тўпламининг қисм тўпамидир.

Равшанки,

$$((B \subset A) \wedge (A \subset B)) \Rightarrow (A = B).$$

Кўпинча, тадқиқот мақсадларига қараб, берилган A тўпламдан барча элементлари бирор умумий хоссага эга бўлган қисм тўплам ажратилади, бунда A тўпламнинг ҳамма элементлари ҳам шу хоссага эга бўлавермайди. Ҳар қандай ана шундай тўплам ушбу кўринишда ёзилади:

$$\{x \in A: \dots\}.$$

Бу ёзув бундай ўқилади: A тўпламга тегишли ва «...» хоссага эга бўлган барча x лар тўплами. Масалан, 3 дан кичик натурал сонлар тўплами B ни бундай ёзиш мумкин:

$$B = \{x \in N; x < 3\} = \{1, 2\}.$$

Кўпинча мана бундай ёзув учрайди:

$$M = \{x: \dots\}.$$

Бу ёзув қуйидаги ёзувга тенг кучли:

$$M = \{x \in R: \dots\}.$$

яъни M «...» бўлган ҳақиқий сонлар тўпамидир. Масалан, рационал сонлар тўплами Q ни бундай таърифлаш мумкин:

$$Q = \{x: x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}.$$

2.1.2. Интерваллар. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R нинг *интерваллар* деб аталадиган қисм тўпламларининг белгиланишини эслатиб ўтамиз: интерваллар ёпиқ ҳам, бир томондан ёки иккала томондан очик ҳам, шунингдек, бир ёки иккала томондан чексиз ҳам бўлиши мумкин:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\} \text{ — ёпиқ интервал (кесма),}$$

$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$ — ярим очик интерваллар,

$(a, b) = \{x: a < x < b\}$ — очик интервал,

$(-\infty, b] = \{x: x \leq b\},$

$(-\infty, b) = \{x: x < b\},$

$[a, +\infty) = \{x: x \geq a\},$

$(a, +\infty) = \{x: x > a\},$

$(-\infty, +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\}.$

чексиз
интервал-
лар

Тўпламлар устида асосий амалларни кўриб чиқайлик.
 $\angle$ 2.1.3. Тўпламлар бирлашмаси. A ва B тўпламларнинг бирлашмаси ёки уларнинг *йиғиндиси* деб A ва B тўпламларнинг камида бирига тегишли бўлган элементлардан ва фақат шу элементлардан тузилган тўпламга айтилади. A ва B тўпламларнинг бирлашмаси бундай белгиланади:

$$A \cup B.$$

Демак, $\vee$ (ёки) символдан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)).$$

A ва B тўпламлар шу билан бирга умумий элементларга эга бўлиши ҳам, эга бўлмаслиги ҳам мумкин, жумладан,

$$A \cup A = A.$$

2.2-мисол. Тўпламлар бирлашмасига доир бир нечта мисол кўрайлик.

1) $N \cup Z = Z.$

2) $N \cup R = R.$

3) $R_+ \cup R_- = R.$

$\angle$ 2.1.4. Тўпламлар кесишмаси. A ва B тўпламларнинг кесишмаси деб A ва B тўпламларнинг ҳар бирига тегишли бўлган барча элементлардан ва фақат шу элементлардан тузилган тўпламга айтилади. A ва B тўпламларнинг кесишмаси бундай белгиланади:

$$A \cap B.$$

Шундай қилиб, бундай ёзиш мумкин:

$$(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

ёки

$$A \cap B = \{x: (x \in A \wedge (x \in B))\}.$$

2.3-мисол. $N \cap Z = N$ га эгамиз.

Агар A ва B тўпламлар умумий элементларга эга бўлмаса, у ҳолда

$$A \cap B = \emptyset$$

эканлиги равшан.

Кесишмаларга яна бир нечта мисол келтирамыз.

2.4-мисол. A — тўғри тўртбурчаклар тўплами, B — ромблар тўплами, M — квадратлар тўплами бўлсин. У ҳолда $A \cap B = M$.

2.5-мисол. A — жуфт сонлар тўплами, Z — бутун сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда $A \cap Z = A$.

2.6-мисол. A — жуфт сонлар тўплами, B — тоқ сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда $A \cap B = \emptyset$.

2.1.5. Тўпламлар кўпайтмаси. A ва B тўпламлар берилган бўлсин. A дан ихтиёрий a элемент, B дан ихтиёрий b элемент оламыз. Бу элементлардан (a, b) жуфтларни

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 = a_2, b_1 = b_2)$$

деб ҳисоблаб тузамиз, яъни (a, b) жуфтни тартибланган деб ҳисоблаймиз.

Барча (a, b) , $a \in A$, $b \in B$ тартибланган жуфтлар тўплами A ва B тўпламларнинг кўпайтмаси дейилади. A ва B тўпламларнинг кўпайтмаси $A \times B$ билан белгиланади:

$$(x \in (A \times B)) \Leftrightarrow (x = (a, b); a \in A, b \in B).$$

Исталган чекли сондаги $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламлар кўпайтмаси шунга ўхшаш аниқланиб қуйидагича белгиланади:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Агар тўпламлар тенг бўлса, уларнинг кўпайтмаси тўпламнинг даражаси дейилади, демак,

$$A \times A = A^2.$$

Таърифга кўра

$$A^0 = A^{-1} \times A$$

деб қабул қилинади.

Мисол тариқасида иккита ҳақиқий сонлар тўплами R ва R ни олиб, уларни ўзаро перпендикуляр сон (координата) ўқларига жойлаштирамиз. У ҳолда $R \times R = R^2$ тўп-

лам (x, y) кўринишдаги сон жуфтлари тўплами ёки xOy координата текислигининг барча нуқталари тўпламини тасвирлайди.

Бу ўринда

$$C \neq R^2$$

(C — комплекс сонлар тўплами) эканлигини эслатиб ўтамиз.

Агар $X = [a, b] \subset R$, $Y = [c, d] \subset R$ бўлса, у ҳолда

$$\Phi = X \times Y$$

тўғри тўртбурчак бўлиб, у $[a, b]$ ва $[c, d]$ кесмалар кўпайтмасини тасвирлайди (2.1-расм).



2.1-расм.

2.1.6. Тўплamlар айирмаси. А ва В тўплamlарнинг айирмаси деб А га тегишли, лекин В га тегишли бўлмаган барча элементлардан ва фақат шу элементлардан тузилган тўплamlга айтилади. Бунда $B \subset A$ деб фараз қилинмайди. Агар $B \subset A$ бўлса, у ҳолда А ва В тўплamlарнинг айирмаси В тўплamlнинг А тўплamlгача тўлдирмаси дейилади.

А ва В тўплamlлар айирмаси бундай белгиланади:

$$A \setminus B.$$

Шундай қилиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(x \in (A \setminus B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

ёки

$$(A \setminus B) = \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

Иккита тўплaml айирмасига доир мисоллар кўрайлик:

2.7-мисол. $Z^* = Z \setminus \{0\}$ бўлсин, бунда Z — барча бутун сонлар тўплами. А — тоқ сонлар тўплами, В — жуфт сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда.

$$Z^* \setminus A = B, \quad Z^* \setminus B = A;$$

В тўплaml А ни Z^* гача тўлдирмаси, А тўплaml В ни Z^* гача тўлдирмаси. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$Z^* = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

2.8-мисол. Иррационал сонлар тўплами $R \setminus Q$ рационал сонлар тўпламини ҳақиқий сонлар тўпламигача тўлдирмасидир.

2.9-мисол. А — барча тўғри тўртбурчаклар тўплами, В — квадратлар тўплами, С — турли томонли тўғри тўртбурчаклар тўплами бўлсин. У ҳолда $A \setminus B = C$ ва $A \setminus C = B$.

$$2.10\text{-мисол. } Q \setminus R = \emptyset.$$

2.1.7. Тўпламларнинг ўзаро бир қийматли мослиги. Эквивалент тўпламлар. Қувват. A ва B — берилган иккита тўплам бўлсин. Бундай савол қўяйлик: бу тўпламлардаги элементлар сони бир хилми ёки йўқми? Агар тўпламлар чекли бўлса, у ҳолда ҳар бир тўпламнинг элементларини санашимиз ва санаш натижаларини таққослашимиз мумкин.

Лекин бу айтилган таққослашни бошқача бажариш ҳам мумкин. Масалан, айтайлик театрдаги томошабинлар сони билан театрдаги ўриндиқлар сонини таққослаш лозим бўлсин. Агар спектакль бошлангунча барча ўриндиқлар эгалланган бўлса, у ҳолда томошабинлар тўпламининг элементлари сони ўриндиқлар сонига тенг бўлади. Баъзи ўриндиқлар бўш қолган, ёки аксинча, баъзи томошабинларга бўш ўриндиқ қолмаган ҳолда эса қаралаётган масалага бериладиган жавоб равшан.

Тўпламларни таққослашнинг кейинги усули учун шу нарса характерлики, бунда бир тўпламнинг ҳар бир элементига иккинчи тўпламнинг битта ва фақат битта элементи мос келтирилади, ва аксинча.

Бу усул чексиз тўпламларни таққослашга имкон беради. Масалан, натурал сонлар тўплами N билан $\frac{1}{N}$ кўринишдаги сонлар тўплами M таққосланадиган бўлса, у ҳолда таққослашнинг иккинчи усули ёрдамида N ва M тўпламлардаги элементлар миқдори бир хил эканлигига дарҳол ишонч ҳосил қиламиз. Албатта, чексиз тўпламлар учун «миқдор» сўзи шартли маънога эга.

Келтирилган мулоҳазалар қуйидаги таърифларни киритишга имкон беради.

2.1-таъриф. A ва B — тўпламлар бўлсин. Ҳар бир $a \in A$ элементга битта ва фақат битта $b \in B$ элементни мос қўйувчи ва бунда ҳар бир $b \in B$ элемент битта ва фақат битта $a \in A$ элементга мос қўйиладиган f ҳолида A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик дейилади.

2.2-таъриф. A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, у ҳолда бу тўпламлар эквивалент ёки улар бир хил қувватга эга дейилади.

Қувват тушунчаси чекли тўпламлар элементлари сонининг бир хиллиги тушунчасини умумлаштиради.

2.1.8. Саноқли ва саноқсиз тўпламлар. N — натурал сонлар тўплами бўлсин:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

2.3-таъриф. N тўпламга эквивалент бўлган ҳар қандай A тўплам саноқли тўплам дейилади. Масалан, $\{n^2\} = \{1, 4, 9, \dots\}$, $\{2n\} = \{2, 4, 6, \dots\}$ тўпламлар саноқлидир.

N тўпламга эквивалент бўлмаган тўплам саноқсиз тўплам дейилади.

Барча рационал сонлар тўплами Q саноқли тўплам, барча ҳақиқий сонлар тўплами R эса саноқсиз тўплам¹⁾ эканлигини исботлаш мумкин. Шу билан бирга рационал сонлар тўплами саноқли бўлгани учун иррационал сонлар тўплами $R \setminus Q$ саноқсиз, демак, иррационал сонлар рационал сонларга қараганда жуда кўп. Агар сон тўғри чизнигидан барча рационал сонларни олиб ташлайдиган бўлсак, у ҳолда саноқсиз нуқталар тўплами қолади.

2.1.9. Ҳақиқий сонлар тўпламининг чегаралари. Ўқувчига маълумки, ҳақиқий сонлар тўпламларини чизикли нуқтавий тўпламлар сифатида, ҳақиқий сонлар тўпламининг элементларини эса тўғри чизик нуқталари сифатида қараш қабул қилинган. Баъзи таърифларни эслатиб ўтамиз.

2.4-таъриф. Агар $Y \subseteq R$ тўпламнинг ихтиёрий элементи $y \in Y$ учун $y < M$ ($y > M$) бўлса, M ҳақиқий сон Y тўпламнинг юқори (қуйи) чегараси дейилади.

2.5-таъриф. Y , $Y \subseteq R$ тўпламнинг аниқ юқори (қуйи) чегараси деб энг кичик юқори (энг катта қуйи) чегарага айтилади.

Қуйидаги белгилашлар қабул қилинган:

$\sup y$ — аниқ юқори чегара,

$\inf y$ — аниқ қуйи чегара.

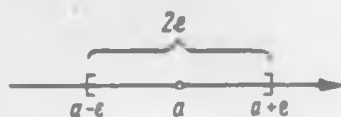
Юқори (қуйи) чегарага эга бўлган ҳар бир бўшмас, Y , $Y \subseteq R$ тўплам аниқ юқори (қуйи) чегарага эга эканлигини исботлаш мумкин.

Юқори ва қуйи чегараларга эга бўлган тўплам чегараланган дейилади.

2.1.10. ϵ -атроф ҳақида тушунча, ϵ -атрофнинг ўқувчига маълум бўлган таърифларини келтирамиз.

¹⁾ Масалан, қаранг: Л. Д. Кудрявцев, Математический анализ т. I, М., «Наука», 1970.

2.6-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўпламидаги a нуқтанинг ϵ -атрофи деб $x = a$ нуқтани ўз ичига олган ($a - \epsilon$, $a + \epsilon$) кўринишдаги исталган очик интервалга айтилади (2.2-расм).



2. 2- расм.

Бу таъриф қуйидаги кўринишда берилиши мумкин.

2.7-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўпламидаги a нуқтанинг ϵ -атрофи деб

$$|x - a| < \epsilon$$

бўлган барча x нуқталар тўпламига айтилади.

Бундан буён a нуқтанинг ϵ -атрофи бўлган очик интервални $R_\epsilon(a)$ билан белгилаймиз.

2-§. Функция

2.2.1. Функция ва акслантириш. 2.8-таъриф. Иккита бўш бўлмаган X ва Y тўпламлар берилган бўлсин. X тўпламдаги ҳар бир x элементга Y тўпламдан битта ва фақат битта y элемент мос келса:

$$(\forall x \in X) \rightarrow y \in Y,$$

y ҳолда X тўпламда қийматлари Y да бўлган f функция (акслантириш) берилган дейилади:

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ ёки } f: X \rightarrow Y.$$

Бошқача айтганда, X тўплам f функция ёрдамида Y тўпламга акслантирилади (f функция X ни Y га акслантиради). f нинг X ни Y га акслантириш фактини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = f(x),$$

бу ерда x — аргумент, $f(x)$ ёки y эса f функциянинг қиймати. X ва $f(X)$ тўпламлар мос равишда функциянинг берилиш тўплами ва функциянинг қийматлари тўплами дейилади, бунда

$$f(X) = \{y \in Y; \exists x \in X, y = f(x)\}$$

(Y дан олинган барча шундай y лар тўпламики, улар учун X да $y = f(x)$ бўладиган x мавжуд). Функциянинг қийматлари тўплами $f(X)$ Y билан устма-уст тушиши ҳам,

унинг қисми бўлиши ҳам мумкинлигини қайд қилиб ўта-
миз.

Функцияга умумий тушунча берилган бу таърифда X ва Y тўпламлар исталган табиатли бўлиши мумкин. Бун-
дан буён биз *сонли функциялар* деб аталадиган

$$X \xrightarrow{f} Y, X \subseteq R, Y \subseteq R$$

функцияларни ўрганиш билан шуғулланамиз.

2.11-мисол. $y = x^2$ функцияни қарайлик. Бу ерда ҳар бир x сонга шу соннинг квадрати мос қўйилади. Шундай қилиб, $y = x^2$ функ-
ция учун $X = R$ ва $f(X) = R_+$.

2.12-мисол. $y = \sqrt{1-x^2}$ функциянинг берилиш тўплами ариф-
метик илдиз тушунчасига асосан $1-x^2 > 0$ тенгсизлиkning ечими би-
лан, яъни $X = [-1, 1]$ тўпam билан аниқланади. Функциянинг қий-
матлари тўплами, равшанки $Y = [0, +\infty)$ тўпamнинг қисми бўлган,
 $f(X) = (0, 1]$ тўпamдир.

Функциянинг формулалар воситасида берилиш усуллари
аналитик усуллар дейилади. Функция R тўпamнинг
турли интервалларида турли формулалар билан аниқлани-
ши мумкинлигини қайд қилиб ўтаимиз.

2.13-мисол.

$$\begin{cases} y = 1, & x \in (-\infty, 0], \\ y = x^2 + 1, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

2.2.2. Функциянинг графиги. X тўпamда қийматлари Y
тўпamда бўлган f функция берилган бўлсин. X ва Y тўп-
ламлар кўпайтмасини қарайлик. Уни Φ орқали белгилай-
миз:

$$X \times Y = \Phi.$$

Φ нинг φ элементи (x, y) жуфтдан иборат:

$$\varphi = (x, y) \in \Phi.$$

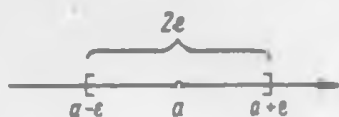
f функциянинг графиги деб Φ тўпamнинг ушбу муноса-
бат билан аниқланадиган қисм тўпamига айтилади:

$$f = \{\varphi: \varphi = (x, y), y = f(x)\}$$

(f функциянинг графиги шундай φ қийматлар тўпamики,
 φ бунда (x, y) жуфтдан иборат бўлиб, $y = f(x)$).

Тўғри бурчакли координаталар системасининг коорди-
ната ўқларида X ва Y тўпamларни геометрик тасвирлай-
диган иккита кесма оламиз. Φ тўпamни — томонлари
 X ва Y бўлган тўғри тўртбурчакни ясаймиз. У ҳолда

2.6-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўпламидаги a нуқтанинг ε -атрофи деб $x = a$ нуқтани ўз ичига олган ($a - \varepsilon, a + \varepsilon$) кўринишдаги исталган очиқ интервалга айтилади (2.2-расм).



2. 2- расм.

Бу таъриф қуйидаги кўринишда берилиши мумкин.

2.7-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўпламидаги a нуқтанинг ε -атрофи деб

$$|x - a| < \varepsilon$$

бўлган барча x нуқталар тўпламига айтилади.

Бундан буён a нуқтанинг ε -атрофи бўлган очиқ интервални $R_\varepsilon(a)$ билан белгилаймиз.

2-§. Функция

2.2.1. Функция ва акслантириш. 2.8-таъриф. Иккита бўш бўлмаган X ва Y тўпламлар берилган бўлсин. X тўпламдаги ҳар бир x элементга Y тўпламдан битта ва фақат битта y элемент мос келса:

$$(\forall x \in X) \rightarrow y \in Y,$$

y ҳолда X тўпламда қийматлари Y да бўлган f функция (акслантириш) берилган дейилади:

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ ёки } f: X \rightarrow Y.$$

Бошқача айтганда, X тўплам f функция ёрдамида Y тўпламга акслантирилади (f функция X ни Y га акслантиради). f нинг X ни Y га акслантириш фактини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = f(x),$$

бу ерда x — аргумент, $f(x)$ ёки y эса f функциянинг қиймати. X ва $f(X)$ тўпламлар мос равишда функциянинг берилиш тўплами ва функциянинг қийматлари тўплами дейилади, бунда

$$f(X) = \{y \in Y; \exists x \in X, y = f(x)\}$$

(Y дан олинган барча шундай y лар тўпламики, улар учун X да $y = f(x)$ бўладиган x мавжуд). Функциянинг қийматлари тўплами $f(X)$ Y билан устма-уст тушиши ҳам,

унинг қисми бўлиши ҳам мумкинлигини қайд қилиб ўта-
миз.

Функцияга умумий тушунча берилган бу таърифда X
ва Y тўпламлар исталган табнати бўлиши мумкин. Бун-
дан буён биз *сонли функциялар* деб аталадиган

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad X \subseteq R, \quad Y \subseteq R$$

функцияларни ўрганиш билан шуғулланамиз.

2.11-мисол. $y = x^2$ функцияни қарайлик. Бу ерда ҳар бир x
сонга шу соннинг квадрати мос қўйилади. Шундай қилиб, $y = x^2$ функ-
ция учун $X = R$ ва $f(X) = R_+$.

2.12-мисол. $y = \sqrt{1 - x^2}$ функциянинг берилиш тўплами ариф-
метик илдиш тушунчасига асосан $1 - x^2 > 0$ тенгсизликнинг ечими би-
лан, яъни $X = [-1, 1]$ тўплаг билан аниқланади. Функциянинг қий-
матлари тўплами, равшанки $Y = [0, +\infty)$ тўплагнинг қисми бўлган,
 $f(X) = (0, 1]$ тўплагдир.

Функциянинг формулалар воситасида берилиш усулларини
аналитик усуллар дейилади. Функция R тўплагнинг
турли интервалларида турли формулалар билан аниқлани-
ши мумкинлигини қайд қилиб ўтаимиз.

2.13-мисол.

$$\begin{cases} y = 1, & x \in (-\infty, 0], \\ y = x^2 + 1, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

2.2.2. Функциянинг графиги. X тўплагда қийматлари Y
тўплагда бўлган f функция берилган бўлсин. X ва Y тўп-
ламлар кўпайтмасини қарайлик. Уни Φ орқали белгилай-
миз:

$$X \times Y = \Phi.$$

Φ нинг φ элементи (x, y) жуфтдан иборат:

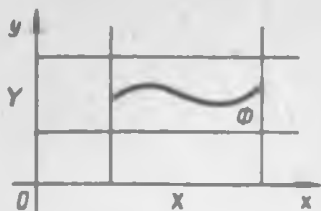
$$\varphi = (x, y) \in \Phi.$$

f функциянинг графиги деб Φ тўплагнинг ушбу муноса-
бат билан аниқланадиган қисм тўплагига айтилади:

$$f = \{\varphi : \varphi = (x, y), y = f(x)\}$$

(f функциянинг графиги шундай φ қийматлар тўплагими,
 φ бунда (x, y) жуфтдан иборат бўлиб, $y = f(x)$).

Тўғри бурчакли координаталар системасининг коорди-
ната ўқларида X ва Y тўплагларни геометрик тасвирлай-
диган иккита кесма оламиз. Φ тўплагини — томонлари
 X ва Y бўлган тўғри тўртбурчакни ясаймиз. У ҳолда



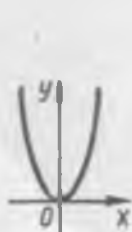
2. 3- расм.

Φ тўпламнинг элементлари x , y координатали нуқталар бўлади.

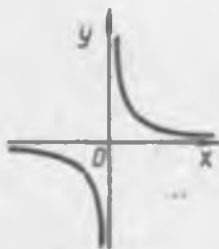
f функциянинг графиги эгри чизиқ (Φ тўғри тўртбугъакда ётган) бўлиб, унинг барча нуқталари берилган $y = f(x)$ муносабатни қаноатлантирадиган x , y координаталарга эга бўлади (2.3- расм).

Шуни қайд қиламизки, Oy ўққа параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ f функциянинг графигини кўпи билан битта нуқтада кесиб ўтади.

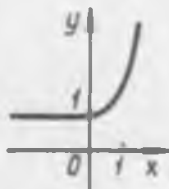
Функцияларни яшаш билан боғлиқ бўлган татбиқий масалаларни ечишда функцияни график усулда беришдан фойдаланамиз, бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график (масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинadиган график) ёрдамида аниқланади. Функцияни график усулда беришдан уни аналитик усул билан бериш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши графикда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади.



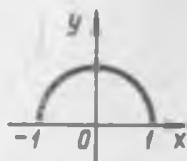
2. 4- расм.



2. 5- расм.



2. 6- расм.



2. 7- расм.

Аналитик усулда берилган функциянинг графигини одатда исталган аниқликда яшаш мумкинлигини қайд қилиб ўтаемиз, жумладан, юқоридаги расмлар билан берилган функцияларнинг графикларни қуйидаги кўринишга эга:

1) $y = x^2$ (2.4- расм),

2) $y = \frac{1}{x}$ (2.5- расм),

3) $\begin{cases} y = 1, & x \in (-\infty, 0], \\ y = x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ (2.6- расм),

4) $y = \sqrt{1-x^2}$ (2.7-расм).

Тескари масала—график усулда берилган функцияни аналитик тасвирлаш элементар бўлмаган ҳолларда жуда мураккабдир.

2.2.3. Сонли функцияларнинг асосий характеристикалари. Сонли функцияларнинг асосий хоссаларининг таърифларини эслатиб ўтамиз.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *ўсувчи* дейилади.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаювчи* дейилади.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \text{ (} f(x_2) \leq f(x_1) \text{)}$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаймайдиған* (*ўсмайдиған*) дейилади.

$f(x)$ функциянинг қийматлари тўплами $f(X)$ чегараланган бўлса, $f(x)$ функция *чегараланган* дейилади (2.1.9-пунктга қаранг).

Агар x_0 нуқтанинг шундай $R_e(x_0)$ -атрофи мавжуд бўлсаки,

$$\forall x \in R_e(x_0)$$

учун

$$f(x_0) > f(x) \text{ (} f(x_0) < f(x) \text{)} \quad (x \neq x_0) \quad (2.1)$$

тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади.

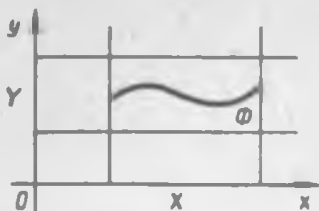
$f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлса, буни қисқача бундай ёзамиз:

$$\max f(x) = f(x_0);$$

$f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлса, буни қуйидагича ёзамиз:

$$\min f(x) = f(x_0).$$

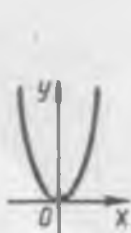
Функциянинг максимум ва минимумлари *экстремумлар* дейилади. Максимум (минимум) нуқтада $y = f(x)$ функция-



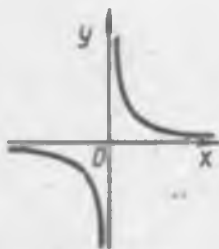
2. 3- расм.

Шуни қайд қиламизки, Oy ўққа параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ f функциянинг графикни кўпи билан битта нуқтада кесиб ўтади.

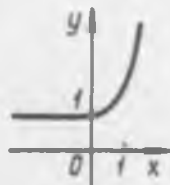
Функцияларни яшаш билан боғлиқ бўлган татбиқий масалаларни ечишда функцияни график усулда беришдан фойдаланамиз, бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график (масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинadиган график) ёрдамида аниқланади. Функцияни график усулда беришдан уни аналитик усул билан бериш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши графикда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади.



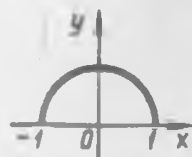
2. 4- расм.



2. 5- расм.



2. 6- расм.



2. 7- расм.

Аналитик усулда берилган функциянинг графикни одатда исталган аниқликда яшаш мумкинлигини қайд қилиб ўтаемиз, жумладан, юқоридаги расмлар билан берилган функцияларнинг графиклари қуйидаги кўринишга эга:

1) $y = x^2$ (2.4- расм),

2) $y = \frac{1}{x}$ (2.5- расм),

3) $\begin{cases} y = 1, & x \in (-\infty, 0], \\ y = x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ (2.6- расм),

4) $y = \sqrt{1-x^2}$ (2.7-расм).

Тескари масала—график усулда берилган функцияни аналитик тасвирлаш элементар бўлмаган ҳолларда жуда мураккабдир.

2.2.3. Сонли функцияларнинг асосий характеристикалари. Сонли функцияларнинг асосий хоссаларининг таърифларини эслатиб ўтамиз.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *ўсувчи* дейилади,

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаювчи* дейилади.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) \leq f(x_1))$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаймайдиган* (*ўсмайдиган*) дейилади.

$f(x)$ функциянинг қийматлари тўплами $f(X)$ чегараланган бўлса, $f(x)$ функция *чегараланган* дейилади (2.1.9-пунктга қаранг).

Агар x_0 нуқтанинг шундай $R_e(x_0)$ -атрофи мавжуд бўлсаки,

$$\forall x \in R_e(x_0)$$

учун

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad (x \neq x_0) \quad (2.1)$$

тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади.

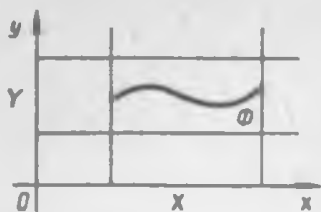
$f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлса, буни қисқача бундай ёзамиз:

$$\max f(x) = f(x_0);$$

$f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлса, буни қуйидагича ёзамиз:

$$\min f(x) = f(x_0).$$

Функциянинг максимум ва минимумлари *экстремумлар* дейилади. Максимум (минимум) нуқтада $y = f(x)$ функция-



2. 3- расм.

Ф тўпламнинг элементлари x , y координатали нуқталар бўлади.

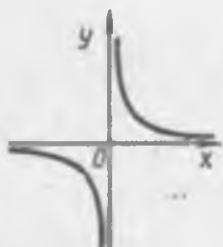
f функциянинг графиги эгри чизиқ (Ф тўғри тўртбугъакда ётган) бўлиб, унинг барча нуқталари берилган $y = f(x)$ муносабатни қаноатлантирадиган x , y координаталарга эга бўлади (2.3- расм).

Шуни қайд қиламизки, Oy ўққа параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ f функциянинг графигини кўпи билан битта нуқтада кесиб ўтади.

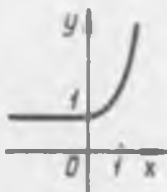
Функцияларни яшаш билан боғлиқ бўлган татбиқий масалаларни ечишда функцияни график усулда беришдан фойдаланамиз, бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график (масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинadиган график) ёрдамида аниқланади. Функцияни график усулда беришдан уни аналитик усул билан бериш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши графикда яхши кўрнадиган ҳолларда фойдаланилади.



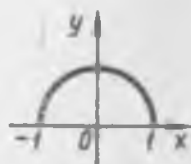
2. 4- расм.



2. 5- расм.



2. 6- расм.



2. 7- расм.

Аналитик усулда берилган функциянинг графигини одатда исталган аниқликда яшаш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз, жумладан, юқоридаги расмлар билан берилган функцияларнинг графиклари қуйидаги кўринишга эга:

1) $y = x^2$ (2.4- расм),

2) $y = \frac{1}{x}$ (2.5- расм),

3) $\begin{cases} y = 1, & x \in (-\infty, 0], \\ y = x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ (2.6- расм),

4) $y = \sqrt{1-x^2}$ (2.7-расм).

Тескари масала—график усулда берилган функцияни аналитик тасвирлаш элементар бўлмаган ҳолларда жуда мураккабдир.

2.2.3. Сонли функцияларнинг асосий характеристикалари. Сонли функцияларнинг асосий хоссаларининг таърифларини эслатиб ўтамиз.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *ўсувчи* дейилади,

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаювчи* дейилади.

Исталган $x_1, x_2, (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ учун

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) \leq f(x_1))$$

муносабат ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаймайдиган* (*ўсмайдиган*) дейилади.

$f(x)$ функциянинг қийматлари тўплами $f(X)$ чегараланган бўлса, $f(x)$ функция *чегараланган* дейилади (2.1.9-пунктга қarang).

Агар x_0 нуқтанинг шундай $R_\epsilon(x_0)$ -атрофи мавжуд бўлсаки,

$$\forall x \in R_\epsilon(x_0)$$

учун

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad (x \neq x_0) \quad (2.1)$$

тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлса, бунни қисқача бундай ёзамиз:

$$\max f(x) = f(x_0);$$

$f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлса, бунни қуйидагича ёзамиз:

$$\min f(x) = f(x_0).$$

Функциянинг максимум ва минимумлари *экстремумлар* дейилади. Максимум (минимум) нуқтада $y = f(x)$ функция-

нинг ўзгариш характери ўсишдан камайишга (камайишдан ўсишга) ўтади.

Функциянинг X_0 тўпламдаги энг катта (энг кичик) қиймати деб унинг $\forall x \neq x_0, x \in X_0$ учун (2.1) тенгсизлик бажариладиган $f(x_0)$, $x_0 \in X_0$ қийматига айтилади.

Агар

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

муносабатлар бажарилса, $y = f(x)$ функция *жуфт* (тоқ) дейилади.

Агар

$$f(x + T) = f(x)$$

муносабат бажарилса, $y = f(x)$ функция T даврли *даврий функция* дейилади.

Юқорида тавсифланган хоссаларни ўрганиш функция ҳолатини (ўзгаришини) текшириш имконини беради.

2.2.4. Сонли функциялар тўпламида арифметик амаллар. Икки функциянинг йиғиндис, кўпайтмаси ва бўлинмаси тушунчаларини қарайлик.

Иккита f_1 ва f_2 функциянинг *йиғиндис* деб ҳар бир x сонга $f_1(x) + f_2(x)$ сонни мос қўядиган f функцияга айтилади.

f_1 функция X_1 тўпламда, f_2 функция эса X_2 тўпламда аниқланган бўлсин; у ҳолда $f(f(x) = f_1(x) + f_2(x))$ функциянинг аниқланиш соҳаси X_1 ва X_2 тўпламларнинг кесишмаси X тўпламдан иборат бўлади.

2.14-мисол. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ функцияни қарайлик.

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, X_1 = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\},$$

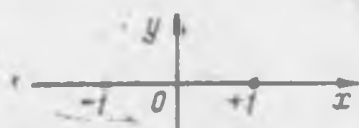
$$f_2(x) = \sqrt{x^2-1}, X_2 = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}.$$

$f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси

$$X = X_1 \cap X_2 = \{-1, 1\}.$$

яъни иккита нуқтадан иборат. Бу нуқталарда $f(x) = 0$ (2.8-расм).

Шунга ўхшаш f_1 ва f_2 функциялар:



2.8- расм.

$$X \xrightarrow{f_1} Y, x \in X_1 \subset X,$$

$$X \xrightarrow{f_2} Y, x \in X_2 \subset X$$

учун

$$f(f(x) = f_1(x) f_2(x))$$

$$X \xrightarrow{f_1, f_2} Y, x \in X_1 \cap X_2$$

қўпайтма ва $f(f(x)) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$$X \xrightarrow{f_1} Y, x \in X_1 \cap X_2, f_2(x) \neq 0$$

бўлиниши аниқланади.

2.2.5. Образ ва прообраз ҳақида тушунча. Акслантиришлар классификацияси. Айтайлик, X тўплам Y тўпламга f функция ёрдамида акслантирилсин:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

A тўплам X нинг бирор қисм тўплами бўлсин:

$$A \subset X.$$

Y ҳолда

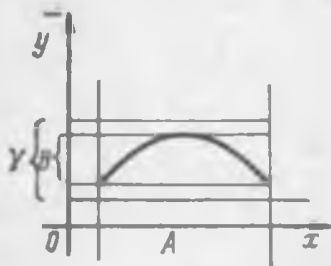
$$B = f(A) = \{y \in Y : \forall x \in A, y = f(x)\}$$

тўплам A тўпламнинг f акслантиришдаги образи дейилади, бунда ҳар доим $B \subset Y$ бўлади (2.9- расм).

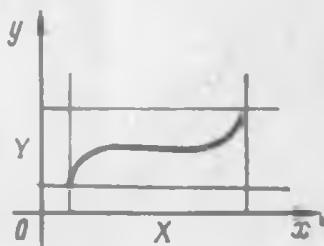
B тўплам Y нинг бирор қисм тўплами бўлсин, y ҳолда

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \forall y \in B, y = f(x)\}, f^{-1}(B) \subset X$$

тўплам B тўпламнинг прообразини дейилади. $f^{-1}(B)$ тўплам X тўпламнинг f функция ёрдамида B га аксланадиган қисмидир.



2.9- расм.



2.10- расм.

$Y = f(X)$ бўлган, яъни X тўплам нуқталарининг образлари Y тўпламни тулиқ тўлдирадиган акслантириш сюръектив ёки «устига» акслантириш дейилади (2.10- расм) ва

яъни

$$\forall y \in Y \rightarrow z \in Z, z = f(y)$$

бўлсин. Агар

$$X \xrightarrow{\psi} Z,$$

яъни

$$\forall x \in X \rightarrow z \in Z, z = \psi(x)$$

бўлган ψ мавжуд бўлса, y ҳолда ψ *мураккаб функция* дейилади ва $y \xrightarrow{f}$ ва φ функцияларнинг *суперпозицияси* бўлади:

$$\psi = f(\varphi) \text{ ёки } z = f(\psi(x)).$$

Бунда x аргументни *эркли ўзгарувчи*, $y = \varphi(x)$ аргументни эса *оралиқ аргумент* дейилади.

Масалан, $z = \lg(x+1)$ функция $y = x+1$ чизиқли функция ва $z = \lg y$ функциянинг суперпозициясидир.

2.2.8. Ошкор ва ошкормас функциялар. Юқорида кўрсатилганидек, f функция x ва y ўзгарувчиларни боғловчи ва y га нисбатан ечилган

$$y = f(x)$$

тенглама билан берилиши мумкин. Бундай берилиш функциянинг *ошкор* берилиши дейилади.

Масалан,

$$y = 2x + 1, \quad y = x^2, \quad y = 2^x, \quad y = \lg x.$$

Агар f функция x ва y ўзгарувчиларнинг боғловчи ва y га нисбатан ечилмаган тенглама билан берилган бўлса, y ҳолда функциянинг бундай берилиши *ошкормас берилиш* дейилади.

Масалан, ошкормас кўринишда берилган $xy = 1$ функцияни қарайлик. Бу тенглама ошкор кўринишда $y = 1/x$ тенглама билан берилиб, y ҳар бир ноль бўлмаган x қийматга унга тесқари y сонни мос қўяди. Бунда равшанки:

$$X = \{x \in R, x \neq 0\}, \quad Y = \{y \in R, y \neq 0\}.$$

Ошкормас кўринишда берилган функция тенгламасини y га нисбатан ечиб, функциянинг ошкор кўринишига ўтатмиз (амалда бунга ҳар доим ҳам эришиб бўлмайди).

Ошкормас функцияни ифодаладиган тенглама

$$F(x, y) = 0$$

кўринишида ёзилади.

2.2.9. Функциянинг параметрик берилиши. Иккита

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (2.2)$$

Функцияни қарайлик ва t нинг қаралаётган ўзгариш соҳасида $x = \varphi(t)$ функция инъектив деб фараз қилайлик.
У ҳолда

$$t = g(x) \quad (2.3)$$

тескари функция мавжуд (2.2.6- пунктга қarang).

(2.3) ни (2.2) функцияларнинг иккинчисига қўйиб,

$$y = \psi(g(x)) \quad (2.4)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, иккита (2.2) функциянинг берилиши (2.4) функциянинг берилишига тенг кучли эканини кўрсатдик. Бу бевосита (2.2) нинг ўзидан ҳам кўриниб турибди: ҳақиқатан, ҳар бир t қиймат учун (2.2) дан x ва y нинг бир-бирига мос бир жуфт қиймати топилади.

Функциянинг (2.2) кўринишида берилиши *параметрик берилиш*, t эса *параметр* дейилади.

2.2.10. Элементар функциялар. Элементар функцияларнинг классификацияси. Бу китобда биз камдан-кам ҳоллардан ташқари, элементар деб аталадиган функцияларни қараймиз. Буларга қуйидаги функциялар синфлари кирази:

1. $y = c$, бу ерда $c = \text{const}$.

2. $y = x^\mu$ — даражали функция.

Даражали функция учун: $\mu \in R$, $\mu > 0$ бўлгандагина $x = 0$ бўлади, агар μ бутун сон ёки $\mu = \frac{1}{2m+1}$ (бунда m — бутун сон) бўлса, у ҳолда $x \in R$; агар $\mu = -\frac{1}{2m}$ (бу ерда m — бутун сон) ёки μ иррационал сон бўлса, у ҳолда $x \in R_+$.

3. $y = a^x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ — кўрсаткичли функция.

4. $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ — логарифмик функция.

$$X \xrightarrow{f} Y$$

каби белгиланади.

Сюръектив акслантиришда X тўпламнинг турли нуқталари Y да бир хил образга эга бўлиши мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз.

X даги ҳар бир x қийматга Y даги битта y қийматни мос келтирадиган ва аксинча, $y \in f(X)$ нинг прообрази битта x қиймат бўлган акслантириш *инъектив* ёки «ичига» акслантириш дейилади ва

$$X \xrightarrow{f} Y$$

каби белгиланади.

Инъектив акслантиришда X тўплам бутун Y тўпламга эмас, балки унинг бир қисмига аксланиши мумкин.

Ўзаро бир қийматли «устига» акслантириш, яъни бир вақтда инъектив ва сюръектив бўлган акслантириш *биектив акслантириш* дейилади.

Ушбу

$$X \xrightarrow[\text{уст.}]{f} X: f(x) = x$$

акслантириш айний алмаштириш дейилишини айтиб ўтамиз,

2.2.6. Тескари функция ҳақида тушунча. Биектив функциянинг хоссаси. Функциянинг торайиши. Энг аввал «тескари функция» тушунчаси фақат инъектив функциялар учун киритилишини таъкидлаб ўтамиз.

X тўплам Y га бирор f инъектив функция ёрдамида акслансин:

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Сўнгра $Y_0 = f(X)$, яъни Y_0 тўплам X тўпламнинг образи бўлсин:

$$Y_0 = \{y: y \in Y, y = f(x)\}.$$

У ҳолда f инъектив бўлгани сабабли исталган $y \in Y_0$ учун X да $y = f(x)$ бўладиган ягона (!) $x \in X$ элемент мавжуд:

$$\forall y \in Y_0. \exists! x \in X, y = f(x).$$

Бу билан Y_0 тўпلامда бирор функция аниқланади. Бу функция f функцияга *тескари* дейилади ва f^{-1} билан белгиланади:

$$Y_0 \xrightarrow[\text{ич.}]{f^{-1}} X \text{ ёки } x = f^{-1}(y).$$

Агар f^{-1} функция биектив бўлса, у ҳолда тескари функцияга тескари функция f нинг ўзидир:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

2.15. мисол. $y = \sqrt{x}$ функция учун тескари функцияни ясайлик. Бу функция ўзининг $[0, +\infty)$ аниқланиш соҳасида инъектив. Функцияни

$$x = y^2, y \in [0, +\infty)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Шундай қилиб, $y = \sqrt{x}$ функция учун тескари функция $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ функция бўлади.

f функция X тўпلامда қуйидагича берилган бўлсин:

$$X \xrightarrow[\text{ич.}]{f} Y.$$

X тўпلامнинг бир қисми бўлган X_0 ни олайлик:

$$X_0 \subset X$$

ва

$$f_0: X_0 \rightarrow Y$$

функцияни $x \in X_0$ да $f_0(x) = f(x)$ тенглик билан аниқлайлик.

Бундай ҳолда f_0 функция f функциянинг *торайиши* дейилади.

Юқорида қаралган мисолда $x \in [0, +\infty]$ даги $y = x^2$ функция $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ функциянинг торайишидир.

2.2.7. Функцияларнинг суперпозицияси ҳақида тушунча. Айтайлик,

$$X \xrightarrow[\text{ич.}]{\varphi} Y,$$

яъни

$$\forall x \in X \rightarrow y \in Y, y = \varphi(x)$$

бўлсин. Сўнгра яна

$$Y \xrightarrow[\text{ич.}]{f} Z$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

каби белгиланади.

Сюръектив акслантиришда X тўпламнинг турли нуқталари Y да бир хил образга эга бўлиши мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз.

X даги ҳар бир x қийматга Y даги битта y қийматни мос келтирадиган ва аксинча, $y \in f(X)$ нинг прообрази битта x қиймат бўлган акслантириш *инъектив* ёки «ичига» акслантириш дейилади ва

$$X \xrightarrow{f}_{\text{ич.}} Y$$

каби белгиланади.

Инъектив акслантиришда X тўплам бутун Y тўпламга эмас, балки унинг бир қисмига аксланиши мумкин.

Ўзаро бир қийматли «устига» акслантириш, яъни бир вақтда инъектив ва сюръектив бўлган акслантириш *биектив акслантириш* дейилади.

Ушбу

$$X \xrightarrow{f}_{\text{уст.}} X: f(x) = x$$

акслантириш айний алмаштириш дейилишини айтиб ўтамиз,

2.2.6. Тескари функция ҳақида тушунча. Биектив функциянинг хоссаси. Функциянинг торайиши. Энг аввал «тескари функция» тушунчаси фақат инъектив функциялар учун киритилишини таъкидлаб ўтамиз.

X тўплам Y га бирор f инъектив функция ёрдамида акслансин:

$$X \xrightarrow{f}_{\text{ич.}} Y.$$

Сўнгра $Y_0 = f(X)$, яъни Y_0 тўплам X тўпламнинг образи бўлсин:

$$Y_0 = \{y: y \in Y, y = f(x)\}.$$

У ҳолда f инъектив бўлгани сабабли исталган $y \in Y_0$ учун X да $y = f(x)$ бўладиган ягона (!) $x \in X$ элемент мавжуд:

$$\forall y \in Y_0. \exists! x \in X, y = f(x).$$

Бу билан Y_0 тўпламда бирор функция аниқланади. Бу функция f функцияга *тескари* дейилади ва f^{-1} билан белгиланади:

$$Y_0 \xrightarrow[\text{нч.}]{f^{-1}} X \text{ ёки } x = f^{-1}(y).$$

Агар f^{-1} функция биектив бўлса, y ҳолда тескари функцияга тескари функция f нинг ўзидир:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

2.15. мисол. $y = \sqrt{x}$ функция учун тескари функцияни ясайлик. Бу функция ўзининг $[0, +\infty)$ аниқланиш соҳасида инъектив. Функцияни

$$x = y^2, y \in [0, +\infty)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Шундай қилиб, $y = \sqrt{x}$ функция учун тескари функция $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ функция бўлади.

f функция X тўпламда қуйидагича берилган бўлсини

$$X \xrightarrow[\text{нч.}]{f} Y.$$

X тўпламнинг бир қисми бўлган X_0 ни олайлик:

$$X_0 \subset X$$

ва

$$f_0: X_0 \rightarrow Y$$

функцияни $x \in X_0$ да $f_0(x) = f(x)$ тенглик билан аниқлайлик.

Бундай ҳолда f_0 функция f функциянинг *торайиши* дейилади.

Юқорида қаралган мисолда $x \in [0, +\infty]$ даги $y = x^2$ функция $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ функциянинг торайишидир.

2.2.7. Функцияларнинг суперпозицияси ҳақида тушунча. Айтилик,

$$X \xrightarrow[\text{нч.}]{\varphi} Y,$$

яъни

$$\forall x \in X \rightarrow y \in Y, y = \varphi(x)$$

бўлсин. Сўнгра яна

$$Y \xrightarrow[\text{нч.}]{f} Z$$

5)¹⁾ $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$; $y = \operatorname{ctgx}$, $x \in (n\pi, \pi + n\pi)$ — тригонометрик функциялар.

6. $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ — тескари тригонометрик функциялар.

$y = \arcsin x$ функция $y = \sin x$ функциянинг $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиққа торайишига тескаридир.

$y = \arccos x$ функция $y = \cos x$ функциянинг $[0, \pi]$ оралиққа торайишига тескаридир.

$y = \arctg x$ функция $y = \operatorname{ctgx}$ функциянинг $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиққа торайишига тескаридир.

$y = \operatorname{arccctg} x$ функция $y = \operatorname{ctgx}$ функциянинг $(0, \pi)$ оралиққа торайишига тескаридир.

Функцияларнинг кўрсатилган синфларини элементар функцияларнинг энг содда синфлари деб атаймиз. Агар $f(x)$ функция бу синфлардан бирига тегишли ёки бу функциялардан тўрт арифметик амални ва функцияларни суперпозициялашни (функциядан функциялар олиш амали) чекли сон марта қўлланиш натижасида ҳосил қилиниши мумкин бўлса, у ҳолда биз f ни элементар функция деб атаймиз. Масалан,

$$1) y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 2) y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2},$$

$$3) y = \lg x^2, \quad 4) y = 2x^2,$$

$$5) y = (x + 1)^2, \quad 6) y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

функциялар элементардир; $y = |x|$ функция ҳам элементар, чунки у $y = \sqrt{x^2}$ кўринишда тасвирланиши мумкин.

¹⁾ Шундан кейинги функциялар 10-бобда («Тригонометрик функциялар») батафсил ўрганилади. Бу функциялар ҳақида қисқача маълумотлар ўрта мактабда берилган.

Ушбу

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

формула кўринишида берилган функция бутун рационал функция ёки n - даражали кўпхад (полином) дейлади

Ушбу

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.3)$$

функция (бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ — кўпхадлар) каср-рационал функция ёки рационал каср дейлади. (2.5) рационал касрнинг суратидаги $P(x)$ кўпхаднинг даражаси мах-раждаги $Q(x)$ кўпхаднинг даражасидан кичик (катта ёки тенг) бўлса, у ҳолда (2.5) тўғри (нотўғри) рационал каср дейлади.

2.2.11. Кўрсаткичли функция. 2.9-таъриф. Кўрсаткичли функция деб

$$y = a^x, \quad x \in R, \quad a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

функцияга айтилади.

Кўрсаткичли функциянинг асосий хоссаларини эслатиб ўтаёмиз:

- 1) кўрсаткичли функция инъективдир;
- 2) барча $x \in R$ да $a^x > 0$;
- 3) $a \in (1, \infty)$ да функция чексиз ортади, $a \in (0, 1)$ да функция камая бориб, нолга исталганча яқин қийматларни қабул қилади.

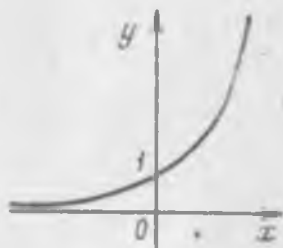
Кўрсаткичли функциянинг бу хоссаларига мувофиқ равишда унинг графиги $a > 1$ бўлганда қуйидаги хоссаларга эга (2. 11-расм).

1. График юқори ярим текисликда, яъни ординаталар мусбат бўлган жойда жойлашган.

2. Оу ўққа параллел ихтиёрий тўғри чизиқ графикни фақат битта нуқтада кесиб ўтади.

3. Графикнинг икки нуқтасидан ўнроқда ётгани баландроқда жойлашган, яъни чапдан ўнгга томон боришда график кўтарилиб боради.

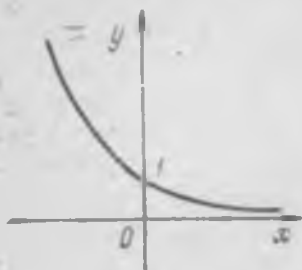
4. Графикда Ох ўққа параллел исталган тўғри чизиқдан юқорида ётган нуқталар бор. Графикда юқори ярим



2. 11- расм.

текисликда Ox ўққа параллел қилиб ўтказилган исталган тўғри чизиқдан пастда ётадиган нуқталар бор.

Графикни чап қисмини ўнгдан чапга томон кузата борсак. у Ox ўққа борган сари яқинлашиб, гўё унга уринишга ҳаракат қилаётгандек кўринади. Лекин график Ox ўққа ҳеч қаерда уринмайди.



2. 12- расм.

5. Ox ўққа параллел ва юқори ярим текисликда ётган ҳар қандай тўғри чизиқ графикни фақат битта нуқтада кесиб ўтади.

6. Барча a ларда график $(0,1)$ нуқтадан ўтади. Бу исталган мусбат a да

$$a^0 = 1$$

бўлиши билан тушунтирилади.

$a < 1$ да $y = a^x$ функция графиги 2.12- расмда кўрсатилган кўринишга эга бўлади.

2.2.12. Логарифмик функция. Унинг кўрсаткичли функция билан боғланиши. Логарифмнинг таърифини эслатиб ўтамиз.

2.10-таъриф. N соннинг a асос бўйича логарифми деб N сонни ҳосил қилиш учун a ни қўтариш лозим бўлган даража кўрсаткичга айтилади, яъни

$$\log_a N$$

$$N = a$$

2.11-таъриф. Логарифмик функция деб

$$y = \log_a x, \quad x \in (0, \infty), \quad a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

функцияга айтилади.

$y = a^x$ нинг инъективлигига асосан ҳар қандай y мусбат сон $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ бўлганда ягона

$$x = \log_a y$$

логарифмга эга.

Шундай қилиб, $y = a^x$ ва $y = \log_a x$ функциялар ўзаро боғлангандир. Логарифмик функция ва кўрсаткичли функция орасидаги боғланишни батафсил кўриб чиқайлик.

Кўрсаткичли функция a сон даражасини даража кўрсаткичининг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгаришини тавсиф-

лайди; логарифмик функция даража кўрсаткични a сон даражасининг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгаришини тавсифлайди.

Бошқача сўз билан айтганда, кўрсаткичли функция сонни унинг a асос бўйича логарифми ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгаришини тавсифлайди; логарифмик функция соннинг a асос бўйича логарифмининг соннинг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгаришини тавсифлайди.

Берилган a асосли кўрсаткичли функциянинг қийматлари жадвали бир вақтда ўша a асосли логарифмик функциянинг қийматлари жадвали бўлади.

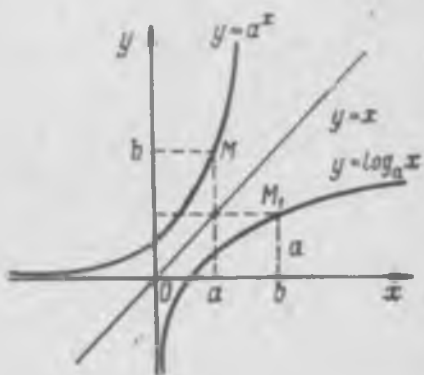
$y = a^x$ кўрсаткичли функциянинг графиги бир вақтда $x = \log_a y$ логарифмик функциянинг ҳам графиги бўлади (2.11- ва 2.12- расмларга қаранг), фақат бунда биринчи ҳолда эрки ўзгарувчининг қийматлари горизонтал ўққа, функциянинг қийматлари эса вертикал ўққа қўйилган, иккинчи ҳолда эса, аксинча, функциянинг қийматлари горизонтал ўққа, эрки ўзгарувчининг қийматлари эса вертикал ўққа қўйилган.

a асосли кўрсаткичли функция ва ўша асосли логарифмик функция бир-бирига тескари иккита функцияга мисол бўлади.

Одатда эрки ўзгарувчининг қийматларини x ҳарфи билан белгилаш ва горизонтал ўққа қўйиш, функциянинг қийматларини эса y ҳарфи билан белгилаш ва вертикал ўққа қўйиш қабул қилинган.

Агар бу қондага амал қилинадиган бўлса, $y = a^x$ функция учун тескари функция $y = \log_a x$ бўлади, $y = \log_a x$ функциянинг графиги бўлиб эса $y = a^x$ функциянинг графигини $y = x$ тўғри чизикқа нисбатан симметрик алмаштириш (2.13- расм), яъни ҳар бир $M(a, b)$ нуқтани $M_1(b, a)$ нуқтага кўчирнш воситасида ҳосил қилинадиган эгри чизик хизмат қилади.

Агар логарифмик функцияда асос қилиб $e = 2,718281828459045 \dots$ (бу сон ҳақида 3.1.4- ва 3.2.3- пунктларга қаранг) сон қабул қилинса, у ҳолда



2.13- расм.

бу логарифмик функция учун махсус белгилаш қабул қилинади:

$$y = \log_e x = \ln x$$

ва бу функция x нинг *натурал логарифми* дейилади.

Кўпинча a асосли

$$y = \log_a x \quad (2.6)$$

логарифмлардан бошқа асосли логарифмларга ўтишга тўғри келади. (2.6) логарифмнинг таърифи бўйича бундай ёзиш мумкин:

$$x = a^y.$$

Бунинг ўнг ва чап томонларидан b асос бўйича логарифм олиб,

$$\log_b x = y \log_a b$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

2- БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Тўпламларга мисоллар келтиринг.
2. Тўпламнинг қисм тўплами нима?
3. Тўпламлар устида асосий амалларнинг таърифларини айтиб беринг.
4. Сон тўғри чизинидаги иккита (ёпиқ) интервал орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатинг.
5. Ҳар бир кишига унинг исминини мос қўямиз. Бу мослик кишилар тўплами ва исмлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик бўладими?
6. $\{A, B, 1, 5\}$ ва $\{1, 2, 3, 4\}$ тўпламлар орасида неча усул билан ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин?
7. Қуйидаги тенгликларни исботланг:
 - 1°. $A \cap B = B \cap A$.
 - 2°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 - 3°. $A \cup B = B \cup A$.
 - 4°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 - 5°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - 6°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - 7°. $A \cap A = A$.
 - 8°. $A \cup A = A$.
 - 9°. $A \cup \emptyset = A$.
8. Функция (акслантириш) таърифини айтиб беринг.
9. Сонли функцияларнинг асосий характеристикалари таърифларини айтиб беринг.

10. Тўпламнинг берилган акслантиришдаги образи (прообрази) деб нимага айтилади?

11. Тескари функция нима? Қандай функциялар учун тескари функция тузиш мумкин?

12. Функциялар суперпозицияси (мураккаб функция) нима?

13. Функциянинг берилиш усулларида қайсыларини биласиз?

14. Элементар функцияларни айтиб беринг; уларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини кўрсатинг, графикларини ясанг.

15. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг хоссаларини айтиб беринг.

2-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ бўлсин, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ ни топинг.

2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ бўлсин. $f(-1) = f(3)$ эканлигига ишонч ҳосил қилинг. Қайси бири катта: $f(0)$ ми ёки $f(1)$ ми?

3. $\varphi(u) = u^2$ бўлсин. $\frac{\varphi(3) - \varphi(2)}{\varphi(3) + \varphi(2)}$ ни ҳисобланг.

4. $f(x) = x^2 + 1$ бўлсин. $f(x+2)$ нинг ифодасини ёзинг.

5. $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 1$ бўлсин.

а) $\frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x) - \varphi(x)}$, б) $\frac{f(x) + \varphi(y)}{f(x)\varphi(y)}$, в) $\frac{f(x) + \varphi(y)}{f(x-y)}$ нинг ифодаларини ёзинг.

6. Қуйидаги функциялар учун тескари функцияларнинг аналитик ёзувларини (аниқланиш соҳасини кўрсатиб) келтиринг:

а) $y = \frac{1}{2}x - 1$, б) $y = x^3$, в) $y = 3^x$, г) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

7. $y = (4-u)^2$, $u = 2x + 3$ функциялар берилган. $y = y(x)$ функцияни формула билан ёзинг.

8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\varphi(x) = x - 1$ функциялар берилган. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

а) $f(\varphi(x))$, б) $\varphi(f(x))$, в) $f(f(x))$, г) $\varphi(\varphi(x))$.

9. $f(u) = 1 - u^2$, $\varphi(x) = 1 - 2x$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$ функцияни формула билан ифодаланг.

10. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва ўзгариш соҳасини топинг:

$$\text{а) } y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{в) } y = \sqrt{x-1} \quad \text{г) } y = \sqrt{1-x},$$

$$\text{д) } y = \sqrt{x^2-4}, \quad \text{е) } y = \sqrt{|x|},$$

$$\text{ж) } y = \frac{x}{x-2}, \quad \text{з) } y = \frac{1}{x^2-1},$$

$$\text{и) } y = \frac{x}{x^2-1}, \quad \text{к) } y = 2x \sqrt{1-x^2}.$$

11. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва ўзгариш соҳасини топинг:

$$\text{а) } y = 3^{1/x}, \quad \text{б) } y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2},$$

$$\text{в) } y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}, \quad \text{г) } y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}.$$

12. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва ўзгариш соҳасини топинг:

$$\text{а) } y = \lg(x^2 - 3x + 2),$$

$$\text{б) } y = \lg(x^2 + x + 1),$$

$$\text{в) } y = \lg(-x^2 + x - 1).$$

13. Ушбу функцияларнинг қайсилари жуфт эканлигини кўрсатинг:

$$\text{а) } y = x^2 + |x|, \quad \text{б) } y = x^2 - x, \quad \text{в) } y = x^2 + c,$$

$$\text{г) } y = kx, \quad \text{д) } y = x^2 - x, \quad \text{е) } y = \frac{k}{x},$$

$$\text{ж) } y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

14. Ушбу функцияларнинг қайсилари тоқ эканлигини кўрсатинг:

$$\text{а) } y = x|x|, \quad \text{б) } y = ||x| - x|, \quad \text{в) } y = \lg|x|,$$

$$\text{г) } y = |\lg x|, \quad \text{д) } y = \frac{1}{x^2 + 1},$$

$$\text{е) } y = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \text{ж) } y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}.$$

15. $y = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ функция жуфт эканлигини кўрсатинг.

16. $y = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ функция тоқ эканлигини кўрсатинг.

17. $x = 0$ нуқтага нисбатан симметрик интервалда берилган исталган $f(x)$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндисини кўринишида ёзинг.

18. $y = f(x)$ функциянинг графиги бўйича ушбу функцияларнинг графикларини қандай ясаш мумкин?

$$\text{а) } y = f(x) + b, \quad \text{б) } y = f(x - a), \quad \text{в) } y = -f(x),$$

$$\text{г) } y = kf(x), \quad \text{д) } y = f(-x), \quad \text{е) } y = f(kx),$$

$$\text{ж) } y = kf(mx - a) + b, \quad \text{з) } y = f(mx + n),$$

$$\text{и) } y = f(|x|), \quad \text{к) } y = |f(x)|, \quad \text{л) } y = |f(|x|)|.$$

ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ

3.1-§. Сонли кетма-кетликнинг лимити

3.1.1. Сонли кетма-кетлик натурал аргументнинг функцияси сифатида. N тўплам—натурал (бутун мусбат) сонлар тўплами юқорида айтиб ўтилганидек, ажойиб хоссага эга бўлиб, бу хосса натурал сонларнинг тартибланганлик қонунин (аксиомаси) сифатида таърифланган эди. Чунончи, ҳар қандай иккита ихтиёрий a ва b натурал сон учун ($\forall a, b \in N$ учун) ушбу даъво ўринли: ё a сон b дан кичик ёки тенг, ёки b сон a дан кичик ёки тенг. N тўпламнинг бу хоссаси сезиларли ва абстракт объектларни у ёки бу йўл воситасида N тўплам элементлари билан боғлаб, «санашга» имкон беради.

Юқорида айтилган фикримизни формаллаштириб, N тўпламда бирор

$$N \xrightarrow{f} A \quad (3.1)$$

функцияни (акслантиришни) аниқлаймиз. N тўпламнинг A тўпламга акслантирилиши A даги элементлар кетма-кетлиги дейилади. Бунда A тўплам, равшанки, исталган табииатли объектлардан иборат бўлиши мумкин ва A даги элементлар кетма-кетлигининг берилиши қуйидагини англатади: A тўпламнинг бирор A' қисм тўпламидаги ҳар бир a' элементга N тўпламдан олинган тайин бир n элемент мос қўйилади ва аксинча: $\forall n \in N$ учун унга мос $a' \in A' \subset A$ элемент мос қўйилади.

Акслантириш ўзаро бир қийматли бўлмаслиги мумкин: A даги бир элемент N дан олинган турли элементларнинг образи бўлиши мумкин.

(3.1) функциянинг қийматларини латин алфавитининг кичик ҳарфлари билан белгилаб, уларни аргументнинг тегишли қийматларига тенг индекслар билан ёзамиз:

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$$

ёки

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (3.2)$$

бунда a_n (3.2) кетма-кетликнинг умумий ҳади дейилади.

(3.2) кетма-кетликнинг элементлари албатта турлича бўлиши шарт эмаслигини айтиб ўтамиз. Турли элементлар сони чекли ёки санокли бўлади.

Шундай қилиб, бирор A тўпладан олинган элементлар кетма-кетлигини бериш деган сўз, бу исталган тайин бир сонга ($\forall n \in N$ га) A дан олинган тайин бир элементни мос қўядиган қонунни кўрсатиш демакдир, A' тўплам объектларини «санаш» шундан иборатки, берилган $n \in N$ элемент (номер) бўйича бу номерга мос $a \in A'$ объектни кўрсатишимиз мумкин.

Иккита

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \text{ ва } \{b_n\} = b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

кетма-кетликда N дан олинган исталган n учун ($\forall n \in N$ учун) $a_n = b_n$ бўлса, яъни бу тенглик айният бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликлар *тенг* дейилади.

3.1.2. Сонли кетма-кетликнинг limiti, унинг геометрик талқини. Лимит ҳақида интуитив тасаввур бирор «ҳаракат» туғрисидаги тасаввур билан боғланган. Тартнбланган N тўплам бўйлаб ҳаракатлана бориб, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадларни ҳолатини кузата борамиз, яъни номернинг ортиши билан кетма-кетлик ҳадлари шу кетма-кетликнинг limiti деб аталадиган бирор a сондан борган сари кам фарқ қилиши лозимлигини кузатамиз.

Бу тасаввурнинг табиийлигнга қарамасдан, қатъий математик формулировка жиддий мулоҳаза юритиш процессини талаб этади. Энг аввал пировард мақсадни аниқлаб олайлик, чунончи биз учун кетма-кетлик ҳадлари бирор a сонга чегарасиз яқинлашиши зарур. Бинобарин, бундай савол қўямиз: талаб қилинаётган яқинликка нима ҳисобига эришиш мумкин?

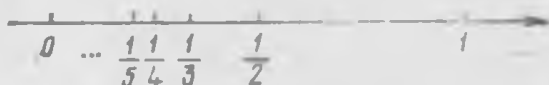
Умумий ҳади $a_n = 1/n$ бўлган

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (3.3)$$

кетма-кетликни текширайлик. n чегарасиз ортганда бу кетма-кетликнинг ҳадлари борган сари кичиклашади, яъни

нолдан борган сари кам фарқ қилади. Ҳақиқатан, кетма-кетликнинг 10-ҳаддан бошлаб, кейинги барча ҳадлари 0,1 дан кичик, 1000-ҳаддан кейинги барча ҳадлари 0,0001 дан кичик ва ҳоказо.

(3.3) кетма-кетликнинг ҳадларини сон ўқида нуқталар кўринишида тасвирлаймиз (3.1-расм). Сон ўқининг кетма-



3.1- расм.

кетлик ҳадларига мос нуқталари 0 нуқта атрофида қуюқлашаётганини кўриш осон. Сон ўқида маркази 0 нуқтада ва узунлиги 2ε бўлган $R_\varepsilon(0)$ симметрик интервал оламиз (ε — ихтиёрий мусбат сон). Агар $\varepsilon = 2$ десак, кетма-кетликнинг барча ҳадлари $R_2(0)$ интервалнинг ичида ётади. Агар $\varepsilon = 0,2$ дейдиган бўлсак, у ҳолда бир нечта дастлабки ҳадлар, чунончи

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

лар $R_{0,2}(0)$ интервалдан ташқарида ётади, бироқ a_6 дан бошлаб барча ҳадлар, чунончи

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

лар $R_{0,2}(0)$ интервалнинг ичида ётади. Сўнгра ε ни янада кичик қилиб танлаб, масалан, $\varepsilon = 0,0001$ ни олиб фақат биринчи 10 000 та ҳад $R_{0,0001}(0)$ интервалга тушмаслигини кўришимиз мумкин, шу билан бир вақтда a_{10001} дан бошлаб, чексиз кўп сондаги ҳадлар $R_{0,0001}(0)$ интервалнинг ичига тушади. Келтирилган бу мулоҳаза исталган ε учун ўринлилиги равшан: чунончи ε кандай қилиб танланмасин, биз доимо шундай кераклигича катта N сонни кўрсата оламизки, (3.3) кетма-кетликнинг номери $n \geq N$ бўлган барча ҳадлари $R_\varepsilon(0)$ интервалнинг ичида ётади ва фақат чекли сондаги

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

ҳадлари бу интервалдан ташқарида ётади.

Юқоридаги мулоҳазаларда иккита муҳим ўрин бор. Биринчидан, $R_\epsilon(0)$ интервалнинг узунлиги ихтиёрий қилиб танланади, иккинчидан, худди шу $R_\epsilon(0)$ интервалнинг узунлиги бўйича, яъни ϵ сон бўйича шундай N сон танланиши мумкинки, кетма-кетликнинг номерлари N дан катта бўлган барча ҳадлари $R_\epsilon(0)$ интервалда бўлади.

Энди кетма-кетликнинг лимити таърифини айтишимиз мумкин.

Исталган ϵ мусбат сон учун унга боғлиқ бўлган шундай мусбат N сон топилсаки, барча $n \geq N$ қийматлар учун

$$|a_n - a| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

Кетма-кетлик a лимитга эга (a сонга интилади) деган факт ушбу символик ёзув билан ифодаланади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Шундай қилиб,¹⁾

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N, a_n \in R_\epsilon(a)).$$

3.1-мисол. Умумий ҳади $1/n$ га тенг бўлган (3.3.) кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Ечиллиши. $a_n = 1/n$ га эгамиз. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ни топиш талаб қилинади. Юқорида келтирилган мулоҳазаларга асосланиб, бу лимит нолга тенг деб тахмин қилишимиз мумкин. Таърифга биноан, бу тахминнинг тўғрилигини кўрсатишимиз, яъни олдиндан берилган исталган ϵ сон бўйича шундай $N = N(\epsilon)$ сонни топишимиз керакки, барча $n > N$ лар учун $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$ тенгсизлик ёки $1/n < \epsilon$ тенгсизлик бажарилсин, бу тенгсизликдан $n > 1/\epsilon$.

У ҳолда $N = [1/\epsilon] + 1$ ²⁾ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\forall \epsilon$ ни танлаб, барча $n > N = [1/\epsilon] + 1$ лар учун $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилади деб ишонч билан айта оламиз, яъни, биз бу ерда шундай N номерини кўрсатдикки, бу номердан бошлаб (3.3) кетма-

1) $a_n \in R_\epsilon(a)$ даъво $|a_n - a| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилганда воқеат шундагина маънога эга бўлади.

2) $[x]$ ифода x дан катта бўлмаган энг кичик бутун сон.

кетликнинг барча ҳадлари нолнинг ε -атрофига тушади, бинобарин, 0 сонни $\{1/n\}$ кетма-кетликнинг лимитидир: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Кетма-кетлик ҳадларининг ҳолатини уларнинг номерлари чексиз ортганда ўрганиб, $\{a_n\}$ кетма-кетлик бирор a сонга интилади деган даъвонинг аниқ таърифини келтирдик. Бироқ бу даъвони ўрганиш билан бир қаторда, шунингдек, ушбу даъвонинг мазмунини ҳам ойдинлаштириш зарурлиги равшан: $\{a_n\}$ кетма-кетлик b сонга интилмайди. Бу даъвони символик тарзда бундай белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq b.$$

Бу даъволарнинг бир-бирига қарама-қарши эканлигини куриш осон, шу сабабли улардан биринчисининг аниқ таърифига эга бўлган ҳолда иккинчисининг аниқ таърифини оддий инкор қилиш йўли билан ҳосил қилишимиз мумкин. Чунончи: шундай мусбат ε сон мавжуд бўлсаки, исталган N сон учун

$$|a_n - b| \geq \varepsilon$$

тенгсизлик бажариладиган n номер топилса, b сон $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлмайди.

Шундай қилиб,

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq b \right) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n (n > N), a_n \notin R_\varepsilon(b)).$$

3.2-мисол. $\{1/n\}$ кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг эмаслигини $(\lim(1/n) \neq 1)$ кўрсатинг.

Ечилиши. $\varepsilon = 1/2$ деб олиб, $\forall n > 2$ учун

$$\left| \frac{1}{n} - 1 \right| > \frac{1}{2}$$

тенгсизлик бажарилишини кўрамиз.

(3.4)

Демак, $\forall N$ учун n ни шундай танлашимиз мумкинки, натижада (3.4) тенгсизлик бажарилади, жумладан, $N > 2$ бўлса, $n = N$ деб олиш kifoya.

Шундай қилиб, керакли ε сон топилади ва ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1.$$

Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик чекли a лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи* кетма-кетлик дейилади. Шунингдек, бу ҳолда кетма-кетлик a сонга *яқинлашади* деб ҳам айтилади.

Осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $\{a_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда у чегараланган, яъни шундай $M \geq 0$ сон мавжудки,

$$\forall n |a_n| < M. \quad (3.5)$$

Ҳақиқатан ҳам, бу қуйидагидан келиб чиқади: исталган $\varepsilon > 0$ учун $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг $N(\varepsilon) - 1$ чекли сондаги ҳадларигина $R_\varepsilon(a)$ дан ташқарида ётади, демак, бу сонларнинг ҳаммаси абсолют қиймат бўйича бирор $M_1 > 0$ сондан ортиқ бўлмайди. Кетма-кетликнинг қолган барча ҳадлари учун эса ушбу баҳога эгамиз:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Шу сабабли

$$|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),$$

демак,

$$|a_n| < |a| + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Энди (3.5) баҳо ўринли бўлиши учун

$$M = \max (M_1, |a| + \varepsilon) \quad (3.6)$$

деб олсак кифоя.

Ҳар қандай кетма-кетлик ҳам лимитга эга деб ўйлаш керак эмас. Аксинча, ҳатто чегараланган кетма-кетлик ҳам лимитга эга бўлмаслиги мумкин.

Масалан, умумий ҳади

$$a_n = (-1)^n$$

бўлган кетма-кетликнинг чегараланганлиги равшан ($M=1$), лекин бу кетма-кетлик чексиз марта навбатма-навбат -1 ва $+1$ қийматларни қабул қилиб, лимитга эга эмас.

Юқорида биз a лимит бирор чекли сон деб фараз қилдик. Энди $+\infty$ ва $-\infty$ хосмас лимитлар ҳақида тушунча берамиз.

Агар

$$\forall E > 0, \exists N = N(E): \forall n \geq N, a_n > E$$

бўлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ хосмос сонга ($a_n \rightarrow +\infty$) эга деб айтамыз.

Шунга ўхшаш, агар

$$\forall E > 0, \exists N = N(E): \forall n \geq N, a_n < -E$$

бўлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг limiti $-\infty$ хосмос сонга ($a_n \rightarrow -\infty$) эга деб атаймиз.

Лимити $+\infty$ (хосмас сон) бўлган кетма-кетликка мисол сифатида умумий ҳади

$$a_n = n^2$$

бўлган кетма-кетликни олиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, E исталган мусбат сон бўлсин. $n^2 > E$ тенгсизлик барча $n > N = [\sqrt{E}] + 1$ лар учун бажарилади.

Шунга ўхшаш, умумий ҳади

$$a_n = -n^2$$

бўлган кетма-кетликнинг limiti $-\infty$ хосмас сондр.

3.1.3 Кетма-кетлик лимитининг ягоналиги ҳақидаги теорема.

Бу пунктда кетма-кетликнинг limiti мавжуд деб таҳмин қилиб, бу лимитнинг ягоналиги масаласини, яъни битта кетма-кетликнинг ўзи икки ва ундан ортнқ турли лимитга эга бўлиши мумкинми ёки йўқлиги масаласини ўрганамиз.

3. 1-теорема. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, бу лимит фақат ягонадир.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз. Айтайлик,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_1 \text{ ва } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_2 \quad (x_1 \neq x_2) \quad (3.7)$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни танлаб, қуйидагиларни айта оламиз:

$$\exists N_1 = N_1(\varepsilon), \forall n \geq N_1: |a_n - x_1| < \varepsilon$$

ва

$$\exists N_2 = N_2(\varepsilon), \forall n \geq N_2: |a_n - x_2| < \varepsilon.$$

Сўнгра,

$$N = \max(N_1, N_2)$$

ни танлаб, $\forall n \geq N$ учун

$$|a_n - x_1| < \varepsilon \text{ ва } |a_n - x_2| < \varepsilon$$

га эга бўламиз, бундан эса

$$|x_1 - x_2| = |(x_1 - a_n) + (a_n - x_2)| \leq |x_1 - a_n| + |a_n - x_2| < 2\varepsilon.$$

Агар

$$0 < \varepsilon < \frac{|x_1 - x_2|}{n}$$

десак, зиддиятликка келамиз.

Шундай қилиб, зиддиятга келдик, бу эса (3.7) тахминнинг нотўғрилигини исботлайди. Теорема исбот қилинди.

3.1.4. Монотон кетма-кетликлар. Кетма-кетликнинг, унинг лимитининг таърифларини қараб чиқишда биз кетма-кетликни аниқлайдиган функция бирон-бир махсус хоссаларга эга деб ҳеч қаерда тахмин қилмадик. Масалан,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{n}{n+2}, \dots$$

кетма-кетликни текширайлик. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳаддан катта. Ҳақиқатан,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+2} = 1 - \frac{2}{n+3} > 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2} = a_n,$$

яъни

$$a_{n+1} > a_n.$$

Ушбу

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n$$

хоссага эга бўлган $\{a_n\}$ кетма-кетликлар *монотон ўсувчи (камаймайдиган)* дейилади.

Ҳадлари $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$ бўлган кетма-кетликлар *қатъий монотон ўсувчи* дейилади.

Шунга ўхшаш, ҳадларн $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$ бўлган $\{a_n\}$ кетма-кетликлар *монотон камаювчи (ўсмайдиган)* дейилади.

Ҳадлари

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n$$

бўлган $\{a_n\}$ кетма-кетликлар *қатъий монотон камаювчи* дейилади.

Масалан,

$$1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$$

кетма-кетлик қатъий монотон камаювчидир.

Монотон кетма-кетликлар ўзларининг лимитларига фақат бир томондан: ўнгдан ёки чапдан яқинлашиши мумкин.

Лимитга эга бўлган тебраниувчи кетма-кетликлар ҳам мавжудлигини айтиб ўтамиз. Масалан,

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

Бу кетма-кетлик нолга унинг иккала томонидан интила бориб, яқинлашади.

Монотон кетма-кетликлар энг содда хоссаларга эга.

3.2-теорема. *Юқоридан чегараланган монотон ўсувчи $\{a_n\}$ сонли кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит $\{a_n\}$ тўпламининг аниқ юқори чегараси билан устма-уст тушади.*

Исботи. $\{a_n\}$ тўпламин қарайлик. Бу тўплам R (R — барча ҳақиқий сонлар тўплами) га тегишли ва юқоридан чегараланган, яъни

$$a_n < M, \text{ бу ерда } M < +\infty.$$

Демак, бу тўплам

$$a = \sup \{a_n\}$$

аниқ юқори чегарага эга. a сон $\{a_n\}$ кетма-кетликининг лимити эканлигини исботлаймиз.

Биринчидан, a — юқори чегара, демак, барча n лар учун

$$a_n < a; \quad (3.8)$$

иккинчидан, a аниқ юқори чегара. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\exists N$ топиладики,

$$a_N > a - \varepsilon$$

бўлади. У ҳолда $a_{n+1} \geq a_n$ га асосан $\forall n \geq N$ учун

$$a_n > a - \varepsilon$$

ни ҳосил қиламиз ва (3.8) дан

$$a_n < a + \varepsilon$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

яъни биз таъриф бўйича $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ эканлигини кўрсатдик.

Теорема исбот қилинди.

3.1-эслатма. Қуйидагини қанд қиламиз: агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик монотон ўсувчи ва юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

бу ерда $+\infty$ берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг хосмас лимити.

Ҳақиқатан,

$$\forall E > 0 \exists N, a_N > E$$

ва $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг монотонлигига асосан сўнгги тенглик барча $n > N$ лар учун бажарилади, бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

эканлигини англатади.

Шунга ўхшаш даъволарни монотон камаювчи кетма-кетликлар учун таърифлаш ва исбот қилиш мумкин.

3.3-теорема. Агар $\{a_n\}$ сонли кетма-кетлик монотон камаювчи ва қуйидан чегараланган, яъни

$$a_n \geq m, m > -\infty$$

бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик ҳамма вақт чекли лимитга эга.

Кетма-кетлик монотон камаювчи ва қуйидан чегараланмаган бўлган ҳолда эса, унинг хосмас лимити $-\infty$ бўлади.

Келтирилган теоремаларнинг ажойиблиги шундаки, уларда лимит олдиндан маълум эмас. 3.2 ва 3.3-теоремалар уларда кўрсатилган ҳолларда кетма-кетликнинг лимити ёки хосмас лимит мавжуд деб даъво қилади. Шу сабабли бу теоремалар кетма-кетлик лимитининг *мавжудлик теоремалари* номини олган.

Бир муҳим мисолни кўрайлик.

3.3-мисол. Ушбу

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик лимитга эгами ёки йўқлигини аниқлаш талаб қилинади.

Ечилиш. Биринчи галда бу кетма-кетлик монотон ўсувчи эканлигига ишонч ҳосил қилайлик. Ҳақиқатан, кетма-кетликнинг умумий ҳадини Ньютон биноми формуласи бўйича ёйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

ёки

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Бундан

$$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n},$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right),$$

$$\dots \dots \dots$$

бўлгани учун

$$a_{n+1} > a_n$$

эканлиги келиб чиқади.

Иккинчи галда (3.9) кетма-кетлик юқоридан чегараланганлигини кўрсатамиз:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Бундан (3.9) кетма-кетлик 3.1-теоремага асосан 2 ва 3 сонлари орасида ётган чекли лимитга эгаллиги келиб чиқади. Бу лимит одатда e ҳарфи билан белгиланади:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

e сонининг ўнли касрга ёйилмасининг биринчи бир нечта рақамини ёзамиз:

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$$

3.1.5. Чексиз кичик кетма-кетликлар. Нолга тенг лимитга эга бўлган $\{a_n\}$ кетма-кетлик *чексиз кичик* кетма-кетлик дейилади.

Кетма-кетликнинг лимити таърифидан (3.1.2-пунктга қаранг) бевосита қуйидаги келиб чиқади: агар

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, |a_n| < \varepsilon$$

бўлса, $\{a_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Бошқача сўз билан айтганда, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг етарлича катта номердан бошлаб, барча қийматлари нолнинг исталганча кичик ε -атрофида бўлса, $\{a_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Чексиз кичик кетма-кетликларни грек алфавитининг биринчи кичик ёзма ҳарфлари билан белгилаймиз:

$$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}.$$

$\{a_n\}$ кетма-кетликнинг қийматлари ва унинг a лимити орасидаги боғланишни аниқлаймиз.

Айтайлик,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (3.10)$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ бўладики, $\forall n \geq N$ учун

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик ёки

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad (3.11)$$

тенгсизлик бажарилади.

Чексиз кичик кетма-кетликнинг таърифи бўйича энди $\{a_n - a\}$ кетма-кетликни чексиз кичик кетма-кетлик деб ҳисоблашимиз мумкин:

$$\{a_n - a\} = \{\alpha_n\}, \quad (3.12)$$

ва демак,

$$a_n = a + \alpha_n,$$

яъни чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликнинг қиймати лимитдан чексиз кичик кетма-кетликнинг умумий ҳадиға фарқ қилади. (3.12) тенглик $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг қийматларини ва унинг a лимитини боғлайдиган тенгликдир.

Энди $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликнинг, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

бўлган кетма-кетликнинг баъзи бир энг содда хоссаларини кўриб чиқамиз

3.4-теорема. Чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликлар йиғиндиси чексиз кичик кетма-кетликдир.

Теоремани исботлаш учун иккита чексиз кичик кетма-кетликнинг йиғиндиси чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини кўрсатиш кифоялиги равшан. Айтайлик, α_n ва β_n ($n = 1, 2, \dots$) чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. Биз $\alpha_n + \beta_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳам чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини кўрсатишимиз зарур.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни танлаймиз, у ҳолда $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ деб олиб, шундай N_1 ва N_2 ни топамизки,

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1, \quad n \geq N_1,$$

$$|\beta_n| < \varepsilon_1, \quad n \geq N_2$$

бўлсин. Сўнгра $N = \max(N_1, N_2)$ дейдиган бўлсак, $n \geq N$ бўлганда

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1 \text{ ва } |\beta_n| < \varepsilon_1$$

бўлади деб айта оламиз. Бундан

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists N = N(\varepsilon)$ бўладикки, $\forall n \geq N$ учун

$$|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилди, демак, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликдир.

Теорема исбот қилинди.

3.5-теорема. Чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликлар қўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетликдир.

Исботи. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. $\{\alpha_n \beta_n\}$ ҳам чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни танлаймиз. У ҳолда $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$ деб, шундай N_1 ва N_2 ни топамизки,

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq N_1 \text{ ва } |\beta_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq N_2.$$

бўлсин. Сўнгра $N = \max(N_1, N_2)$ деб олиб,

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1 \text{ ва } |\beta_n| < \varepsilon_1, \quad \forall n \geq N$$

бўлишини айта оламиз. Бундан

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Демак, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик. Теорема исбот қилинди.

3.6-теорема. *Чегараланган кетма-кетликнинг чексиз кичик кетма-кетликка кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетликдир.*

Исботи. $\{\alpha_n\}$ чегараланган кетма-кетлик, яъни

$$|\alpha_n| \leq M, M < +\infty$$

ва $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлсин. $\{\alpha_n \alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини кўрсатиш лозим.

$\varepsilon > 0$ ихтиёрый ва $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$ бўлсин, $\varepsilon_1 > 0$ бўйича шундай $N = N(\varepsilon_1)$ ни топамизки, $\forall n \geq N$ учун

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1$$

бўлади, у ҳолда агар $n \geq N$ бўлса,

$$|\alpha_n \cdot \alpha_n| = |\alpha_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Бундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n \alpha_n) = 0.$$

Теорема исбот қилинди.

3.1.6. Чексиз катта кетма-кетликлар ва уларнинг чексиз кичик кетма-кетликлар билан боғланиши. Олдинги пунктда чексиз кичик кетма-кетликларни, яъни лимити 0 га тенг бўлган кетма-кетликларни кўриб чиқдик. Математик анализ ва унинг татбиқларида ҳадлари абсолют қиймат бўйича чексиз ўсадиган кетма-кетликлар ҳам муҳим роль ўйнайди.

Агар $n \rightarrow \infty$ да

$$|\alpha_n| \rightarrow +\infty \quad (3.13)$$

бўлса, $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта кетма-кетлик дейилади.

Бу қуйидагини англатади:

$$\forall E > 0 \exists N = N(E): \forall n \geq N, |\alpha_n| > E.$$

Масалан,

$$\{(-1)^n n^2\} \quad (3.14)$$

чексиз катта кетма-кетлик, чунки

$$\{|(-1)^n n^2|\} = \{n^2\}$$

кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ дир.

Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ ёки $-\infty$ бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлиши равшан, чунки бу ҳолда (3.13) ўринлидир. Масалан, чегараланмаган монотон кетма-кетликлар худди шу хилда бўлиб, улар чексиз катта кетма-кетликларнинг кўп учраб турадиган мисолларидир.

(3.14) кетма-кетлик чексиз катта бўлганида, ҳатто хосмас лимитга ҳам эга эмаслигини айтиб ўтамиз.

$\{a_n\}$ чексиз катта кетма-кетликнинг таърифидан келиб чиқадикки, бундай кетма-кетликнинг бирор етарлича катта n ($n > N$) дан бошлаб барча қийматлари нолнинг E -атрофидан ташқарида ётади.

Чегараланмаган кетма-кетлик албатта чексиз катта кетма-кетлик бўлиши шарт эмаслигини айтиб ўтамиз. Ҳақиқатан, чексиз катта кетма-кетлик учун

$$|a_n| > E$$

(E — ихтиёрий ҳақиқий сон) тенгсизлик бирор $N = N(E)$ номердан бошлаб барча n номерлар учун бажарилади. Чегараланмаган кетма-кетлик учун бу тенгсизлик баъзи $n > N$ (ε) номерлардагина бажарилиши мумкин. Масалан,

$$1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots, 2n+1, 0, \dots$$

кетма-кетлик чегараланмаган, лекин у чексиз катта кетма-кетлик эмас.

Энди ўқувчини икки зарур кетма-кетлик: чексиз кичик кетма-кетлик ва чексиз катта кетма-кетлик билан таништирганимиздан сўнг, бу кетма-кетликлар орасидаги боғланишни аниқлашимиз табиий.

3.7-теорема. Агар $\{a_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлса, ушбу

$$a_n = \frac{1}{a_n} \quad (n > n_0)$$

муносабат билан аниқланадиган $\{a_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Исботи. $\{a_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлсин. У ҳолда $\forall E > 0, \exists N = N(E)$ бўладики, $\forall n \geq N$ учун

$$|a_n| > E = 1/\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$|a_n| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon,$$

яъни $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликдир. Теорема исбот қилинди.

Тескари даъво ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

3.8-теорема. Агар $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлса, у ҳолда

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}, \alpha_n \neq 0 \quad (n > n_0)$$

муносабат билан аниқланадиган $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта кетма-кетлик бўлади.

Шундай қилиб, чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар орасидаги боғланишни аниқладик. Бу боғланишга таяниб, чексиз катта кетма-кетликларнинг хоссаларини осонгина таърифлаш ва исботлаш мумкин.

Бир муҳим мисолни кўрайлик.

3.4-мисол. $\{q^n\}$ кетма-кетлик $|q| < 1$ бўлганда чексиз кичик кетма-кетлик, $|q| > 1$ бўлганда эса чексиз катта кетма-кетлик эканлигини исбот қилинг.

Ечилиши. $|q| < 1$ ва ε исталган мусбат сон бўлсин. Қуйидагини кўрсатамиз:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, |q^n| < \varepsilon.$$

Шу мақсадда

$$|q^n| < \varepsilon$$

тенгсизликни қарайлик. Уни n га нисбатан ечамиз:

$$|q^n| < \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon \Rightarrow n \log_a |q| < \log_a \varepsilon \quad (a > 1) \Rightarrow n > \frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|} \quad (|q| < 1).$$

Демак, $N = N(\varepsilon)$ сифатида

$$N = \left[\frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|} \right] + 1$$

ни олиш мумкин. Шундай қилиб, $\{q^n\}$, $|q| < 1$ чексиз кичик кетма-кетликдир.

Агар $|q| > 1$ бўлса, у ҳолда

$$q = \frac{1}{p}$$

деб оламиз. Унда $\{p^n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик ва демак, $\{q^n\}$ чексиз катта кетма-кетликдир (чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликлар орасидаги боғланиш ҳақидаги теоремага асосан). $q > 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$$

булишини, $q < -1$ бўлганда эса $\{q^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмаслигини айтиб утамыз.

Ҳақиқатан ҳам, бу кетма-кетлик чексиз катта бўлганида чексиз лимитгагина эга бўлиши мумкин эди, лекин унинг бундай лимити ҳам йўқ, чунки кетма-кетликнинг ҳадлари ишора ўзгартиради ва

$$|q^n| \rightarrow +\infty.$$

3.1.7. Кетма-кетликлар лимитларининг баъзи хоссалари. Бу пунктда биз лимитларни амалда ҳисоблаш учун зарур бўладиган энг оддий хоссаларини қараймиз.

3.9-теорема. $\{a_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи (яъни лимитга эга), шу билан бирга $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ бўлсин. У ҳолда

$$\{c \cdot a_n\} \quad (c = \text{const})$$

кетма-кетлик яқинлашади ва бу кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

формула бўйича ҳисобланади.

Исботи. Агар ушбу

$$c \cdot a_n = c \cdot a + \alpha_n \quad (3.15)$$

тенглик ўринли эканлигини исботласак, теорема ҳам исботланади; бу ерда $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик. Қуйидагига эгамиз:

$$a_n = a + \bar{\alpha}_n, \quad (3.16)$$

бу ерда $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик. (3.16) нинг иккала томонини c ўзгармасга кўпайтириб,

$$c \cdot a_n = c \cdot a + c \bar{\alpha}_n$$

ни ҳосил қиламиз, шу билан бирга

$$c \bar{\alpha}_n = \alpha_n$$

эканлиги равшан бўлади¹. Бундан (3.15) тенгликнинг ўришли бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

¹ 58-бет, 3.1.5-пунктга қаранг.

3.10-теорема. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи, шу билан бирга

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

бўлсин. У' ҳолда

$$\{a_n \pm b_n\} \quad (3.17)$$

кетма-кетликлар яқинлашади ва бу кетма-кетликларнинг лимитлари

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

формулалар бўйича ҳисобланади.

Исботи. Агар

$$a_n \pm b_n = a \pm b + \gamma_n \quad (3.18)$$

эканини кўрсатсак, теорема исбот бўлади, бу ерда $\{\gamma_n\}$ — чексиз кичик кетма-кетлик. Теорема шартига кўра

$$a_n = a \pm \alpha_n, \quad b_n = b + \beta_n, \quad (3.19)$$

бу ерда $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ — чексиз кичик кетма-кетликлар. (3.19) тенгликларни қўшиб ва чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликлар йиғиндиси чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини ҳисобга олиб, талаб қилинаётган (3.18) тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

3.11-теорема. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи, шу билан бирга $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ бўлсин. У ҳолда

$$\{a_n \cdot b_n\} \quad (3.20)$$

кетма-кетлик яқинлашади ва бу кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

формула бўйича ҳисобланади.

Исботи. Агар

$$ab = a_n \cdot b_n + \gamma_n \quad (3.21)$$

эканлигини кўрсатсак, теорема исбот қилинган бўлади. Ҳақиқатан, $a = a_n - \alpha_n$, $b = b_n - \beta_n$ га эгамиз ((3.19) га қаранг). (3.19) тенгликларни кўпайтириб

$$a \cdot b = a_n \cdot b_n - a_n \cdot \beta_n - b_n \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n \quad (3.22)$$

ни ҳосил қиламиз. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар лимитга эга, демак, улар чегараланган¹⁾, яъни $a_n \cdot \beta_n$, $b_n \cdot \alpha_n$ кетма-кетликлар чексиз кичик кетма-кетликдир. $\alpha_n \cdot \beta_n$ кетма-кетлик ҳам чексиз кичик кетма-кетлик. Шундай қилиб,

$$-a_n \beta_n - b_n \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n = \gamma_n. \quad (3.23)$$

бу ерда $\{\gamma_n\}$ — чексиз кичик кетма-кетлик. (3.23) ни (3.22) га қўйиб, (3.21) ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

3.12-теорема. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи, шу билан бирга

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad b \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \quad (3.24)$$

кетма-кетлик яқинлашади ва бу кетма-кетликнинг limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Исботи. Биз қуйидагини кўрсатишимиз керак:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \gamma_n, \quad (3.25)$$

бу ерда $\{\gamma_n\}$ — чексиз кичик кетма-кетлик. (3.19) ни (3.25) га қўйиб ва тенгликнинг чап томонида керакли алмаштиришларни бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{a + a_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + a_n b - ab - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} = (\alpha_n b - a\beta_n) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n}.$$

$\{\alpha_n b - a\beta_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетликдир (нима учун?), $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n}$ кетма-кетлик чегараланган (нима учун?) Демак,

$$\left\{ (\alpha_n b - a\beta_n) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \right\}$$

¹⁾ 3.1.2- пункт, кетма-кетлик limiti таърифига ва айвиқса (3.5) формулани қаранг.

кетма-кетлик ҳам чексиз кичик кетма-кетликдир. Теорема исбот қилинди.

Бу пунктдаги теоремаларда кетма-кетликлар лимитга эга деб фараз қилганимизни, 3.12-теоремада эса бўлувчи бўлган кетма-кетликнинг лимити ва ҳадлари нолдан фарқли бўлишини талаб қилганимизни кўриш қийин эмас. Энди, равшанки, (3.17), (3.20), (3.24) кетма-кетликлар лимитларининг мавжудлиги ва уларни ифодалаш масаласини ҳозиргина айтилган фаразларни қилмасдан ҳал этишимиз лозим. Бу ҳолда биз алоҳида ҳолатга дуч келамиз, чунки (3.17), (3.20), (3.24) кетма-кетликларнинг лимитлари уларни ташкил этувчи иккала кетма-кетликнинг ўзгариш қонунига боғлиқ равишда турлича бўлиши ва ундан ташқари ҳатто мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

Бир неча мисоллар кўрайлик.

3.5-мисол. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган ва уларнинг хосмас лимитлари мос равишда қуйидагича бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty. \quad (3.26)$$

Ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \quad (3.27)$$

лимит нимага тенг бўлиши мумкинлигини аниқлайлик.

$x_n = \sqrt{n^2 - 1}$, $y_n = -n$ дейлик, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = 0.$$

Энди $x_n = n^2$, $y_n = -n$ қилиб танласак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty. \text{ Ниҳоят,}$$

$x_n = (-1)^n + n^2$, $y_n = -n^2$ десак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^n + n^2 - n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n.$$

Охирги лимит мавжуд эмаслиги равшан.

Шундай қилиб, (3.26) кетма-кетликларнинг хосмас лимитлари бор бўлгани ҳолда (3.27) лимит нолга тенг бўлиши, хосмас бўлиши ёки бутунлай мавжуд бўлмаслиги мумкинлигини кўриб турибмиз, яъни кетма-кетликлар йиғиндисининг лимити лимитлар йиғиндисига тенг бўлмаслиги мумкин.

Шундай қилиб, (3.27) лимитнинг қиймати (3.26) хосмас лимитларнинг қийматлари билан аниқланмайдиган

ҳолда аниқмаслик ҳолати ўринли деб айтамыз. Юқорида кўрилган аниқмасликни символик тарзда бундай белгилаймиз:

$$(+\infty) + (-\infty). \quad (3.28)$$

3.6-мисол. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad (3.29)$$

бўлсин. Ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \quad (3.30)$$

лимитнинг мавжудлик масаласини, мавжуд бўлганда эса унинг қийматларини масаласини кўрайлик.

Айтайлик,

$$x_n = 1/n, \quad y_n = 1/n^2 \quad (3.31)$$

бўлсин, у ҳолда (3.31) ни (3.30) га қўйсак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Сўнгра $x_n = 1/n^2$, $y_n = 1/n$ деймиз, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ниҳоят, агар $x_n = (-1)^n / n^2$, $y_n = 1/n^2$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

бўлади, яъни (3.30) лимит бу ҳолда мавжуд эмас.

Шундай қилиб, олдинги мисолдаги каби, (3.30) лимит (3.29) лимитларнинг қийматлари билан аниқланмайди. Биз

$$\frac{0}{0} \quad (3.32)$$

кўринишдаги аниқмасликка эга бўлдик.

3.7-мисол. Хосмас лимитлари

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad (3.33)$$

бўлган икки а кетма-кетлик берилган бў. син.

Бунда

$$\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (3.34)$$

кўринишдаги кетма-кетликни қарайлик. Бу ҳолда

$$\frac{+\infty}{+\infty} \quad (3.35)$$

кўринишдаги аниқмасликка эга бўлишимизни кўриш қийин эмас.

Китобхонга бу даъвои мустақил равишда, x_n ва y_n кетма-кетликлар сифатида турли даражали полиномларни олиб, мисолда кўрсатишни таклиф қиламиз.

Чунончи, бунда агар $x_n = P(n)$, $y_n = Q(n)$ бўлса, $P(n)$ нинг даражаси $Q(n)$ нинг даражасидан катта бўлган ҳолда (3.34) кетма-кетликнинг хосмас лимити $+\infty$ га тенглигини, $P(n)$ нинг даражаси $Q(n)$ нинг даражасидан кичик бўлса, бу лимит нолга тенглигини, $P(n)$ ва $Q(n)$ нинг даражалари тенг бўлганда эса лимит n нинг юқори коэффициентлари нисбатига тенглигини кўрсатиш дозим.

3.8- мисол. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

бўлсин. У ҳолда

$$\{x_n \cdot y_n\} \quad (3.36)$$

кетма-кетликнинг лимити

$$0 \cdot \infty$$

кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Бу даъвои ижита хусусий ҳолда кўрсатамиз.

$$x_n = 1/n, y_n = n^2$$

бўлсин, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = +\infty.$$

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n$ бўлган ҳолда (3.36) кетма-кетликнинг лимити мажбур эмас (ниме учун?)

Кўриб чиқилган мисолларни якунлаб, қуйидагини қайд қила оламиз: дастлабки кетма-кетликларнинг лимитларини (ёки хосмас лимитларини) билган ҳолда кетма-кетликлар устида ҳатто элементар алгебранинг амаллар бажариш билан ҳосил қилинган кетма-кетликнинг лимитини (ёки хосмас лимитини) ҳар доим ҳам аниқлаш имконига эга эмасмиз, яъни қуйидаги аниқмаслик ҳолати бўлиши мумкин:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot (+\infty)^{1)}.$$

Бу кетма-кетликларнинг лимитини топиш учун ҳар бир конкрет ҳолда дастлабки кетма-кетликларнинг структурасига асосланадиган махсус усуллардан фойдаланиш зарур.

Бу пунктнинг сўнгида кетма-кетлик лимитининг яна бир хоссасини кўриб чиқамиз, бу хосса кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини исботлашда ҳам, шунингдек, уни амалда ҳисоблашда ҳам қўлланиладн.

3.13-теорема. $\{a_n\}, \{b_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашсин, шу билан бирга $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ бўлиб, $\forall n \geq N$

да

$$a_n < c_n < b_n$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $\{c_n\}$ кетма-кетлик яқинлашади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$$

Исботи. Бирор ихтиёрий ε_0 сонни оламиз ва $\forall n \geq N_0$ да

$$|c_n - c| < \varepsilon_0 \quad (3.37)$$

тенгсизлик бажариладиган $N_0(\varepsilon_0)$ сон топилишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, кетма-кетлик лимитининг таърифига кўра биз танлаган ε_0 сон бўйича шундай $N_1 = N_1(\varepsilon_0)$ ва $N_2 = N_2(\varepsilon_0)$ ни топишимиз мумкинки,

$$|a_n - c| < \varepsilon_0 \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{ва} \quad |b_n - c| < \varepsilon_0 \quad \forall n \geq N_2$$

ёки

$$c - \varepsilon_0 < a_n < c + \varepsilon_0 \quad \forall n \geq N_1,$$

$$c - \varepsilon_0 < b_n < c + \varepsilon_0 \quad \forall n \geq N_2$$

бўлади. $N_0 = \max \{N, N_1, N_2\}$ ни олайлик. У ҳолда

$$c - \varepsilon_0 < a_n < c_n < b_n < c + \varepsilon_0 \quad \forall n \geq N_0.$$

¹ Уқувчининг диққатини шунга жалб қиламизки, кўрсатилган аниқмасликлар барча аниқмасликлар тўпламини эмас, унинг фақат бир қисминигина ташкил қилади.

яъни

$$c - \varepsilon_0 < c_n < c + \varepsilon_0, \quad \forall n > N_0,$$

бундан эса (3.37) тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

3.9-мисол. Ушбу чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндисини топинг.

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad |q| < 1.$$

Бу кетма-кетликнинг биринчи n та ҳади йиғиндисини қарайлик. Маълумки,

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$$

ни қарайлик. Маълумки,

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n.$$

Демак,

$$s_n - \frac{a}{1 - q} = -\frac{a}{1 - q} \cdot q^n.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони $-\frac{a}{1 - q}$ ўзгармасо кўпайтувчи ва чексиз кичик q^n кетма-кетликдан иборат (3.4-мисолга қаранг). Демак, $-\frac{a}{1 - q} q^n$ чексиз кичик кетма-кетлик, бу эса

$$s_n - \frac{a}{1 - q}$$

айирма чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини англатади, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}.$$

Шундай қилиб, чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндисини қуйидагича бўлади:

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

3.2-§. Функциянинг лимити

3.2. 1. Функциянинг лимити тушунчаси. Энди a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган, лекин a нуқтанинг ўзида аниқланмаган бўлиши ҳам мумкин бўлган

$$y = f(x)$$

функцияни қарайлик.

Агар исталган ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, ушбу

$$|x - a| < \sigma$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x \neq a$ қийматларда

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

бўлса, A сонини $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити деб атаймиз.

$x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг A лимитга интилишини символик тарзда бундай белгилаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Бошқача айтганда, агар $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ учун барча $x \in \{x | x \neq a, x \in R_\delta(a)\}$ да $f(x) \in R_\varepsilon(A)$ бўлса, A сон $f(x)$ функциянинг лимитидир, яъни x аргументнинг қийматлари a сонга тенг бўлмасдан, унинг етарлича кичик атрофида ётса, $f(x)$ функциянинг қийматлари A соннинг исталганча кичик атрофида ётади.

3.10-мисол. $f(x) = x^3$ бўлсин, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ни топамиз.

Ечилиши. Функциянинг қийматлари жадвалига асосланиб, изланаётган лимит 1 га тенг деб тахмин қилишимиз мумкин. Бу даъвои исботлаш учун биз қуйидагини кўрсатишимиз зарур: қандай $\varepsilon > 0$ сон олинмасин, у бўйича шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$|x - 1| < \delta \quad (3.38)$$

бўлган $x \neq 1$ лар учун

$$|x^3 - 1| < \varepsilon \quad (3.39)$$

тенгсизлик бажарилади. (3.39) тенгсизлигини

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{x + 1} \quad (3.40)$$

кўринишда ифодаalayмиз. $|x - 1| < 1$ бўладиган x ларнигина қараймиз, у ҳолда

$$|x + 1| = |(x - 1) + 2| < |x - 1| + 2 < 3,$$

бундан

$$\frac{\varepsilon}{|x + 1|} > \frac{\varepsilon}{3}.$$

δ ни

$$\delta < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

бўладиган қилиб танлаймиз, у ҳолда

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{|x + 1|}.$$

Демак, (3.40) тенгсизлик бажарилди, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ни топдикки, (3.38) тенгликни қаноатлантирадиган барча x лар учун (3.39) тенгсизлик бажарилади, у эса ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

эканлигини англатади.

Бу ҳолда ҳам, юқоридагидек, олдин A нуқтанинг ε -атрофи берилади (ε — функциянинг қийматлари A билан тақрибан устма-уст тушиш аниқлиги), сўнгра a нуқтанинг δ -атрофи топилади (δ — аргумент x қийматининг a билан тақрибан устма-уст тушиш аниқлиги).

Функциянинг лимити таърифида δ -атрофнинг a нуқтани ўз ичига олиши шарт эмаслиги шу билан белгиладикки, функциянинг лимитини ўрганишда биз энг аввало функциянинг a лимит нуқта «атрофида» берилиши ва ўзгариши билан қизиқамиз, a нуқтанинг ўзида эса функция берилмаслиги ҳам мумкин.

Функция лимитининг биз берган таърифн юқорида қайд этганимиздек ушбу даъвонинг аниқ ифодасидир: x аргумент a қийматга интилганда $f(x)$ функция A лимитга эга. Бу даъвони яна ҳам формаллаштиришга ҳаракат қиламиз. Чунончи шундай $\{x_n\}$ кетма-кетликни аниқлаймизки, $\forall n$ учун бу кетма-кетлик ҳадлари $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

бўлсин, у ҳолда

$$y_n = f(x_n)$$

тенглик билан аниқланадиган $\{y_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad (3.41)$$

бўлса, юқорида келтирилган конструкциямиз ушбу даъвони формаллаштиради: «функция қийматларининг бирор кетма-кетлиги A лимитга эга».

Агар (3.41) даъво ихтиёрий танланган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун тўғри бўлса, у ҳолда A сон $f(x)$ функциянинг изланаётган лимити бўлиши ўз-ўзидан равшан.

Шундай қилиб, функция лимитининг юқорида келтирилган таърифидан бир оз бошқачароқ таърифни беришимиз мумкин.

Аргумент қийматларининг $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ бўлган исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлиги учун $f(x)$ функциянинг тегишли $\{f(x_n)\}$ қийматлари кетма-кетлиги A сонга тенг лимитга эга бўлса, A сон $f(x)$ функциянинг x аргумент a га интилгандаги лимити дейилади.

Функция лимитининг иккита турли таърифи биргаликда бўлиши учун биз уларнинг, яъни лимитнинг ε , δ -атрофлар тилидаги ва кетма-кетликлар тилидаги таърифларининг эквивалентлигини кўрсатишимиз зарурлиги табиий.

3.14-теорема.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (3.42)$$

бўлиши учун аргумент қийматларининг $f(x)$ нинг аниқланиши тўпламидан олинган ва a га яқинлашадиган, исталган

$$\lim_{x \rightarrow a} x_n = a \quad (3.43)$$

кетма-кетлиги учун функциянинг тегишли қийматлари кетма-кетлиги $\{f(x_n)\}$ A га яқинлашиши зарур ва етарли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad (3.44)$$

Исботи. Зарурлиги. Агар (3.42) ўринли бўлса, у ҳолда (3.43) ни қаноатлантирадиган исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун (3.44) ўринли бўлишини кўрсатамиз.

(3.42) дан келиб чиқадики, $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ шундайки,

$$|x - a| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $\forall x, x \neq a$ учун

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (3.45)$$

ўринли бўлади. У ҳолда (3.43) ўринли бўлган исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун шундай $N = N(\varepsilon)$ номер мавжудки, $\forall n \geq N$ учун

$$|x_n - a| < \delta.$$

Демак, $\forall n \geq N$ учун

$$|f(x) - A| < \epsilon. \quad (3.46)$$

Етарлилиги. Агар (3.43) ва (3.44) ўринли бўлса, у ҳолда (3.42) ҳам ўринли бўлишини кўрсатишимиз лозим. Теореманинг бу қисмини тескарисини фараз қилиб исботлаймиз.

Айтайлик, исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун (3.43) ва (3.44) бажарилсин, лекин x аргумент a , $x \neq a$ га интилганда $f(x)$ функция A га интилмасин.

Бу қуйидагини англатади:

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 = x_0(\delta), |x_0 - a| < \delta, |f(x_0) - A| \geq \epsilon_0.$$

У ҳолда ушбу

$$\delta_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad (3.47)$$

хоссага эга бўлган $\{\delta_n\}$ кетма-кетликни танлаймиз ва бу кетма-кетлик бўйича шундай $x_n = x_n(\delta_n)$, $x_n \neq a$ кетма-кетлик тузишимиз мумкинки,

$$|x_n - a| < \delta_n \quad |f(x_n) - A| \geq \epsilon_0 \quad (3.48)$$

бўлади. x_n нинг тузилишига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (3.49)$$

Шу билан бирга $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик A га интилмайди, яъни биз (3.44) га зид хулосага келдик, теорема исбот қилинди.

Келтирилган бу теорема кетма-кетлик лимитининг хоссаларини функция лимитига ҳам ўтказиш имкон беришини кўриш қийин эмас.

Функция лимити таърифини аргумент ёки функция чексиз ўсувчи ёки камаювчи бўлган ҳолда ифодалашни китобхонга машқ тариқасида тавсия қиламиз.

Сўнгра x нинг a га интилишига баъзи қўшимча шартлар қўшишимиз, чунончи

$$x - a > 0 \text{ ёки } x - a < 0$$

деб фараз қилишимиз мумкин. Бу ҳолда функциянинг аргумент лимит нуқтага бир томонлама яқинлашгандаги лимитини ҳосил қиламиз.

$\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ шундайки, $\forall x, x \neq a$ да

$$x - a < \delta$$

учун

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги *ўнг томонлама лимити* дейилади.

Ўнг томонлама лимит кўпинча $f(a + 0)$ билан белгиланади.

Чап томонлама лимит шунга ўхшаш аниқланади.

$\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ шундайки, $\forall x, x \neq a$ да

$$a - x < \delta$$

учун

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги *чап томонлама лимити* дейилади.

Чап томонлама лимит одатда $f(a - 0)$ билан белгилади.

Равшанки, $f(x)$ функциянинг a га интилгандаги лимити иккала бир томонлама лимит мавжуд ва ўзаро тенг.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Бўлганда ва фақат шундагина мавжуд бўлади.

3.2.2. Функция лимитининг мавжудлиги ҳақидаги теоремалар. Олдинги пунктда функциянинг лимити таърифини кўриб чиққанимиздан сўнг, қуйидаги саволни қўйиш табиий: функцияга қўйиладиган қандай шартларда кўрсатилган лимитнинг мавжуд бўлишига кафолат беришимиз мумкин. Бу саволга қуйидаги теоремалар маълум даражада жавоб беради.

3.15-теорема. $f(x)$ функция бирор X соҳада монотон ўсувчи ва a нуқта X тўплам учун қуюқланиш нуқтаси бўлсин, яъни $\forall R_\varepsilon(a) \exists x \neq a, x \in X$. У ҳолда агар $f(x)$ функция барча $x \in X$ учун юқоридан чегараланган:

$$f(x) < M \quad (3.50)$$

бўлса, у ҳолда x аргумент a га интилганда $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлади.

Исботи. (3.50) тенгсизликдан келиб чиқадики, $f(x)$ функциянинг образларн сифатида аниқланадиган $\{f(x)\}$ тўплам:

$$X \xrightarrow{f} Y = \{f(x)\}$$

юқоридан чегараланган. У ҳолда бу тўплам учун чекли аниқ юқори чегара A мавжуд. Ана шу A сон изланаётган лимит бўлишини кўрсатамиз,

A аниқ юқори чегара бўлгани сабабли $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists x_0$ шундайки, $f(x_0) > A - \varepsilon$ бўлади. $f(x)$ функция монотон, демак, $\forall x > x_0$ учун

$$f(x) > A - \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Лекин $f(x)$ функция чегараланган, демак,

$$f(x) < A,$$

бу ердан $\forall \varepsilon > 0$ учун

$$f(x) = A + \varepsilon$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $\delta = a - x_0$ ($a \neq +\infty$) ни танлаб, бундай хулосага келамиз: $\exists \delta > 0$ учун $\exists \delta$ шундайки,

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (3.51)$$

тенгсизлик

$$|x - a| < \delta$$

учун бажарилади.

Теорема $a < +\infty$ бўлган ҳол учун исбот қилинди. Агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса, у ҳолда $\delta = x_0$ деб, бундай даъво қилишимиз мумкин: $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta$ шундайки, (3.51) тенгсизлик барча $x > \delta$ лар учун бажарилади. Теорема исбот қилинди.

3.2-эслатма. Шунга ўхшаш даъво монотон камаювчи функция учун ҳам ўринли эканлиги равшан. Китобхонга бу даъвони мустақил исбот қилишни тавсия этамиз.

Шуни ҳам қайд қилиб ўтамикки, агар $f(x)$ функция монотон бўлиб, юқоридан чегараланмаган бўлса, $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists x_0$ шундайки, $f(x_0) > \varepsilon$ бўлади; у ҳолда $\forall x > x_0$ учун $f(x) > \varepsilon$ га эгамиз, яъни $f(x)$ бу ҳолда $+\infty$ га интилади.

Энди бошқа бир муҳим теоремани қарайлик, унда функция чегараланмаган деб ошкора равишда тахмин

қилинмаса-да, бироқ функциянинг ўзи бирор махсус ўзгариш структурасига эга деб фараз қилинади.

3.16-теорема. $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ учун $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ функциялар аниқланган ҳамда

$$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) \quad (3.52)$$

ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$$

бажарилган бўлсин. У ҳолда $f_2(x)$ функция ҳам $x \rightarrow a$ да лимитга эга, шу билан бирга

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A.$$

Исботи. $\epsilon_0 > 0$ ихтиёрий бўлсин, у ҳолда функция лимити таърифига кўра $\exists \delta_1 > 0$ шундайки, $|x - a| < \delta_1$ да

$$|f_1(x) - A| < \epsilon_0$$

ўринли ва $\exists \delta_2 > 0$ шундайки, $|x - a| < \delta_2$ да

$$|f_3(x) - A| < \epsilon_0.$$

бажарилади. У ҳолда

$$\delta_0 = \min \{\delta, \delta_1(\epsilon_0), \delta_2(\epsilon_0)\}$$

ни танлаб, $|x - a| < \delta_0$ учун ушбу тенгсизликлар ўринли бўлишини кўрамиз:

$$A - \epsilon_0 < f_1(x) < A + \epsilon_0$$

$$A - \epsilon_0 < f_3(x) < A + \epsilon_0.$$

Демак, теореманинг (3.52) шартига асосан $|x - a| < \delta$ да

$$A - \epsilon_0 < f_2(x) < A + \epsilon_0$$

ёки

$$|f_2(x) - A| < \epsilon_0.$$

бундан эса $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$ келиб чиқади.

a нукта $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ нинг (3.52) тенгсизлик бажариладиган аниқланиш соҳасига тегишли бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкинлигини қайд этиб ўтамин. Биз теоремани биринчи ҳол учун исбот қилдик. Теореманинг a нукта соҳага тегишли эмас деган таҳминда исботланиши юқорида қилинган мулоҳазани сўзма-сўз такрорлашдан иборат.

Шунингдек, нуқта (f_1, f_2, f_3 функцияларнинг қуюқлашиш нуқтаси) чекли ёки чексиз узоқлашган бўлиши мумкинлигини айтиб ўтамыз.

3.2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ ажойиб лимит ва унинг натижалари.
Бу пунктда биз

$$y = (1+x)^{1/x} \quad (3.53)$$

функциянинг x аргумент 0 га интилгандаги лимитини текширамыз. Аргументнинг лимит қийматини текшириладиган функцияга бевосита қўядиган бўлсак, символик тарзда 1^∞ кўринишда ёзиладиган аниқмасликни ҳосил қиламыз. Бу аниқмасликни очиқ бериш масаласини қўяйлик. Бунинг учун функция лимитининг кетма-кетликлар терминлари тилидаги таърифидан фойдаланамиз. Чунончи, ихтиёрий $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликни танлаб олиб,

$$\{(1+x_n)^{1/x_n}\} \quad (3.54)$$

кетма-кетлик лимитга эгаллигини исботлашимиз лозим. $\{x_n\}$ сифатида $\{1/n\}$ кетма-кетликни оламиз: у ҳолда 3.1.4-пунктда кўрганимиздек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3.55)$$

Бу тенглик (3.53) лимит ҳам e сонга тенг деб умид қилишга имкон беради.

Ихтиёрий $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликни шундай танлаймизки,

$$0 < x_{n+1} < x_n$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўлсин. У ҳолда

$$k_n < \frac{1}{x_n} < k_n + 1$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қатъий монотон ўсувчи натурал сонлар кетма-кетлиги $\{k_n\}$ доимо топилади. Юқоридаги тенгсизликдан

$$\frac{1}{k_n + 1} < x_n < \frac{1}{k_n},$$

у ҳолда

$$\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < (1+x_n)^{1/x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

ёки

$$\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} < (1+x_n)^{1/x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right).$$

Демак, (3.55) ва 3.13-теоремага асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e. \quad (3.56)$$

$\{x_n\}$ ($x_n < 0$) кетма-кетликни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўладиган қилиб танлаб ва янги кетма-кетликни $y_n = -x_n$ тенглик билан аниқлаб, қуйндагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{1/x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-y_n)^{-1/y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1-y_n}{y_n}} \left(1 + \frac{y_n}{1-y_n}\right) = e \cdot 1. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (3.54) кетма-кетликнинг limiti $\{x_n\}$ кетма-кетликни хоҳлаганча танлаганда ҳам e сонига тенг, яъни функция лимитининг кетма-кетликлар тилидаги таърифига асосланиб,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (3.57)$$

деб даъво қилишимиз мумкин.

(3.57) да $y = 1/x$ десак,

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

ҳосил бўлишини кўриш осон.

Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = e^m$$

лимит ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Ҳақиқатан,

Шунингдек, нуқта (f_1, f_2, f_3 функцияларнинг қуюқлашиш нуқтаси) чекли ёки чексиз узоқлашган бўлиши мумкинлигини айтиб ўтамиз.

3.2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ ажойиб лимит ва унинг натижалари.
Бу пунктда биз

$$y = (1+x)^{1/x} \quad (3.53)$$

функциянинг x аргумент 0 га интилгандаги лимитини текшираемиз. Аргументнинг лимит қийматини текшириладиган функцияга бевосита қўядиган бўлсак, символик тарзда 1^∞ кўринишда ёзиладиган аниқмасликни ҳосил қиламиз. Бу аниқмасликни очиб бериш масаласини қўяйлик. Бунинг учун функция лимитининг кетма-кетликлар терминлари тилидаги таърифидан фойдаланамиз. Чунончи, ихтиёрий $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликни танлаб олиб,

$$\{(1+x_n)^{1/x_n}\} \quad (3.54)$$

кетма-кетлик лимитга эгаллигини исботлашимиз лозим. $\{x_n\}$ сифатида $\{1/n\}$ кетма-кетликни оламиз: у ҳолда 3.1.4-пунктда кўрганимиздек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3.55)$$

Бу тенглик (3.53) лимит ҳам e сонга тенг деб умид қилишга имкон беради.

Ихтиёрий $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликни шундай танлаймизки,

$$0 < x_{n+1} < x_n$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўлсин. У ҳолда

$$k_n < \frac{1}{x_n} < k_n + 1$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қатъий монотон ўсувчи натурал сонлар кетма-кетлиги $\{k_n\}$ доимо топилади. Юқоридаги тенгсизликдан

$$\frac{1}{k_n + 1} < x_n < \frac{1}{k_n}.$$

у ҳолда

$$\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < (1+x_n)^{1/x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

ёки

$$\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} < (1+x_n)^{1/x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right).$$

Демак, (3.55) ва 3.13-теоремага асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e. \quad (3.56)$$

$\{x_n\}$ ($x_n < 0$) кетма-кетликни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўладиган қилиб танлаб ва янги кетма-кетликни $y_n = -x_n$ тенглик билан аниқлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{1/x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-y_n)^{-1/y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1-y_n}{y_n}} \left(1 + \frac{y_n}{1-y_n}\right) = e \cdot 1. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (3.54) кетма-кетликнинг лимити $\{x_n\}$ кетма-кетликни хоҳлаганча танлаганда ҳам e сонига тенг, яъни функция лимитининг кетма-кетликлар тилидаги таърифига асосланиб,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (3.57)$$

деб даъво қилишимиз мумкин.

(3.57) да $y = 1/x$ десак,

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

ҳосил бўлишини кўриш осон.

Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = e^m$$

лимит ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m} \cdot m} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}} \right\}^m = e^m.\end{aligned}$$

Сўнгра

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

ни кўрсатамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e^1$$

Ниҳоят,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

эканлигига ишонч ҳосил қилайлик. Ҳақиқатан, $a^x - 1 = y$ деб белгилаб,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

га эга бўламиз.

3.2.4. Чексиз кичик ва чексиз катта функцияларни таққослаш. Чексиз кичик кетма-кетлик тушунчасини ихтиёрий функция бўлган ҳолга умумлаштириб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

бўлса, x аргумент a га интилганда $f(x)$ функция *чексиз кичик функция* дейилади.

Шунга ўхшаш, агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

бўлса, x аргумент a га интилганда $f(x)$ функция *чексиз катта функция* дейилади.

Чексиз кичик (чексиз катта) функциялар чексиз кичик (чексиз катта) кетма-кетликларнинг хоссаларига ўхшаш хоссаларига эга.

¹⁾ Сўнги тенгликнинг тўлиқ асосланишини бу бобнинг кейинги пунктларида келтирамиз.

x аргумент a га интилганда чексиз кичик бўлган $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни қарайлик, шу билан бирга $g(x) \neq 0$ деб фараз қиламиз.

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (3.58)$$

бўлса, x аргумент a га интилганда $f(x)$ чексиз кичик функция $g(x)$ га эквивалент дейилади. Бу факт бундай белгиланади:

$$f \sim g.$$

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad (c \neq 0, c = \infty) \quad (3.59)$$

бўлса, $f(x)$ ва $g(x)$ чексиз кичик функциялар бир хил кичиклик тартибидаги чексиз кичик функциялар дейилади.

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (3.60)$$

бўлса, x аргумент a га интилганда $f(x)$ чексиз кичик функция $g(x)$ га қараганда юқори тартибли кичик функциядир. Бу ҳол учун

$$f(x) = o(g(x))$$

белгилашдан фойдаланилади.

Агар a нуқта атрофида

$$|f(x)| < A |g(x)| \quad (3.61)$$

тенгсизлик бажарилса $f(x)$ ва $g(x)$ чексиз кичик функциялар x аргумент a га интилганда

$$f(x) = O(g(x))$$

муносабат билан боғланган дейилади.

Олдинги пунктда биз x аргумент 0 га интилганда x ва $\ln(1+x)$ чексиз кичик функциялар учун (3.58) муносабат бажарилишини кўрсатган эдик, демак,

$$\ln(1+x) \sim x.$$

x аргумент 0 га интилгандаги $e^x - 1$ ва x чексиз кичик функциялар ҳам эквивалентдир.

$$e^x - 1 \sim x.$$

x аргумент 1 га интилгандаги $4(x-1)^2$ ва $(x-1)^2$ чексиз кичик функциялар бир хил кичиклик тартибидаги чексиз кичик функциялардир, чунки улар учун (3.59) муносабат бажарилади.

x аргумент 0 га интилгандаги $5x^4$ чексиз кичик функция $3x^3$ га қараганда кичиклиги юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{3} = 0,$$

ва демак, (3.60) муносабат бажарилади, яъни

$$5x^4 = o(3x^3).$$

Энди иккита чексиз кичик функциянинг эквивалентлик критерийсини кўриб чиқамиз, бу эса уларни бирор тенглик билан боғлашга имкон беради.

3.17-теорема. x аргумент a интилганда ва a нуқтанинг бирор атрофида $g(x) \neq 0$ бўлганда

$$f(x) \sim g(x)$$

бўлиши учун

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad (3.62)$$

бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $h(x) = o(g(x))$.

Исботи. Зарурлиги. Қуйидагига эгамиз:

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{g(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Демак, (3.60) тенглик бажарилади, ҳақиқатан ҳам,

$$h(x) = o(g(x)).$$

Етарлилиги. (3.62) нинг иккала қисмини $g(x)$ га бўламиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{h(x)}{g(x)},$$

у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = 1.$$

Демак, (3.58) тенглик бажарилади, яъни $f(x)$ ва $g(x)$ миқдорлар эквивалент. Теорема исбот қилинди.

Чексиз катта функциялар ҳам худди шундай таққосланади. Масалан, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x аргумент a га интилганда чексиз катта функциялар бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

бўлганда $f(x)$ функция $g(x)$ га қараганда юқори тартибли чексиз катта функциядир.

Функциялар кўпайтмасининг лимитини ҳисоблашда кўпайтувчиларни эквивалент миқдорлар билан алмаштириш мумкин, аммо бунда миқдорлар эквивалентлик хоссасига тўла аниқланган нуқталар атрофида эга бўлишини ҳамда чексиз кичик ва чексиз катта миқдорларнинг мутлақо таққослаб бўлмайдиган жуфтлари борлигини ёдда тутиш зарур.

3.3-§. Функциянинг узлуксизлиги

3.3.1. Функциянинг нуқтада узлуксизлиги таърифи; аргумент ва функциянинг орттирмаси, узилиш турлари. Бирор X тўпламда берилган $f(x)$ функцияни қарайлик. Агар $f(x)$ функциянинг x аргумент x_0 га интилгандаги лимити мавжуд ва $f(x_0)$ билан бир хил бўлса:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x),$$

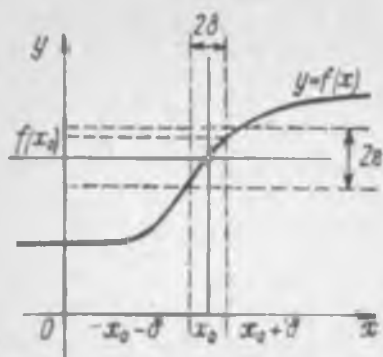
у ҳолда $f(x)$ функция $x_0 \in X$ нуқтада *узлуксиз* дейилади, яъни $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ шундайки, $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $\forall x$ да $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Функция лимитининг кетма-кетликлар тилидаги таърифидан фойдаланиб, бундай дейишимиз мумкин: x_0 нуқтага яқинлашувчи исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

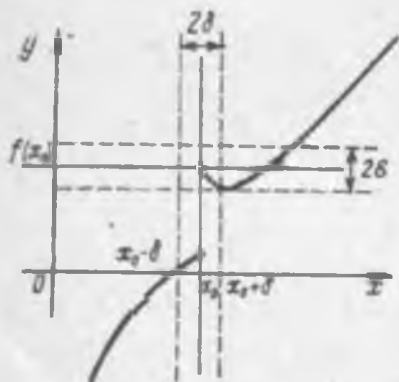
тенглик ўринли бўлганда ва фақат шундагина $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиздир.

Юқорида келтирилган таърифни геометрик жиҳатдан тасвирлаш учун функциянинг узлуксизлиги таърифини унинг $y = f(x)$ графиги билан боғлаймиз. Бунинг учун бирор $\varepsilon > 0$ ни танлаймиз ва $y = f(x_0)$ тўғри чизиқ бўйлаб эни 2ε бўлган полоса ясаймиз. У ҳолда, агар функция

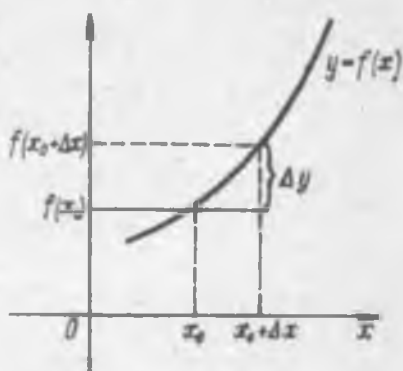


3.2- расм.

бўйлаб ўтган 2ϵ энли горизонтал полосадан ташқарида ётган қисмини ўз ичига олган бўлади (3.3- расм).



3.3- расм.



3.4- расм.

Энди функция ва эркили ўзгарувчининг бирор фиксирланган x_0 нуқтадаги орттирмасини қараймиз. Айтайлик, $\Delta x = x - x_0$ эркили ўзгарувчининг орттирмаси, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ эса функциянинг орттирмаси бўлсин.

3.18-теорема. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ёки x аргумент 0 га интилганда $\Delta y = o(1)$. Бошқача сўз билан айтганда, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келади.

Исботи. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Унда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \end{aligned}$$

Теорема исбот қилинди.

Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда у X тўпلامда узлуксиз дейилади.

$f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ да аниқланган бўлсин. Агар

$$\lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x) = f(x_1) \text{ ёки } \lim_{x \rightarrow x_2 - 0} f(x) = f(x_2)$$

бўлса, мос равишда $f(x)$ функция x_1 нуқтада ўнгдан узлуксиз ёки x_2 нуқтада чапдан узлуксиз дейилади.

Агар функция кесманинг ички нуқталарида, чап учидан ўнгдан ва ўнг учидан чапдан узлуксиз бўлса, у кесмада узлуксиз дейилади.

Ҳамма элементар функциялар x нинг ўзлари мавжуд бўлган барча қийматларида узлуксиз эканлигини исботлаш мумкин.

Элементар функцияларнинг исталган арифметик комбинацияси бу комбинация митнога эга бўлган ҳар бир нуқтада узлуксиз. Масалан, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз ва $g(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

кўринишда аниқланган $h(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0).$$

Агар, қуйидаги талаблардан камида бири бузилган бўлса, x_0 нуқтанинг атрофида аниқланган $f(x)$ функция x_0 нуқтада *узилишга эга* деймиз:

1) ушбу лимитлар мавжуд: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$;

2) $f(x_0 - 0)$ ва $f(x_0 + 0)$ лимитлар чекли;

3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

$$4) f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Бу талабларнинг қайсиниси бузрилишига қараб, x_0 нуқтада мос равишда: 1) *аниқмаслик нуқтаси*, 2) *чексиз сакраш нуқтаси*, 3) *сакраш нуқтаси*, 4) *йўқотиб бўладиган узилиш нуқтаси* дейилади. Сўнгги ҳолда $f(x)$ функциянинг битта x_0 нуқтадаги қийматини ўзгартириб, $f(x)$ ни $x = x_0$ нуқтада узлуксиз қилиш мумкин.

3), 4) узилишларни *биринчи тур узилиш*, 1), 2) узилишларни *иккинчи тур узилиш* дейилади. Китобхонга мустақил равишда қуйидагини кўрсатишни тавсия қиламиз: $x = 0$ нуқта $y = 1/x$ учун чексиз сакраш нуқтаси,

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} & -1, \\ \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} & 0, \\ \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} & 1 \end{cases}$$

учун чекли сакраш нуқтаси, агар $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.63)$$

тенглик билан аниқланадиган бўлса, $f(x) + f(-x)$ функция учун йўқотиб бўладиган узилиш нуқтасидир.

Агар $f(x)$ функциянинг X тўпламдаги узилиш нуқталари тўплами чекли бўлса ва барча узилиш нуқталар биринчи тур бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда *бўлакли-узлуксиз* дейилади. (3.63) функция *бўлакли-узлуксиз* функцияга мисол бўлади.

3.3.2. Мураккаб функциянинг узлуксизлик шарт. Юқорида қайд этиб ўтганимиздек¹⁾, мураккаб функция тегишли тўпламларда аниқланган иккита функциянинг суперпозицияси сифатида аниқланади:

$$F(x) = g(f(x));$$

$$(E \subset X) \xrightarrow{f(x)} (E' \subset Y) \xrightarrow{g(y)} (E'' \subset Z).$$

3.19-теорема. $f(x)$ функция $x_0 \in E$ нуқтада, $g(x)$ функция эса $y_0 \in E'$ нуқтада узлуксиз, шу билан бирга $y_0 = f(x_0)$ бўлсин. У ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

Исботи. Функция лимитининг кетма-кетликлар тилидаги таърифидан фойдаланамиз. У ҳолда исталган

¹ 2.2.7- пункт 38- бетга қаранг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad (3.64)$$

кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x_0)$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатишимиз зарур. Ҳақиқатан f функциянинг узлуксизлигига асосан (3.64) хоссага эга бўлган исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0$$

га эгамиз, у ҳолда $g(x)$ функциянинг узлуксизлигига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

бўлган $\{y_n\}$ қийматлар кетма-кетлиги учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) \quad (3.65)$$

лимит ўринли. Демак,

$$y_n = f(x_n)$$

қилиб оладиган бўлсак, (3.65) тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, исталган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)),$$

яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = F(x_0).$$

Теорема исбот қилинди.

Энди, 3.2.3-пунктда кўрилган лимитларга қайтиб. у ерда қилинган мулоҳазаларни тўла асослашимиз мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a.$$

Яна бир лимитни кўрайлик:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{m \ln(1+x)} - 1}{m \ln(1+x)} \cdot \frac{m \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot m = m,$$

яъни биз $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик бўлган $\{(1+x)^m - 1\}$ ва x миқдорлар бир хил кичиклик тартибида эканлигини кўрсатдик.

3.3.3. Узлуксиз функцияларнинг баъзи хоссалари. Ёпиқ интервалда узлуксиз бўлган функцияларнинг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз.

3. 20-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, y ҳолда бу $[a, b]$ тўпламда камида битта шундай $x = x_1$ нуқта топилдики, функциянинг $f(x_1)$ қиймати

$$f(x_1) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

муносабатни қаноатлантиради.

$[a, b]$ ёпиқ интервалда, шунингдек, камида битта шундай $x = x_2$ нуқта топилдики, функциянинг $f(x_2)$ қиймати

$$f(x_2) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

муносабатни қаноатлантиради.

$M = f(x_1)$ қийматни $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ ёпиқ интервалдаги энг катта қиймати деймиз. $m = f(x_2)$ қийматни $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ ёпиқ интервалдаги энг кичик қиймати деймиз.

3. 21-теорема. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ тўпламда аниқланган ва узлуксиз ҳамда $x_1, x_2 \in$ нуқталарда бирор $f(x_1) = A, f(x_2) = B$ қийматларни қабул қилсин. У ҳолда A ва B сонлар орасида ётувчи C сон қандай бўлмасин, камида битта шундай $c \in [a, b]$ нуқта топилдики, $f(c) = C$ бўлади.

3. 1-натижа. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, y ҳолда бу функция $[a, b]$ тўпламда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматлари орасидаги исталган қийматни камида бир марта қабул қилади.

3. 2-натижа. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ интервалда аниқланган ва узлуксиз ҳамда бу кесманинг учларида турли ишорали қийматлар қабул қилса ($f(a)f(b) < 0$) у ҳолда (a, b) интервалнинг ичида камида битта шундай $x = c$ нуқта топилдики, бу нуқтада функция нолга айланади.

$$f(c) = 0, \quad c \in (a, b).$$

$x = c$ нуқта $y = f(x)$ функциянинг ноли (ёки илдизи) дейилади.

3-БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Кетма-кетлик деб нимага айтилади?
2. Қандай иккита кетма-кетлик тенг дейилади?
3. a нуқтанинг ε -атрофи нима?
4. Кетма-кетликнинг лимити деб нимага айтилади?
5. Қисм кетма-кетлик нима?
6. Яқинлашувчи кетма-кетлик иккита лимитга эга бўлиши мумкинми?
7. Монотон ўсувчи юқоридан чегараланган кетма-кетлик лимитга эгами?
8. Монотон камаювчи қуйидан чегараланган кетма-кетлик лимитга эгами?
9. Қандай кетма-кетлик чексиз кичик (чексиз катта) дейилади?
10. Чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликлар орасида қандай боғланиш бор?
11. Лимитни ҳисоблашда қайси ҳолда аниқмаслик ҳолати юз беради?
12. Функциянинг ε , δ -атрофлар тилидаги лимити нима?
13. Функциянинг кетма-кетликлар тилидаги лимити нима?
14. Монотон функция қайси ҳолларда лимитга эга?
15. Қандай чексиз кичик миқдорлар бир хил кичиклик тартибда эквивалент дейилади?
16. Қайси ҳолда бир чексиз кичик функция иккинчисига қараганда юқори тартибли кичик дейилади?
17. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги узлуксизлиги нима?
18. $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси нима?
19. Мураккаб функциянинг узлуксизлик шарти нимадан иборат?

3-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. $n \rightarrow \infty$ да $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ кетма-кетлик 1 сонига тенг лимитга эгаллигини кўрсатинг.

2. $n \rightarrow \infty$ да

$$a) x_n = 2 + \frac{1}{n+1}, \quad b) x_n = 2 - \frac{2}{n+1}$$

кетма-кетликлар 2 сонига тенг лимитга эгаллигини кўрсатинг.

Кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+1}{n^3+1}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n+1}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+3}{2n^3+1}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{(3n+1)(n-1)}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$$

Исботланг:

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{2^n} \right) = a.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = a.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4^n} \right) = 0.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} \right) = 0.$$

Кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{4^n} \right).$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-6 + \frac{1}{3^n} \right).$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 + \frac{(-1)^n}{7^n} \right).$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{5} \right).$$

Ажойиб лимитдан фойдаланиб, (3.1.5-пунктга қаранг) кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = e.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{n+3}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} n \{ \ln(n+3) - \ln n \}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} n \{ \ln n - \ln(n+2) \}.$$

25°. Қуйидаги

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) = 1$$

чимитни исботланг ва $\varepsilon = 0,01$ га мос N ни топинг.

ε , δ -атрэфлар тилида исботланг:

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 1.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x - x^2) = 4.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Лимитларни топинг.

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x + 1}{3x + 2}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x + x^2 + 4x^2).$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}).$$

$$33. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x-6}{x+6}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2 + x + 1}.$$

$\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш. Лимитларни топинг:

$$36. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{2x^2 - 7x + 3}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{5x^4 - 1}{x^3 + 3x}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 1}{4x^3 - 2x - 16}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9}{x^2 - 3x}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$49. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^3} - \sqrt{7+2x-x^3}}{x^2 - 2x}$$

$\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш. Лимитларни ҳисоб-
ланг:

$$52. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}).$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$54. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - x}).$$

$$55. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^3 - x})$$

$$56. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$57. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right).$$

$$58. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^2-8} \right)$$

$$59. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-4x}).$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ ажойиб лимитдан фойдаланиб, лимитларни топинг:

$$60. \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{(1-x)/x}.$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{2x}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

$$64. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x-3}{x} \right)^{\frac{x+1}{2}}$$

$$65. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2+1}$$

Функциянинг чап томонлама ва ўнг томонлама лимитини топинг.

$$66. f(x) = \frac{1}{x + 2^{1/(x-3)}}, \quad x \rightarrow 3.$$

$$67. f(x) = \frac{x^2 - x^2}{2|x-1|}, \quad x \rightarrow 1.$$

$$68. f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}, \quad x \rightarrow 0.$$

Функция узлуксиз эканлигини исботланг:

$$69. f(x) = x^3. \quad 70. f(x) = 2x. \quad 71. f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг ва узилиш характерини аниқланг:

$$72. y = \frac{x}{x-}, \quad 73. y = \frac{x^2 - 25}{x-5}.$$

$$74. y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} \quad 75. y = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

3-БОБГА ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИЛИШЛАР

1. Ечилиши. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ га эгамиз (3.1.2- пунктга қаранг).

Исботлаш учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни танлаймиз. N ни шунчалик катта қилиб танлаймизки, барча $n > N$ лар учун $1/n < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун $N = [1/\varepsilon]$ қилиб олиш етарли, N ни бундай танлаганда барча $n > N$ лар учун $|x_n - 1| < \varepsilon$ ни ҳосил қиламиз. Демак, кетма-кетлик лимитининг таърифига асосан: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

3. Ечилиши. Касрнинг бугун қисмини ажратамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \\ &= 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ ни исботлаш мумкин. Демак, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3.$$

Шу мисолнинг ўзини қуйидагича ечиш ҳам мумкин. n дискрет ўзгарувчининг юқори даражасини танлаймиз. Ёзининг мисолда бу n дир. Касрнинг сурат ва махражини ҳадма-ҳад n га бўлиб, қуйидагини қосил қиламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}.$$

Лимитнинг хоссасидан фойдаланиб (3.1. 7-пунктга қаранг), қуй-
дагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n} + \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}.$$

$1/n$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да чексиз кичикдир ($n \rightarrow \infty$ да чексиз катта n миқдорга тескари миқдор сифатида), шунинг учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{n + 1} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3.$$

Жавоби. 3.

4. Жавоби. 3.

5. Ечилиши. Бу мисолда n нинг юқори даражаси 2 га тенг;
касрнинг сурат ва махражини ҳадма-ҳад n^3 га бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

Касрнинг сурати 0 га интилади, махражи эса ўзгармас сон, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 1} = 0.$$

Жавоби. 0.

6. Жавоби. ∞ .

7. Жавоби. 2.

8. Жавоби. 2.

9. Жавоби. 1.

10. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни танлаймиз ва $|x_n - a| < \varepsilon$ ёки $\left| \left(a - \frac{1}{2^n} \right) - a \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ни қараймиз, бундан $-\lg 2 < \lg \varepsilon$, демак, $n > \frac{\lg \varepsilon^{-1}}{\lg 2}$. У қолда изланаётган $N = N(\varepsilon)$ боғланиш $N = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon^{-1}}{\lg 2} \right\rceil$ кўринишда бўлади. Биз шундай $N = N(\varepsilon)$ ни топдикки, $\forall n > N$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади, демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{2^n} \right) = a$.

11. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонини танлаймиз. Ушбу айирмани қарайлик:

$$|x_n - a| = \left| a + \frac{(-1)^n}{n^2} - a \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

таърифга кўра $1/n^2$ ифода е дан кичик бўлиши лозим. $N = [1/\sqrt{\epsilon}]$ қилиб олсак, $\forall n > N$ учун $|x_n - a| = \frac{1}{n^2} < \epsilon$ ни ҳосил қиламиз. Бу эса қуйидагини англатади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = a.$$

15. Ж а в о б и. 2.

16. Ж а в о б и. -6 .

17. Ж а в о б и. 8.

18. Ж а в о б и. Лимит мавжуд эмас.

19. Е ч и л и ш и. Янги $\frac{2}{n} = \frac{1}{m}$ ўзгарувчи киритамиз, у ҳолда $m = \frac{n}{2}$, $n = 2m$, сўнгра $n \rightarrow \infty$ да $m \rightarrow \infty$. Демак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{2m} = \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right\}^2.$$

Шундай қилиб, ажойиб лимитдан фойдаланиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2$ ни ҳосил қиламиз. Ж а в о б и. e^2 .

20. Кўрсатма. Қуйидагича олинг: $-1/3n = 1/m$, $m = -3n$, $n = -m/3$. $n \rightarrow +\infty$ да $m \rightarrow -\infty$. Ж а в о б и. $e^{-1/3}$.

21. Е ч и л и ш и. $4/n = 1/m$, $n = 4m$ қилиб оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{4m+3} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{4m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right)^3 = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right\}^4 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{n+3} &= \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right\}^4 = e^4. \end{aligned}$$

Ж а в о б и. e^4

22. Кўрсатма. Бутун қисми ажратинг. Ж а в о б и. e^{-1} .

23. Е ч и л и ш и. Лимит белгиси остидаги ифоданинг шаклини ўзгартирамиз:

$$n(\ln(n+3) - \ln n) = n \ln \frac{n+3}{n} = \ln \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{n}{3} \cdot 3}.$$

Лимит хоссасидан фойдаланамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{n}{3} \cdot 3} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{n/3} \right)^3 = \ln e^3 = 3.$$

Ж а в о б и. 3.

24. Жавоби.—2.

25. Кўрсатма. $N = N(\varepsilon)$ функцияни топинг ва $\varepsilon = 0,01$ деб, N ни ҳисобланг. Жавоби. $N = 50$.

26. Функция лимити таърифига таяниб, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ни топишимиз керакки, $|x - 2| < \delta$ нинг бажарилишидан $|(x - 3) - (-1)| = |x - 2| < \varepsilon$ нинг бажарилиши келиб чиқсин. Равшанки, $\delta = \varepsilon$ деб талаб қилинаётган даъвои ҳосил қиламиз.

29. Ечилиши. Функция лимити таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ни топишимиз зарурки, $|x - 2| < \delta$ нинг бажарилишидан $|x^2 - 4| < \varepsilon$ нинг бажарилиши келиб чиқсин. Сўнгги тенгсизликнинг шаклини биринчи тенгсизлик ёрдамида алмаштириб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x - 2)(x + 2)| = \\ &= |x - 2| |x + 2| < \delta |x - 2 + 4| < \delta (|x - 2| + 4) < \delta (\delta + 4) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\delta^2 + 4\delta < \varepsilon$ бўлганда биринчи тенгсизликнинг бажарилишидан иккинчи тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ эканлигини исботладик.

30. Ечилиши. $x \rightarrow 2$ бўлгани учун касрнинг сурати $5 \cdot 2 + 1 = 11$ га, махражи эса $3 \cdot 2 + 2 = 8$ га интилади. Демак, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x + 1}{3x + 2} = \frac{11}{8}$.

Жавоби. $11/8$.

31. Жавоби. 2.

32. Жавоби. 2.

33. Ечилиши. $x \rightarrow -6$ да касрнинг сурати (-12) га, махражи 0 га интилади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x - 6}{x + 6} = -12 \lim_{x \rightarrow -6} \frac{1}{x + 6}.$$

Бу ерда $x \rightarrow -6$ да $1/(x + 6)$ чексиз кичик миқдорга тескари миқдордир, бундан $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x - 6}{x + 6} = \mp \infty$. Жавоби. $\mp \infty$.

34. Жавоби. $\pm \infty$.

35. Жавоби. 0

36. Ечилиши. Касрнинг сурат ва махражи $x \rightarrow \pm \infty$ да чексиз ўсади. Бу ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик бор дейиш қабул қилинган. Касрнинг сурат ва махражини x нинг юқори даражасига бўлиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}.$$

$x \rightarrow \pm \infty$ да $\frac{5}{x}, \frac{7}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{3}{x^2}$ касрларнинг ҳар бири нолга интилгани учун қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^3 + 5x + 1}{2x^3 - 7x + 3} = \frac{3 + 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \frac{3}{2}.$$

Жавоби. $3/2$.

37. Жавоби. 1.

38. Жавоби. 0.

39. Жавоби. $+\infty$.

40. Жавоби. -2 .

41. Жавоби. $-\infty$.

42. Ечилиши. Бу ерда касрнинг сурат ва махражи $x \rightarrow 3$ да нолга интилади (бевосита ўрнига қўйишда $\frac{0}{0}$ аниқмаслиқни ҳосил қиламиз дейиш қабул қилинган). Сўнгра

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

бўлгани учун $x \neq 3$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x}$. Лекин

$x \rightarrow 3$ да $\frac{x+3}{x}$ каср $\frac{3+3}{3} = 2$ сонига интилади. Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2. \text{ Жавоби. } 2.$$

43. Жавоби. $3/2$.

44. Жавоби. -4 .

45. Жавоби. -1 .

46. Жавоби. -12 .

47. Жавоби. 0.

48. Ечилиши. Бу ерда касрнинг сурат ва махражи $x \rightarrow 0$ да нолга интилади (бундай ҳолда бевосита ўрнига қўйиш билан $\frac{0}{0}$ аниқмаслиқни ҳосил қиламиз дейиш қабул қилинган).

Касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{x+4}+2$ га кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{4}$. Жавоби. $1/4$.

49. Жавоби. $-1/4$.

50. Жавоби. 1.

51. Жавоби. $\sqrt{7}/4$.

52. Ечилиши. Қаралаётган ифодани $\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}$ га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Ҳосил қилинган касрнинг сурат ва махражини x га бўламиз (сурат ва махражни эркин ўзгарувчининг юқори даражасига бўлиб, $\frac{\infty}{\infty}$ аниқмасликини очамиз). Қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Жавоби. 2.

53. Кўрсатма. Лимит белгиси остидаги ифодани умумий махражга келтириш. Лимитни ҳисобланг. Жавоби. $1/2$.

54. Жавоби. Агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса, $1, 5$; агар $x \rightarrow -\infty$ бўлса, ∞ .

55. Жавоби. 1.

56. Агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса, 0; агар $x \rightarrow -\infty$ бўлса, $-\infty$.

57. Жавоби. $-1/4$.

58. Жавоби. $1/2$.

59. Жавоби. -2 .

60. Ечилиши. $-4x = y$ алмаштиришни бажарамиз, $x = \frac{y}{-4}$;
 $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 = -\frac{4}{y} - 1 = -\left(1 + \frac{4}{y}\right)$, $x \rightarrow 0$ да $y \rightarrow 0$. У ҳолда

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-\frac{4}{y}-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-4} \cdot (1+y)^{-1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-4}.$$

Демак, $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}} = e^{-4}$. Жавоби. e^{-4} .

61. Жавоби. e^2 .

62. Кўрсатма. Касрнинг бутун қисмини ажратинг:

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1-1-1}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1}; \quad y = -\frac{2}{2x+1} \text{ деб олинг.}$$

Жавоби. e^{-2} .

63. Кўрсатма. $3/x = y$ алмаштиришни бажаринг: $x = 3/y$, $x \rightarrow \pm\infty$ да $y \rightarrow 0$. Жавоби. e^3 .

64. Жавоби. $\frac{1}{e\sqrt{e}}$.

65. Жавоби. e .

66. Ечилиши. Агар $x \rightarrow 3 - 0$ бўлса, у ҳолда $1/(x-3) \rightarrow -\infty$ ва $2^{1/(x-3)} \rightarrow 0$. Демак, $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x + 2^{1/(x-3)}} = \frac{1}{3}$. Агар $x \rightarrow 3+0$ бўлса, у ҳолда $1/(x-3) \rightarrow +\infty$, $2^{1/(x-3)} \rightarrow +\infty$. Унда $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x + 2^{1/(x-3)}} = 0$. Жавоби. $\lim_{x \rightarrow 3-0} y = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} y = 0$.

67. Жавоби. $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{1}{2}$.

68. Жавоби. $\lim_{x \rightarrow -0} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$.

69. Ечилиши. Узлуксизлик таърифига биноан, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келишини кўрсатишимиз зарур.

Функциянинг бирор x нуқтадаги орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2x + \Delta^3x - x^3.\end{aligned}$$

У ҳолда $\Delta y = \Delta x (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2x)$. Бу тенгликда лимитга ўтиб, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $y = x^3$ функция бутун $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз.

72. Ечилиши. Функциянинг чап томонлама ва ўнг томонлама лимитларини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

Шундай қилиб, функция $x \rightarrow 4$ да чап томонлама лимитга ҳам, ўнг томонлама лимитга ҳам эга эмас. Демак, $x = 4$ иккинчи тур узилиш нуқтадир.

73. Функция $x = 5$ нуқтада аниқланмаган, чунки ўрнига қўйиб $\frac{0}{0}$ аниқмасликка келамиз. $x \neq 5$ да

$$y = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = x + 5.$$

Бу ҳолда осонгина кўриш мумкинки,

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10.$$

Шундай қилиб, функция $x = 5$ да биринчи тур узилишта эга, шу билан бирга агар $x = 5$ да $y = 10$ деб келишиб олинadиган бўлса, бу узилишни йўқотиш мумкин.

74. Жавоби. $x = 1$, $x = 2$ — узлуксизликни йўқотиб бўладиган узилиш нуқталари.

75. Жавоби. $x = -2$, $x = -3$ — иккинчи тур тузилиш нуқталари, $x = -1$ — йўқотиб бўладиган узилиш нуқта.

4- БОБ

ҲОСИЛА. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

4.1- §. Ҳосила

4.1.1. Ҳосила, унинг геометрик ва механик маъноси. Бирор (a, b) интервалда берилган $y = f(x)$ функцияни қарайлик. Ихтиёрий $x \in (a, b)$ нуқтани оламиз ва бу нуқтада $x + \Delta x \in (a, b)$ бўладиган қилиб Δx орттирма берамиз. Бунда функция

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

орттирма олади (84-бетга қаранг). $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни қарайлик.

4.1-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x \neq 0$) да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва y'_x ¹⁾, ёки $f'(x)$, ёки $\frac{dy}{dx}$ ²⁾ орқали белгиланади. Шундай қилиб,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0) \quad (4.1)$$

ёки

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

(a, b) даги $f'(x)$ мавжуд бўладиган ҳамма x ларни қарайдиган бўлсак, ҳар бир x нуқтага тайин $f'(x)$ қиймат мос келишини кўрамиз. Шундай қилиб, $f'(x)$ x нинг бирор функцияси бўлиб, у дастлабки функциядан (4.1) формулани қўлланиш билан ҳосил қилинади. Ҳосилани ҳисоб-

¹⁾ Ёзув бундай ўқилади: «игрек штрих икс».

²⁾ Ёзув бундай ўқилади: «де икс де игрек».

лашда биз доимо $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аннқмасликни очиш билан иш кўраимиз.

Ҳосилани топиш функцияни дифференциаллаш деб аталади.

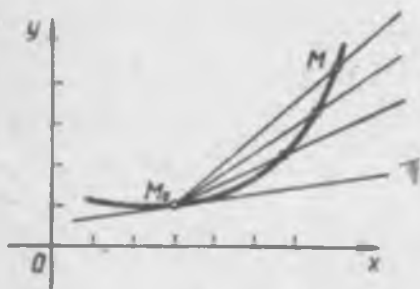
4.1- мисол. $y = x^2$ функцияни қарайлик. $x = 1/2$ нуқтадаги ҳосилани ҳисоблаймиз. Ҳосила таърифига кўра

$$y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

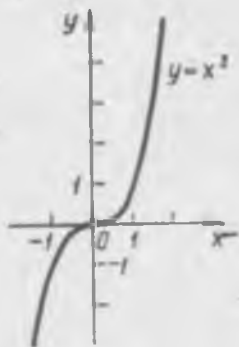
Шундай қилиб, бу мисолда $y' = 2x$. Бу натижани билган ҳолда, ҳосиланинг исталган нуқтадаги қийматини ҳисоблаш осон. Масалан, $x = 1/2$ да $y' = 1$ ни ҳосил қиламиз.

Ҳосила тушунчаси функция ўзгаришини характерлашга, функцияни текшириш аппаратини яратишга имкон беришини кейинчалик кўраимиз.

Энди ҳосиланинг геометрик маъносига эътибор берайлик. Эгри чизиққа уринма тушунчасини киритамиз. Айтайлик, M_0 — бирор узлуксиз эгри чизиқнинг (узлуксиз функция графигининг) нуқтаси бўлсин. Бу нуқтадан M_0M кесувчи ўтказамиз (4.1-расм) ва M нуқтани



4.1- расм.



4.2- расм.

эгри чизиқ бўйлаб M_0 нуқтага интилтирамиз. У ҳолда M_0M кесувчи M_0 нуқта атрофида бурила бориб, бирор лимит вазиятни эгаллайди.

4.2- таъриф. M нуқта эгри чизиқ бўйлаб исталган қонун бўйича ҳаракатланганда ҳам M_0 вазиятни эгаллаш-

га интилса, y ҳолда M_0M кесувчининг лимит вазиятини эгаллайдиган тўғри чизиқ M_0 нуқтада эгри чизиққа уринма дейилади.)

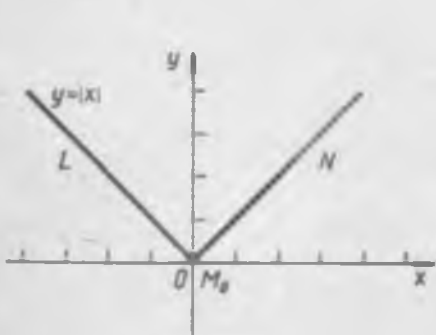
Бу таъриф нуқтан назаридан: а) уринма эгри чизиқни кесиб ўтиши мумкин; масалан, Ox ўқ $y = x^3$ функциянинг графигига уринмадир (4.2-расм); б) уринма эгри чизиқ билан бир нечта умумий нуқтага эга бўлиши мумкин, масалан, $y = 1$ тўғри чизиқ графиги 4.3-расмда тасвирлан-



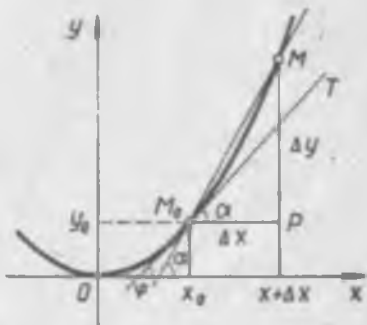
4.3-расм.

ган эгри чизиқ билан чексиз кўп умумий нуқтага эга; в) уринма мавжуд бўлмаслиги мумкин, масалан, 4.4-расмда M_0 нуқтада уринмага эга бўлмаган эгри чизиқ тасвирланган. Ҳақиқатан, M нуқта M_0 га чапдан интилганда кесувчи LM_0 вазиятни, M нуқта M_0 ўнгдан интилганда эса NM_0 вазиятни эгаллашга интилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазаларни $y = f(x)$ функциянинг графигига $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада уринма яшаш учун татбиқ қилайлик (4.5-расм). Графикда бошқа $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқтани олиб, M_0M кесувчини ўтказамиз. M_0M нинг Ox ўққа қиялик бурчаги α бўлсин. U ҳолда $M \rightarrow M_0$ да ёки бошқача қилиб айтганда, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да, равшанки,



4.4-расм.



4.5-расм.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \varphi \quad (4.2)$$

(бу ерда φ — M_0T уринманинг Ox ўққа қиялик бурчаги) ёки

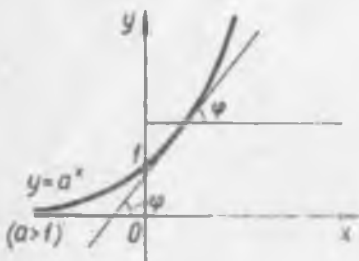
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.3)$$

4.5-расмда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ эканлигини кўриш мумкин (бу ерда Δx ва Δy мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин), у ҳолда (4.3) қуйидаги кўринишда ёзилади:

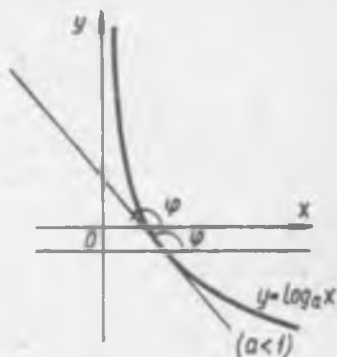
$$\angle \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (4.4)$$

яъни $y = f(x)$ функциянинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги ҳосиласи графикка бу нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўққа қиялик бурчагининг тангенсига тенг.

Функция графигига ўтказилган уринманинг қиялик бурчаги тангенсининг ишораси функциянинг ўсиши (камайиши) билан боғлиқлиги равшан.



4.6- расм.



4.7- расм.

4.6-расмда ўсувчи функция графиги тасвирланган. Бу ерда $\operatorname{tg} \varphi > 0$ ва, демак, $y' > 0$. 4.2-расмда ўсувчи функция графиги келтирилган бўлиб, унинг учун $f'(0) = 0$. Шунга ўхшаш, 4.7-расмда камаювчи функция учун $y' < 0$ эканлиги кўриниб турибди.

Шундай қилиб, функция ўсишининг (камайишининг) зарур шартини ҳосил қилдик.

Агар дифференциалланувчи функция бирор интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу интервалдаги ҳосиласи манфий эмас (мусбат эмас).

Ҳақиқатан, юқорида (33-бетда) ўсувчи функция учун Δx нинг ишораси Δy нинг ишораси билан бир хил бўлишини кўрдик. Лекин ундай бўлса,

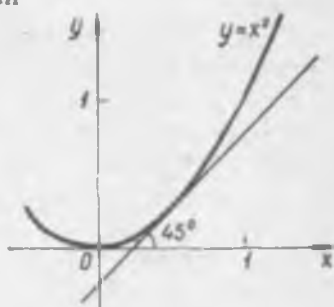
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Шунга ўхшаш, камаювчи функция учун $\Delta x > 0$ бўлганда $\Delta y < 0$ га эга бўламиз, яъни

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

4.2-мисол. $y = x^2$ функция графигига $x = 1/2$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг қиялиги бурчак тангенсини топинг.

Юқорида (4.1-мисолда) $x = 1/2$ да $y = x^2$ функциянинг ҳосиласи 1 га тенглигини кўрган эдик. Демак, графикка бу нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқ билан 45° бурчак ҳосил қилади (4.8-расм).

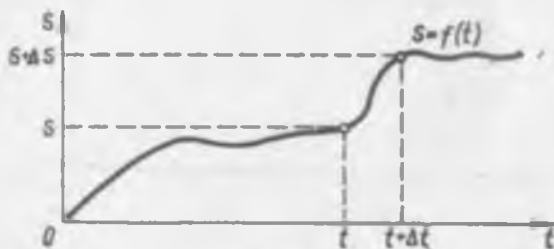


4.8-расм.

Энди тўғри чизик бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги ҳақидаги масалани кўрайлик. Нуқтанинг ўтган сўли t вақтнинг бирор

$$s = f(t)$$

функцияси бўлиши равшан. Фараз қилайлик, t вақт моментида нуқта s вазиятда бўлсин (4.9-расм). Бирор Δt вақт-



4.9-расм.

дан кейин нуқта $s + \Delta s$ вазиятда бўлади, бу ерда Δs нуқтанинг Δt вақтда ўтган сўли. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбат нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги, бу нисбатнинг $\Delta t \rightarrow 0$ да-

ги лимити эса нуқтанинг t вақт моментидаги *оний тезлиги* дейилади. Лекин ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s' \quad (4.5)$$

Шундай қилиб, механика нуқтаи назаридан *йўлнинг нуқтасидаги вақт бўйича ҳосила бу нуқтадаги оний тезликдир.*

4.1.2. Функция ҳосиласининг мавжудлиги ва функциянинг узлуксизлиги орасидаги боғланиш. 3-боб, 3.3.1-пунктда сонли функциянинг узлуксизлик тушунчаси кiritилган эди. Ҳосиланинг мавжудлиги (дифференциалланувчанлиги) функциянинг шундай янги хоссаларини аниқлашга имкон берадики, бундай хоссаларга узлуксиз функция, умуман айтганда, эга бўлмайди. Функциянинг нуқтада дифференциалланувчанлиги ва узлуксизлиги орасидаги боғланишни аниқлаймиз.

Аввало исталган узлуксиз функция ҳамма вақт ҳам дифференциалланувчи бўлавермаслигини айтиб ўтамиз. Бундай даъво қила олишимизга асос бўлиши учун, масалан, $y = |x|$ функцияни текшириш кифоя. $x = 0$ нуқтада y' ҳосила мавжуд эмас, чунки $x = 0$ да уринма мавжуд эмас (4.5-рasm).

Қуйидаги теоремани исботлаймиз.

4.1-теорема. Агар $y = f(x)$ функциянинг x нуқтада *чекли ҳосиласи мавжуд бўлса*, y ҳолда $f(x)$ бу нуқтада *узлуксиздир.*

Теорема шартига кўра

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

мавжуд. Лимит таърифига кўра (58-бетга қаранг):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \text{ ёки } \Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (4.6)$$

бу ерда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. У ҳолда

$$\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x), \quad (4.7)$$

бу ерда $o(\Delta x) \Delta x$ га қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдор (80-бетга қаранг).

(4.7) дан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$ бўлиши келиб чиқади, демак, $y = f(x)$ функция x нуқтада узлуксиз.

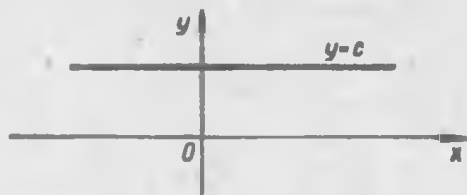
4.1.3. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи. $y = c = \text{const}$ ўзгармас функцияни кўрайлик. $\Delta y = 0$ га эгамиз, шунинг учун

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Демак,

$$c' = 0.$$

Геометрик мулоҳазалардан ҳам шу натижа келиб чиқади. Ҳақиқатан, Ox ўққа параллел бўлган $y = c$ тўғри чизиққа ўтказилган уринма бу тўғри чизиқ билан устма-



4.10- расм.

уст тушади (4.10-расм). Уринманинг Ox ўққа қиялик бурчаги 0 га тенг, бинобарин $\text{tg } \alpha = 0$ ва $y' = 0$.

4.1.4. Даражали функциянинг ҳосиласи. $y = x^\mu$ (μ — исталган ҳақиқий сон, x нинг ўзгариш соҳаси эса μ га бўғлиқ, 2.2.10-пунктга қаранг). Ҳосила таърифига мувофиқ, $y = x^\mu$ функция учун қуйидагига эга бўламиз:

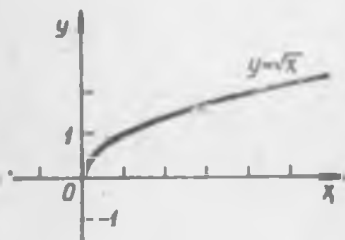
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[x \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right]^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\mu \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\mu-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}, \end{aligned}$$

лекин (3.3.2-пунктга қаранг)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu.$$

Шундай қилиб, $y = x^\mu$ функция учун

$$y' = \mu x^{\mu-1}. \quad (4.8)$$



4.11-расм.

4.3-мисол. $y = x^3$ функцияни қарайлик. (4.8) формула бўйича $y' = 3x^2$. Барча $x \neq 0$ қийматларда $y' > 0$ ва $x = 0$ да $y' = 0$ эканлигини эътиборга олиб, $y = x^3$ функция ўсувчи деб даъво қилиш мумкин (4.2-расм).

4.4-мисол. $y = \sqrt{x}$ функцияни қарайлик. Уни $y = x^{1/2}$ кўрinishда ёзиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$(\sqrt{x})' > 0$, яъни $y = \sqrt{x}$ ўсувчи функция эканлигини айтиб ўтаем. $y = \sqrt{x}$ функция $[0, \infty)$ интервалда аниқланган, шунинг учун $x = 0$ да уннг томонлама ҳосила ҳақидагина гапиришимиз мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

бўлгани учун ординаталар ўқи $y = \sqrt{x}$ функция графигига уринма бўлади (4.11-расм).

4.1.5. Икки функция йигиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг ҳосиласи. $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар дифференциалланувчи бўлсин. Уларнинг

$$1) \quad y = u(x) \pm v(x) \quad (1)$$

йигиндиси ва айирмасининг ҳосиласини топамиз. x нуқта-ни олиб, Δx орттирма берамиз. Бу орттирма Δu ва Δv орттирмаларга олиб келади. u , v ва y функцияларнинг узлуксизлигига асосан (u ва v — дифференциалланувчи!) $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, u , v функцияларнинг орттирилган қийматлари мос равишда $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ бўлади, у ҳолда

$$\Delta y = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v.$$

Бунинг иккала томонини Δx га бўлиб ва лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ёки

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \quad (4.9)$$

4.5-мисол. Агар $y = x^2 + x^5$ бўлса, y ҳолда $y' = 2x + 5x^4$.

Агар

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad (2)$$

бўлса, юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юритиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

y ҳолда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}.$$

$\Delta u \cdot \Delta v = o(\Delta x)$ миқдор Δx га қараганда юқори тартибли чексиз кичиклигини эътиборга олиб, қўйидагини ҳосил қиламиз.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = 0.$$

Узил-кесил қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ёки

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (4.10)$$

Бу қонданинг натижаси сифатида $y = cu$, $c = \text{const}$ функция учун

$$(cu)' = c'u + cu' = cu'$$

ни ҳосил қиламиз, яъни ўзгармас кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Энди

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad v(x) \neq 0$$

касрнинг дифференциаллаш қондасига ўтамиз.

Юқорида юритилган мулоҳазаларга ўхшаш мулоҳазалар юритиб,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

га ёки Δx га бўлсак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

га эга бўламиз.

Лимитга ўтиб ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta v \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2}$$

ёки

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (4.11)$$

4.6-мисол. $y = \frac{2x+1}{x^3}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

(4.11) формула бўйича:

$$y' = \frac{(2x+1)' x^3 - (2x+1) (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{2x^3 - (2x+1) 3x^2}{x^6} = -\frac{4x+3}{x^4}.$$

4.1.6. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Ушбу

$$y = f(\varphi(x)) \quad (4.12)$$

мураккаб функцияни қарайлик (2.2.7-пунктга қаранг). $u = \varphi(x)$ белгилаш киритиб, (4.12) ни

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x) \quad (4.13)$$

кўринишда ёки

$$X \xrightarrow{\varphi} U, \quad U \xrightarrow{f} Y \quad (4.14)$$

акслантиришлар суперпозицияси кўринишида ёзиш мумкин.

φ_x ва f_u чекли ҳосилалар мавжуд деган фаразда мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблашнинг қуйидаги қондаси ўринли:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (4.15)$$

Ҳақиқатан, (4.7) формулага кўра

$$\Delta y = y'_u \Delta u + o(\Delta u).$$

Бу тенгликнинг иккала томонини Δx га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + o(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad (4.16)$$

бу ерда $o(\Delta u)$ Δx га қараганда юқори тартибли чексиз кичик¹ миқдор. Лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} o(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (4.17)$$

$u = \varphi(x)$ функциянинг x нуқтада узлуксизлигига асосан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$ бўлади.

Узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

4.7-мисол. $y = \sqrt{1+x^2}$ функциянинг ҳосиласини топинг. Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 + x^2.$$

(4.15) формула бўйича

$$y'_x = (\sqrt{u})'_u \cdot (1+x^2)'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x$$

ёки киритилган $u = 1 + x^2$ белгилашни эътиборга олинса,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ҳосилаларни амалда ҳисоблашда мураккаб функцияни айрим ташкил қилувчи функцияларга ажратиш мутлақо шарт эмаслигини айтиб ўтамиз.

4.8-мисол. $y = (x^2 + 3x + 4)^2$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

$$y' = 2 \cdot (x^2 + 3x + 4) (x^2 + 3x + 4)' = 2(x^2 + 3x + 4)(2x + 3) = 4x^3 + 18x^2 + 34x + 24.$$

4.1.7. Тескари функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, инъектив, дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция учун $x = f^{-1}(y)$ тескари функция тузилган бўлсин (2.2.6-пунктга қаранг). $x = f^{-1}(y)$ функция узлуксиз ва $y'(x) \neq 0$ деган фаразда

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}} \quad (4.18)$$

эканлигини исбот қиламиз:

Ҳақиқатан,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ҳамда $y = f(x)$ ва $x = f^{-1}(y)$ функцияларнинг узлуксизлигига асосан $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ шартлар тенг кучли бўлгани учун

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

га эга бўламиз, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

4.9-мисол. $y = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$ функциянинг ҳосиласини юқорида ҳосил қилинган (4.18) формуладан фойдаланиб топамиз. Бу функция учун тескари функция $x = y^2$, $y \in (0, +\infty)$ бўлади. $x'_y = 2y$ ни ҳисоблаб ва (4.18) ни қўлланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'_x = \frac{1}{2y} \quad \text{ёки} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Келтирилган бу ечилиш анча сунъийдир¹⁾. Бундан кўра $y = \sqrt{x}$ функциянинг ҳосиласини 4.4-мисолдаги каби топиш анча осондир.

4.1.8. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосиласи.

$y = a^x$ ($a > 0$) функцияни қараймиз. Ҳосила таърифига кўра:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a. \end{aligned}$$

Бу ерда биз маълум

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$$

лимитдан фойдаландик (80-бетга қаранг).

Шундай қилиб,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (4.19)$$

Жумладан, $y = e^x$ функция учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(e^x)' = e^x.$$

¹⁾ (4.18) формуланинг қўлланилиши учун бу мисолнинг танланиши қаралаётган темани ўрганиш вақтида тескари функциялар ҳали етарли эмаслиги билан изоҳланади.

Кўрсаткичли функциянинг ўсиш тезлиги ($a > 1$ да) унинг қийматига пропорционал.

Энди $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ логарифмик функциянинг ҳосиласига ўтамиз. Тескари функция ҳосиласининг (4.18) формуласидан фойдаланамиз:

$$x = a^y, \quad x'_y = a^y \ln a, \quad y'_x = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Шундай қилиб,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (4.20)$$

Жумладан,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (4.21)$$

Логарифмик функциянинг ўсиш тезлиги ($a > 1$ да) аргументнинг қийматига тескари пропорционал ва аргумент чексиз ортганда нолга интилади.

4.1.9. Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи. Ушбу

$$X \xrightarrow{f} Y \quad (4.22)$$

функция

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (4.23)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. y нинг x бўйича ҳосиласини (4.22) функцияни ошкор кўринишда ифодаламасдан туриб топиш мумкин.

4.2-теорема. Агар t нинг бирор ўзгариш интервалида $x = \varphi(t)$ функция инъектив, $x = \varphi(t)$ ва $y = \psi(t)$ функциялар дифференциалланувчи ҳамда $\varphi'(t) \neq 0$ бўлса. y ҳолда y функциядан x бўйича ҳосила

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (4.24)$$

формула орқали топилади.

Исботи. $x = \varphi(t)$ функциянинг инъективлиги ва $\varphi'(t) \neq 0$ шартга асосан $x = \varphi(t)$ функцияга тескари $t = g(x)$ функция мавжуд, шу билан бирга

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

(4.23) ни

$$y = \psi(g(x))$$

куринишда ёзамиз. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қондаси (4.15) дан фойдаланиб,

$$y'_x = \psi'(t) \cdot g'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$$

ни ҳосил қиламиз.

4.10-мисол. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ функциянинг y'_x ҳосиласини топинг. У ҳолда

$$x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

сўнгра (4.24) формулага кўра

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

4.1.10. Ошқормас функциянинг ҳосиласи. Функциянинг ошқормас берилиши деб унинг y га нисбатан ечилмаган

$$F(x, y) = 0 \quad (4.25)$$

тенглама билан берилишига айтилишини эслатиб ўтамиз. x ва y ни боғлайдиган ҳар қандай тенглама ҳам ошқормас функцияни беравермайди. Масалан,

$$x^2 + y^2 = -1$$

тенглама ҳеч қандай функцияни аниқламайди, чунки уни x ва y ҳақиқий сонларнинг ҳеч қандай жуфти қаноатлантирмайди.

Ошқормас функцияни дифференциаллаш қондасини таърифлаймиз.

(4.25) тенглама билан берилган y ошқормас функциянинг x бўйича ҳосиласини топиш учун y ни x нинг функцияси деб ҳисоблаб, бу тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз; ҳосил қилинган тенгликдан y'_x ни аниқлаймиз.

4.11-мисол. $x^2 + y^2 = R^2$ ошқормас функциянинг ҳосиласини топинг.

Тенгликнинг иккала қисмини дифференциаллаймиз, бунда y^2 ҳадни мураккаб функция сифатида дифференциаллаймиз:

$$2x + 2yy' = 0,$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

4.1.11. Иккинчи тартибли ҳосила, унинг механик маъноси. Юқори тартибли ҳосилалар. y' ҳосиллага эга бўлган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. y' функциянинг ҳосиласини топиб, биз $y = f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласини топамиз, бу ҳосила y'' орқали белгиланади.

4.12-мисол. $y = x^3$ функция учун $y' = 3x^2$ биринчи ҳосила,
 $y'' = (3x^2)' = 6x$.

иккинчи ҳосила бўлади.

$y = f(x)$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласи деб бу функциянинг иккинчи ҳосиласидан олинган ҳосиллага айтилади:

$$y''' = (y'')'.$$

Умуман, $y = f(x)$ функциянинг n -тартибли ҳосиласи деб бу функциянинг $(n-1)$ -тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага айтилади:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad (4.26)$$

Иккинчи ҳосиланинг механикавий маъносини ойдинлаштирамиз. Юқорида, (4.5) да S' ҳосила $S = f(t)$ қонун бўйича ҳаракатланаётган нуқтанинг оний тезлиги эканлиги кўрсатилган эди. Айтайлик, вақтнинг бирор моментда нуқта V тезликка эга бўлсин. Агар ҳаракат нотекис бўлса, у ҳолда нуқтанинг тезлиги бирор Δt вақтдан кейин бирор ΔV катталикка ўзгаради. $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ нисбат нуқтанинг Δt вақтдаги ўртача тезланиши дейилади, бу нисбатнинг $\Delta t \rightarrow 0$ даги limiti эса нуқтанинг t моментдаги тезланишидир. Шундай қилиб,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'_t.$$

$V = S'_t$ бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$a = V'_t = (S'_t)'_t = S''_t.$$

Шундай қилиб, йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосила механика нуқтаи назаридан бу нуқтадаги тезланишдир.

4.2- §. Дифференциал.

4.2.1. **Функциянинг дифференциали.** Функциянинг дифференциали тушунчаси ҳосила тушунчаси билан узвий боғлиқ бўлиб, назарий нуқтаи назардан ҳам, амалий нуқтаи назардан ҳам катта аҳамиятга эга.

$y = f(x)$ бирор функция бўлиб, берилган нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Функциянинг x нуқтадаги Δy орттирмасини

$$\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x) \quad (4.27)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. (104-бетга қ.) $y' \Delta x$ катталнк — ($y' \neq 0$ да) орттирманинг бош қисми Δx нинг биринчи даражасига тўғри пропорционал, шу сабабли у орттирманинг чизиқли қисми дейилади.

Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали деб бу нуқтада ҳисобланган y' ҳосиланинг ихтиёрий Δx орттирмага кўпайтмасига айтилади.

Функциянинг дифференциали dy ёки $df(x)$ символ билан белгиланади:

$$dy = y' \Delta x. \quad (4.28)$$

(4.27) га асосан ушбу тақрибий тенглик ўринли:

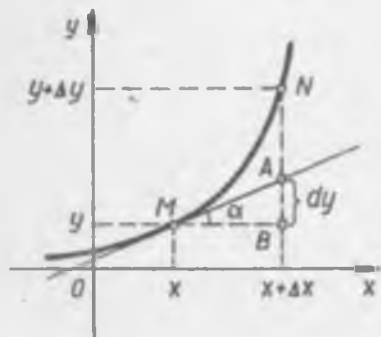
$$\Delta y \approx dy,$$

яъни кичик Δx ларда функциянинг орттирмасини катта аниқлик билан унинг дифференциалига алмаштириш мумкин. Таърифта кўра

$$\Delta x = dx \quad (4.29)$$

деб ҳисоблаймиз, у ҳолда

$$dy = y' dx. \quad (4.30)$$

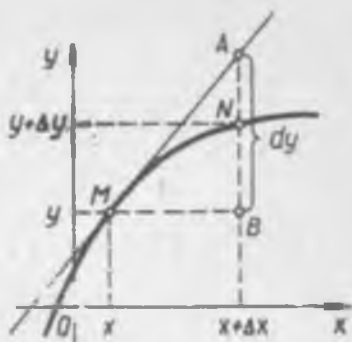


4.12- расм.

4.2.2. **Дифференциалнинг геометрик маъноси.** x нуқтада дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг графигини қараймиз (4.12- расм). Эгри чизиққа x абсциссали M нуқтада уринма ўтказамиз. x нуқтада Δx орттирма берамиз ва эгри чизиқда $x + \Delta x$ абсциссали N нуқтани белгилаймиз. Расмда кўрсатилган ясашларни бажарамиз.

ABM учбурчакдан $AB = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$ ёки $AB = y' dx = dy$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, геометрик нуқтан назардан дифференциал эгри чизиққа уринма бўйлаб ҳаракатланаётган нуқта ординатасининг орттирмасини ифодалайди. 4.12-расмда тасвирланган эгри чизиқ учун $dy < \Delta y$ бўлишини айтиб ўтамыз. Бундай ҳолат қавариқлик йўналиши билан боғлиқ. 4.13-расмда тасвирланган эгри чизиқ учун $dy > \Delta y$.



4.13- расм.

4.2.3. Дифференциални ҳисоблаш. Дифференциални ҳисоблаш қоидалари унинг таърифидан келиб чиқади. Ҳақиқатан, (4.30) га асосан:

$$1^\circ. d(c) = 0.$$

$$2^\circ. d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

$$3^\circ. d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}, \quad a > 0,$$

$$a \neq 1.$$

$$4^\circ. d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

$$5^\circ. d(a^x) = a^x \ln a \, dx, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$6^\circ. d(e^x) = e^x dx.$$

Қуйидаги қоидалар ўринли:

$$1^\circ. d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$2^\circ. d(uv) = u dv + v du.$$

$$3^\circ. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u dv - v du}{v^2}.$$

Мураккаб функциянинг дифференциалини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз.

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

функцияни қарайлик. Мураккаб функциянинг ҳосиласи ҳақидаги теоремага асосан:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини dx га кўпайтириб,

$$y'_x dx = y'_u (u'_x dx)$$

ни ёки $y'_x dx = dy$ ва $u'_x dx = du$ бўлгани учун

$$dy = y'_u du \quad (4.31)$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.31) формула ташқи кўринишдан (4.30) формула билан бир хил. Лекин улар орасида принципиал фарқ бор. Агар (4.30) формулада x — эркин ўзгарувчи ва $dx = \Delta x$ (таърифига кўра) бўлса, (4.31) формулада u энди x нинг функцияси, шу сабабли $du \neq \Delta u$ дир.

Дифференциалнинг кўриниши эркин ўзгарувчининг танланишига боғлиқмаслик хоссаси (дифференциалнинг *инвариантлиги*) кейинчалик дифференциаллашга тескари амални (интеграллашни) киритишга имкон беради.

4.3-§. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

4.3.1. Абсолют ва нисбий хато. $y = f(x)$ функцияни қараймиз. Бундан буён, баённи соддалаштириш мақсадида x ва y ни катталиклар деб атаймиз. x катталик бевосита ўлчаш ёки тақрибий ҳисоблаш натижасида ҳосил қилинган бўлсин. x катталикни топишда бизга боғлиқ бўлмаган бирор Δx хатога йўл қўйилган бўлиши мумкин.

$x + \Delta x$ катталик x катталикнинг *ҳақиқий қиймати*, Δx катталик x катталикнинг *абсолют хатоси* (Δx мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин), $\frac{\Delta x}{x}$ нисбат эса x катталикнинг *нисбий хатоси* бўлсин.

Агар $|\Delta x| < S_x$ эканлиги маълум бўлса, S_x *лимит абсолют хато*, $\frac{S_x}{|x|}$ эса *лимит нисбий хато* дейилади. S_x лимит абсолют хатони билган ҳолда $y = f(x)$ катталикнинг S_y лимит абсолют хатосини топамиз.

x тақрибий катталик ундан олинган $f(x)$ функциянинг тақрибий қийматини, $x + \Delta x$ эса унинг $f(x + \Delta x)$ ҳақиқий қийматини анқлайди, бундан эса функциянинг Δy *абсолют хатоси*

$$|\Delta y| = |\Delta f(x)| = |f(x + \Delta x) - f(x)|$$

тенглик билан аниқланиши келиб чиқади. Кичик (нолга яқин) Δx қийматларда Δy ни тақрибан унинг dy дифференциали билан алмаштириш мумкин:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x = dy.$$

$\Delta y \approx dy$ тақрибий тенгликнинг хатоси Δx хатога қараганда жуда кичик. Шу сабабли Δy хатони баҳолашда $\Delta y = dy = f'(x) \Delta x$ деб ҳисоблаш мумкин. Функция орттирмасининг Δx хатосини унинг dy дифференциали билан алмаштиришнинг фойдали томони шундаки, dy одатда Δx га чизиқли боғлиқ, Δy эса Δx га мураккаброқ табиатли боғлиқ бўлади.

y катталикининг нисбий хатоси $\left| \frac{dy}{y} \right|$ билан аниқланади ва одатда процентларда ифодаланади.

y катталикининг лимит нисбий хатосини ҳисоблаймиз. Равшанки,

$$|\Delta y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x| < |f'(x)| S_x.$$

бундан эса y катталикининг лимит абсолют хатоси учун $S_y = |f'(x)| S_x$ ни қабул қилиш мумкинлиги келиб чиқади.

Лимит нисбий хато қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\frac{S_y}{y} = \frac{|f'(x)| S_x}{|f(x)|} = |[\ln f(x)]'| S_x.$$

4.13-мисол. $r = 125$ см бўлган доиранинг юзини ҳисоблашда нисбий хатоларни қуйидаги ҳолатларда ҳисобланг: а) абсолют хато доира юзининг орттирмасига тенг; б) абсолют хато доира юзининг дифференциалига тенг.

Ечилиши. Доира юзи $S = \pi r^2$ ни ҳисоблашда доира юзи орттирмаси ΔS ни ва $\frac{\Delta S}{S}$ нисбий хатони ҳисоблаймиз.

Радиусни ўлчашда йўл қўйналдиган Δr хато $\pm 0,5$ см дан ортиб кетмайди деб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi [2r \Delta r + (\Delta r)^2] = \\ &= \pi (2 \cdot 125 \cdot 0,5 + 0,25) = 125,25\pi; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{125,25\pi}{\pi \cdot 125^2} = 0,008016 \approx 0,8 \, \%.$$

Доира юзини ҳисоблашда dS дифференциали ва $\frac{dS}{S}$ нисбий хатони ҳисоблаймиз:

$$dS = 2\pi r \Delta r = 2\pi \cdot 125 \cdot 0,5 = 125\pi;$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi r \Delta r}{\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}.$$

Донра юзини ҳисоблашдаги нисбий хато радиусни ўлчашда ҳосил бўлган нисбий хатонинг икки барабарига тенг.

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r} = 2 \cdot \frac{0,5}{125} = 0,8\%.$$

Шундай қилиб, иккинчи ҳолда ҳисоблаш анча содда йўл билан ва ҳисоблаш аниқлигига ҳалал етказмасдан бажарилган.

4.3.2. Функция орттирмасининг тақрибий қийматини дифференциал ёрдамида ҳисоблаш. $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

унинг дифференциали $dy = f'(x)dx$ бўлади. Аргументнинг етарлича кичик (нолга яқин) Δx орттирмаларида

$$\Delta y \approx dy$$

деб қабул қиламиз, шу сабабли функция орттирмасининг тақрибий қийматини ҳисоблашда функциянинг дифференциалини топамиз ва у функция орттирмасига тенг деб қабул қиламиз.

4.14-мисол. $y = 2x^3 + 5$ функциянинг $x = 2$ ва $\Delta x = 0,001$ даги орттирмасининг тақрибий қийматини топинг.

Ечилиши. $dy = 6x^2 dx = 6 \cdot 2^2 \cdot 0,001 = 0,024$. Орттирманинг ҳақиқий қиймати:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2(x + \Delta x)^3 + 5 - 2x^3 - 5 = 6x^2 \Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 = \\ &= 6 \cdot 4 \cdot 0,001 + 6 \cdot 2 \cdot 0,000001 + 2 \cdot 0,000000001 = 0,024012002. \end{aligned}$$

Бу ҳисоблашлар узундан-узоқ Δy орттирмани кичик Δx ларда ҳисоблаш осон ва қулай бўлган dy дифференциал билан алмаштириш мақсадга мувофиқлигини яна бир бор таъкидлайди.

4.15-мисол. Агар r радиусли шарни қизитилганда унинг радиуси Δr катталikka узайган бўлса, шарнинг ҳажми қанча ортди?

Ечилиши. Шар ҳажми $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ формула бўйича ҳисобланади.

r аргументнинг Δr га тенг бўлган орттирмасини кичик деб ҳисоблаб, $\Delta r \approx dr$ деймиз; унда ҳажм орттирмасини дифференциал билан алмаштирамиз $\Delta v \approx dv$.

Демак, шар ҳажми орттирмасини ҳисоблаш учун $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ функциянинг дифференциални топиш киёра:

$$dv = 4\pi r^2 dr.$$

4.3.3. Функциянинг тақрибий сон қийматини ҳисоблаш. $y = f(x)$ функция берилган бўлсин, бу функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

унинг дифференциали

$$dy = f'(x) dx.$$

Етарлича кичик Δx ларда $\Delta y \approx dy$ га эга бўламиз. Функциянинг орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$f'(x) dx \approx f(x + \Delta x) - f(x),$$

бундан функциянинг тақрибий сон қийматини ҳисоблаш учун формула ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx.$$

Бу формуланинг қўлланилиши функция сон қийматини ҳисоблашни анча соддалаштиради, геометрик нуқтан назардан бу эгри чиқиқнинг бўлагини уринма бўлаги билан алмаштиришга мос келади.

4.16-мисол. $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ функциянинг $x = 2,01$ да тақрибий қийматини ҳисобланг.

Ечилиш. $x = 2$ ва $\Delta x = 0,01$ деб қабул қиламиз. Юқорида келтирилган формула учун ҳар бир қўшилувчини алоҳида топамиз:

$$\begin{aligned} f(x) = f(2) &= 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 39, \quad f'(x) \Delta x = (5x^3 - 2x + 3)' \cdot \Delta x = \\ &= (15x^2 - 2) \Delta x = (15 \cdot 2^2 - 2) \cdot 0,01 = 0,58. \end{aligned}$$

У ҳолда функциянинг тақрибий қиймати бундай бўлади:

$$f(2,01) = 39 + 0,58 = 39,58.$$

Функциянинг аниқ қийматини топамиз.

$$f(2,01) = 5 \cdot (2,01)^3 - 2 \cdot 2,01 + 3 = 39,583005.$$

4.3.4. Хатоларни қатъий ҳисобга олиш усули бўйича ҳисоблашлар. Ҳисоблашда кўпинча оралиқ ҳисоблашлар ва узил-кесил натижада йўл қўйилган хатолар чегараларини билиш зарурати юзага келади. Тақрибий ҳисоблашларни бундай олиб бориш усули хатоларни қатъий ҳисобга олиш усули деб аталади. Бунинг учун алгебранг йиғинди, қўпайтма, даража, илдиз ва бўлинманинг нисбий хатолари (лимит нисбий хатолари) чегаралари қандай ҳисобланишини билиш зарур.

4.3.5. Қўпайтманинг нисбий хатоси. *Қўпайтманинг нисбий хатоси унинг қўпайтувчиларининг нисбий хатолари йиғиндисидан ортиқ бўлмаслиги исботлансин.*

Исботи, $y = uv$ функция берилган бўлсин, бу ерда $u > 0$, $v > 0$, $u = f(x)$ ва $v = \varphi(x)$. Уни логарифмлаб, дифференциал оламиз:

$$\ln y = \ln u + \ln v, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Лекин йиғиндининг абсолют катталиги қўшилувчилар абсолют катталикларининг йиғиндисидан ортиқ эмас:

$$\left| \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right| < \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right|.$$

Шунинг учун

$$\left| \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right| \text{ ёки } S_{uv} = \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right|.$$

4.17-мисол. Тўғри тўртбурчак майдонни ўлчашда унинг бўйи $u = 60$ м ва эни $v = 23$ м эканлиги топилди. Майдоннинг бўйини ўлчашда нисбий хато 0,3 м дан, энини ўлчашда эса нисбий хато 0,2 м дан ортиқ бўлмайди. Майдоннинг юзи $60 \cdot 23 = 1380$ м² га тенг деб қабул қилганимизда йўл қўйиладиган хато қандай чегараларда ётади ва юзни ҳисоблашда йўл қўйилган нисбий хато қанча?

Ечилиши. $|du| < 0,3$; $|dv| < 0,2$. Энг ёмон шароитда $|du| = 0,3$, $|dv| = 0,2$. Кўпайтманинг абсолют хатосини топамиз:

$$d(uv) = du \cdot v + dv \cdot u = 0,3 \cdot 23 + 0,2 \cdot 60 = 18,9 \approx 19 \text{ м}^2.$$

Бу майдоннинг юзи 1380 м² деб қабул қилганимизда йўл қўйишимиз мумкин бўлган энг катта абсолют хатодир. Хатони ортиш томонга яхлитлаб ва у 20 м² га тенг деб қабул қилиб, юзни ҳисоблашда йўл қўйиладиган хато ётадиган чегараларни топамиз. У $1380 + 20 = 1400$ м² дан ортиқ бўлмайди ва $1380 - 20 = 1360$ м² дан кам бўлмайди. Нисбий хатони

$$S_{uv} = \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right|$$

формула бўйича ҳисоблаймиз.

$$S_{uv} = \frac{0,3}{60} + \frac{0,2}{23} = \frac{1}{200} + \frac{2}{230} \approx 0,014 = 1,4 \, \%.$$

Нисбий хато 1,4% дан ортиқ бўлмайди.

4.3.6 Даражанинг нисбий хатоси. Даражанинг нисбий хатоси асоснинг нисбий хатосини даража кўрсаткичига кўпайтмасига тенглиги исботлансин.

Исботи. $y = x^n$ ($x > 0$) функция берилган бўлсин. Уни логарифмлаймиз ва дифференциалини топамиз:

$$\ln y = n \ln x, \quad \frac{dy}{y} = n \frac{dx}{x}.$$

Нисбий хато $S_{x^n} = n \frac{dx}{x}$ бўлади.

Хусусий ҳоллар: 1) $n = 2$, $S_{x^2} = 2 \frac{dx}{x}$; 2) $n = 3$;

$$S_{x^3} = 3 \frac{dx}{x}.$$

4.18- мисол. Агар кубнинг қирраси 12,5 см бўлса, унинг ҳажминини ўлчашда йўл қўйилган нисбий хатони топинг. Δx абсолют хато 0,05 см га тенг.

Ечилиши. $dx = 0,05$ см деб қабул қиламиз.

$$S_{x^3} = 3 \frac{dx}{x} = 3 \cdot \frac{0,05}{12,5} = \frac{15}{1250} = 0,012 = 1,2\%.$$

4.3.7. Илдизнинг нисбий хатоси. Илдизнинг нисбий хатоси илдиш остидаги соннинг нисбий хатосини илдиш даража кўрсаткичига бўлинганига тенг эканлиги исботлансин.

Исботи. $y = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$ функция берилган бўлсин. Уни логарифмлаймиз ва дифференциалини топамиз:

$$\ln y = \frac{1}{n} \ln x, \quad \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Нисбий хато бундай бўлади:

$$S_{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n} \frac{dx}{x}.$$

Хусусий ҳоллар: 1) $n = 2$, $S_{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$; 2) $n = 3$,

$$S_{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3} \frac{dx}{x}.$$

4.19- мисол. Агар квадратнинг юзи 37,7 см² га тенг бўлса, унинг томонини ҳисоблашда йўл қўйиладиган нисбий хатони топинг. Абсолют хато $dx = 0,05$.

Ечилиши. Квадратнинг томонини y орқали, юзини x орқали белгилаб, $y = \sqrt{x} = \sqrt{37,7}$, $dx = 0,05$ ни ҳосил қиламиз:

$$S_{\sqrt{37,7}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,05}{37,7} = \frac{0,05}{75,4} \approx 0,000663 \approx 0,1\%.$$

4.3.8. Бўлинманинг нисбий хатоси. Бўлинманинг нисбий хатоси бўлинувчи ва бўлувчининг нисбий хатолари йигиндисидан ортқ бўлмаслиги исботлансин.

Исботи. $y = u/v$ функция берилган бўлсин, бу ерда

$$u = f(x) > 0 \text{ ва } v = \varphi(x) > 0.$$

$y = u/v$ функцияни логарифмлаб, унинг дифференциалини топамиз:

$$\ln y = \ln u - \ln v, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Лекин айирманинг нисбий хатоси камаювчи ва айрилувчининг нисбий хатолари йиғиндисидан ортиқ бўлмаганлиги сабабли

$$\left| \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right|.$$

Бўлинма нисбий хатосининг чегараси:

$$S_{u/v} = \left| \frac{du}{u} \right| + \left| \frac{dv}{v} \right|$$

4.20-мисол. Жисмининг zichлигини аниқлаш мақсадида унинг массаси $m_1 = 484$ г ва у сиқиб чиқарган сув массаси $m_2 = 62$ г аниқланган. Абсолют хатолар

$$\Delta m_1 = 0,5 \text{ г ва } \Delta m_2 = 0,4 \text{ г.}$$

Жисмининг zichлигини ҳисоблашдаги нисбий хатони топинг.

Ечилиши. $y = m_1/m_2$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{dy}{y} \right| &= \left| \frac{dm_1}{m_1} \right| + \left| \frac{dm_2}{m_2} \right| = \frac{0,5}{484} + \frac{0,4}{62} \approx 0,00103 + 0,00645 = \\ &= 0,00748 \approx 0,7\%. \end{aligned}$$

4.3.9. Даражаларни тақрибий ҳисоблаш. $f(x) = x^n$ функцияда x аргумент кичик Δx орттирма олсин. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ функциянинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш учун

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

формулани қўлланиб ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n, \quad f(x) = x^n, \quad f'(x) \Delta x = nx^{n-1} \Delta x,$$

бундан

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1} \Delta x.$$

4.21-мисол. $(4,012)^3$ нинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Ечилиши. $x = 4$; $\Delta x = 0,012$ деймиз; y ҳолда $(4 + 0,012)^3 \approx 4^3 + 2 \cdot 4 \cdot 0,012 = 16,096 \approx 16,1$ (аниқ жавоб: 16,096144).

4.3.10 Илдизларни тақрибий ҳисоблаш. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ функцияда x аргумент кичик Δx орттирма олсин. $f(x + \Delta x) =$

$= \sqrt[n]{x + \Delta x}$ нинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш учун

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

формулани қўлланиб ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}, \quad f(x) = \sqrt[n]{x},$$

$$f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

бундан

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

4.22-мисол. $\sqrt[4]{1,006}$ нинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Ечилиши. $x = 1$, $\Delta x = 0,006$ деймиз, у ҳолда

$$\sqrt[4]{1,006} = \sqrt[4]{1 + 0,006} \approx 1 + \frac{0,006}{4} = 1,0015.$$

4.3.11. Тескари катталикларни тақрибий ҳисоблаш.

$f(x) = \frac{1}{x}$ функцияда x аргумент кичик Δx орттирма олсин.

$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$ функциянинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласини қўлланиб ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

бундан

$$\frac{1}{x + \Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

Масалан, $\frac{1}{1,004}$ катталикнинг тақрибий қийматини топайлик.

$\Delta x = 0,004$ деймиз, у ҳолда $\frac{1}{1 + 0,004} \approx 1 - 0,004 = 0,996$.

4.3.12. Кичик бурчакларнинг синус ва тангенсини тақрибий ҳисоблаш¹⁾. 1°. $f(x) = \sin x$ функция учун $x = 0$

¹⁾ Бу пунктни 10-боб материални ўргангандан сўнг ўқиш лозим.

аргумент кичик Δx орттирма олсин. Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x) = \sin(0 + \Delta x) = \sin \Delta x.$$

Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласини қўлланамиз.

$$f(x + \Delta x) = \sin \Delta x, \quad f(x) = \sin \Delta x|_{x=0} = 0,$$

$$f'(x) = \cos x|_{x=0} = 1.$$

Бундан

$$\sin \Delta x = 0 + \Delta x \text{ ёки } \sin \Delta x \approx \Delta x.$$

Кичик бурчакнинг синуси тақрибан шу бурчакнинг ўзига тенг (бурчаги радиан ўлчовида олинади).

2°. $f(x) = \operatorname{tg} x$ функция учун $x = 0$ аргумент кичик Δx орттирма олсин. Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x) = \operatorname{tg}(0 + \Delta x) = \operatorname{tg} \Delta x.$$

Ушбу $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$ формулани қўлланамиз:

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{tg} \Delta x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x|_{x=0} = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}|_{x=0} = 1,$$

бу ердан

$$\operatorname{tg} \Delta x \approx \Delta x.$$

Кичик бурчакнинг тангенс тақрибан шу бурчакнинг ўзига тенг (бурчак радиан ўлчовида олинади).

4.23-мисол. $\sin 12'$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. $12'$ бурчак $0,0035$ радиан бурчакка мос келади:

$$\sin 0,0035 \approx 0,0035.$$

Синуснинг натурал қийматлари жадвалидан $\sin 12' \approx 0,0035$ ни топамиз.

4.3.13. Ўнли логарифмларнинг жадвал айирмаларини ҳисоблаш. Δy жадвал айирма деб x сон бирга ортганда $\lg x$ ўнли логарифм оладиган орттирмага айтилади.

$y = \lg x$ функция учун x аргумент кичик Δx орттирма олсин. $\Delta y \approx dy$ бўйича Δy нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

$$dy = (\lg x)' \Delta x = \frac{0,4343 \cdot \Delta x}{x},$$

у ҳолда

$$\Delta y = 0,4343 \frac{\Delta x}{x},$$

яъни логарифмнинг абсолют хатоси x соннинг нисбий хатоси бўйича ҳисобланади. $\left(\frac{\Delta x}{x} - \text{нисбий хато}\right) \cdot \Delta x = 1$ деймиз, у ҳолда $\Delta y = \frac{0,4343}{x}$. Бу формула бўйича жадвал айирмаларни ҳисоблаш мумкин.

4.24-мисол. 544 соннинг ўнли логарифмини ҳисоблашда жадвал айирмани топинг.

$$\text{Ечилиши. } \Delta y \approx \frac{0,4343}{x} = \frac{0,4343}{544} \approx 0,0008.$$

Брадис жадвалидан текширамиз:

$$\lg(544 + 1) = \lg 545 = 2,7364; \lg 544 = 2,7356.$$

545 ва 544 сонлари логарифмларининг жадвал айирмаси 0,0008 га тенг экан.

4.3.14. Сонни унинг ўнли логарифми бўйича ҳисоблашда нисбий хатони топиш. x соннинг логарифми Δy хато билан ҳисобланган бўлсин. У ҳолда y бўйича x сонни ҳисоблашда Δx хатога йўл қўйилади. x соннинг нисбий хатоси $\frac{\Delta x}{x}$ га тенг. Логарифмнинг абсолют хатоси

$$\Delta y \approx 0,4343 \frac{\Delta x}{x}$$

га тенг, бундан

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{0,4343}.$$

x сонни унинг логарифми бўйича ҳисоблашда нисбий хато x соннинг қийматига эмас, балки x соннинг логарифми топилганда йўл қўйилган хатога боғлиқ.

4.95-мисол. 250 мм шкатали логарифмик линейкада топиш аниқлигининг нисбий хатосини топинг.

Ечилиши. Айтайлик, визирни ўрнатишда ёки шкалани топишда энг катта хато 0,1 мм ни ташкил этсин.

Сон логарифмининг абсолют хатосини топамиз. 250 мм шкатали логарифмик линейканинг бутун шкаласи логарифми 1 га тенг бўлган сонга ($\lg 10 = 1$) мос келади. Бундан шкаланинг 0,1 мм ида сон логарифмининг абсолют хатоси 250 марта кичик бўлади, яъни $\Delta y = \frac{0,1}{250} =$

$= 0,004$, лекин $\Delta y = 0,4343 \frac{\Delta x}{x}$, у ҳолда

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0.4343} = \frac{0.004}{0.4343} \approx 0.00092 \approx 0.001 \approx 0.1\%.$$

Сонни топиш аниқлигининг нисбий хатоси (шкаланинг исталган қисмида) 0,1% ни ташкил қилади.

4-БОБГА ДОИР ТАҚРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи деб нимага айтилади?

2. Ҳосила геометрик нуқтан-назардан қандай талқин қилинади?

3. Функциянинг ҳосиласи: мусбатлигини, манфий эмаслигини, мусбат эмаслигини, манфийлигини билган ҳолда унинг ўзгариши ҳақида нима дейиш мумкин? Бу ҳолларга доир расмлар чизинг, бундай функцияларга мисоллар келтиринг.

4. Функциянинг ҳосиласи мавжудлиги ва унинг узлуксизлиги орасидаги боғланиш ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

5. Икки функция йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасининг ҳосилалари нимага тенг?

6. Икки функция бўлиnmаси ҳосиласининг кўринишини ёзинг.

7. Мураккаб функциянинг ҳосиласи нимага тенг? Формулани ёзинг ва мисоллар келтиринг.

8. Тескари функциянинг ҳосиласи формуласидан фойдаланиб, логарифмик функциянинг ҳосиласи формуласини келтириб чиқаринг.

9. Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

10. Ошқормас функциянинг ҳосиласи нимага тенг?

11. Берилган функциядан олинган иккинчи тартибли ҳосила функция деб нимага айтилади?

12. Функциянинг нуқтадаги дифференциали деб нимага айтилади?

13. Функциянинг дифференциали геометрик нуқтан назардан қандай талқин қилинади?

4-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини фақат таърифдан фойдаланиб ҳисобланг:

1. $y = (2x + 1)^2.$

2. $y = \frac{1}{x-3}.$

3. $y = 3x.$

4. $y = \frac{x^3}{3}.$

5. $y = \sqrt{1+2x}.$

6. $y = \sqrt{1+x^2}.$

7. $y = x^2 \sqrt{x+1}.$

8. $y = \frac{x}{1-4x}.$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

9. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$

10. $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}.$

$$11. y = \frac{1}{x - \sqrt{a^2 + x^2}}. \quad 12. y = \frac{3 - x^2}{6 \sqrt{x}}.$$

$$13. y = x^2 \sqrt{16 - x^2}. \quad 14. y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2}.$$

$$15. y = \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}. \quad 16. y = \ln \sqrt[5]{1 + e^{-x}}.$$

$$17. y = e^{2x} - e^{-3x^2}. \quad 18. y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

Қуйидаги функцияларнинг $\frac{dy}{dx}$ ҳосилаларини топинг.

$$19. x^2 y^2 + 2 \ln xy = 4. \quad 20. x + y = e^{x-y}.$$

$$21. \ln 2x + xe^y = 0. \quad 22. xy = e^{2x} - e^{-3y}.$$

$$23. \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = \frac{1}{2+t}, \\ y = \ln(2t+t^2). \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = 1 - e^{-t}, \\ y = \frac{1}{1+e^t}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}, \\ y = 1 + e^{-2t}. \end{cases}$$

4. БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. Ечилиши. $y = (2x+1)^2$ функция учун 4.1-§-даги (4.1) формуладан қуйидаги келиб чиқади:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x + 2\Delta x + 1)^2 - (2x + 1)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2\Delta x (2x + 1) + 4(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

бундан

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4(2x + 1) + 4\Delta x] = 4(2x + 1) + 4 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$$

ёки

$$y' = 4(2x + 1).$$

2. Ечилиши. $y = \frac{1}{x-3}$ функция учун Δy нимага тенглигини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{1}{x + \Delta x - 3} - \frac{1}{x - 3} = \\ &= \frac{x - 3 - (x + \Delta x - 3)}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)}$$

ёки кўпайтманинг лимитидан лимитлар кўпайтмасига ўтсак,

$$y' = \frac{-1}{x - 3} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \Delta x - 3}.$$

$$\frac{1}{(x - 3)} (x \neq 3) \text{ функциянинг узлуксизлигидан фойдалансак, } y' = \frac{-1}{(x - 3)^2}.$$

3. Жавоби. $y' = 3$

4. Жавоби. $y' = x^2$

5. Жавоби. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

6. Жавоби. $y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

7. Жавоби. $y' = 2x\sqrt{x+1} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{x+1}}.$

8. Жавоби. $y' = \frac{1}{(1 - 4x)^2}$

ҲОСИЛАЛАРНИНГ ФУНКЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШ ВА ГРАФИКЛАРНИ ЯСАШГА ТАТБИҚИ

5.1-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

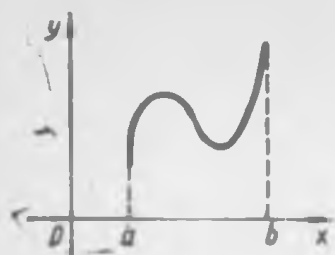
5.1.1 Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари ҳақида. Кўп амалий масалалар у ёки бу функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга келтирилади. Жумладан, ҳозирги замон техникасининг бутун ривожини энг кам меҳнат сарф қилган ҳолда энг кўп маҳсулот олишга қаратилган.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини излаш проблемаси математика нуқтаи назаридан катта аҳамиятга эга. Лекин уни ҳал қилишга киришишдан олдин ҳар бир конкрет ҳолда энг катта ёки энг кичик қиймат мавжуд ёки мавжуд эмаслигини олдиндан аниқлаш лозим. Бу саволга энг муҳим теоремалардан бири бўлган 3.30-теорема жавоб беради, уни 3.3.3-пунктда исботсиз келтирган эдик. Бу ерда у теореманинг қисқароқ баёнини берамиз.

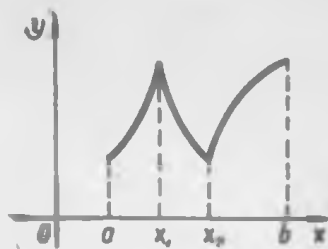
3.1-теорема. (Вейерштрасс теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда у бу интервалда энг кичик ва энг катта m ва M қийматларни қабул қилади, яъни шундай $x_1, x_2 \in [a, b]$ мавжудки, $f(x_1) = m$ ва $f(x_2) = M$ бўлади.*

Бу теоремага таяниб, кейинги пунктларда қатор теоремаларни исбот қиламиз, уларни билиш эса функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини билишга имкон беради, ва бундан ташқари, функция ўзгаришининг сифат ҳолатини муфассал тасвирлашга (жумладан, унинг графини ясашга) имкон беради.

3.1.2. Функциянинг экстремумлари. Юқорида (2.2.3-пункт) экстремум тушунчаси киритилган эди. Қуйидаги теоремалар экстремумларни амалда топиш методларини беради. Бунда биз ҳосила узлуксиз бўлган ҳолларни ҳам (демак, бу ҳолда функция графинига уринма ўз вазиятини узлук-



5.1- расм.

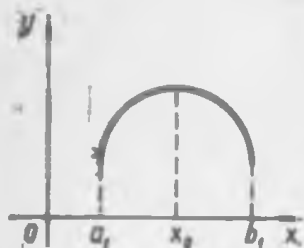


5.2- расм.

сиз ўзгартиради, 5.1- расм), бундай ҳолат ўринли бўлмаган ҳолларни (5.2- расм) ҳам қараймиз.

5.1.3. Ферма теоремаси. 5.2- теорема. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга ва бу нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0.$$



5. 3- расм.

Ҳақиқатан, аниқлик учун $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлсин (5.3- расм). У ҳолда максимум таърифига кўра (5.2.3- пунктга қаранг)

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in R_e(x_0).$$

Агар $\Delta x < 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0, \quad (5.1)$$

агар $\Delta x > 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0. \quad (5.2)$$

Теорема шартига кўра $f'(x_0)$ ҳосила мавжуд бўлгани учун $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x < 0$) да лимитга ўтилганда (5.1) тенгликдан $f'(x_0) \geq 0$ ни, (5.2) тенгликдан эса $\Delta x \rightarrow 0$ да $f'(x_0) \leq 0$ ҳосил қиламиз, бу эса $f'(x_0) = 0$ бўлган ҳолдагина мумкин.

Қандайдир x_0 нуқтада ҳосила нолга тенглигидан x_0 экстремум нуқта бўлиши келиб чиқмайди.

Масалан, $y = x^3$ функция учун. $x = 0$ нуқтада $y' = 3x^2 = 0$. Лекин $x = 0$ бу функциянинг экстремум нуқтаси эмас (5.4-расм).

$f'(x_0) = 0$ бўладиган x_0 нуқтани $f(x)$ функциянинг *стационар нуқтаси* деб атаймиз.

Ферма теоремаси x_0 нуқтада *силлиқ экстремум* деб аталадиган экстремум мавжудлигининг зарур шартини ифодалайди, яъни x_0 нуқтада ҳосила мавжудлигини фараз қилади. Лекин функция экстремумга ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталарда ҳам эга бўлиши мумкин (масалан, $y = |x|$).

Стационар нуқталарнинг мавжудлик масаласини қарайлик.

5.1.4. Роль теоремаси. 5.3-теорема. $f(x)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1. $f(x)$ $[a, b]$ да узлуксиз.
2. $\exists f'(x)$, $x \in (a, b)$.
3. $f(a) = f(b)$.

У ҳолда шундай c , $c \in (a, b)$ нуқта мавжудки, $f'(c) = 0$ бўлади.

Ҳақиқатан, m ва M берилган $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ интервалдаги энг кичик ва энг катта қиймати бўлсин (m ва M нинг мавжудлиги Вейерштрасс теоремасидан келиб чиқади). $m = M$ бўлиб қолиши ҳам мумкин. Бу $f(x) = \text{const}$ лигини билдиради, лекин бу ҳолда барча $x \in (a, b)$ ларда $f'(x) = 0$ ва изланаётган c нуқта a ва b орасидаги исталган нуқтадир.

$m \neq M$ бўлсин. У ҳолда m ва M сонлардан камида бири $f(a) = f(b)$ га тенг эмас. Аниқлик учун $M \neq f(a)$ бўлсин ва x_0 нуқта x нинг шундай қиймати бўлсинки,

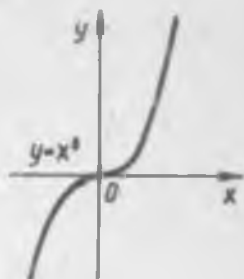
$$f(x_0) = M$$

бўлсин. $f(a) = f(b)$ ва $f(x_0) \neq f(a)$ бўлгани учун x_0 нуқта a ва b нуқталар орасида жойлашган: $a < x_0 < b$.

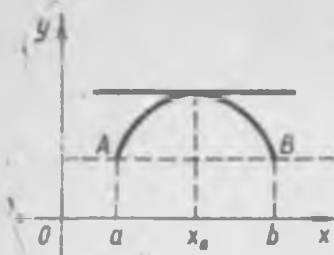
Шундай қилиб, x_0 нуқта $[a, b]$ интервалнинг ички нуқтаси бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга, у ҳолда Ферма теоремасига кўра

$$f'(x_0) = 0,$$

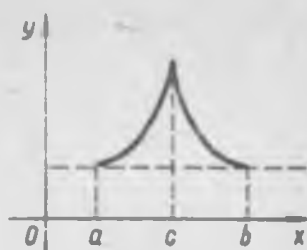
яъни x_0 изланаётган c нуқтанинг ўзидир.



5.4-расм.



5.5- расм.



5.6- расм.

Ролль теоремаси содда геометрик маънога эга: интервалда узлуксиз ва интервалнинг ичида дифференциалланувчи функциянинг интервалнинг учларида бир хил ординатли графигида $x_0 \in (a, b)$ абсциссали камда битта шундай c -нуқта топиладики, бу нуқтада эгри чизиққа уринма Ox ўққа параллел бўлади.

Ролль теоремаси шартидаги дифференциалланувчанлик талаби муҳимдир. Ҳақиқатан, 5.6-расмдаги график билан тасвирланган функция c нуқтада ҳосилага эга эмас. AB эгри чизиқнинг ҳеч бир нуқтасидаги уринма Ox ўққа параллел эмас.

Энди дифференциал ҳисобнинг марказий теоремасига мурожаат қиламиз. бу теорема математик анализ курсида жуда кенг қўлланилади.

5.1.5. Лагранж теоремаси. 5.4-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ интервалда узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда шундай c , $c \in (a, b)$ нуқта мавжудки,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (5.3)$$

формула ўринли бўлади. Бу формула Лагранж формуласи дейилади.

Исботи. Ёрдамчи

$$\Phi(x) = f(x) - \lambda x \quad (5.4)$$

функцияни оламиз ва λ сонни шундай танлаймизки, $\Phi(x)$ функция $\Phi(a) = \Phi(b)$ шартни, яъни

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$$

ни қаноатлантирсин, бундан

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (5.5)$$

$\varphi(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиргани учун шундай $c \in (a, b)$ нуқта топиладики, $\varphi'(c) = 0$ бўлади. (5.4) дан ҳосил қиламиз:

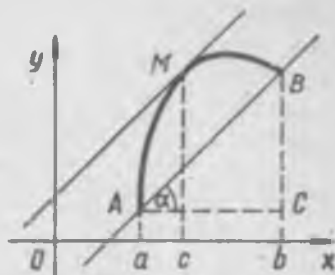
$$\varphi'(c) = f'(c) - \lambda = 0,$$

яъни

$$f'(c) = \lambda.$$

$\lambda = f'(c)$ ни (5.5) га қўйиб, ишботланаётган формулани ҳосил қиламиз.

Лагранж теоремасининг геометрик талқинига ўтайлик. Теорема шартларини қаноатлантирадиган бирор $y = f(x)$ функциянинг графигини ясайлик (5.7-расм). Равшанки,



5.7-расм.

$$BC = f(b) - f(a), \quad AC = b - a$$

ва ABC учбурчакдан

$$BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AC$$

ёки

$$f(b) - f(a) = \operatorname{tg} \alpha \cdot (b - a) \quad (5.6)$$

ни ҳосил қиламиз.

$y = f(x)$ эгри чизиқда AB ватарга параллел қилиб уринма ўтказамиз. M уриниш нуқтаси c абсциссага эга, шу билан бирга $c \in (a, b)$. Уринма ва ватарнинг параллеллигига асосан уринманинг Ox ўққа қиялик бурчаги α га тенг.

Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$\operatorname{tg} \alpha$ нинг бу қийматини (5.6) га қўйиб, (5.3) ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, Лагранж теоремаси геометрик нуқтан назардан бундай даъво қилади: теорема шартларини қаноатлантирадиган $y = f(x)$ функция учун шундай c нуқта мавжудки, бу нуқтада $y = f(x)$ эгри чизиққа уринма ватарга параллел бўлади.

5.2- §. Ҳосиланин функция экстремумларини топишга татбиқ этиш

5.2.1. Функциянинг ўзгармаслик, ўсиш ва камайиш аломатлари. Лагранж теоремаси функцияларнинг эндиликда ўқувчига маълум бўлган ўзгармаслик, ўсиш ва камайиш аломатларини исботлашга имкон беради (2.2.3-пунктга қаранг).

5.5-теорема. $f(x)$, $x \in (a, b)$ функция ўзининг берилиш тўпламида ўзгармас бўлиши учун

$$f'(x) = 0, \quad x \in (a, b)$$

бўлиши зарур (4.1.3-пунктга қаранг) ва етарлидир.

Бу белгининг етарлилигини исботлашда ўзгармас функция учун исталган x_1 ва x_2 да $f(x_2) = f(x_1) = \text{const}$ эканини ҳисобга оламиз. Лагранж формуласидан исталган x_1 ва x_2 да

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

ни ҳосил қиламиз.

5.1-натижа. Агар иккита функция бирор интервалда тенг ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда улар бир-биридан ўзгармас қўшилувчига фарқ қилади.

Ҳақиқатан, агар $x \in (a, b)$ да

$$f'_1(x) = f'_2(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$(f_1(x) - f_2(x))' = f'_1(x) - f'_2(x) = 0,$$

ва демак, барча $x \in (a, b)$ лар учун

$$f_1(x) - f_2(x) = C = \text{const}.$$

5.6-теорема. Дифференциалланувчи $f(x)$, $x \in (a, b)$ функция ўзининг берилиш тўпламида камаймайдиган бўлиши учун

$$f'(x) \geq 0, \quad x \in (a, b)$$

бўлиши зарур (4.1.1-пунктга қаранг) ва етарли.

Бу аломатнинг етарлилигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$f'(x) \geq 0, \quad x_1 < x_2, \quad [x_1, x_2] \subset (a, b)$$

булсин, $f(x)$ функцияга $[x_1, x_2]$ интервалда Лагранж формуласини қўлланиб, $c \in (x_1, x_2)$ учун

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ни ҳосил қиламиз.

$f'(c) \geq 0$ шартдан $x_2 - x_1$ ва $f(x_2) - f(x_1)$ айырмаларнинг бир хил ишорали эканлиги келиб чиқади, яъни $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ интервалнинг танланиши ихтиёрийлигига асосан $f(x)$ функция бутун (a, b) интервалда камаймайди.

5.7-теорема. Дифференциалланувчи $f(x)$, $x \in (a, b)$ функция ўзининг берилиш тўпламида ўсмайдиган бўлиши учун

$$f'(x) \leq 0, \quad x \in (a, b)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Теорема исботи олдинги теореманинг исботига ўхшаш.

5.1-мисол. $y = x^3 - 3x + 2$ функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг.

Ҳосил оламиз: $y' = 2x - 3$; $2x - 3 < 0$ ни ечиб, $x < 3/2$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, функция $(-\infty, 3/2)$ интервалда камайди. Функциянинг ўсиш интервали $(3/2, \infty)$ ни шунга ўхшаш ҳосил қиламиз.

5.2.2. Экстремум мавжудлигининг етарли шартлари. $f(x)$ функция учун экстремум нуқта деб бу функциянинг ўзгариши ўсишдан камайишга ($\max$) ёки камайишдан ўсишга ($\min$) ўтадиган нуқтани айтилишини эслатиб ўтамиз (2.2.3-пункт). Дифференциалланувчи функциянинг силлиқ экстремуми мавжудлигининг зарур аломатини юқорида келтирилган Ферма теоремаси беради. Энди экстремум мавжудлигининг етарли аломати экстремум таърифини ҳосилдан фойдаланиш билан тавсифлаши ва ҳосила ишораси билан боғлиқ бўлиши лозим деб тахмин қилиниши табиий.

5.8-теорема. x_0 нуқтада узлуксиз бўлган дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг ҳосиласи x_0 нуқтадан ўтишда ишорасини алмаштиради. у ҳолда функция x_0 нуқтада экстремумга эга. Агар x_0 нуқтада ҳосиланинг ишораси мусбатдан манфийга алмашса, у ҳолда функция максимумга ($\max$), манфийдан мусбатга алмашса, минимумга ($\min$) эга.

Ҳақиқатан, исботни соддалаштириш мақсадида x_0 нуқтада функциянинг ҳосиласи мавжуд ва x_0 нуқтадан ўтишда у ишорасини мусбатдан манфийга алмаштиради¹⁾ деб фараз қилайлик. Лагранж формуласини ёзмаз:

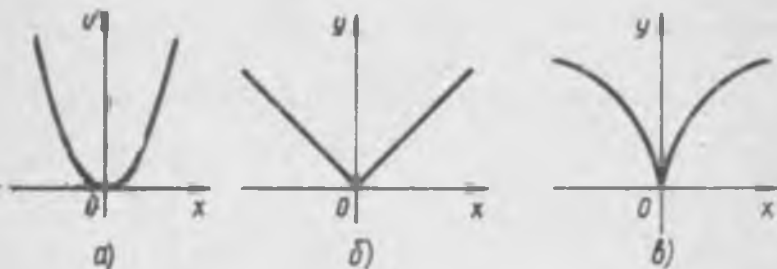
¹⁾ Теорема бу фаразсиз ҳам исботланиши мумкин.

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad (5.7)$$

Агар $x < x_0$ бўлса, у ҳолда $x - x_0 < 0$ ва шартга кўра $f'(c) > 0$, $c \in (x, x_0)$, демак, (5.7) формуланинг ўнг томони манфий. Агар $x > x_0$ бўлса, у ҳолда $x - x_0 > 0$ ва шартга кўра $f'(c) < 0$, $c \in (x_0, x)$, демак, (5.7) формуланинг ўнг томони манфий. Шундай қилиб, $x \in R_\varepsilon(x_0)$ да $f(x_0) > f(x)$, яъни x_0 берилган $f(x)$ функциянинг максимум нуқтаси. Теореманинг иккинчи қисми шунга ўхшаш исботланади.

Масалан, $y = x^2 - 3x + 2$ функция $x = 3/2$ нуқтада минимумга эга.

Шундай қилиб, функциянинг экстремумларини аниқлаш учун бу функция ҳосиласининг ишорасини стационар нуқталар ва ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталар атрофида текшириш етарли.



5.8- расм.

Масалан, $y = x^2$ функция (5.8а-расм) $x = 0$ нуқтада минимумга эга ва $f'(0) = 0$; $y = |x|$ функция (5.8б-расм) $x = 0$ нуқтада минимумга эга, лекин $f'(0)$ мавжуд эмас; $y = x^{2/3}$ функция ҳам $x = 0$ нуқтада минимумга эга, лекин $f'(0) = \infty$ (5.8в-расм).

Силлиқ экстремум мавжудлигининг етарли шартини қараймиз, бунда иккинчи ҳосиладан фойдаланилади.

5.9-теорема. Агар дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг x_0 стационар нуқтасида нолдан фарқли иккинчи ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда функция x_0 нуқтада экстремумга эга. Чунончи x_0 нуқтада иккинчи ҳосила нолдан кичик бўлса, функция максимумга (max) эга, агар нолдан катта бўлса, функция минимумга (min) эга.

Исботи. x_0 — стационар нуқта ва аниқлик учун $f''(x) > 0$ бўлсин. Иккинчи ҳосиланинг таърифига кўра

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

ёки x_0 стационар нуқта бўлгани учун ($f'(x) = 0$)

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Фаразга кўра $f''(x_0) > 0$ бўлгани учун $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси $x - x_0$ айирманинг ишораси билан бир хил бўлади, яъни $x < x_0$ бўлганда $f'(x_0) < 0$ ва $x > x_0$ бўлганда $f'(x) > 0$, бинобарин, стационар нуқтадан ўтишда $f'(x)$ нинг ишораси манфийдан мусбатга алмашади. Бу эса олдинги аломат бўйича x_0 нуқтада $f(x)$ функция минимумга эга эканлигини англатади. Максимум бўлган ҳолда ҳам исбот шунга ўхшаш.

5.2-мисол. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ функциянинг экстремумларини топамиз.

Стационар нуқталарни аниқлаймиз: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Стационар нуқталар: $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$. Сўнгра экстремумни аниқлашнинг биринчи усулидан фойдаланиб, y' нинг ишорасини стационар нуқталар атрофида текширамиз. $x = 0$ нуқтада y' ҳосила ишорасини «+» дан «-» га, $x = 2$ нуқтада эса «-» дан «+» га алмаштиради. Шундай қилиб, $y = x^3 - 3x^2 + 1$ функция $x = 0$ да максимумга ($y = 1$), $x = 2$ да эса минимумга ($y = -3$) эга.

Экстремумни аниқлашнинг иккинчи усулини қўлланиб, $y'' = 6x - 6$ ни ҳосил қиламиз ва бунга $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ қийматларни қўйиб, $y''(0) = -6$ ва $y''(2) = 6$ ни топамиз. Шундай қилиб, $x = 0$ нуқтада $y'' < 0$, ва демак, максимумга эгамиз; $x = 2$ нуқтада $y'' > 0$, демак, минимумга эгамиз.

Шунга эътибор бериш керакки, стационар нуқталарда иккинчи ҳосила нолга тенг бўлган ҳолларда экстремумни топишнинг иккинчи ҳосилдан фойдаланиладиган усулини қўлланиб бўлмайди.

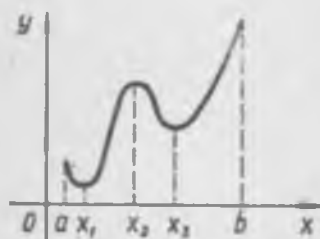
5.2.3. Ёпиқ интервалда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш. Ёпиқ интервалда узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш масаласига яна қайтамиз (5.1.1-пунктга қаранг). Бу қийматларнинг мавжудлиги Вейерштрасс теоремаси билан таъминланади.

Стационар нуқталарни ва функция дифференциалланмайдиган нуқталарни *критик* нуқталар деб атаймиз.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини ёпиқ интервалда излашда бу интервалнинг ичида критик нуқталар бўлмай қолиши мумкин. Бу эса қаралаётган интервалда функция монотон, ва демак, энг катта қийматга ҳам,

энг кичик қийматга ҳам интервалнинг охирларида эришишини билдиради.

Шундай қилиб, узлуксиз функциянинг ёпиқ интервалдаги энг катта ва энг кичик қийматларини излаш учун функциянинг критик нуқталардаги қийматларини, ва шунингдек, берилиш интервалининг охирларидаги қийматларини топиш kifоя. Топилган қийматлардан энг кичиги ва энг каттаси танланади.



5.9- расм.

Эслатма. Шунинг айтиб ўтамизки, энг кичик ва энг катта қийматларни аниқлаш методлари юқорида кўрсатилганлар билан тугамайди. Масалан, шундай бўлиб қолиши мумкинки, функциянинг ҳосиласи критик нуқталарнинг исгалганча кичик бир томонлама атрофларида ишорасини ўзгартиради. Бу ва қолган ҳолларда текширишнинг бошқача методлари қўлланилади.

5.9- расмда $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ функция, графиги тасвирланган. Функция энг кичик қийматга $x = x_1$ экстремал нуқтада, энг катта қийматга эса кесманинг $x = b$ охирида эришади.

5.3-§. Функцияларнинг ўзгаришини текширишни давом эттириш ва графиклар ясаш

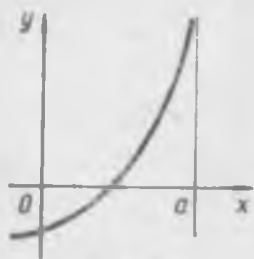
5.3.1. Функциянинг узилиш нуқталарда ва чексиз интервалнинг охирларида ўзгариши. Асимптоталар. Юқорида узилиш типлари классификацияланган эди (3.3.1- пунктга қаранг). Агар $y = f(x)$ эгри чизиқ $x \rightarrow a$ (a — узилиш нуқта) да $x = a$ тўғри чизиққа чексиз яқинлашса, y ҳолда бу тўғри чизик $y = f(x)$ эгри чизиқнинг *вертикал асимптотаси* дейилади (5.10- расм).

Шундай қилиб, агар ушбу шартлардан бири бажарилса $x = a$ тўғри чизик вертикал асимптота дейилади:

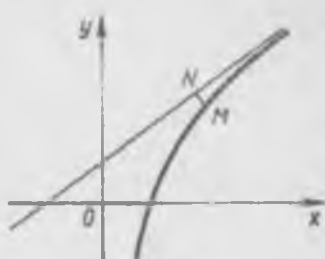
1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$,
2. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm \infty$,
3. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm \infty$;

шу билан бирга иккинчи ва учинчи ҳолларда $y = f(x)$ функция мос равишда $x \geq a$ да ва $x < a$ ҳам умуман аниқланмаган бўлиши мумкин. Масалан, $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ функция $x = 0$ вертикал асимптотага эга.

Энди графиги $x \rightarrow -\infty$ ёки $x \rightarrow +\infty$ да $y = kx + b$ тўғри чизикқа чегарасиз яқинлашадиган $y = f(x)$, $x \in (-\infty,$



5.10-расм.



5.11-расм.

$+\infty$) функцияни қараймиз (5.11-расм). Бу процесс MN кесма узунлигининг нолга интилиши билан характерланиши мумкин.

Таъриф. Агар

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \quad (5.8)$$

бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизик $x \rightarrow +\infty$ да $y = f(x)$ эгри чизикнинг асимптотиси дейилади.

Асимптоталарнинг мавжудлик масаласини ҳал қилиш учун k ва b нинг конкрет қийматларини билиш имкониятига эга бўлиш зарур. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ эгри чизик $x \rightarrow +\infty$ да $y = kx + b$ асимптотага эга бўлсин.

У ҳолда (5.8) ни x га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

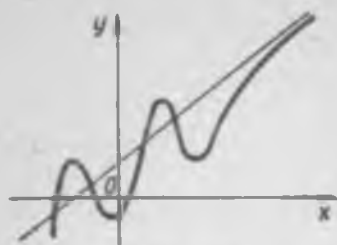
ёки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (5.9)$$

k нинг топилган қийматини (5.8) га қўйиб топамиз¹⁾:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx). \quad (5.10)$$

¹⁾ Тескари даъвони ҳам исботлаш мумкин, чунончи: агар k ва b параметрлар (5.9) ва (5.10) формулалар билан аниқланса, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизик $f(x)$ функция графигининг асимптотасидир.



5.12- расм.

Асимптотанинг $x \rightarrow -\infty$ даги таърифи юқоридагига ўхшаш аниқланади. $x \rightarrow +\infty$ да ва $x \rightarrow -\infty$ да турли асимптоталарнинг мавжуд бўлиш ҳоллари, шунингдек, уларнинг уст-уст тушиши мумкинлигини айтиб ўтамиз, (5.9) ва (5.10) лимитлардан бири мавжуд бўлмаган ҳолларда асимптоталар йўқ.

Функция графиги асимптотани кесиб ўтиши ҳам мумкинлигини эслатиб ўтамиз (5.12-расм).

Функция графигининг асимптоталарини аниқлаш катта татбиқий аҳамиятга эга, чунки улар (мавжуд бўлган ҳолда) функциянинг чексизликда ўзгаришини текширишни жуда енгиллаштиради, бу ҳолда эгри чизик бўйлаб ҳаракатни тўғри чизик бўйлаб ҳаракатга алмаштириш мумкин.

5.3- мисол. $y = \frac{x^2}{x-1}$ функция графиги асимптоталарининг мавжудлигини аниқлаймиз. (5.9) ва (5.10) формулалар бўйича ҳисоблаймиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1.$$

Шундай қилиб, $y = \frac{x^2}{x-1}$ функция графиги $y = x + 1$ асимптотага эга. Сўнгра

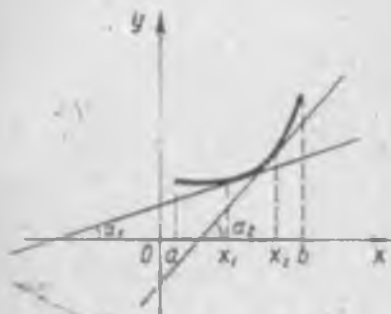
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm \infty$$

бўлгани учун $x = 1$ тўғри чизик $y = \frac{x^2}{x-1}$ функция графигининг вертикал асимптотаси бўлади.

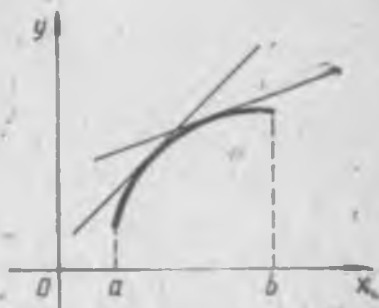
5.3.2. Функция графигининг қавариқлик йўналиши; функция графигининг букилиш нуқталари. Функция ўзгаришини ва функция графигининг формасини аниқлаш учун эгри чизик эгрилиги тушунчаси билан боғлиқ бўлган баъзи масалаларни, чунончи, қавариқлик йўналиши тушунчасини кўриб чиқамиз. Агар бирор интервалда эгри

чизиқнинг барча нуқталари бу интервалнинг исталган нуқтасида эгри чизиққа ўтказилган уринмадан юқорида ётса, бу эгри чизиқ шу интервалда *пастга қавариқ* дейилади (5.13- расм).

Аксинча, агар эгри чизиқнинг бирор интервалдаги барча нуқталари бу интервалнинг исталган нуқтасида эгри чизиққа ўтказилган уринмадан пастда ётса, эгри чизиқ шу интервалда *юқорига қавариқ* дейилади (5.14- расм).



5.13- расм.



5.14- расм.

Энди эгри чизиқнинг (функция графигининг) интервалда қавариқлик йўналишини аниқлаш имконини берадиган етарли аломатни исботлаймиз.

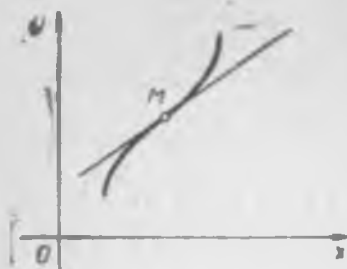
5.10-теорема. Агар икки марта дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бирор (a, b) интервалда $f''(x)$ иккинчи ҳосила мусбат (манфий) бўлса, у ҳолда функция бу интервалда пастга (юқорига) қавариқ бўлади.

Ҳақиқатан, агар, масалан, $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$ бўлса, бу ҳол функциянинг $f'(x)$ биринчи ҳосиласи ўсувчи функция эканлигини англатади. Бу эса x абсцисса билан биргаликда эгри чизиққа уринманинг Ox ўқ билан ҳосил қиладиган α бурчаги ҳам ортади, демакдир (5.13- расм):

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

Лекин бундай ҳолда эгри чизиқ пастга қавариқдир. Теоремани иккинчи қисми шунга ўхшаш исботланади. Бу теоремага тескари теорема ҳам ўринли.

Агар график функциянинг аниқланиш соҳасида қавариқлик йўналишини ўзгартирса, у ҳолда эгри чизиқ турли қавариқлик йўналишларига эга бўладиган бўлакларни аж-



5.15-расм.

ратувчи M нуқта (бу нуқтада эгри чизиққа уринма мавжуд бўлиш шартида) *букилиш нуқтаси* дейилади (5.15-расм).

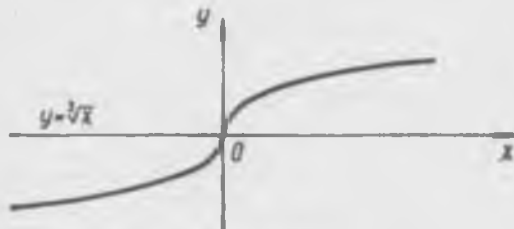
5.11-теорема. Агар $y=f(x)$ функция (a, b) интервалада икки марта дифференциалланувчи ва $x_0 \in (a, b)$ *букилиш нуқтаси* бўлса, у ҳолда $f''(x_0) = 0$.

Ҳақиқатан, функция икки марта дифференциалланувчи бўлгани учун ҳамда *букилиш нуқтасидан ўнг ва чап томонларда* иккинчи ҳосила турли ишораларга эга бўлиши лозимлиги сабабли $(x_0; f(x_0))$ нуқтада у нолга тенг бўлиши керак.

Бу теореманинг тескариси тўғри эмас: $f''(x_0) = 0$ бўлишидан x_0 нуқта *букилиш нуқтаси* бўлиши келиб чиқмайди. Масалан, $y = x^4$ функция учун $y'' = 12x^2$ ва $x = 0$ да $y'' = 0$ га эгамиз. Лекин $x = 0$ *букилиш нуқтаси* эмас, чунки бу нуқтада функция қавариқлик йўналишини ўзгартирмайди (барча x ларда $y'' \geq 0$, график пастга қавариқ).

Бошқа фактни ҳам қайд қилиб ўтамиз: *букилиш нуқталари* $f''(x)$ *мавжуд бўлмаган жойда ҳам мавжуд бўлади.*

Масалан, $y = \sqrt[3]{x}$ функция учун $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ бўлиб, $x_0 = 0$ *букилиш нуқтасидир*, лекин бу нуқтада иккинчи ҳосила мавжуд эмас (5.16-расм).



5.16-расм.

Бироқ бу даъвонинг ҳам тескариси тўғри эмас. Масалан, $y = \sqrt[3]{x^3}$ функция учун $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ бўлиб,

$x = 0$ да y'' мавжуд эмас, аммо қолган барча нуқталарда $y'' < 0$ ва график юқорига қавариқ, демак, $x_0 = 0$ букилиш нуқтаси эмас (5.8 в-расм).

Шундай қилиб, $y = f(x)$ функция графигининг қавариқлик характерини ўрганиш учун иккинчи ҳосила ишорасини $f''(x_0) = 0$ бўладиган ёки $f''(x_0)$ мавжуд бўлмайдиган x_0 нуқта атрофида текшириш зарур.

5.4-мисол. $y = x^3$ функция графигининг қавариқлигини текширамиз; $y' = 3x$, $y''(0) = 0$. $x < 0$ да $y'' < 0$ га ва $x > 0$ да $y'' > 0$ га эгамиз. Иккинчи ҳосила $x = 0$ нуқтада ишорасини « $-$ » дан « $+$ » га ўзгартиради. Шундай қилиб, $x = 0$ букилиш нуқтасида функция графиги юқорига қавариқликдан пастга қавариқликка ўтади (5.4-расмга қаранг).

5.3.3. Функцияни текширишнинг умумий схемаси. Юқорнда айтиб ўтилганидек (2.2.2-пунктга қаранг), аналитик усулда берилган функциянинг графиги функциянинг характерли хусусиятларининг сифат кўринишини кўргазмали қилиш мақсадида ясалади.

Мумкин бўлган бундай хусусиятларнинг баъзилари ва уларни аниқлаш методлари обзорини келтирамиз.

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси. Мураккаб функциянинг графиги ясалаётган ва аниқланиш соҳасига доир кўрсатмалар бўлмаса, у ҳолда табиий аниқланиш соҳасини яшаш зарур, бунда тегишли тенгсизликлар ечилади, узлуксизлик интерваллари аниқланади ва берилиш интервалининг охирларнда функциянинг ўзгариши (ёки қиймати) аниқланади.

2. Асимптоталар. Узилиш нуқталарида вертикал асимптоталарнинг бор-йўқлигини, бу нуқталарда функциянинг чексизликда ўзгаришини ўрганамиз.

3. Симметрия. Даврийлик. Жуфтлик ва тоқлик, даврийлик хоссасининг мавжудлиги функция аниқланиш соҳасининг бир қисмидагина текшириш билан чекланишга имкон бериб, текшириш ишини анча енгиллаштирди.

4. Экстремумлар. Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз, дифференциалланувчанлик бузилган нуқталарни топамиз. Критик нуқталарни аниқлаймиз, уларни ортиб бориш тартибида жойлаштирамиз. Экстремумларни аниқлаймиз.

5. Букилиш нуқталари. Иккинчи ҳосила нолга тенг бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталарни аниқлаймиз, бу нуқталар атрофида графикнинг қавариқлик йўналиши-

ни аниқлаймиз. Букилиш нуқтаси икки экстремум нуқта орасида, агар бу нуқталар орасидаги интервалда иккинчи ҳосила мавжуд бўлса, доимо бўлишини эслатиб ўтамиз.

6. Қўшимча характерли нуқталар. Графикни кўпроқ аниқликда яшаш учун баъзи қўшимча нуқталар — графикнинг координата ўқлари билан, симметрия ўқлари билан ва асимптоталар билан кесишиш нуқталарини ҳисоблаш фойдали бўлади.

7. Графикни яшаш. Ушбу якуний босқичда функцияни текшириш натижасини кўргазмали қилиш мақсадида функциянинг графиги координаталар системасида ясалади.

5.5-мисол. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$ функцияни текширамиз. Функциянинг аниқланиш соҳаси, равшанки,

$$x = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

Функция берилиш интервалларининг охирларида ўзини қандай тутишини аниқлаймиз. Бунинг учун ушбу тўртта лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^4}{x^3-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^4}{x^3-1} = +\infty.$$

Шундай қилиб, $x = 1$ вертикал асимптота эканлигини аниқладик. Оғма асимптоталарни аниқлашга ўтиб,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3-1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - x \right) = 0$$

ни топамиз, бундан $y = x$ тўғри чизик функция графигининг $x \rightarrow -\infty$ да ва $x \rightarrow +\infty$ да оғма асимптотаси бўлиши келиб чиқади.

Сўнгра экстремумларни аниқлаш учун

$$y' = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}, \quad y'' = \frac{6x^2(2+x^3)}{(x^3-1)^3}$$

ни топамиз. y' ҳосила функциянинг аниқланиш соҳасида мавжуд ва чекли, шу сабабли барча критик нуқталарни $y' = 0$ шартдан аниқлай-

миз, y эса иккита критик нуқтани беради: $x_1 = 0$ ва $x_2 = \sqrt[3]{4}$. y' нинг ишорасини $x_1 = 0$ нуқтанинг е-атрофида текшириб, $x \in (-\epsilon, 0)$ бўлганда $y' > 0$ бўлишини, $x \in (0, \epsilon)$ бўлганда $y' < 0$ бўлишини кўрамиз; шундай қилиб, $x_1 = 0$ — максимум нуқтаси, $y(0) = 0$ — функциянинг максимуми. Шу билан бир вақтда биз функция $x \in (-\infty, 0)$ да ўсишини, $x \in (0, 1)$ да камайишини аниқладик. Функциянинг $x_1 = 0$ нуқтада экстремумини ҳозиргина кўрилган усул билангина текшириш мумкинлигини айтиб ўтаемиз, чунки $x_1 = 0$ нуқта иккинчи ҳосиланинг нолидир.

$x_2 = \sqrt[3]{4}$ нуктада экстремумни иккинчи ҳосила ёрдамида текшириш мумкин, чунончи $y''(\sqrt[3]{4}) > 0$, яъни $x_2 = \sqrt[3]{4}$ — функциянинг минимум нуктаси, $y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ эса функциянинг минимуми.

Энди функция графигининг қавариқлик формасини аниқласак бўлади. $y' = 0$ шартдан $x_1 = -\sqrt[3]{2}$ ни топамиз ва бу нуктанинг е-атрофида y'' нинг ишорасини текшириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x \in (-\epsilon - \sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}) \text{ да } y'' > 0,$$

$$x \in (-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2} + \epsilon) \text{ да } y'' < 0, \text{ яъни } x_1 = -\sqrt[3]{2}$$

функция графигининг пастга қавариқликдан юқорига қавариқликка йўналишининг букилиш нуктаси абсциссаси; букилиш нуктасининг ординатаси: $y = (-\sqrt[3]{2})^3 = -2$. Функцияни текшириш тугалланди. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ функция графиги 5.17-расмда берилган.

5.3.4. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир татбиқий (амалий) характердаги масалалар. Юқорида баён қилинган назарияни конкрет характердаги масалалар ечишга қўлланилишини кўрсатамиз.

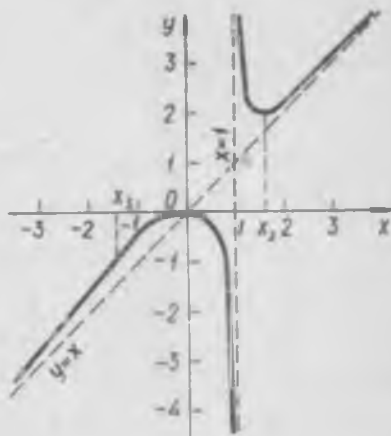
5.1-масала. Узунлиги l м бўлган ғов учун материал тайёрлаган. Бу ғов билан юзи энг катта бўлган тўғри тўртбурчак майдонни ўраб олиш керак. Бу майдоннинг ўлчамлари қанча бўлиши лозим.

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг эни x м бўлсин. $У$ ҳолда унинг бўйи $(\frac{l}{2} - x)$ м, ва демак, юзи $S = (\frac{l}{2} - x)x$ бўлиши лозим.

Масалани ечиш учун $S(x)$ функция x нинг қандай қийматида энг катта қиймат қабул қилишини топиш керак.

Масала мазмунига кўра x аргумент $[0, l/2]$ кесмада ўзгаради.¹⁾ Юқорида баён қилинган назарияни қўллаиб, қуйидагини топамиз:

¹⁾ $x = 0$ ва $x = l/2$ ҳоллар махсус ҳоллардир. Текшириш тўлиқ бўлиши учун биз уларни истисно қилмаймиз.



5.17-расм.

$$\left(\frac{1}{2}x - x^2\right)' = \frac{1}{2} - 2x, \quad \left(\frac{1}{2}x - x^2\right)'' = -2.$$

$\frac{1}{2} - 2x = 0$ деб, $x = 1/4$ критик нуқтани топамиз. $S''(x) < 0$ бўлгани учун максимумга эгамиз. Бу максимум $[0, 1/2]$ интервал ичида ётган ягона экстремумдир. $S(x)$ функциянинг қийматларини $x = 0$, $x = 1/4$ ва $x = 1/2$ нуқталарда ҳисоблаймиз ва энг каттасини танилаб оламиз:

$$S(0) = 0, \quad S(1/4) = 1^2/16, \quad S(1/2) = 0.$$

Шундай қилиб, энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ҳамма томонлари $1/4$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак, яъни квадратдир.

5.2-масала. Томони a бўлган квадрат тунукадан усти очиқ яшик ясаш лозим. Бунинг учун тунуканинг бурчакларидан тенг квадратлар қирқиб ташланади ва уни букиб, яшик ясалади. Энг катта сифмли яшик ҳосил бўлиши учун тунуканинг бурчакларидан қандай квадратлар қирқиб олиш лозим (ҳажм яшик асосининг юзини баландликка кўпайтмасига тенг).

Ечилиши. Бурчаклардан қирқиб олинadиган квадратларнинг томони узунлигини x орқали белгилаймиз. Яшикнинг таги томони $a - 2x$ бўлган квадрат бўлади. Бу ҳолда яшикнинг ҳажми $V = (a - 2x)^2 x$ формула билан ифодаланади, бу ерда x аргумент $(0, a/2)$ оралиқдаги қийматларни қабул қилади. $x = 0$ ва $x = a/2$ ҳолларни қарамаймиз, чунки булар (масала шартига кўра) функциянинг айниш ҳолларидир. V функция x нинг $x \in (0, a/2)$ даги қайси қийматларида энг катта қиймат қабул қилишини аниқлаймиз. Бу қиймат $(0, a/2)$ оралиқдаги максимумларнинг энг каттаси бўлиши лозимлиги равшан. V' ва V'' ни топамиз:

$$V' = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = 12x^2 - 8ax + a^2,$$

$$V'' = 24x - 8a.$$

$V' = 0$ шартдан критик нуқталарни топамиз:

$$12x^2 - 8ax - a^2 = 0,$$

бундан

$$x_1 = (4a + 2a)/12 = a/2, \quad a/2 \notin (0, a/2),$$

$$x_2 = (4a - 2a)/12 = a/6, \quad a/6 \in (0, a/2).$$

$x_1 = a/2$ нуқтада функция айнийди, шу сабабли иккинчи ҳосиланинг ишорасини фақат $x_2 = a/6$ нуқтада текшираемиз, бунда $a > 0$ ва $a = \text{const}$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$V''(a/6) = 24 \cdot \frac{a}{6} - 8a = -4a < 0.$$

Бу эса V функция $x = a/6$ нуқтада максимумга эга бўлади, демакдир, бу максимум $(0, a/2)$ оралиқда ягонадир. $V(a/6) = 2a^3/27$ қиймат энг катта қиймат бўлади.

5.3-масала. Суюқли кабелдан сигналларнинг ўтиш тезлиги $x^3 \ln(1/x)$ ифодага пропорционал, бу ерда x — кабелнинг металл ўзаги радиусининг бу ўзакни изоляциялайдиган кобиқнинг қалинлигига нисбати. Сигналларнинг ўтиш тезлиги энг катта бўлиши учун бу нисбат қандай бўлиши лозим?

Ечилиши. Мазкур ҳолда экстремуми текширилиши лозим бўлган функцияни тузиш талаб қилинмайди. У масала шартда берилган. Шу сабабли биз $(0, +\infty)$ интервалда x нинг шундай қийматини топсакки, бу қийматда

$$f(x) = x^2 \ln(1/x) = -x^2 \ln x$$

функция энг катта қийматга эга бўлса, у ҳолда масала ҳал қилинган бўлади. $f(x)$ — силлиқ функция. Тоғамиз:

$$f'(x) = -2x \ln x - x = -x(2 \ln x + 1).$$

Ҳосиланинг $(0, +\infty)$ интервалга тегишли бўлган илдизи фақат $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$ қиймат бўлади. Агар ҳосиланинг ишорасини $x = e^{-1/2}$

нуқтадан ўтишда текширадиган бўлсак, у ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартиришини кўрамиз.

Демак, $x = e^{-1/2}$ нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга, шу билан бирга бу максимум $f(x)$ нинг $(0, +\infty)$ интервалдаги ягона максимумдир. Демак, изланаётган нисбат $e^{-1/2}$ га тенг бўлиши лозим.

5.4-масала. Ҳар бири r ички қаршиллик, E электр юритувчи кучга эга бўлган n та гальваник элемент x та группа қилиб, кетма-кет уланган, шу билан бирга ҳар бир группа параллел уланган y та элементдан иборат ($xy = n$); R — ташқи занжир қаршилиги. Ток кучи I энг катта бўлиши учун x ва y сонлар қандай бўлиши лозим?

Ечилиши. Агар m та элемент кетма-кет уланган бўлса, у ҳолда занжирдаги ток кучи Ом қонунига кўра

$$\frac{mE}{mr + R} = \frac{E}{r + \frac{R}{m}}$$

бўлади, агар k та элемент параллел уланган бўлса, у ҳолда ток кучи

$$\frac{E}{\frac{r}{k} + R}$$

бўлади. У ҳолда бутун батареянинг ток кучи

$$I = \frac{E}{\frac{r}{y} + \frac{R}{x}} = \frac{Ex}{ax^2 + R} \quad \left(a = \frac{r}{n}\right)$$

га тенг; масала шартдан $x < n$ экани кўришиб турибди, шунинг учун функцияни $(0, n)$ интервалда текширамиз:

$$I' = E \frac{R - ax^2}{(ax^2 + R)^2}, \quad I'' = 2aE \frac{(ax^2 - 3R)}{(ax^2 + R)^3} x.$$

$I'(x)$ ҳосила $(0, n)$ интервалнинг фақат битта $x = \sqrt{\frac{R}{a}} = \sqrt{\frac{Rn}{r}}$

нуқтасида нолга айланади, бу нуқта шу интервалга тегишли бўлиши мумкин. Агар $R/r < n$ бўлса, $x = \sqrt{Rn/r}$ нуқта $(0, n)$ интервалга

тегишли бўлади. Бу нуқтада $I''(x)$ нолдан кичик, демак, $x = \sqrt{\frac{Rn}{r}}$,

$y = \frac{n}{x} = \sqrt{\frac{rn}{R}}$ бўлса, функциянинг максимал қийматини ҳосил қиламиз.

5-БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Ферма, Ролль, Лагранж теоремаларини айтиб беринг.
2. Бу теоремаларнинг геометрик маъноси нимадан иборат?
3. Стационар нуқта нима?
4. Функция ўсишининг (камайишининг) зарур ва етарли аломатларини айтиб беринг.
5. Экстремум мавжуд бўлишligининг зарур ва етарли аломатларини айтиб беринг.
6. Функциянинг ёпиқ интервалдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш методи нимадан иборат?
7. Эгри чизиқ асимптоталари таърифини ва уларни топиш усулини айтиб беринг.
8. Эгри чизиқ қавариқлигининг йўналishi қандай аниқланади?
9. Букилиш нуқтаси мавжудлигининг зарур ва етарли аломатларини айтиб беринг.
10. Функция ўзгаришини текширишнинг умумий схемасини баён қилиб беринг.

5-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

$y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ интервалдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

1. $y = 2x^2 - \ln x$, $[0,25; 1]$.
2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$, $[-2, 3]$.
3. $y = x - e^x$, $[-1, 2]$.
4. $y = x^4 - 2x^2 - 5$, $[-2, 0]$.
5. $y = \frac{x^2}{x+1}$, $[-0,5; 4]$.
6. $y = x^2 e^{-x}$, $[-1, 4]$.

Дифференциал ҳисоб методлари ёрдамида функцияни текширинг ва графигини ясанг:

7. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.
8. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.
9. $y = 3x + \frac{3x}{9x^2 - 1}$.
10. $y = \frac{x^3}{3x^2 - 1}$.
11. $y = (2x - 3) \sqrt[3]{(x+i)^2}$.
12. $y = x^2 \sqrt{x+1}$.
13. $y = \frac{e^x}{x}$.
14. $y = \frac{x}{\ln x}$.
15. $y = \frac{x^2 + 8}{x+1}$.
16. $y = \frac{(x-4)^2}{x^2}$.

$$17. y = \frac{x \sqrt{1-x}}{1+x}.$$

$$18. y = \frac{(x^2-4)^{2/3}}{x^3}.$$

$$19. y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$20. y = e^{-1/x^2}.$$

Масалаларни ечинг:

21. Ром юқори томони ярим доира билан тугаган тўғри тўртбурчак кўринишида. Ромнинг периметри тайин 2р бўлганда энг кўп ёруғлик ўтиши учун унинг ўлчамлари қандай бўлиши лозим?

22. Мазкур моментда А кемадан шарқ томонда 75 км нарида бўлган В кема соатига 12 км тезлик билан ғарб томон сузмоқда, А кема эса соатига 4 км тезлик билан жануб томонга сузмоқда. Неча соатдан сўнг кемалар бир-бирига энг яқин бўлади?

23. Икки ёруғлик манбан бир-биридан 30 м нарида жойлаштирилган. Агар уларнинг кучи 27:8 каби нисбатда бўлса, уларни туташтирувчи тўғри чизиқда энг кам ёритилган нуқтани топинг?

$$24. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ эллипсга ички чизилган барча тўғри тўртбурчак-}$$

лар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг (тўғри тўртбурчакнинг томонлари координата ўқларига параллел деб тахмин қилинади).

25. Эни 4 м бўлган каналдан унга тўғри бурчак остида эни 2 м бўлган канал ажралиб чиқади. Ходани бу каналларнинг бирдан иккинчисига оқизиб ўтказиш мумкин бўлиши учун унинг узунлиги l қандай бўлиши керак? (ходанинг йўгонлигини ҳисобга олмаслик мумкин).

26. Ички қаршилиги l га тенг бўлган гальваник элемент бор. R ташқи қаршилиқ қанча бўлганда, бу элементдан олинадиган ток қуввати ташқи занжирда энг катта бўлади?

5-БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КўРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

21. Ярим доиранинг радиуси тўғри тўртбурчакнинг баландлигига тенг бўлиши лозим.

$$22. 5 \frac{5}{8} \text{ ссат.}$$

23. Кучли ток манбандан 18 м нарида.

$$24. \text{Тўғри тўртбурчакнинг томонлари } \frac{a \sqrt{2}}{2} \text{ ва } \frac{b \sqrt{2}}{2} \text{ га}$$

тенг.

$$25. l < 2 \sqrt{9+6 \sqrt{2}} \approx 8,36 \text{ м.}$$

$$26. R = r.$$

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

6.1-§. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системалари

6.1.1. *Икки номаълумли чизиқли тенгламалар. 6.1-таъриф. x ва y га нисбатан чизиқли тенглама деб*

$$ax + by = c \quad (6.1)$$

кўринишдаги ҳар қандай муносабатни айтамыз, бу ерда a ва b сонлардан ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли.

x ва y сонларнинг (6.1)ни тўғри тенгликка айлантирадиган ҳар қандай жуфти бу тенгламанинг ечими дейилади (шунингдек, бу сонлар жуфти (6.1) ни қаноатлантиради дейилади).

Жумладан, $2x - y = 3$ тенгламанинг ечимлари, масалан, қуйдаги сонлар жуфтларидан иборат: 1) $x = 1$, $y = -1$, 2) $x = 2$, $y = 1$; 3) $x = \sqrt{3}/2$, $y = \sqrt{3} - 3$ ва ҳоказо. Бу тенгламани қаноатлантирмайдиган сонлар жуфтига $x = 10$, $y = 5$ мисол бўла олади.

Чизиқли тенгламанинг барча ечимлари тўплами Декарт координата текислигида тўғри чизиқ билан тасвирланишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, агар $b \neq 0$ бўлса, y ҳолда (6.1) нинг иккала томонини b га бўлиб ва $\frac{a}{b}x$ ҳадни ўнг томонга ўтказиб, (6.1) га эквивалент бўлган ушбу

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b} \quad (6.2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Маълумки, бундай муносабат y ни x нинг чизиқли функцияси сифатида аниқлайди, бу чизиқли функциянинг графиги эса тўғри чизиқ бўлиб, бу тўғри чизиқ Oy ўқни $y_0 = c/b$ ординатали нуқтада кесиб ўтади ва Ox ўқ билан тангенси $-a/b$ бўлган бурчак ҳосил қилади.

Агар $b = 0$ бўлса, y ҳолда албатта $a \neq 0$ бўлади (биз таърифда бу сонларнинг ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли деб талаб қилганмиз). U ҳолда (6.1) ни бундай ёзиш мумкин:

$$x = \frac{c}{a}. \quad (6.3)$$

Бундан кўринадики, x ва y сонлар бу муносабатларни қаноатлантириши учун x сон c/a га тенг бўлиши, y эса исталган ҳақиқий сон бўлиши зарур ва етарли. Барча бундай жуфтлар тўплами геометрик нуқтан назардан тўғри чизиқ билан тасвирланиб, бу тўғри чизиқ Oy ўққа параллел, Ox ўқни эса $x = c/a$ абсциссали нуқтада кесиб ўтади.

6.1.2. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системалари, геометрик интерпретацияси. Биз энди иккита чизиқли тенгламадан тузилган системаларни қараймиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (6.4)$$

6.2- таъриф. (6.4) системанинг ечими деб бу система-ни ташкил қилувчи тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантирувчи иккита x ва y сонга айтилади.

(6.4) нинг барча ечимлари тўплами бу системанинг мос равишда биринчи ва иккинчи тенгламаларининг ечимларидан тузилган тўпламларнинг умумий қисмидан (тўпламлар назарияси нуқтан назарни бўйича кесишма) иборат бўлиши равшан. Шу сабабди геометрик мулоҳазаларга асосан, қуйидаги ҳолларда биттаси ва фақат биттаси ўринли бўлиши мумкин деган хулосага келамиз:

1°. (6.4) нинг мос равишда биринчи ва иккинчи тенгламаларининг ечимлари тўпламларини тасвирлайдиган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар фақат битта умумий M_0 нуқтага эга. Бу нуқтанинг $(x_0; y_0)$ координаталари бу ҳолда системанинг ягона ечимини ифодалайди (ҳақиқатан, x ва y сонларнинг исталган бошқа жуфти xOy текисликда M_0 дан фарқли M нуқтани, ва демак, l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг ҳеч бўлмаганда бирида ётмайдиган нуқтани тасвирлайди. Бу эса бундай сонлар жуфти (6.4) нинг тенгламаларидан ҳеч бўлмаганда бирини қаноатлантирмайди, демакдир). Бундай ҳол эса l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар Ox ўқ билан ҳар хил бурчак ташкил қилганда ва фақат шуидагина ўринли бўлади.

2°. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бир-бирига параллел. Бу ҳолда улар, табиийки, умумий нуқтага эга бўлмайди. Демак, (6.4) система битта ҳам ечимга эга эмас.

3°. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади. У ҳолда уларнинг исталган нуқтаси системамизнинг ечимини ифодалайди. Бинобарин, бу ҳолда система чексиз кўп ечимга эга.

6.1.3. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини текшириш. Энди (6.4) системани аналитик усулда текшириш билан шуғулланамиз. (6.4) нинг тенгламаларидан биринчисини b_2 га, иккинчисини эса $-b_1$ га кўпайтириб, уларни ҳадма-ҳадлаб қўшамиз. Шундан кейин (6.4) нинг тенгламаларидан биринчисини $-a_2$ га, иккинчисини a_1 га кўпайтириб, яна ҳадма-ҳадлаб қўшамиз. Бу амаллар натижасида

$$\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x &= c_1b_2 - c_2b_1, \\ (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot y &= a_1c_2 - a_2c_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (6.5) x ва y га нисбатан янги тенгламалар системаси бўлади. Бу системанинг ягона ечими

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (6.6)$$

бўлиши кўриниб турибди. Агар $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ бўлса, у ҳолда (6.5)

$$\begin{cases} 0 = c_1b_2 - c_2b_1 \\ 0 = a_1c_2 - a_2c_1 \end{cases} \quad (6.7)$$

кўринишни олади.

Кейинги мулоҳазаларни тўғри тушуниш учун қуйидаги муҳимдир: (6.5) муносабат ҳар қандай ҳолда ҳам (6.4) муносабатнинг натижасидир, яъни қандайдир x ва y сонлар (6.4) ни қаноатлантирса, у ҳолда ана шу x ва y сонларнинг ўзида (6.5) даги муносабатларнинг ҳар бири ўринли бўлади.

Аввал $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ҳолни қараймиз. У ҳолда ҳозиргина айтилган мулоҳазага асосан, айтиш мумкинки, (6.4) системанинг ҳар қандай ечими (6.5) система учун ҳам ечим бўлади. Лекин (6.5) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлганда фақат битта ечимга эга бўлиб, у ечим (6.6) формулалар билан берилишини кўрдик. Демак, (6.4) система (6.6) дан ташқари бошқа ҳеч қандай ечимга эга бўлиши мумкин эмас. Аммо

(6.6) ҳам бу системани қаноатлантирадими? Шу пайтгача қилган ҳисоблашларимиздан бу мутлақо келиб чиқмайди. Бу саволга жавобни биз (6.6) ни бевосита (6.4) нинг ҳар бир тенгламасига қўйиб ҳосил қилишимиз мумкин. Бу тенгламалардан биринчисининг чап томони бундай ўрнига қўйишдан сўнг қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \cdot \frac{a_1 c_1 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} &= \frac{a_1 c_1 b_2 - a_1 c_2 b_1 + a_1 c_2 b_1 - a_2 c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \\ &= \frac{a_1 c_1 b_2 - a_2 c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1, \end{aligned}$$

бундан эса (6.6) биринчи тенгламани қаноатлантириши кўриниб турибди. (6.6) сонлар дастлабки (6.4) системанинг тенгламаларидан иккинчисини ҳам қаноатлантиришига ана шунингдек ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, биз агар $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (6.4) система ягона ечимга эга ва бу ечим (6.6) формулалар билан берилади деб хулоса қилишга ҳақлимиз.

Энди $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ бўлсин. Агар биз (6.4) ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга деб фараз қиладиган бўлсак, у ҳолда бундан (6.7) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Демак, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ бўлганда (6.7) муносабатлардан ҳеч бўлмаганда бири бажарилмаса, у ҳолда (6.4) система битта ҳам ечимга эга эмас.

Ниҳоят, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ ва (6.7) муносабатларнинг иккаласи ҳам бажарилса, у ҳолда (6.4) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга эканлигини кўрсатамиз.

Дастлаб, $b_1 \neq 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда $b_2 \neq 0$ ҳам бўлади. Ҳақиқатан, агар бунинг аксини фараз қиладиган бўлсак, у ҳолда $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ тенгликка асосланиб, $a_2 b_1 = 0$ бўлишини ҳосил қиламиз, бундан эса $a_2 = 0$. Лекин 6.1-таърифга биноан, a_2 ва b_2 коэффициентлар бир вақтда нолга тенг бўлиши мумкин эмас. (6.4) тенгламалардан биринчисининг ечимлари тўплами, бизга маълумки, барча мумкин бўлган x ва y сонлардан иборат бўлиб, бунда x — ихтиёрий ҳақиқий сон, y нинг тегишли қиймати эса (6.2) формула билан берилади. Бундай x ва $-\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$ сонларни (6.4) нинг иккинчи тенгламасига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_2 x + b_2 \cdot \left(-\frac{a_1}{b_1} x + \frac{c_1}{b_1} \right) = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1} \cdot x + \frac{b_2 c_1}{b_1} = \frac{b_2 c_1}{b_1}.$$

Лекин (6.7) дан $b_2 \frac{c_1}{b_1} = c_2$ бўлиши келиб чиқади. Демак, тенгламаларимиздан биринчисининг ҳар бир ечими иккинчи тенгламани, ва демак, (6.4) системани ҳам қаноатлантирар экан.

Энди $b_1 = 0$ бўлсин. У ҳолда равшанки, $a_1 \neq 0$ ва $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ дан $a_1 b_2 = 0$ келиб чиқади, бундан эса $b_2 = 0$, бинобарин, $a_2 \neq 0$. (6.4) система бу ҳолда қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} a_1 x = c_1, \\ a_2 x = c_2. \end{cases} \quad (6.8)$$

Бу тенгламалардан биринчисини исталган иккита x ва y сон қаноатлантиради, бунда $x = c_1/a_1$, y эса ихтиёрий ҳақиқий сон. Лекин (6.7) дан $c_2/a_2 = c_1/a_1$ бўлиши келиб чиққани учун бундай x ва y сонлар иккинчи тенгламанинг ҳам, ва демак, (6.8) системанинг ҳам ечими бўлади.

6.2-§. Иккинчи тартибли детерминантлар

6.2.1. Асосий таърифлар. Крамер формулалари. Олдинги пунктда $a_1 b_2 - a_2 b_1$ типдаги ифодалар тез-тез учраб турди. Бундай турдаги ифодалар математиканинг турли соҳаларида ва унинг татбиқларида кўпинча учраб туради. Шу сабабли улар учун махсус номлар ва белгилашлар киритиш мақсадга мувофиқ бўлиб чиқди.

6.3-таъриф. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ифода (a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} сонлардан тузилган) *иккинчи тартибли детерминант* деб аталади ва

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

билан белгиланади.

Бу ерда ва бундан кейин биринчи индекс сатр номерини, иккинчи индекс эса устун номерини билдиради.

Юқоридаги таърифдан фойдаланиб, энди қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ c_1 b_2 - c_2 b_1 &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

(6.9) детерминантлар (6.4) системани ўрганиш муносабати билан қараладиган ҳолларда уларнинг биринчисини бу системанинг детерминанти, иккинчисини x номаълумнинг детерминанти, учинчисини y нинг детерминанти дейилади. Биз уларни мос равишда Δ , Δ_x ва Δ_y орқали белгилаймиз. Шунинг айтиб ўтамизки, Δ_x учун ифода системанинг детерминантидан ундаги x нинг коэффициентларидан тўзилган устунни озод ҳадлар устунни билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш, Δ_y детерминант Δ дан y нинг олдидаги коэффициентлар устунини озод ҳадлар устунни билан алмаштириб ҳосил қилинади.

6.1.3-пунктнинг охирида ҳосил қилинган хулосаларни бу терминлардан фойдаланиб, энди бундай таърифлаш мумкин.

6.1-теорема. (6.4) система ягона ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва етарли:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.10)$$

Бу шартда системанинг айtilган ягона ечими қуйидаги иккита сон бўлади:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (6.11)$$

(6.11) формулалар Крамер формулалари номи билан юритилади.

Агар системанинг детерминанти нолга тенг бўлиб, номаълумларнинг детерминантларидан ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли бўлса, у ҳолда система ечимга эга эмас.

Агар системанинг детерминанти ҳам, номаълумлар детерминантларининг ҳар бири ҳам нолга тенг бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

6.2.2. Иккинчи тартибли детерминантларнинг хоссалари. Энди иккинчи тартибли детерминантларнинг асосий хоссаларини кўриб чиқамиз.

1°-хосса. Агар детерминант сатрларининг ўринларини унинг устунларининг ўринлари билан (уларнинг тартибини ўзгартирмасдан) алмаштирилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (6.12)$$

Исботи. (6.12) нинг чап ва ўнг томонини 6.3-таърифга биноан ҳисоблаб бир хил сонни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2°-хосса. Детерминантда иккита сатрнинг (ёки иккита устуннинг) ўринлари алмаштирилса, у ҳолда унинг абсолют қиймати сақланади, ишораси эса қарама-қаршисига алмашади.

Исботи.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3°-хосса. Агар детерминант иккита бир хил сатрга (ёки иккита бир хил устунга) эга бўлса, у ҳолда унинг қиймати нолга тенг.

Исботи. Бундай детерминантда сатрларнинг ўринларини алмаштириб, биз уни аслида ўзгартирмаймиз. Лекин 2°-хоссага мувофиқ, унинг ишораси қарама-қаршисига алмашади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Бундан эса бу детерминантнинг нолга тенглиги келиб чиқади.

4°-хосса. Агар детерминантда бирор-бир сатр (ёки устун) нинг ҳамма элементлари умумий кўпайтувчига эга бўлса, бу ҳолда у кўпайтувчини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Исботи. Аниқлик учун умумий кўпайтувчига иккинчи сатр элементлари эга бўлган ҳолни қараймиз:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}(\lambda a_{22}) - a_{12}(\lambda a_{21}) = \\ &= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

5°-хосса. Агар детерминантнинг бирор сатри элементлари бошқа сатр элементларини бир хил кўпайтув-

чига қўпайтирилганига тенг бўлса, у ҳолда шундай детерминант нолга тенг (устунлар учун ҳам шунга ўхшаш ҳолат бўлади).

Исботи. Аниқлик учун $a_{21} = \lambda a_{11}$, $a_{22} = \lambda a_{12}$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

(Биз аввал 4°-хоссадан, кейин эса 3°-хоссадан фойдаландик).

6.1-изох. $\lambda = 0$ десак, қуйидагини кўришимиз мумкин: агар детерминантнинг сатрларидан (устунларидан) бирининг барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда детерминантнинг ўзи ҳам нолга тенг (Албатта, бу даъвои бевосита ҳам исботлаш осон.)

6°-хосса. Агар детерминантнинг бирор сатри элементларнинг ҳар бири иккита қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант иккита детерминантнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, улар кўрсатилган сатрни биринчи ва иккинчи қўшилувчилардан айрим-айрим тузилган сатрларга алмаштириш билан ҳосил қилинади.

Масалан:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (6.13)$$

Шунга ўхшаш даъво устунлар учун ҳам ўринлидир.

Исботи.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a'_{11} + a''_{11})a_{22} - (a'_{12} + a''_{12})a_{21} = \\ &= (a'_{11}a_{22} - a'_{12}a_{21}) + (a''_{11}a_{22} - a''_{12}a_{21}) = \\ &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

7°-хосса. Детерминантнинг бирон-бир сатри элементларига бoshqa сатрнинг бир хил сонга қўпайтирилган элементларини қўшишдан детерминантнинг қиймати ўзгармайди (устунлар учун ҳам шу нарса ўринли).

Исботи.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(Аввал 6°-хоссани, кейин эса 5°-хоссани татбиқ қилдик).

6.3-§. Учинчи ва юқори тартибли детерминантлар ва уларнинг чизиқли тенгламалар системаларига татбиқи

6.3.1. Учинчи тартибли детерминантлар ва уч номаълумли учта чизиқли тенглама системаси учун Крамер формулалари. Ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (6.14)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бундай типдаги тенгламалар ҳам *чизиқли тенгламалар* деб аталади. Айрим тенгламанинг ечими тушунчалари 6.1-§ да киритилганига ўхшаш таърифланади.

Бу ҳолда ҳам икки номаълумли ҳолдаги каби мулоҳаза юритиб, бу системанинг натижаси ушбу муносабатлар бўлишини кўрсатиш мумкин эди:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \\ \Delta \cdot z = \Delta_z, \end{cases} \quad (6.15)$$

бу ерда

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_3c_1, \\ \Delta_x &= d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 + d_2b_2c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_3c_1, \\ \Delta_y &= a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 + a_2d_2c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_3c_1, \\ \Delta_z &= a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 + a_2b_2d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_3d_1. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Бундай турдаги ифодалар ҳам детерминантлар номи билан юритилади. Бунини навбатдаги таърифдан кўрамыз.

6.4-таъриф. *Учинчи тартибли*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант деб $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ сонга айтилади.

Агар (6.16) детерминантлар (6.14) система муносабати билан қараладиган бўлса, у ҳолда уларнинг биринчиси бу системанинг *детерминанти*, кейингиларининг ҳар бири эса тегишли *номаълумнинг детерминанти* дейилади. (6.14) системаси учун 6.1-теореманинг биринчи қисмига ўхшаш теорема ўринли.

6.2-теорема. (6.14) система ягона ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва етарли. Бу ҳолда айтилган ечим ушбу

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Крамер формуллари билан берилади.

Биз бу теоремани исботламаймиз.

Шуни қайд қилиб ўтайтиш, икки ўзгарувчи ҳолдан фарқли ўлароқ бу ерда энди $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ бўлса, система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга деб даъво қила олмаймиз. (6.15) дан кўринадики, агар $\Delta = 0$, лекин нолларнинг детерминантларидан ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (6.14) ечимга умуман эга бўлмаслиги равшан. Лекин (6.14) система ечимларга $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ бўлган ҳолда эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу ўринда ушбу даъвогина ўринли: $\Delta = 0$ бўлганда система ё умуман ечимга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Фазодаги аналитик геометрияга бағишланган бобда исботланадики, (6.14) системани ташкил этувчи сифатида келадиган бундай типдаги тенглама геометрик нуқтаи-назардан бирор текисликнинг барча нуқталари тўпламини тасвирлайди. Шу сабабли (6.14) системанинг ечимларини геометрик нуқтаи-назардан бу системани ташкил қилувчи тенгламалар билан аниқланадиган учта текисликнинг ҳар бирига тегишли бўлган нуқталар сифатида талқин қилиш мумкин.

Учинчи тартибли детерминантлар биз 6.2-§ да иккинчи тартибли детерминантлар учун келтириб чиқарган 1—7² хоссаларга ўхшаш хоссаларга эга. Биз бу ерда бу даъвоини исботсиз қабул қиламиз.

6.3.2. Учинчи тартибли детерминантни унинг бирор сатри ёки устунни элементлари бўйича ёйиш. Детерминантларни ҳисоблаш учун ҳам, шунингдек, бошқа мақсадлар учун ҳам қуйидаги формула қулай:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (6.17)$$

Буни исботлаш мақсадида детерминант учун 6.4-таърифда берилган ифодани ўзгартирамиз;

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Энди кичик қавслар ичидаги ифодалар мос равишда (6.17) нинг ўнг томонидаги детерминантлар эканлигига эътибор берилса, кифоя. Бу формула учинчи тартибли детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиш формуласи дейилади ва уни ҳисоблашни иккинчи тартибли детерминантларни ҳисоблашга келтиришга имкон беради.

Тушунарлики, 1° ва 2°-хоссалар (6.17) формулаларни умумлаштириш ва учинчи тартибли детерминантни исталган сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиш имконини беради. Бу умумлашган формулаларни ёзишда алгебраик тўлдирувчи тушунчаси қулай бўлар экан.

6.5-таъриф. Учинчи тартибли детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб шу a_{ik} элемент турган устун ва сатрни ўчиришдан ҳосил бўлган ҳамда ўчирилган сатр ва устун номерлари йиғиндиси жуфт сон бўлса, + ишора билан, акс ҳолда эса — ишора билан олинадиган иккинчи тартибли детерминантни ифодаладиган A_{ik} сонга айтилади.

Жумладан,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Энди (6.16) типдаги формулаларни тузиш қондасини қуйидагича таърифлашимиз мумкин.

Учинчи тартибли детерминант ўзининг исталган сатр (устун) элементларини уларга тегишли алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Бу қондани детерминантни, масалан, иккинчи устун элементлари бўйича ёйишга қўлланиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. Детерминантни ёйиш амалга ошири-
лаётган сатр (устун) элементларининг биттасидан бошқа
ҳаммаси нолга тенг бўлган ҳолда бундай типдаги фор-
мулаларни қўлланиш айниқса қулай. 7°-хоссадан фойда-
ланиб, детерминантни бундай кўринишга ҳар доим кел-
тиришимиз мумкин (унинг ҳамма элементлари нолга тенг
бўлмаса, албатта).

Буни конкрет мисолда кўрсатамиз. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисоблаш лозим бўлсин. Иккинчи сатр
элементларига биринчи сатрнинг элементларини 2 га кў-
пайтириб қўшсак,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. Энди учинчи сатр элементларидан би-
ринчи сатрнинг тегишли элементларини айирамиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix}.$$

7°-хоссага асосан бу детерминантларнинг ҳаммаси ўзаро
тенг. Энг сўнгги детерминантни биринчи устун элемент-
лари бўйича ёямиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = \\ = 5 \cdot 7 - (-4) \cdot (-7) = 7.$$

6.3.3. Юқори тартибли детерминантлар. 6.6-таъриф.
n-тартибли

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант деб унинг ҳар бир сатри ва ҳар бир устунидан биттадан олинган элементларининг қуйидаги қоида бўйича олинган ишоралар билан таъминланган кўпайтмалари йиғиндисига айтилади.

Агар номерлар кетма-кетлиги $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ да табиий тартибни тиклаш учун унда жуфт сонда ёнма-ён ўрин алмаштиришлар талаб қилинса, $a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$ қўшилувчи + ишора билан, акс ҳолда эса — ишора билан олинади.

n -тартибли детерминантлар учун 6.2-§ да иккинчи тартибли детерминантларнинг 1° — 7°-хоссаларига ўхшаш хоссалар ва исталган сатр (ёки устун) элементлари бўйича ёйиш формуласи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (6.18)$$

ўринли бўлишини исботлаш мумкин (биз бунни қилмаймиз). Детерминантларни ҳисоблаш учун бу формулани учинчи тартибли детерминант мисолидагидек, 7°-хоссани қўлланish билан ишлатиш қулай.

Энди номаълумлар сони ихтиёрый бўлган чизиқли тенгламалар системаларини текширишга ўтамыз. Энди олдин қўлланилган белгилашлардан бир оз чекиниб, номаълумларни ёзиш учун индекс билан таъминланган битта x ҳарфининг ўзини қўлланиш қулай бўлади.

6.3.4. n номаълумли n та чизиқли тенглама системаси. 6.7-таъриф. $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларга нисбатан чизиқли тенглама деб,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (6.19)$$

кўринишдаги ҳар қандай муносабатга айтилади, бу ерда $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентлардан ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли.

(6.19) ни тўғри тенгликка айлантирадиган ҳар қандай $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги бу тенг-

тенгламадан иборат системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бундай система фақат ноль ечимга эга, агар $\Delta = 0$ бўлса, у ҳолда унинг ечимлари чексиз кўп (ва демак, у ноль ечимдан фарқли ечимларга ҳам эга).

6.4-§. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш методлари

6.4.1. Гаусс методи. Агар n номаълумли n та чизиқли тенглама системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса, системани ечиш учун Крамернинг (6.20) формулаларидан фойдаланишимиз мумкин, албатта. Лекин бу усул ҳамма вақт ҳам яроқли бўлавермайди. n нинг унча-мунча катта қийматларида бу усул жуда кўп ҳисоблашларни талаб этади, бунда аниқликнинг (оралиқ натижаларни яхлитлаш ҳисобига) мумкин бўлган йўқолиши номаълумларнинг ҳақиқий ва ҳисобланган қийматлари орасида анчагина фарқ бўлишига олиб келиши мумкин.

Бундай системаларни ечишнинг энг кўп ишлатиладиган усулларида бири Гаусс методидир. Унинг моҳиятини уч номаълумли учта чизиқли тенглама мисолида кўрсатамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6.21)$$

Аввало $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўламиз:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (6.22)$$

ҳамда (6.22) ни даставвал a_{21} , a_{31} га кўпайтириб, иккинчи ва учинчи тенгламалардан ҳадма-ҳад айирамиз. Бу билан биз бу тенгламалардан x_1 номаълумни йўқотамиз ва қуйидаги қисм системага келамиз:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \end{cases}$$

бу ерда

$$a'_{22} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a'_{23} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad \text{ва х. к.}$$

Агар $a_{11} = 0$, лекин бошқа тенгламаларда x_1 олдидаги коэффициентлар орасида нолдан фарқлилари бўлса, у ҳолда биз бу тенгламалардан бирини биринчи тенгламанинг ўрни билан алмаштирамиз, кейин эса ўша амалларни бажарамиз. Агар бу коэффициентларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлса, бу ҳол системанинг детерминанти нолга тенглигини англатади, бу ҳолда эса Гаусс методини қўлланиб бўлмайди.

Яна шу методга амал қилиб, (6.23) нинг иккинчи тенгламасидан x_2 ни йўқотамиз (агар $a'_{22} = 0$ бўлса, тенгламаларнинг ўринларини алмаштирамиз, $a'_{22} = 0$ ҳам бўлса, бу ҳол дастлабки тенгламанинг детерминанти нолга тенглигини англатади).

Бу амаллар натижасида биз (6.21) ни *учбурчакли кўриниш* деб аталадиган

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (6.24)$$

кўринишга келтирамиз. Энди ҳамма номаълумларни сўнгги тенгламадан бошлаб кетма-кет ҳисоблаш қолди.

Гаусс методни (Крамер формулаларидан фойдаланиладиган усул каби) «назарий аниқ» (яъни барча ҳисоблашлар мутлақо аниқ бажарилиши шартида мутлақо аниқ натижа беради) бўлса-да, уни амалда қўлланишда хатоларни яхлитлаш ҳисобига номаълумларнинг қийматларини одатда у ёки бу хато билан ҳосил қиламиз.

6.4.2. Оддий итерациялар методи. Баъзи ҳолларда системани ечиш учун «тақрибий методлар» деб аталадиган методлардан фойдаланиш қулайроқ бўлади. Биз бу ерда бундай методлардан бирини, чунончи, оддий итерация методи деб аталадиган методни қисқача баён қиламиз. Айтайлик, система

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{11}x_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3, \\ x_2 = d_2 - c_{21}x_1 - c_{22}x_2 - c_{23}x_3, \\ x_3 = d_3 - c_{31}x_1 - c_{32}x_2 - c_{33}x_3 \end{cases} \quad (6.25)$$

кўринишга келтирилган бўлсин. (Буни, масалан, (6.21) нинг тенгламаларидан биринчисини x_1 га нисбатан, иккинчисини x_2 га нисбатан, учинчисини x_3 га нисбатан ечиб ҳосил қилиш мумкин. Бунда $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ бўлади,

албатта. Бироқ (6.25) системага бошқача йўллар билан ҳам келинади).

Биринчи яқинлашиш сифатида бирор $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ сонлар кетма-кетлигини оламиз. Уни (6.26) га қўйиб, биз одатда бу тенгламаларнинг чап ва ўнг томонлари орасида аниқ тенглик ҳосил қилмаймиз. Бу ўрнига қўйишда ўнг томонларнинг ҳосил қилинган қийматларини кейинги яқинлашиш сифатида қабул қиламиз ва умуман k -қадамда

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = d_1 - c_{11}x_1^{(k-1)} - c_{12}x_2^{(k-1)} - c_{13}x_3^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = d_2 - c_{21}x_1^{(k-1)} - c_{22}x_2^{(k-1)} - c_{23}x_3^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = d_3 - c_{31}x_1^{(k-1)} - c_{32}x_2^{(k-1)} - c_{33}x_3^{(k-1)} \end{cases}, \quad (6.26)$$

деймиз. (6.26) формулалар ҳар бир кейинги яқинлашиш олдинги яқинлашишдан қандай қилиб ҳосил бўлишини кўрсатади. Тайин шартларда (бу шартларни келтирмаймиз) бу кетма-кет яқинлашишлар системанинг аниқ ечимига одатда айтилишча «яқинлашади»: $x_1^{(k)} \rightarrow x_1^*$, $x_2^{(k)} \rightarrow x_2^*$,

$x_3^{(k)} \rightarrow x_3^*$, бу ерда x_1^* , x_2^* , x_3^* — системанинг аниқ ечими.

Бу ҳолда бирор қадамдан бошлаб, $x_i^{(k)}$ ва $x_i^{(k+1)}$ кетма-кет қийматлар амалда бир-биридан унча фарқ қилмайди. Ана шу нарса, одатда, керакли аниқлик даражасига эришилганликнинг белгиси бўлиб хизмат қилади.

6.4.3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишда ҳисоблаш техникасидан фойдаланишга доир қисқача кўрсатмалар. Ҳозирги вақтда тарқалган барча электрон ҳисоблаш машиналари учун (шу жумладан, кичик машиналар деб юритиладиганлари учун ҳам) турли программалар ишлаб чиқилган бўлиб, улар чизиқли тенгламаларни ечишга имкон беради. Шу сабабли ўқувчи бундай системалари ЭХМ да ечишда бу процессни мустақил программалаштирмаслиги керак. Бу ўринди лаборатория (ёки ўқув-ҳисоблаш марказида) бор бўлган ҳисоблаш техникасининг тавсифи билан танишиш, кейин эса уларни ишлатиш инструкциясидан фойдаланиш лозим. Учинчи, тўртинчи тартибгача бўлган айрим системаларни эса кўп ҳолларда қўлда клавишли машиналардан фойдаланиб ечиш мақсадга мувофиқдир.

6-БОБНИ ТАҚРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. x ва y номаълумларга нисбатан чиқиқли тенглама нима? Мисоллар келтиринг.

2. Қуйида келтирилган ёзувлардан қайсилари x ва y га нисбатан чиқиқли тенгламалар бўлади:

а) $3x - y = 1$.

б) $2x = 5$.

в) $by = c$.

г) $2x - xy + y = 3$?

3. x ва y га нисбатан чиқиқли тенгламанинг ечими деб нимага айтилади? Бундай ечимлар тўплами геометрик нуқтани назардан қандай тасвирланади?

4. x ва y га нисбатан чиқиқли xy га иккита тенгламадан тузилган системанинг ечими деб нимага айтилади? Бундай система неча турли ечимга эга бўлиши мумкин?

5. Икки номаълумли иккита чиқиқли тенглама сис емасининг детерминанти деб нимага айтилади? x номаълумининг детерминанти нима? y номаълумининг детерминанти-чи? Қайси ҳолларда бундай системанинг детерминанти ва номаълумлардан ҳар бирининг детерминантини билган ҳолда системанинг ечимини топишимиз мумкин?

6. Икки номаълумли иккита тенглама системасининг ва номаълумлардан ҳар бири детерминантларининг қийматлари бўйича системанинг ечимлари тўплами ҳақида нима дейиш мумкин?

7. Иккинчи тартибли детерминантларнинг ўзингиз билган хоссаларини санаб беринг ва мисолларда кўрсатинг.

8. Учинчи тартибли детерминант нима?

9. Уч номаълумли учта чиқиқли тенглама системасининг ечимини детерминантлар ёрдамида қандай топиш мумкин? Буни ҳар доним ҳам қилиш мумкинми?

10. Детерминанти нолга тенг бўлган уч номаълумли учта чиқиқли тенглама системасининг ечимлари тўплами ҳақида нима дейиш мумкин?

11. Детерминантни унинг учинчи сатри элементлари бўйича ёйиш формуласини умумий кўринишда ёзинг ва уни конкрет мисолда кўрсатинг.

12. n -тартибли детерминант деб нимага айтилади?

13. n номаълумли n та чиқиқли тенглама системасининг ечимини қайси ҳолларда ва қандай қилиб детерминантлар ёрдамида ҳосил қилиш мумкин?

14. n номаълумли n та чиқиқли тенгламанинг қандай системаси бир жинсли дейилади? Бу система детерминантининг қиймати бўйича унинг ечимлари тўплами ҳақида нима дейиш мумкин?

15. n номаълумли n та чиқиқли тенглама системасини ечишнинг Гаусс методи нимадан иборат? Уни конкрет мисолда кўрсатинг.

6-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1—10-мисолларда берилган тенгламалар системаларини 6.1-теорема ёрдамида текшириш ва ҳосил қилинган натижаларга геометрик талқин бериш талаб қилинади. Система ягона ечимга эга бўлган ҳолда бу ечимни Крамер формулалари бўйича топинг.

1.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ x - 3y = 4. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2y + 4y = 15. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 3. \begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x - 4y = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \\
 5. \begin{cases} 5x + 3y = -1, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases} & 6. \begin{cases} 4x + 7y = 0, \\ 7x - 4y = 0. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \\ 3x + 2y = 1. \end{cases} & 8. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \\ 3x + 2y = 6. \end{cases} \\
 9. \begin{cases} 0,5x - y = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases} & 10. \begin{cases} 6x + 5y = 4, \\ 3x + 10y = 5. \end{cases}
 \end{array}$$

11—14- мисолларда учинчи тартибли детерминантларни қуйда-
ги икки усул:

а) биринчи сатр элементлари бўйича бевосита ёйиш билан;
б) бирор сатрининг (ёки устунининг) битта элементидан ташқари
ҳамма элементлари нолга айланадиган қилиб, детерминантни алмашти-
риш ва шу устун элементлари бўйича ёйиш билан ҳисобланг.

$$\begin{array}{ll}
 11. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} & 12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 13. \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} & 14. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

15—16- мисолларда тўртинчи тартибли детерминантларни ҳисоб-
ланг.

$$\begin{array}{ll}
 15. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & 16. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

17—22- мисолларда чизикли тенгламалар системалари берилган
бўлиб, уларни Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг.

$$\begin{array}{ll}
 17. \begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ x + 4y + 5z = 8. \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x + y - 2z = 1, \\ x - y + 3z = 4, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases} \\
 19. \begin{cases} 3x - 2y - z = 0, \\ x + 3y - 2z = 0, \\ 4x + y + 2z = 0. \end{cases} & 20. \begin{cases} x - y + 3z = -4, \\ 2x + y - 2z = 5, \\ 3x + 3y + z = 6. \end{cases} \\
 21. \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 2x - 2y - z = 1. \end{cases} & 22. \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 2x - 2y - z = 0. \end{cases}
 \end{array}$$

23—26- мисолларда берилган системаларни Гаусс методи билан
ечинг.

$$\begin{array}{ll}
 23. \begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3. \end{cases} & 24. \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}
 \end{array}$$

$$25. \begin{cases} 2x + 4y + z = 1, \\ 3x + 6y - 2z = -2, \\ 2x + 2y - z = -2. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

27 — 28- мисолларда берилган системаларни оддий итерациялар методи билан тақрибий ечиш талаб қилинади, бунда биринчи яқинлашиш сифатида $x_0 = y_0 = 0$ олинади (бештадан итерация бажаринг). Ҳосил қилинган натижаларни аниқ ечим билан таққосланг.

$$27. \begin{cases} x = 1 + 0,1x + 0,2y, \\ y = -1 + 0,2x - 0,1y. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = 2 - 0,3x + 0,1y, \\ y = 1 + 0,1x - 0,3y. \end{cases}$$

29. Агар уч номаълумли учта чизикли тенглама системасида

$$a) \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0,$$

$$\Delta_z \neq 0.$$

$$б) \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0,$$

$$в) \Delta = 0$$

бўлса, ечимлар сони ҳақида нима дейиш мумкин?

30. Уч номаълумли учта чизикли бир жинсли тенглама системаси $x = 1, y = z = 0$ ечимга эга бўлса, унинг детерминанти ҳақида нима дейиш мумкин?

31*. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - a_{11} \cdot x_1 - a_{12} \cdot x_2 - \dots - a_{1n} \cdot x_n, \\ x_2 = \beta_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{22} \cdot x_2 - \dots - a_{2n} \cdot x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \dots - a_{nn} \cdot x_n \end{cases}$$

системани оддий итерациялар методи билан ечишда номаълумларнинг k - қадамда ҳосил қилинган $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ тақрибий қийматларининг ҳар бири учун ушбу тенгсизликлар уринли:

$$|x_1^* - x_1^{(k)}| < |x_1^* - x_1^{(0)}| \cdot \delta^k.$$

$$|x_2^* - x_2^{(k)}| < |x_2^* - x_2^{(0)}| \cdot \delta^k,$$

$$|x_n^* - x_n^{(k)}| < |x_n^* - x_n^{(0)}| \cdot \delta^k,$$

бу ерда

$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ — аниқ ечим,

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — дастлабки яқинлашиш.

δ эса $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ сонларнинг энг каттаси, бу ерда

$$\delta_1 = |a_{11}| + |a_{12}| + \dots + |a_{1n}|,$$

$$\delta_2 = |a_{21}| + |a_{22}| + \dots + |a_{2n}|,$$

$$\delta_n = |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{nn}|.$$

1 дан n гача бўлган барча i лар учун

$$|x_i^* - x_i^{(0)}| < 1$$

тенгсизликлар бажарилади ва $\delta = 0,5$ дсб, системанинг ечимини 0,000001 гача аниқлик билан ҳосил қилиш учун зарур бўлган итерациялар сонини ҳисобланг.

6. БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. Системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -11.$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга. Уни топиш учун аввал Δ_x ва Δ_y детерминантларни ҳисоблаймиз. Δ_x детерминант Δ детерминантдан x олдидаги коэффициентлардан тузилган устунни овоз ҳадлардан тузилган устунга алмаштириш билан ҳосил қилинади:

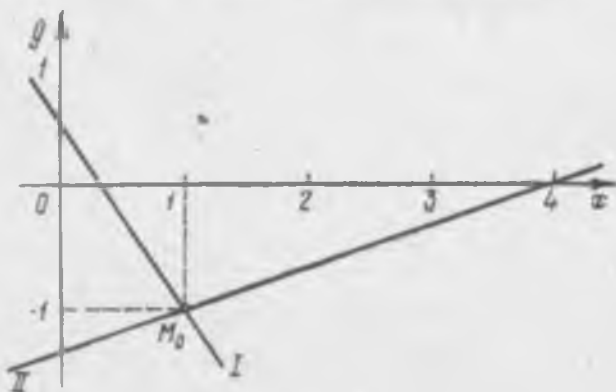
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 = -11.$$

Шунга ўхшаш:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11.$$

Энди Крамер формулаларини қўласак кифоя:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1.$$



6.1- расм.

6. 1- расмда I тўғри чизик системанинг биринчи тенгламасига, II тўғри чизик иккинчи тенгламасига, уларнинг кесишиш нуқтаси M_0 (1; -1) эса топилган ечимга тўғри келади.

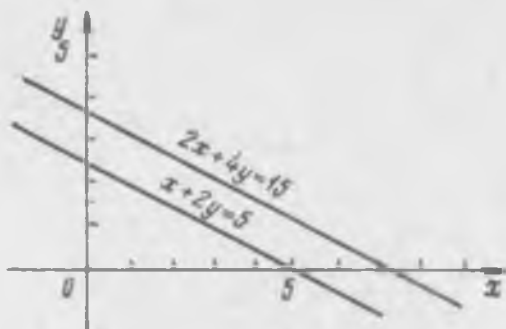
2. Бу ерда системанинг Δ детерминанти нолга тенг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Δ_x детерминанти ҳисоблаймиз:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 30 = -10.$$

$\Delta_x \neq 0$, $\Delta = 0$ бўлгани учун (Δ_y нимага тенг бўлишидан қатъи назар) система счимга эга эмас деган хулосага келамиз. $x + 2y = 5$ ва $2x + 4y = 15$ тўғри чизиқларни ясаб (6.2-расм) улар ўзаро параллел эканлигини, ва демак, умумий нуқталарга эга эмаслигини курамиз.



6.2- расм.

3. Бу ҳолда Δ , Δ_x ва Δ_y детерминантларни бевосита ҳисоблаш билан

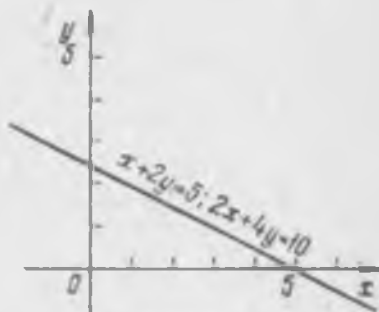
$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, берилган система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. Биринчи ва иккинчи тенгламаларни тасвирлайдиган тўғри чизиқлар бир-бири билан қўшилиб кетади (6.3-расм).

4. Бу ерда чизиқли бир жинсли тенгламалар системасига эгамиз (озод ҳадларнинг ҳаммаси нолга тенг). Бу система ҳар доим ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга ($x = 0$, $y = 0$). Унинг детерминантини ҳисобласак, у нолга тенглигини курамиз. Демак, (Δ_x ва Δ_y ни ҳисобламасдан туриб), система чексиз кўп ечимга эга деб айтишимиз мумкин.

5. $\Delta = 1$; ягона ечим: $x_1 = 1$, $y = -2$.

6. $\Delta = -65$; система бир жинсли, ягона ечим: $x = 0$, $y = 0$.



6.3- расм.

7. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 5/3$, $\Delta_y = -5/2$; система ечимга эга эмас (биргалликда эмас).

8. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$; система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

9. $\Delta = 0$; система бир жинсли; демак, у чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

10. $\Delta = 45$, ягона ечим: $x = 1/3$, $y = 2/5$.

11. Биринчи усул:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (14 - 15) - 1 \cdot (49 - 45) + 3 \cdot (21 - 18) = 3.$$

Иккинчи усул. Детерминантнинг иккинчи сатр элементларига биринчи сатрнинг тегишли элементларини (-2) га кўпайтириб қўшамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 - 2 \cdot 2 & 2 - 1 \cdot 2 & 5 - 3 \cdot 2 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Энди ҳосил бўлган детерминантнинг учинчи сатри элементларига яна биринчи сатрнинг тегишли элементларини, лекин энди (-3) га кўпайтириб қўшамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 - 2 \cdot 3 & 3 - 1 \cdot 3 & 7 - 3 \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган детерминантда иккинчи устун фақат битта нолдан фарқли элементга эга. Детерминантни бу устун элементлари бўйича ёямиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3.$$

12. $\Delta = -18$.

13. $\Delta = -100$ (иккинчи устун элементларига биринчи устун элементларини 2 га кўпайтириб қўйиш қулай).

14. $\Delta = 0$.

15. Бирин кетин: биринчи сатр элементларига иккинчи сатр элементларини (-2) га кўпайтириб қўшиб; учинчи сатр элементларига иккинчи сатр элементларини (-3) га кўпайтириб қўшиб; тўртинчи сатр элементларига иккинчи сатр элементларини 2 га кўпайтириб қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган детерминантнинг биринчи устун элементлари бўйича ёйиб қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 4 & -8 & -7 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

(ёйилманинг қолган қўшилувчилари нолга тенг.) Энди ҳисоблашларни, ниҳоясига етказиш учун бу учинчи тартибли детерминантнинг ҳисоблаш лозим, бунга эса биз биламиз. Берилган детерминант узил-кесил — 68 га тенглигини топамиз.

$$16. \Delta = 160.$$

17. Системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 0) = 4.$$

Δ_x , Δ_y , ва Δ_z детерминантлар система детерминантидан тегишли ном маълум олдидаги коэффициентлардан тузилган устуви оғоз ҳадлардан тузилган устун билан алмаштиришдан ҳосил қилинади:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантларни ҳисоблаб,

$$\Delta_x = 8, \quad \Delta_y = 4, \quad \Delta_z = 4$$

ни ҳосил қиламиз, бундан эса

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1.$$

$$18. x = 1,5, \quad y = -1, \quad z = 0,5.$$

19. Берилган система бир жинсли, унинг детерминанти эса $\Delta \neq 0$ бўлгани учун (Δ_x , Δ_y ва Δ_z ни ҳисобламасдан туриб) унинг ягона ечимини ноль ечим: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ бўлади деб айта оламиз.

$$20. x = 2/3, \quad y = 5/3, \quad z = -1.$$

$$21. x = y = z = -1.$$

$$22. x = y = z = 0.$$

23. Тенгламалардан биринчисининг ҳамма коэффициентларини ва оғоз ҳадини бу тенгламадаги x нинг коэффициентиға бўламиз:

$$\begin{cases} x + 0,5y + z = 0,5, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан 3 га купайтирилган биринчи тенгламани, учинчи тенгламадан эса 4 га купайтирилган биринчи тенгламани бирин-кетин айирамиз:

$$\begin{cases} x + 0,5y + z = 0,5, \\ -2,5y - z = -0,5, \\ -3y + z = -5. \end{cases}$$

Энди иккинчи тенгламани — 2,5 га бўламиз:

$$\begin{cases} x + 0,5y + z = 0,5, \\ y + 0,4z = 0,2, \\ -3y + z = -5 \end{cases}$$

ва учинчи тенгламадан ҳозиргина алмаштирилган иккинчи тенгламани аввал — 3 га кўпайтириб, айирамиз:

$$\begin{cases} x + 0,5y + z = 0,5, \\ y + 0,4z = 0,2, \\ 2,2z = -4,4. \end{cases}$$

«Учбурчак» система деб аталадиган система ҳосил қилдик, уни «пастан юқорига» ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z = \frac{-4,4}{2,2} = -2, \quad y + 0,4 \cdot (-2) = 0,2,$$

бундан

$$y = 1,$$

ва ниҳоят,

$$x + 0,5 \cdot 1 + (-2) = 0,5,$$

бундан

$$x = 2.$$

$$24. \quad x = y = z = 1.$$

$$25. \quad x = -1, \quad y = 0,5, \quad z = 1.$$

$$26. \quad x = y = 0,25, \quad z = 0,5.$$

27. Ўнг томонларга $x = x_0$ ва $y = y_0$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 = 1, \\ y_1 = -1 + 0,2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 = -1. \end{cases}$$

Бу x_1, y_1 қийматларни берилган системанинг яна ўнг томонларига қўйиб, шу билан x_2 ва y_2 қийматларга келамиз:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot (-1) = 0,9, \\ y_2 = -1 + 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot (-1) = -0,7. \end{cases}$$

Шундай давом эттириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + 0,1 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot (-0,7) = 0,95, \\ y_3 = -1 + 0,2 \cdot 0,9 - 0,1 \cdot (-0,7) = -0,75, \\ x_4 = 1 + 0,1 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot (-0,75) = 0,945, \\ y_4 = -1 + 0,2 \cdot 0,95 - 0,1 \cdot (-0,75) = -0,735, \\ x_5 = 1 + 0,1 \cdot 0,945 + 0,2 \cdot (-0,735) = 0,9475, \\ y_5 = -1 + 0,2 \cdot 0,945 - 0,1 \cdot (-0,735) = -0,7375. \end{cases}$$

Бу системанинг аниқ ечими:

$$x = \frac{18}{19} = 0,947368 \dots, \quad y = -\frac{14}{19} = -0,736842 \dots$$

Демак, бешинчи итерация бизга x_5 ва y_5 қийматларни берадими, улар системанинг аниқ ечимидан 0,001 дан камга фарқ қилади.

28. $x_6 = 1,6112, \quad y_6 = 0,8896$. Аниқ ечим:

$$x = \frac{45}{28} = 1,607142 \dots, \quad y = \frac{25}{28} = 0,892857 \dots$$

29. а) Система ечимга эга эмас. б) система ё ечимга эга эмас ёки чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. в) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

30. Системанинг детерминанти нолга тенг (акс ҳолда у ягона ечим: $x = y = z = 0$ га эга бўлар эди).

31. 20 та итерация бажариш талаб қилинади ($0,5^{20} = 0,9537 \cdot 10^{-6}$).

МАТРИЦАЛАР ВА УЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИГА ТАТБИҚЛАРИ

7.1-§. Матрицалар ва улар устида амаллар

7.1.1. Асосий таърифлар. Кўпчилик математик конструкцияларини тавсифлаш учун кўп сондаги бир хил типли катталиклардан фойдаланиш зарур бўлиб қолади. Жумладан, чизиқли тенгламалар системасини ёзишда номаълумлар олдидаги n^2 та коэффициент набори ва n та озод ҳад наборига эгамиз:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & b_1, \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}, & b_n. \end{array}$$

Шунга ўхшаш қилиб, масалан, ҳар бирида x , y ва z катталикларнинг қийматлари қайд қилиб бориладиган n та кетма-кет кузатиш натижаларини ҳам ёзиш мумкин:

1-кузатиш: x_1, y_1, z_1 .

2-кузатиш: x_2, y_2, z_2

.....

n -кузатиш: x_n, y_n, z_n .

Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Кўпинча шундай ҳолат учраб туради: турли хилдаги математик операцияларда бу турдаги сонли наборлар бирор тайин қонуниятларга бўйсунган бўлиб ўзгарадики, бу қонуниятлар биз математиканинг қайси бўлими билан иш кўраётганимиздан қатъи назар, бир хил намоён бўлади. Бундай ҳолатларнинг ҳаммаси учун ягона математик аппаратга эга бўлиш қулайдир.

Ана шундай аппаратни матрицалар ва улар устидаги амаллар қондалари беради, уларни ўрганишга киришамиз.

7.1-таъриф. $m \times n$ ўлчамли матрица ($(m \times n)$ -матрица) деб

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

кўринишдаги тўғри бурчакли жадвалга айтилади. Бу жадвални тузувчи сонлар унинг элементлари дейилади.

Агар $m = n$ (сатрлар сони устунлар сонига тенг) бўлса, матрица **квадрат матрица** дейилади. n сон $n \times n$ = квадрат матрицанинг тартиби дейилади.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлар матрицанинг бош диагоналини ташкил қилади.

Агар $m = 1$ (сатрлар сони = 1) бўлса, матрицани **сатр-вектор**, $n = 1$ (устунлар сони = 1) бўлганда эса **устун-вектор** дейилади.

7.2-таъриф. A матрицанинг λ сонга кўпайтмаси деб A дан унинг ҳар бир элементини λ га кўпайтиришдан ҳосил бўладиган λA матрицага айтилади:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Бир хил ўлчамли A ва B матрицаларнинг йиғиндиси деб A ва B дан уларнинг бир хил ўринда турган элементларини қўйишдан ҳосил бўлган $A + B$ матрицага айтилади:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Бир хил ўлчамли A ва B матрицаларнинг айирмаси деб

$$(A - B) + B = A$$

бўладиган $A - B$ матрицага айтилади.

Бу таърифдан келиб чиқадики, $A - B$ матрицанинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос (турган ўрни бўйича) элементлари айирмасига тенг.

$A(m \times n)$ -матрицанинг $B(n \times l)$ -матрицага кўпайтмаси деб (кўрсатилган тартибда!), ҳар бир элементи уйбу

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{q=1}^n a_{iq}b_{qk} \quad (7.4)$$

формула бўйича аниқланадиган $A \cdot B = C$ матрицага айтилади, бу матрицанинг ҳар бир элементи биринчи матрица i -сатри элементларининг иккинчи матрицанинг тартиб бўйича уларга мос k -устуни элементларига жуфт кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг (c_{ik} элемент C матрицанинг i -сатри ва k -устуни кесишган жойда турган элементини билдиради).

7.1-эслатма. Шунингдекда тутиш муҳимки, биз ҳозир киритган кўшиш амали фақат бир хил ўлчамли матрицалар учун аниқланган, матрицалар кўпайтмаси ҳақида эса фақат биринчи кўпайтувчининг сатрлари сони икки кўпайтувчининг устунлари сонига тенг бўлган ҳолдагина гапиришимиз мумкин.

7.1-мисол. Айтайлик,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Бўлсин, у ҳолда, масалан,

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot (-2) \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 0 & 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 & -14 \\ 14 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 3-2 & -2+8 \\ 2+7 & 0+6 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -13 & -3 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\sum_{q=1}^n a_{iq} b_{qk}$ символ 1 дан q гача бўлган барча қийматларни қабул қилганда $a_{iq} b_{qk}$ ифодадорларнинг қийматлари йиғиндисини билдиради.

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 13 & 15 & -6 \end{pmatrix}.$$

Бу ерда, жумладан $A \cdot B$ ёки $A + C$ каби ифодалар маънога эга эмас.

7.1.2. Матрицаларни кўпайтириш амалининг хоссалари. Бу ерда киритилган амалларни асосан квадрат матрицаларга ва устун-вектор матрицаларга татбиқ қиламиз. Шу сабабли юқорида киритилган амалларнинг ҳамма хоссаларини батафсил текшириб ўтирмасдан, балки кўпайтириш амалига доир бир неча изоҳлар билан чекланамиз.

Энг аввало бу амал коммутативлик хоссасига эга эмаслигини айтиб ўтамиз. Ҳақиқатан, 7.1- мисолдаёқ $A \cdot C \neq C \cdot A$ эканлигини кўрдик. Бундан ташқари, ҳатто шундай ҳол учрайдики, матрицалар кўпайтмаси бирор тартибда олинганда маънога эга бўлиб, тескари тартибда олинганда эса маънога эга бўлмайди. Масалан, A агар $(m \times n)$ - матрица, B эса $(n \times l)$ - матрица бўлиб, $m \neq l$ бўлса, у ҳолда $A \cdot B$ маънога эга, $B \cdot A$ эса маънога эга эмас.

Лекин матрицаларни кўпайтириш амали ассоциативлик хоссасига эга. Ҳақиқатан, A — $(m \times n)$ - матрица, B — $(n \times l)$ - матрица ва C — $(l \times p)$ - матрица бўлсин. У ҳолда равшанки, $A \cdot B$ матрица $m \times l$ ўлчамга, $B \cdot C$ эса $n \times p$ ўлчамга эга, бинобарин, $(A \cdot B) \cdot C$ ва $A \cdot (B \cdot C)$ кўпайтмалар маънога эга ва улар $(m \times p)$ - матрицалардан иборат. A , B ва C матрицаларнинг элементларини мос равишда $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ орқали, AB нинг элементини $d_{\mu\nu}$ орқали, $B \cdot C$ нинг элементини $f_{\mu\nu}$ орқали, $(A \cdot B) \cdot C$ нинг элементини $g_{\mu\nu}$ орқали, $A \cdot (B \cdot C)$ нинг элементини эса $h_{\mu\nu}$ орқали белгилашни келишиб олайлик, бу ерда одатдагидек, μ — сатр номери, ν — устун номери бўлиб, бу сатр ва устун кесишган жойда тегишли элемент туради. У ҳолда матрицаларни кўпайтириш таърифига асосан

$$g_{\mu l} = \sum_{\nu=1}^p d_{\mu \nu} c_{\nu l},$$

бундан

$$d_{st} = \sum_{i=1}^n a_{si} b_{ti}$$

ни эътиборга олсак,

$$g_{st} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{sj} b_{ji} c_{it} \quad (7.5)$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан,

$$h_{st} = \sum_{i=1}^n a_{si} f_{it}$$

формулага f_{it} нинг

$$f_{it} = \sum_{j=1}^p b_{ji} c_{jt}$$

ифодасини қўйиб, h_{st} учун қуйидаги ифодага келамиз:

$$h_{st} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{sj} b_{ji} c_{it}. \quad (7.6)$$

(7.5) ва (7.6) формулаларнинг ўнг томонлари бир хил қўшилувчилардан иборат бўлиб, улар бир-биридан фақат жамланиш тартиби билан фарқ қилади. Демак, $g_{st} = h_{st}$, бу эса $A \cdot (B \cdot C)$ ва $(A \cdot B) \cdot C$ матрицаларнинг тенглигини билдиради.

7.1.3. Бирлик матрица. Кейинчалик кўп фойдаланиладиган яна бир изоҳни келтирамыз. Диагоналида турган ҳар бир e_{ii} элементи бирга, қолган ҳамма элементлари эса нолга тенг бўлган n -тартибли квадрат матрица бундай хоссага эга: исталган $A(m \times p)$ -матрица учун

$$E \cdot A = A \quad (7.7)$$

тенглик, исталган $B(m \times n)$ -матрица учун эса

$$B \cdot E = B \quad (7.8)$$

тенглик ўринли.

Ҳақиқатан, 7.2-таърифга мувофиқ, $E \cdot A$ матрицанинг c_{ik} элементи учун

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n e_{ij} a_{jk} \quad (7.9)$$

га эгамиз. Лекин $i \neq j$ бўлганда $e_{ij} = 0$ бўлгани учун (7.9) нинг ўнг томонида турган қўшилувчиларнинг $e_{ij} a_{jk}$ дан бошқа ҳаммаси нолга тенг. Демак,

$$c_{ik} = e_{ii} a_{ik} = a_{ik}$$

(7.8) тенглик шунга ўхшаш исботланади. (Машқ тариқасида бунни исбот қилинг)

Бундай

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

матрицалар бирлик матрицалар деб аталади.

7.2-§. Квадрат матрицалар

7.2.1. Дастлабки изоҳлар. n бирор натурал сон бўлсин. Барча n -тартибли квадрат матрицалар тўплами M_n ни қараймиз. Бу матрицалар тўпламига тегишли бўлган матрицалар учун 7.2-таъриф билан киритилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари доимо бажарилиши равшан. Бевосита шу таърифнинг ўзидан қўшиш амали ассоциативлик ва коммутативлик хоссаларига эга эканлиги келиб чиқади:

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (7.11)$$

$$A + B = B + A. \quad (7.12)$$

Матрицаларни кўпайтириш амалининг ассоциативлигини 7.1.2-пунктда исботладик:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C). \quad (7.13)$$

Биз кўпайтувчиларни танлашда ҳатто M_n квадрат матрицалар тўплами билан чегараланадиган бўлсак ҳам, бу кўпайтириш амали коммутатив бўлмаслигини айтиб ўтамиз. Масалан,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Қўшиш амали кўпайтириш амалига нисбатан дистрибутивлик хоссасига эга:

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C, \\ C \cdot (A + B) &= C \cdot A + C \cdot B\end{aligned}\quad (7.14)$$

(бу ерда кўпайтувчилар тартиби муҳим эканлигини айтиб ўтамиз). Ҳақиқатан, (7.14) тенгликлардан биринчисининг чап ва ўнг томонларининг элементларини мос равишда g_{ik} ва h_{ik} орқали белгилаб (бу ерда одатдагидек, i — сатр номерини, k эса устун номерини билдиради, бу сатр ва устуннинг кесишиш жойида бу элементлар ўз матрицаларида туради), 7.2-таърифга биноан қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}g_{ik} &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk}, \\ h_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk},\end{aligned}$$

бундан эса $g_{ik} = h_{ik}$ эканлиги кўриниб турибди. (7.14) тенгликлардан иккинчисининг тўғрилиги шунга ўхшаш текширилади.

7.2.2. Квадрат матрицанинг детерминанти. 7.3-таъриф.

Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

квадрат матрицанинг детерминанти деб бу матрицанинг элементларидан (уларнинг жойлашиш тартибини сақлаб) тузилган қуйидаги $\det A$ га айтилади:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7.16)$$

7.1-теорема. *Иккита квадрат матрица кўпайтмасининг детерминанти кўпайтувчилар детерминантлари кўпайтмасига тенг:*

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (7.17)$$

Бу теоремани $n = 2$ бўлган ҳолдагина исботлаймиз. Айтайлик,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

бўлсин, у ҳолда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

ва

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - \\ &\quad - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - \\ &\quad - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

$\det A$ ва $\det B$ ни кўпайтириб ҳам шу нфодага келамиз:

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Бу теореманинг умумий ҳолда тўғрилигини исботсиз қабул қиламиз.

7.2.3. Тескари матрица. 7.1-лемма. Детерминантнинг бирор сатри элементларини бошқа сатрнинг тегишли элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисини нолга тенг (устунлар учун ҳам шунга ўхшаш).

Исботи. A матрица берилган бўлсин ((7.15) га қаранг). A_{ik} орқали a_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини белгилаймиз. [бу термин 6-бобда аниқланган маънода (6.5-таърифга қаранг)]. Шунингдек, $1 \leq i, j \leq n$ ва $i \neq j$ бўлсин.

A да j -сатр элементларини i -сатрнинг уларга мос элементлари билан алмаштириб, янги A' матрица тузамиз (бу билан A' да i -сатр ва j -сатр бир хил бўлади):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{-сатр} \\ \\ j\text{-сатр} \\ \\ \end{matrix}$$

A ва A' матрицалар учун j -сатр элементларининг алгебраик тўлдирувчилари бир хил бўлишини эътиборга олиб ((6.18) га қаранг), бундай ёзишимиз мумкин:

$$\det A' = \sum_{p=1}^n a_{ip} A_{ip} \quad (7.18)$$

($\det A'$ ни унинг j -сатри элементлари бўйича ёйдик). Иккинчи томондан, $\det A' = 0$, чунки у иккита бир хил сатрга эга. Бундан ва (7.18) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\text{агар } i = j \text{ бўлса, } \sum_{p=1}^n a_{ip} A_{ip} = 0. \quad (7.19)$$

7.1-лемма исбот қилинди.

7.4-таъриф. Агар

$$A \cdot B = E \text{ ва } B \cdot A = E \quad (7.20)$$

бўлса, B квадрат матрица A квадрат матрицага тескари матрица дейилади, бу ерда E —бирлик матрица.

Эслатма. Бу таърифдан келиб чиқадики, агар B матрица A га тескари бўлса, у ҳолда A ҳам B га тескари бўлади. Лекин биз ҳар қандай матрица ҳам ўзига тескари матрицаларга эга бўлиш-бўлмаслигини (ва бундай тескари матрицалар қанча бўлиши мумкинлигини) ҳали билмаймиз.

7.2-теорема. Агар A матрицанинг детерминанти ((7.15) га қаранг) нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

матрица A га тескари матрица бўлади, бу ерда A_{ik} орқали A матрица a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси белгиланган.

Исботи. A матрицани (7.21) матрицага кўпайтириб, биз 7.2-таърифга мувофиқ элементлари ушбу

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \frac{A_{kp}}{d}$$

формула билан топилиши мумкин бўлган матрицани ҳосил қиламиз. Агар $i \neq k$ бўлса, у ҳолда 7.1-леммага кўра $c_{ik} = 0$. Агар $i = k$ бўлса, у ҳолда ((6.15) формулани ҳисобга олиб)

$$c_{ik} = \frac{1}{d} \sum_{p=1}^n a_{ip} A_{.p} = \frac{1}{d} d = 1.$$

Демак,

$$c_{ik} = \begin{cases} i \neq k \text{ бўлса, } 0, \\ i = k \text{ бўлса, } 1. \end{cases}$$

Лекин шундай элементлар (7.10) бирлик матрицани ташкил қилади. (7.21) матрица биринчи кўпайтувчи, A эса иккинчи кўпайтувчи бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади.

7.3-теорема. Агар $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда A учун ягона тесқари матрица мавжуд. Агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда A матрица тесқари матрицага эга эмас.

Исботи. Аввал $\det A \neq 0$ бўлсин. A учун битта тесқари матрица ҳар ҳолда мавжуд. Бу 7.2-теоремадан келиб чиқади. (7.20) шартларни қаноатлантирадиган иккита B' ва B'' матрицаларга эга бўлайлик:

$$A \cdot B' = E, \quad B' \cdot A = E, \quad (7.20')$$

$$A \cdot B'' = E, \quad B'' \cdot A = E. \quad (7.20'')$$

(7.20') тенгликларнинг биринчисини чапдан B'' га кўпайтирамиз:

$$B'' \cdot (A \cdot B') = B'' \cdot E.$$

Бу тенгликнинг ўнг томони B'' матрицани беради ((7.8) га қаранг), чап томондаги қўшилувчиларни эса бошқача қилиб группалаймиз:

$$(B'' \cdot A) \cdot B' = B''. \quad (7.22)$$

Лекин $B'' \cdot A = E$, $E \cdot B' = B'$ ((7.7) га қаранг). Шу сабабли (7.22)

$$B' = B''$$

ни беради. Демак, $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда A матрица ўзига тесқари бўлган ягона матрицага эга.

Энди $\det A = 0$ бўлсин. A матрица учун тесқари B матрица мавжуд деб фараз қилиб, 7.1-теоремага биноан

$$\det A \cdot \det B = \det E$$

ни ҳосил қилган булар эдик. Лекин бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас, чунки $\det A \cdot \det B = 0$, бундан ташқари $\det E = 1$. Теорема исбот қилинди.

А матрицага тескари матрицани одатда A^{-1} орқали белгилаш қабул қилинган. Агар $\det A = 0$ бўлса, A матрицани *хос*, акс ҳолда *хосмас* матрица дейилади. Бу терминлардан фойдаланиб, 7.3-теоремани энди бундай айтишимиз мумкин. *Ҳар қандай хосмас матрица ягона ўзига тескари матрицага эга.* Хос матрица учун тескари матрица мавжуд эмас.

Тескари матрицани амалда топишда ($n > 3$ бўлганда) (7.21) ифодадан бевосита фойдаланиш одатда ноқулай, чунки у кўп ҳисоблашларни талаб қилади. Шу сабабли бу ишда кўпинча бошқа методларга мурожаат қилинади. Биз бу ўринда ана шу ҳолатни эслатиш билангина чекланамиз.

7.2.4. *n* номаълумли *n* та чизиқли тенглама системасини тескари матрица методи билан ечиш. Энди чизиқли тенгламалар системасини ечишда матрицалар аппаратидан қандай қилиб фойдаланиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Айтайлик, детерминанти нолга тенг булмаган

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (7.23)$$

система берилган бўлсин.

Бу матрицанинг коэффициентларидан тузилган матрицани A орқали, номаълумлардан тузилган устун-векторни X орқали, оғод ҳадлардан тузилган устун-векторни B орқали белгилаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Равшанки, А.Х. кўпайтма ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

устун-векторни ифодалайди (7.2-таърифга қаранг). Шу сабабли (7.23) системани унга тенг кучли

$$A \cdot X = B \quad (7.24)$$

матрицавий тенглама билан алмаштиришимиз мумкин (бу ерда номаълум ролида энди X матрица келади). А матрицага тескари A^{-1} матрицани топдик дейлик. У ҳолда (7.24) нинг иккала қисмини чапдан A^{-1} га кўпайтириб,

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \quad (7.25)$$

ни ҳосил қиламиз. Лекин

$$A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X.$$

Шу сабабли (7.25) ни бундай қайта ёзиш мумкин:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (7.26)$$

Бу формула (7.24) нинг, ва демак, (7.23) нинг ҳам ечимини беради.

7.2-мисол. Юқорида кўрилган метод билан қуйида и тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases} \quad (7.27)$$

Коэффициентлар матрицаси бундай бўлади:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \det A = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Алгебраик тўлдирувчилар бу ҳолда биринчи тартибли детерминантлар бўлади, яъни (ишораларни танлаш қондасини ҳисобга олиб),

$$A_{11} = 2, A_{12} = -3, A_{21} = -1, A_{22} = 2.$$

(7.21) га асосан A^{-1} матрицани тузамиз:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7.27) ни

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзамиз ва бу тенгликни чапдан A^{-1} га кўпайтирамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

(7.28) нинг ўнг томонида турган матрицаларни кўпайтирамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 \\ -3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ушбуни

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

яъни $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ ни ҳосил қилдик.

Албатта, (7.23) система учун бу метод ҳаддан ташқари узун бўлиб кўринса-да, лекин ҳатто уч-тўрт номаълумли системалар учун ҳам бундай ечиш усули қулайроқ бўлади (ихтиёримизда A^{-1} матрица бор деган шартда албатта).

7.3-§. n номаълумли m та чизиқли тенглама системалари

7.3.1. Дастлабки мисоллар. Баъзан номаълумлари сони тенгламалари сони билан бир хил бўлмаган системаларга дуч келинади. Аввал бундай системаларга доир бир неча мисоллар кўрамиз.

7.3-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 12, \\ 3x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \quad (7.29)$$

Бу ерда номаълумлар сони тенгламалар сонидан кичик. Лекин бу тенгламаларнинг учинчиси биринчи иккитасининг натижаси эканлигини пайқаш қийин эмас (у биринчи ва иккинчи тенгламалар орасидаги айирмадир). Шу сабабли (7.29) система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \quad (7.30)$$

системага тенг кучли бўлади. Бу системани ечиш билан биз дастлабки (7.29) системанинг ечимини ҳам ҳосил қиламиз. Оралиқ ҳисоблашларни тушириб қолдириб, бир варакайга узил-кесил натижани ёзамиз:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1. \quad (7.31)$$

7.4-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 12, \\ 3x_1 + x_2 = 10. \end{cases} \quad (7.32)$$

Бу система (7.29) системадан учинчи тенгламанинг ўнг томони билангина фарқ қилади. Бу система умуман ечимга эга эмаслигини тушуниш осон. Ҳақиқатан, агар $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ бўлса, учинчи тенглама бажар

рилмайди. x_1 ва x_2 қийматларнинг бошқа исталган жуфти эса биринчи иккита тенгламанинг ҳеч бўлмаганда бирини қаноатлантирмайди.

7.5- мисол.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases} \quad (7.33)$$

Бу ерда номаълумлар сони тенгламалар сонига қараганда ортиқ. x_3 ва x_4 ли ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 - x_3 + 2x_4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 + x_3 - x_4. \end{cases} \quad (7.34)$$

(7.34) ни x_1 ва x_2 га нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 7x_3 + 10x_4, \\ x_2 = 1 + 5x_3 - 7x_4 \end{cases} \quad (7.35)$$

ни ҳосил қиламиз. x_3 ва x_4 номаълумларга ихтиёрий қийматлар бериб ҳамда x_1 ва x_2 нинг тегишли қийматларини (7.35) формулалар бўйича ҳисоблаб, ҳар гал дастлабки (7.33) системанинг ечимларидан бирини ҳосил қиламиз.

(7.33) системани номаълумларининг бошқа жуфтлари учун ечиш ҳам мумкин эди; масалан,

$$\begin{cases} x_3 = -17 + 7x_1 + 10x_2, \\ x_4 = -12 + 5x_1 + 7x_2 \end{cases} \quad (7.36)$$

ёки

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{5} - \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_4. \end{cases} \quad (7.37)$$

(7.35) формулалар ҳам, (7.36) ва (7.37) формулалар ҳам дастлабки (7.33) системанинг мумкин бўлган барча ечимлари тўпламини аниқлайди. Жумладан, $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ ечим (7.35) дан у ерда $x_3 = x_4 = 1$ дейилганда, (7.36) дан $x_1 = 4$ ва $x_2 = -1$ бўлганда, (7.37) дан $x_2 = -1$, $x_4 = 1$ бўлганда ҳосил бўлади.

7.6- мисол.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 10. \end{cases} \quad (7.38)$$

Иккинчи тенгламани биринчи тенгламадан айириб,

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \quad (7.39)$$

ни ҳосил қиламиз. Системанинг учинчи тенгламасини биринчи тенглама билан таққослаб, уларнинг чап томонлари бир хил, ўнг томонлари эса бундай эмаслигини кўрамиз. Демак, (7.38) система ечимга умуман эга эмас.

Ҳақиқатан, бу системанинг биринчи иккита тенгламасини қаноатлантирадиган исталган x_1 , x_2 , x_3 ва x_4 қийматлар (7.39) нинг ҳам ечими бўлади, ва демак, улар (7.38) тенгламалардан учинчисини қаноатлантирмайди.

бабли уларни чиқариб юбориш дастлабки системага тенг кучли бўлган системага олиб келади. Ўчирилган устунларга мос номаълумларга ихтиёрий қийматлар бериш мумкин, шундан сўнг қолган барча номаълумлар бир қийматли аниқланади.

7.7- мисол. Ўшбу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 11 \end{cases} \quad (7.41)$$

системани қараймиз.

Бу системанинг коэффициентлари

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицаси учун ҳам, коэффициентларнинг

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

кенгайтирилган матрицаси учун ҳам барча учинчи тартибли минорлар нолга тенг бўлишига (масалан, бевосита ҳисоблаш йўли билан) ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шу билан бир вақтда A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг биринчи иккита сатри ва биринчи иккита устунидан ҳосил қилинган A' матрицанинг детерминанти нолдан фарқли:

$$\det A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Бундан учинчи тенглама биринчи иккита тенгламанинг натижаси, шу сабабли системадан чиқариб юборилиши мумкин деган хулосага келамиз. Бундан эса дастлабки системага тенг кучли:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \quad (7.42)$$

системани ҳосил қиламиз, x_3 ва x_1 номаълумларга мос устунлар A' матрицани тузишда иштирок этмайди. Бу номаълумларни ўз ичига олган ҳадларни тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 - x_3 + 2x_4, \\ x_1 + x_2 = 4 + 2x_3 - 3x_4. \end{cases} \quad (7.43)$$

Энди x_3 ва x_4 номаълумларга қандай қийматлар бермайлик, бунда (7.43) дан ҳосил бўладиган x_1 ва x_2 но-

маълумли иккита тенглама системаси албатта ечимга эга бўлади, шу билан бирга бу ечим (x_3 ва x_4 жуфт қийматлар учун ўзига мос) ягона, чунки $\det A' \neq 0$. Системани умумий кўринишда ҳам ечиш мумкин. Бунинг учун системанинг Δ детерминантини ва x_1 , x_2 номаълумларининг Δ_{x_1} , Δ_{x_2} детерминантларини ҳисоблаб, Крамер формулаларидан фойдаланамиз:

$$\Delta = \det A' = 1,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 - x_3 + 2x_4 & 1 \\ 4 + 2x_3 - 3x_4 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3x_3 + 5x_4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 - x_3 + 2x_4 \\ 1 & 4 + 2x_3 - 3x_4 \end{vmatrix} = 5 + 5x_3 - 8x_4,$$

бундан

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -1 - 3x_3 + 5x_4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 5 + 5x_3 - 8x_4. \quad (7.44)$$

(7.44) формулалар дастлабки (7.41) системанинг ечимлари тўплами ёзилишининг мумкин бўлган вариантларидан бирини ифодалайди. Бошқа вариантларни бошқача усуллар билан, A матрицанинг нодан фарқли минорини таялаб ҳосил қилиш мумкин.

Равшанки, (7.41) системанинг учинчи тенгламасидан озод ҳадни бошқа сонга алмаштириб (масалан, уни 1 га тенг деб қабул қилиб), умуман ечимга эга бўлмаган (одатда айтилишича, биргаликда бўлмаган системани) системани ҳосил қиламиз. Бундан A матрица ва шу билан унинг ранги ҳам ўзгармагани сабабли, бу ҳолда A матрицанинг ранги ўзгаради деб хулосага келишга тўғри келади. Ҳақиқатан ҳам, «тузатишган» A матрицадан учинчи ва тўртинчи устунларни ўчириб, нодан фарқли учинчи тартибли минорни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Тенгламалар ва номаълумлар сони анча катта бўлганда системанинг 7.7- мисолда қўлланилган бундай текшириш ва ечиш усули ҳаддан ташқари узундан-узоқ бўлади. Биз бу ерда бошқа, ҳисоблаш ҳажми нуқтан назаридан тежамлироқ бўлган усуллар мавжудлигини кўрсатиш билан чекланамиз. Бунда қўлланиладиган усуллар номаълумлари сони тенгламалари сонига тенг бўлган системаларни Гаусс методи билан ечишда бажариладиган алмаштиришларга ўхшашдир (6-бобга қаранг).

7- БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. $(m \times n)$ - матрица нима? Сатр-вектор нима, устун-вектор-чи?
2. Матрицани сонга кўпайтириш қандай аниқланади? Матрицаларни қўшиш-чи? Ҳар қандай иккита матрицани қўшиб бўладими?
3. Икки матрица кўпайтмаси қандай аниқланади? $A(m \times n)$ - матрицанинг $B(p \times q)$ - матрицага кўпайтмаси $A \cdot B$ маънога эга бўлиши учун m, n, p ва q сонлар қандай шартларни қаноатлантириши лозим? Бу ҳолда $A \cdot B$ матрица қандай ўлчамга эга бўлади?
4. Матрицаларни кўпайтириш амали коммутативлик хоссасига эга-ми? Ассоциативлик хоссасига-чи?
5. Бирлик матрица нима? У қандай хоссаларга эга?
6. Қандай матрицалар квадрат матрицалар деб аталади? Бир хил тартибли квадрат матрицалар учун қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳар донм ҳам бажариладими? Бу амалларнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.
7. Квадрат матрицанинг детерминанти деб нимага айтилади? Иккита матрица кўпайтмасининг детерминантини ҳар бир кўпайтувчининг детерминантини билган ҳолда қандай ҳисоблаш мумкин?
8. Тескари матрица нима? Ҳар қандай матрица ҳам тескари матрицага эгами? Битта матрицанинг нечта турли тескари матрицаси мавжуд бўлиши мумкин?
9. m номаълумли n та чизиқли тенглама системаси матрицавий шаклда қандай ёзилади? Уни коэффициентлар матрицасига тескари матрица ёрдамида қандай ечиш мумкин? Бундай ечиш ҳар донм ҳам мумкинми?
10. Матрицанинг ранги нима? Жавобингизни мисоллар билан тусунтиринг.
11. n номаълумли m та чизиқли тенглама системасининг ечилиш шартини таърифлаб беринг.

7- БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1—4- мисолларда A, B ва C матрицалар берилган. $A \cdot B, B \cdot A, A \cdot C, C \cdot A, B \cdot C$ ва $C \cdot B$ ифодаларнинг қайсилари маънога эғалигини аниқланг ва уларни ҳисобланг:

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = (5 \ 1 \ -1).$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = (3 \ 5), C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5 ва 6- мисолларда берилган матрицалар учун тескари матрицаларни топинг:

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

7 ва 8- мисолларда берилган системаларни тескари матрицада фойдаланиб ечинг.

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

9—16- машқларда берилган тенгламалар системаси учун коэффициентлар матрицаси рангини ва кенгайтирилган матрица рангини топинг. Бу системалардан қайсылари ечимга эгаллигини кўрсатинг ва бу ечимларни топинг.

$$9. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 10. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 - 4x_2 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 = 19. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 8x_2 = 5. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

7- БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. $A \cdot B$ типдаги ифода маънога эга бўлиши учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони иккинчи кўпайтувчининг сатрлари сони билан бир хил бўлиши лозим. Шу сабабли $B \cdot A$ ва $C \cdot B$ ифодалар маънога эга эмас $A \cdot B$ эса (3×2) - матрицадан иборат:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \\ -1 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 & (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -20 & -6 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot C$, $C \cdot A$ ва $B \cdot C$ ни шунга ўхшаш ҳисоблаймиз:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 10 & -6 & -8 \\ -11 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$2. A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = (12 \ 2 \ 6),$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 15 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C \cdot B = (-12).$$

$B \cdot A$ ва $A \cdot C$ маънога эга эмас.

$$3. \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 321 \\ 654 \\ 987 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad B \cdot A = (11 \ 2 \ 18 \ -1), \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & -15 \\ 0 & 0 \\ 12 & 20 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

5. Аввал қуйидагини ҳисоблаймиз (ҳисоблашлар тушириб қолдирилган):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3.$$

Сўнгра A матрица элементларининг ҳар бири учун унинг алгебраик тўлдирувчисини ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2, \text{ ва ҳ. к.}$$

Энди A матрицага тескари A^{-1} матрицани (7.21) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Бу натижанинг тўғрилигига A ни A^{-1} га кўпайтириб нишонч ҳосил қилиш мумкин. Бунда 3×3 ўлчамли бирлик матрица ҳосил бўлиши керак).

$$6. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,18 & 0,04 \\ 0,07 & -0,41 & 0,02 \\ -0,01 & -0,37 & 0,14 \end{pmatrix}.$$

7. Берилган системани матрицавий формада ёзамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Кoeffициентлар матрицаси A га тескари A^{-1} матрицани топамиз (хисоблашлар тушириб қолдирилган):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7.45) нинг иккала томонини чапдан A^{-1} га кўпайтирамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Энди ечимни ҳосил қилиш учун сўнгги тенгликнинг ўнг томонини кўпайтирилса бўлди:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Бу натижанинг ўзини «скаляр формада» ҳам ёзиш мумкин албатта:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = x_3 = 1.$$

$$8. \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. Кoeffициентлар матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

нинг r ранги 2 сонга тенг эканлигини кўриш осон; A дан унинг учинчи устунини ўчириш билан ҳосил бўладиган ушбу минорни олиш кифоя:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Бу ерда биз дарҳол кенгайтирилган

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

A матрицанинг r ранги ҳам иккига тенг деб хулосага келишимиз мумкин. Бу бевосита кўришиб турибди, лекин бундай хулосага ҳар доим ҳам

$$r < \hat{r} < \min(m, n)$$

жанлигини эътиборга олиб келиш ҳам мумкин, бу ерда m ва n — кенгайтирилган A матрицанинг мос равишда сатрлари ва устунлари сони. Бизнинг мисолда $r = 2$ ва $\min(m; n) = 2$, бундан эса $r = 2$ келиб чиқади.

Системанинг ечимини ҳосил қилиш учун унинг тенгламаларининг чап томонларида биз танлаб олган устунларга тегишли бўлган номаълумли, яъни x_1 ва x_2 ли ҳадларни қолдирамиз:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 - 2x_2, \\ 2x_1 = 11 - 3x_2. \end{cases}$$

Бу системани x_1 ва x_2 га нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x_2, \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_2 \end{cases}$$

БВ ҳосил қиламиз.

Агар биз бошқа юлдан фарқли иккинчи тартибли

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

минорни танлаганимизда эди, у ҳолда дастлабки системани

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 3x_2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases}$$

кўринишга келтириб олиб, унинг ечимлари тўплами учун ушбу бошқача ёзувни ҳосил қилган бўлар эдик:

$$\begin{cases} x_1 = 19 - 9x_2, \\ x_2 = -9 + 6x_2. \end{cases}$$

10. Бу ерда $r = \bar{r} = 1$ (чунки ҳамма иккинчи тартибли минорлар нолга тенг). A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг биринчи сатри ва биринчи устунига тегишли биринчи тартибли минорни танлаймиз. Биз система тенгламаларидан иккинчисини тушириб қолдирамиз, чунки унинг коэффициентлари бу минорни тузишда қатнашмайди.

Дастлабки система қолган

$$x_1 + x_2 - 2x_2 = 1$$

тенгламага эквивалент бўлади. x_1 ва x_2 ли ҳадларни ўнг томонга ўтқазиб, берилган системанинг ечимлари тўплами учун ушбу формулани ҳосил қиламиз: $x_1 = 1 - x_2 + 2x_2$.

11. $r = 1$, $\bar{r} = 2$. Система ечимларга эга эмас.

12. $r = \bar{r} = 1$. Чексиз кўп ечимлар тўплами қуйидаги формулаларнинг исталган бири билан берилиши мумкин:

а) $x_1 = 0,5 + 0,5x_2 - 2,5x_3,$

б) $x_2 = -1 + 2x_1 + 5x_3,$

в) $x_3 = 0,2 - 0,4x_1 + 0,2x_2.$

13. $r = \tilde{r} = 2$ Ягона ечим: $x_1 = 5, x_2 = 3.$

14. $r = 2, \tilde{r} = 3.$ Система ечимларига эга эмас.

15. $r = 2, \tilde{r} = 3.$ Система ечимларга эга эмас.

16. $r = \tilde{r} = 2.$ Чексиз кўп ечимлар тўпламининг мумкин бўлган ёзувларидан бири қуйидагича:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = 3 - 2x_3. \end{cases}$$

ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАР

8.1-§. Евклид геометриясининг мантиқий структураси ҳақида тушунча

8.1.1. Геометрияни аксиоматик қуриш методи; стереометриянинг асосий аксиомалари. Бу бобда биз *нуқта*, *тўғри чизиқ* ва *текислик* деб аталадиган бирор объектларни ва улар орасидаги муносабатларни қараймиз.

«Нуқта», «тўғри чизиқ» ва «текислик» терминлари бу тушунчаларнинг келиб чиқиши манбалари реал жисмларнинг фазовий формалари бўлганлигини кўрсатиб турибди. Жумладан, нуқта тушунчаси жисм ўлчамларини абстрактлаштириш натижасида келиб чиққан. Чунончи у ёки бу масалани ўрганишда жисмнинг ўлчамлари роль ўинамаса, яъни уларни эътиборга олмаслик мумкин бўлса ҳамда масала шарти жисмнинг физикавий хоссаларини (массаси, температураси ва ғ. ғ.) абстрактлаштиришга имкон берса, у ҳолда биз геометрияда қараладиган нуқта тушунчасига келамиз.

Тўғри чизиқ тушунчаси тўғри тортилган ип, ёруғлик нури ва ғ. к. типдаги муайян фазовий формаларга эга бўлган предметларнинг физикавий хоссаларини абстрактлаштириш натижасида юзага келади. Шунга ўхшаш, текислик тушунчасининг манбаи стол сирти, таранг тортилган қоғоз варағи типдаги предметларнинг фазовий формаларидир. Бунда текислик чегарасиз (чексиз) деб ҳисобланади. Текисликни чизмада шартли равишда параллелограмм кўринишида тасвирланади ва битта ҳарф билан белгиланади, масалан, Z текислик (8.1-расм).



8. 1- расм.

Табиатда фазовий формалари геометрик объектларнинг ҳосил бўлишига сабаб бўлган жисмлар муайян муносабатда бўладилар. Бу муносабатларнинг физикавий табиатига эътибор қилмасдан, жисмларнинг фақат фазо-

вий формалари орасидаги мунссабатларни қараймиз. Бунда биз киритилган объектларнинг шундай асосий хоссаларини ажратишимиз зарурки, қолган барча муносабатлар шу хоссаларнинг натижаси бўлсин.

Нуқта, тўғри чизиқ ва текислик геометрик тушунчалар сифатида қуйидаги хоссалар билан характерланади.

I.1. *Тўғри чизиқ қандай бўлмасин, бу тўғри чизиққа тегишли бўлган нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.*

I.2. *Икки нуқта қандай бўлмасин, бу нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиқ мавжуд, шу билан бирга бу тўғри чизиқ ягонадир.*

II.1. *Тўғри чизиқдаги учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасининг орасида ётади.*

II.2. *Тўғри чизиққа тегишли нуқта бу тўғри чизиқни иккита ярим тўғри чизиққа ажратади. Бир ярим тўғри чизиқнинг нуқталари бўлувчи нуқта орқали ажраламайди. Турли ярим тўғри чизиқларнинг нуқталари бу нуқта билан ажралаб туради.*

II.3. *Текисликка тегишли бўлган тўғри чизиқ текисликни ярим текисликларга ажратади. Агар бирор кесманинг охирлари битта ярим текисликка тегишли бўлса, у ҳолда кесма бу тўғри чизиқ билан кесишмайди. Агар кесманинг охирлари турли ярим текисликларга тегишли бўлса, у ҳолда кесма тўғри чизиқ билан кесишади.*

III.1. *Текислик қандай бўлмасин, бу текисликка тегишли бўлган нуқталар мавжуд ва текисликка тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.*

III.2. *Агар икки текислик умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйлаб кесишади.*

III.3. *Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта орқали текислик ўтказиш мумкин, шу билан бирга бундай текислик ягона бўлади.*

Санаб чиқилган хоссалар бошқа хоссаларни исботлашда асос бўладиган хоссалардир. Бу хоссалар исбот қилинмайдиган ва аксиомалар деб аталади. Пировард натижада аксиомалардан мантиқий мулоҳазалар ёрдамида ҳосил қилинадиган исталган даъво теорема деб аталади. Фикр-аксиомаларнинг танланиши кенг маънода и х т и ё р и й, аммо аксиомаларнинг бутун системаси, биринчидан *биргаликда* (зидмас), яъни улардан келтириб чиқариладиган ҳеч қандай иккита теорема ўзаро зиддиятга эга бўлмаслиги ва, иккинчидан, ушбу маънода *тўла* бўлиши лозим: қарала-

ётган соҳада ўринли бўлган теоремани шу аксиомалардан келтириб чиқариш мумкин бўлиши лозим. Учинчидан, аксиомалар системаси *эркли* бўлиши, яъни уларнинг ҳеч бири қолганларининг мантиқий натижаси бўлмаслиги мақсадга мувофиқ.

Аксиомалар системасига асосланадиган тушунчалар ва теоремалар тўплами (мажмуи) ни шу аксиомалар системаси устида қурилган назария деб аташ қабул қилинган. Бундай назарияларни яратиш усули *аксиоматик усул* дейилади.

I, II, III аксиомалар системасини қаноатлантирадиган барча нуқталар, тўғри чизиклар ва текисликлар тўплами *Евклид фазоси* деб аталади.

Геометриянинг аксиоматик қурилиши биринчи марта Евклид томонидан, унинг машҳур «Асослар» (тахминан эрампдан аввалги 365—300 йиллар) асарида таклиф қилинган эди. «Асослар» юзага келганидан сўнгги икки минг йил давомида у геометрияни ўрганувчилар учун ягона қўлланма бўлиб келди. Математикадан ўн тўққизинчи асрнинг иккинчи ярмида қилинган ишлар учун хос бўлган қатъийлик руҳи ва Евклид аксиомалари системасининг эркилиги, яъни бу аксиомаларни бошқалардан фойдаланиб исботлаш мумкинлиги ҳамда унинг тўлиқ эмаслигининг равшан бўлиши геометрлар олдида аксиомалар системасини тўлиқ текшириш вазифасини қўйди. Евклид аксиоматикасини текширишни Д. Гильберт (1899 й) якунига етказди. У геометриянинг аксиомалар системасини қурди ва унинг ўзаро эркилигининг батафсил таҳлилини, уларнинг эндиётсиз ва тўлиқлигини исботлади. Бироқ Евклид аксиоматик киритган асосий тушунчаларнинг хоссалари сақланади. Шу сабабли геометриянинг ўзи, яъни янги аксиомалар системасида қурилган назария *Евклид геометрияси* деб аталади.

Қўрсатилган ҳилдаги объектларни бошқача аксиоматик методлар билан ҳам ўрганиш мумкинлигини айтиб ўтамиз. Жумладан, планиметрияни ўрганишда ўқувчи Пифагор теоремасининг текислик аксиомаларига асосланган исботи билан танишган бўлса керак. Иккинчи томондан, агар текисликда Пифагор теоремаси ўринли бўлса, у ҳолда ундан биз аксиомалар сифатида қабул қиладиган даъволарни натижалар тариқасида ҳосил қилиш мумкин. Пифагор теоремаси текисликнинг исталган иккита нуқтаси орасидаги масофани ўлчашга имкон беради, бунинг кейинроқ

кўрамиз. Шундай қилиб, биз қуйидагича метрика киритилган тўпламни (нуқталар ва тўғри чизиқлар тўпламини) ҳосил қиламиз:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

бу ерда x ва y лар A ва B нуқталарнинг координаталари. Илгари айтилганидек, метрика киритилган тўплам фазони аниқлайди, шу сабабли барча нуқталар, тўғри чизиқлар ва текислик тўпламини қараб, биз шундай метрика киритишимиз мумкинки, бу фазода Евклид геометриясининг барча аксиомалари ўринли бўлади. Бундай метрика

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

бўлишини кўрсатиш осон, бу ерда x , y ва z лар A ва B нуқталарнинг координаталари. Бундай фазо ҳам Евклид фазоси бўлиб (таърифга қаранг), лекин унинг қурилиши юқорида кўрсатганимиздан фарқ қилади.

Ушбу бобда биз I, II, III аксиомалар системасидан фойдаланиб, фазода Евклид геометрияси—стереометриянинг бир неча энг муҳим қондаларини кўриб чиқамиз. Бошқача сўз билан айтганда—*стереометрия* геометриянинг фазовий жисмлар ва фигураларнинг, шунингдек, фазода чизиқлар, текисликлар, сиртлар ва жисмларнинг ўзаро жойлашишини ўрганадиган бўлимидир.

Планиметрия бўлимида I ва II аксиомалар системаси асосида исботланган исталган барча қонуниятлар фазода ҳам ўринли, шу сабабли биз бу қонуниятлар ва уларнинг тегишли исботлари маълум деб ҳисоблаб, уларни қайтадан текшириб ўтирмаймиз.

Агар геометрик фигуранинг ҳамми нуқталари бир текисликда ётмаса, уни *фазовий фигура* деймиз. Фазовий фигурага геометрик жисм—буючининг фазода эгаллаган бўлаги мисол бўла олади. Геометрик жисм уни ўраб турган фазодан сирт билан ажралиб туради.

Бу параграфни якунлаб, стереометрия аксиомаларининг бевосита натижаларини келтирамиз, уларни исботлаш қийин эмас.

8.1.2. Асосий аксиомаларнинг баъзи натижалари. 8.1-теорема. *Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

8.2- теорема. Агар тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси текисликка тегишли бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўзи ҳам текисликка тегишли бўлади.

8.1- натижа. Текислик ва унда ётмайдиган тўғри чизиқ ё кесишмайди ёки битта нуқтада кесишади.

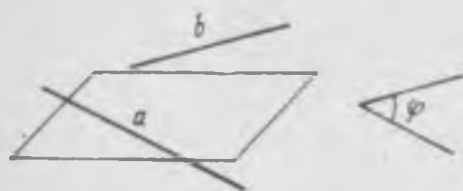
8.3- теорема. Агар иккита тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

8.2- натижа. Иккита параллел тўғри чизиқ орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

8.2- §. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллиги

8.2.1. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг ўзаро вазияти. Икки тўғри чизиқ фазода қуйидагича жойлашиши мумкин: икки тўғри чизиқ битта текисликда ётади, бунда улар битта умумий нуқтага эга бўлиши, яъни кесишиши мумкин ёки умумий нуқталарга эга бўлмаслиги мумкин, у ҳолда улар параллел дейилади. Икки тўғри чизиқ битта текисликда ётмайди, ва демак, улар умумий нуқталарга эга эмас. У ҳолда бундай тўғри чизиқлар айқаш дейилади.

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб бу тўғри чизиқлар айқаш бўлмаган ҳолда улар орқали ўтказилган



8.2- расм.

текисликдаги ана шу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни атаймиз. Иккита айқаш тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб битта нуқтадан чиққан ва айқаш тўғри чизиқларга параллел бўлган икки нур ҳосил қил-

ган бурчаклардан кичигини айтиш қабул қилинган (8.2- расмда φ бурчак a ва b айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчакдир).

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа ўша нуқтадан шу тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги билан ўлчанади.

Фазодаги икки нуқта орасидаги массфони, планиметриядаги каби, бу нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлиги билан ўлчаймиз.

Фазода тўғри чизиқ ва текислик қуйидагича жойлашиши мумкин: тўғри чизиқ ва текислик камида иккита умумий нуқтага эга, у ҳолда (8.2- теоремага қаранг) тўғри чизиқ

текисликка тегишли бўлади; тўғри чизиқ ва текислик битта умумий нуқтага эга, у ҳолда тўғри чизиқ текислик билан кесишади (кесишиш нуқтаси тўғри чизиқнинг текисликдаги *изи* дейилади); тўғри чизиқ ва текислик умумий нуқталарга эга эмас, яъни тўғри чизиқ текисликка параллел.

Икки текислик фазода қуйидагича жойлашган бўлиши мумкин: икки текислик битта умумий нуқтага, ёки иккита умумий нуқтага, ёки битта умумий тўғри чизиққа тегишли бўлган чексиз кўп сондаги умумий нуқталарга эга бўлиши мумкин, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйлаб *кесишади* (III.2 аксиомага қаранг); иккита текислик битта ҳам умумий нуқтага эга эмас, бу ҳолда улар *параллел* деб аталади; икки текислик бир тўғри чизиқда ётмайдиган камида учта умумий нуқтага эга; у ҳолда (III.3 аксиомага қаранг) бу текисликлар *устма-уст тушади*.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар нчидан ўчтасини ажратишимиз мумкин. Ана шуларни қаралаётган объектларнинг параллеллик таърифи сифатида қабул қиламиз.

1. Агар фазодаги иккита a ва b тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва кесишмаса, улар параллел деб аталади ($a \parallel b$).

2. a тўғри чизиқ ва Z текислик кесишмаса, улар параллел деб аталади ($a \parallel Z$).

3. Агар иккита Z ва Q текислик кесишмаса, улар параллел деб аталади ($Z \parallel Q$).

8.2.2. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллик аломатлари. Бир неча теоремаларни исботлаймиз.

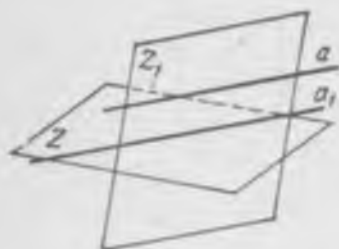
8.4-теорема. Агар текислик ва унда ётмаган тўғри чизиқ берилган бўлиб, текисликда тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ топилса, берилган тўғри чизиқ ва текислик параллелдир.

Исбот. Z —текислик, a_1 эса Z да ётган тўғри чизиқ бўлиб, Z да ётмайдиган a тўғри чизиққа параллел бўлсин (8.3-расм), a ва a_1 тўғри чизиқлар орқали Z_1 текислик ўтказамиз. Z_1 ва Z текисликлар a_1 тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. a тўғри чизиқ Z текисликини кесиб ўтганида эди, кесишиш нуқта a_1 тўғри чизиққа тегишли бўлар эди. Лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки тўғри чизиқлар параллел. Шундай қилиб, a тўғри чизиқ Z текисликини кесиб ўтмайди, ва демак, у Z текисликка параллел; теорема исбот қилинди.

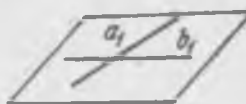
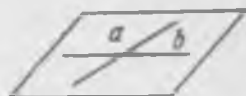
8.5-теорема. Агар текислик иккинчи текисликка

параллел бўлган тўғри чизиқдан ўтиб, бу текисликни кесиб ўтса, у ҳолда текисликларнинг кесишиш чизиғи берилган тўғри чизиққа параллел бўлади.

Исботи. Z_1 текислик a тўғри чизиқ орқали ўтиб, шу билан бирга $a \parallel Z$ бўлсин. Z_1 ва Z текисликларнинг a_1 кесишиш тўғри чизиғи берилган a тўғри чизиққа параллел эканлигини кўрсатиш керак (8.3-расм). Ҳақиқатан, агар a тўғри чизиқ a_1 тўғри чизиқ билан кесишганда эди, у Z текисликни ҳам кесиб ўтиши керак эди, бу эса мумкин эмас, чунки $a \parallel Z$. Демак, a_1 тўғри чизиқ a тўғри чизиқ билан битта текисликда бўлиб, у билан кесишмайди, шу сабабли $a_1 \parallel a$. Теорема исбот қилинди.



8.3-расм.



8.4-расм.

8.3- натижа. Агар тўғри чизиқ иккита кесишувчи текисликнинг ҳар бирига параллел бўлса, у ҳолда у бу текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғига ҳам параллелдир.

Энди текисликларнинг параллеллик масалаларига доир бир неча теорема кўриб чиқамиз.

8.6-теорема. Агар бир текисликда ётган кесишувчи иккита тўғри чизиқ бошқа текисликда ётган икки тўғри чизиққа мос равишда параллел бўлса, у ҳолда бу текисликлар параллелдир.

Исботи. Айтайлик, $a, b \subset Z$ (a ва b тўғри чизиқлар Z текисликка тегишли) ва $a_1, b_1 \subset Z_1$, шу билан бирга $a \parallel a_1$ ва $b \parallel b_1$ бўлсин (8.4-расм); $Z \parallel Z_1$ ни кўрсатиш лозим. Ҳақиқатан, a ва b тўғри чизиқлар Z_1 текисликда ётган a_1 ва b_1 тўғри чизиқларга мос равишда параллел бўлган учун ушбу пунктдаги 1-теоремага асосан $a \parallel Z_1$ ва $b \parallel Z_1$. Агар Z ва Z_1 текисликлар умумий нуқтага эга бўлганда эди, улар бу нуқта орқали ўтган MN тўғри чизиқ бўйлаб кесишар эди (III. 2 аксиомага қаранг). 8.4-теоремага асосан $a \parallel MN$ ва $b \parallel MN$ бўлар, яъни Z текисликнинг бирор нуқтасидан MN га параллел бўлган иккита

тўғри чизик ўтар эди, бунинг эса бўлиши мумкин эмас. Демак, Z ва Z_1 текисликлар умумий нуқтага эга эмас, яъни $Z \parallel Z_1$. Теорема исбот қилинди.

Қуйидаги теореманинг ўринли эканлигини кўрсатиш осон.

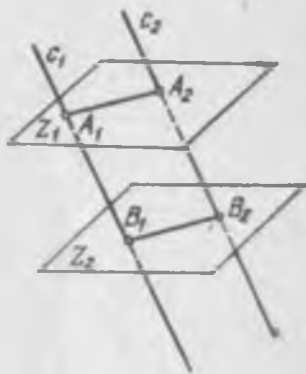
8.7-теорема. *Текисликдан ташқарида ётган нуқтадан бу текисликка фақат битта параллел текислик ўтказиш мумкин.*

Тўғри чизиклар ва текисликларнинг яна битта параллеллик теоремасини кўриб чиқамиз.

8.8-теорема. *Параллел тўғри чизикларнинг параллел текисликлар орасидаги кесмалари тенгдир.*

Исботи. $Z_1 \parallel Z_2$, $c_1 \parallel c_2$ бўлсин (8.5-расм). A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталар c_1 ва c_2 тўғри чизикларнинг Z_1 ва Z_2 текисликлардаги излари. $A_1B_1 = A_2B_2$ эканлигини кўрсатиш лозим.

$A_1A_2B_2B_1$ тўртбурчакни қарайлик. Унинг A_1A_2 ва B_1B_2 томонлари параллел текисликларда ётади, демак, улар умумий нуқталарга эга эмас. Лекин улар айқаш эмас, чунки улар A_1B_1 ва A_2B_2 параллел (шартга кўра) тўғри чизиклар орқали ўтган битта текисликда ётади. Демак, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Шундай қилиб, тўртбурчакнинг томонлари жуфт-жуфт параллел, демак, тўртбурчак параллелограммдир. A_1B_1 ва A_2B_2 кесмалар параллелограммнинг қарама-қарши томонлари сифатида тенгдир. Теорема исбот қилинди.



8.5- расм.

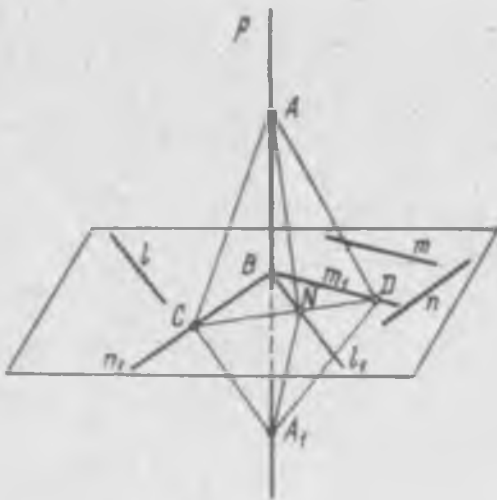
8.3-§. Тўғри чизиклар ва текисликларнинг перпендикулярлиги

8.3.1. Тўғри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик аломатлари. Яна 8.2.1 пунктга мурсжаат қилиб, тўғри чизикларнинг, тўғри чизиклар ва текисликларнинг, текисликларнинг кесилишига доир ҳоллардан энг муҳим бир хусусий ҳол: объектларнинг перпендикулярлик ҳолатини ажратиш маънога эга, ва шунингдек, тўғри чизик ва текислик орасидаги, иккита текислик орасидаги бурчак де-

Агар тўғри чизик текисликда ётган исталган тўғри чизикқа перпендикуляр бўлса, тўғри чизик *текисликка перпендикуляр* дейилади.

8.9-теорема (туғри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик аломати). *Агар туғри чизик бирор текисликда ётган кесишувчи иккита туғри чизикқа перпендикуляр бўлса, бу туғри чизик шу текисликда ётган исталган туғри чизикқа перпендикуляр, яъни бу туғри чизик берилган текисликка перпендикуляр бўлади.*

Исботи. m, n, l тўғри чизиқлар Z текисликка тегишли ($m, n, l \in Z$) ва $p \perp m, p \perp n$ бўлсин. $p \perp l$ ни исботлаш лозим, бу ерда l — берилган Z текисликка тегишли ихтиёрий тўғри чизиқ (8.6-расм).



8.3. рсчм.

ρ тўғри чизиқнинг Z текислигидаги изини¹⁾ B ҳарф билан белгिलाيمиз. B нуқтадан $m_1 \perp m$, $n_1 \perp n$ ва $l_1 \perp l$ ярим тўғри чизиқлар ўтказамиз, бунда, равшанки, $m_1 \perp \rho$ ва $n_1 \perp \rho$.

p тўғри чизикда B издан икки томонда ихтиёрий узунликдаги тенг AB ва A_1B кесмаларни қуямиз ҳамда m_1 ва n_1 тўғри чизикларда ихтиёрий BD ва BC кесмаларни шун-

¹ Яъни p тўғри чизиқнинг Z текислик билан кесилиш нуқтасини.

дай қўямизки, CD тўғри чизиқ l_1 тўғри чизиқни кесиб ўтсин. CD ва l_1 нинг кесишиш нуқтасини N ҳарфи билан белгилаймиз. C , N ва D нуқталарни A ва A_1 нуқталар билан тўғри чизиқлар орқали туташтирамиз.

$\triangle ACD = \triangle A_1CD$, чунки $AC = A_1C$ ва $AD = A_1D$, булар C ва D нуқталардан AA_1 тўғри чизиққа ўтказилган оғмалар бўлиб, уларнинг A ва A_1 асослари CB ва DB перпендикулярларнинг асосларидан тенг узоқлашгандир, CD — умумий томон. Бу учбурчакларнинг тенглигидан $\angle ADC = \angle A_1DC$ келиб чиқади. $\triangle ADN = \triangle A_1DN$, чунки $AD = A_1D$, $\angle ADN = \angle A_1DN$ ва ND — умумий томон. Бу учбурчакларнинг тенглигидан $AN = A_1N$ келиб чиқади. $\triangle ABN = \triangle A_1BN$, чунки $AB = A_1B$, $AN = A_1N$ ва BN — умумий томон. Бу учбурчакларнинг тенглигидан $\angle ABN = \angle A_1BN$ келиб чиқади. Бу учбурчаклар қўшни бурчак бўлгани учун улар тўғри бурчаклардир, яъни p тўғри чизиқ l_1 тўғри чизиққа, ва демак, аяқаш p ва l тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг таърифига мувофиқ, l тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр.

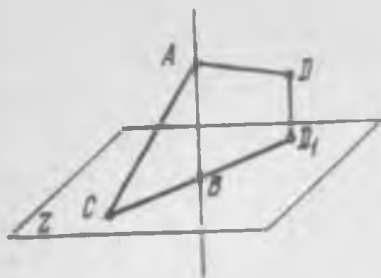
8.4- натижа (тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик аломати). *Агар тўғри чизиқ текисликда ётган кесишувчи икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у шу текисликка ҳам перпендикулярдир.*

Юқорида исботланган теорема ва унинг натижасидан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаш қийин эмас.

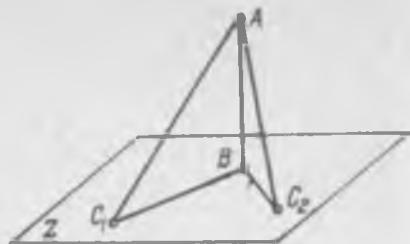
8.10- теорема. *Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа фақат битта перпендикуляр текислик ўтказиш мумкин.*

8.11- теорема. *Берилган нуқтадан берилган текисликка фақат битта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

8.3.2. Текисликка перпендикуляр ва оғма. Z — текислик, A Z текисликда ётмайдиган нуқта, B эса Z текисликнинг нуқтаси бўлсин. Агар $AB \perp Z$ бўлса AB кесма A нуқтадан Z текисликка ўтказилган перпендикуляр дейилади. Энди $C \in Z$ ва у B дан бошқа нуқта бўлсин. У ҳолда AC кесмани A нуқтадан Z текисликка ўтказилган оғма деб атаймиз. Перпендикулярнинг текисликдаги изи перпендикулярнинг асоси, оғманинг изи эса оғманинг асоси дейилади. Z текисликка тегишли бўлган (нега?) ва перпендикуляр билан оғманинг асосини туташтирувчи BC кесма AC оғманинг Z текисликдаги проекцияси дейилади (8.7- расм).



8.7- расм.



8.8- расм.

8.12-теорема. Агар текисликдан ташқарида ётган бирор A нуқтадан бу текисликка перпендикуляр ва оғмалар ўтказилган бўлса, у ҳолда:

- 1) перпендикуляр ҳар қандай оғмадан кичик;
- 2) тенг проекцияларга эга бўлган оғмалар тенгдир;
- 3) катта оғма катта проекцияга эга.

Исботи. $AB \perp Z$, AC_1 ва AC_2 лар A нуқтадан Z текисликка ўтказилган оғмалар бўлсин (8.8- расм).

- 1) $\triangle ABC$ — тўғри бурчакли (нега?), демак,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2,$$

бундан $AC_1^2 > AB^2$ ва $AC_1 > 0$, $AB > 0$ бўлгани учун AC_1 оғма AB перпендикулярдан катта.

- 2) $BC_1 = BC_2$ бўлсин. $AC_1 = AC_2$ ни исбот қилиш керак. $\triangle AC_1B$ ва $\triangle AC_2B$ — тўғри бурчакли, демак,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2,$$

$$AC_2^2 = AB^2 + BC_2^2.$$

Биринчи тенгликдан иккинчи тенгликни айириб,

$$AC_1^2 - AC_2^2 = 0$$

ёки

$$AC_1^2 = AC_2^2, \quad AC_1 = AC_2$$

ни (AC_1 , AC_2 нинг мусбатлигига асосан) ҳосил қиламиз.

- 3) Энди $AC_1 > AC_2$ бўлсин. Юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар $BC_1 > BC_2$ тенгсизликка олиб келади.

Теорема исбот қилинди.

Ҳозиргина исбот қилинган теореманинг қўлланишига доир масала кўрайлик.

8.1-масала. Фазонинг бирор нуқтасидан берилган текисликка иккита оғма ўтказилган бўлиб, уларнинг ҳар бири a га тенг, оғмалар орасидаги бурчак 60° , уларнинг шу текисликка проекциялари орасидаги бурчак эса тўғри. Қуйидагиларни топинг:

- оғмаларнинг асослари орасидаги масофа;
- берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофа;
- оғмалар ва текислик орасидаги бурчак.

Ечилиши. $AC_1 = AC_2 = a$ лар A нуқтадан Z текисликка ўтказилган икки оғма бўлиб, шу билан бирга C_1 ва C_2 — оғмаларнинг асослари бўлсин (8.9-расм). C_1C_2 кесма изланаётган масофадир. Уни топиш учун кесишувчи C_1A ва AC_2 тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислиكنи ясайлик. У ҳолда шартга кўра $\angle C_1AC_2 = 60^\circ$, шундай қилиб, $\triangle AC_1C_2$ тенг ёнли учбурчак бўлиб, унинг учидаги бурчаги 60° , демак, $\triangle AC_1C_2$ — тенг томонли ва $C_1C_2 = a$.

Нуқтадан текисликкача бўлган масофа бу нуқтадан шу текисликка ўтказилган перпендикулярнинг узунлигидир. A нуқтадан AB перпендикуляр тушiramиз ва перпендикулярнинг B асосини оғмаларнинг асослари билан туташтирамиз. $\triangle C_1BC_2$ ни текширамиз. Бу ерда шартга кўра $\angle C_1BC_2 = 90^\circ$ ва $C_1B = C_2B$ (чунки тенг оғмаларга тенг проекциялар тўғри келади). $C_1C_2 = a$ бўлгани учун $C_1B = C_2B$ ни x орқали белгилаб, номаълумни топиш учун тенглама тузишимиз мумкин:

$$2x^2 = a^2 \quad \text{ёки} \quad x = C_1B = C_2B = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

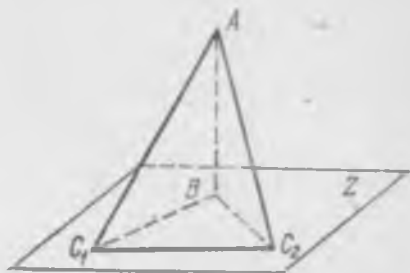
Пифагор теоремасини $\triangle C_1BA$ учун қўлланиб, BA ни топамиз:

$$BA = \sqrt{(AC_1)^2 - (C_1B)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

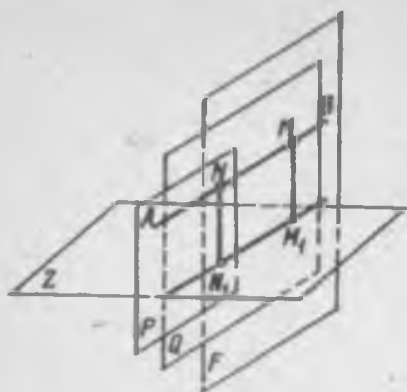
Нихоят, $\angle AC_1B = \angle AC_2B = 45^\circ$, чунки $\triangle AC_1B = \triangle BC_2A$ A ва уларнинг иккаласи ҳам тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчаклардир ҳамда

$$C_1B = BA = BC_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

8.3.3. Тўғри чизиқнинг текисликка проекцияси; тўғри чизиқлар орасидаги, тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак. Агар $AB \perp Z$ бўлса, B нуқтани (AB кесманинг изини) AB тўғри чизиқнинг Z текисликдаги проекцияси дейилади. Умумий ҳолда (AB тўғри чизиқ Z текисликка перпендикуляр бўлмаганда) AB тўғри чизиқнинг Z текисликдаги проекцияси деб қуйидагича ясалган тўғри чизиқни



8.9-расм.



8.10- расм.

айтамиз (8.10- расм): AB тўғри чизиқнинг исталган M нуқтасидан Z текисликка перпендикуляр туширамиз ҳамда кесишувчи AB ва MM_1 тўғри чизиқлар орқали Q текислик ўтказамиз. Z ва Q текисликларнинг кесишиш чизиғини AB тўғри чизиқнинг Z текисликка проекцияси деб атаймиз. M нуқтанинг танланиши ихтиёрийлигига қарамасдан бундай проекциянинг ягоналигини исботлаш осон. Ҳақиқатан,

AB тўғри чизиқда M нуқтадан бошқа ихтиёрий N нуқтани оламиз ва бу нуқтадан текисликка перпендикуляр тушириб, кесишувчи AB ва NN_1 тўғри чизиқлар орқали P текислик ўтказамиз. Энди биз P ва Q текисликларнинг устма-уст тушишини кўрсатсак, у ҳолда, демак, тўғри чизиқнинг текисликка проекцияси ягона равишда аниқланади. Буни исботлаш учун иккита параллел NN_1 ва MM_1 тўғри чизиқлар орқали ўтувчи F текисликни ясаймиз. AB тўғри чизиқ F текисликка тегишли, чунки унинг иккита N ва M нуқтаси бу текисликка тегишли. Демак, бир томондан, F ва P текисликлар кесишувчи AB ва NN_1 тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликлар сифатида устма-уст тушади, иккинчи томондан эса F текислик ва Q текислик иккита кесишувчи MM_1 ва AB тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликлар сифатида устма-уст тушади. Демак, P ва Q текисликлар устма-уст тушади, бинобарин, берилган тўғри чизиқнинг проекцияларини яшашнинг таклиф қилинган усули ягона ечилишга эга.

AD кесманинг Z текисликка проекцияси деб бу кесманинг бир учидан (A нуқтадан) Z текисликка туширилган перпендикулярнинг асосини бу кесманинг иккинчи учидан (D нуқтадан) Z текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси билан туташтирувчи BD_1 кесмага айтилади.

Энди юқорида баён қилинган материалдан фойдаланиб, фазодаги нуқталар, тўғри чизиқлар ва текисликлар орасидаги баъзи масофаларни аниқлашимиз (биз уларни 8.2-§ да аниқлай олмаган эдик) ва тўғри чизиқ билан текислик

орасидаги бурчак тушунчасининг таърифини беришимиз мумкин.

Икки тўғри чизик орасидаги масофа бу тўғри чизикларга тегишли бўлган исталган икки нуқта орасидаги энг қисқа масофадир. Бундай ҳолда кесишмайдиган тўғри чизиклар, яъни параллел ва айқаш тўғри чизиклар ҳақида ҳам сўз юритиш маънога эгадир. *Иккита параллел тўғри чизик орасидаги масофа* бир тўғри чизикнинг исталган нуқтасидан иккинчи тўғри чизикқа туширилган перпендикулярнинг узунлигидир. *Иккита айқаш тўғри чизик орасидаги масофа* бу тўғри чизикларнинг бирида ётган нуқтадан иккинчи тўғри чизик орқали ўтувчи ва биринчи тўғри чизикқа перпендикуляр бўлган текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигидир.

А нуқтадан Z текисликкача бўлган масофа шу *A* нуқтадан *Z* текисликкача бўлган масофаларнинг энг кичигидир. Шундай қилиб, бу келтирилган таърифдан ва 8.12-теореманинг биринчи пунктдан ушбу содда хулосага келиш мумкин: *А нуқтадан Z текисликкача бўлган масофа* *A* нуқтадан *Z* текисликка ўтказилган перпендикулярнинг узунлигидир.

Тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак деб бу тўғри чизик билан унинг берилган текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка айтилади. Бу бурчак оғманинг текисликнинг бошқа исталган тўғри чизиги билан ҳосил қилган бурчаклари ичида энг кичиги бўлишини исбот қилинган 8.12-теорема ёрдамида исботлаш осон.

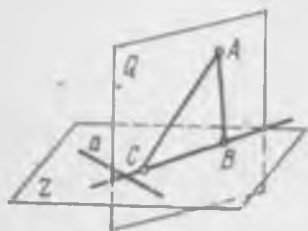
Тўғри чизик ва текислик орасидаги масофа тўғри чизикнинг исталган нуқтаси билан текисликнинг исталган нуқтаси орасидаги энг қисқа масофадир. Масофа ҳақида текислик ва тўғри чизик умумий нуқталарга эга бўлмаган ҳолдагина гапириш маънога эга бўлиши равшан. Шундай қилиб, *текисликка параллел бўлган тўғри чизикдан шу текисликкача бўлган масофа* деб тўғри чизикнинг исталган нуқтасидан текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади.

Шунга ўхшаш, *икки текислик орасидаги масофа* ҳақида улар параллел бўлган ҳолдагина сўз юритамиз. У бир текисликнинг исталган нуқтасидан иккинчи текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги билан аниқланади.

8.3.4. «Уч перпендикуляр» ҳақидаги теорема. Бизнинг фикримизча, жуда муҳим, стереометриянинг купгина масалаларида татбиқ қилинадиган теоремани кўриб чиқамиз.

8.13-теорема. *Текисликда оғмага перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ бу оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.*

Исботи. SA тўғри чизиқ Z текисликка оғма, CB унинг бу текисликдаги проекцияси ва $a \perp SA$ бўлсин. $CB \perp a$ эканини исботлаш талаб қилинади (8.11-расм).



8.11-расм.

Ҳақиқатан, AC оғма ва унинг CB проекцияси орқали Q текислик ўтказамиз, $a \perp Q$, чунки у бу текисликнинг кесишувчи иккита тўғри чизиғига перпендикуляр:¹ теорема шартига кўра $a \perp AC$, AB тўғри чизиқ Z текисликка перпендикуляр бўлгани учун, $a \perp AB$, ва демак, AB бу текисликка тегишли исталган тўғри чизиққа перпендикулярдир. У ҳолда 8.9-теоремага асосан a тўғри чизиқ

Z текисликда ётувчи исталган тўғри чизиққа перпендикулярдир. Хусусан $a \perp CB$, шунини исботлаш талаб қилинган эди.

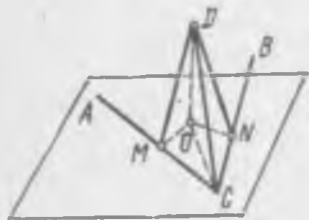
8.14-теорема (тескари теорема). *Текисликдаги оғманинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.*

Бу теореманинг исботи аввалгисига ўхшашдир.

Исботланган теореманинг татбиқига доир масала кўрайлик.

8.2-масала. Агар текисликда ётган бурчакнинг учидан шу текисликка бурчак томонлари билан тенг бурчаклар ташкил э адиган қилиб оғма ўтказилса, у ҳолда бу оғманинг текисликка проекцияси берилган бурчакнинг биссектрисаси бўлишини исбот қилинг.

Ечилиши. $\angle ACB$ бурчак Z текисликда ётган бўлсин. DC оғма эса унинг томонлари билан тенг бурчаклар ташкил этсин: $\angle ACD = \angle DCB$ (8.12-расм). D нуқтадан Z текисликка DO перпендикуляр туширамиз ҳамда $OM \perp AC$ ва $ON \perp CB$ ни ўтказамиз. У ҳолда уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра $DM \perp AC$ ва $DN \perp CB$, бундан эса $\triangle DCM = \triangle DCN$ — умумий гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича ($\angle MCD = \angle DCN$ масала шarti бўйича). Демак, $DM = DN$, у ҳолда уларнинг проекциялари ҳам тенг: $MO = ON$. Демак, $\triangle MOC = \triangle OCN$ (катети ва умумий гипотенузаси бўйича). Демак, $\angle MCO = \angle OCN$ яъни CD оғманинг OC проекцияси $\angle ACB$ нинг биссектрисасидир.



8.12-расм.

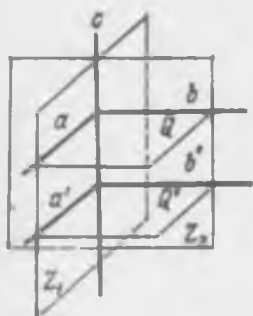
¹ 8.4- натижага қаранг.

8.4-§. Текисликларнинг ўзаро вазияти.

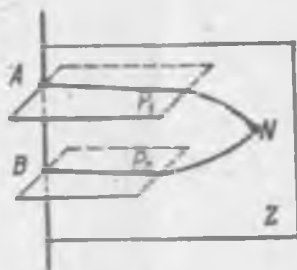
8.4.1. Икки текислик орасидаги бурчак. Икки текислик орасидаги бурчак тушунчасини киритамиз. Агар текисликлар параллел ёки устма-уст тушса, ўлар орасидаги бурчак нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Z_1 ва Z_2 текисликлар устма-уст тушмасин ва параллел бўлмасин. У ҳолда улар бирор c тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. c тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб Q текислик ўтказамиз (8.13-рasm). У Z_1 ва Z_2 текисликларни a ва b тўғри чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади. Z_1 ва Z_2 текисликлар орасидаги бурчак учун a ва b тўғри чизиқлар орасидаги энг кичик бурчакни қабул қиламиз. Текисликлар орасида бундай аниқланадиган бурчак кесувчи Q текисликнинг танланишига боғлиқ эмас.

Бу даъвонинг тўғрилигини кўрсатиш учун қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

8.15-теорема. Агар икки текислик битта тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда улар параллелдир.



8.13- рasm.



8.14- рasm.

$P_1 \perp AB$ ва $P_2 \perp AB$ бўлсин (8.14-рasm), $P_1 \parallel P_2$, яъни P_1 ва P_2 текисликлар битта ҳам умумий нуқтага эга эмаслигини кўрсатиш лозим.

«Тескарисини фараз қилиш» билан исботлаймиз. N нуқта P_1 ва P_2 текисликлар учун умумий бўлсин. AB тўғри чизиқ ва N нуқта орқали Z текислик ўтказамиз. У ҳолда AN ва BN лар P_1 ва P_2 текисликларнинг Z текислик билан кесишиш чизиқларидир. P_1 ва P_2 текисликларга перпендикуляр бўлган AB тўғри чизиқ AN ва BN тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлиши лозим (8.3.1-пункт, таърифга қа-

ранг), яъни N нуқтадан AB тўғри чизиққа иккита перпендикуляр тушмоқда. Келиб чиққан зиддият қилинган фарзнинг нотўғрилигини исботлайди. Демак $P_1 \parallel P_2$. Теорема исбот қилинди.

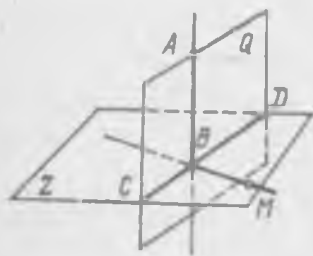
☛ Текисликлар орасидаги бурчак таърифига қайтайлик. Q текислик билан устма-уст тушмайдиган бошқа кесувчи текислик ёрдамида ясалган бурчак a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг бўлишини кўрсатамиз. Q' текислик c га перпендикуляр ва Q билан устма-уст тушмасин (8.13-расм). У ҳолда Q' текислик Z_1 ва Z_2 текисликларни a' ва b' тўғри чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади, шу билан бирга $a' \perp a$. Ҳақиқатан, a' ва a тўғри чизиқлар кесишмайди, чунки улар 8.15-теоремага кўра параллел текисликларда ётади, лекин улар айқаш ҳам эмас, чунки иккаласи битта Z_1 текисликда ётади. Шунга ўхшаш, $b \parallel b'$. Демак, a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак мос томонлари параллел бўлган бурчаклар сифатида a' ва b' тўғри чизиқлар ташкил қилган бурчакка тенг.

Икки текислик орасидаги бурчак бу текисликларда ётувчи ва уларнинг кесишиш тўғри чизигининг бирор нуқтасида ўтказилган икки перпендикуляр орасидаги бурчакка тенг эканлигини кўрсатиш осон.

Орасидаги бурчак (яъни a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак) тўғри бурчак бўлган текисликлар перпендикуляр деб аталади.

8.4.2. Текисликларнинг перпендикулярлик аломатлари. 8.16-теорема. Агар текислик бошқа текисликка перпендикуляр орқали ўтса, у ҳолда у ҳам ўша текисликка перпендикуляр бўлади.

Исботи. $AB \perp Z$ ва $AB \in Q$ бўлсин (8.15-расм). $Q \perp Z$ ни кўрсатиш лозим. Ҳақиқатан, Q текислик Z текислик билан умумий нуқтага (B) эга бўлиб, у билан B



8.15- расм.

нуқта орқали ўтадиган бирор CD тўғри чизиқ бўйлаб кесишадди. Z текисликда B нуқтадан $BM \perp CD$ перпендикуляр чиқарамиз. $AB \perp Z$ бўлгани учун $AB \perp BM$ ва $AB \perp CD$ (таърифга кўра). Шундай қилиб, AB ва BM лар Q ва Z текисликларда уларнинг кесишиш тўғри чизигидаги бирор B нуқтадан ўтказилган перпендикулярлардир,

демак, бу тўғри чизиклар орасидаги бурчак Z ва Q текисликликлар орасидаги бурчакдир. Лекин $AB \perp BM$, бундан эса $Z \perp Q$. Теорема исбот қилинди.

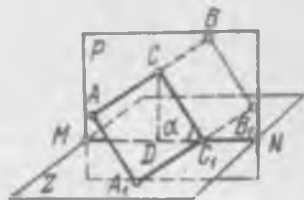
8.4- натижа. Агар икки текислик ўзаро перпендикуляр ва улардан қайсидир бирининг бирор нуқтасидан иккинчи текисликка перпендикуляр туширилган бўлса, у ҳолда бу перпендикуляр биринчи текисликда ётади.

8.17-теорема. Текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизик орқали бу текисликка фақат битта перпендикуляр текислик ўтказиш мумкин.

Бу теореманинг исботи 8.3.3-пунктда, тўғри чизикнинг текисликка проекцияси масаласини кўриб чиқишда келтирилган эди.

8.3- масала. Бирор текисликка параллел бўлган тўғри чизик орқали берилган текислик билан α бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказинг.

Ечилиши. $AB \parallel Z$ бўлсин. Бу тўғри чизикка унинг ихтиёрий S нуқтаси орқали P перпендикуляр текислик ўтказсак, у Z текислигини MN тўғри чизик бўйлаб кесиб ўтади (8. 16-расм). P текисликда $\angle CC_1D = \alpha$ бурчак ясаймиз. Z текисликда $C_1B_1 \perp MN$ тўғри чизикни ўтказамиз, у уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан CC_1 оғмага перпендикуляр бўлади. A_1B_1 ва CC_1 тўғри чизиклар орқали текислик ўтказамиз. Ясалган текислик ўша изланаётган текисликдир, чунки у Z текислик билан α бурчак ташкил этади ва AB тўғри чизик бу текисликда ётган A_1B_1 тўғри чизикка параллел тўғри чизик сифатида ана шу текисликка тегишли бўлади.



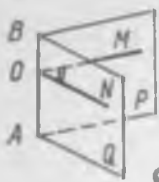
8. 16- расм.

8.5- §. Икки ёқли, уч ёқли ва кўп ёқли бурчаклар

Икки ёқли бурчак деб бир тўғри чизикдан чиққан икки ярим текисликдан иборат геометрик фигурага айтилади (8.17-расм). AB тўғри чизик икки ёқли бурчакнинг қирраси, P ва Q ярим текисликлар эса унинг томонлари ёки ёқлари дейилади.

Икки ёқли бурчакни ё қиррага қўйилган иккита ҳарф, масалан, AB билан ёки тўртта ҳарф билан белгиланади: $ABPQ$, буларнинг ўртадаги иккитаси қиррани, четкилари эса ёқларни англатади.

Икки ёқли бурчакнинг чизикли бурчаги деб қирранинг ихтиёрий нуқтасидан унга ёқларда ётадиган қилиб ўтказилган икки перпендикуляр орасидаги бурчакка айтилади.



8.17- расм.

Агар иккита икки ёқли бурчакни ичма-ич қўйилганда, устма-уст тушса, улар *тенг* дейилади.

Тенг бўлмаган икки ёқли бурчакларни биттадан ёқларини устма-уст туширилганда, улар орасида каттаси деб, ичида иккинчи икки ёқли бурчакнинг иккинчи ёғи жойлашадигани ҳисобланади.

Қуйидаги теорема икки ёқли бурчакларни ичма-ич қўйиш билан осонгина исботланиб, уларни таққослашни энгиллаштиради.

8.18-теорема. *Агар иккита икки ёқли бурчак тенг бўлса, у ҳолда уларнинг икки ёқли бурчаклари ҳам тенгдир. Агар икки ёқли бурчаклар тенг бўлмаса, уларнинг чизиқли бурчаклари ҳам тенг эмасдир, шу билан бирга катта икки ёқли бурчакка катта чизиқли бурчак мос келади (8.18-расм).*

Икки ёқли бурчакнинг иккала ёғи битта текислик ташкил этса, у *ёйиқ бурчак* дейилади.

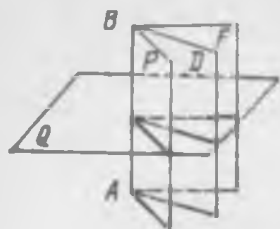
Қўйиш икки ёқли бурчаклар деб битта умумий ёққа эга бўлган, қолган иккита ёқлари эса битта текислик ташкил этадиган икки ёқли бурчакларга айтилади.

Икки ёқли бурчакнинг ўлчов бирлиги сифатида чизиқли бурчаги бурчакларнинг бир ўлчов бирлигига тенг бўлган икки ёқли бурчак олинади. Бошқача айтганда, *икки ёқли бурчак ўзининг чизиқли бурчаги билан ўлчанади.*

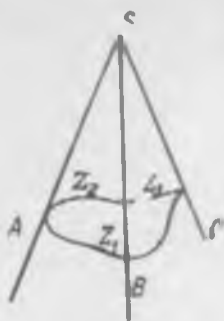
S нуқтадан бир текисликда ётмайдиган қилиб, учта нур: SA , SB ва SC ни ўтказамиз (8.19-расм). Бу нурлар учта ясси бурчак ташкил этади: $\angle ASB$, $\angle BSC$, $\angle CSA$. Бу учта бурчакдан тузилган фигура *уч ёқли бурчак* дейилади. S нуқта уч ёқли бурчакнинг учи, SA , SB ва SC нурлар қирралари, ясси бурчаклар — Z_1 , Z_2 , Z_3 текисликлар — ёқлар дейилади. Z_1SAZ_2 икки ёқли бурчак уч ёқли бурчакнинг SA қиррадаги икки ёқли бурчаги дейилади. Уч ёқли бурчакда учта икки ёқли бурчакни ажратиш мумкинлиги равшан.

Уч ёқли бурчак тўрт ҳарф билан белгиланади: $SABC$, бу ерда S уч, A , B ва C — қирраларда олинган ихтиёрий нуқталар.

Уч ёқли бурчакнинг текис бурчаклари қуйидаги хоссаларга эга.



8.18- расм.



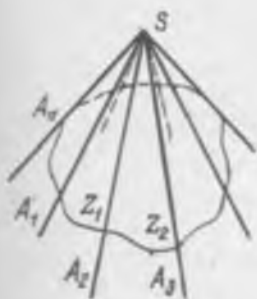
8.19- расм.

1. Уч ёқли бурчакда исталган ясси бурчак қолган икки-та ясси бурчак йиғиндисидан кичикдир.

2. Уч ёқли бурчакнинг исталган ясси бурчаги унинг қолган икки-та ясси бурчаги айирмасидан каттадир.

Энди S нуқтадан n та $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ нурни шундай ўтказамизки уларнинг ҳеч бир учтаси бир текисликда ётмасин. Бу нурлар n та ясси бурчак ташкил этади: $\angle A_1SA_2, \angle A_2SA_3, \dots, \angle A_{n-1}SA_n, \angle A_nSA_1$. Бу n та ясси бурчакдан тузилган фигура (8.20-расм) *кўп ёқли бурчак* дейилади. S нуқта унинг *учи*, $SA_1, \dots, SA_n$ қирралари, ясси бурчаклар — $Z_1, \dots, Z_n$ — текисликлар-ёқлар, $Z_1SA_2Z_2$ икки ёқли бурчак *кўп ёқли бурчакнинг* SA_2 қиррасидаги *икки ёқли бурчаги* дейилади. n ёқли бурчак n та икки ёқли бурчакка эгаллиги равшан.

Кўпёқли бурчакни $SA_1, \dots, A_n$ ҳарфлар орқали ёки битта S ҳарфи билан белгилаймиз.



8.20- расм.



8.21- расм.

Агар кўп ёқли бурчакнинг ҳамма ёқлари қолган ёқларнинг ҳар биридан бир томонда ётган бўлса, бундай кўп ёқли бурчак *қавариқ* дейилади. Масалан, 8.21-а расмда S_1 қавариқ олтиёқли бурчак, 8.21-б расмда эса S_2 ноқава-риқ беш ёқли бурчак кўрсатилган.

Кўп ёқли бурчакнинг ясси бурчаклари қуйидаги хосса-га эга.

Қавариқ кўп ёқли бурчакнинг ясси бурчаклари йиғин-диси $4d$ дан кичикдир.

8.6-§. Кўпёқлар

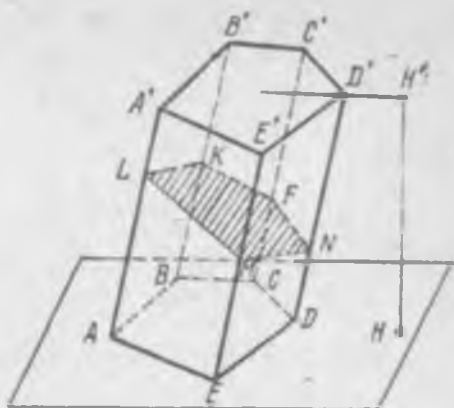
8.6.1. Кўпёқ; кўпёқнинг элементлари. 8.1.1-пунктда «геометрик жисм» тушунчасига берилиши лозим бўлган маънони аниқладик. Чегараси чекли сондаги кўпбурчак-лардан ташкил топган жисм *кўпёқ* дейилади. Кўпёқни чеклаб турадиган кўпбурчаклар кўпёқнинг *ёқлари* дейи-лади. Кўпёқнинг *қирралари* деб қўшни ёқларнинг умумий томонига айтилади. Кўпёқнинг *учлари* деб унинг битта нуктада учрашадиган ёқлари ташкил қиладиган кўп ёқли бурчакларнинг учларига айтилади. Кўпёқнинг *диагонали* деб кўпёқнинг битта ёқда ётмайдиган иккита учини ту-таштирувчи кесмага айтилади. Кўпёқнинг *диагонал текис-лиги* деб унинг битта ёқда ётмайдиган учта учи орқали ўтувчи текисликка айтилади. Кўпёқнинг текислик билан *кесими* деб бу текисликнинг унинг кўпёқ билан кесишиш чизиги орқали чегараланган бўлагига айтилади.

Кўпёқнинг сирти деб унинг барча ёқлари юзларининг йиғиндисига айтилади. Агар бирор кўпбурчакни кўпёқнинг асоси деб қараш мумкин бўлса, ёки агар кўпёқ иккита бир хил параллел кўпбурчакка эга бўлиб, уларни асос учун қабул қилиш мумкин бўлса у ҳолда кўпёқнинг ён сирти ҳақида гапирилади, бунда умумий сиртдан асослар юзлари ажратилади.

Кейинчалик, призманинг ён сирти параллелограммлар юзлари йиғиндисидан, пирамиданинг ён сирти учбурчаклар юзлари йиғиндисидан иборат эканлигини кўрамиз. Агар кўпёқ узининг ҳар бир ёни текислигидан бир томонда ёт-са, у *қавариқ кўпёқ* дейилади. Қавариқ кўпёқнинг ёқлари фақат қавариқ кўпбурчаклар бўлиши мумкинлиги равшан.

Бу бобнинг кейинги пунктларида энг содда кўпёқлар — призма ва пирамидани кўриб чиқамиз.

8.6.2. Призма. Призма деб икки ёғи (асослари) параллел, қолган ёқлари эса параллел тўғри чизиқлар бўйлаб кесишадиган (ён ёқлар) кўпёққа айтилади (8. 22-расм). Асослардаги кўпбурчаклар ихтиёрий бўлиши мумкинлиги равшан. Лекин ён ёқлар албатта параллелограммлар бўлиши лозим. Ҳақиқатан, ён ёқ тўртбурчак бўлиб, унинг икки томони параллел (шартга кўра) ва иккита параллел тўғри чизиқнинг иккита текислик орасидаги кесмалари сифатида тенг (8. 8-теорема).



8.22- расм.

Призманинг *баландлиги* деб унинг асос текисликларига перпендикуляр ва улар орасида ётган кесманинг узунлигига айтилади (8.22-расмда HH').

Призма унинг асоси қандай кўпбурчак бўлишига қараб учбурчакли, тўртбурчакли ва ҳ. к. дейилади.

Призманинг ён сирти нимага тенг эканлигини аниқлаш мақсадида яна бир тушунча киритамиз.

Призманинг *перпендикуляр кесими* деб призмани унинг қирраларига перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кўпбурчакка айтилади.

8.19-теорема. Призманинг ён сирти унинг ён қирраси узунлигини перпендикуляр кесим периметрига кўпайтирилганига тенг.

Исботи. $ABCDE A'B'C'D'E'$ ёки қисқаси AE' призмада $LKFNМ$ перпендикуляр кесим ўтказилган. $AA'E'E$, параллелограммининг юзи нимага тенглигини кўриб чиқайлик. Равшанки,

$$S_{AA'E'E} = AA' \cdot LM.$$

бунда параллелограммининг AA' томонини асос сифатида, асос ва унга параллел томон орасида ётган ва унга перпендикуляр бўлган кесмани баландлик сифатида олдик. Призманинг барча ён қирралари бир хил бўлгани сабабли

уларнинг узунлигини, масалан, l орқали белгилаш маъқул. У ҳолда

$$S_{AA'E'E} = l \cdot LM,$$

шунга ўхшаш

$$S_{AA'B'B} = l \cdot LK \quad \text{ва ҳ. к.}$$

Призманинг ён сирти ҳамма параллелограммлар юзлари йиғиндисига тенг, шу сабабли

$$S = l \cdot LM + l \cdot LK + l \cdot KF + l \cdot FN + l \cdot NM.$$

l ни қавсдан ташқари чиқариб, қавс ичидаги йиғиндини қарайдиган бўлсак, у перпендикуляр кесим периметри эканлигини кўрамиз. Теорема исбот қилинди.

Агар призманинг ён қирралари унинг асос текисликларига перпендикуляр бўлса, призма *тўғри призма* дейилади. Тўғри призмада барча ён ёқлар тўғри тўртбурчаклар эканлиги равшан; баландлик ён қиррага тенг. Акс ҳолда эса призма *огма призма* дейилади.

8.6-натижа. *Тўғри призманинг ён сирти унинг асоси периметрини баландликка кўпайтирилганига тенг.*

Асоси мунтазам кўпбурчаклар бўлган тўғри призма *мунтазам призма* дейилади.

Тўртбурчакли призманинг муҳим хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

Параллелепипед деб асоси параллелограмм бўлган призмага айтилади. Параллелепипед тўғри ҳам, огма ҳам бўлиши мумкин.

Тўғри бурчакли параллелепипед деб асоси тўғри тўртбурчак бўлган тўғри призмага айтилади. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учда учрашадиган учта қирраси унинг *ўлчамлари* дейилади.

Куб деб учала ўлчами ўзаро тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипедга айтилади.

8.6.4-пунктда параллелепипедни батафсил ўрганамиз ва унинг элементларининг баъзи хоссаларини аниқлаймиз. Энди кўпёқларнинг бошқа иккита тури — пирамида ва кесик пирамидани ўрганишга ўтамиз.

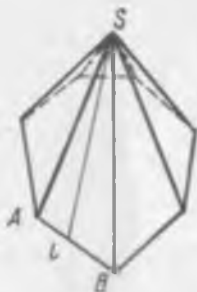
8.6.3. *Пирамида*. Пирамида деб кўпёкли бурчакнинг ёқлари ва унинг ҳамма ёқларини кесиб ўтувчи текислик билан чегараланган кўпёққа айтилади.

Пирамиданинг *асоси* деб кесувчи текисликдан ҳосил бўлган кўпбурчакка айтилади. (8.23-расмда $ABCDE$.) Пирамидалар асоси томонларининг сонига қараб учбурчакли, тўртбурчакли ва ҳ. к. бўлиши мумкин. Учбурчакли призма шундай хусусиятга эгаки, унинг ҳар бир ёғини асос сифатида қабул қилиш мумкин. Пирамиданинг ён ёқлари умумий S учга эга бўлган учбурчаклардир. Пирамиданинг *баландлиги* деб унинг учидан асос текислигига туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади.

Мунтазам пирамида деб асоси мунтазам кўпбурчак бўлиб, баландлиги бу кўпбурчакнинг марказидан ўтадиган пирамидага айтилади. Мунтазам пирамиданинг барча қирралари тенг (асослари перпендикулярнинг асосидан тенг узоқлашган оғмалар сифатида), барча ён ёқлари—тенг ён-



8. 23- расм.



8. 24- расм.

ли учбурчаклардир. Мунтазам пирамиданинг *апофемаси* деб ён ёқларнинг пирамида учидан туширилган баландлигига айтилади,

8.20-теорема. *Мунтазам пирамиданинг ён сирти унинг асоси периметри ярмининг апофемага кўпайтирилганига тенг.*

Исботи. n бурчакли мунтазам пирамида берилган бўлиб, унинг томони $AB = a$, апофемаси $SC = l$ бўлсин (8.24-расм). Битта ён ёқнинг юзи нимага тенг эканлигини аниқлайлик. $\triangle ASB$ да AB — асос томони, SC — баландлик:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot l}{2}.$$

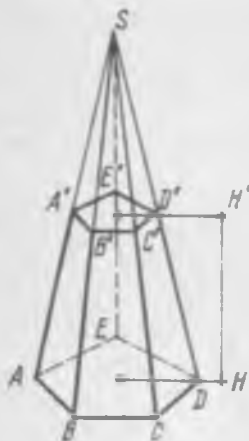
Пирамиданинг ён сирти ён ёқлар, яъни тенг ёнли учбурчаклар юзлари йиғиндисига тенг, шунинг учун

$$S_{\text{ён ёқ}} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot n.$$

Лекин $a \cdot n$ — асос периметри. Теорема исбот қилинди.

Исталган уч бурчакли пирамида *тетраэдр* дейилади.

Турли-туман пирамидалар тўпламидан битта энг муҳим хусусий ҳолни ажратиш мумкин. Ён қирраси асос томони-га тенг бўлган мунтазам учбурчакли пирамида *мунтазам тетраэдр* номи билан юритилади.



8.25-расм.

Кесик пирамида деб пирамиданинг унинг асоси ва асосга параллел текислик билан кесими орасидаги бўлагига айтилади (8.25-расм).

Кесик пирамиданинг *асоси* деб унинг параллел ёқларига айтилади. *Пастки асос* деб дастлабки пирамиданинг асоси, *устки асос* деб кесувчи текисликда ётган кўпбурчакка айтилади. Кесик пирамиданинг ён ёқлари трапециялардир. Кесик пирамиданинг *баландлиги* деб устки асоснинг бирор нуқтасидан пастки асосга туширилган перпендикулярга айтилади.

Мунтазам кесик пирамида деб шундай кесик пирамидага айтиладики, унинг учун асос бўлган дастлабки пирамида мунтазам эди, мунтазам кесик пирамиданинг асоси — мунтазам кўпбурчаклар ва асослар марказларини туташтирувчи тўғри чизиқ асослар текисликларига перпендикулярдир. Мунтазам кесик пирамиданинг *апофемаси* деб ён ёқдаги тенг ёнли трапециянинг баландлигига айтилади.

8.21-теорема. *Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярмини апофемага кўпайтирилганлигига тенг.*

Исботи. Мунтазам n бурчакли кесик пирамиданинг пастки асосининг томони a га, устки асосининг томони b га, апофемаси l га тенг бўлсин. У ҳолда ён ёқ — тенг ёнли трапециянинг юзини текшириб, у

$$\frac{a+b}{2} \cdot l$$

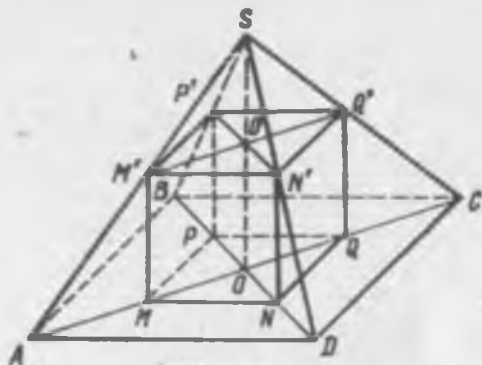
га тенг эканлигини топамиз. Ён сирт шундай n та трапециядан иборат, демак,

$$S_{\text{кес. пир. ён ёқ}} = \frac{a+b}{2} \cdot l \cdot n = \frac{na+nb}{2} \cdot l.$$

na — пастки асос периметри, nb — устки асос периметри эканлигини ҳисобга олиб, теоремада айтилган формулани ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

Бу пунктнинг сўнггида кўпинча учраб турадиган, ички ва ташқи чизилган кўпёқларга доир масалани кўриб чиқамиз.

8.4- масала. Мунтазам тўртбурчакли пирамидага куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи пирамиданинг ён қирраларида, қолган тўртта учи эса пирамиданинг асос текислигида ётади. Агар



8.26- расм.

пирамидада асосининг томонини a га, баландлигини эса h га тенг бўлса, - кубнинг қиррасини топинг.

Е ч и л и ш и. Кубнинг изланаётган қиррасини x орқали белгилаймиз (8. 26- расм), яъни $MN = MM' = x$; $\triangle OSD \sim \triangle SO'N'$ ($OD \parallel O'N'$) дан

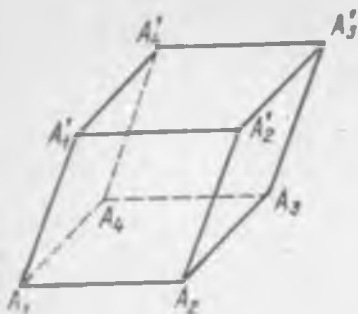
$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'N'}{OD}.$$

$SO = h$, $SO' = h - x$, $O'N' = x/\sqrt{2}$, $OD = a/\sqrt{2}$ ни ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

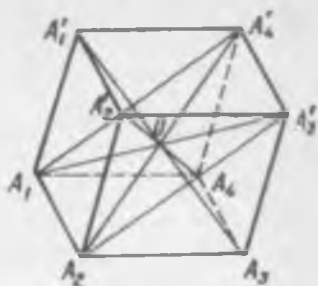
$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a}, \text{ бундан } x = \frac{ah}{a+h}.$$

8.6.4. Параллелепипеднинг энг содда хоссалари. 8.22-теорема. *Параллелепипедда қарима-қарши ётган ёқлар (яъни умумий учларга эга бўлмаган ёқлар) параллел ва тенгдир.*

Исботи. A_1A_1 параллелепипед берилган бўлсин (8.27-расм). Теоремани исботлаш учун исталган иккита ёқ, масалан, $A_1A_1A_2A_2$ ва $A_1A_1A_3A_3$ параллел ва тенг эканлигини кўрсатиш kifoya.



8.27- расм.



8.28-расм.

Ҳақиқатан, параллелепипеднинг олти та ёғи параллелограммлар бўлгани учун $A_1 A_1' = A_4 A_4'$; $A_1 A_2 = A_4 A_3$ ва $A_1 A_1'$, $A_4 A_4'$ ва $A_1 A_2 \parallel A_1 A_3$, демак, $A_1 A_1' A_2 A_2'$ ва $A_4 A_4' A_3 A_3'$ ёқлар бир текисликнинг кесишувчи иккита тўғри чизиги ($A_1 A_1'$ ва $A_1 A_2$) иккинчи текисликнинг кесишувчи икки тўғри чизигига ($A_4 A_4'$ ва $A_4 A_3$) параллеллигига асосан параллелдир. Бу ўқлар шунингдек, тенгдир, чунки уларнинг юқорида кўрсатилган томонлари тенглигидан ташқари бурчаклари ҳам тенг: $\angle A_1 A_2 A_2' = \angle A_4 A_3 A_3'$ (мас томонлари параллел ва бир хил йўналган бурчаклар сифатида). Теорема исбот қилинди.

8.23-теорема. *Параллелепипеднинг диагоналлари битта нуқтада кесишади ва бу нуқтада тенг иккига бўлинади.*

Исботи. $A_1 A_4'$ параллелепипедда $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_1 A_4'$ ва $A_1 A_3$ диагоналлари ўтказамиз (8.28-расм). A_2 ни A_3 билан, A_4 ни A_4' билан туташтирамиз. Ҳосил қилинган фигура параллелограммдир, чунки $A_1 A_2 = A_3 A_1$ ва $A_1 A_2 \parallel A_1 A_4'$ (8.22-теоремага қаранг).

Параллелепипеднинг $A_2 A_4'$ ва $A_1 A_3$ диагоналлари ҳосил қилинган параллелограммнинг ҳам диагоналлари, ва демак, улар O кесишиш нуқтада тенг иккига бўлинади. Шунга ўхшаш, бу диагоналлardan бирини (масалан, $A_2 A_4'$ ни) ва параллелепипеднинг учинчи диагоналини (масалан, $A_3 A_1'$ ни) олиб, улар $A_2 A_4' A_1' A_3$ параллелограммнинг диагоналлари эканлигини кўрсатиш осон, демак, улар ҳам кесишиш нуқтада тенг иккига бўлинади. Демак, $A_3 A_1'$ диаго-

наль ўша O нуқтадан — A, A' диагональнинг ўртасидан ўтади. Сўнги диагональ ҳам ўша нуқтадан ўтишини ва унда тенг иккига бўлишини исботлаш энди қийин эмас. Теорема исбот қилинди.

8.24-теорема (тўғри бурчакли параллелепипед диагонаlining хоссаси). *Тўғри бурчакли параллелепипед диагонаlining квадрати унинг уч ўлчами квадратларининг йиғиндисига тенг.*

Исботи. Тўғри бурчакли $\triangle AC'C$ дан (8.29-расм) Пифагор теоремасига кўра

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Тўғри бурчакли $\triangle ACB$ дан

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Бундан

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Лекин $AB = DC$, шунинг учун

$$AC'^2 = CC'^2 + DC^2 + BC^2, \dots$$

бу ерда CC' , DC ва BC — параллелепипеднинг бир учидан чиққан уч қирраси. Теорема исбот қилинди.

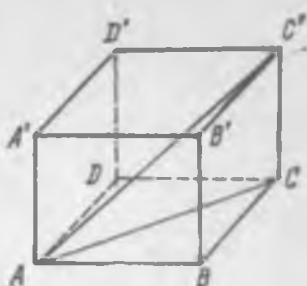
8.6.5. Пирамиданинг энг содда хоссалари. 8.25-теорема (пирамиданинг асосга параллел текислик билан кесимларининг хоссалари.) *Агар пирамидани асосга параллел текислик билан кесилса, у ҳолда:*

1) пирамиданинг ён қирралари ва баландлиги пропорционал бўлакларга бўлинади;

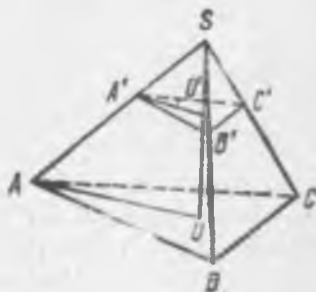
2) кесимда асосга ўхшаш кўпбурчак ҳосил бўлади;

3) кесимнинг ва асоснинг юзлари нисбати улардан пирамиданинг учигача бўлган масофалар квадратлари нисбати каби бўлади.

Исботи. Умумийликни бузмасдан, учбурчақли пирамидани текшираемиз. (8.30-расм). SO унинг баландлиги, $A'B'C'$ — асос текислигига параллел текислик.



8.29-расм.



8.30-расм.

1) $A'B' \parallel AB$, чунки улар параллел текисликларда ётади ва шу сабабли умумий нуқтага эга эмас ҳамда улар айқаш ҳам эмас, чунки иккаласи битта $\triangle ASB$ текисликка тегишли. Шунга ўхшаш $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$. Демак, учбурчаклар ўхшашлигидан:

$$\triangle ASB \sim \triangle A'SB', \triangle BSC \sim \triangle B'SC', \triangle ASC \sim \triangle A'SC'. \quad (8.1)$$

Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B}, \quad \frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C}, \quad \frac{SC'}{C'C} = \frac{SA'}{A'A}.$$

$\triangle AOS \sim \triangle A'O'S$ ни кўриб чиқиб ва

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SO'}{O'O} \quad (8.2)$$

муносабатни киритиб,

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C} = \frac{SO'}{O'O}$$

ни ҳосил қиламиз.

2) (8.1) муносабатдан асос ва кесимдаги кўпбурчакларнинг ҳамма томонлари пропорционаллигини кўрамиз, демак,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

3) ўхшаш фигураларнинг юзлари ўхшаш томонлари квадратларининг нисбати каби бўлади, яъни

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(A'B')^2}{(AB)^2}.$$

Бундан ва (8.1) ўхшашлик муносабатларидан ҳамда (8.2) дан

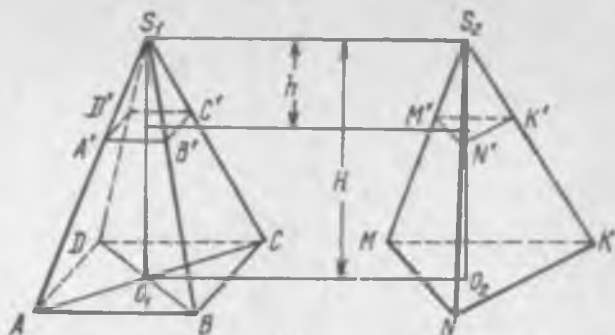
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO},$$

яъни

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(SO')^2}{(SO)^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

8.26-теорема. Агар баландликлари тенг бўлган иккита пирамидани асосларга параллел бўлган текисликлар билан учдан бир хил масофада кесилса, у ҳолда кесимлар юзлари асослар юзларига пропорционал бўлди.



8.31- расм.

Исботи. Пирамидаларнинг S_1O_1 ва S_2O_2 баландлик-лари тенг бўлсин. Бу баландликни H орқали белгиләймиз. Пирамидаларни асосларга параллел текисликлар билан учдан h масофада кесамиз (8.31- расм). Аввалги теоремага асосан

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{h^2}{H^2} \text{ ва } \frac{S_{M'N'K'}}{S_{MNK}} = \frac{h^2}{H^2}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{M'N'K'}}{S_{MNK}}.$$

Теорема исбот қилинди.

8.6- натижа. *Баландликлари тенг бўлган икки пирамиданинг асослари тенгдош бўлса, у ҳолда учлардан тенг узоқликда турган кесимлари ҳам тенгдошдир.*

8.7- §. Геометрик жисмларнинг ҳажмлари

8.7.1. Ҳажм аксиомалари. Аввало аксиоматик методдан фойдаланиб геометрик жисм ҳажми тушунчасига қандай маъно берилишини аниқлаб оламиз. Геометрик жисмнинг ички соҳасини характерловчи сонни унинг *ҳажми* деб атаймиз. Элементар жисмлар ҳажмларини текшириш билан чекланамиз.

Ҳажм геометрик тушунча сифатида қуйидаги учта аксиома билан аниқланади.

1. *Ҳар бир геометрик жисм (таъин, манфий бўлмаган) ҳажмга эга.*

2. Тенг геометрик жисмлар тенг ҳажмларга эга.

3. Геометрик жисмнинг ҳажми уни ташкил этувчи бўлакларнинг ҳажмлари йиғиндисига тенг.

Ҳажми топиш процесси ўлчаш процессидан, яъни берилган ҳажми эталон ҳажмлар билан солиштиришдан иборат. Ҳажмнинг ўлчов бирлиги бир куб бирлик бўлиб, у томони бир чизиқли бирликка тенг бўлган кубнинг ҳажмидир. Фикримизни яқунлаб шуни айтиб ўтамизки, ҳажми ҳисоблаётганда биз геометрик фигурага тўла аниқланган сонни мос қўямиз, яъни геометрик фигуралар тўпламида функцияни аниқлаймиз, бу функция эса ҳажм аксиомаларидан кўрнниб турибдики, манфий эмас, бир қийматли ва аддитивдир. Геометрик жисми уни ташкил этувчи нуқталар тўплами сифатида қараб, ҳажми узунлик каби нуқталар тўпламининг ўлчови деб қараш мумкин.

8.7.2. Баъзи жисмларнинг ҳажмларини ўлчаш учун формулалар. Ушбу пунктда биз элементар жисмларнинг ҳажмларини ҳисоблашга доир бир неча формулаларни келтирамиз, уларнинг келтириб чиқарилиши кейинги бобларда қаралади.

Призманинг ҳажми асос юзини баландликка кўпайтирилганига тенг:

$$V = Q \cdot H.$$

a , b , c тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчамлари бўлсин. U ҳолда, унинг ҳажми, равшанки,

$$V = abc.$$

Пирамиданинг ҳажми асос юзини баландликка кўпайтмасининг учдан бирига тенг:

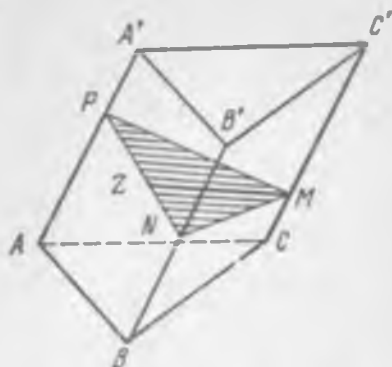
$$V = \frac{1}{3} Q \cdot H.$$

Кесик пирамиданинг ҳажмини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$V = \frac{1}{3} (Q + q + \sqrt{Qq}) \cdot H,$$

бу ерда q , Q — мос равишда устки ва остки асосларнинг юзлари, H — пирамида баландлиги.

Ҳажми ҳисоблашга доир масала кўрайлик.



8.52- расм

8.5- масала. Оғма учбурчакли призмада ён ёқлардан бирининг юзи m^2 га тенг, бу ёқдан унга қарама-қарши ётган қиррагача бўлган масофа эса $2a$ га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. $S_{ABB'A'} = m^2$ бўлсин (8.32- расм). MZ кесма CC' қирранинг ихтиёрий M нуқтасидан $ABB'A'$ текисликка туширилган перпендикуляр. Текислик ва тўғри чизик орасидаги масофа таърифига кўра (8.3.3- пункт) $MZ = 2a$. $AA'BB'$ текисликда Z нуқта орқали AA' ва BB' параллел тўғри чизикларга PN перпендикуляр ўтказамиз. У ҳолда $(PN \cdot BB') = S_{ABB'A'} = m^2$. Призми кесишувчи MZ ва PM тўғри чизиклар орқали ўтувчи перпендикуляр кесим билан кесиб ва ҳосил

бўлган кўпёқларни уларнинг тенг ABC ва $A'B'C'$ ёқлари бўйича ёпиштириб, тўғри призми ҳосил қилиш мумкин (асос текисликлари ён қирраларга перпендикуляр); унинг асоси перпендикуляр кесимдан иборат бўлиб, у аввалгига тенгдош, демак, $V = BB_1 \cdot S_{PMN}$ ёки

$$V = \frac{1}{2} PN \cdot MZ \cdot BB' = \frac{1}{2} (PN \cdot BB') \cdot MZ = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2a = ma^2.$$

Биз масалада кўрилган мулоҳазалардан муҳим амалий хулосага келишимиз мумкин: *призманинг ҳажми перпендикуляр кесим юзини ён қиррага кўпайтирилганига тенг.*

8- БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Аксиома нима? Теорема нима?
2. Асосий геометрик тушунчаларни айтиб беринг.
3. Стереометрия аксиомаларини айтиб беринг.
4. Қандай тўғри чизиклар айқаш дейилади? Параллел тўғри чизиклар айқаш тўғри чизиклардан нима билан фарқ қилади?
5. Фазода тўғри чизик ва текислик, иккита текислик қандай жойлашган бўлиши мумкин?
6. Тўғри чизик ва текисликнинг, икки текисликнинг параллеллик аломатларини айтиб беринг.
7. Текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизик таърифни айтиб беринг.
8. Тўғри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик аломатини айтиб беринг.
9. Перпендикуляр, оғма, оғманинг проекцияси деб нимага айтилади?
10. Перпендикуляр қар қандай оғмадан қисқа эканлигини исбот қилинг.

11. Тўғри чизиқнинг текисликка проекцияси деб нимага айтилади?
 12. Кесманинг текисликка проекцияси деб нимага айтилади?
 13. Иккита тўғри чизиқ орасидаги масофа, нуқтадан тўғри чизиқ-
 қача бўлган масофа, икки текислик орасидаги масофа деб нимага ай-
 тилади?

14. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак таърифини айтиб
 беринг.

15. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани исбот қилинг.
16. Икки текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
17. Текисликларнинг перпендикулярлик аломотларини айтиб беринг.
18. Икки ёқли бурчак деб нимага айтилади?
19. Икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги деб нимага айтилади?
20. Уч ёқли бурчак ясси бурчакларининг хоссаларини айтиб бе-

ринг.

21. Қандай кўпёқли бурчак қавариқ дейилади?
22. Кўпёқ деб нимага айтилади?
23. Кўпёқнинг қирраси, ёғи, диагонали деб нимага айтилади?
24. Призма деб нимага айтилади?
25. Призманинг ён сирти нимага тенг?
26. Призманинг қайси хусусий ҳолларини биласиз?
27. Қандай призма мунтазам призма деб айтилади?
28. Пирамида деб нимага айтилади?
29. Қандай пирамида мунтазам пирамида дейилади?
30. Мунтазам пирамиданинг ён сирти нимага тенг?
31. Тетраэдр нима? Мунтазам тетраэдр нима?
32. Кесик пирамида деб нимага айтилади?
33. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти нимага тенг?
34. Параллелепипеднинг диагоналлари битта нуқтада кесишишини

исбот қилинг.

35. Пирамиданинг асосга параллел текисликлар билан кесимлари
 хоссаларини айтиб беринг.

36. Ҳажм аксиомаларини айтиб беринг.

8-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. P текисликдан $MO = 4$ масофада бўлган M нуқтадан бу текис-
 ликка MO тўғри чизиққа 30° , 45° ва 60° бурчаклар остида MA , MB
 ва MC оғмалар ўтказилган. Оғмаларнинг узунликларини аниқланг.

2. Берилган кесмаларнинг охирлари иккита ўзаро перпендикуляр
 текисликда бўлиб, у бу текисликларнинг бири билан 45° , иккинчиси
 билан эса 30° бурчак ташкил қилади; кесманинг узунлиги a га тенг.
 Текисликларнинг кесишиш чизиғининг берилган кесманинг охирларидан
 туширилган перпендикулярлар орасида ётган қисмининг узунлигини
 аниқланг.

3. Мунтазам учбурчак P текисликка проекцияланган, учбурча-
 книнг учлари бу текисликдан 10 см, 15 см ва 17 см масофада. Учбур-
 чакнинг марказидан P текисликкача бўлган масофани топинг.

4. Ромбнинг бир томони орқали бу томонга қарама-қарши томон-
 дан 4 см масофада текислик ўтказилган. Ромб диагоналларининг бу
 текисликка проекциялари 8 см ва 12 см га тенг. Ромб томонларининг
 бу текисликка проекцияларини топинг.

5. Икки тўғри чизиқнинг иккита параллел текислик орасидаги
 кесмалари 51 см ва 53 см га тенг, уларнинг текисликлардан бериға

проекциялари эса $6:7$ каби нисбатда. Бу проекцияларнинг узунликларини ва текисликлар орасидаги масофани топинг.

6. Иккита параллел P ва Q текисликлар орасида AC ва BD кесмалар ўтказилган (A ва B нуқталар P текисликда ётади). $AC=13$ см, $BD=15$ см, AC ва BD кесмаларнинг текисликлардан бирига проекциялари йиғиндиси 14 см га тенг. Бу проекцияларнинг узунликларини ва берилган текисликлар орасидаги масофани топинг.

7. Берилган нуқтадан берилган текисликка параллел текислик ўтказинг.

8. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

9. Берилган тўғри чизиқ орқали берилган текисликка перпендикуляр текислик ўтказинг.

10. Берилган нуқтадан берилган иккита текисликка перпендикуляр текислик ўтказинг.

11. Уч ёқли бурчакда икки ясси бурчак 45° дан, улар орасидаги икки ёқли бурчак эса тўғри бурчак. Учинчи ясси бурчакни топинг.

12. Уч ёқли бурчакнинг ҳар бир ясси бурчаги 60° га тенг. Қирраларининг бирини учидан бошлаб 3 га тенг кесма қўйилган ва бунинг охиридан қарама-қарши ёққа перпендикуляр ўтказилган. Бу перпендикулярнинг узунлигини топинг.

13. Оғма учбурчакли призмада ён қирралар 8 см дан, перпендикуляр кесимнинг томонлари $9:10:17$ каби нисбатда, унинг юзи эса 144 см² га тенг. Бу призманинг ён сиртини аниқланг.

14. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини унинг ёқлари юзлари Q_1 , Q_2 ва Q_3 бўйича аниқланг.

15. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг диагоналидан уни кесиб ўтмайдиган қиррагача бўлган энг қисқа масофани топинг.

16. Кубнинг қирраси a га тенг. Иккита қўшни ёқнинг кесишмайдиган диагоналлари орасидаги энг қисқа масофани топинг.

17. Куб диагонал текислигининг юзи S га тенг. Кубнинг қиррасини, асосининг диагоналинини, кубнинг диагоналинини, унинг тўла сиртини ва ҳажмини ҳисобланг.

18. Кубнинг битта диагоналининг охирида учрашадиган қирраларининг иккита учлиги охириларида ўтказилган иккита текислик бу диагонални тенг үч бўлакка бўлишни исботланг.

19. Қирраси a бўлган $ABCD A'B'C'D'$ кубда AD , $B'C'$ қирраларининг ўрталари ва A' , C учлар орқали кесим ўтказилган. Бу кесим юзини топинг.

20. Тўғри призманинг асоси катетлари a ва b бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Призманинг ён ёқлари текислик билан шундай кесилганки, кесимда мунтазам учбурчак ҳосил бўлган. Унинг томонини топинг.

21. Параллелепипедни кесимда бешбурчак ҳосил бўладиган қилиб текислик билан кесиб мумкинми?

22. Мунтазам учбурчакли призманинг ҳар бир қирраси a га тенг. Асоснинг томони ва асоснинг марказидан туширилган баландлигининг ўртаси орқали текислик ўтказилган. Бу кесим юзини топинг.

23. Пирамиданинг асоси квадратдан иборат бўлиб, унинг баландлиги асос учларининг бири орқали ўтади. Агар асоснинг томони 20 см, баландлик 21 см бўлса, бу пирамиданинг ён сиртини топинг.

24. Баландлиги H бўлган мунтазам тетраэдрнинг ҳажмини топинг.

25. Ҳажми V га тенг бўлган мунтазам тетраэдрнинг баландлигини топинг.

26. Учбурчакли пирамида асосининг томонлари a , b ва c . Учдаги барча ясси бурчаклар тўғри бурчаклардир. Пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

27. Учбурчакли $ABCS$ пирамиданинг S учидан туширилган баландлиги ABC учбурчак баландликларининг кесишиш нуқтасидан ўтади. Бундан ташқари, қуйидагилар маълум: $SB = b$, $SC = c$ ва $\angle BSC = 90^\circ$. ASB ва ASC ёқлар юзлари нисбатини топинг.

28. Мунтазам учбурчакли пирамида асосининг томони a га тенг, асосининг бирор учидан унга қарама-қарши ётган ён ёққа туширилган баландлик эса b га тенг. Пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

29. Баландлиги a га, диагональ кесимининг юзи эса Q га тенг бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

30. Учбурчакли пирамидада учта ёқ ўзаро перпендикуляр бўлиб, уларнинг юзлари S_1, S_2, S_3 га тенг. Тўртинчи ёқнинг юзини топинг.

31. Ҳар бир қиррасига ҳеч бўлмаганда битта ўтмас бурчак ёпишиб турадиган учбурчакли пирамида мавжудми?

32. Барча қирралари тенг бўлган саккизбурчакли пирамида мавжудми? Қайси n учун ҳамма қирралари тенг бўлган n бурчакли пирамида мавжуд?

33. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси a га тенг. AB ва BC томонларнинг ўрталаридан BS қиррага параллел қилиб текислик ўтказилган. Кесим юзини аниқланг.

34. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирраси ва асоси орасидаги бурчак 60° га, баландлик эса h га тенг. Баландликда учдан $h/3$ масофада жойлашган нуқтадан ён қирраларнинг бирига перпендикуляр текислик ўтказилган. Кесим юзини топинг.

35. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирраси ва асоси орасидаги бурчак 60° га, ён қирра a га тенг. Қирралардан бирининг ўртаси орқали унга перпендикуляр текислик ўтказилган. Кесим юзини топинг.

36. Асосининг томони a бўлган мунтазам учбурчакли пирамидада асос томонларининг бири орқали қарама-қарши ён қиррага перпендикуляр ва бу қиррани учидан бошлаб ҳисобланганда $m : n$ нисбатда бўладиган текислик ўтказилган. Пирамиданинг тўла сиртини топинг.

37. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони a га тенг, пирамиданинг баландлиги h га тенг. Пирамида асосининг томони ва бу томон билан айкаш ён қирранинг ўртаси орқали кесим ўтказилган. Пирамида учидан бу кесим текислигигача бўлган масофани топинг.

38. Пирамиданинг асоси ромб бўлиб, унинг диагоналлари $AC = a$ ва $BD = b$. SA ён қирра асос текислигига перпендикуляр ва q га тенг. A нуқта ва SC қирранинг ўртаси орқали асосининг BD диагонаliga параллел қилиб текислик ўтказилган. Кесим юзини аниқланг.

39. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида асосларнинг томонлари 5 см ва 11 см, пирамиданинг диагонали эса 12 см. Ён сиртни аниқланг.

40. Мунтазам учбурчакли кесик пирамидада асосларнинг томонлари 30 м ва 20 м, ён сирт эса асослар юзлари йиғиндисига тенг. Бу кесик пирамиданинг ҳажмини аниқланг.

41. Мунтазам тўртбурчакли пирамидада асосининг томони 3 дм, баландлиги эса 2 дм. Унинг асосига параллел ва асосдан 5 см нарида ўтадиган текисликдан ҳосил бўладиган кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

42. Кесик пирамидада асосларнинг юзлари S_1 ва S_2 га тенг. Ён қирраларнинг ўрталари орқали ўтган кесим юзини топинг.

43. Агар кесик пирамида асосларининг юзлари S_1 ва S_2 , ҳажми эса V бўлса, тўлиқ пирамиданинг ҳажмини топинг.

44. Кесик пирамида асосларининг юзлари a^2 ва b^2 га тенг. Кесик пирамида асосларига параллел ва унинг ҳажмини тенг иккига бўладиган кесим юзини топинг.

45. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони $5\sqrt{2}$ га, унинг қирраси 13 га тенг. Бу пирамидага куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи пирамида қирраларида ётади. Кубнинг томони-ни ҳисобланг.

46. Мунтазам тўртбурчакли пирамидага куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи пирамида апофемаларида, тўртта учи асос текислигида ётади; пирамиданинг қамма қирралари бир хил бўлиб, a га тенг. Кубнинг тўла сиртини ва ҳажмини топинг.

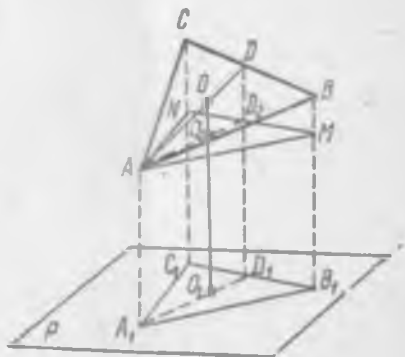
8- БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. 8.3.1- пунктдаги масалага қаранг. Жавоби.

$$MA = \frac{8\sqrt{2}}{2}, MB = 4\sqrt{2}, MC = 8.$$

2. Жавоби. $a/2$.

3. Ечилиши. A_1, B_1, C_1 нуқталар (8.33- расм) берилган ABC учбурчак учлари A, B, C нинг P текисликка тўғри бурчакли проекцияларидир. Шартга мувофиқ $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 15$ см, $CC_1 = 17$ см. Текисликка перпендикулярларда уларнинг асосларидан бошлаб, $B_1M = C_1N = AA_1 = 10$ см кесмаларни қўямиз. У ҳолда $MB = 5$ см, $NC = 7$ см. Берилган мунтазам учбурчакнинг O маркази унинг медианалари кесишган нуқтададир. Учбурчакнинг AD медианаси O нуқтада $AO:OD = 2:1$ нисбатда бўлинади. D нуқтадан P текисликка DD_1 перпендикуляр туширамиз. У ANM учбурчакнинг NM томонини тенг иккига бўлади: $ND_2 = D_2M$, яъни AD_2 кесма ANM учбурчакнинг медианасидир. DD_2 кесма $MBCN$ трапециянинг ўрта чизиги сифатида $(BM + CN)/2 = 6$ см га тенг бўлади. У ҳолда AOO_1 ва ADD_2 учбурчакларнинг ўхшашлигидан $OO_1:DD_2 = AO:AD$ ёки $OO_1:6 = 2:3$, $OO_1 = 4$ см. $O_1O_1 = AA_1 = 10$ см эканлигини ҳисобга олиб, $OO_1 = OO_1 + O_1O_1 = 14$ см ни топамиз. Жавоби. 14 см.



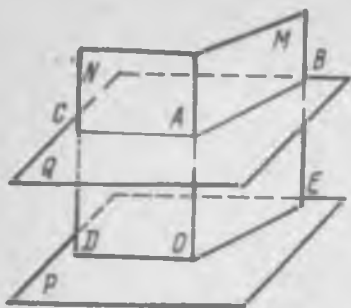
8.33- расм.

4. Жавоби. 5 см ва 3 см.

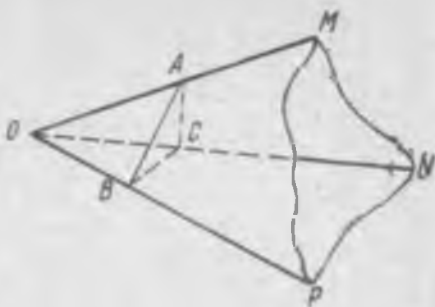
5. Жавоби: 24 см, 28 см ва 45 см.

6. Жавоби. 5 см, 9 см ва 12 см.

7. Ечилиши. A нуқта ва P текислик берилган бўлсин. A нуқта орқали P текисликка параллел бўлган Q текислиكنи ўтказиш талаб қилинади (8.34- расм).



8.34- расм.



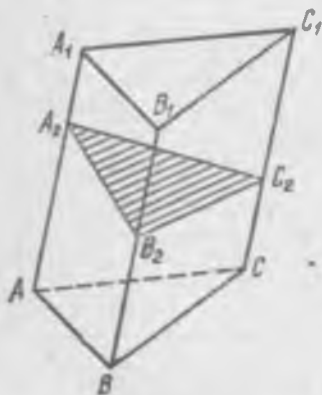
8.35- расм.

P текисликда икки ихтиёрий кесишувчи OE ва OD тўғри чизиқлар ўтказамиз ҳамда бу нуқталар ва берилган A нуқта орқали M ва N текисликлар ўтказамиз, улар OA тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. M текисликда $AB \parallel OE$ тўғри чизиқни, N текисликда эса $AC \parallel OD$ тўғри чизиқни ўтказамиз. AB ва AC тўғри чизиқлар Q текисликини аниқлайди, бу текислик A нуқта орқали ўтади ва берилган P текисликка параллелдир.

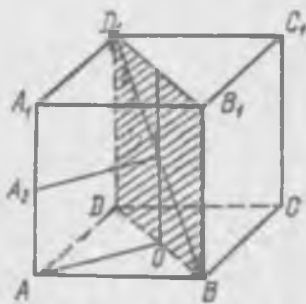
11. $OMNP$ уч ёқли бурчакда $\angle MON = \angle NOP = 45^\circ$, улар орасидаги икки ёқли бурчак—тўғри бурчакдир. Учинчи $MOP = \alpha$ ясси бурчак топилсин (8.35- расм). ON қирранинг ихтиёрий C нуқтасида $MNOP$ икки ёқли бурчакнинг ACB чизиқли бурчагини ясаймиз, у ҳолда масала шартига кўра $\angle ACB = 90^\circ$; сўнгра $\angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$ бўлгани учун $AC = OC = CB$ ва тўғри бурчакли ACO , ACB ва BCO учбурчаклар ўзаро тенгдир, демак, $AB = AO = BO$ ва изланаётган бурчак: $\angle AOB = 60^\circ$. Ж а в о б и. 60° .

12. Қ ў р с а т м а. Перпендикуляр асосидан бурчак қиррасига перпендикуляр туширинг. Ж а в о б и. $\sqrt{6}$.

13. Е ч и л и ш и. AC_1 призма берилган бўлсин; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ см; $A_2B_2C_2$ — призманинг перпендикуляр кесими, шу билан бирга $A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = 9 : 10 : 17$ ва $S_{A_2B_2C_2} = 144$ см² (8.36- расм).



8.36- расм.



8.37- расм.

Равшанки, $S_{\text{ен}} = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2) \cdot AA_1$. Қуйидагича белгилаймиз: $A_2B_2 = 9x$, $B_2C_2 = 10x$ ва $C_2A_2 = 17x$. У ҳолда Герон формуласига кўра перпендикуляр кесим юзи

$$\sqrt{18x \cdot x \cdot 8x \cdot 9x} = 36x^2,$$

масала шартига кўра эса у 144 см^2 га тенг, демак, $x = 2 \text{ см}$.

Жавоби. $S_{\text{ен}} = 576 \text{ см}^2$.

14. Жавоби. $V = \sqrt[3]{Q_1Q_2Q_3}$ куб бирлик.

15. Ечилиши. AA_1 ва BD_1 — айқаш тўғри чизиқлар (8.37-расм). Улар орасидаги масофа бу тўғри чизиқларнинг биридан унга параллел ва тўғри айқаш чизиқлардан иккинчиси орқали ўтадиган текисликка бўлган масофага тенг (8.3.3- пунктга қаранг). Қаралаётган ҳолда бу масофа AA_1 қирранинг исталган нуқтасидан иккита $DD_1 \parallel AA_1$ ва $BB_1 \parallel AA_1$ тўғри чизиқлар орқали ўтказилиб, айқаш тўғри чизиқларнинг иккинчисини ўз ичига оладиган текисликкача бўлган масофага тенг. Демак, AO кесма — AA_1 қирранинг A нуқтасидан BB_1D_1D текисликка туширилган перпендикулярни изланаётган масофа сифатида қараш мумкин. Равшанки, $AO = a\sqrt{2}/2$. Жавоби. $a\sqrt{2}/2$.

16. Жавоби. $a\sqrt{3}/3$.

17. Қўрсатма. Кубнинг диагонал кесими деб унинг иккита кесилмайдиган диагонали орқали ўтадиган исталган кесимига айтилади. Масалан, 8.37- расмда BB_1D_1D — диагонал кесим.

$$\text{Жавоби. } \sqrt{\frac{SV^2}{2}}, \sqrt{SV^2}, \sqrt{\frac{3SV^2}{2}}, \\ 3SV^2, \frac{1}{2}\sqrt{S^3V^2}.$$

18. Қўрсатма. 8.38- расмга қаранг.

19. Жавоби. $a^2\sqrt{3/2}$.

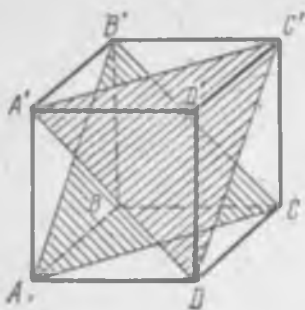
$$20. \text{Жавоби. } \sqrt{\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}.$$

21. Ечилиши. Кесимда бешбурчак ҳосил бўлиши учун кесувчи текислик бешта ёқни кесиб ўтиши лозим. Параллелепипедда 6 та ёқ бўлгани учун бешта ёқдан иккитаси албатта параллел. Кесувчи текислик бу икки ёқни параллел тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. Лекин (мунтазам) бешбурчакда параллел томонлар бўлмайдн. Демак, бундай ясашни бажариш мумкин эмас.

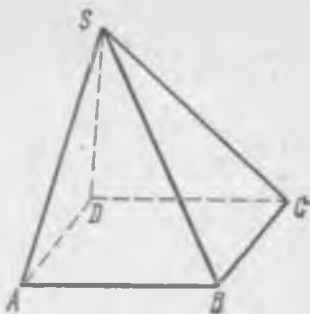
$$22. \text{Жавоби. } S = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}.$$

23. Ечилиши. Пирамиданинг ён сирти (8.39-расм) ён ёқлар ёнлари йиғиндисига тенг: $S_{\text{ен}} = S_{\text{ASD}} + S_{\text{DSC}} + S_{\text{CSB}} + S_{\text{BSA}}$. ADS ва CDS учбурчаклар тўғри бурчакли ва тенг.

$$S_{\text{ASD}} = S_{\text{CDS}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ см}^2.$$



8.38- расм.



8.39- расм.

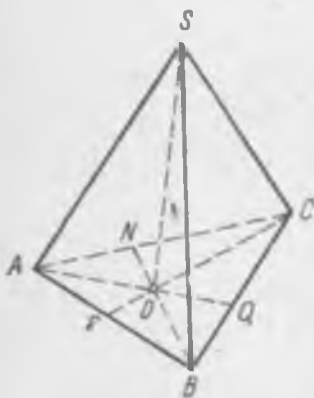
Бу учбурчаклардан Пифагор теоремаси бўйича $AS = SC = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ см ни топамиз. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан $SC \perp CB$ ва $SA \perp AB$ ($DC \perp CB$ ва $DA \perp AB$) бўлгани учун SAB ва SCB учбурчаклар тўғри бурчакли ва тенгдир: $S_{ASB} = S_{CSB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290 \text{ см}^2$. Жавоби. $S_{\text{ён}} = 1000 \text{ см}^2$.

24. Жавоби. $V = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot H_1$.

25. $H = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}V}{3}}$.

26. Кўрсатма. Асос сифатида ён ёқни олинг.

Жавоби. $V = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$



8.40- расм.

27. Ечилиши. O нуқта ABC учбурчак AQ , BN , CP баландликларининг кесилиш нуқтаси бўлсин; SO баландлик шартга кўра ABC текисликка перпендикуляр (8.40- расм). Ясалишига кўра $CP \perp AB$, CO эса CS қирранинг ABC текисликка проекцияси бўлгани учун уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8.3.4- пунктга қаранг) $CS \perp AB$. Бундан ташқари, $CS \perp BC$ (шартга кўра) бўлгани учун перпендикулярлик аломатидан фойдаланиб (8.3.1- пунктга қаранг) CS тўғри чизик ASB текислигига перпендикуляр деган хулосага келамиз, бундан эса $CS \perp AS$, яъни $\angle CSA = 90^\circ$ эканлиги келиб чиқади. Шунга ўхшаш, $\angle ASB = 90^\circ$. Шу сабабли

$$\frac{S_{ASB}}{S_{ASC}} = \frac{\frac{1}{2} AS \cdot SB}{\frac{1}{2} AS \cdot SC} = \frac{b}{c}. \text{ Жавоби. } b/c.$$

28. Қўрсатма. Асоснинг учидан ўтадиган баландлик ён ёқин унинг баландлигига тегишли нуқтада кесиб ўтишини исботланг

Жавоби. $V = \frac{a^3 b}{12 \sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$

29. Жавоби. $V = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{a}.$ 30. Жавоби. $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$

31. Мавжуд эмас. Мустақил исботланг.

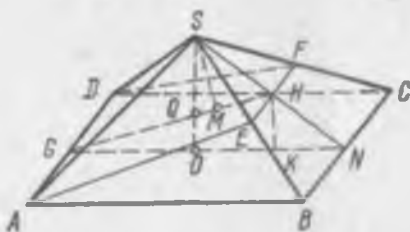
32. Ечилиши. Барча ён ёқлар шартга қўра тенг томонли учбурчаклар, демак, учдаги барча ясси бурчаклар 60° дан. Лекин кўпёқли бурчаклар ясси бурчаклари йиғиндиси 360° дан кичиклиги маълум. Шу сабабли $n < 5$, яъни $n = 3, 4, 5$.

33. Жавоби. $S_{\text{кес.}} = \frac{1}{4} a^2.$

34. Жавоби. $S_{\text{кес.}} = \frac{\sqrt{3}}{18} h^2.$

35. Жавоби. $S_{\text{кес.}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2.$

36. Жавоби. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{3(2m+n)}{n}} \right).$



8.41-расм.

37. Ечилиши. Кесим тўртбурчаги $AEFD$ тенг ёяли трапеция эканлиги равшан (8.41- расм) G ва H нуқталар унинг асосларининг ўрталари бўлсин. H нуқтадан пирамида асосига HK перпендикуляр

туширамыз. H нуқта SN нинг ўртаси бўлгани учун $HK = \frac{h}{2}, KN = \frac{a}{4}$

$GK = \frac{3a}{4}, QO$ ва QS кесмаларининг узунликларини аниқлаймиз. $\frac{QO}{HK} =$

$$= \frac{GO}{GK} \text{ бўлгани учун } QO = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{3a} = \frac{h}{3}, \text{ бундан } QS = \frac{2}{3} h,$$

$$GO = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2}. S \text{ нуқтадан } SM \text{ га } GH \text{ перпендикуляр ту-}$$

шираёмиз. У ҳолда SMQ ва GOQ учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{SM}{QS} = \frac{GO}{GQ}$$

га эгамиз, ва демак, изланаётган масофа

$$SM = QS \cdot \frac{GO}{GQ} = \frac{2ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}. \text{ Жавоби. } \frac{2ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

$$38. \text{ Жавоби. } S_{\text{кес}} = \frac{b}{a} \sqrt{q^2 + a^2}.$$

$$39. \text{ Жавоби. } S_{\text{н}} = 160 \text{ см}^2.$$

$$40. \text{ Жавоби. } V = 1900 \text{ см}^3.$$

$$41. \text{ Жавоби. } 656, 25 \text{ см}^3.$$

$$42. \text{ Жавоби. } \frac{1}{4} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

43. Ечилиши. $S_1 > S_2$ бўлсин. Тўла пирамида ҳажмини V_1 орқали, берилган кесик пирамиданинг тўлиқ пирамидага ўлдирувчи пирамида ҳажмини V_2 орқали белгилаймиз. Ўхшаш кўпёқлар ҳажмлари квадратлари нисбати ўхшаш ёқлари юзлари кублари нисбати каби эканлиги-

ни исботлаш қийин эмас. У ҳолда $\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{S_2^3}{S_1^3}$ ёки $\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$. Пропорцио-

наллик хоссасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}. V_1 - V_2 = V \text{ ни ҳисобга олиб, ушбунни ҳо-}$$

$$\text{сил қиламиз: } \frac{V}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}} \text{ ёки}$$

$$V_1 = \frac{VS_1^{3/2}}{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}. \text{ Жавоби. } V_1 = \frac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3} - \sqrt{S_2^3}}.$$

44. 43- масаланинг ечилишига қаранг.

$$\text{Жавоби. } S = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2}.$$

45. 8.6.3- пунктдаги масаланинг ечилишига қаранг. Жавоби.

$$\frac{60(6\sqrt{2-5})}{47}.$$

$$46. \text{ Жавоби. } S = \frac{3}{4} a^2, V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{32}.$$

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

9.1-§. Векторлар ва улар устида бажариладиган чизиқли операциялар

9.1.1. Асосий тушунчалар. AB — тўғри чизиқнинг бирор кесмаси бўлсин. Унинг чегаравий нуқталаридан бирини, масалан, A ни бошланиш нуқта, иккинчисини эса охириги нуқта деб, AB кесмани йўналган деб аталувчи $\overrightarrow{AB}$ кесмага айлантирамиз. Агар кесма «нуқтага айланмаса», яъни A ва B нуқталар устма-уст тушмаса, унда йўналган $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ кесмалар тўғри чизиқнинг битта кесмасида ясалганига қарамасдан турли ҳисобланади. Йўналган кесмани геометрик тасвирлашда одатда унинг охири стрелка билан белгиланади (9.1- расм). Одатда йўналган кесмалар *векторлар* деб ҳам аталади. Бу термин айрим тушунтиришларни талаб қилади, буларни келтирамиз.



9. 1- расм.

Ечилаётган масалаларни маъносига қараб, айрим ҳолларда параллел кўчириш ёрдамида (текисликда ёки фазода) бир-бири билан устма-уст тушадиган векторларни, иккинчи ҳолда битта тўғри чизиқда жойлашган ҳамда узунлиги ва йўналиши бўйича устма-уст тушадиган векторларни ўзаро тенг деб ҳисоблаш қулай, учинчи ҳолда, агар векторлардан бирининг чегаравий нуқталаридан ҳеч бўлмаганда биттаси иккинчи векторнинг унга мос чегаравий нуқтаси билан устма-уст тушмаса, бу векторлар турли векторлар дейилади. Бу ҳолларда мос равишда эркин-сирғанувчи ва боғланган (ёки мустаҳкамланган) векторлар ҳақида гапирилади. Бизнинг курсимизда фақат эркин векторлар кўрилгани учун «эркин» сўзини тушириб, келгусида «эркин вектор» маъносидаги «вектор» терминидан фойдаланамиз. Бу келишишга мувофиқ ушбу бобнинг асосий таърифини қуйидагича ифодалаймиз.

9.1- таъриф. *Йўналган кесма вектор дейилади. Бунда агар икки вектор параллел кўчириш йўли билан (йўналишлари ҳам устма-уст тушса) устма-уст тушса, бу векторлар ўзаро тенг ҳисобланади.*¹

Векторни вужудга келтирувчи кесма шу векторнинг узунлиги дейилади.

Векторларни $\overrightarrow{AB}$ кўринишдаги (бунда A йўналган кесманинг боши, B эса охири) белгилашдан ташқари кичкина қора ҳарф билан ҳам белгилаймиз, масалан, a , k ва ҳоказо.

Векторнинг узунлигини мос равишда $|\overrightarrow{AB}|$, $|a|$, $|k|$ билан белгилаймиз.

Адабиёт билан мустақил ишлашда баъзан векторларни устида стрелкаси бор кичик ҳарфлар билан белгиланишига, масалан, a , k ..., уларнинг узунликлари эса шу ҳарфларни оддий шрифтда стрелкасиз босилганига эътибор бериш керак.

Боши ва охири бир-бири билан устма-уст тушадиган векторни *ноль вектор* деймиз ва 0 символ билан белгилаймиз. Равшанки, ноль векторнинг узунлиги 0 га тенг.

Кейинги тушунчалар учун муҳим бўлган векторларнинг коллинеарлиги ва компланарлиги тушунчаларини киритамиз.

9.2- таъриф. *Агар a вектор l тўғри чизиққа тўла жойлашса ёки уни параллел кўчириш йўли билан шу тўғри чизиққа жойлаштириш мумкин бўлса, a вектор l тўғри чизиққа коллинеар дейилади. Битта тўғри чизиққа коллинеар бўлган векторлар бир-бирига коллинеар дейилади.*

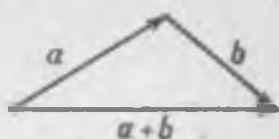
9.3- таъриф. *Агар a вектор P текисликка тўла жойлашса ёки уни параллел кўчириш йўли билан шу текисликка жойлаштириш мумкин бўлса, a вектор P текисликка компланар дейилади. Битта текисликка компланар бўлган векторлар бир-бирига компланар дейилади.*

9.1.2. Векторларни қўшиш ва айириш. Векторни сонга кўпайтириш.

9.4- таъриф. *Икки a ва b векторнинг йиғиндисини деб шундай $a + b$ векторга айтиладики, унинг боши a векторнинг боши билан, охири b векторнинг охири билан*

1) Таърифнинг моҳиятини бошқача ифодалаш ҳам мумкин, бунда вектор (эркин вектор) деб шундай йўналган кесмалар тўпламига айтиладигани, улардан исталган иккитаси параллел кўчириш натижасида бир-бири билан устма-уст тушади (йўналишлари ҳам устма-уст тушади).

устма-уст тушади, бунда аввал b векторни параллел кучириб, унинг бошини a векторнинг охири билан устма-уст тушириш керак (9.2-расм).



9.2-расм.

9.5-таъриф. Икки a ва b векторнинг айирмаси деб шундай $a - b$ векторга айтиладики, бу векторнинг b вектор билан йиғиндиси a векторни беради:

$$b + (a - b) = a. \quad (9.1)$$

9.6-таъриф. a векторга қўйилганда ноль векторни берадиган вектор a векторга қарама-қарши вектор дейилади ва $-a$ билан белгиланади:

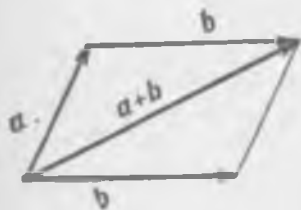
$$a + (-a) = 0. \quad (9.2)$$

Айтиш мумкинки, (9.1) ва (9.2) формулалар мос равишда векторлар айирмаси ва қарама-қарши вектор тушунчаларининг таърифи бўлиб хизмат қилади.

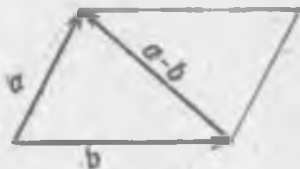
Равшанки, a векторга қарама-қарши $-a$ вектор a векторнинг йўналишини ўзгартириш билан ҳосил қилиниши мумкин, яъни $-a$ нинг бошланиш нуқтаси учун a нинг охири, $-a$ нинг охири учун a нинг бошланиш нуқтасини олиш керак.

Иккита ноколлинеар векторнинг йиғиндисини дастлаб бу векторларни умумий бошланиш нуқтага келтириб, сўнг уларга ясалган параллелограммнинг диагонали сифатида яшаш мумкинлигини тушуниш қийин эмас (9.3-расм).

Бу параллелограммнинг b вектор охиридан a вектор охирига йўналган вектор сифатида қараладиган иккинчи



9.3-расм.



9.4-расм.

* Биз эркин векторларни қараётганимиз учун бунда ва бундан кейинги шунга ўхшаш ҳолларда «параллел кучиришгача аниқликда» бўлган ҳол кўзда тутилади.

диагонали a ва b векторларни айирмасини ифодалайди (9.4- расм).

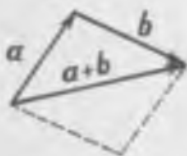
Векторларни қўшиш ва айириш ҳамда қарама-қарши векторга ўтиш амаллари қуйидаги хоссаларга эга бўлишини осон исбот қилиш мумкин:

1°. $a + b = b + a$ (коммутативлик).

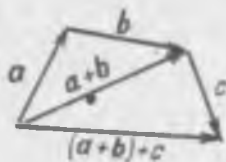
2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативлик).

3°. $a + (-b) = a - b$.

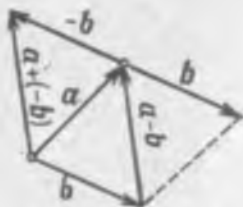
Биз бу ерда исботни келтириб ўтирмасдан, фақат хоссаларни кўргазмали тасвирловчи 9.5—9.7- расмлар билан чегараланамиз.



9.5- расм.



9.6- расм.



9.7- расм.

9.7- таъриф. λ ҳақиқий соннинг a векторга кўпайтмаси деб шундай λa векторга айтиладики, бу вектор:

1) a нинг узунлиги билан λ нинг абсолют қиймати кўпайтмасига тенг узунликка эга: $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;

2) агар $\lambda > 0$ бўлса, бу вектор a векторга коллинеар ва a билан бир хил йўналган, $\lambda < 0$ бўлса, a га коллинеар ва унга қарама-қарши йўналган.

Шунингдек, векторни ҳақиқий сонга кўпайтириш амали ва аввал киритилган векторларни қўшиш ва айириш, қарама-қарши векторга ўтиш амаллари учун айтиб ўтилган 1°—3°- хоссалардан ташқари қуйидаги хоссаларнинг ҳам ўринли эканлигини исботлаш мумкин:

4°. $\lambda_1(\lambda_2 a) = (\lambda_1 \lambda_2) a$.

5°. $(\lambda_1 + \lambda_2) a = \lambda_1 a + \lambda_2 a$.

6°. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

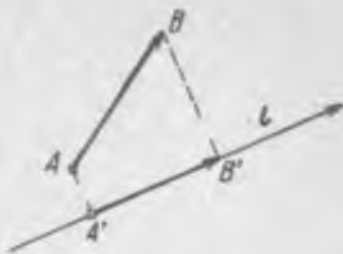
7°. $1 \cdot a = a$.

$$8^\circ. (-1) \cdot a = -a.$$

$$9^\circ. 0 \cdot a = 0.$$

Бу пунктнинг сўнгида векторларни қўшиш ва айириш ҳамда векторни сонга кўпайтириш амаллари чизиқли амаллар деб аталишини эслатиб ўтамин.

9.1.3. Векторнинг ўқдаги проекцияси. Векторни берилган йўналишлар бўйича ёйиш.



9.8- расм.

9.8- таъриф. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги¹⁾ проекцияси деб боши A нуктанинг l ўқдаги проекцияси A' , яъни A нуқтадан l ўққа туширилган перпендикулярнинг асоси бўлган, охири эса B нуктанинг B' проекцияси бўлган $\overrightarrow{A'B'}$ векторга айтилади (9.8- расм).

Бу проекциянинг катталиги деб унинг узунлигини айтамин. Бу узунлик агар $\overrightarrow{AB}$ нинг йўналиши l нинг йўналиши билан устма-уст тушса, мусбат ишора билан, акс ҳолда манфий ишора билан олинади. Проекция катталиги $\overrightarrow{AB}$, a , ва ҳоказо каби белгиланади. Хусусан, агар $\overrightarrow{AB}$ вектор l ўқда жойлашган (ёки унга коллинеар) бўлса, унинг бу ўқдаги проекцияси (параллел кўчириш аниқлигида) проекцияланаётган вектор билан устма-уст тушади. Бундай ҳолда бу проекциянинг катталигини $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги катталиги ҳам дейилади. Векторнинг ўқдаги катталигини AB билан белгиланади ($|\overrightarrow{AB}|$ узунлик билан таққосланг).

Узунлиги бир бирликка тенг, йўналиши l ўқ йўналиши билан устма-уст тушадиган l_0 вектор одатда *орт* ёки l ўқдаги *бирлик вектор* дейилади.

Агар $\overrightarrow{AB}$ вектор l ўққа коллинеар, l_0 эса бу ўқнинг орти бўлса, векторни сонга кўпайтмасининг таърифига кўра $\overrightarrow{AB}$ ни унинг шу ўқдаги катталигини l_0 ортга кўпайтмаси кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$\overrightarrow{AB} = AB \cdot l_0. \quad (9.3)$$

Кейинчалик биз учун икки вектор орасидаги бурчак, вектор ва ўқ орасидаги бурчак, икки ўқ орасидаги бур-

¹⁾ Маълум йўналишга эга бўлган тўғри чизиқ ўқ деб аталишини эслатиб ўтамин.

чак тушунчалари қулай бўлади. Бу тушунчаларнинг таърифларини берамиз.

9. 9- таъриф. a ва b векторларни умумий бошланиш нуқтага келтирилгандан сўнг a векторни b вектор билан устма-уст тушгунча айлантириш лозим бўлган икки бурчакнинг кичиги a ва b векторлар орасидаги бурчак дейилади (9.9- расм).



9.9- расм.

a вектор ва l ўқ орасидаги бурчак деб a вектор билан йўналиши l ўқ йўналишига устма-уст тушадиган ноль бўлмаган ихтиёрий l_1 вектор орасидаги

бурчакка айтилади. l' ва l'' ўқлар орасидаги бурчак шунга ўхшаш таърифланади.

Проекцияларнинг асосий хоссаларини таърифлаймиз:

1° Тенг векторларнинг битта ўққа проекциялари ўзаро тенгдир.

2° Векторлар йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси, қўшилишчи векторларнинг шу ўқдаги проекциялари йиғиндисига тенг.

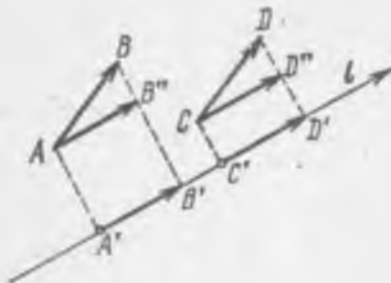
3°. Векторни сонга кўпайтмасининг проекцияси шу вектор проекциясини ўша сонга кўпайтмасига тенг.

4°. Векторнинг ўқдаги проекциясининг катталиги бу вектор узунлигини вектор ва ўқ орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг:

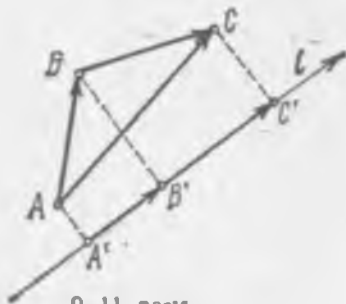
$$a_l = |a| \cos \varphi. \quad (9.4)$$

Бу хоссаларнинг исботи етарли даражада равшан (9.10—9.13- расмлар). Бу ерда биз 2°- хоссанинг исботи билангина чегараланамиз.

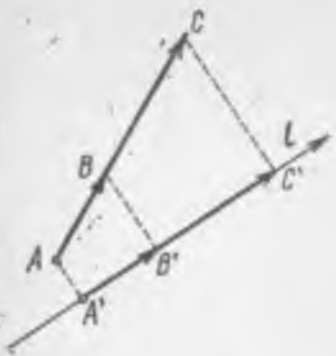
Қўшилишчи векторларни бирининг боши навбатдагисининг охири билан устма-уст тушадиган қилиб жойлаб, вектор синиқ чизиқ деб аталувчи чизиқни ҳосил қиламиз. Вектор-



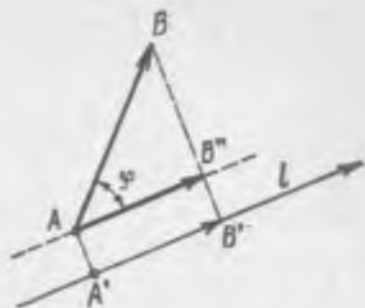
9. 10- расм.



9. 11- расм,



9. 12- расм.



9. 13- расм,

лар йиғиндисининг таърифидан улар йиғиндисини синиқ чизиқни туташтирувчи вектор кўринишида, яъни биринчи қўшилувчининг бошидан чиқиб иккинчисининг охирига боровчи вектор кўринишида тасвирлаш мумкинлиги келиб чиқади. Векторларнинг кўрсатилган жойлашишида уларнинг l ўқдаги проекциялари ҳам ҳар бир навбатдаги қўшилувчи проекциясининг боши ўзидан олдинги қўшилувчи проекциясининг охири билан устма-уст тушиш хоссасига эга. Шунинг учун векторлар йиғиндисининг таърифига кўра бу проекциялар йиғиндисини биринчи қўшилувчининг проекцияси бошидан охирига қўшилувчи проекциясининг охирига қараб боровчи вектор сифатида тасвирлаш мумкин. Бу вектор эса туташтирувчи вектор проекциясини тасвирлайди.

9.11- расм учун

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ўринли, иккинчи томондан

$$\vec{AB} + \vec{BC}_l = \vec{A'B'} + \vec{B'C'} = \vec{A'C'}.$$

бундан

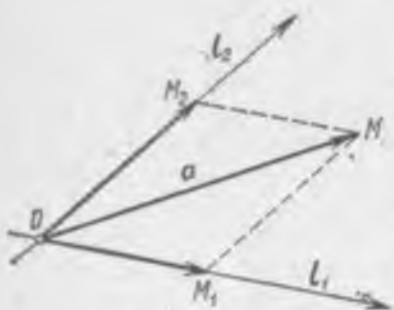
$$(\vec{AB} + \vec{BC})_l = \vec{AB}_l + \vec{BC}_l.$$

Бу пунктнинг охирида векторни берилган йўналишлар бўйича ёйиш масаласини кўриб ўтамыз. Аввал икки неколлинеар l_1 ва l_2 ўқ ҳамда a вектор битта текисликда жойлашган бўлсин ҳамда a векторни a_1 ва a_2 қўшилувчиларнинг йиғиндисини кўринишида тасвирлаш талаб қилинсин (бунда a_1 вектор l_1 ўққа, a_2 вектор l_2 ўққа коллинеар

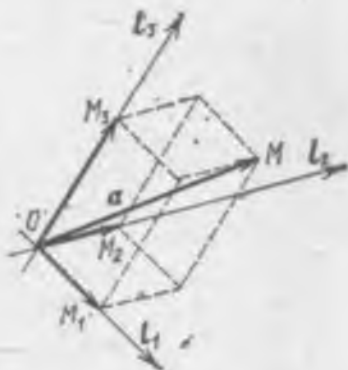
бўлсин). Параллел кўчириш орқали $\vec{a}$ векторнинг бошини l_1 ва l_2 ўқларнинг кесишиш нуқтаси O билан устма-уст туширамиз, унинг охири орқали эса бу ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (9. 14- расм). Бу тўғри чизиқларнинг l_1 ва l_2 билан кесишиш нуқталарини M_1 ва M_2 билан белгилаймиз. Равшанки,

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}. \quad (9.5)$$

Бундай ёйиш ($\vec{OM_1}$ ва $\vec{OM_2}$ векторларни параллел кўчириш аниқлигида) ягона бўлишини исбот қиламиз. Ҳақиқатан, $\vec{a_1} \parallel l_1$ ва $\vec{a_2} \parallel l_2$ бўлсин.



9. 14- расм.



9. 15- расм.

Бу векторларнинг ҳар бирини бошини O нуқтага жойлаб, уларнинг йиғиндиси $\vec{a}$ векторга тенг бўлиши учун $\vec{a_1} = \vec{OM_1}$ ва $\vec{a_2} = \vec{OM_2}$ бўлиши зарур ва етарлилигини кўрамиз.

Энди l_1 , l_2 ва l_3 — учта нокомпланар ўқ, $\vec{a}$ эса ихтиёрый вектор бўлсин. Параллел кўчириш ёрдамида барча ўқлар бирор O нуқтадан ўтишига эришамиз ва шу нуқтага $\vec{a}$ векторни бошини жойлаймиз (9.15- расм). Унинг охиридан P_1 , P_2 ва P_3 текисликларни шундай ўтказамизки, унда

$$P_1 \parallel l_2, \quad P_1 \parallel l_3,$$

$$P_2 \parallel l_1, \quad P_2 \parallel l_3,$$

$$P_3 \parallel l_1, \quad P_3 \parallel l_2$$

бўлсин.

P_1 ва I_1 , P_2 ва I_2 , P_3 ва I_3 ларнинг кесяшиш нуқталарини мос равишда M_1 , M_2 ва M_3 орқали белгилаймиз. Унда равшанки,

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}, \quad (9.6)$$

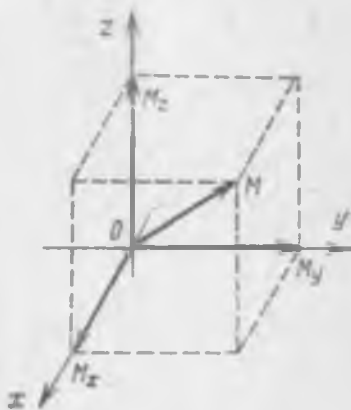
бу ерда ҳам юқоридаги каби бу ёйиш ($\vec{OM_1}$, $\vec{OM_2}$ ва $\vec{OM_3}$ векторларни параллел кўчириш аниқлигида) яғонадир.

9.2- §. Декарт координата системасидаги векторлар

9. 2. 1. Фазода Декарт координата системаси. Векторнинг координаталари ва уларнинг векторнинг боши ва охирининг координаталари орқали ифодаси. Текисликдаги Декарт координата системаси ўқувчиларга мактаб курсидан маълум, шунинг учун уни таърифлашга бу ерда тўхталиб ўтирмадан, бирданига фазодаги Декарт координата системасини қарашга ўтамиз.

Ox , Oy , Oz учта ўзаро перпендикуляр ўқлар бўлиб, улар бу ўқларнинг ҳаммаси учун умумий бўлган O нуқтадан ўтсин. Фазонинг ихтиёрий M нуқтасига M нуқтанинг

радиус-вектори деб аталувчи $\vec{OM}$ векторни боғлаймиз ва уни ўқларнинг ҳар бирига проекциялаймиз. OM_{Ox} , OM_{Oy} , OM_{Oz} проекциялар катталикларини (9.16- расм) x , y , z орқали белгилаймиз. Бу x , y , z сонлар M нуқтанинг танланган ўқлар системасига нисбатан координаталари, системанинг ўзи эса Декарт координата системаси дейилади; x сон M нуқтанинг абсциссаси, y сон ординатаси, z сон аппликатаси дейилади. Бундай координата системаси киритилган фазо одатда $Oxyz$ Декарт координата фазоси дейилади. 9.1.3- пунктда исбот қилинган векторни учта нокомпланар йўналиш бўйича ёйишнинг яғоналигидан ҳар бир M нуқтага унинг координаталарини ифодаловчи, тартибланган учта сон мос келиши келиб чиқади (келиш тартиби: абсцисса, ордината, аппликата). Равшанки,



9. 16- расм.

ҳар хил M' ва M'' нуқталарга улар координаталарининг турли (ҳеч бўлмаганда битта координатаси билан фарқ қиладиган) учлиги мос келади.

Ҳақиқатан, барча

$$x' = x'', y' = y'', z' = z''$$

тенгликларнинг бажарилиши

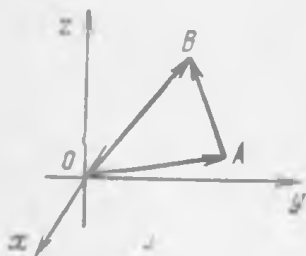
$$\overrightarrow{OM'}_{Ox} = \overrightarrow{OM''}_{Ox}, \overrightarrow{OM'}_{Oy} = \overrightarrow{OM''}_{Oy} \text{ ва } \overrightarrow{OM'}_{Oz} = \overrightarrow{OM''}_{Oz}$$

эканлигини билдиради. Унда $\overrightarrow{OM'}$ ва $\overrightarrow{OM''}$ векторлар ҳам ўзаро тенг бўлади, бу эса M' ва M'' нуқталар ҳар хил деган фаразга зид.

Иккинчи томондан, равшанки, берилган сонлар учлиги $(x; y; z)$ бўйича шундай M нуқтани ясай олишимиз мумкинки, бу сонлар мос равишда M нуқтанинг абсциссаси, ординатаси ва аппликатаси бўлади.

Шундай қилиб, Декарт координата системаси киритилган фазонинг барча нуқталари тўплами билан ҳақиқий сонларнинг мумкин бўлган барча тартибланган учликларни тўплами орасида бир қийматли мослик ўрнатилади. Бу ҳол, «икки ўлчовли» ҳол каби у ёки бу геометрик объектларни ва уларнинг хоссаларини бу сонларнинг тартибланган учликларни тили билан гапиришга имкон беради.

Энди $\overrightarrow{AB}$ вектор $Oxyz$ Декарт координата фазосининг ихтиёрий вектори бўлсин. Бу векторнинг Ox , Oy , Oz ўқлардаги проекциялари катталиклари AB_{Ox} , AB_{Oy} ва AB_{Oz} ни унинг координаталари деймиз. Нуқтанинг координаталари ҳақнда сўз юритилгани каби мулоҳаза қилиб, фазода координата системаси киритиш билан фазодаги барча векторлар тўплами билан сонларнинг тартибланган учликларни тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади деган хулосага келамиз (албатта, бунда ҳам аввал қабул қилинган шартга кўра, яъни параллел кўчириш воситасида устма-уст тушириш мумкин бўлган векторларни бир-бирига айлантираётимиз).



9.17- расм.

Шу билан биз векторлар ва улар орасидаги у ёки бу муносабатлар тўғрисида сонларнинг тартибланган учликларни тили билан гапириш имконига

эга бўламиз. A нуқтанинг координаталарини x_A, y_A, z_A орқали, B нуқтанинг координаталарини x_B, y_B, z_B орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{AB}$ ни B ва A нуқталарнинг радиус-векторлари орасидаги айирма кўринишида ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$) ифода лаш мумкин бўлгани учун (9.17-расм) проекцияларнинг хоссаларига кўра қуйидаги келиб чиқади:

$$\begin{aligned} AB_{Ox} &= OB_{Ox} - OA_{Ox} = x_B - x_A, \\ AB_{Oy} &= OB_{Oy} - OA_{Oy} = y_B - y_A, \\ AB_{Oz} &= OB_{Oz} - OA_{Oz} = z_B - z_A, \end{aligned} \quad (9.7)$$

яъни векторнинг координаталари унинг боши ва охирининг тегишли координаталари айирмасига тенг.

9.2.2. Координата формадаги ёзувда векторлар устида бажариладиган чизиқли амаллар. Координата ўқларининг орталарини, яъни йўналишлари ўз ўқларининг йўналиши билан устма-уст тушадиган ва мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида жойлашган бирлик узунликдаги векторларни i, j ва k орқали белгилаймиз.

$\overrightarrow{AB}$ — ихтиёрий вектор, $\overrightarrow{A_x B_x}, \overrightarrow{A_y B_y}$ ва $\overrightarrow{A_z B_z}$ лар бу векторнинг координата ўқларидаги проекциялари бўлсин. Уларнинг катталикларини x, y ва z орқали белгилаймиз.

(9. 3) формулага кўра $\overrightarrow{A_x B_x} = xi, \overrightarrow{A_y B_y} = yj, \overrightarrow{A_z B_z} = zk$ ни, унда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_x B_x} + \overrightarrow{A_y B_y} + \overrightarrow{A_z B_z}$ формулага кўра

$$\overrightarrow{AB} = xi + yj + zk \quad (9.8)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда x, y ва z лар $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари.

(9.8) формула $\overrightarrow{AB}$ векторни координата ўқлари бўйича ёйиш формуласи дейилади. Кўрамизки, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари бу ёйилманинг коэффициентлари бўлиб хизмат қилади.

Таъкидлаб ўтганимиздек, фазода маълум Декарт координата системасини танлангандан сўнг вектор ва унинг координаталари учлиги ўзаро бир-бирини аниқлайди. Бу билан (9.8) ёйилмани қатор ҳолларда

$$\overrightarrow{AB} = (x; y; z) \quad (9.9)$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги оқланади. (9.9) формуланинг ўнг томони $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координат формада ёзилиши дейилади. Агар x_A, y_A ва z_A лар A нуқтанинг координаталари, x_B, y_B ва z_B лар B нуқтанинг координаталари бўлса, у ҳолда (9.7) га мувофиқ, (9.9) ни

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \quad (9.9')$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

$a_1 = (x_1; y_1; z_1)$ ва $a_2 = (x_2; y_2; z_2)$, векторлар λ бирор ҳақиқий сон бўлсин. $a_1 + a_2$ векторнинг ихтиёрий ўқдаги проекциясининг катталиги қўшилувчи векторлар проекциялари катталиклари йиғиндисига тенг бўлгани учун $a_1 + a_2$ векторнинг координаталари $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ ва $z_1 + z_2$ сонлар бўлади, бундан

$$a_1 + a_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2). \quad (9.10)$$

Шунга ўхшаш,

$$a_1 - a_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2) \quad (9.11)$$

ва

$$\lambda a_1 = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1). \quad (9.12)$$

(9.10) — (9.12) тенгликларни қўйидагича ёзиш мумкин:

$$(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \quad (9.10')$$

$$(x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2), \quad (9.11')$$

$$\lambda \cdot (x_1; y_1; z_1) = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1). \quad (9.12')$$

(9.10') — (9.12') формулалар координата формада ёзилган векторлар устида чизиқли амаллар бажариш қондасини ифодалайди.

9.2.3. Векторнинг узунлигини унинг координаталари ва унинг боши ҳамда охирининг координаталари орқали ифодалаш. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. $a = (x; y; z)$ бирор вектор бўлсин. a, xi, yj ва zk векторларни умумий учга келтириб, a вектор қолган учта векторга ясалган параллелепипеднинг диагонали эканлигини кўрамиз. Унда бундай диагонални қирраларнинг узунликлари орқали ифодалайдиган формулага кўра

$$|a|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (9.13)$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар $A(x_A, y_A, z_A)$ ва $B(x_B, y_B, z_B)$ нуқталар мос равишда a векторнинг боши ва охирини ифодаласа, (9.7) формулаларга кўра

$$x = x_B - x_A, y = y_B - y_A, z = z_B - z_A$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ифодани (9.13) га қўйиб, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлигини унинг боши ва охирининг координатлари орқали ифодалаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (9.14)$$

A ва B бир-бири билан устма-уст тушмайдиган нуқталар жуфти бўлсин. Бу нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз ва унда ихтиёрий йўналиш танлаймиз. Ҳосил бўлган ўқни l орқали белгилаймиз. C шу тўғри чизиқдаги B дан фарқли нуқта бўлсин. Агар λ сон $\overrightarrow{AC}$ вектор катталигининг $\overrightarrow{CB}$ вектор катталигига нисбати

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \quad (9.15)$$

ни ифодаласа, C нуқта йўналган $\overrightarrow{AB}$ кесмани λ нисбатда бўлади деймиз. C нуқта A ва B орасида ётганда ва фақат шундагина $\lambda > 0$ бўлишини, $A = C$ бўлса, $\lambda = 0$ бўлишини ва C нуқта AB кесмадан ташқарида ётганда ва фақат шундагина $\lambda < 0$ бўлишини тушуниш қийин эмас. λ нинг катталиги тўғри чизиқда иккита мумкин бўлган йўналишда қайси бири олиншига ҳам боғлиқ бўлмаслиги тушунарли.

(9.15) формуладан векторнинг сонга кўпайтмасининг таърифига мувофиқ,

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} \quad (9.16)$$

келиб чиқади. (9.16) тенгликни $(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = \lambda (x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C)$ координат формада ёзиб олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x_C - x_A &= \lambda(x_B - x_C), \\ y_C - y_A &= \lambda(y_B - y_C), \\ z_C - z_A &= \lambda(z_B - z_C), \end{aligned} \quad (9.17)$$

бундан, ўз навбатида

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda} \quad (9.18)$$

келиб чиқади. (9.18) формулалар маълум λ катталиқ ҳамда A ва B нуқталарнинг маълум координаталари бўйича бўлиниш нуқтасининг координаталарини топишга имкон беради. Агар C нуқта AB кесманнинг ўртаси бўлса, у ҳолда $\lambda = 1$ бўлиб, (9.18) формулалар

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (9.18')$$

кўринишни олади.

(9.17) муносабатларни λ га нисбатан ечиб,

$$\lambda = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \quad (9.19)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу формулалар битта тўғри чизикда ётган A , B ва C нуқталарнинг координата ўқларидан ҳеч бўлмаганда бирига нисбатан бир исмли координаталари маълум бўлганда λ нисбатни топишга имкон беради.

9.2.4. Декарт координата текислигида векторлар. *m* ўлчовли векторлар ҳақида тушунча. Аввалги пунктларда уч ўлчовли Декарт координата фазосида берилган векторларни кўриб ўтдик. У ерда кўрилган мулоҳазалар, натижалар ва формулалар Декарт координата текислигида жойлашган векторлар ҳақида сўз борадиган ҳолга ҳам худди юқоридагидек ўтказилади. Бу икки ўлчовли ҳол учун (9.7) — (9.17) формулаларга ўхшаш формулалар бу формулалардан фақат Oz координата ўқи ва k орт билан боғлиқ координаталар қатнашмаслиги билан фарқ қилади. Жумладан, (9.9') ва (9.14) формулаларга ўхшаш формулалар мос равишда

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \text{ ва } |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

кўринишни олади, (9.17) да эса формулалар сони учтадан иккитага камаяди.

Кўпинча, ҳар бири m та сондан иборат тартибланган системалар тўпламини қараш қулай. Бу тўпланда (9.10') — (9.12') формулаларга ўхшаш формулалар воситасида қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари киритилади. Бу ҳолларда ҳам гарчи $m > 3$ да биз бу системаларни ва улар

устида бажариладиган амалларни сонларнинг тартибланган учликларидаги каби интерпретация қила олмасак ҳам, бундай системалар *векторлар* дейилади. Барибир бу ҳолларда ҳам, вектор терминология фойдали бўлади. Хусусан, $m > 3$ да ҳам биз $a = (x_1; x_2; \dots, x_m)$ векторнинг «узузунлиги» ҳақида гапириб, бунда

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} \quad (9.20)$$

сонни узунлик деб биламиз. Векторлар учун «оддий» (геометрик) маънода кнритиладиган бошқа тушунчалар табиний равишда m ўлчовли векторларга ҳам ўтказилишини кейинги параграфда кўрамиз.

9.3-§. Векторлар устида лавбатдаги амаллар

9.3.1. Векторларни скаляр кўпайтириш. 9.10-таъриф. *a векторнинг b векторга скаляр кўпайтмаси деб*

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \varphi \quad (9.21)$$

сонга айтилади, бу ерда φ ҳарф a ва b орасидаги бурчак. Векторларнинг скаляр кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга:

$$1^\circ. a \cdot b = b \cdot a.$$

$$2^\circ. a \cdot a = |a|^2.$$

3°. a ва b векторлар ўзаро перпендикуляр ёки улардан бири 0 га тенг бўлганда ва фақат шундагина $a \cdot b = 0$ ¹⁾.

4°. $a \cdot b = |a| \cdot b_a$ бу ерда b_a ифода b векторнинг йўналиши a нинг йўналиши билан устма-уст тушадиган ўқдаги проекция катталигини билдиради.

$$5^\circ. (\lambda a) \cdot (b) = \lambda (a \cdot b)$$

$$6^\circ. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

1°, 2° ва 3°-хоссалар 9.10-таърифдан бевосита келиб чиқади, 4°-хосса эса ўша таърифдан ва (9.4) формуладан келиб чиқади. 5°-хоссани исботлаш учун учта ҳол: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ ни кўриб ўтамиз.

$\lambda = 0$ да исбот қилинаётган тенгликнинг чап ва ўнг томонлари нолга айланади.

¹ Ноль векторга биз учун қулай бўлган исталган йўналишнинг беришни шартлашиб олиб, охириги жумладан қўтилишимиз мумкин эди.

$\lambda > 0$ да $\lambda \mathbf{a}$ ва $\mathbf{a}$ векторларнинг йўналишлари устма-уст тушади, шунинг учун $\lambda \mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ ҳамда $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар мос равишда ташкил қилган φ_1 ва φ_2 бурчаклар ҳам тенг. Ундан ташқари, $\lambda > 0$ да $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda \cdot |\mathbf{a}|$ бўлгани учун

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi_1 = \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi_2 = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Агар $\lambda < 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda \mathbf{a}$ ва $\mathbf{a}$ векторлар бир-бирига қарама-қарши йўналган бўлади, шунинг учун φ_1 ва φ_2 бурчаклар бир-бирини π гача тўлдиради, бундан

$$\cos \varphi_1 = -\cos \varphi_2. \quad (9.22)$$

$\lambda < 0$ да, шунингдек,

$$|\lambda \mathbf{a}| = -\lambda \cdot |\mathbf{a}|. \quad (9.23)$$

бўлади. (9.22) ва (9.23) ни ҳисобга олган ҳолда

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi_1 = -\lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (-\cos \varphi_2) = \\ &= \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi_2 = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

ни ҳосил қиламиз.

6°- хоссани исбот қилиш учун проекциялар хоссасига кўра

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})_a = \mathbf{b}_a + \mathbf{c}_a$$

эканлигини эътиборга олиш, сўнгра 6° нинг чап ва ўнг томонини 4° формула бўйича алмаштириш кифоя. Исбот қилинган хоссалар

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m \text{ ва } \mu_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \mu_n \mathbf{b}_n$$

кўринишдаги скаляр кўпайтма амалини бажаришда оддий кўпхадларни кўпайтиришдаги каби қавсларни очиб, қўшилувчиларни группалашга имкон беради. Бу низоҳдан координата формада ёзилган векторларни скаляр кўпайтмаси формуласини келтириб чиқишда фойдаланамиз.

$$\mathbf{a} = (x_a; y_a; z_a) \text{ ва } \mathbf{b} = (x_b; y_b; z_b) \quad (9.24)$$

бўлсин. (9.24) ни

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k} \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз ва навбатдаги алмаштиришлардан сўнг, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (x_a i + y_a j + z_a k) \cdot (x_b i + y_b j + z_b k) = \\ &= x_a x_b (i \cdot i) + x_a y_b (i \cdot j) + x_a z_b (i \cdot k) + y_a x_b (j \cdot i) + \\ &\quad + y_a y_b (j \cdot j) + y_a z_b (j \cdot k) + z_a x_b (k \cdot i) + \\ &\quad + z_a y_b (k \cdot j) + z_a z_b (k \cdot k) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b, \end{aligned}$$

чунки 9.10-таърифга мувофиқ ихтиёрий координата ўқи ортининг ўзини ўзига скаляр кўпайтмаси 1 га тенг, турли координата ўқлари ортларининг скаляр кўпайтмаси 0 га тенг. Ҳосил қилинган натижани бундай ёзамиз:

$$(x_a; y_a; z_a) \cdot (x_b; y_b; z_b) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \quad (9.25)$$

(9.21) формуладан, яққол равишда

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \quad (9.26)$$

келиб чиқади. (9.26) да a ва b векторларнинг координаталарига ўтиб ҳамда (9.25) ва (9.13) ни ҳисобга олиб,

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \quad (9.27)$$

ни ҳосил қиламиз. Координата формада берилган икки вектор орасидаги бурчакни топишда кўпинча шу формула энг қулай ҳисобланади.

4^с- хоссадан b векторнинг a вектор йўналиши бўйича проекциясининг катталиги учун

$$b_a = \frac{a \cdot b}{|a|} \quad (9.28)$$

формула ҳосил қиламиз. Координаталарга ўтиб,

$$b_a = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}} \quad (9.29)$$

ни ҳосил қиламиз.

(9.27) формулани ихтиёрий $a(x; y; z)$ векторнинг координата ўқлари билан, ёки барибир, шу векторнинг бу ўқларнинг ортлари билан ташкил қилган бурчакларининг косинусларини ҳисоблашда қўлланиб ва

$$i = (1; 0; 0), j = (0; 1; 0), k = (0; 0; 1) \quad (9.30)$$

ни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (9.31)$$

бу ерда α , β ва γ орқали $\vec{a}$ векторнинг мос равишда Ox , Oy ва Oz ўқлар билан ҳосил қилган бурчаклар белгиланган. $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ одатда (берилган координата системасига нисбатан) $\vec{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

Кўрилатган векторларни текисликдаги координата системасига тегишли десак, бу ҳол «фазовий ҳол» дан шу билан фарқ қиладики, (9.24—31) формулаларнинг «икки ўлчовли аналог»ларида Oz ўқ билан боғлиқ ҳадлар тушиб қолади.

Скаляр кўпайтма тушунчаси m ўлчовли векторларга ҳам тарқатилади (9.2.4-пунктга қаранг). Чунончи (9.25) формулага ўхшаш қилиб,

$$\vec{a}' = (x_1'; x_2'; \dots; x_m') \text{ ва } \vec{a}'' = (x_1''; x_2''; \dots; x_m'') \quad (9.32)$$

m -ўлчовли векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула билан топилади:

$$(x_1'; \dots; x_m') \cdot (x_1''; \dots; x_m'') = x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + \dots + x_m' x_m''. \quad (9.33)$$

(9.32) векторлар орасидаги φ «бурчак»

$$\cos \varphi = \frac{x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + \dots + x_m' x_m''}{\sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2 + \dots + (x_m')^2} \cdot \sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + \dots + (x_m'')^2}}, \quad (9.34)$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

муносабат билан, $\vec{a}''$ векторнинг $\vec{a}'$ вектор «йўналишидаги проекцияси» эса

$$\vec{a}_a'' = (x_1' \gamma_1; x_2' \gamma_2; \dots; x_m' \gamma_m) \quad (9.35)$$

формула билан топилади. Бу ерда

$$\gamma_i = \frac{x_i''}{\sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + \dots + (x_m'')^2}}.$$

Албатта, $m > 3$ да «бурчак», «йўналиш», «проекция» терминларини икки ўлчовли ва уч ўлчовли геометрия учун одатланилган маънода талқин қилишга интилмаслик лозим.

9.3.2. Векторларни вектор кўпайтириш. Уч ўлчовли фазода жойлашган векторлар учун биз 9.3.1-пунктда кўриб ўтган скаляр кўпайтма деб аталадигин амалдан ташқари яна кўпайтма амали, лекин энди «вектор кўпайтма» деб аталадиган амални кўриб ўтилади. Озгина илгарилаб ва тегишли таърифни келтирмасдан туриб, шуни айтиб ўтамизки. «скаляр» сўзи кўпайтириш амалининг натижаси сон бўлишини билдирган бўлса, бу ерда «вектор» терминининг ишлатилишидан мақсад бу янги амалнинг натижаси вектор бўлиши кўзда тутилади.

Вектор кўпайтма таърифни киритишдан аввал, биз учта ўзаро нокомпланар вектор учлигининг фазода жойлашishi билан боғлиқ бўлган зарур бир тушунчани киритамиз. Шуни айтиб ўтамизки, кейинги пунктларда нима устида гап кетса ҳам, уларнинг ҳаммаси фақат уч ўлчовли фазога доир бўлади.

9.11-таъриф. *a , b ва c векторларнинг тартибланган учлигини умумий бошланиш нуқтага келтирилгандан сўнг векторлардан бирини иккинчиси билан устма-уст тўшгунча улар орасидаги энг кичик бурчак бўйича айланттириш учинчи векторнинг охиридан қаралганда соат стрелкасига қарши йўналишда кўринса, бу учлик ўнг учлик дейилади.*

Чап учлик таърифи ҳудди шундай берилади. Фарқ шундаки, айланиш соат стрелкаси йўналиши бўйича олинади.

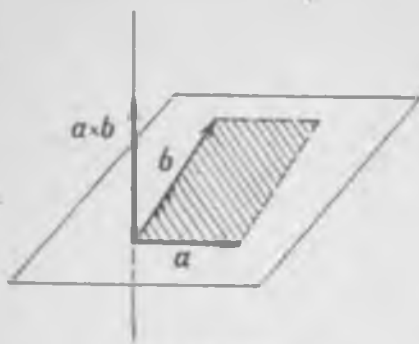
Агар Декарт координата системаси ўқларининг i , j , k (албатта шундай тартибда) ортлари учлиги ўнг бўлса, шундай Декарт координата системаси ўнг дейилади. Чап координата системасининг таърифи шунга ўхшаш берилади. Биз доим ўнг координата системасидан фойдаланамиз.

9.12-таъриф. *a векторнинг b векторга (шу кўрсатилган тартибда) вектор кўпайтмаси деб қуйидагилар ўринли бўладиган $a \times b$ векторга айтилади:*

I. $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$ — унинг узунлиги, бу ерда φ a ва b орасидаги бурчак.

II. $a \times b$ кўпайтириладиган векторларнинг ҳар бирига перпендикуляр.

III. $|a \times b| \neq 0$ бўлганда $a \times b$ нинг йўналиши шундайки, a , b ва $a \times b$ ўнг учлик бўлади.



9. 18- расм.

I—III шартлар ҳар доим $a \times b$ векторни бир қийматли аниқлайди. Ҳақиқатан, агар a ва b бир-бирига коллинеар бўлса (биз бу ерга улардан бири ёки иккаласи 0 га тенг бўлган ҳолни ҳам киритамиз), у ҳолда $|a \times b| = 0$, бундан $a \times b = 0$. Қолган барча ҳолларда $a \times b$ II шартга кўра a ва b векторлар текислигига перпендикуляр.

III шарт бу перпендикулярда мумкин икки йўналишдан бирини, I шарт эса $a \times b$ векторнинг узунлигини аниқлайди.

Вектор кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $a \times b = -b \times a$.

2°. $a \times a = 0$.

3°. a ва b векторлар бир-бирига коллинеар бўлганда ва фақат шундагина (улардан камиди биттаси 0 га тенг бўлган ҳол ҳам киради) $a \times b = 0$.

4°. $(\lambda a) \times b = \lambda \cdot (a \times b)$.

5°. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

I—4°-хоссалар 9.12-таърифдан бевосита келиб чиқади. 5°-хоссага келганимизда, биз бу ерда уни исботсиз қабул қиламиз.

I—5°-хоссалар $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$ ифодани $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$ ифодага вектор кўпайтиришда оддий кўпхадларни кўпайтиргандаги каби қавсларни очиш ва қўшилувчиларни группалашга имкон беришини эслатиб ўтамиз. Бунда ягона (лекин асосий!) фарқ шундаки, агар

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m) \times (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n)$$

кўпайтма тўғрисида гап кетаётган бўлса, ҳосил бўладиган кўпайтмаларда a_i векторлар биринчи, b_k векторлар иккинчи кўпайтувчи бўлиб келади.

Энди вектор кўпайтма координата формада қандай ёзилишини кўриб ўтамиз. Аввал 9.12-таърифдан координата ўқларининг i, j ва k ортлари учун қуйидаги «кўпайтириш жадвали» ўринли бўлиши бевосита келиб чиқишини айтиб ўтамиз.

1- кўпайтувчи \ 2- кўпайтувчи			
	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

Энди

$$a_1 = (x_1; y_1; z_1) \text{ ва } a_2 = (x_2; y_2; z_2) \quad (9.36)$$

булсин. (9.36) ни

$$a_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \quad (9.37)$$

$$a_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

кўринишда ёзиб оламиз ва $a_1 \times a_2$ учун ифодани қуйидагича язмаштирамиз:

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 &= (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \times (x_2 i + y_2 j + z_2 k) = \\ &= x_1 x_2 (i \times i) + x_1 y_2 (i \times j) + x_1 z_2 (i \times k) + y_1 x_2 (j \times i) + \\ &\quad + y_1 y_2 (j \times j) + y_1 z_2 (j \times k) + z_1 x_2 (k \times i) + \\ &\quad + z_1 y_2 (k \times j) + z_1 z_2 (k \times k) = 0 + x_1 y_2 \cdot k - x_1 z_2 \cdot j - \\ &\quad - y_1 x_2 k + 0 + y_1 z_2 i + z_1 x_2 j - z_1 y_2 i + 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Ноль қўшилиувчиларини ташлаб юбориб ҳамда i, j ва k ларга нисбатан группалаб,

$$a_1 \times a_2 = i(y_1 z_2 - z_1 y_2) - j(x_1 z_2 - z_1 x_2) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (9.39)$$

ни ҳосил қиламиз. (9.39) нинг ўнг томонидаги ифодани детерминант кўринишда ёзиш қулай:

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (9.40)$$

Ҳақиқатан, бу детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб, (9.39) формуланинг ўнг томонини ҳосил қиламиз.

Вектор кўпайтма узунлигини кўпайтувчи векторлар узунликлари ва улар орасидаги бурчак орқали ифодаловчи формуланинг ўнг томони сон жиҳатдан кўпайтириладиган векторларда ясалган параллелограммининг юзини ифодалайди.

Бу ҳол вектор ҳисоб аппарати ёрдамида қатор геометрик масалаларни ечишда фойдали бўлиши мумкин.

9.3.3. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси. 9.13-таъриф. ***a , b ва c векторларнинг (шу кўрсатилган тартибда) аралаш кўпайтмаси деб, $a \times b \cdot c$ векторнинг c векторга скаляр кўпайтмасига айтилади.***

Аввал **a , b ва c векторларни** нокомпланар деб ҳисоблаймиз. Q — умумий бошланиш нуқтага келтирилган **a , b ва c векторларда** ясалган параллелепипед бўлсин (9.11) га кўра

$$(a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos \theta, \quad (9.41)$$

бу ерда θ ҳарф **$a \times b$ ва c векторлар** орасидаги бурчак; $|a \times b|$ 9.3.2-пунктда кўрганимиздек, **a ва b да** ясалган параллелограммни тасвирлайди. Бу параллелограммни Q параллелепипеднинг асоси деб ҳисоблаймиз. Унда $|c| \cdot \cos \theta$ кўпайтма бу параллелограммнинг баландлигини ифодалайди, унинг ишораси **a , b , c векторлар** учлиги ўнг бўлса, мусбат, чап бўлса, манфий бўлади.

Кўряпмизки, **$(a \times b) \cdot c$ аралаш кўпайтма a , b ва c векторлар** чап ёки ўнг учлик ҳисил қилишига қараб, мусбат ёки манфий ишора билан олинган ҳажмни ифодаляпти.

Агар **a , b ва c компланар бўлса**, у ҳолда **a ва b векторларга** перпендикуляр бўлувчи **$(a \times b)$ вектор c векторга** ҳам перпендикуляр бўлади, у ҳолда эса **$(a \times b) \cdot c = 0$** . Ҳосил қилинган геометрик талқин аралаш кўпайтманинг кўйиндаги хоссаларига олиб келади.

1°. **$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b = - (b \times a) \cdot c = - (a \times c) \cdot b = - (c \times b) \cdot a$** . (Шундай қилиб, кўпайтирилаётган векторларни ихтиёрий циклик ўрин алмаштириш уларнинг аралаш кўпайтмаси катталигини сақлайди, уларнинг бошқа ихтиёрий ўрин алмаштирилиши эса бу кўпайтма ишорасини қарама-қаршисига алмашишига олиб келади).

2°. **a , b ва c векторлар компланар бўлганда** ва фақат шундагина **$(a \times b) \cdot c = 0$** . Бошқа сўз билан айтганда, векторлар аралаш кўпайтмасининг 0 га тенг бўлиши уларнинг компланар бўлишининг етарли ва зарур шартидир.

a , b ва c координата формада (бирорта *Охуз* Декарт координата системасига нисбатан) берилган бўлсин:

$$a = (x_1; y_1; z_1), \quad b = (x_2; y_2; z_2), \quad c = (x_3; y_3; z_3),$$

унда (9.39) формулага асосан

$$a \times b = i(y_1 z_2 - z_1 y_2) - j(x_1 z_2 - z_1 x_2) + k(x_1 y_2 - y_1 x_2),$$

энди (9.25) формулага асосан

$$(a \times b) \cdot c = x_1(y_1z_2 - z_1y_2) - y_3(x_1z_2 - z_1x_2) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Бу формуланинг ўнг томони қуйидагича детерминант кўринишда ёзилиши мумкин:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (9.42)$$

(Бунга ишонч ҳосил қилиш учун бу детерминантни учинчи сатр элементлари бўйича ёйиш етарли)

9.3.4. Терминология ва белгилашлар ҳақида изоҳлар. Адабиётдан мустақил фойдаланишда ўқувчи биз бу ерда қўлланган белгилашлардан бир оз фарқ қиладиган белгилашлар системасига дуч келиши мумкин. Бу туғрисида 9.1.1-пунктда бир оз сўз борган эди.

Скаляр кўпайтмани белгилашда баъзан кўпайтувчилар кичик қавсга олинади, вектор кўпайтмани белгилашда ўрта қавслардан фойдаланилади. Бундай белгилашда (a, b) ни a нинг b га скаляр кўпайтмаси, $[a, b]$ ни эса бу векторларнинг вектор кўпайтмаси деб тушуниш керак. $(a \times b) \cdot c$ аралаш кўпайтмани баъзан abc деб ҳам ёзилади. Векторларнинг ўқлардаги проекциялари ва бу проекцияларнинг катталикларини ёзиш усулларида ҳам ҳар хиллик мавжуд. Баъзан «проекция» терминини биз бу ерда ишлатган «проекция катталиги» маъносида тушунилади. Бундай турдаги терминларнинг маъноси ҳар доим контекстдан ойдинлашадди, чунки биринчи ҳолда вектор катталиклар ҳақида гапирилган бўлса, иккинчи ҳолда сонлар ҳақида гап кетади. «Перпендикулярлик» термини ўрнига баъзан «ортогоналлик» термини ишлатилади.

9-БОБГА ДОИР ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Йўналган кесма нима? Қайси ҳолларда биз эркин векторлар, сирғанувчи векторлар, боғланган векторлар ҳақида гапиримиз?

2. Коллинеарлик ва компланарлик тушунчаларини таърифлаб беринг.

3. Векторлар айирмаси ва йиғиндиси, қарача-қарши вектор тушунчалари таърифларини беринг. Тегишли амаллар қандай хоссаларга эга?

4. Векторнинг ҳақиқий сонга кўпайтмаси деб нимага айтилади? Тегишли амал қандай хоссаларга эга?

5. Векторнинг ўқдаги проекцияси деб нимага айтилади? Бу проекциянинг катталиги деб-чи? Проекциянинг асосий хоссаларини баён қилиб беринг.

6. Векторнинг берилган йўналишлар бўйича ёйиш масаласи нимадан иборат? У ҳар доим ечимга эгами? У нечта турли ечимга эга бўлиши мумкин?

7. Фазода Декарт координата системаси нимадан иборат? Нуқта-нинг координатаси, векторнинг координаталари нима? Векторнинг координаталари унинг боши ва охири-нинг координаталари орқали қандай ифодаланади?

8. Координата ўқларининг орқалари нима? $a = (x; y; z)$ кўринишдаги ёзувни қандай тушуниш лозим? Координата формадаги векторлар устида қизиқли амаллар қандай бажарилади?

9. С нуқта $\overrightarrow{AB}$ кесмани λ нисбатда бўлади дейилганда нимани тушуниш керак? Мисоллар келтиринг. Берилган кесмани берилган нисбатда бўладиган нуқтани қандай топиш мумкин?

10. Скаляр кўпайтма таърифини келтиринг ва унинг асосий хоссаларини санаб ўтинг. Мисоллар келтиринг.

11. Координата формада берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ҳисобланади?

12. Икки вектор орасидаги бурчак ва векторнинг ўқдаги (ёки бошқа вектор йўналишидаги) проекциясини топишнинг сизга маълум бўлган формулаларини келтиринг.

13. Векторларнинг ўнг ва чап учликлари таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.

14. Вектор кўпайтма нима? У қандай хоссаларга эга?

15. Координата формада берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси қандай ҳисобланади? Мисоллар келтиринг.

16. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси таърифини беринг. У қандай хоссаларга эга? Унинг геометрик маъноси нимадан иборат? Координата формада берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ҳисобланади?

9-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Мунтазам $ABCDEF$ олтибурчакда $\overrightarrow{AB} = a$ ва $\overrightarrow{BC} = b$; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AE}$ векторларни a ва b орқали ифодаланг.

2. ABC учбурчак a ва b векторларда шундай ясалганки, унинг CB томони a билан, CA томони b билан устма-уст тушади. $\overrightarrow{AB}$ векторни ва учбурчакнинг медианалари билан устма-уст тушадиган $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ва $\overrightarrow{CF}$ векторларни a ва b орқали ифодаланг.

3. Мунтазам тўртбурчакли $SABCD$ пирамидада (S — уч) $\overrightarrow{AB} = m$, $\overrightarrow{AD} = n$, $\overrightarrow{AS} = p$. Пирамиданинг қолган қирралари билан устма-уст тушадиган векторларни m , n ва p орқали ифодаланг.

4. Учбурчакли $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призмада қуйидагилар берилган: $\overrightarrow{AA_1} = m$, $\overrightarrow{AB_1} = n$ ва $\overrightarrow{AC_1} = p$. Бу призма қирралари билан устма-уст тушувчи векторларни m , n ва p орқали ифодаланг.

5. Учбурчакнинг учлари $A(1; 4; 2)$, $B(3; 2; 6)$ ва $C(-1; 0; 4)$ нуқталарда жойлашган. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{CA}$ векторларининг координаталарини, учбурчак томонларининг ўрталарини ва учбурчакнинг марказини топинг.

6. Ихтиёрий ABC учбурчак M марказининг координаталари учбурчак учларининг координаталари билан қуйидаги

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, z_M = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

формулар орқали боғланганлигини исбот қилинг.

7. $A(1; 1; 1)$ нукта параллелепипеднинг учи, $B(2; 3; 0)$, $D(0; 0; 4)$ ва $A_1(3; 5; 6)$ нукталар у билан қўшни учлар. Қолган учларнинг координаталарини топинг.

8. $ABCD$ параллелограммда $\vec{AC} = \mathbf{a}$, $\vec{BD} = \mathbf{b}$ — диагоналлар. $ABCD$ параллелограмм ромби тасвирлаши учун $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ қандай шартларни қаноатлантириши керак? У тўғри тўртбурчакни тасвирлаши учун чи?

9. Учбурчакнинг учлари $A(-1; 2; -1)$, $B(-3; 1; 1)$ ва $C(0; 4; -3)$ нукталарда жойлашган. Бу учбурчакнинг юзини ва унинг ички A бурчагини топинг.

10. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ва $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ векторлар Q параллелепипеднинг бир учидан чиққан қирралари билан устма-уст тушади. Q нинг ҳажмини, унинг $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ векторларга ясалган ёнининг юзини топинг.

11. Пирамиданинг учлари $A(2; 3; 3)$, $B(4; 1; 4)$, $C(-5; 7; -1)$ ва $D(5; -3; 5)$ нукталарда жойлашган. Унинг ҳажмини ва ABC ёқининг юзини топинг.

12. $A(1; 0; 1)$, $B(4; 4; 6)$, $C(2; 2; 3)$ ва $D(10; 14; 17)$ нукталар бир текисликда ётиш-ётмаслигини текширинг.

9-БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

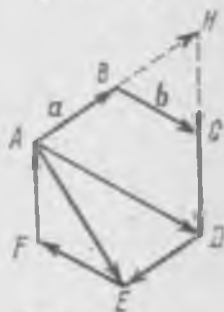
1. Қўшимча ясашларни бажариб (9.19-расм) топамиз: $\vec{CD} = \vec{HC} = \vec{BC} = \vec{BH} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Сўнгра $\vec{DE} = -\vec{AB} = -\mathbf{a}$, $\vec{EF} = -\vec{BC} = -\mathbf{b}$, $\vec{FA} = -\vec{CD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\vec{AD} = 2 \cdot \vec{BC} = 2\mathbf{b}$ (иккинчи усул: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2\mathbf{b}$), $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE} = -\vec{FA} - \vec{FE} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{b} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

$$2. \vec{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \left(-\frac{1}{2}\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b},$$

$$\vec{BE} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}, \vec{CF} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

$$3. \vec{BC} = \mathbf{n}, \vec{DC} = \mathbf{m}, \vec{SB} = \vec{AB} - \vec{AS} = \mathbf{m} - \mathbf{p}, \vec{SD} = \mathbf{n} - \mathbf{p}, \vec{SC} = \mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{p}.$$

$$4. \vec{AB} = \vec{A_1B_1} = \mathbf{n} - \mathbf{m}, \vec{AC} = \vec{A_1C_1} = \mathbf{p} - \mathbf{m}, \vec{BC} = \vec{B_1C_1} = \mathbf{p} - \mathbf{n}, \vec{BB_1} = \mathbf{m}, \vec{CC_1} = \vec{AA_1} = \mathbf{m}.$$



9.19-расм.

5. (9.9') формулаларга кўра: $\vec{AB} = (2; -2; 4)$, $\vec{BC} = (-4; -2; -2)$, $\vec{CA} = (2; 4; -2)$. BC , CA , AB томонларнинг ўрталарини (9.18') формулаларга кўра топамиз: $D(1; 1; 5)$, $E(0; 2; 3)$, $F(2; 3; 4)$. Учбурчакнинг маркази M (унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси) AD медианани $\lambda=2$ нисбатда бўлади. Шунинг учун $x_M = \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = 1$,

$$y_M = \frac{y_A + 2y_D}{1+2} = 2, \quad z_M = \frac{z_A + 2z_D}{1+2} = 4.$$

7. $C_1(1; 2; 3)$, $B_1(4; 7; 5)$, $C_1(3; 6; 8)$, $D_1(2; 4; 9)$.

8. Ромб учун $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; тўғри тўртбурчак учун $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

9. (9.9') га кўра $\vec{AB} = (-2; -1; 2)$, $\vec{AC} = (1; 2; -2)$, $\vec{BC} = (3; 3; -4)$. $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$ векторлар орасидаги φ бурчакнинг косинусини топамиз:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = -\frac{8}{9}$$

$|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 = 18 < |\vec{BC}|^2 = 34$ бўлгани учун ABC учбурчакдаги A бурчак ўтмас. Демак, φ — изланаётган ички бурчак: $\varphi = \arccos \left(-\frac{8}{9}\right) = \pi - \arccos(8/9) = 2,668$. $\vec{AB} \times \vec{AC}$ вектор кўпайтмани топамиз:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Унинг $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}$ узунлиги $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$ ларга ясалган параллелограммнинг юзини ифодалайди. Демак, ABC учбурчакнинг юзи $\sqrt{17}/2$ га тенг экан.

10. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -32$. Ҳажм 32 га тенг. $\vec{b} \times \vec{c} = (-8; -8; -12) = -4(2; 2; 3)$, $|\vec{b} \times \vec{c}| = 4\sqrt{17}$, бундан $S = 4\sqrt{17}$.

11. Пирамида ҳажми 1 га тенг, ABC ёқнинг юзи $\sqrt{53}/2$ га тенг.

12. Қўрсатма. Учта векторнинг компланарлик шартини $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ва $\vec{AD}$ векторларга нисбатан қўлланинг.

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

10.1-§. Сонли аргументнинг тригонометрик функциялари ва уларнинг энг содда хоссалари

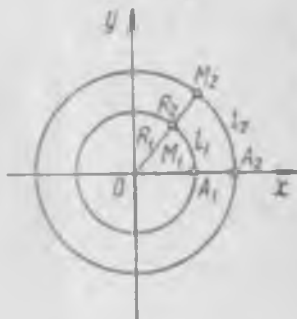
10.1.1. Ёйлар ва бурчакларнинг радиан ўлчови. Ёй ва бурчакнинг радиан ўлчови. Саккиз йиллик мактабнинг математика курсида ёй ва бурчакларнинг қуйидаги ўлчов бирликлари ўрганилган эди: d тўғри бурчак, градус, минут, секунд:

$$d = 90^\circ, 1^\circ = 60', 1' = 60'', 1^\circ = d/90, 1' = (1/60)^\circ, 1'' = (1/60)'$$

Қуйида биз ёй ва бурчакларнинг яна бир ўлчов бирлиги—радиандан фойдаланамиз.

Геометриядан маълумки, икки концентрик айлананинг ягона марказий бурчакка тиралган l_1 ва l_2 ёйларининг узунликлари ўзларининг R_1 ва R_2 радиусларига пропорционал (10.1-расм):

$$\frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2}$$

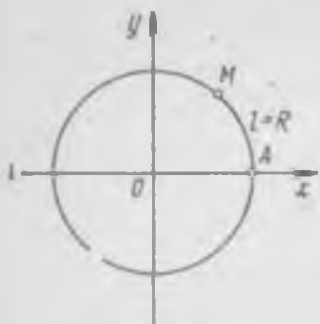


10.1-расм.

яъни битта марказий бурчакка тиралган айлана ёйининг радиусга нисбати радиус катталигига боғлиқ бўлмайди. Марказий бурчак ўзгариши билан бу нисбатнинг катталиги ҳам ўзгаради. Шунинг учун l/R нисбат ёйнинг ва унга мос марказий бурчакнинг ўлчови бўлиб хизмат қилади.

10.1- таъриф. Айлана ёйи l узунлигининг унинг R радиусига нисбати бу ёйнинг a радиан ўлчови дейилади:

$$a = \frac{l}{R}. \quad (10.1)$$



10.2- расм.

Ўйларни радиан билан ўлчашда узунлиги шў ўй радиусига тенг бўлган ўй ўлчов бирлиги қилиб қабул қилинади. Бу ўй радиан дейилади (10.2- расм).

10.2- таъриф. Бурчакларни радиан билан ўлчашда бир радиан ўйга тиралган марказий бурчак ўлчов бирлиги қилиб қабул қилинади. Бундай бурчак ҳам радиан дейилади.

Берилган ўйдаги (унга мос марказий бурчакдаги) радианлар сони бу ўйнинг (унга мос марказий бурчакнинг) радиан ўлчови бўлади.

(10.1) формуладан айлана 2π радианга тенг радиан ўлчовга эга эканлиги келиб чиқади:

$$a = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Ярим айланага π радиан мос келади.

Градус ўлчовдан радиан ўлчовга ўтиш формуласи. α градус ўйга a радиан ўй мос келсин, унда

$$\frac{180^\circ}{a} = \frac{\pi}{a}$$

пропорциядан градус ўлчовдан радиан ўлчовга ўтиш формуласини ҳосил қиламиз:

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha. \quad (10.2)$$

$\alpha = 1^\circ$ да (10.2) формуладан 1° ўйнинг радиан ўлчовини ҳосил қиламиз:

$$a = \frac{180^\circ}{\pi} 1^\circ \approx 0,0175 \text{ радиан.}$$

Ўй (бурчак) нинг радиан орқали ифодаланаётган катталигини исмсиз сон билан ёзиш қабул қилинган. Масалан, «0,8 радианга тенг ўй» деб ёзиш ўрнига «0,8 ўй» деб ёзилади. (10.2) формулани қўлланиб, тез-тез учраб турадиган баъзи ўйлар (бурчаклар) учун градус ва радиан ўлчовларининг боғланиш жадвалини тузамиз:

Градуслар	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радиянлар	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

10.1-мисол. 210° ёйнинг радиан ўлчовини топинг.

(10.2) формулага кўра $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7\pi}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

10.2-мисол. Жадвалдан 115°17' бурчакнинг радиан ўлчовини топинг. В. М. Брадиснинг XVI жадалидан қуйдагини топамиз:

90° — 1,5708

25°18' — 0,4416

— 1' — —3 (1' га тузатма айирилади).

2,0121

Радиян ўлчовдан градус ўлчовга ўтиш формуласи. (10.2) формулада α ни a орқали ифодалаб, радиан ўлчовдан градус ўлчовга ўтиш формуласини ҳосил қиламиз:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a. \quad (10.3)$$

$a = 1$ радианда (10.3) формула бўйича 1 радианнинг градус ўлчовини ҳосил қиламиз:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx 57^\circ 17' 44'', 8 \approx 57^\circ, 3.$$

10.3-мисол. $7\pi/4$ радианга тенг бурчакнинг градус ўлчовини топинг. (10.3) формула бўйича $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$ ни ҳосил қиламиз.

10.4-мисол. 0,8715 радианга тенг ёйнинг градус ўлчовини топинг.

В. М. Брадиснинг XVI жадалидан қуйдагини топамиз:

0,8709 — 49°54'

6 — 2' (0,0006 радиан тузатма).

49°56'

Айлана ёйнинг узунлиги. (10.1) формуладан айлана ёйнинг радианда ўлчаган узунлигини ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$l = a \cdot R. \quad (10.4)$$

Айлана ёйининг узунлиги ёйнинг радиан улчови билан бу ёй радиуси кўпайтмасига тенг

$R = 1$ да ёй узунлиги унинг радиан улчовига тенг. Бу ҳол ёй узунликларини ҳисоблашда радиан улчов анча қулай бўлишига ёрдам беради.

10.5-мисол. 0,35 м радиусли ғилдирак $72^\circ 36'$ айланди. Ғилдирак тўғинидаги нуқтанинг босиб ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. (10.4) формула бўйича қуйидагини топамиз:

$$l \approx 0,35 \cdot 1,27 \approx 0,443 \approx 0,44 \text{ (м)}.$$

$72^\circ 36'$ бурчакнинг радиан улчови В. М. Брадис жадвалидан тақрибан учта қийматли рақам (1,27) билан олинган. Ғилдирак радиуси иккита қийматдор рақам билан берилгани учун битта рақам қўшимча олинди.

Градус улчовда ўлчанган ёй узунлигининг формуласи уни ҳисоблаш учун унча қулай бўлмаган формага эга:

$$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \alpha = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}. \quad (10.5)$$

Доиравий секторнинг юзи. Агар марказий бурчак градус улчов билан ўлчанса, унда сектор юзини қуйидаги формула бўйича топамиз:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}. \quad (10.6)$$

Агар марказий бурчак радианда ўлчанган бўлса, α нинг (10.3) формуладаги қийматини (10.6) формулага қўйиб, сектор юзини ҳисоблашнинг қуйидаги содда формуласини ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha R^2. \quad (10.7)$$

10.6-мисол. Агар 0,76 м радиусли доира сектори ёйининг радиан улчови 1,12 радианга тенг бўлса, секторнинг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. Сектор юзини (10.7) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$S_{\text{сект}} = \frac{1,12}{2} \cdot 0,76^2 \approx 0,56 \cdot 0,578 \approx 0,324 \approx 0,32 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Айланма ҳаракатдаги чизиқли тезлик. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатида иккита тезлик: *чизиқли тезлик* ва *бурчак тезлики* бир-биридан фарқ қилинади.

Қаттиқ жисм ихтиёрий нуқтасининг айланма ҳаракатдаги тезлиги *чизиқли тезлик* дейилади.

Нуқтанинг R радиусли айлана бўйлаб текис ҳаракатида v чизиқли тезлик қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad (10.8)$$

бу ерда T — айланиш даври, нуқтанинг тўлиқ айланиб чиқиши учун кетган вақт (секунд ҳисобида).

v чизиқли тезликининг R ва n (1 секундда айланишлар сони) га боғлиқлиги қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$v = 2\pi Rn. \quad (10.9)$$

1 секундда айланишлар сонч n билан айланишлар даври қуйидаги муносабат билан боғланган:

$$T = \frac{1}{n}. \quad (10.10)$$

10.7-мисол. Радиуси 0,45 м бўлган ғилдирак текис айланганда 1 минутда 120 марта айланади. Ғилдирак тўғинидаги нуқтанинг чизиқли тезлигини топинг.

Ечилиши. Бир секундда айланишлар сонини топамиз:

$$n = \frac{120}{60} = 2.$$

Ғилдирак тўғинига жойлашган нуқтанинг чизиқли тезлигини (10.9) формула бўйича топамиз:

$$v = 2\pi \cdot 0,45 \cdot 2 = 1,8 \text{ м/сек}$$

10.8-мисол. Ғилдирак марказидан 0,61 м масофада жойлашган ва 5,8 м/сек чизиқли тезлик билан текис айланиш ҳаракат қилаётган нуқтанинг айланиш даврини топинг.

Ечилиши. (10.8) формуладан T ни топамиз ва T нинг топилган ифодасига R ва v нинг сон қийматларини қўямиз:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,61}{5,8} = 0,65 \text{ (сек)}.$$

Айланиш ҳаракатидаги бурчак тезлик. Текис ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм ихтиёрий нуқтаси радиусининг 1 секундда бурилиш бурчаги *бурчак тезлик* дейилади. Бурчак тезлик секундига радианларда ифодаланади.

ω бурчак тезлик ва T айланиш даври орасидаги боғланиш қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ рад}}{T \text{ сек}} \quad (10.11)$$

ω бурчак тезлик билан бир секундда айланишлар сони n орасидаги боғланиш қуйидаги формула орқали топилади:

$$\omega = 2\pi n. \quad (10.12)$$

Айланиш ўқидан R масофада жойлашган нуктанинг v чизиқли тезлиги ва унинг ω бурчак тезлиги қуйидаги муносабат билан боғланган:

$$v = \omega R. \quad (10.13)$$

Қаттиқ жисмнинг нотекис ҳаракатида φ бурчакнинг t вақт оралиғида ўзгариш тезлиги унинг ω бурчак тезлиги дейилади. Бу ҳолда бурчак тезлик бурилиш бурчаги φ дан t вақт бўйича олинган ҳосиладир:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \frac{\text{рад}}{\text{сек}} \quad (10.14)$$

ε бурчак тезланиш ω бурчак тезликдан t вақт бўйича олинган ҳосиладир:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2} \quad (10.15)$$

10.9-мисол. Текис ҳаракат билан минутига 540 марта айланмиш вақтнинг бурчак тезлигини ва айланиш даврини топинг.

Ечилиши. Бир секундда айланишлар сонини топиш ва топилган қийматни (10.12) формулага қўямиз:

$$n = \frac{540}{60} = 9 \text{ (бир секундда айланишлар сони),}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 9 = 18\pi \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Секундига айланишлар сонининг $n = 9$ қийматини (10.10) формулага қўйиб, вақтнинг айланиш даврини ҳосил қиламиз:

$$T = 1/9 \text{ (сек).}$$

10.10-мисол. 0,81 м радиусли ғилдирак текис айланмоқда. Агар ғилдирак айланасидаги нуктанинг чизиқли тезлиги 324 м/сек га тенг бўлса, унинг бурчак тезлигини топинг.

Ечилиши. (10.13) формуладан ω бурчак тезлигини топиб ва ҳосил қилинган формулага v ва R нинг сон қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{324}{0,81} = 400 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

10.11-мисол. 1,25 м радиусли ғилдирак секундига 12 радиан бурчак тезлик билан текис айланыпти. Ғилдирак тўғриси устидаги нуктанинг чизиқли тезлигини ҳисобланг.

Ечилиши. (10.13) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ (м/сек).}$$

10.12-мисол. Жисм ўқ атрофида $\varphi = 10t - t^2$ қонун бўйича айланыпти. Қуйидагиларни топинг: 1) айланишнинг $t = 4$ сек моментдаги

бурчак тезлигини; 2) $t = 4$ сек моментдаги бурчак тезланишини; 3) айланаш тугайдиган моментни.

Ечилиши. 1) (10.14) формула бўйича $t = 4$ сек моментдаги бурчак тезлигини топамиз:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 2t, \quad \omega_{t=4 \text{ сек}} = 10 - 2 \cdot 4 = 2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

2) (10.15) формула бўйича $t = 4$ сек моментдаги бурчак тезланишини топамиз:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

3) $\omega = 0$ ни қўйиб, t ни топамиз:

$$10 - 2t = 0, \quad t = 5 \text{ сек}.$$

Айланаш 5-секунд охирида тўхтайд.

10.1.2. Ёй (бурчак) тушунчасини умумлаштириш. Координата текислиги. Бирлик айлана. Тўғри бурчакли xOy координаталар системасида маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг бўлган доира ясаймиз. Бу доирани *бирлик доира*, унинг айланасини эса *бирлик айлана* деб атаймиз. Бирлик айлананинг тенгламаси $x^2 + y^2 = 1$.

$A(1; 0)$ нуктани—бирлик айлананинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини ёйларнинг саноқ боши, Ox мусбат ярим ўқни ҳаракатланувчи OM радиус-вектор¹ билан Ox ўқ ҳосил қилган марказий бурчакнинг бсш томони деб қабул қиләмиз. OM радиус-вектор мос равишда марказий $\angle AOM$ бурчакнинг охириги томони бўлади (10.3-расм).

Мусбат ҳамда манфий ёйлар ва бурчаклар. OM радиус-векторнинг Ox мусбат ярим ўқдан бошлаб соат стрелкаси айланишига карама-қарши йўналишида айланишини мусбат айланиш, OM радиус-векторнинг охири ҳосил қиладиган AM ёйни *мусбат ёй* ва унга мос $\angle AOM$ марказий бурчакни *мусбат бурчак* деймиз (10.3-расм). OM радиус-векторнинг Ox мусбат ярим ўқдан бошлаб соат стрелкаси бўйича айланишини *манфий айланиш* деб, OM



10.3-расм.

¹ M нуқтанинг радиуси деб, боши координата бошида, охири эса берилган M нуқта бўлган векторга айтилади.

радиус-векторнинг охири ҳосил қиладиган $\overline{ADM}$ ёйни ва унга мос $\angle ADM$ марказий бурчакни *манфий* бурчак деб атаймиз.

Агар ёйларни соат стрелка айланishiга қарши йўналишда ҳисобласак, у ҳолда $\overline{AB} = \pi/2$, $\overline{ABC} = \pi$, $\overline{ABD} = 3\pi/2$ ва $\overline{ABA} = 2\pi$. Агар ёйларни ҳисоблашни соат стрелкаси бўйича олиб борсак, у ҳолда $\overline{AD} = -\pi/2$, $\overline{ADC} = -\pi$, $\overline{ADB} = -3\pi/2$ ва $\overline{ADA} = -2\pi$. Нолга тенг ёй (ноль ёй) устма-уст тушадиган A ва M нуқталарга эга. Агар $\overline{OA}$ ва $\overline{OM}$ радиус векторлар устма-уст тушса марказий бурчак нолга тенг бўлади.

Биринчи чорак ёйлари $(0, \pi/2)$ оралиқда, иккинчи чорак ёйлари $(\pi/2, \pi)$ оралиқда, учинчи чорак ёйлари $(\pi, 3\pi/2)$ оралиқда ва тўртинчи чорак ёйлари $(3\pi/2, 2\pi)$ оралиқда жойлашган.

2π (360°) дан катта бурчаклар ва ёйлар. Кўп масалаларда битта тўлиқ айланишдан ортиқ айланишлар (пропеллер, маховик ва ҳ. к. ларнинг айланиши) билан шуғулланишга тўғри келади. Бундай масалалар юқоридаги пунктда қаралган эди. Шунинг учун ёй (бурчак) тушунчасини умумлаштириш зарур: тўлиқ айланишдан (2π дан катта) ортиқ ёй (бурчак) тушунчасини киритиш лозим.

M нуқта (OM радиус-векторнинг охири) — ёйнинг са-ноқ боши A нуқтадан бошлаб, мусбат йўналишда битта тўлиқ айланиб, сўнгра $\overline{AM} = \alpha_1$ ёйни чизди дейлик (10.3-расм). Унда M нуқта чизган умумий α ёй (OM радиус-вектор бурилган бурчак) $\alpha = 2\pi + \alpha_1$ бўлади, бунда $\alpha_1 \in (0, 2\pi)$ (градус ўлчовда $\alpha = 360^\circ + \alpha_1$, бунда α_1 ва α_2 градус ўлчовда деб қаралади).

Берилган A бош нуқтага ва берилган M охири нуқтага (берилган бош томон ва охири томонга) эга бўлган чексиз кўп ёйлар (бурчаклар) тўплами мавжуд. Бу ёйлар (бурчаклар) тўламини (мусбатларини ҳам, манфийларини ҳам) қуйидаги умумий формула билан ёзиш мумкин!

$$\alpha = 2\pi k + \alpha_1, \quad (\alpha = 360^\circ k + \alpha_1), \quad (10.16)$$

бу ерда $\alpha_1 \in (0, 2\pi)$ ва $k \in \mathbb{Z}$.

10.13-мисол. Бирлик айланада $\overline{AM} = 19\pi$ ёйнинг M нуқтасини кўрсатинг.

Ечилиши. (10.16) формула бўйича $19\pi = 2\pi \vartheta + \pi$ ни ҳосил қиламиз. $\overline{AM}$ ёйнинг охири $M (-1, 0)$ нуқтада бўлади.

10.14-мисол. (10.16) формулани қўлланиб, 2050° ёйни ёзинг.

Ечилиши. $2050^\circ : 360^\circ = 5 (250^\circ - \text{қолдиқ}), \text{демак, } 2050^\circ : 360^\circ = 5 + 250^\circ, (k = 5).$

10.15-мисол (10.16) формулани қўлланиб, -1490° бурчакни ёзинг.

Ечилиши. $-1490^\circ : 360^\circ = 4 (-50^\circ - \text{қолдиқ}), \text{демак,}$

$-1490^\circ = 360^\circ (-4) - 50^\circ$ ёки $-1490^\circ = 360^\circ (-5) + 310^\circ.$

10.16-мисол. Қуйидаги ҳолларда бирлик айлана ёйларининг охирларини умумий кўринишда ёзинг а) абсциссалари нолга тенг бўлган ҳол; б) ординаталари нолга тенг бўлган ҳол.

Ечилиши. а) $\pi/2$ ва $3\pi/2$ ёйларнинг охирлари нолга тенг абсциссаларга эга, демак, абсциссаси нолга тенг бўлган ёйларнинг охирлари тўплами $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ формула билан ёзилади. 0'ва π ёйларнинг

охирлари нолга тенг ординаталарга эга, демак, ординатаси нолга тенг бўлган ёйларнинг охирлари тўплами $\pi k, k \in \mathbb{Z}$ формула билан ёзилади.

10.17-мисол. Охирлари бирлик айлананинг $A (1; 0), B (0; 1), C (-1; 0)$ ва $D (0; -1)$ нуқталарида тугайдиган ёйларни умумий кўринишда ёзинг.

Ечилиши. $A (1; 0)$ нуқтада тугайдиган ёйлар $2\pi k (360^\circ \cdot k)$ умумий кўринишга эга. $k = 0$ да нолга тенг ёйга, $k = 1$ да 2π ёйга, $k = 2$ да 4π ёйга эгамиз ва ҳ. к. $B (0; 1)$ нуқтада тугайдиган ёйлар $\pi/2 + 2\pi k (90^\circ + 360^\circ \cdot k)$ формула билан ёзилади. $k = 0$ да $\pi/2$ ёйга, $k = 1$ да $5\pi/2$ ёйга, $k = -1$ да $-3\pi/2$ ёйга эгамиз. $C (-1; 0)$ нуқтада тугайдиган ёйлар $\pi + 2\pi k = \pi (2k + 1) (180^\circ (2k + 1))$ формула билан ёзилади. $k = 0$ да π ёйга, $k = 1$ да 3π ёйга, $k = -1$ да $-\pi$ ёйга эгамиз ва ҳ. к. $D (0; -1)$ нуқтада тугайдиган ёйлар $-\pi/2 + 2\pi k (-90^\circ + 360^\circ \cdot k)$ формула билан ёзилади. $k = 0$ да $-\pi/2$ ёйга, $k = 1$ да $3\pi/2$ ёйга эгамиз ва ҳ. к.

10.18-мисол. $\frac{\pi}{2} \cdot k$ кўринишдаги ёйлар бирлик айлананинг қайси нуқталарида тугайди?

Ечилиши. Бирлик айлананинг A, B, C ва D нуқталарида тугайдиган ёйлар бу формула билан ёзилади (10.3-расмга қаранг).

Бирлик сон айлана. Ҳар бир α ҳақиқий сонга бирлик айланада $\overline{AM}$ ёйнинг охири бўлган $M (\alpha)$ нуқта мос келсин, бунда $\overline{AM}$ ёй α катталиқка эга.

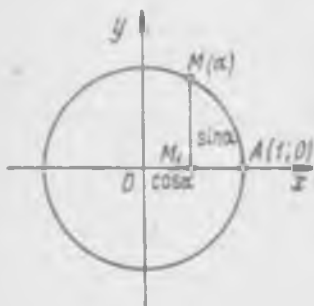
Бундай бирлик айланани бирлик сон айлана деб атаймиз. Бирлик сон айлана учун қуйидагилар берилган бўлиши керак: A саноқ боши, ҳаракатнинг мусбат йўналиши ва ёйларнинг ўлчов бирлиги—бу айлананинг радиуси.

Бирлик сон айлананинг узунлиги 2π га тенг. Шунинг учун агар иккита сон бир-биридан 2π га қаррали сонга

фарқ қилса, у ҳолда ударга бирлик сон айланада битта нуқта мос келади. Агар иккита сон бирлик сон айланада битта нуқтага мос келса, у ҳолда уларнинг айирмаси 2π га каррали бўлади.

Сон ўқи нуқталари билан бирлик сон айлана нуқталари орасида мослик ўрнатамиз. Ҳар бир α ҳақиқий сонга сон ўқида $P(\alpha)$ нуқта ва бирлик сон айланада $M(\alpha)$ нуқта мос келади, шу билан бирга сон ўқининг ҳар бир нуқтасига сон айланада битта ва фақат битта нуқта мос келади. Бу мосликни сон ўқини мусбат ёки манфий йўналиш бўйича бирлик сон айланага «ўраш» деб қараш мумкин, ўрашни уларнинг умумий нуқтаси 0 дан бошланади (сон ўқида 0 ва бирлик сон айланада $A(1;0)$ нуқта). Шу билан бир вақтда сон айлананинг ҳар бир нуқтасига сон ўқида бир эмас, балки сон ўқининг чексиз кўп нуқталари мос келади. Буни бирлик сон айланани сон ўқи бўйича (ўнгга ёки чапга) тебратиш орқали кузатиш мумкин. Тебратишни уларни устма-уст тушган нол нуқтасидан бошлаш керак.

10.1.3. Сонли аргументнинг тригонометрик функцияларини аниқлаш. Сонли аргументнинг тригонометрик функцияларини аниқлаш. Уларнинг аниқланиш соҳаси. Тригонометрик функцияларнинг чегараланганлиги ва чегараланмаганлиги. Ҳар бир α ҳақиқий сонга $x^2 + y^2 = 1$ бирлик сон айланада ягона $M(\alpha)$ нуқта мос келади ва бу айлананинг ҳар бир $M(\alpha)$ нуқтаси унинг абсцисса ва ординатаси орқали бир қийматли аниқланган, яъни абсцисса ва ордината α нинг функцияларидир: $x = f(\alpha)$ ва $y = \varphi(\alpha)$, шу билан бирга абсцисса ва ордината абсолют қиймат бўйича бирдан катта эмас ($|x| \leq 1$ ва $|y| \leq 1$).



10.4-расм.

10.3-таъриф. Бирлик сон айлана $M(\alpha)$ нуқтасининг x абсциссаси α соннинг косинуси дейилади (10.4-расм):

$$\cos \alpha = x. \quad (10.17)$$

10.4-таъриф. Бирлик сон айлана $M(\alpha)$ нуқтасининг y ординатаси α соннинг синуси дейилади (10.4-расм):

$$\sin \alpha = y. \quad (10.18)$$

$\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ функциялар исталган α ҳақиқий сон учун аниқланган, демак, уларнинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлади.

$\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ функциялар чегараланган, чунки уларнинг ҳар бири абсолют қиймати бўйича бирдан катта бўлмаган исталган сон қийматни қабул қилиши мумкин: $|\cos \alpha| \leq 1$ ва $|\sin \alpha| \leq 1$, яъни $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ функцияларнинг қийматлари тўплами $[-1, 1]$ оралиққа тегишли.

10.5-таъриф. α соннинг синусини унинг косинусига нисбати α соннинг тангенс дейилади:

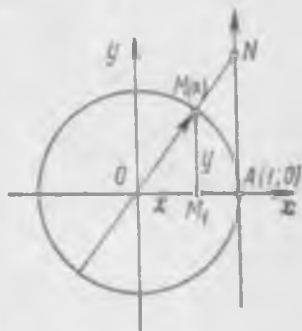
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (10.19)$$

Демак, $\operatorname{tg} \alpha$ бирлик сон айлана $M(\alpha)$ нуқтасининг ординатасини унинг абсциссасига нисбатига тенг экан.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ функция α нинг $\cos \alpha = 0$ бўладиган (x абсцисса нолга тенг) қийматлари учун аниқланмаган, яъни тангенс аргументнинг $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ қийматлари учун аниқланмаган. α аргументнинг $\cos \alpha = 0$ бўладиган қийматлари тўплами $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ формула орқали ёзилади. Демак, тангенснинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ кўринишдаги сонлардан ташқари барча ҳақиқий сонлардир. $\operatorname{tg} \alpha$ функциянинг ўзгариш соҳаси—барча ҳақиқий сонлар тўпламидир, яъни тангенс чегараланмаган.

Бирлик сон айлананинг $A(1; 0)$ нуқтасида уринма ўтказамиз ва унда мусбат йўналишнинг Oy ўқдаги мусбат йўналиш билан бир хил қилиб танлаймиз. Тангенслар ўқи деб аталадиган бу ўқнинг саноқ боши қилиб $A(1; 0)$ нуқтани оламиз (10.5-расм).

$M(\alpha)$ нуқта бирлик сон айлананинг ихтиёрый нуқтаси бўлсин $((0; 1)$ ва $(0; -1)$ нуқталар, яъни Oy ўқида ётувчи нуқталардан ташқари). OM радиусни тангенслар ўқи билан кесишгунча давом эттириб, бу ўқда N нуқтани ҳосил қиламиз (агар $M(\alpha)$ нуқта ординаталар ўқида ётган бўлса, бу ясашни бажариш мумкин эмас). Агар $M(\alpha)$ нуқта биринчи ёки учинчи чоракда ётган



10.5-расм.

бўлса, N нуқта тангенслар ўқида A нуқтадан юқорида ётади, агарда $M(\alpha)$ нуқта иккинчи ёки тўртинчи чоракда ётса, N нуқта A нуқтадан пастда ётади.

OMM_1 ва $ON A$ учбурчак томонларининг пропорционал-лигидан қуйидагига эгамиз (10.5-расм):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{AN}{OA} = \frac{AN}{1} = AN, \operatorname{tg} \alpha = AN.$$

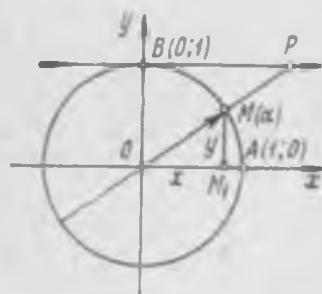
α соннинг тангенси N нуқтанинг ординатасига (давом эттирилган $\overline{OM}$ радиусни тангенслар ўқи билан кесишган нуқтасининг ординатасига) тенг. Шундай қилиб сон бир-лик айлананинг ҳар бир $M(\alpha)$ нуқтасига $((0; 1)$ ва $(0; -1)$ нуқталарни ҳисобга олмаганда) тангенслар ўқида нуқта тўғри келар экан.

10.6-таъриф. α соннинг косинусини унинг синусига нисбати α соннинг котангенси дейилади:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (10.20)$$

Демак, $\operatorname{ctg} \alpha$ сон бирлик айлананинг $M(\alpha)$ нуқтаси абсциссасини унинг ординатасига нисбати экан.

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ функция аргументнинг $\sin \alpha = 0$ бўладиган қийматлари учун аниқланмаган, яъни котангенс аргумент-нинг $0, \pi, 2\pi, \dots$ қийматлари учун аниқланмаган. α аргу-ментнинг $\sin \alpha = 0$ бўладиган қийматлари тўплами $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ формула орқали ёзилади. Демак, котангенснинг аниқ-ланиш соҳаси πk кўринишдаги сонлардан ташқари барча ҳақиқий сонлар экан. $\operatorname{ctg} \alpha$ функциянинг ўзгариш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни котангенс чегаралан-маган.



10. 6- расм.

Сон бирлик айлананинг $B(0; 1)$ нуқтасида уринма ўтказиб унда мусбат йўналишни Ox ўқдаги мус-бат йўналиш билан бир хил қилиб танлаймиз. Котангенслар ўқи деб аталадиган бу ўқнинг санок боши қилиб $B(0; 1)$ нуқтани оламиз (10.6-расм).

$M(\alpha)$ нуқта сон бирлик айла-нанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин $((1; 0)$ ва $(-1; 0)$ нуқталар, яъни Ox

ўқда ётувчи нуқталар бунга кирмайди). $\overline{OM}$ радиусни котангенслар ўқи билан кесишгунча давом эттириб, бу ўқда P нуқтани ҳосил қиламиз (агар $M(\alpha)$ нуқта абсциссалар ўқида ётган бўлса, бу ясашни бажариш мумкин эмас). Агар $M(\alpha)$ нуқта биринчи ёки учинчи чоракда ётса, P нуқта B нуқтадан ўнгроқда, агар иккинчи ёки тўрттинчи чоракда ётса, B нуқтадан чапроқда ётади.

$ОММ_1$ ва $ОВР$ учбурчак томонларининг пропорционал-лигидан қуйидагига эгамиз (10.6-расм):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{BP}{OB} = \frac{BP}{1} = BP, \operatorname{ctg} \alpha = BP.$$

α соннинг котангенси P нуқтанинг абсциссасига ($\overline{OM}$ радиусни котангенслар ўқи билан кесишган нуқтасининг абсциссасига) тенг. Шундай қилиб, сон бирлик айлананинг ҳар бир $M(\alpha)$ нуқтасига $((1; 0)$ ва $(-1; 0)$ нуқталарин ҳисобга олмаганда) котангенслар ўқида P нуқта тўғри келар экан.

Биз кўриб ўтган тўртта тригонометрик функциядан ташқари, унча кўп қўлланилмайдиган иккита функция: секанс ва косеканс функциялар қаралади.

10.7-таъриф. α соннинг косинусига тесқари бўлган катталик α соннинг секанси дейилади:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (10.21)$$

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ функция $\operatorname{tg} \alpha$ функция каби аргументнинг $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ қийматлари учун аниқланмаган. Демак, секанснинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{2} + \pi k$ кўринишдаги сонлардан ташқари барча ҳақиқий сонлар бўлади.

10.8-таъриф. α соннинг синусига тесқари бўлган катталик α соннинг косеканси дейилади:

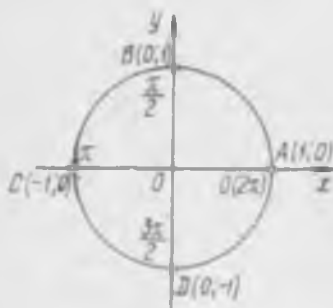
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (10.22)$$

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ функция $\operatorname{ctg} \alpha$ функция каби аргументнинг πk , $k \in \mathbb{Z}$ қийматлари учун аниқланмаган. Демак, косеканснинг аниқланиш соҳаси πk кўринишдаги сонлардан ташқари барча ҳақиқий сонлар бўлади.

Тригонометрик функциялар қийматларининг ишоралари. Синус ва косинуснинг таърифидан кўринадики, косинуснинг ишораси сон бирлик айлананинг $M(\alpha)$ нуқтаси абсциссаси ишораси билан, синуснинг ишораси эса $M(\alpha)$ нуқта ординатасининг ишораси билан бир хил бўлади. Тангенс ва котангенснинг ишораларини битта аргумент синуси ва косинусининг ишоралари бўйича топамиз.

α	Чорак	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	I	+	+	+	+
$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	II	—	+	—	—
$\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	III	—	—	+	+
$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	IV	+	—	—	—

10.1.4. Аргументнинг баъзи қийматлари учун тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини ҳисоблаш. Аргументнинг $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$



10.7- расм.

қийматлари учун тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини ҳисоблаш. Сон бирлик айланада (10.7- расм). α нинг $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ва 2π қийматларининг ҳар бирига $\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ нинг тайин сон қиймати мос келади.

Тригонометрик функцияларнинг таърифларидан қуйидагилар келиб чиқади:

1) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ аниқланмаган;

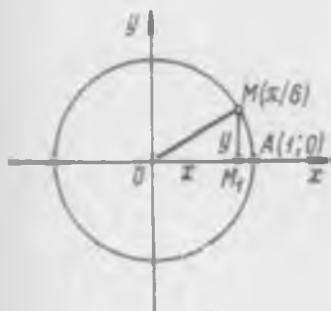
2) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ аниқланмаган, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$;

3) $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ аниқланмаган;

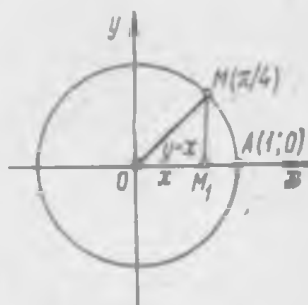
4) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ аниқланмаган, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = \frac{\cos \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$;

5) $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, $\operatorname{tg} 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg} 2\pi$ аниқланмаган.

$\pi/6$ аргумент учун тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини ҳисоблаш. Сон бирлик айланада. $\widehat{AM} = \pi/6$ ёйни ясаймиз (10.8-расм). $\triangle M_1OM$ да $\angle M_1OM = \pi/6$, $OM = 1$, $y = M_1M = 1/2(\pi/6 (30^\circ \text{ ли}) \text{ бурчак қаршисида ётган катетнинг хоссасига кўра})$. Пифагор теоремасига асосан $x = OM_1 = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ ни ҳисоблаймиз.



10.8- расм.



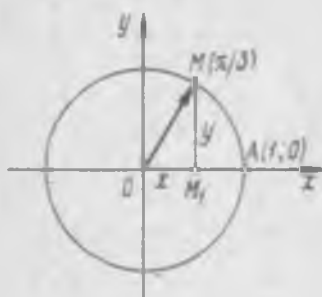
10.9- расм.

Тригонометрик функцияларнинг таърифини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

$\pi/4$ аргумент учун тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини ҳисоблаш. Сон бирлик айланада $\widehat{AM} = \pi/4$ ёйни ясаймиз (10.9-расм). $\triangle M_1OM$ да $\angle M_1OM = \pi/4$, $OM = 1$, $OM_1 = M_1M = x = y$. Пифагор теоремасига кўра $x^2 + x^2 = 1$ га эгамиз, бундан $x = \sqrt{2}/2$. Тригонометрик функцияларнинг таърифини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$



10. 10- расм.

$\pi/3$ аргумент учун тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини ҳисоблаш. Сон бирлик айланада $\widehat{AM} = \pi/3$ ёйни ясаймиз (10.10-расм).

$\triangle M_1OM$ да $\angle M_1OM = \pi/3$, $OM = 1$, $x = OM_1 = 1/2$ ($\pi/6$ (30°) бурчак қаршисида ётган катетнинг хоссасига кўра). Пифагор теоремасига кўра қуйидагини ҳисоб-

лаймиз: $y = M_1M = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Тригонометрик функцияларнинг таърифларини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

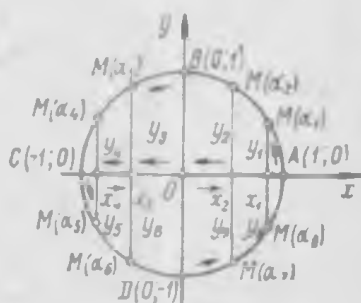
Аргументнинг энг кўп учраб турадиган қийматлари учун тригонометрик функцияларнинг қийматлари жадавали

Аргумент \ Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Синус	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Косинус	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Тангенс	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	аниқлан- маган	0	аниқ- ланма- ган	0
Котангенс	аниқ- ланма- ган	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	аниқ- лан- маган	0	аниқ- ланма- ган

10.1.5. Аргумент 0 дан 2π гача ўсганда тригонометрик функцияларнинг ўзгариши. $\cos \alpha$ функциянинг ўзгариши. α аргумент 0 дан 2π гача ўсганда $\cos \alpha$ нинг ўзгаришини сон бирлик айланада

$A(1; 0)$ нуқтадан бошлаб мусбат йўналишда ҳаракатланаётган $M(\alpha)$ нуқта абсциссасининг ўзгаришига қараб кузатиш осон

I чоракда, $[0, \pi/2]$ оралиқда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг абсциссаси мусбат қийматлар қабул қилади ва 1 дан 0 гача камаяди. Демак, аргумент $[0, \pi/2]$ оралиқда ўсиши билан косинус 1 дан 0 гача камаяди (10.11-расм).



10.11-расм.

II чоракда, $[\pi/2, \pi]$ оралиқда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг абсциссаси манфий қийматларни қабул қилади ва 0 дан -1 гача камаяди. Демак, аргумент $[\pi/2, \pi]$ оралиқда ўсиши билан косинус 0 дан -1 гача камаяди.

III чоракда, $[\pi, 3\pi/2]$ оралиқда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг абсциссаси манфийлигича қолаверади ва -1 дан 0 гача ўсади. Демак, аргументнинг $[\pi, 3\pi/2]$ оралиқда ўсиши билан косинус -1 дан 0 гача ўсади.

IV чоракда, $[3\pi/2, 2\pi]$ ораликда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг абсциссаси мусбат қийматларни қабул қилади ва 0 дан 1 гача ўсади. Демак, $[3\pi/2, 2\pi]$ ораликда аргументнинг ўсиши билан косинус 0 дан 1 гача ўсади.

Ҳосил қилинган натижалардан жадвал тузамиз.

Чорак	I	II	III	IV
α	$\nearrow \pi/2$ 0	$\nearrow \pi$ $\frac{\pi}{2}$	$\nearrow \frac{3\pi}{2}$ π	$\nearrow 2\pi$ $\frac{3\pi}{2}$
$\cos \alpha$	камаяди 1 $\searrow$ 0	камаяди 0 $\searrow$ -1	ўсади 0 $\nearrow$ -1	ўсади 1 $\nearrow$ 0

$\sin \alpha$ функциянинг ўзгариши. α аргумент 0 дан 2π гача ўсганда $\sin \alpha$ нинг ўзгаришини сон бирлик айланада $A(1; 0)$ нуқтадан бошлаб мусбат йўналишда ҳаракатланаётган $M(\alpha)$ нуқта ординатасининг ўзгаришига қараб текшираимиз (10.11-расм).

I чоракда, $[0, \pi/2]$ ораликда α аргумент ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг ординатаси мусбат қийматларни қабул қилади ва 0 дан 1 гача ўсади. Демак, аргументнинг $[0, \pi/2]$ ораликда ўсиши билан синус 0 дан 1 гача ўсади.

II чоракда $[\pi/2, \pi]$ ораликда α аргумент ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг ординатаси мусбатлигича қолаверади ва 1 дан 0 гача камаяди. Демак, аргументнинг $[\pi/2, \pi]$ ораликда ўсиши билан синус 1 дан 0 гача камаяди.

III чоракда, $[\pi, 3\pi/2]$ ораликда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг ординатаси манфий қийматлар қабул қилади ва 0 дан -1 гача камаяди. Демак, аргументнинг $[\pi, 3\pi/2]$ ораликда ўсиши билан синус 0 дан -1 гача камаяди.

IV чоракда, $[3\pi/2, 2\pi]$ ораликда α аргументнинг ўсиши билан $M(\alpha)$ нуқтанинг ординатаси манфийлигича қолаверади ва -1 дан 0 гача ўсади. Демак, аргументнинг $[3\pi/2, 2\pi]$ ораликда ўсиши билан синус -1 дан 0 гача ўсади. Ҳосил қилинган натижалардан жадвал тузамиз.

Чорак	I	II	III	IV
α	$\nearrow \pi/2$ 0	$\nearrow \pi$ $\frac{\pi}{2}$	$\nearrow 2\pi$ $\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow 2\pi$ $\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	ўсади $\nearrow 1$ 0	камаяди $\searrow 0$ 1	камаяди $\searrow -1$ 0	ўсади $\nearrow 0$ -1

$\operatorname{tg} \alpha$ функциянинг ўзгариши. α аргумент $[0, \pi/2)$ оралиқда ўссин. Юқорида биз $[0, \pi/2)$ оралиқда синус 0 дан 1 гача ўсишини, косинус эса 1 дан 0 гача камайишини аниқладик. Косинусни камаювчилигидан $[0, \pi/2)$ оралиқда $\frac{1}{\cos \alpha}$ нинг ўсувчи бўлиши келиб чиқади. Тангенс иккита мусбат ўсувчи функциянинг кўпайтмасидан иборат:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha},$$

демак, $[0, \pi/2)$ оралиқда тангенс ҳам ўсади.

α аргументнинг $\pi/2$ га яқин ($\pi/2$ дан кичик) қийматлари учун $\operatorname{tg} \alpha$ нинг қийматлари чексиз ўсади ва мусбат бўлади. Демак, $[0, \pi/2)$ оралиқда тангенс 0 дан $+\infty$ гача ўсади.

$[0, \pi/2)$ оралиқда $\alpha \rightarrow \pi/2$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) да тангенснинг

чексиз ўсишини N нуқта ординатасининг ўзгаришидан ($N_1, N_2, \dots$ нуқталарнинг ординаталари) кўриш мумкин (10.12- расм). Ҳақиқатан,

$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $N(N_1, N_2, \dots)$ нуқталарнинг ординатаси катталиги жиҳатидан олдиндан берилган ҳар қанча катта мусбат сондан ортиши мумкин, демак, тангенс $\alpha \rightarrow \pi/2$ ($\alpha < \pi/2$) да чексиз ўсади.

II чоракда тангенс манфий қийматларни қабул қилади ва аргумент $(\pi/2, \pi)$ оралиқда ўсганда $-\infty$ дан 0 гача ўсади (10.12- расм).



10.12- расм.

α аргумент $[\pi, 3\pi/2]$ оралиқда ўсганда тангенс I чоракдаги каби ўсади ва аргумент $(3\pi/2, 2\pi]$ оралиқда ўсиши билан тангенс II чоракдаги каби ўсади (10.12-расм). Тангенснинг аргумент 0 дан 2π гача ўсгандаги ўзгариши қуйидаги жадвалда тасвирланган:

Чорак	I	II	III	IV
α	$\begin{array}{c} \nearrow \pi/2 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \pi \\ \pi/2 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow 2\pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{array}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\begin{array}{c} \nearrow +\infty \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow 0 \\ -\infty \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow +\infty \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow 0 \\ -\infty \end{array}$

$\operatorname{ctg} \alpha$ функциянинг ўзгариши. α аргумент $(0, \pi/2]$ оралиқда ўссин. Унда

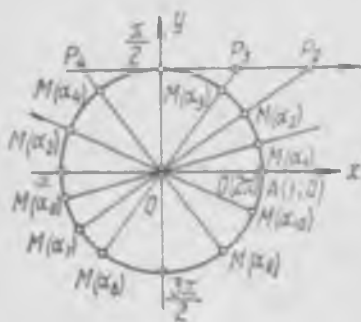
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha.$$

Синуснинг ўсишидан $(0, \pi/2]$ оралиқда $\frac{1}{\sin \alpha}$ камайиши келиб чиқади. Унда $\operatorname{ctg} \alpha$ иккита мусбат камаювчи функциянинг кўпайтмасидан иборат экан. Демак, $(0, \pi/2]$ оралиқда $\operatorname{ctg} \alpha$ функция ҳам камаяди.

α аргументнинг 0 га яқинлашувчи (0 дан катта) қийматлари учун $\operatorname{ctg} \alpha$ қийматлар чексиз ўсади ва у мусбат бўлади. Демак, $(0, \pi/2]$ оралиқда котангенс $+\infty$ дан 0 гача камаяди.

Котангенснинг камайишини $(0, \pi/2]$ оралиқда $\alpha \rightarrow 0$ да P нуқта абсциссаси ($P_1, P_2, \dots$ нуқталар абсциссалари) ўзгаришига қараб кузатиш мумкин (10.13-расм). α нинг нолга яқин (нолдан катта) қийматлари учун P нуқтанинг абсциссаси катталиги жиҳатидан олдиндан берилган ҳар қанча катта мусбат сондан ортиқ бўлиши мумкин, демак, $(0, \pi/2]$ оралиқда котангенс $+\infty$ дан 0 гача камаяди.

II чоракда котангенс манфий қийматларни қабул қила-



10.13-расм.

ди ва аргумент $[\pi/2, \pi)$ оралиқда ўсиши билан котангенс 0 дан $-\infty$ гача камаяди.

α аргументнинг $(\pi, 3\pi/2]$ оралиқда ўсиши билан котангенс I чоракдаги каби камаяди ва аргументнинг $[3\pi/2, 2\pi)$ оралиқда ўсиши билан котангенс II чоракдаги каби камаяди (10.13- расм). Котангенснинг аргумент 0 дан 2π гача ўсгандаги ўзгариши қуйидаги жадвалда келтирилган.

Чорак	I	II	III	IV
α	$\begin{array}{c} \nearrow \pi/2 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \pi \\ \pi/2 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow 2\pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{array}$
$\text{ctg } \alpha$	$\begin{array}{c} \text{камаяди} \\ +\infty \searrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{камаяди} \\ 0 \searrow \\ -\infty \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{камаяди} \\ +\infty \searrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{камаяди} \\ 0 \searrow \\ -\infty \end{array}$

10.1.6. Бир хил аргументнинг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлар. Асосий айнанишлар. Агар бир хил аргументнинг иккита тригонометрик функцияси бир хил аниқланиш соҳасига эга бўлса ва аргументнинг йўл қўйиладиган барча қийматларида тенг қийматларни қабул қилса, улар айнан тенг тригонометрик функциялар дейилади. Аргументларнинг йўл қўйиладиган барча қийматларида ўринли бўлган тенглик айният дейилади.

1. Бир хил аргументнинг синус ва косинуси квадратларининг йиғиндисини бирга тенг:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (10.23)$$

Исботи. Сон бирлик айлананинг ихтиёрий $M(\alpha)$ нуқтасининг $x = \cos \alpha$ ва $y = \sin \alpha$ координаталари $x^2 + y^2 = 1$ тенгламани қаноатлантиради, шу сабабли исталган α ҳақиқий сон учун (10.23) тенглик ўринли.

2. (10.19) ва (10.20) тенгликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$$\text{tg } \alpha \cdot \text{ctg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$$

ни, яъни

$$\text{tg } \alpha \cdot \text{ctg } \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k \quad (10.24)$$

ни ҳосил қиламиз.

Натижалар:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k, \quad (10.25)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k. \quad (10.26)$$

3. (10.23) тенгликни $\cos^2 \alpha$ га ҳадма-ҳад бўлиб,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (10.27)$$

ни ҳосил қиламиз.

4. (10.23) тенгликни $\sin^2 \alpha$ га ҳадма-ҳад бўлиб,

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k \quad (10.28)$$

ни ҳосил қиламиз.

Тригонометрик айниятларнинг исботи.
Қуйидаги айниятни исбот қиламиз:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.29)$$

Биринчи усул. Тенгликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Тенгликнинг чап қисми ўнг қисмига тенг. Айният исбот бўлди.

Иккинчи усул. Пропорция хоссасига кура қуйидагига эгамиз:

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha,$$

$$(1 - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Айният исбот қилинди.

Асосий тригонометрик айниятлар ва уларнинг натижаларини қўлланиб, тригонометрик функцияни (бир хил аргументли) бошқа исталган тригонометрик функция орқали ифодалаш мумкин.

Тригонометрик функцияларнинг синус орқали ифодаси. (10.23) айниятдан қуйидагига эгамиз:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Радикалларни ўз ичига олган формулаларда $+$ ва $-$ ишоралар α соннинг қайси чоракда ётишига қараб қўйилади. $\cos \alpha$ нинг қийматини (10.19) ва (10.20) айниятларга қўямиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k.$$

10.19- мисол. $\sin \alpha = -3/5$, $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi)$ берилган. $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ қийматларни ҳисобланг.

$$\text{Ечилиши. } \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Тригонометрик функцияларнинг косинус орқали ифодаси. (10.23) айниятга кўра қуйидагига эгамиз:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$\sin \alpha$ нинг қийматини (10.19) ва (10.20) айниятларга қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \pi k.$$

10.20- мисол. $\cos \alpha = -4/5$, $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$ берилган. $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ қийматларни ҳисобланг.

$$\text{Ечилиши. } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Тригонометрик функцияларнинг тангенс орқали ифодаси. (10.27) айниятдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

(10.19) айниятдан қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Бу айниятга $\cos \alpha$ нинг топилган қийматини қўйиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} k.$$

10.21-мисол. $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ берилган. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ қийматларни ҳисобланг.

$$\text{Ечилиши. } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{1 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Тригонометрик функцияларнинг котангенс орқали ифодаси. (10.28) айниятдан қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k,$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \pi k.$$

(10.20) айниятдан қуйдагига эгамиз:

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha, \quad \alpha \neq \pi k,$$

Бу айниятга $\sin \alpha$ нинг топилган қийматини қўйиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \pi k,$$

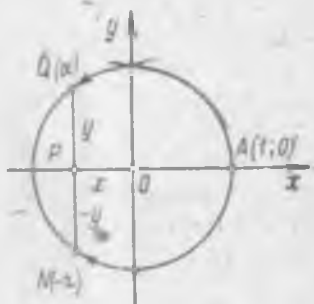
ва

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} k.$$

Ҳосил қилинган формулаларни жадвалга ёзамиз.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$

10.1.7. Тригонометрик функцияларнинг жуфт ва тоқлиги, уларнинг даврийлиги. Сон бирлик айланада $Q(\alpha)$ ва $N(-\alpha)$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталар абсциссалар ўқига нисбатан симметрик (10.14-расм). $\widehat{AQ}$ ва $\widehat{AN}$ ёйлар абсолют қийматлари бўйича тенг, ишоралари бўйича қарама-қарши. Q ва N нуқталар бир хил абсциссага ва абсолют қиймат бўйича тенг, лекин ишора бўйича қарама-қарши



10.14-расм.

ординатага эга. Булардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad (10.30)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad (10.31)$$

яъни косинус жуфт функция, синус — тоқ функция. Тангенс ва котангенс тоқ функциялар эканлигини кўрсатиш осон:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq \pi/2 + \pi k. \quad (10.32)$$

Лудди шунга ўхшаш,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

яъни

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \alpha \neq \pi k. \quad (10.33)$$

10.22- мисол. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

10.23- мисол. $\cos(-\pi) = \cos \pi = -1, \quad \sin(-\pi) = -\sin \pi = 0,$
 $\operatorname{tg}(-\pi) = -\operatorname{tg} \pi = 0.$

Агар давр деб аталадиган шундай мусбат $\lambda \neq 0$ сон mavjud бўлсаки, α аргументнинг берилган функция учун мумкин бўлган исталган қийматида $f(\alpha \pm \lambda) = f(\alpha)$ тенглик ўринли бўлса, $f(\alpha)$ функция *даврий функция* дейилади.

Косинус ва синуснинг даврийлиги. Сон бирлик айланада α ва $\alpha + 2\pi k$ сонлар учун ягона $M(\alpha)$ нуқта мсс келади: $M(\alpha) = M(\alpha + 2\pi k)$, лекин $\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ M нуқтанинг координаталари бўлгани учун қуйидаги айниятларга эга бўламиз:

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi k), \quad (10.34)$$

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi k), \quad (10.35)$$

(10.34) ва (10.35) тенгликлардан кўринадики, $\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ даврий функциялар, 2π эса уларнинг даврларидан бири экан.

$\cos \alpha$ функция учун 2π асосий давр (энг кичик мусбат давр) эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун α нинг йўл қўйиладиган барча қийматларида (10.34) тенглик ўринли бўладиган λ ($0 < \lambda < 2\pi$) сон mavjud эмаслигини кўрсатиш керак. Қарама-қаршисини фараз қилиб исбот қиламиз. $\cos \alpha$ функциянинг даври λ ($0 < \lambda < 2\pi$) бўлсин, яъни $\cos(\alpha + \lambda) = \cos \alpha$; $\alpha = 0$ дейлик, у ҳолда $\cos(0 + \lambda) = \cos 0 = 1$, лекин $\cos \lambda = 1$ сон бирлик айлананинг фақат $A(1; 0)$ нуқтасида ўринли бўлиб, бу нуқта учун $\alpha = 2\pi k$.

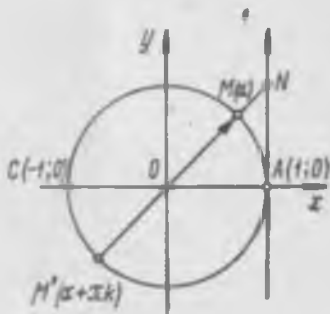
Аммо $0 < \lambda < 2\pi$ билан ўлчанадиган ёй $A(1; 0)$ нуқтада тугамайди, шунинг учун унинг косинуси 1 га тенг бўлмайди. Бу қарама-қаршилик $\cos(\alpha + \lambda) = \cos \alpha$ тенглик ўринли бўладиган мусбат $0 < \lambda < 2\pi$ сон мавжуд эмаслигини кўрсатади.

λ нинг энг кичик мусбат қиймати 2π бўлади, чунки $\cos \lambda = 1$ учун $\lambda = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Бундан $\cos \alpha$ даври 2π бўлган даврий функция бўлиши келиб чиқади. Косинуснинг даврийлиги (10.34) формула билан ёзилади.

Қарама-қаршисини фараз қилиб, (10.35) формуланинг ўринли бўлишини исбот қиламиз. Синуснинг даври λ ($0 < \lambda < 2\pi$) сон бўлсин деб фараз қилайлик, унда $\sin(\alpha + \lambda) = \sin \alpha$. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ дейлик, унда $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$; лекин $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = 1$ сон бирлик айлананинг фақат

$B(0; 1)$ нуқтасида бўлиб, бу нуқта учун $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ бўлади. Демак, $\frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Бундан $\lambda = 2\pi k$, лекин фаразга кўра $0 < \lambda < 2\pi$, у ҳолда $0 < 2\pi k < 2\pi$. Тенгсизлик ҳадларини 2π га бўлиб, $0 < k < 1$ ни ҳосил қиламиз, лекин k фаразга кўра бутун сон, 0 билан 1 орасида эса бутун сон йўқ. Бу қарама-қаршилик $\sin(\alpha + \lambda) = \sin \alpha$ тенглик ўринли бўладиган $\lambda < 2\pi$ мусбат сон мавжуд эмаслигини кўрсатади. λ нинг энг кичик мусбат қиймати 2π сон бўлади, демак, $\sin \alpha$ асосий даври 2π га тенг бўлган даврий функция экан. Синуснинг даврийлиги (10.35) формула билан ёзилади.

Тангенс ва котангенснинг даврийлиги. Сон бирлик айланада α ва $\alpha + \pi k$ сонлар учун $M(\alpha)$ ва $M'(\alpha + \pi k)$ нуқталар мос келади (10.15-расм). Демак, $\operatorname{tg} \alpha = AN$ ва $\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = AN$, у ҳолда



10.15-расм.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi k). \quad (10.36)$$

Равшанки, π сони тангенснинг асосий (энг кичик мусбат)

даври бўлади, яъни (10.36) тенглик α нинг $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ қийматидан бошқа барча қийматларида ўринли. Қарама-қаршисини фараз қилиш методи ёрдамида $\alpha (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$ аргументнинг ихтиёрий қийматида $\operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \operatorname{tg} \alpha$ тенглик бажарилиши мумкин бўлган мусбат $\lambda < \pi$ сон мавжуд эмаслигини исбот қиламиз. $\alpha = 0$ бўлсин, у ҳолда $\operatorname{tg}(0 + \lambda) = \operatorname{tg} 0 = 0, \operatorname{tg} \lambda = 0$. Тангенс аргументининг πk қийматларида А ва С нуқталарда нолга тенг (10.15-расм). Унда $\lambda = \pi k$. Фаразга кўра $0 < \lambda < \pi$ ёки $0 < \pi k < \pi$; бу тенгсизлик ҳадларини π га бўлиб, $0 < k < 1$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, 0 билан 1 орасида эса k бутун сон йўқ. Бундан $\operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \operatorname{tg} \alpha$ тенглик ўринли бўладиган мусбат $\lambda < \pi$ сон мавжуд эмаслиги келиб чиқади λ нинг энг кичик мусбат қиймати π сони бўлади, демак, $\operatorname{tg} \alpha$ даври π га тенг бўлган даврий функция экан. Тангенснинг даврийлиги (10.36) формула орқали ёзилади.

Котангенснинг даврийлиги қуйидаги формула билан ёзилади:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k), \alpha \neq \pi k. \quad (10.37)$$

(10.37) формулани исбот қилишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

10.24-мисол. $\sin 3660^\circ$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Синуснинг даврийлик хоссасидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 3660^\circ = \sin(360^\circ \cdot 10 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2.$$

10.25 мисол. $\sin 2,5\pi + 2\cos 6,1\pi$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. $\sin 2,5\pi + 2\cos 6,1\pi = \sin(2\pi + 0,5\pi) + 2\cos(2\pi \cdot 3 + 0,1\pi) = \sin 0,5\pi + 2\cos 0,1\pi \approx 1 + 2\cos 0,3142 = 1 + 2 \cdot 0,9511 = 2,9022$.

10.26-мисол. $y = \cos 5x$ функциянинг даврини топинг.

Ечилиши. Изланаётган даври λ орқали белгилаб олиб, $\cos 5(x + \lambda) = \cos 5x$ ёки $\cos(5x + 5\lambda) = \cos 5x$ ни ҳосил қиламиз, бундан $5\lambda = 2\pi$, яъни $\lambda = 2\pi/5$ деган хулосага келамиз.

10.27-мисол. $y = \sin \frac{5x}{3} + \cos \frac{3x}{5}$ функциянинг даврини топинг.

Ечилиши. Ҳар бир қўшилувчи даврларининг энг кичик умумий қарралиси бу функциянинг энг кичик умумий мусбат даври бўлади. Қуйидагиларга эгамиз:

$$\sin \frac{5x}{3} = \sin \frac{5}{3}(x + \lambda_1) = \sin \left(\frac{5x}{3} + \frac{5\lambda_1}{3} \right),$$

$$\frac{5\lambda_1}{3} = 2\pi, \quad \lambda_1 = \frac{6\pi}{5}.$$

$$\cos \frac{3x}{5} = \cos \frac{3}{5}(x + \lambda_2) = \cos \left(\frac{3x}{5} + \frac{3\lambda_2}{5} \right),$$

$$\frac{3\lambda_2}{5} = 2\pi, \quad \lambda_2 = \frac{10\pi}{3}.$$

y функциянинг даври 30π га (λ_1 ва λ_2 даврларнинг умумий энг кичик карралисига) тенг.

10.2-§. Келтириш формулалари

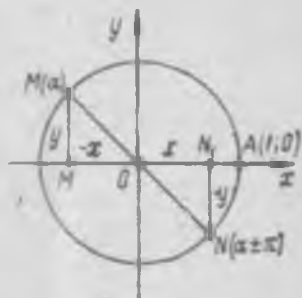
10.2.1. Косинус ва синус даврлари ярмининг хоссаси.

Сон бирлик айланада ихтиёрий $M(\alpha)$ нуқтани ва $N(\alpha \pm \pi)$ нуқтани оламиз. $\overline{MN} = \pi$, $\overline{MA} = -\pi$ (10.16. расм). Бу нуқталар координата бошига нисбатан симметрик. Шунинг учун нуқталарнинг мос келувчи координаталари абсолют қиймат бўйича тенг, ишора бўйича қарама-қарши. $M(\alpha)$ нуқтанинг координаталари $(-x; y)$ ва $N(\alpha \pm \pi)$ нуқтанинг координаталари $(x; -y)$. Демак,

$$\cos \alpha = -\cos(\alpha \pm \pi), \quad (10.38)$$

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha \pm \pi). \quad (10.39)$$

Косинус ва синус функциялар аргумент π га орттирилганда ёки камайтирилганда фақат ишораси бўйича ўзгаради.



10.16- расм.

10.28- мисол. Қуйдагиларни ҳисобланг: 1) $\sin \frac{5\pi}{6}$, 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$, 3) $\cos \frac{2\pi}{3}$, 4) $\cos \frac{5\pi}{4}$, 5) $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$, 6) $\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right)$, 7) $\sin 225^\circ$, 8) $\cos (-210^\circ)$.

Ечилиши. (10.38) ёки (10.39) формулаларни қўллаб, қуйдагиларни ҳосил қиламиз:

$$1) \sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left(\frac{5\pi}{6} - \pi \right) = -\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \left(\frac{7\pi}{6} - \pi \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \pi \right) = -\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$4) \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$5) \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$6) \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7) $\sin 225^\circ = -\sin (225^\circ - 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2.$

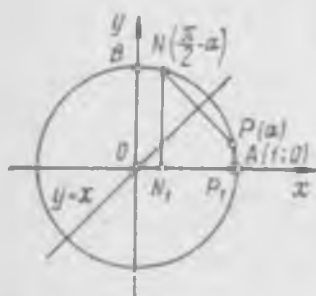
$$8) \cos(-210^\circ) = -\cos(-210^\circ + 180^\circ) = -\cos(-30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2.$$

10.2.2. **Ўзаро тўлдирувчи аргументларнинг тригонометрик функциялари.** Йиғиндиси $\pi/2$ ни ташкил қилувчи икки аргумент *ўзаро тўлдирувчи* дейилади. Масалан:

1) $\pi/6$ та $\pi/3$, чунки $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2$;

2) $2\pi/3$ ва $-\pi/6$, чунки $2\pi/3 + (-\pi/6) = \pi/2$.

Сон бирлик айлана $y = x$ тўғри чизиққа (I ва III координата бурчакларининг биссектрисасига, нисбатан симметрик. $AP = \alpha$ ва $BN = -\alpha$ (10.17-расм) бўлсин, у ҳолда $P(\alpha)$ ва $N(\pi/2 - \alpha)$ нуқталар $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади. $y = x$ тўғри чизиқда аксланганда ўқлар ўз ўринларини алмашади, абсциссалар ўқи ординаталар ўқиға ўтади, ва аксинча, ординаталар ўқи абсциссалар ўқиға ўтади.



10.17- расм.

$P(\cos \alpha; \sin \alpha)$ ва $N\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$ нуқта-
ларнинг координаталарини таққослаб, N нуқтанинг абс-
циссаси P нуқтанинг ординатасига, ва аксинча, N нуқтанинг
ординатаси P нуқтанинг абсциссасига тенг бўлишини
кўрамиз, бундан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad (10.40)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha. \quad (10.41)$$

Ўзаро тўлдирувчи аргументларнинг синуси ва косинуси орасидаги боғланишни аниқладик. (10.40) ва (10.41) формулаларни қўлланиб, ўзаро тўлдирувчи аргументларнинг тангенс ва котангенс орасидаги боғланишни аниқлаймиз:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

яъни

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \neq \pi k, \quad (10.42)$$

худди шунга ўхшаш

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

яъни

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi k. \quad (10.43)$$

Ўзаро тўлдирувчи аргументларнинг тригонометрик функциялари формулаларини одатда тригонометрик функцияларни $\pi/4$ (45°) дан кичик мусбат аргументга келтириш учун қўлланилади.

10.29- мисол. Қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\cos 70^\circ$, 2) $\sin 80^\circ$, 3) $\cos \frac{\pi}{3}$, 4) $\sin \frac{2\pi}{3}$, 5) $\cos \frac{5\pi}{6}$.

Ечиллиши.

1) $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$, 2) $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$,

$$3) \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad 4) \sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$5) \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10.2.3. $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ аргументларнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исбот қиламиз:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad (10.44)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (10.45)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad (10.46)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (10.47)$$

(10.44) ва (10.45) айниятларни исбот қилиш учун (10.42) ва (10.43) айниятларда α аргументни $-\alpha$ аргументга алмаштирамыз ҳамда жуфтлик ва тоқлик хоссасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right] = \cos(-\alpha), \text{ яъни } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$$

(10.45) — (10.47) айниятлар ҳам худди шундай исбот қилинади.

10.30-мисол. (10.44) — (10.47) айниятларини қўлланиб, қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\sin 150^\circ$, 2) $\cos 120^\circ$, 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$, 4) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.
Ечилиши.

$$1) \sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2,$$

$$2) \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2,$$

$$3) \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1,$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}/3.$$

$\pi - \alpha$ аргументнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исботлаймиз:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad (10.48)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad (10.49)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad (10.50)$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (10.51)$$

(10.48) ва (10.49) айниятларни исбот қилиш учун (10.38) ва (10.39) айниятлардан α аргументни $-\alpha$ аргументга ал-

маштирамиз ҳамда жуфтлик ва тоқлик хоссаларини қўлланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\sin [\pi + (-\alpha)] = -\sin (-\alpha), \text{ яъни } \sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos [\pi + (-\alpha)] = -\cos (-\alpha), \text{ яъни } \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

(10.50) ва (10.51) айниятларни тангенс, котангенсларнинг даврийлиги, жуфтлик ва тоқлик хоссаларини қўлланиб исбот қилиш мумкин.

10.31-мисол. (10.48) — (10.51) айниятларни қўлланиб қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\sin 480^\circ$, 2) $\cos 150^\circ$, 3) $\operatorname{tg} 120^\circ$, 4) $\operatorname{ctg} 135^\circ$.

Ечилиши.

$$1) \sin 480^\circ = \sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$2) \cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2,$$

$$3) \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3},$$

$$4) \operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg} (180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1.$$

$\pi + \alpha$ аргументнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исбот қиламиз:

$$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad (10.52)$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad (10.53)$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (10.54)$$

$$\operatorname{ctg} (\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad (10.55)$$

(10.52) ва (10.53) айниятлар кўриниши ўзгарган (10.38) ва (10.39) айниятлардир, (10.54) ва (10.55) айниятлар эса тангенс ва котангенснинг даврийлик формулаларидир.

10.32-мисол. (10.52) — (10.55) айниятларни қўлланиб, қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\sin 225^\circ$, 2) $\cos 585^\circ$, 3) $\operatorname{tg} 210^\circ$, 4) $\operatorname{ctg} 240^\circ$.

Ечилиши.

$$1) \sin 225^\circ = (\sin 180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2.$$

$$2) \cos 585^\circ = \cos 225^\circ = \cos (180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2.$$

$$3) \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3.$$

$$4) \operatorname{ctg} 240^\circ = \operatorname{ctg} (180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}/3.$$

$\frac{3\pi}{2} - \alpha$ аргументнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исбот қиламиз:

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha, \quad (10.56)$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sin \alpha, \quad (10.57)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad (10.58)$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.59)$$

(10.56) ва (10.58) айниятларни қуйидагича исбот қилиш мумкин:

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \left[\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right] = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

(10.57) ва (10.59) айниятлар худди шундай исбот қилинади.

10.33-мисол (10.56) ва (10.57) айниятларни қўлланиб, қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\sin 600^\circ$, 2) $\cos 225^\circ$.

Ечилиши.

$$1) \sin 600^\circ = \sin 240^\circ = \sin (270^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2.$$

$$2) \cos 225^\circ = \cos (270^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2.$$

$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ аргументнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исбот қиламиз:

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\cos \alpha, \quad (10.60)$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha, \quad (10.61)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad (10.62)$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (10.63)$$

(10.56) — (10.53) айниятларда α аргументни $-\alpha$ аргумент билан алмаштириб ва жуфтлик, тоқлик хоссаларини қўлланиб, (10.60) — (10.63) айниятларни ҳосил қиламиз.

10.34-мисол. (10.60) ва (10.61) айниятларни қўлланиб, қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\sin 330^\circ$, 2) $\cos 315^\circ$.

Ечилиши.

$$1) \sin 330^\circ = \sin (270^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2,$$

$$2) \cos 315^\circ = \cos (270^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2.$$

$2\pi - \alpha$ аргументнинг тригонометрик функциялари. Қуйидаги айниятларни исбот қиламиз:

$$\sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \quad (10.64)$$

$$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha, \quad (10.65)$$

$$\operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (10.66)$$

$$\operatorname{ctg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (10.67)$$

Даврийлик ва тоқлик хоссаларига кўра қуйидагига эга миз:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

(10.65) — (10.67) айниятлар худди шундай исбот қилинади.

10.35-мисол. (10.64) ва (10.65) айниятларни қўлланиб, қуйидагиларни ҳисобланг. 1) $\sin 300^\circ$; 2) $\cos 330^\circ$.

Ечилиши. 1) $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\sqrt{3}/2$,
2) $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$.

Кўриб ўтилган айниятларни жадвал кўринишида келтирамиз.

Келтириш формулалари:

	Аргумент (радианлар, градуслар)	Функция			
		$\sin$	$\cos$	tg	ctg
1	$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
2	$\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($90^\circ - \alpha$)	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
3	$\frac{\pi}{2} + \alpha$ ($90^\circ + \alpha$)	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
4	$\pi - \alpha$ ($180^\circ - \alpha$)	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
5	$\pi + \alpha$ ($180^\circ + \alpha$)	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
6	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$ ($270^\circ - \alpha$)	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
7	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ ($270^\circ + \alpha$)	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
8	$2\pi - \alpha$ ($360^\circ - \alpha$)	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Келтириш формулаларидан қўлланишда қуйидаги қондалардан фойдаланишни тавсия қиламиз.

1. Агар α Ox ўқдан бошлаб қўйилса, келтириладиган функциянинг номи, яъни $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ аргументли функциянинг номи ўзгармайди. Агар α Oy ўқдан бошлаб қўйилса, келтириладиган функциянинг, яъни $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ аргументли функциянинг номи унга ўхшаш функция (синусни косинусга, тангенсни котангенсга, ва аксинча, тескариси) билан алмаштирилади.

2. Ўнг тарафдан олиниши керак бўлган тригонометрик функциянинг ишораси чап томон ишораси бўйича $0 < \alpha < \pi/2$ деган фазарда топилади.

10.36- мисол. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ учун келтириш формуласини тузинг.

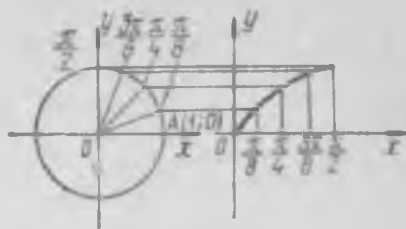
Ечишлиши. α Oy ўқдан бошлаб қўйилгани учун формуланинг ўнг тарафига котангенс қўйилади. Формула α аргументнинг барча йўл қўйиладиган қийматларида ўринли, демак, $0 < \alpha < \pi/2$ учун ҳам ўринли. Лекин бу ҳолда $3\pi/2 + \alpha$ ёй IV чоракда тугайди, бу чоракда тангенс манфий. У ҳолда $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

10.3-§. Тригонометрик функцияларнинг графиклари

10.3.1 $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиклари. Тригонометрик функцияларнинг кўриб ўтилган хоссаларидан ва келтириш формулаларидан фойдаланиб, тригонометрик функцияларнинг графикларини ясаймиз.

$y = \sin x$ функция графикнинг ясалиши. Синуснинг даврийлигига асосан графикни $[-\pi, \pi]$ оралиқда яшаш етарли, чунки $[-3\pi, -\pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 5\pi]$ ва ҳ. к. ларда функция графиги $[-\pi, \pi]$ оралиқдаги кўринишга эга бўлади. Кўрсатилган оралиқларда график синуснинг $[-\pi, \pi]$ оралиқдаги графигини чапга ва ўнгга суриш натижа-сида ҳосил қилинади. Синуснинг тоқлик хоссасини ҳисобга олиб, графикни $[0, \pi]$ оралиқда яшаш етарли, чунки $[-\pi, 0]$ оралиқдаги график $[0, \pi]$ оралиқдаги графикка координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади. $\sin(\pi - x) = \sin x$ хоссага кўра x ва $\pi - x$ нуқталар $\pi/2$ нуқтага нисбатан симметрик деган хулосага келамиз, чунки x аргумент $[0, \pi/2]$ оралиқдан ўтаётганда $\pi - x$ қарама-қарши йўналишда $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ оралиқдан ўтади. Шунинг учун $y = \sin x$ функция графиги $x = \pi/2$ тўғри чизиққа нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, графикни $[0, \pi/2]$ оралиқда яшаш

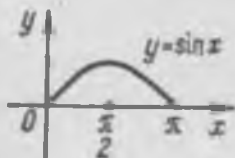
етарли. $[0, \pi/2]$ ораликда $y = \sin x$ функция 0 дан 1 гача монотон ўсади. $y = \sin x$ функция графигини сон бирлик айланада тақрибан яшаш учун $[0, \pi/2]$ ораликда 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/8$, $\pi/2$ нуқталарни ясаймиз (10.18-расм). Сўнг-ра, аргументнинг 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$ қийматла-



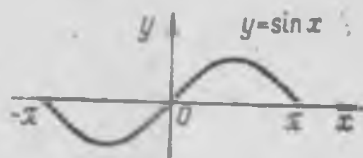
10.18-расм.

рини Ox ўқда ясаймиз (бунда $\pi/2$ бирлик айлана радиусининг $\approx 1,57$ узунлигини ташкил қилади). Аргументнинг бу қийматларига (бу аргументларнинг синуслари қийматларига) мос келувчи ординаталарни ясаб ва ординаталарни силлиқ чизиқ билан туташтириб, тахминан синус графигини тасвирловчи эгри чизиқни ясаймиз. $[0, \pi/2]$ ораликда қанча кўп бўлиниш нуқталарини олсак, график шунча аниқ бўлади.

10.19-расмда синуснинг $[0, \pi]$ ораликдаги графиги кўрсатилган. Бу график $[0, \pi/2]$ ораликдаги графикни $x = \pi/2$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик акслантириш натижа-



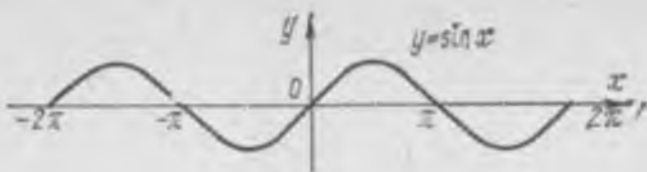
10.19-расм.



10.20-расм.

сида ҳосил қилинган. 10.20-расмда синуснинг $[-\pi, \pi]$ ораликдаги графиги кўрсатилган. Бу график $[0, \pi]$ ораликдаги графикни координаталар бошига нисбатан акслантириш натижасида ҳосил қилинган. 10.21-расмда 2π даврли график тасвирланган. Синус функциянинг графиги *синусоида* дейилади.

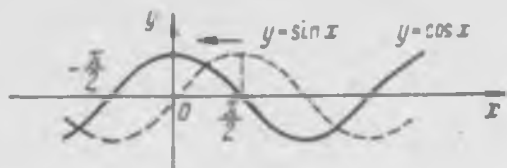
$y = \cos x$ функциянинг графигини $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ формулага асосланиб яшаш мумкин. Бу формула $y = \cos x$ функциянинг графиги $y = \sin x$ функция графигини чапга



10.21- расм.

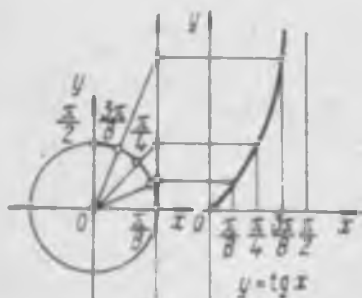
$\pi/2$ қадар суриш билан ясалишини кўрсатади (10.22-расм). Косинус функциянинг графиги косинусоида дейилади.

10.3.2. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиклари. $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг графигини ясашда тангенсининг даври π га тенглигини ҳисобга оламиз, шунинг учун тангенс графигини $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқда яшаш мумкин.

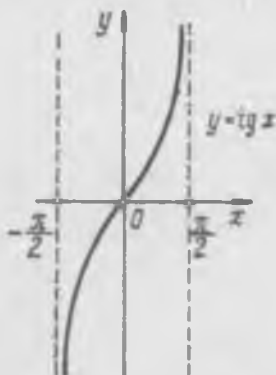


10.22- расм.

Тангенс тоқ функция, шунинг учун унинг графиги координаталар бэшига нисбатан симметрик бўлади, унда графикни $[0, \pi/2)$ оралиқда яшаш етарли. Бу оралиқда тангенс нолдан бешлаб чексиз ўсади. Сон бирлик айланада $[0, \pi/2)$ оралиқда $0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ нуқталарни ясаймиз. Тангенслар ўқида бу аргументлар тангенсларининг қийматларига мос нуқталарни ясаймиз (10.23-расм). Сўнгра



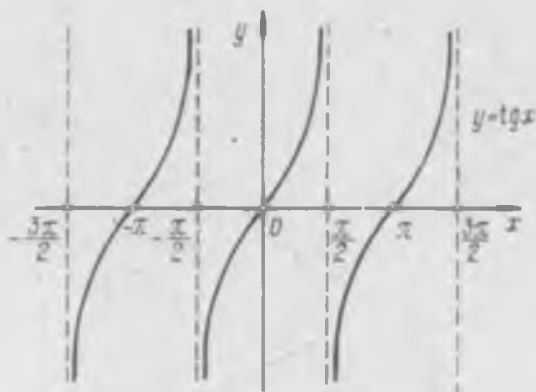
10.23- расм.



10.24- расм.

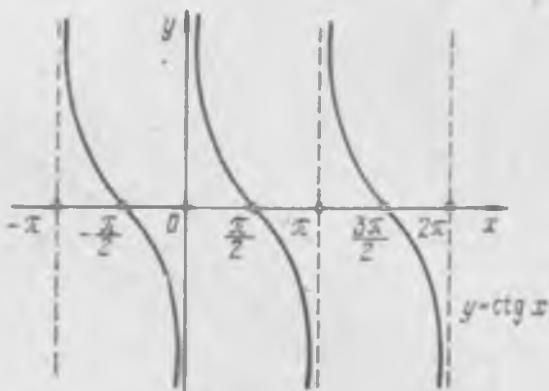
аргументнинг бу қийматларини Ox ўқда ясаймиз ва уларга мос ординаталарни (бу аргументлар тангенсларининг қийматларини) ясаймиз. Ординаталарни силлиқ чизик билан туташтириб, тақрибан тангенс графигини тасвирловчи эгри чизикни ҳосил қиламиз. $[0, \pi/2)$ оралиқда кўп, ҳок нукталарни олиб, тангенс графигини ҳосил қиламиз.

10.24-расмда тангенснинг $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги графиги берилган бўлиб, у тангенснинг $[0, \pi/2)$ оралиқдаги графигини координаталар бошига нисбатан акслантириш натижасида ҳосил қилинган. 10.25-расмда тангенснинг



10.25-расм.

унинг $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги графигини кетма-кет ўнгга ва чапга $\pi, 2\pi, \dots$ қадар кўчириш натижасида ҳосил қилинган графиги тасвирланган. Тангенснинг графиги *тангенсоида* дейилади.



10.26-расм.

$y = \operatorname{ctg} x$ функция графигини яшаш учун $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

айниятдан фойдаланамиз. Бу айниятдан кўринадики, котангенснинг графигини яшаш учун тангенс графигини Ox ўқи бўйлаб $\pi/2$ қадар чапга сурамиз ва ҳосил қилинган эгри чизиқни Ox ўққа нисбатан акслантирамиз (10.26-расм). Котангенс графиги *котангенсоида* дейилади. Тангенс ва котангенсларнинг графиклари синус ва косинус графикларидан фарqli ўлароқ даврий такрорланадиган бир хил тармоқларнинг чексиз тўпламидан иборат.

10.4-§. Тескари тригонометрик функциялар

10.4.1 Синус ва косинуснинг берилган қийматлари бўйича ёйни (бурчакни) яшаш. $\arcsin x$ ва $\arccos x$ функциялар. Синусга тескари функция. $y = \sin x$ функцияни $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ да кўрайлик.

Маълумки, $y = \sin x$ функция $[-\pi/2, \pi/2]$ оралиқда -1 дан 1 гача монотон ўсади ва бу оралиққа тегишли барча қийматларни қабул қилади, шу билан бирга бу қийматларнинг ҳар бирини бир мартадан қабул қилади, яъни $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ қийматлар тўплами ва $y \in [-1, 1]$ қийматлар тўплами бир-бирига ўзаро бир қийматли аксланади. Унда $y = \sin x$ функция $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ да монотон ўсувчи тескари функцияга эга. Бу функцияни *арксинус функция* ($\arcsin$) дейилади.

Биз $x \in [-1, 1]$ оралиқда берилган ва $-\pi/2$ дан $\pi/2$ гача монотон ўсувчи янги функцияни аниқладик.

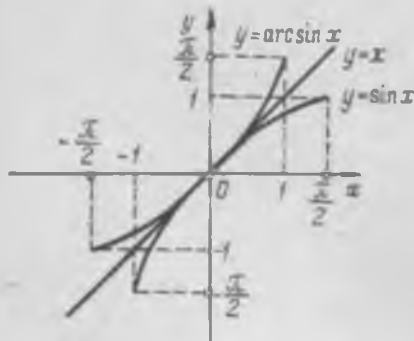
$y = \arcsin x$ функция таърифидан кўринадики, $\sin(\arcsin x) = x$, яъни $\arcsin x$ бу синуси x га тенг бўлган $[-\pi/2, \pi/2]$ оралиқдаги сон экан.

$y = \arcsin x$ функция учун

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

тенглик ўринли.

$y = \arcsin x$ функция графигини тескари функция графигини яшашнинг умумий қоидаси бўйича $y = \sin x$ функция графигидан ҳосил қиламиз. Бунинг учун $y = x$ тўғри чизиқни ясаймиз ва унга нисбатан $[-\pi/2, \pi/2]$ оралиқдаги синусоидани акслантирамиз (10.27-расм).



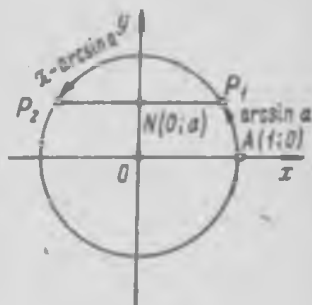
10.27-расм.

10.37-мисол. $y = \arcsin x$ функциянинг баъзи қийматларини ҳисоблаймиз:

- 1) $\arcsin 0 = 0$, чунки $\sin 0 = 0$,
- 2) $\arcsin (-1) = -\pi/2$, чунки $\sin(-\pi/2) = -1$,
- 3) $\arcsin 1 = \pi/2$, чунки $\sin(\pi/2) = 1$,
- 4) $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$, чунки $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$,
- 5) $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$, чунки $\sin(-\pi/6) = -1/2$,
- 6) $\arcsin 3$ маънога эга эмас, чунки 3 сони унинг аниқланиш соҳасига қирмайди.

10.38-мисол. Синуси a га тенг бўлган ёйлар тўпламини топинг.

Ечилиши 1-ҳол. $|a| < 1$ бўлсин (10.28-расм). Қуйидаги ёйларга эгамиз: $\overline{AP_1} = \arcsin a$ ва $\overline{AP_2} = \pi - \arcsin a$. Бу ёйларнинг ҳар бири a га тенг синусга эга. Синуси a га тенг бўлиб, P_1 нуқтада тугайдиган ёйлар тўплами



10. 28- расм.

$$\arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзилади. Синуси ўша a га тенг ва P_2 нуқтада тугайдиган ёйлар тўплами

$\pi - \arcsin a + 2\pi k$ ёки $-\arcsin a + \pi(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ формула орқали ёзилади; агар $n = 2k$ — жуфт сон бўлса, $(-1)^n = 1$ ва $n = 2k + 1$ — тоқ сон бўлса, $(-1)^n = -1$ эканлигини ҳисобга олиб, бу иккита формулани битта формулага бирлаштириш мумкин:

$$(-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

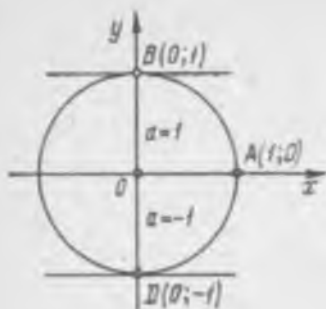
2-ҳол. Ёй $a = \pm 1$ га тенг синусга эга бўлсин (10.29-расм). У ҳолда B нуқтада (яъни $a = -1$ да) тугайдиган ёйлар тўплами

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

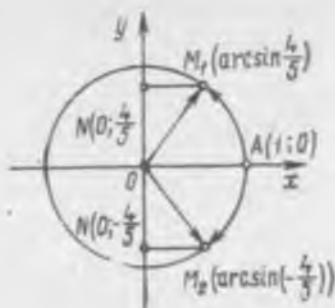
формула билан, D нуқтада (яъни $a = -1$ да) тугайдиган ёйлар тўплами

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзилади.



10.29- расм.



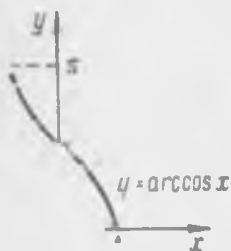
10.30- расм.

Синуси a га тенг (бунда $|a| \leq 1$) ёйлар (бурчаклар) ичида $[-\pi/2, \pi/2]$ оралиқдаги $\arcsin a$ ёй асосий ёй ҳисобланади.

Агар $|a| > 1$ бўлса, $\arcsin a$ маънога эга эмас.

10.39- Мисол. $\arcsin 4/5$ ва $\arcsin(-4/5)$ ёйларни ясагил.
Яшагил 10.30- расмда бажарилган.

Косинусга тескари функция. $x \in [0, \pi]$ да $y = \cos x$ функцияни кўрамиз. $y = \cos x$ функция $[0, \pi]$ оралиқда 1 дан -1 гача монотон камаяди ва ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилади, яъни $x \in [0, \pi]$ қийматлар тўплами ва $y \in [-1, 1]$ қийматлар тўплами бир-бирига ўзаро бир қийматли ахсланади. Демак, $y = \cos x$ функция $x \in [0, \pi]$ да монотон камаювчи тескари функцияга эга. Бу функция ($\arccos$) арккосинус функция дейилади.



10.31- расм

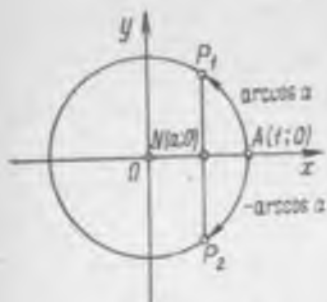
$y = \arccos x$ функция $x \in [-1, 1]$ оралиқда аниқланган ва π дан 0 гача монотон камаяди. $y = \arccos x$ функциянинг таърифидан кўринадики, $\cos(\arccos x) = x$, яъни $\arccos x$ бу косинуси x га тенг $[0, \pi]$ оралиқдаги сон экан.

$y = \arccos x$ функция учун

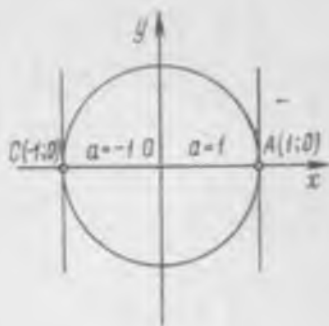
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

тенглик ўринли.

$y = \arccos x$ функциянинг графиги 10.31- расмда тасвирланган.



10. 32- расм.



10. 33- расм.

10.40- мисол. $y = \arccos x$ функциянинг баъзи қиймат арини ҳисобланг.

- 1) $\arccos 0 = \pi/2$, 2) $\arccos 1 = 0$,
- 3) $\arccos (-1) = \pi$, 4) $\arccos (1/2) = \pi/3$,
- 5) $\arccos (-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$, 6) $\arccos (-3/4) = -\arccos (3/4)$.

10.41-мисол. Косинуси a га тенг ёйлар тўпламини топинг.

Ечилиши. 1-ҳол $|a| < 1$. (10.32- расм). Қуйидаги ёйларга эгамиз: $\widehat{AP_1} = \arccos a$, $\widehat{AP_2} = -\arccos a$. Бу ёйларнинг ҳар бири a га тенг косинусга эга. Косинуси a га тенг ва P_1 нуқтада тугайдиган ёйлар тўплами

$$\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

формула билан, косинуси ўша a га тенг ва P_2 нуқтада тугайдиган ёйлар тўплами

$$-\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзилади.

Бу иккита формулани битта формулага бирлаштириш мумкин:

$$\pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2-ҳол. Ёй $a = \pm 1$ га тенг косинусга эга бўлсин (10.33- расм). У ҳолда A нуқтада (яъни $a = 1$ да) тугайдиган ёйлар тўплами

$$2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

формулалар билан, C нуқтада (яъни $a = -1$ да) тугайдиган ёйлар тўплами

$$\pi(2k + 1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзилади.

Косинуси a ($|a| < 1$) га тенг бўлган барча ёйлар (бурчаклар) ичида $[0, \pi]$ оралиқдаги $\arccos a$ ёй асосий ёй ҳисобланади. Агар $|a| > 1$ бўлса, $\arccos a$ маънога эга бўлмайди.

10.42-мисол. Агар $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ бўлса, α ни топинг.

Жавоб. $\alpha = \pm \arccos \sqrt{3}/2 + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

10.43-мисол. Косинуси 0,4 га тенг ёйлар тўпламини формула билан ёзинг.

Жавоб. $\alpha = \pm \arccos 0,4 + 2\pi k$.

10.44-мисол. Косинуси $-1/2$ га тенг ёйлар тўпламини формула билан ёзинг.

Жавоб. $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

10.4.2. Тангенс ва котангенснинг берилган қийматлари бўйича ёйни (бурчакни) яшаш. $\arctg x$ ва $\operatorname{arctg} x$ функциялар. Тангенсга тескари бўлган функция. $y = \operatorname{tg} x$ функция $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқда $-\infty$ дан $+\infty$ гача монотон ўсади, яъни $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ қийматлар тўплами ва $y \in \mathbb{R}$ тўплам (сон тўғри чизиғи) бир-бирига ўзаро бир қийматли аксланади. У ҳолда $y = \operatorname{tg} x$ функция $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ оралиқда монотон ўсувчи тескари функцияга эга. Бу функцияни *арктангенс функция* ($\arctg$) дейилади.

$y = \arctg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\mathbb{R}$ (сон тўғри чизиғи), $\arctg x$ нинг қийматлар тўплами эса $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқ бўлади.

$y = \arctg x$ функция таърифидан, барча $x \in \mathbb{R}$ учун $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$, яъни $\arctg x$ бу тангенс x га тенг бўлган $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги сон эканлиги келиб чиқади.

$y = \arctg x$ функция учун

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

тенглик ўринли.

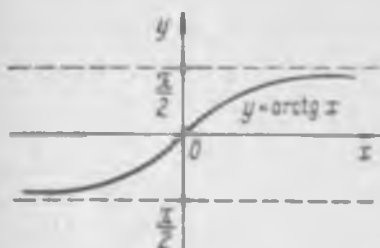
$y = \arctg x$ функциянинг графиги 10.34-расмда тасвирланган.

10.45-мисол. $y = \arctg x$ функциянинг баъзи қийматларини ҳисобланг.

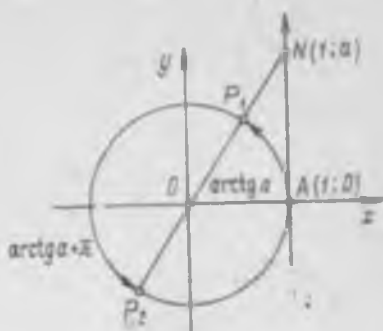
1) $\arctg 0 = 0$, 2) $\arctg \sqrt{3} = \pi/3$,

3) $\arctg(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, 4) $\arctg 1 = \pi/4$,

5) $\arctg(-1) = -\pi/4$.



10.34- расм.



10.35- расм.

10.46. Тангенс a га тенг ёйлар тўпламини топинг.

Ечилиши. $\overline{AP_1} = \arctg a$ ва $\overline{AP_2} = \arctg a + \pi$ ёйларга эгамиз (10.35- расм). Бу ёйларнинг ҳар бири a га тенг тангенсга эга. P_1 ва P_2 нуқталарда тугайдиган ёйлар тўплами

$$\arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

формула орқали ёзилади. Берилган a тангенсга эга бўлган ёйлар (бурчаклар) ичида $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги $\arctg a$ ёй асосий ёй ҳисобланади. $-\pi/2$ ва $\pi/2$ нуқталар ҳиссбга олинмайди, чунки бу ёйларнинг тангенс аниқланмаган.

10.47- мисол. Агар $\tg \alpha = \sqrt{3}$ бўлса, α ни топинг.

Жавоби. $\alpha = \arctg \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

10.48- мисол. Агар $\tg \alpha = -4/5$ бўлса, α ни топинг.

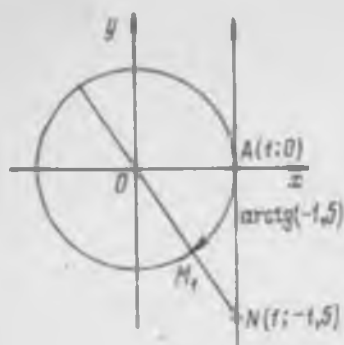
Ечилиши. $\alpha = \arctg (-4/5) + \pi k$, лекин $\arctg (-4/5) = -\arctg (4/5)$.

У ҳолда $\alpha = -\arctg (4/5) + \pi k$.

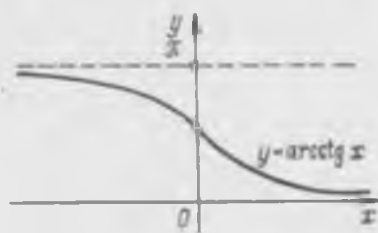
10.49- мисол. $\arctg (-1,5)$ ёйни ясанг.

10.36- расмда $\arctg (-1,5)$ ёйнинг ясалиши кўрсатилган.

Котангенсга тескари функция. $y = \ctg x$ функция $(0, \pi)$ оралиқда $+\infty$ дан $-\infty$ гача монотон камаяди ва ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилади, яъни $x \in (0, \pi)$ қийматлар тўплами ва $y \in \mathbb{R}$ (сон тўғри чизиғи) тўплам бир-бирига ўзаро бир қийматли аксланади. У ҳолда $y = \ctg x$ функция $x \in (0, \pi)$ оралиқда монотон камаювчи тескари функцияга эга бўлади. Бу функцияни **арккотангенс** функция ($\arctg \ctg$) дейилади.



10.36- расм.



10.37- расм.

$y = \arctg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси R (сон тўғри чизиги), қийматлар тўплами эса $(0, \pi)$ оралиқдир.

$y = \arctg x$ функциянинг таърифидан, барча $x \in R$ учун $\operatorname{ctg}(\arctg x) = x$, яъни $\arctg x$ бу котангенси x га тенг бўлган $(0, \pi)$ оралиқдаги сон эканлиги келиб чиқади.

$y = \arctg x$ функция учун

$$\arctg(-x) = \pi - \arctg x$$

формула ўринли.

$y = \arctg x$ функция графиги 10.37-расмда кўрсатилган.

10.50- мисол. $y = \arctg x$ функциянинг баъзи қийматларини ҳисобланг.

1) $\arctg 0 = \pi/2$, 2) $\arctg \sqrt{3} = \pi/6$,

3) $\arctg 1 = \pi/4$, 4) $\arctg(-1) = 3\pi/4$,

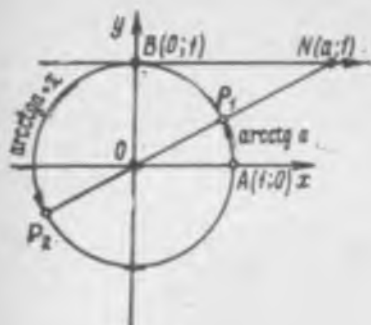
5) $\arctg(-\sqrt{3}) = 5\pi/6$.

10.51- мисол. Котангенси a га тенг ёйлар тўпламини топинг.

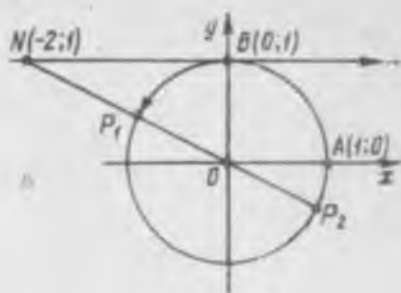
Ечилиши. $\widehat{AP}_1 = \arctg a$ ва $\widehat{AP}_2 = \arctg a + \pi$ ёйларга эгамиз (10.38- расм). Бу ёйларнинг ҳар бири a га тенг котангенсга эга, P_1 ва P_2 нуқталарда тугайдиган ёйлар тўплами

$$\arctg a + \pi k, \quad k \in Z$$

умумий формула билан ёзилади. Берилган a котангенсга эга бўлган ёйлар (бурчаклар) ичида $(0, \pi)$ оралиқдаги



10.38- расм.



10.39- расм.

$\operatorname{arctg} a$ ёй асосий ёй ҳисобланади. 0 ва π нуқталар ҳисобга олинмайди, чунки бу ёйларнинг котангенси аниқланмаган.

10.52- мисол. $\operatorname{arctg}(-2)$ ёйни ясанг.

$\operatorname{arctg}(-2)$ ёйнинг ясалиши 10.39- расмда кўрсатилган.

10.4.3. Энг содда тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликлар. 10.9- таъриф. Қуйидаги тенгламалар энг содда тригонометрик тенгламалар дейилади: $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, $\operatorname{ctg} x = m$, бунда m — берилган сон.

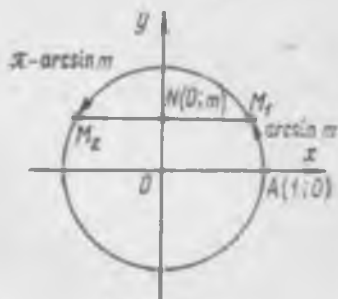
Тригонометрик тенгламани ечиш деган сўз тригонометрик функцияси берилган m қийматга эга барча ёйлар (бурчаклар) тўпламини топиш демакдир.

10.10- таъриф. Қуйидаги тенгсизликлар энг содда тригонометрик тенгсизликлар дейилади: $\sin x > m$, $\sin x < m$, $\cos x > m$, $\cos x < m$, $\operatorname{tg} x < m$, $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{ctg} x < m$, $\operatorname{ctg} x > m$, бунда m берилган сон.

Энг содда тригонометрик тенгликсизликни ечиш деган сўз бу берилган тенгсизликни аниқ сонли тенгсизликка айлантирадиган барча ёйлар (бурчаклар) тўпламини топиш демакдир.

$\sin x = m$ тенглама.
 $\sin x > m$ ва $\sin x < m$ тенгсизликлар.
 $\sin x = m$ тенгламани ечиш талаб қилинади.

Ечилиши. Агар $|m| < 1$ бўлса, синуси m га тенг ва охирилари ординаталар ўқиға нисбатан симметрик бўлган



10.40- расм.

иккита $\arcsin m$ ва $\pi - \arcsin m$ ёйга эгамиз (10.40-расм). $[-\pi/2, \pi/2]$ ораликда абсолют қиймати бўйича энг кичик ва синуси m га тенг бўлган ёй $\sin x = m$ тенгламанинг бош ечими дейилади.

$\sin x = m$ ($|m| \leq 1$) тенгламани қаноатлантирувчи изланаётган барча ёйлар тўплами топилган иккита ёйга синуснинг ихтиёрий бутун сондаги даврини қўшиш билан топилади:

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k \end{cases}$$

ёки

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ -\arcsin m + (2k + 1)\pi. \end{cases}$$

Умумий ечимни битта

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзиш мумкин.

Агар $|m| > 1$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас.

Хусусий ҳоллар:

$$1) \sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$2) \sin x = 0, \quad x = \pi k;$$

$$3) \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

10.53-мисол. $\sin x = 1/2$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Бош ечим $[-\pi/2, \pi/2]$ ораликдаги ёй, яъни синуси $1/2$ га тенг бўлган $\pi/6$ ёй бўлади. Тенгламанинг умумий ечими

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

формула билан ёзилади.

10.54-мисол. $\sin x > 1/2$ тенгсизлиكنи ечинг.

Ечилиши. Синуснинг чегараланганлик хоссасига кўра берилган тенгсизлиكنи $1/2 < \sin x < 1$ кўринишда ёзилиши мумкин. $\sin x > 1/2$ тенгсизлигини биринчи даврда ($\pi/6, 5\pi/6$) ораликдаги ёйлар қаноатлантиради (10.41-расм). Синуснинг даврийлигига асосан

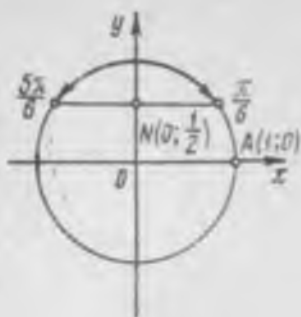
$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right)$$

ёйлар тўплами умумий ечим бўлади.

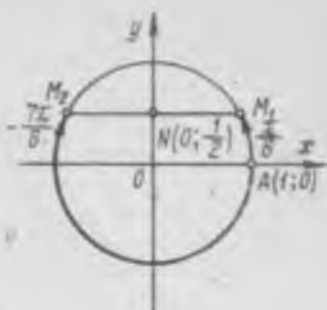
10.55-мисол. $\sin x < 1/2$ тенгсизлиكنи ечинг.

Ечилиши. Синуснинг чегараланганлик хоссасини ҳисобга олиб, берилган тенгсизлиكنи

$$-1 < \sin x < 1/2$$



10.41- расм.



10.42- расм.

кўринишида ёзиб олиш мумкин. $\sin x < 1/2$ тенгсизлиكنи биринчи даврда $(-\pi/6, \pi/6)$ ораликдаги ёйлар тўплами қаноатлантиради. Синуснинг даврийлик хоссасига кўра

$$\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

ёйлар тўплами тенгсизлиكنинг умумий ечими бўлади (10.42- расм).

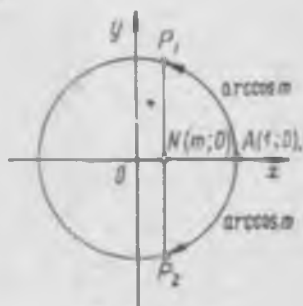
$\cos x = m$ тенглама. $\cos x > m, \cos x < m$ тенгсизликлар. $\cos x = m$ тенгламани ечиш талаб қилинади.

Ечилиши. Агар $|m| < 1$ бўлса, абсциссалар ўқига нисбатан симметрик ва косинуси m га тенг бўлган иккита $\overline{AP_1} = \arccos m$ ва $\overline{AP_2} = -\arccos m$ ёйларга эгамиз (10.43- расм).

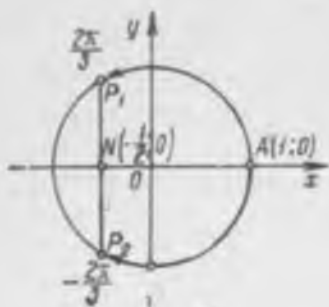
Косинуси m га тенг ва $[0, \pi]$ ораликдаги энг кичик мусбат $\arccos m$ ёй $\cos x = m$ тенгламанинг бош ечими дейилади. $\cos x = m$ ($|m| < 1$) тенгламани қаноатлантирадиган изланаётган барча ёйлар тўплами топилган иккита ёйга косинуснинг ихтиёрий сондаги жуфт даврини қўшиш билан топилади:

$$x = \pm \arccos m + 2\pi k.$$

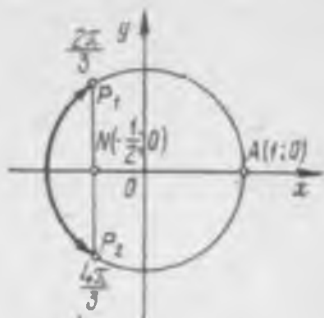
Агар $|m| > 1$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас. Хусусий ҳоллар:



10.43- расм.



10.44- расм.



10.45- расм.

1) $\cos x = -1$, $x = \pm \pi + 2\pi k$ ёки $x = (2k + 1)\pi$;

2) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; 3) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$.

10. 56- мисол. $\cos x = -1/2$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $[0, \pi]$ ораллиқдаги ёй, яъни косинуси $-1/2$ га тенг

бўлган $\overline{AP}_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ёй тенгламанинг бош ечими бўлади.

Тенгламанинг умумий ечими: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ (10. 44- расм).

10.57- мисол. $\cos x < -1/2$ тенгсизлиكنи ечинг.

Ечилиши. Косинуснинг чегараланганлик хоссасини ҳисобга олиб, тенгсизлиكنи

$$-1 < \cos x < -1/2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ёй $\overline{AP}_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Ёй $\overline{AP}_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ (10. 45- расм).

$\cos x < -1/2$ тенгсизлиكنи биринчи даврда $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ ораллиқдаги ёйлар қаноатлантиради. Косинуснинг даврийлигига асосан

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$$

ёйлар тўплами умумий ечи бўлади.

10.58- мисол. $\cos x > -1/2$ тенгсизлиكنи ечинг.

Ечилиши. Косинуснинг чегараланганлик хоссасига кўра

$$-1/2 < \cos x < 1$$

ни ёзамиз. $\cos x > -1/2$ тенгсизлиكنи биринчи даврда $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ораллиқдаги ёйлар қаноатлантиради (10.44- расм).

Тенгсизлигининг умумий ечими $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$

ёйлар тўплами бўлади.

$\operatorname{tg} x = m$ тенглама. $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{tg} x < m$ тенгсизликлар. $\operatorname{tg} x = m$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Тангенс m га тенг ва $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги абсолют қиймати бўйича энг кичик $\operatorname{arctg} m$ ёй $\operatorname{tg} x = m$ тенгламанинг бош ечими дейилади.

Изланаётган $\operatorname{tg} x = m$ тенгламани қансатлантирадиган барча ёйлар тўплами бош ечимга тангенсининг ихтиёрий сондаги даврини қўшиш орқали топилади:

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k.$$

Хусусий ҳол: $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k$.

10.59-мисол. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $(-\pi/2, \pi/2)$ оралиқдаги ёй, яъни тангенс $\sqrt{3}$ га тенг бўлган $\frac{\pi}{3}$ бош ечим бўлади. Умумий ечим

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

формула билан ёзилади.

10.60-мисол. $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ тенгсизлигини ечинг.

Ечилиши. Тангенсининг чегараланмаганлигини ҳисобга олиб, $\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < +\infty$ деб ёзамиз. $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ тенгсизлигини биринчи даврда $(\pi/3, \pi/2)$ оралиқдаги ёйлар қаноатлантиради. Тангенсининг даврийлигига асосан

$$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

ёйлар тўплами умумий ечим бўлади.

Баъзи тригонометрик тенгламаларнинг ечилиши. Энг содда тригонометрик тенгламага келтириладиган анча мураккаб кўринишдаги тригонометрик тенгламаларга доир бир нечта мисолларни кўриб чиқамиз.

10.61-мисол. $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$ тригонометрик тенгламани ечинг.

Ечилиши. $\cos^2 x$ ни унга афвий тенг $1 - \sin^2 x$ ифода билан алмаштириб, $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани $\sin x$ га нисбатан ечиб, $\sin x = 2$ ва $\sin x = -1/2$ ни ҳосил қиламиз. Берилган тенглама иккита энг содда тенгламага тенг кучли. $\sin x = 2$ тенглама ечимга эга эмас. $\sin x = -1/2$ тенгламадан

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ва $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ёки $x = -\frac{\pi}{6} (-1)^n + \pi n$, бунда k, m — ихтиёрий бутун сонлар.

10.62-мисол. $\cos x - \sin x = 0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $\cos x - \sin x = 0$ тенглама бир жинсли (чап томони $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли бўлган, унг томони эса нолга тенг тригонометрик тенгламалар бир жинсли тенгламалар дейилади).

Тенгламанинг иккала томонини $\cos x$ га бўламиз (бундай бўлиш ўринли, чунки $\cos x = 0$ да тенглача қанъатлантирилмайди):

$$1 - \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

10.63-мисол. $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Берилган тенглама бир жинсли. Тенгламанинг иккала томонини $\cos^2 x$ га ($\cos^2 x \neq 0$) бўламиз. $2 \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Тенгламани $\operatorname{tg} x$ га нисбатан ечиб, $\operatorname{tg} x = -1$ ва $\operatorname{tg} x = 3/2$ ни ҳосил қиламиз. Биринчи тенгламадан $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ва иккинчи тенгламадан $x = \arctan \frac{3}{2} + \pi k$ га эга бўламиз.

10.64-мисол. $\cos 5x = 0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $5x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, бундан $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} k$.

10.5-§. Қўшиш формулалари ва уларнинг натижалари

10.5.1. Икки аргумент йигиндиси ва айирмасининг тригонометрик функциялари. Икки аргумент йиғиндиси ва айирмасининг косинуси. Бирлик доира-



10. 46- расм.

да $\vec{OM} = \{x; y\}$ радиус-вектор Ox ўқ билан α бурчак ва $\vec{ON} = \{x_1; y_1\}$ радиус-вектор β бурчак ҳосил қилсин (10.46-расм), у ҳолда $|\alpha - \beta| < \pi$ шартда $\vec{ON}$ ва $\vec{OM}$ радиус вектор орасидаги бурчак $\alpha - \beta$ бўлади. Бирлик доирада мос равишда қуйидагиларга эгамиз:

$$x = \cos \alpha, y = \sin \alpha; x_1 = \cos \beta \text{ ва } y_1 = \sin \beta.$$

$\vec{OM}$ ва $\vec{ON}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = |\vec{OM}| \cdot |\vec{ON}| \cdot \cos(\alpha - \beta)$ бўлади. Координаталар орқали ифодаланган скаляр кўпайтма

$$\vec{OM} \cdot \vec{ON} = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

га тенг.

Векторларнинг узунлиги 1 га тенг бўлгани учун

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (10.68)$$

га эгамиз.

Икки аргумент айирмасининг косинуси бу аргументлар косинуслари йиғиндисига шу аргументлар синуслари кўпайтмасини қўшилганига тенг.

(10.68) формула α ва β аргументларнинг барча қийматлари учун ўринли, чунки исботлашда фойдаланилган теоремалар аргументларнинг ихтиёрий қийматлари учун ўринли.

(10.68) формулада β аргументни $-\beta$ га алмаштириб,

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos (-\beta) + \sin \alpha \sin (-\beta)$$

ёки

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (10.69)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Икки аргумент йиғиндисининг косинуси шу аргументлар косинуслари кўпайтмасидан уларнинг синуслари кўпайтмасини айирилганига тенг.

Икки аргумент йиғиндисини ва айирмасининг синуси. Икки аргумент йиғиндисининг синуси формуласини ҳосил қилиш учун (10.68) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \\ &= \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta \end{aligned}$$

яъни

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (10.70)$$

Икки аргумент йиғиндисининг синуси биринчи аргумент синуси билан иккинчи аргумент косинусининг кўпайтмаси плюс иккинчи аргумент синуси билан биринчи аргумент косинусининг кўпайтмасига тенг.

(10.70) формулада β аргументни $-\beta$ га алмаштириб
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$

ёки

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad (10.71)$$

ни ҳосил қиламиз.

Икки аргумент айирмасининг синуси биринчи аргумент синуси билан иккинчи аргумент косинуси кўпайтмасидан иккинчи аргумент синуси билан биринчи аргумент косинуси кўпайтмасини айирилганига тенг

(0.69) — (10.71) формулалар α ва β ларнинг исталган қийматлари учун ўринли.

Аввал келтириб чиқарилган ҳамма келтириш формулалари қўшиш формуласининг хусусий ҳолларидир.

Икки аргумент йиғиндисини ва айирмасининг тангенсини. (10.70) ва (10.69) формуладан икки аргумент йиғиндисининг тангенсини учун формулани ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

$\cos\alpha \neq 0$ ва $\cos\beta \neq 0$ деб фараз қили ва ўнг томонда турган касрнинг сурат ва махражини $\cos\alpha \cos\beta$ кўпайтмага бўлиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \end{aligned}$$

ёки

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \quad (10.72)$$

Икки аргумент йиғиндисининг тангенсини шу аргументлар тангенслари йиғиндисини бир билан бу аргументлар тангенсларининг кўпайтмаси орасидаги айирмага бўлинганига тенг.

(10.72) формулада β аргументни $-\beta$ га алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(-\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \quad (10.73)$$

Икки аргумент айирмасининг тангенси шу аргументлар тангенслари айирмасини бир ва бу аргументлар тангенсларининг кўпайтмаси йиғиндисига бўлинганига тенг.

Котангенс учун қўшиш ва айириш формулаларини тангенс формулалари каби ҳосил қилиш мумкин:

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}. \quad (10.74)$$

10.65-мисол. $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$ ва $\operatorname{ctg} 15^\circ$ ни ҳисобланг.

Ечилиши.

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 5^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}; \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

10.66-мисол. $\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. (10.70) формулани қўлланиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ = \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2.$$

10.67-мисол. Агар $\cos \alpha = 3/5$, $\cos \beta = 4/5$ ва $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$ бўлса, $\cos(\alpha + \beta)$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. α ва β бурчаклар тегишли бўлган чоракни ҳисобга олиб, $\sin \alpha$ ва $\sin \beta$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \\ &= -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Берилган па топилган қийматларни (10.69) формулага қўйиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

10.68- мисол. $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 0$, яъни $\sin(2x - x) = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi k$.

10.5.2. Иккиланган ва ярим аргументнинг тригонometric функциялари. Аргумент кўшилувчилари тенг бўлган хусусий ҳол учун қўшиш теоремасини кўриб ўтамиз. Бунда 2α аргументнинг тригонометрик функциясини α аргументнинг тригонометрик функцияси орқали ифодалаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Биз иккиланган аргумент тригонометрик функцияларининг қуйидаги формулаларини ҳосил қилдик:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (10.74)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (10.75)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{ва} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k. \quad (10.76)$$

Иккиланган аргумент косинусининг формуласини қуйидаги кўринишларда қўлланиш қулай:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Биз иккиланган аргумент косинусини бу аргументнинг фақат косинуси ёки фақат синуси орқали ифодалаш формулаларини ҳосил қилдик:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad (10.77)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad (10.78)$$

10.69- мисол. $\operatorname{tg} 3\alpha$ ни $\operatorname{tg} \alpha$ орқали ифодаланг.

Ечилиши.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

10.70- мисол. Агар $\sin \alpha = 4/5$ ва $\pi/2 < \alpha < \pi$ бўлса, $\sin 2\alpha$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. $\cos \alpha = -\sqrt{1 - (4/5)^2} = -\frac{3}{5}$, (10.74) формулага кўра, $\sin 2\alpha = 2(4/5)(-3/5) = -24/25$ ни ҳосил қиламиз.

10.71- мисол. Агар $\sin \alpha = -0,3$ бўлса, $\cos 2\alpha$ ни ҳисобланг.
 Ечилиши. (10.78) формулани қўлланиб, $\cos 2\alpha = 1 - 2(-0,3)^2 = 0,82$ ни ҳосил қиламиз.

10.72- мисол. Агар $\operatorname{tg} \alpha = -0,6$ бўлса, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ни ҳисобланг.
 Ечилиши. (10.76) формула бўйича $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(-0,6)}{1-0,36} = \frac{-1,2}{0,64} = -\frac{15}{8}$ ни ҳосил қиламиз.

10.73- мисол. $\sin 3\alpha$ ни ҳисобланг.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \\ &+ \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

17.74- мисол. $\sin x \cos x = 1/2$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Чап ва ўнг томонни 2 га кўпайтириб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$2 \sin x \cos x = 1, \quad \sin 2x = 1, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

α аргументнинг тригонометрик функцияларини $\alpha/2$ аргументнинг тригонометрик функцияларни орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (10.77) ва (10.78) формулалардан фойдаланамиз. Бу формулаларда α аргументни $\alpha/2$ аргумент билан алмаштириб, қуйдагиларни ҳосил қиламиз:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (10.79)$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ёки} \quad \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (10.80)$$

бундан

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (10.81)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (10.82)$$

Бу ерда илдиз олдидаги ишора α аргументнинг қайси чоракда жойлашишига қараб қўйилади.

(10.82) ни (10.81) га ҳадма-ҳад бўлиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k. \quad (10.83)$$

Илдиз олдидаги ишорани $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ нинг ишораси билан бир хил қилиб олиш керак: агар $\alpha/2$ I ёки III чоракка те-

гишли бўлса, + ишора, $\alpha/2$ II ёки IV чоракка тегишли бўлса — ишора олинади.

(10.81) ни (10.82) га ҳадма-ҳад бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, \quad \alpha \neq 2\pi k. \quad (10.84)$$

(10.83) ва (10.84) формулалар ўрнига $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ учун α аргументнинг тригонометрик функцияси орқали рационал ифодани берувчи формулаларни ҳосил қилиш мумкин.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ га эгамиз, } \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0 \text{ деб оламиз. Бу шарт-}$$

да ўнг томоннинг сурат ва махражини $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

лекин

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \text{ ва } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha. \text{ у ҳолда}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k. \quad (10.85)$$

Худди шунга ўхшаш қуйидаги тенгликларни исбот қилиш мумкин:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (10.86)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (10.87)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (10.88)$$

(10.86) ва (10.87) тенгликларда чап ва ўнг томонлар ҳар хил аниқланиш соҳаларига эга. (10.86) тенгликда чап томон $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, ўнг томон эса $\alpha \neq \pi k$ аниқланиш соҳасига эга. (10.87) тенгликда чап томон $\alpha \neq 2\pi k$, ўнг томон эса $\alpha \neq \pi k$ аниқланиш соҳасига эга. (10.88) тенгликда аниқланиш соҳалари устама-уст тушади. (10.86) ва (10.87) фор-

мулаларни тригонометрик тенгламалар ечишда қўлланганда уларнинг аниқланиш соҳалари устма-уст тушмаслигини ҳисобга олиш керак.

10.75-мисол. $\sin \alpha = 0,6$ ва $0 < \alpha < \pi/2$; $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ ва $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ ни топиш.

Ечилиши. $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$. (10.82) ва (10.81) формулалар бўйича қуйидагини топамиз:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,8}{2}} = \sqrt{0,1} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,8}{2}} = \sqrt{0,9} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

Тригонометрик функцияларни ярим аргумент тангенс орқали ифодалаш. Ихтиёрй аргументли барча тригонометрик функциялар шу аргумент ярмининг тангенс орқали рационал ифодаланади. $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ ни $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ орқали ифодалаймиз.

$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ларга эгамиз. Бу тенгликларнинг ўнг томонини $1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонини $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (10.89)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (10.90)$$

(10.89) ва (10.90) формулалардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (10.91)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (10.92)$$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, да, яъни барча $\alpha = \pi(2k + 1)$, $k \in Z$ қийматларда ҳосил қилинган формулалар ўз маъносини йўқотди.

10.76-мисол. Агар $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$ бўлса, $\frac{5 \cos \alpha - 3}{10 \sin \alpha + 1}$ ифодани ҳисобланг.

Ечилиши. (10.89) ва (10.90) формулалар бўйича $\sin \alpha = \frac{6}{1+9} = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}$ ни ҳосил қиламиз, демак,

$$\frac{5 \cos \alpha - 3}{10 \sin \alpha + 1} = \frac{-4 - 3}{6 + 1} = -1.$$

10.77-мисол. $3 \sin x + 4 \cos x = 4$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $\sin x$ ва $\cos x$ ни $z = \operatorname{tg}(x/2)$ орқали ифодаalayмиз:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

у ҳолда

$$\frac{6z}{1+z^2} + \frac{4-4z^2}{1+z^2} = 4, \quad 4z^2 - 3z = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{3}{4}.$$

Берилган тенглама $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ ва $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ тенгламаларга тенг кучли, бундан $\frac{x}{2} = \pi k$, $x = 2\pi k$,

$$\frac{x}{2} = \arctg \frac{3}{4} + \pi k, \quad x = 2 \arctg \frac{3}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

10.5.3. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йигиндига алмаштириш. Тригонометрик тенгламаларни ечишда, тригонометрик ҳисоблашларни бажаришда тригонометрик функцияларнинг кўпайтмаларини ($\sin \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$, $\sin \alpha \sin \beta$) алгебраик йигиндига алмаштириш ҳоллари кўп учрайди.

(10.70) ва (10.71) тенгликлар

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

ни ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta,$$

бундан

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]. \quad (10.93)$$

Қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

((10.69) ва (10.68) га қаранг). Бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб ва биринчи тенгликни иккинчисидан айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin \alpha \sin \beta.$$

Бундан

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad (10.94)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (10.95)$$

(10.93) — (10.95) формулалар тригонометрик функциялар купайтмасини алгебраик йиғиндига алмаштириш учун қўлланилади.

10.78- мисол. $\sin 25^\circ \sin 5^\circ$ купайтмани йиғинди кўринишида тасвирланг.

Ечилиши. (10.95) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 25^\circ \sin 5^\circ = \frac{1}{2} [\cos 20^\circ - \cos 30^\circ] = \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

10.79- мисол. $\sin 40^\circ \cos 20^\circ$ купайтмани йиғинди кўринишида тасвирланг.

Ечилиши. (10.93) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 40^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2} [\sin 60^\circ + \sin 20^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \sin 20^\circ.$$

10.80- мисол. $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4}$ купайтмани алгебраик йиғиндига алмаштиринг.

$$\begin{aligned} \text{Ечилиши. } \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4} &= \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \right) \cos \frac{x}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{3x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right] \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left[\cos \frac{13x}{12} + \cos \frac{5x}{12} + \cos \frac{7x}{12} + \cos \frac{x}{12} \right]. \end{aligned}$$

Тригонометрик функциялар даражаларини пасайтириш. $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$ ва ҳ. к. даражаларни пасайтириш учун тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғиндига алмаштиришдан фойдаланилади.

10.81- мисол.

$$\sin^2 x = \sin x \sin x = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

10.82- мисол.

$$\cos^2 x = \cos x \cos x = \frac{1}{2} (\cos 0 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

10.83- мисол.

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \sin^2 x \sin x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \sin x = \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} (\sin 3x - \sin x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

Бу ерда учланган аргумент синуси учун формула ҳосил қиламиз:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \quad (10.96)$$

$$\begin{aligned} \text{10.84- мисол. } \cos^3 x &= \cos^2 x \cos x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \cos x = \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) = \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x. \end{aligned}$$

Бу ердан учланган аргумент косинуси учун формула ҳосил қиламиз:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (10.97)$$

$$\begin{aligned}
 10.85 \text{ мисол. } \cos^3 x &= \cos^2 x \cos x = \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \right) \times \\
 &\times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \cos 3x + \frac{3}{8} \cos x \cos 2x + \\
 &+ \frac{1}{8} \cos 3x \cos 2x = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \cos 3x + \\
 &+ \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) = \frac{5}{8} \cos x + \\
 &+ \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x.
 \end{aligned}$$

10.5.4. Тригонометрик функциялар алгебраик йиғиндисини кўпайтмага алмаштириш. Тригонометрик функцияларнинг йиғиндиси ва айирмасини бошқа аргументнинг тригонометрик функциялари кўпайтмаси шаклида тасвирлаймиз.

Синуслар йиғиндиси. (10.93) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \sin B.$$

$$A+B=\alpha, \quad A-B=\beta \text{ бўлсин; ушбу}$$

$$\begin{cases} A+B=\alpha, \\ A-B=\beta \end{cases}$$

системани A ва B аргументларга нисбатан ечиб,

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad B = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. у ҳолда

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (10.98)$$

Икки аргумент синусларининг йиғиндиси бу аргументлар йиғиндиси ярмининг синусини 2лар айирмаси ярмининг косинусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Синуслар айирмаси. Синуслар айирмасини ҳосил қилиш учун (10.98) формулада β аргументни $-\beta$ аргументга алмаштирамиз:

$$\sin \alpha + \sin(-\beta) = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ёки

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (10.99)$$

Икки аргумент синуслари айирмаси бу аргументлар айирмаси ярмининг синусини улар йиғиндиси ярмининг косинусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Косинуслар йиғиндиси. Икки аргумент косинусининг йиғиндиси формуласини чиқариш учун (10.98) формуладан фойдаланамиз. Бунда ҳар бир аргумент косинусини тўлдирувчи аргумент синуси билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},\end{aligned}$$

яъни

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (10.100)$$

Икки аргумент косинусларининг йиғиндиси бу аргументлар йиғиндиси ярмининг косинусини улар айирмаси ярмининг косинусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Косинуслар айирмаси. Юқоридагига ўхшаш

$$\begin{aligned}\cos \alpha - \cos \beta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},\end{aligned}$$

яъни

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}. \quad (10.101)$$

Икки аргумент косинусларининг айирмаси бу аргументлар йиғиндиси ярмининг синусини уларнинг тескари тартибда олинган айирмаси ярмининг синусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Тангенслар йиғиндиси. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} +$
 $+\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

яъни

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi l. \quad (10.102)$$

Тангенслар айирмаси. (10.102) формулада β аргументни $-\beta$ аргумент билан алмаштириб қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos(-\beta)},$$

яъни

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi l. \quad (10.103)$$

$1 + \cos \alpha$, $1 - \cos \alpha$, $1 + \sin \alpha$ ва $1 - \sin \alpha$ ифода ларни кўпайтмага алмаштириш. Иккиланган аргумент косинуси формуласида α аргументни $\alpha/2$ аргумент билан алмаштириб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{ва} \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

унда

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (10.104)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (10.105)$$

$$\begin{aligned} 1 + \sin \alpha &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \cos^2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} = \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

яъни

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (10.106)$$

$$1 - \sin \alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \sin^2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} = \\ = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Яъни

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (10.107)$$

10.86- мисол. $4 \sin^2 5x + 2 \cos^2 x + \cos 10x - 3 = 0$ тенгламани ечинг.

$$\text{Ечилиш и. 4. } \frac{1 - \cos 10x}{2} + 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos 10x - 3 = 0,$$

$$2 - 2 \cos 10x + 1 + \cos 2x + \cos 10x - 3 = 0,$$

$$\cos 2x - \cos 10x = 0, \quad 2 \sin 6x \sin 4x = 0,$$

$$\sin 6x = 0, \quad 6x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} \cdot k,$$

$$\sin 4x = 0, \quad 4x = \pi l, \quad x = \frac{\pi}{4} \cdot l.$$

Ёрдамчи бурчак киритиш методи билан логарифмик кўринишга келтириш. Берилган a сонни *ёрдамчи бурчак* деб аталадиган бирор аргумент тригонометрик функциясининг қиймати деб қараш мумкин, чунки a нинг исталган қийматида

$$\operatorname{tg}(\arctg a) = a$$

тенглик ўринли, $|a| \leq 1$ да эса

$$\sin(\arcsin a) = a$$

ва

$$\cos(\arccos a) = a$$

ўринли. Бу ҳол исталган икки соннинг алгебраик йнғиндисини тригонометрик функциялар қийматларининг алгебраик йнғиндиси сифатида ифодалашга, ва демак, тригонометрик функциялар алгебраик йнғиндисини кўпайтмага алмаштириш формулаларини қўлланишга имкон беради.

10.87- мисол. Ёрдамчи бурчак киритиш методи ёрдамида қуйидаги ифодаларни кўпайтмага алмаштиринг: 1) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha$, $\sqrt{2} \sin \alpha + 1$, 3) $4 \cos^2 \alpha - 1$, 4) $a + b$, 5) $a^2 + b^2$.

Ечилиши.

$$1) \sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)}{\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha} = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)}{\cos \alpha}.$$

$$2) \sqrt{2} \sin \alpha + 1 = \sqrt{2} \left(\sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$3) 4 \cos^2 \alpha - 1 = 4 \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \right) = 4 \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right) = \\ = 4 \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) \left(\cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ = 4 \cdot 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ = 4 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right).$$

$$4) a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) = a(1 + \operatorname{tg} \varphi) = a \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \varphi \right) = \\ = \frac{a \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \varphi} = \frac{a \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)}{\cos \varphi}$$

бу ерда $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

$$5) a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi}.$$

бу ерда $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

$a \sin \alpha + b \cos \alpha$ (a ва b — нолга тенг бўлмаган ихтиёрый ҳақиқий сонлар) ифода ларни логарифмик кўринишга келтириш. Берилган ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right):$$

лекин

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| < 1, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| < 1 \text{ ва } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 = 1$$

бўлгани учун шундай φ бурчак топиш мумкинки, унда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi \quad (10.108)$$

ўринли бўлади. У ҳолда

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha) = \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, биз

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha + \varphi) \quad (10.109)$$

ни ҳосил қилдик. Бу ер φ бурчак (10.108) системадан топилади.

φ бурчакни $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ тенгликдан топиш мумкин, чунки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

У ҳолда

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin\left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right).$$

10.88- мисол. Қуйидагиларни логарифмик кўринишга келтиринг:

$$1) 4 \sin \alpha + 3 \cos \alpha, \quad 2) \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha.$$

Ечилиши. 1) $\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, у ҳолда $4 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 5 \sin\left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, у ҳолда $\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ёрдамчи бурчак киритиш методи билан $a \sin x + b \cos x = c$ кўринишдаги тенгламаларни

ечиш. $a > 0$ деб фараз қиламиз. Тенгламанинг чап томонини логарифмик кўринишга келтирамиз:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = c,$$

бундан

$$\sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Агар $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$, яъни $c^2 < a^2 + b^2$ бўлса, тенглама ечимларга эга. Шунинг учун тенглама ечимга эга ёки йўқлиги ҳақида бу тенгсизлик бўйича хулоса чиқариш мумкин. Тенглама илдиэларини қуйидаги формула билан ёзамиз:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi k.$$

10.89-мисол. Ёрдамчи бурчак киритиш методидан фойдаланиб, $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$ тенгламани ечинг.

Ечилиши.

$$\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad 2 \sin \left(x + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right) = 2,$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1, \quad x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

10.5.5. Мисоллар ечиш. 10.90-мисол. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ йигиндини кўпайтмага алмаштиринг.

Ечилиши. $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. $\sin \gamma = \sin [\pi - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$. Унда $\sin \gamma$ ни $\sin(\alpha + \beta)$ га алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \left(2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

лекин $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, шунинг учун

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2},$$

демак,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Шундай қилиб, агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, бу аргументлар синусларининг йигиндиси ярим аргументлар косинуслари кўпайтмасининг тўрт бараварига тенг экан.

$\sin f(x) = \sin \varphi(x)$, $\cos f(x) = \cos \varphi(x)$, $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x)$
кўринишдаги тригонометрик тенгламалар. Баъзи бир тригонометрик тенгламаларни бир исмли тригонометрик функциялар тенглиги шаклига келтириш мумкин:

$$\sin x = \sin y, \cos x = \cos y, \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y.$$

x ва y аргументнинг бир хил исмли тригонометрик функциялари тенг бўлиши учун шу x ва y аргументлар қаноатлантириши лозим бўлган шартларни аниқлаймиз.

Икки аргумент синуслари ($\sin x = \sin y$) тенг бўлиши учун қуйидаги шартлардан бири бижарилиши зарур ва етарли:

$$1) x + y = (2k + 1)\pi,$$

$$2) x - y = 2k\pi.$$

10.91-мисол.

$$1) \sin 3,8\pi = \sin 1,2\pi, \text{ чунки, } 3,8\pi + 1,2\pi = 5\pi,$$

$$2) \sin(\alpha - 5\pi) = \sin(4\pi - \alpha), \text{ чунки } \alpha - 5\pi + 4\pi - \alpha = -\pi,$$

$$3) \sin 5,1\pi = \sin(-2,9\pi), \text{ чунки, } 5,1\pi - (-2,9\pi) = 8\pi,$$

4) $\sin 2,2\pi \neq \sin 0,9\pi$, чунки синуслар тенглигининг шартларидан ҳеч бири қаноатлантирилмади:

$$2,2\pi + 0,9\pi = 3,1\pi \neq (2k + 1)\pi,$$

$$2,2\pi - 0,9\pi = 1,3\pi \neq 2k\pi.$$

Исботи. $\sin x = \sin y$, $\sin x - \sin y = 0$,

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0.$$

Бу ердан $\sin \frac{x-y}{2} = 0$ ёки $\cos \frac{x+y}{2} = 0$ эканлиги

келиб чиқади, яъни $\frac{x-y}{2} = \pi k$, $x - y = 2k\pi$.

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x+y = \pi + 2\pi k = (2k+1)\pi.$$

10.92- мисол. $\sin 3x = \sin 4x$ тенгламани ечинг.
Ечилиши. $3x + 4x = (2k+1)\pi$, $7x = (2k+1)\pi$,

$$x = (2k+1) \frac{\pi}{7}, \quad 4x - 3x = 2\pi, \quad x = 2\pi.$$

Икки аргумент косинуслари тенг бўлиши учун ($\cos x = \cos y$) қуйидаги шартлардан бири бажарилиши зарур ва етарли:

- 1) $x + y = 2\pi$,
- 2) $x - y = 2\pi$.

10.93- мисол.

- 1) $\cos 2,7\pi = \cos 1,3\pi$, чунки $2,7\pi + 1,3\pi = 4\pi$;
- 2) $\cos 7,2\pi = \cos 1,2\pi$, чунки $7,2\pi - 1,2\pi = 6\pi$;
- 3) $\cos 580^\circ = \cos 220^\circ$, чунки $580^\circ - 220^\circ = 360^\circ$;
- 4) $\cos 1,3\pi \neq \cos 3,7\pi$ чунки косинуслар тенглигининг шартларидан ҳеч бири қаноатлантирилмайди:

$$1,3\pi + 3,7\pi = 5\pi \neq 2k\pi, \quad 1,3\pi - 3,7\pi = -2,4\pi \neq 2k\pi.$$

Исботи. $\cos x = \cos y$, $\cos x - \cos y = 0$,

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} = 0.$$

$\sin \frac{x+y}{2} = 0$, ёки $\sin \frac{y-x}{2} = 0$, ёки $\sin \frac{x-y}{2} = 0$, бундан
 $\frac{x+y}{2} = \pi k$ ёки $\frac{x-y}{2} = \pi k$, яъни $x+y = 2\pi k$ ёки $x-y = 2\pi k$.

10.93- мисол. $\cos 5x = \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $5x + x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{24} (8k+1)$,

$$5x - x + \frac{\pi}{4} = 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{16} (8k-1).$$

10.94- мисол. $\cos x = \sin 3x$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. $\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

$$x + \frac{\pi}{2} - 3x = 2\pi k, \quad -2x = 2\pi k - \frac{\pi}{2} \quad \text{ёки} \quad 2x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{4} (4l+1), \quad x - \frac{\pi}{2} + 3x = 2\pi k, \quad 4x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{8} (4k+1).$$

Икки аргумент тангенслари тенг бўлиши учун ($\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$) бир вақтни ўзида қуйидаги икки шартнинг бажарилиши зарур ва етарли: 1) берилган аргументларнинг ҳар бирини тангенс мавжуд; 2) $x - y = \pi k$.

10.95- мисол.

$\operatorname{tg} 5,3\pi = \operatorname{tg} 0,3\pi$, чунки $5,3\pi - 0,3\pi = 5\pi$;

2) $\operatorname{tg} 2,8\pi = \operatorname{tg}(-1,2\pi)$, чунки $2,8\pi - (-1,2\pi) = 4\pi$;

3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$, биринчи шарт бажарилмаган: бу аргументлар-

нинг тангенслари мавжуд эмас;

4) $\operatorname{tg} 2,6\pi \neq \operatorname{tg} 1,2\pi$, чунки иккинчи шарт бажарилмайди:

$$2,6\pi - 1,2\pi = 1,4\pi \neq \pi k.$$

Исботи. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0$, $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = 0$,
бундан $\sin(x-y) = 0$ келиб чиқади, у ҳолда $x - y = \pi k$.

10.96- мисол. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Тангенсларнинг тенглик шартидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$5x - x = \pi k, \quad 4x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} k.$$

Ечимлар тўпламидан x нинг тенгламани чап ва ўнг томонлари мавжуд бўлмайдиган қийматларини, яъни $\frac{\pi}{2} (2l+1)$ кўринишдаги қийматларини чиқариб ташлаш керак, $x = \frac{\pi}{4} \cdot k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{2}$ тўпلامда бундай қийматлар $\frac{k}{2}$ тоқ бўлганда, яъни $\frac{k}{2} = 2n+1$ ёки $k = 4n+2$ бўлганда бўлади. Демак, агар $k \neq 4n+2$ бўлса, $\frac{\pi}{4} k$ кўринишдаги барча илдишлар тўплами тенгламани қаноатлантирад экан.

10.6- §. Тригонометрик функцияларнинг узлуксизлиги ва уларнинг ҳосилалари

10.6.1. $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ тенгсизлик ва унинг натижалари.

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \quad (10.110)$$

тенгсизлик $0 < |x| < \pi/2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун ўринли. $0 < x < \pi/2$ бўлган ҳолни қараймиз.

Бирлик доирада (10.47-расм) $ACP = x$ ($0 < x < \pi/2$) ёйни, AP ватарни ва AN тангенслар, ўқини ясаймиз, у ҳолда $P_1P = \sin x$, $AN = \operatorname{tg} x$.

AOP учбурчак, AOP сектор ва AON учбурчакни қараймиз. Уларнинг юзлари орасида қуйидаги муносабат ўринли:

$$S_{\triangle AOP} < S_{\text{сект. } AOP} < S_{\triangle AON}$$

ёки

$$\frac{1}{2} OA \cdot P_1P < \frac{1}{2} OA^2 \cdot \widehat{ACP} < \frac{1}{2} OA \cdot AN,$$

лекин $OA = 1$, унда $P_1P < \widehat{ACP} < AN$ ёки

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (10.111)$$

Демак, агар $0 < x < \pi/2$ бўлса, (10.110) тенгсизлик бажарилади, чунки

$$|\sin x| = \sin x, \quad |x| = x, \quad |\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x.$$

Агар $-\pi/2 < x < 0$ бўлса, $0 < -x < \pi/2$. Унда (10.110) тенгсизликка кўра

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x) \quad (10.112)$$

га эгамиз. Лекин $x < 0$ учун

$$\begin{aligned} -x &= |x|, \\ \sin(-x) &= -\sin x = |\sin x|, \\ \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x|, \end{aligned}$$

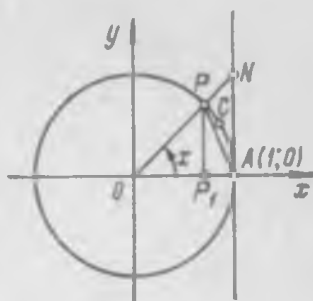
яъни (10.112) тенгсизлик

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

кўринишни олади.

Синуснинг узлуксизлиги. $y = \sin x$ функция бутун сон ўқида узлуксиздир. $y = \sin x$ функциянинг x нуқтада узлуксизлигини исбот қилиш учун функция узлуксизлигининг қуйидаги икки шарти бажарилишини кўрсатиш зарур:

1) $y = \sin x$ функция x нуқтада аниқланган, яъни ҳақиқий қийматга эга;



10.47- расм.

2) аргументнинг чексиз кичик Δx орттирмасига функциянинг чексиз кичик Δy орттирмаси мос келади.

Биринчи шарт бажарилади, чунки $y = \sin x$ функция x аргументнинг исталган қийматида аниқланган.

Иккинчи шартнинг бажарилишини исбот қиламиз. x аргументга Δx орттирма берамиз ва функциянинг унга мос орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\Delta y| = 2 \left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

$|\sin x| < |x| (x \neq 0)$ тенгсизликка асосан

$$\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < \frac{|\Delta x|}{2}$$

га эгамиз.

Исталган аргумент косинуснинг абсолют қиймати бирдан ортмайди, демак,

$$\left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| < 1,$$

у ҳолда

$$|\Delta y| < 2 \left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

Бундан

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta y| < \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$$

га эгамиз. Бу эса $y = \sin x$ функция x нуқтада узлуксиз эканлигини англатади.

Косинуснинг узлуксизлиги.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

булгани учун синуснинг узлуксизлигидан косинуснинг $\left(-\infty < \frac{\pi}{2} + x < +\infty\right)$ да узлуксиз булиши келиб чиқади.

Тангенс ва котангенснинг узлуксизлиги. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг бутун сон ўқида

узлуксизлигидан $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ функция ҳам x нинг

$\cos x = 0$, яъни $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ бўладиган қийматларидан ташқари барча қийматларида узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ функция x нинг $\sin x$ ни нолга айлантирадиган $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) қийматларидан ташқари барча қийматларида узлуксиз бўлади.

$x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ нисбатнинг limiti. Limitларни ҳисоблашда ва тригонометрик функцияларнинг дифференциаллаш формулаларини келтириб чиқаришда ёй синусининг шу ёйга нисбатининг limitидан фойдаланилади.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ ёки } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (10.113)$$

(x радиан ҳисобида)

Исботи. $0 < |x| < \pi/2$ бўлсин. У ҳолда

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

тенгсизлик бажарилади. Тенгсизликни упала қисмини $|\sin x|$

га бўлиб, $1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{1}{|\cos x|}$ ни ҳосил қиламиз. Лекин

$\frac{x}{\sin x} > 0$, $\frac{1}{\cos x} > 0$, унда $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Тесқари катталикларга ўтамыз: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$,

демак, $x \rightarrow 0$ да чап ва ўнг томоннинг limiti 1 га тенг. Унда ўрта қисмининг limiti ҳам 1 га тенг экан, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

10.97-мисол.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{4}{6} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 6x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

10.6.2. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функциялар ҳосиласи.

$y = \sin x$, $x \in R$ функциянинг ҳосиласи.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \right]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x, \end{aligned}$$

яъни

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (10.114)$$

Исботлашда кўпайтманинг лимити ҳақидаги теоремадан, косинуснинг узлуксизлигидан,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \text{ ва } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

дан фойдаланнлди.

Агар синус мураккаб $u = \varphi(x)$ аргументга эга бўлса, у ҳолда синуснинг ҳосиласи мураккаб функцияни дифференциаллаш формуласидан топилади:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u', \quad (10.115)$$

$y = \cos x$, $x \in R$ функциянинг ҳосиласи.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right] = \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x, \end{aligned}$$

яъни

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (10.116)$$

Исбот қилишда қуйидагилардан фойдаланилди: кўпайт-
манинг лимити ҳақидаги теорема, синуснинг узлуксизлиги,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \sin x \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$u = \varphi(x)$ мураккаб аргумент учун

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \quad (10.117)$$

Тангенснинг ҳосиласи.

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in R, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \quad \text{дан ташқари.}$$

Касрнинг ҳосиласи формуласини қўлланиб, қуйидагини
ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

яъни

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (10.118)$$

Агар $u = \varphi(x)$ бўлса, u ҳолда

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \quad (10.119)$$

Котангенснинг ҳосиласи. $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
 $x \in R, \quad x = \pi k, \quad k \in Z$ дан ташқари,

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \end{aligned}$$

яъни

$$(\operatorname{ctg}' x) = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (10.120)$$

Агар $u = \varphi(x)$ бўлса,

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. \quad (10.121)$$

10.98-мисол. Қуйдаги тригонометрик функцияларнинг ҳосилаларини топинг: 1) $y = \sin 2x$, 2) $y = \sin^3 x$, 3) $y = \operatorname{tg}^3 3x$, 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

Ечилиши. 1) (10.115) формула бўйича қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x.$$

2) даража ҳосиласи формуласига ва (10.115) га кўра қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$(\sin^3 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

3) даражанинг ҳосиласи формуласи ва (10.119) формулага кўра қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$(\operatorname{tg}^3 3x)' = 2 \operatorname{tg} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 2 \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{6 \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

4) сурати ўзгармас бўлган касрнинг ҳосиласи формуласи ва (10.120) формулага кўра қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ҳосилани қўлланиб, тригонометрик функциялар хоссаларини текшириш. $y = \sin x$ функцияни текшириш.

I. Функциянинг ноллари:

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Синус $x_1 = 0$, $x_2 = \pm \pi$, $x_3 = \pm 2\pi$ ва ҳоказо нуқталарда нолга айланади.

II. Ўсиш ва камайиш оралиқлари:

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

Ўсиш оралиқларини топамиз. Агар $\cos x > 0$ бўлса, y ҳолда $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Демак, синус $[-\pi/2, \pi/2]$ оралиқда -1 дан 1 гача монотон ўсади, унинг даврийлигига кўра аргументнинг $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]$ кўринишдаги оралиқ қийматларн тўплами синуснинг ўсиш оралиқлари бўлади.

Камайиш оралиқларини топамиз. Агар $y' = \cos x < 0$ бўлса, y ҳолда

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

Демак, синус $[\pi/2, 3\pi/2]$ ораликда 1 дан -1 гача монотон камаяди, унинг даврийлиги 2π аргументнинг $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$ кўринишдаги оралик қийматлари тўплами синуснинг камайиш оралиги бўлади.

III. Синуснинг энг катта ва энг кичик қийматлари. $[0, 2\pi]$ ораликда функциянинг максимум ва минимумини текширамыз. Бу ораликнинг охирида синус нолга тенг:

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ($k = 0$ ва $k = 1$ да) — стационар нуқталар. $y'' = (\cos x)' = -\sin x$. Унда $y''_{x=\pi/2} = -\sin \frac{\pi}{2} < 0$, яъни $x = \pi/2$ нуқтада иккинчи ҳосила манфий. Демак, $y = \sin x$ функция $(\pi/2; 1)$ нуқтада максимумга эга. Сўнг

$$y''_{x=3\pi/2} = -\sin \frac{3\pi}{2} > 0,$$

$x = 3\pi/2$ нуқтада иккинчи ҳосила мусбат. Демак, $y = \sin x$ функция $(3\pi/2; -1)$ нуқтада минимумга эга.

Аргументнинг барча $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ кўринишдаги қийматлари учун синус энг катта (1 га тенг) қийматга эга ва аргументнинг барча $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ кўринишдаги қийматлари учун синус энг кичик (-1 га тенг) қийматга эга.

IV. Қавариқлик ораликлари. Синуснинг иккинчи ҳосиласини топамиз.

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Юқорига қавариқлик оралигида иккинчи ҳосила манфий қийматга эга.

$$-\sin x < 0, \sin x > 0, x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k);$$

$$k = 0 \text{ да } (0, \pi), k = 1 \text{ да } (2\pi, 3\pi) \text{ ва ҳоказо.}$$

Пастга қавариқлик оралигида иккинчи ҳосила мусбат қийматга эга, шунинг учун

$$-\sin x > 0, \sin x < 0, x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k);$$

$$k = 0 \text{ да } (\pi, 2\pi), k = 1 \text{ да } (3\pi, 4\pi) \text{ ва ҳ. к.}$$

Демак, аргументнинг $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ қийматларида синус графиги юқорига қавариқ ва аргументнинг $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ қийматларида синус графиги пастга қавариқ.

V. Букилиш нуқталари. Букилиш нуқтасидан ўтаётганда иккинчи ҳосила ўз ишорасини ўзгартиради, бурилиш нуқтасини ўзида эса нолга айланади ёки мавжуд бўлмайди. Демак,

$$y'' = -\sin x, \quad -\sin x = 0, \quad \sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Илдизлар $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$ ва ҳоказо.

Топилган координаталар билан чегараланган оралиқларни ёзамиз: $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ва ҳоказо.

Қўшни оралиқларда иккинчи ҳосиланинг ишораларини топамиз:

$$y''_{-\pi < x < 0} = +, \quad y''_{0 < x < \pi} = (-),$$

демак, $x = 0$ да $(0; 0)$ букилиш нуқтаси мавжуд.

$$y''_{0 < x < \pi} = (-), \quad y''_{\pi < x < 2\pi} = (+),$$

демак, $x = \pi$ да $(\pi; 0)$ букилиш нуқтаси мавжуд.

$$y''_{\pi < x < 2\pi} = (+), \quad y''_{2\pi < x < 3\pi} = (-),$$

демак, $x = 2\pi$ да $(2\pi; 0)$ букилиш нуқтаси бўлади.

Синус графигининг букилиш нуқталари $x = \pi k$, $y = 0$ кўринишдаги нуқталар бўлади.

$y = \sin x$ функциянинг $[0, 2\pi]$ оралиқдаги характерли нуқталари жадвалини тузамиз.

Характерли нуқталар бўйича синус графигини яшаш осон.

Чорак ва аргументнинг қиймати	0	I чорак	$\pi/2$	II чорак
функция қиймати	0		1	
функциянинг ўзгариши	функциянинг илдизи ва букилиш нуқтаси	функция 0 дан 1 гача ўсади, график юқорига қавариқ	функциянинг энг катта қиймати	функция 1 дан 0 гача камаяди, график юқорига қавариқ

Синуснинг асосий хоссаларини санаб ўтамиз:

1) аниқланиш соҳаси: $(-\infty; +\infty)$ ҳақиқий сонлар тўплами;

2) ўзгариш соҳаси: $[-1, 1]$, яъни функция чегараланган;

3) функциянинг ноллари: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Функция ноллари бир вақтни ўзида букилиш нуқталари ҳам бўлади;

4) функция $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда 1 га тенг бўлган энг катта қийматларга эга;

5) функция $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда -1 га тенг бўлган энг кичик қийматларга эга;

6) функция тоқ, яъни $\sin(-x) = -\sin x$; $(x, \sin x)$ ва $(-x, \sin(-x))$ нуқталар координаталар бошига нисбатан симметрик;

7) функция даври 2π га тенг бўлган даврий функция, яъни $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ тенглик x аргументнинг исталган қиймати учун ўринли, бу ерда $k \in \mathbb{Z}$;

8) барча $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ учун $\sin x > 0$. Аргументнинг бу қийматлари учун график юқорига қавариқ;

9) барча $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ учун $\sin x < 0$. Аргументнинг бу қийматлари учун график пастга қавариқ;

10) функция $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ оралиқларда ўсади ва $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди.

Ўқувчига мустақил равишда $y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ функцияларни текшириш ва уларнинг асосий хоссаларини ифодалашни таклиф қиламиз.

10.6.3. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. $y = \arcsin x$ функция берилган бўлсин, у ҳолда $x =$

π	III чорак	$3\pi/2$	IV чорак	2π
0		-1		0
функциянинг илдизи па букилиш нуқтаси	функция 0 дан -1 гача камаяди, график пастга қавариқ	функциянинг энг кичик қиймати	функция -1 дан 0 гача ўсади, график пастга қавариқ	функциянинг илдизи ва букилиш нуқтаси

$\sin y$. Тескари функцияни дифференциаллаш формуласига кўра

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

$\cos y$ ни x аргумент орқали ифодаalayмиз. $-\pi/2 < \arcsin x < \pi/2$ маълум, бу оралиқда эса $\cos y \geq 0$, y ҳолда $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Демак, изланаётган ҳосила

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (10.122)$$

булади.

$y = \arccos x$ функция берилган, y ҳолда $x = \cos y$,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

$\sin y$ ни x аргумент орқали ифодаalayмиз. $0 < \arccos x < \pi$ эканлиги маълум, лекин бу оралиқда $\sin y \geq 0$, y ҳолда $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Изланаётган ҳосила

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (10.123)$$

булади.

$y = \operatorname{arctg} x$ функция берилган, y ҳолда $x = \operatorname{tg} y$,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$\operatorname{arctg} x$ ни дифференциаллаш формуласини ҳосил қилдик

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (10.124)$$

$y = \operatorname{arcctg} x$ функция берилган, y ҳолда $x = \operatorname{ctg} y$,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

яъни

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (10.125)$$

10.99- м и с о л. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1) $y = \arcsin x^2$, 2) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x}$.

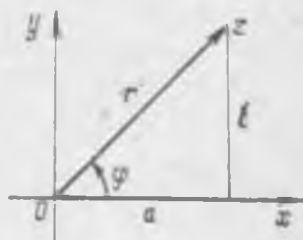
Е ч и л и ш и. 1) $(\arcsin x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (x^2)' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$2) (\arctg \sqrt{2x}) = \frac{1}{1+2x} \cdot (\sqrt{2x})' = \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} (2x)' = \\ = \frac{1}{(1+2x) 2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{(1+2x) \sqrt{2x}}.$$

10.7-§. Комплекс соннинг тригонометрик формаси. Комплекс кўрсаткичли кўрсаткичли функция

1-бобдан баъзи маълумотларни (1.2.3-пункт) эслатиб ўтамиз. xOy комплекс текислигининг ҳар бир нуқтасига бу нуқтани координаталар боши билан туташтирувчи тайин вектор мос келади, шу сабабли ҳар бир комплекс сонга тайин вектор мос келади ва аксинча (10.48-расм).

z нуқтага $z = a + bi$ комплекс сон мос келсин. $z = a + bi$ комплекс сонга мос келувчи $\vec{Oz}$ векторнинг *модули* комплекс соннинг *модули* дейилади ва $|z|$ билан белгиланади. $z = a + bi$ комплекс соннинг модули



10.48-расм.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

яъни ҳамма вақт ҳақиқий манфий бўлмаган сон.

Ҳақиқий ўқнинг мусбат йўналиши бўйича ҳисобланадиган Ox ҳақиқий ўқ билан $\vec{Oz}$ вектор орасидаги φ бурчак $z \neq 0$ комплекс соннинг *аргументи* дейилади. Агар ҳисоб соат стрелкасига тескари йўналишда олинса, бурчак катталиги мусбат деб, агар соат стрелкаси йўналиши бўйича олинса, манфий деб ҳисобланади. $z = a + bi$ комплекс соннинг φ аргументи бундай ёзилади: $\varphi = \text{Arg } z$ ёки $\varphi = \text{Arg}(a + bi)$. $z = 0$ сон учун аргумент аниқланмайди. $z \neq 0$ фиксирланган нуқта учун аргумент кўп қийматли аниқланади, агар φ бурчак z сон аргументининг қийматларидан бири бўлса, $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ бурчаклар ҳам ўша z сон аргументининг қийматлари бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир z сон учун аргументнинг чексиз кўп қийматлари тўплами мос келиб, бунда уларнинг ҳар икkitаси бир-биридан 2π га қаррали сонга фарқ қилади.

Аргументнинг бош қиймати — $-\pi < \arg z \leq \pi$ оралиққа тегишли бўлади.

Тригонометрик функцияларнинг таърифидан кўринадики, агар $\varphi = \text{Arg}(a + bi)$ бўлса, у ҳолда

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10.126)$$

тенглик ўринли бўлади. Тескари даъво ҳам ўринли: агар иккала (10.126) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi = \text{Arg}(a + bi)$.

φ аргументнинг барча қийматларини (10.126) тенгламаларни биргаликда ечиш билан топиш мумкин. $z = a + ib \neq 0$ комплекс сон аргументининг барча қийматларини қуйидагича топиш мумкин:

1) $z = a + bi$ нуқта қайси чоракда ётишини аниқлаш ($z = a + bi$ сонни геометрик интерпретациясидан фойдаланган ҳолда);

2) (10.126) тенгламалардан бирини ёки $\text{tg } \varphi = \frac{b}{a}$ тенгламани ечиб, бу чоракда φ бурчакни топиш;

3) z сон аргументининг барча қийматларини $\text{Arg } z = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ формула бўйича топиш.

10.7.1 Комплекс соннинг тригонометрик формаси. $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ушбу $a + bi$ комплекс соннинг модули, φ эса унинг аргументи қийматларидан бири бўлсин. (10.126) формуладан

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

келиб чиқади. Шунинг учун

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (10.127)$$

Шундай қилиб, ихтиёрӣ $a + bi \neq 0$ комплекс сонни (10.127) формула кўринишида ёзиш мумкин экан. Бунда r берилган $a + bi$ комплекс соннинг модули, φ эса бу сон аргументининг қийматларидан бири. Тескари даъво ҳам ўринли: агар $a + bi$ комплекс сон (10.127) кўринишида ифодаланган ва бунда $r > 0$, бўлса, у ҳолда $r = |a + bi|$, φ эса $\text{Arg}(a + bi)$ нинг қийматлардан биридир.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (10.128)$$

кўринишдаги z комплекс сон (бунда $r > 0$) комплекс соннинг *тригонометрик формада ёзилиши* дейилади.

$z = a + bi$ комплекс сонни тригонометрик формада ифодалаш учун: 1) бу соннинг модулини топиш, 2) комплекс сон аргументининг қийматларидан бирини топиш зарур.

$\text{Arg } z$ нинг кўп қийматлигига асосан комплекс соннинг тригонометрик формаси ҳам кўп қийматлидир.

10.100-мисол. 1) $1 + i$, 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} i$ сонларни тригонометрик формада ёзинг.

Ечилиши. 1) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\text{tg } \varphi = \frac{b}{a} = 1$. $1 + i$ сонга мос нуқта биринчи чоракда ётади, у ҳолда $\varphi = \pi/4$. Демак,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ёки умумий кўринишда:

$$1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1, \quad \text{tg } \varphi = \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

сонга мос нуқта IV чоракда ётади, у ҳолда $\varphi = \frac{11\pi}{6}$.

Демак,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

ёки

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = \left[\cos \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометрик формада берилган икки комплекс сонни кўпайтириш.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

яъни

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Биз комплекс соннинг тригонометрик формасини ҳосил қилдик, чунки $r_1 r_2 > 0$. Бундан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k = \text{Arg } (z_1 \cdot z_2),$$

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Икки комплекс сон кўпайтмасининг модули кўпайтувчилар модуллариининг кўпайтмасига тенг, кўпайтувчи-

лар аргументларининг йиғиндисы эса кўпайтма аргументининг қийматларидан бири бўлади.

$$10.101\text{-мисол. } 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot \frac{1}{4} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right) = \\ = 2 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right).$$

Тригонометрик формада берилган икки комплекс сонни бўлиш.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))}{r_2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \\ = \frac{r_1 [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]}{r_2},$$

яъни

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]}{r_2}, \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k = \text{Arg } \frac{z_1}{z_2}.$$

Иккита комплекс сон бўлинимасининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг бўлинимасига тенг, бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмаси эса бўлилма аргументининг қийматларидан бири бўлади.

$$10.102\text{-мисол. } 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) : 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Тригонометрик формада берилган комплекс сонларни даражага кўтариш. Ушбу

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \dots \\ \dots r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) = r_1 r_2 \dots r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + \\ + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]$$

формулага асосан, унда $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ деб

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi], \quad n \in \mathbb{Z}$$

ни ҳосил қиламиз.

Исталган φ сон ва исталган n натурал сон учун

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (10.129)$$

муносабат бажарилади (*Муавр формуласи*).

10.103-мисол. $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$

Тригонометрик формада берилган комплекс сонлардан илдиз чиқариш.

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$\rho^n = r$, $\rho = \sqrt[n]{r}$ — арифметик илдиз;

$$n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

10.104-мисол. 1) $\sqrt[3]{i}$, 2) $\sqrt[3]{-1}$ комплекс сонлардан илдиз чиқаринг.

Ечилиши.

1) $i = 0 + 1 \cdot i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$ бўлгани учун

$$\cos \varphi = 0/1 = 0, \quad \sin \varphi = 1/1 = 1, \quad \varphi = \pi/2,$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{i} &= \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right); \end{aligned}$$

агар $k = 0$, бўлса, $\sqrt[3]{i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i), \text{ агар } k = 1 \text{ бўлса, } \sqrt[3]{i} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) = \\ &= -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i). \end{aligned}$$

2) $1 = 1 + 0 \cdot i = \cos 0 + i \sin 0$, $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$, $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$ бўлгани учун

$$\sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} k + i \sin \frac{2\pi}{3} k,$$

агар $k = 0$ бўлса, $\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$,

агар $k = 1$ бўлса, $\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

агар $k = 2$ бўлса, $\sqrt[3]{1} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10.7.2. Комплекс кўрсаткичли кўрсаткичли функция. Эйлер формуласи. $z = x + iy$ комплекс кўрсаткичли e^z даража

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

тенглик билан аниқланади.

Қуйидагини исбот қилиш мумкин:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Комплекс кўрсаткичли кўрсаткичли функция катталиги

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

тенглик билан аниқланади.

$x = 0$ хусусий ҳолда

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (10.130)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула *Эйлер формуласи* дейилади.

Кўрсаткичлар билан амаллар бажариш қондалари комплекс кўрсаткичлар учун ҳам ўз кучини сақлайди. Масалан, кўрсаткичлар кўпайтиришда қўшилади, бўлишда айирилади, даражага кўтаришда кўпайтирилади.

e^z кўрсаткичли функция $2\pi i$ га тенг даврга эга:

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

$z = 0$ да $e^{2\pi i} = 1$ ни ҳосил қиламиз.

Комплекс соннинг $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ тригонометрик формасини $z = re^{i\varphi}$ кўрсаткичли форма билан алмаштириш мумкин. Бунда кўрсаткичли формадаги комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлиш қондаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ Муавр формуласи бундай кўринишни олади:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

10. БОБНИ ТАҚРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Ёй (бурчак) ларни градус ва радиан ҳисобида ўлчашда қандай катталиклар ўлчов бирлиги қилиб олинади? Бу бирликлар бир-бири билан қандай боғланган?

2. Сон ўқида ва сон айланасида $\alpha = k\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha = \pi(2k+1)$ сонларга мос келувчи нуқталарни кўрсатинг. Сон ўқида ва сон айланасида бундай нуқталар қанча?

3. Сон айланасининг $M(\alpha)$ ва $M'(-\alpha)$ нуқталари Ox ўққа нисбатан қандай вазиятда бўлади?

4. Сон айланасининг $M(\alpha)$ ва $M'(\alpha + \pi)$ нуқталари координаталар ўқиغا нисбатан қандай вазиятда бўлади?

5. Сон айланасининг II, III, IV чораклардаги нуқталарига мос келувчи сонлар қаноатлантириши зарур бўлган шартларни кўрсатинг.

6. Сон аргументининг тригонометрик функциялари таърифини айтиб беринг.

7. Тригонометрик функциялардан ҳар бирининг аниқланиш ва ўзгариш соҳаси қандай?

8. Аргумент 0 дан 2π гача ўзгарганда синус, косинус, тангенс ва котангенс қандай ўзгаради?

9. Даврий функциянинг таърифини беринг. $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функциялар қандай даврларга эга?

10. Келтириш формулаларини қўлланилиш қондаларини тавсифлаб беринг.

11. Ҳар бир асосий тригонометрик функциянинг берилган қийматига мос келувчи бурчаклар учун формулани умумий кўринишда ёзинг ва бу формулаларни тригонометрик функцияларнинг графиклари орқали тушунтиринг.

12. Тескари тригонометрик функцияларнинг таърифини айтиб беринг.

13. Қандай тенгламалар энг содда тригонометрик тенгламалар дейилади?

14. Қандай тенгсизликлар энг содда тригонометрик тенгсизликлар дейилади?

15. Қўшиш формулаларини қўлланиш қондасини айтиб беринг.
16. Ўқчиланган ва ярим аргументларнинг тригонометрик функцияларини ёзинг.
17. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йигиндига адмаштириш ва аксинча формулаларини келтириб чиқаринг.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ эканлигини исбот қилинг.
19. Тригонометрик функциялар ҳосилалари формулаларини ҳосил қилинг.
20. Тескари тригонометрик функциялар ҳосилалари формулаларини ҳосил қилинг.
21. Комплекс сонни тригонометрик ва кўрсаткичли формада ёзинг.
22. Тригонометрик формада ёзилган комплекс сонлар билан амаллар бажариш қондлари ҳақида гапириб беринг.
23. Муавр формуласи қандай кўринишга эга?
24. Эйлер формуласи қандай кўринишга эга?

10-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Жадвалдан фойдаланмасдан туриб, қуйидаги ёйларнинг радиан ўлчовини топинг: а) 30° , б) 45° , в) 60° , г) 90° , д) 120° , е) 135° , ж) 150° , з) 180° , и) 210° , к) 240° , л) 270° , м) 315° .
2. Қуйидаги ёйларнинг радиан ўлчовини жадвал бўйича топинг: а) $15^\circ 30'$, б) $7^\circ 10'$, в) $82^\circ 42'$, г) 115° , д) $312^\circ 20'$.
3. Қуйидаги ёйларнинг радиан ўлчовини логарифмик линейкадан фойдаланиб топинг: а) $13,5^\circ$, б) $25,3^\circ$, в) 35° , г) 85° , д) 120° .
4. Жадвалдан фойдаланмасдан туриб, қуйидаги ёйларнинг градус ўлчовини топинг: а) $5\pi/36$, б) $5\pi/9$, в) $11\pi/18$, г) $13\pi/30$, д) $4/3\pi$.
5. Жадвалдан қуйидаги ёйларнинг градус ўлчовини топинг: а) 0,4416, б) 0,8785, в) 1,0472, г) 1,4850, д) 1,7453.
6. Айлана учта нуқта билан 3:4:5 нисбатда бўлинган. Ҳосил қилинган ҳар бир ёйни радиан ўлчов орқали фойдаланг.
7. Учбурчак бурчаклари 2:3:7 нисбатда. Бу бурчакларнинг радиан ўлчовини топинг.
8. Агар айлананинг 0,75 м узунликдаги ёйни уч радиандан иборат бўлса, бу айлананинг радиусини ҳисобланг.
9. Агар 0,25 м радиусли доира секторининг ёйни 1,6 радианга тенг бўлса, бу секторнинг юзини ҳисобланг.
10. 1,6 м радиусли доира секторининг юзи 0,64 м² га тенг. Сектор ёйини радианларда топинг.
11. Доиранинг юзи 12,8 м² га тенг бўлган секторни 0,4 радиан ёй билан тортилиб туради. Доиранинг радиусини топинг.
12. Қуйидагилар қандай ишорага эга: а) $\sin 1$, б) $\sin 2$, в) $\cos 1$, д) $\cos 3$, е) $\lg 2$, ф) $\lg 3,5$?
13. Қуйидаги тенгликлар бўлиши мумкинми:
 - а) $2 - \sin \alpha = 1,5$, б) $1 + \cos \alpha = \sqrt{3}$,
 - в) $\sin \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, д) $\lg \alpha = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$?
14. Қуйидаги айрмаларнинг ишорасини аниқланг:
 - а) $\sin 135^\circ - \sin 155^\circ$, б) $\cos 2 - \cos 3$,
 - в) $\lg 150^\circ - \lg 125^\circ$, д) $\operatorname{ctg} 100^\circ - \operatorname{ctg} 120^\circ$.

15. Қуйидаги касрларнинг (ҳисобламасдан туриб) ишорасини топинг:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{\sin 2 + \sin 3}{\lg 2 + \lg 3}, & \text{b)} \frac{\sin 2 - \sin 3}{\lg 2 - \lg 3}, \\ \text{c)} \frac{\sin(-2) - \sin(-2,5)}{\cos 5 - \cos 3}, & \text{d)} \frac{\lg 1,7 - \lg 1,6}{\lg 4}. \end{array}$$

16. Қуйидаги сонлар берилган: а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, б) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, в) $-4,5$;

д) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, е) $-3,2$, ф) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$. Улардан қайси бири

$\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ нинг қийматлари бўлади, қайсылари эса бўлмайди ва нега бўлмайди?

17. Қуйидаги қўшайтмалар қандай ишорага эга: а) $\sin 100^\circ \times \cos 100^\circ \lg 100^\circ$,

б) $\sin \frac{5\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} \lg \frac{5\pi}{3}$, в) $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha^2$?

18. Қуйидаги тенгсизликлар $(0, 2\pi)$ оралиқнинг қайси бўлагида ўринли бўлади:

а) $\sin \alpha \cos \alpha > 0$, б) $\lg \alpha \sin \alpha < 0$, в) $\lg \alpha \cos \alpha < 0$,
г) $\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha > 0$, д) $\frac{\lg \alpha}{\sin \alpha} > 0$, е) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} < 0$?

19. Агар α , β ва γ бурчаклар учбурчакнинг бурчаклари бўлса, қуйидаги йиғиндилар қандай ишорага эга бўлади:

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$,
б) $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$
в) $\lg \frac{\alpha}{2} + \lg \frac{\beta}{2} + \lg \frac{\gamma}{2}$?

20. Қуйидагиларни топинг: 1) $\sin \pi k$, 2) $\cos \pi k$, 3) $\lg \pi k$, 4) $\operatorname{ctg} \pi k$.

21. Соддалаштиринг: $\frac{\sin \pi k + \cos \pi k + \lg \pi k}{\cos 2\pi k} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

22. $\frac{1 + \cos \pi k}{1 + \cos 2\pi k}$ ни а) $k = 2n$, б) $k = 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z})$ да ҳисобланг.

23. Қуйидаги функциялар x нинг қайси қийматларида аниқланмаганини кўрсатинг: а) $\lg x$, б) $\operatorname{ctg} x$, в) $\lg x \operatorname{ctg} x$, г) $\lg x + \operatorname{ctg} x$.

24. Агар а) $0 < \sin \alpha < 1$, б) $-1 < \sin \alpha < 0$, в) $0 < \cos \alpha < 1$, г) $-1 < \cos \alpha < 0$ бўлса, α қайси чоракка тегишли бўлади?

25. α жойлашган чорак ва γ тегишли тригонометрик функция қийматига кўра қолган учта функция қийматини ҳисобланг:

а) $\sin \alpha = 3/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, б) $\cos \alpha = -12/13$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$,
в) $\lg \alpha = -3/4$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, г) $\operatorname{ctg} \alpha = 8/15$, $0 < \alpha < \pi/2$.

Ифодаларни соддалаштиринг.

26. $(a \sin \alpha - b \cos \alpha)^2 + (a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2$.

27. $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$.

28. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

$$29. \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} \quad 30. \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{1 - 2 \cos^2 \alpha}$$

$$31. \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$32. \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

$$33. \left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) \left(1 + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$$

Айниятларни исбот қилинг.

$$34. \sin^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^6 \alpha = 1.$$

$$35. \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1.$$

$$36. 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) + 1 = 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha).$$

$$37. \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha.$$

$$38. \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1.$$

$$39. (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2.$$

40. Қуйида берилган функцияларнинг қайси бири жуфт ва тоқлигини, қайси бири тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмаслигини кўрсатинг:

а) $1 - \sin x$, б) $1 - \cos x$, в) $x - \sin x$, г) $x - \cos x$

д) $x^2 + \sin^2 x$, е) $x^2 - \cos x$, ж) $x^3 + \sin x$, з) $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

и) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, к) $\frac{x^3 + \sin^3 x}{3 + \sin^2 x}$, л) $\sin x \cos x$, м) $\sin^2 x \operatorname{tg} x$.

41. Қуйидаги функцияларнинг даврларини топинг: а) $\sin 5x$,

б) $\cos \frac{5}{8} x$, в) $\operatorname{tg} 4x$, г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

Ифодаларни соддалаштиринг:

$$42. \frac{\sin 350^\circ + \cos (-370^\circ)}{\sin 190^\circ - \sin (-170^\circ)}.$$

$$43. \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 342^\circ \sin 122^\circ + \operatorname{tg} 198^\circ \operatorname{tg} 288^\circ.$$

$$44. \sin \left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{13\pi}{4}\right) + \cos \frac{13\pi}{3}.$$

Айниятларни исбот қилинг:

$$45. \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin (\pi - \alpha)\right]^2 + \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos (2\pi - \alpha)\right]^2 = 2.$$

$$46. \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 + \left[\operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg} (\pi - \alpha)\right]^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

$$47. \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin (\alpha - 2\pi) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg} (\alpha - \pi) = -2 \sin \alpha.$$

$$48. \sin (\alpha - \pi) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg} (\alpha - 2\pi) + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0.$$

49. Агар а) $\sin \alpha = 1/2$, б) $\cos \alpha = -1/2$, в) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, г) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$ бўлса, α бурчакни ясанг.

50. Қуйидаги функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг: а) $y = 2 + \sin x$, б) $y = 4 - 2 \cos x$.

51. Тригонометрик функцияларнинг берилган қийматларига мос x ёйлар тўпламини ёзинг:

- а) $\sin x = 0$, б) $\sin x = 1$, в) $\sin x = -1$, г) $|\sin x| = 1$,
 д) $\cos x = 0$, е) $\cos x = 1$, ж) $\cos x = -1$, з) $|\cos x| = 1$,
 и) $\operatorname{tg} x = 0$, к) $\operatorname{tg} x = 1$, л) $\operatorname{tg} x = -1$, м) $|\operatorname{tg} x| = 1$.

52. Агар

- а) $\sin x = 1/2$, б) $\sin x = -1/2$, в) $\sin x = \sqrt{2}/2$,
 г) $\sin x = -\sqrt{3}/2$, д) $\cos x = -\sqrt{2}/2$, е) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3$,
 ж) $\operatorname{ctg} x = 1$, з) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

бўлса, x ёйлар тўпламини ёзинг ва бу ёйлари бирлик айланада ясанг.

53. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

- а) $y = |\sin x|$, б) $y = |\cos x|$, в) $y = |\operatorname{tg} x|$.

54. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

- а) $\sin x > \sqrt{2}/2$, б) $\cos x < 1/2$, в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, г) $\operatorname{ctg} x < 1$.

55. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

- а) $y = \arcsin \frac{x}{4}$, б) $y = \arcsin \frac{2x-1}{2}$, в) $y = \arcsin \frac{x}{2}$,
 г) $y = \arccos \left| \frac{x}{3} \right|$.

56. Қуйидаги ифодаларнинг сон қийматларини топинг:

- а) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, б) $\sin \left(\arctg \frac{3}{4} \right)$, в) $\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$,
 г) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, д) $\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, е) $\operatorname{ctg} (\arccos 1)$.

57. Қуйидаги ифодаларнинг сон қийматларини топинг:

- а) $\arcsin[\sin(-1)]$, б) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)$, в) $\arccos (\cos 3)$, г) $\arctg \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \right)$.

58. Қуйидаги ифодаларнинг сон қийматларини топинг:

- а) $\sin \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$,
 б) $\sin \left[\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin(-1) \right]$, в) $\cos (\arctg 1 + \arccos 1)$.

59. Қуйидагиларни топинг: а) $\cos(\arcsin x)$, б) $\sin(\arccos x)$,

- в) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, г) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$.

60. Қуйидаги тенгликларнинг ўринлигини текширинг:

- а) $\arcsin \frac{4}{5} = \arccos \frac{3}{5}$, б) $\arcsin \frac{4}{5} = \arctg \frac{3}{5}$,
 в) $\arcsin \frac{2\sqrt{6}}{7} = \arccos \frac{5}{7}$, г) $\arccos \frac{2}{3} = \arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{д) } \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin\frac{1}{3}, \quad \text{е) } \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{4}{5}.$$

61. Жадвалдан фойдаланмасдан, айрмаларнинг ишорасини аниқланг:

$$\text{а) } \arcsin 0.51 - \arcsin 0.499, \quad \text{б) } \arccos 0.3 - \arccos 0.2,$$

$$\text{в) } \arctg 1 - \arctg \frac{\pi}{2}, \quad \text{г) } \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2.5.$$

62. Тенгламалардан x ни топинг:

$$\text{а) } \arcsin x^2 = \pi/4,$$

$$\text{б) } \arccos(3x - 1) = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{в) } \arctg \sqrt{x} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{г) } \arcsin \frac{x-2}{3} = 1.$$

63. Тенгламаларни қаноатлантирувчи бурчакларнинг умумий кўрinishини топинг.

$$\text{а) } \sin 3x = 1/2, \quad \text{б) } \cos 4x = \sqrt{2}/2, \quad \text{в) } \operatorname{tg} 10x = 1,$$

$$\text{г) } \sin^2 4x = 1/4, \quad \text{д) } \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right) = 1/2, \quad \text{е) } \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x = 1.$$

Тенгламаларни ечинг:

$$64. 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0.$$

$$65. \operatorname{tg} \frac{x}{2} (1 + \cos x) = 0.$$

$$66. \cos x (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

$$67. 2 \sin^2 x + 8 \cos^2 x - 5 = 0.$$

$$68. 2 \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

$$69. 10 \operatorname{ctg}^2 x - 27 \operatorname{ctg} x + 11 = 0.$$

$$70. 12 \sin^2 x + 16 \cos x - 17 = 0.$$

$$71. \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

$$72. \cos^2 x - 4 \cos x \sin x - 12 \sin^2 x = 0.$$

$$73. 2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

$$74. 4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Ҳисобланг:

$$75. \sin 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \sin 50^\circ.$$

$$76. \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 5^\circ.$$

$$77. \cos 18^\circ \cos 42^\circ - \sin 18^\circ \sin 42^\circ.$$

$$78. \sin(x+y) \cos(x-y) + \cos(x+y) \sin(x-y).$$

Ифодаларни соддалаштиринг.

$$79. \frac{\sin x \cos(x-y) - \sin y}{\sin(x-y)}.$$

$$80. \frac{\cos(x+y)}{\sin x \cos y} + \operatorname{tg} y.$$

$$81. \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

$$82. \frac{\sin(2x+y) - \cos 2x \sin y}{\cos(2x-y) - \sin 2x \sin y}.$$

83. Агар $\cos \alpha = -3/5$, $\cos \beta = -12/13$ ва α II чоракда, β эса III чоракда бўлса, $\sin(\alpha + \beta)$ ва $\sin(\alpha - \beta)$ ни ҳисобланг.

84. Агар $\sin \alpha = -5/13$, $\sin \beta = 4/5$ ва α III чоракда, β эса II чоракда бўлса, $\cos(\alpha + \beta)$ ва $\cos(\alpha - \beta)$ ни ҳисобланг.

85. Агар $\cos \alpha = -15/17$, $\sin \beta = -3/5$ ва α II чоракда, β эса IV чоракда бўлса, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ва $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ ни ҳисобланг.

86. Агар $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ва α III чоракда бўлса, $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ ни ҳисобланг.

Ифодаларни соддалаштиринг:

$$87. \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$88. \frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - 2\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$89. \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}.$$

$$90. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}.$$

$$91. \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha}.$$

$$92. \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)}.$$

$$93. \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \beta + \operatorname{ctg} \beta} \cdot \frac{\cos(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}.$$

$$94. \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right).$$

Айниятларни исбот қилинг.

$$95. \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta.$$

$$96. \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$97. \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha).$$

$$98. \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

$$99. \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$100. \frac{\cos\left(20 - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \sin 20}{\cos 3 \cos 17 - \sin 3 \sin 17} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тенгликларни тўғри эканлигини исбот қилинг:

$$101. \cos 20^\circ + \cos 31^\circ \cos 11^\circ + \cos 59^\circ \cos 79^\circ = 2 \cos 20^\circ.$$

$$102. \cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sin 45^\circ.$$

$$103. \frac{\sin 40^\circ \cos 15^\circ - \cos 40^\circ \sin 15^\circ}{\cos 19^\circ \cos 10^\circ - \sin 15^\circ \sin 10^\circ} = \operatorname{tg} 25^\circ.$$

$$104. \frac{\cos 115^\circ \sin 305^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\cos 160^\circ \sin 230^\circ - \sin 40^\circ \cos 70^\circ} = \sqrt{3}.$$

Тенгламаларни ечинг:

$$105. \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0.$$

$$106. \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$107. \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1.$$

108. Ҳисобланг:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ ва } \alpha \in (3\pi/2, 2\pi) \text{ бўлса, } \sin 2\alpha,$$

$$\text{б) } \cos \alpha = 0,2 \text{ бўлса, } \cos 2\alpha,$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \alpha = 3/4 \text{ бўлса, } \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$109. \text{Агар а) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{5}{3} \text{ бўлса, } \operatorname{ctg} x \text{ ни ҳисобланг; б) } \operatorname{tg} x = 1/5$$

бўлса, $\cos 4x$ ва $\operatorname{tg} 4x$ ни ҳисобланг.

110. а) $\sin 3\alpha$ ни $\sin \alpha$, б) $\cos 3\alpha$ ни $\cos \alpha$, в) $\sin 4\alpha$ ни $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -г) $\cos 4\alpha$ ни $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ орқали ифодаланг.

111. а) $\lg 3\alpha$, ни $\lg \alpha$, б) $\cos 4\alpha$ ни $\cos \alpha$, в) $\sin 5\alpha$ ни $\sin \alpha$ орқали ифодаланг.

Айниятларни исбот қилинг:

$$112. \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \lg \alpha. \quad 113. \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

$$114. \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4 \alpha.$$

$$115. \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \lg \alpha.$$

$$116. \cos \alpha = 1/2, \alpha \in (\pi/2, \pi); \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \text{ ва } \lg \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳисобланг.

$$117. \lg \alpha = 4/3, \alpha \in (0, \pi/2), \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \text{ ва } \lg \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳисобланг.

Ифодаларни соддалаштиринг:

$$118. \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad 119. \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}. \quad 120. \operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos 2\alpha).$$

Айниятларни исбот қилинг:

$$121. \frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \lg^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$122. \frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha - 1}{\sin \alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$123. \text{ а) агар } \lg \frac{\alpha}{2} = 2 \quad \text{ бўлса, } \sin \alpha \text{ ни,}$$

$$\text{ б) агар } \lg \frac{\alpha}{2} = 3 \quad \text{ бўлса, } \cos \alpha \text{ ни,}$$

$$\text{ в) агар } \lg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \quad \text{ бўлса, } \lg \alpha \text{ ни ҳисобланг.}$$

Тенгламаларни ечинг:

$$124. \sin x + \cos x = 1. \quad 125. 1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}.$$

$$126. 1 + \cos x = \sin x.$$

127. Қуйидагиларни алгебраик йўсинди шаклига келтиринг:

$$\text{ а) } \sin 5x \sin 3x, \quad \text{ б) } \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4}.$$

Айниятларни исбот қилинг:

$$128. 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 129. 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$130. 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad 131. 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

132. Қуйидагиларни кўпайтма шаклига келтиринг:

$$а) \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{5}, \quad б) 2 \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha,$$

$$в) \operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 75^\circ, \quad г) \sin^3 5\alpha - \sin^3 3\alpha.$$

Қуйидагиларни кўпайтмага келтиринг:

$$133. \sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2 \sin^3 \alpha \sin 3\alpha.$$

$$134. \sin 10^\circ + 2 \sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 50^\circ. \quad 135. 1 + \sin \alpha + \cos \alpha.$$

$$136. \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

137. Ҳар қандай учбурчакнинг A , B ва C бурчаклари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлишини кўрсатинг:

$$а) \sin A - \cos B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$б) \sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$в) \sin A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{2} \right).$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$138. f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}. \quad f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ ни топинг.}$$

$$139. f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x}. \quad f' \left(\frac{\pi}{3} \right) \text{ ни топинг.}$$

$$140. y = \sin(2x^3 + 3). \quad 141. f = \sin^3 5\varphi^3.$$

$$142. y = \frac{1}{\sin^2 2x}. \quad 143. y = \sqrt{\sin 2x}. \quad 144. y = \sqrt{\sin^2 2x}.$$

$$145. y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^3 x}}.$$

146. $v = \sin 2t$ қонун бұйыча қаракатланаётган нүктанын $t = \pi/6$ моментдагы тезланышын топинг (s — метр ҳисобида, t — секунд ҳисобида).

147. $y = \sin x$ эгри чизикқа $x = \pi/3$ нүқтада ўтказылган уринманын Ox ўққа қиялик бурчагини топинг.

148. $y = \sin x$ ($x \in (0, \pi/2)$) эгри чизикқа ўтказылган уринма Ox ўқи билан $\arctg(\sqrt{3}/2)$ бурчак ҳосил қиладиган нүктанын координаталарини топинг.

149. $y = \sin x$ эгри чизик $x = \pi$ нүқтада Ox ўқи қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

150. $y = \sin 3x$ эгри чизикқа $(\pi/3; 0)$ нүқтада ўтказылган уринманын Ox ўққа қиялик бурчагини топинг.

$$151. f(x) = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \cdot f'(\pi/3) \text{ ни топинг.}$$

$$152. f(x) = 2 \sin x - 2 \cos x. f'(\pi/6) \text{ ни топинг.}$$

$$153. f(x) = \cos^2 \sin x. f'(\pi/3) \text{ ни топинг.}$$

$$154. f(x) = \frac{\lg x - 1}{\lg x} \cdot f'(\pi/3) \text{ ни топинг.}$$

$$155. f(x) = \frac{\lg \frac{x}{2}}{1 + \lg \frac{x}{3}} \cdot f'(\pi/2) \text{ ни топинг. } 156. y = \cos(x^3 - 3).$$

$$157. y = \cos^3 \sqrt{x}.$$

$$158. u = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$159. y = \lg^2 3x.$$

$$160. y = \operatorname{ctg} x^3.$$

$$161. y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$162. y = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$163. y = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$164. u = \ln \sin^2(x - 1).$$

$$165. y = \ln \lg^2 x^3.$$

$$166. S = \ln e^{\sin 2t}.$$

$$167. y = e^{\sin x} \cos x.$$

$$168. y = e^{\lg x} \cos^2 x.$$

$$169. x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$170. u = \arcsin 2x.$$

$$171. f(x) = 2 \arcsin x - 3 \arccos x. f'(\sqrt{3}/2) \text{ ни топинг.}$$

$$172. y = \arccos \sqrt{2x}.$$

$$173. y = \arcsin \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}.$$

$$174. y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x}.$$

$$175. u = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

176. $y = \lg x$ эгри чизик $x = \pi/4$ нүқтада Ox ўқи қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

177. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ эгри чизиқларнинг $(0, \pi/2)$ ораліқдаги кесішіш нүктесіда улар орасідагі ўткир бурчақни топинг.

Қуйдагі ошқормас функцияларнинг ҳосілаларини топинг.

178. $\sin y = xy^3.$

179. $\cos^2 y = x^2.$

180. $\operatorname{tg} y = xy.$

181. $\arcsin y = x.$

182. $\operatorname{arccotg} y = x^2$

183. а) $2i$, б) $1 + i$, в) $1 - i$ сонларни тригонометрик формада тас-
вирланг.

Ифодаларни соддалаштиринг.

184. $3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$

185. $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$

186. $8 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) : 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$

187. $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) : \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$

Қуйдагі тенглікларнинг тўғрилигини исбот қилинг

188. $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6 = 1.$

189. $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4 = -1.$

190. Қуйдагі илдізларнинг барча қийматларини ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}},$ б) $\sqrt[4]{\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}}.$

Тригонометриянинг с ереометрияга қўлланили-
шига доир масалалар.

191. α диагонали асос текислиги билан α бурчак, катта ён ёғи билан эса β бурчак ташкил қиладиган параллелепипеднинг ҳажмини аниқланг.

192. Тўғри бурчакли параллелипипеднинг диагонали унинг кичик ён ёғи билан β бурчак ашқил қилади. Параллелипипеднинг диагонали ва асосининг катта томони орқали параллелипипед кесими ўтказилган. Бу кесимнинг периметри m га тенглигини ва унинг текислиги асос текислиги билан α бурчак ташкил қилишини билган ҳолда параллеле-
пипед ҳажмини топинг.

193. Кубнинг қирраларидан бири орқали текислик ўтказилган бў-
либ, у қўшни ёқ билан α бурчак ташкил қилади. Кесим юзи m^2 га тенглигини билган ҳолда, кубнинг ҳар бир бўлаги ҳажмини топинг.

194. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирралари a га тенг ва улар асос текислигига α бурчак остида огган. Пирамиданинг ён сиртини ва ҳажмини топинг.

195. Пирамиданинг асоси бурчаклари α ва β бўлган учбурчакдан
иборат. Пирамиданинг баландлиги h га тенг. Қирраларнинг асос текис-

лиги билан ташкил қилган бурчақлари γ га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

196. Муштазам учбурчақли пирамидада ён ёқнинг пирамида учидаги α текис бурчаги 90° дан кичик, асоснинг томони a га тенг. Ён ёқлар орасидаги икки ёқли бурчақни ва асос томонидан ён қиррага (қарама-қарши ётган) перпендикуляр қилиб ўтказилган кесим юзини топинг.

197. Ён қирраси асос текислигига α бурчақ остида оғган ва асоснинг қарама-қарши томонини ўртасидан h масофада ётадиган муштазам учбурчақли пирамиданинг ҳажмини топинг.

198. Пирамиданинг асоси томони a га, ўткир бурчаги β га тенг бўлган ромбдан ибора. Асосдаги барча икки ёқли бурчақлар α га тенг. Пирамиданинг ҳажмини ва тўла сиртини топинг.

199.* Муштазам учбурчақли пирамидада ён ёқ асос текислиги ва қўшни ён ёқ билан мос равишда ҳосил қиладиган α ва β бурчақларнинг косинуслари орасидаги боғланишни аниқланг.

200.* Муштазам олти бурчақли пирамидада ён ёқ асос текислиги ва қўшни ён ёқ билан мос равишда ҳосил қиладиган α ва β бурчақларнинг косинуслари орасидаги боғланишни ўратинг.

201. Агар муштазам учбурчақли пирамидада ён ёқ асос текислиги билан ашқил қилган икки ёқли бурчақ β га тенг бўлса, ён ёқлар орасидаги икки ёқли бурчақни топинг.

202. Муштазам тўртбурчақли пирамидада асос томони орқали асосга β бурчақ остида текислик ўтказилган. Агар пирамиданинг апофемаси a га тенг бўлиб, ён ёқ асос текислигига α бурчақ остида оғган бўлса, ҳосил қилинган кесим юзини аниқланг.

203. Муштазам тўртбурчақли пирамидада унинг b ён қирралари асоси текислиги билан α бурчақ ташкил қилади. Асос диагонали орқали ён қиррага параллел қилиб текислик ўтказилган. Кесим юзини ҳисобланг.

204. Асосида тўғри бурчақли учбурчақ ётган призмага шар ички чизилган. Бу учбурчақда тўғри бурчақ учидан гипотенузага туширилган перпендикулярнинг узунлиги h бўлиб, y катетлардан бири билан α бурчақ ташкил қилади. Призма ҳажмини топинг.

205. Пирамида асоси бурчақлари α ва β бўлган учбурчақдан иборат. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислигига γ бурчақ остида оғган. Агар пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси R га тенг бўлса, пирамиданинг ҳажмини топинг.

206. Муштазам тўртбурчақли пирамидага ички шар чизилган. Агар асос томони a га, пирамида учидаги текис бурчақ α га тенглиги маълум бўлса, шар сиртини аниқланг.

207. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчақдан иборат бўлиб, унинг ён томонлари b га тенг. Асоснинг тенг томонлари орқали ўтувчи икки ён ёқ асосга перпендикуляр, учинчи ёқ эса асосга α бурчақ остида оғган. Асосдаги тенг томонли учбурчақнинг учидаги бурчақ ҳам α га тенг. Пирамидага ички чизилган шар радиусини аниқланг.

208. Юқоридаги масала шартини сақлаган ҳолда, бу пирамидага ташқи чизилган шар радиусини аниқланг.

209. Агар муштазам тўртбурчақли пирамидага ташқи чизилган шарнинг ҳажми V га тенглиги ва шар марказидан пирамиданинг ён ёнига туширилган перпендикуляр пирамиданинг баландлиги билан бурчақ ташкил қилиши маълум бўлса, пирамиданинг баландлигини топинг.

10- БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

2. а) 0,2705, б) 0,1251, в) 1,4434, г) 2,0071, д) 5,4512.

3. а) 0,236, б) 0,442, в) 0,611, г) 1,48, д) 2,09.

4. а) 25° , б) 100° , в) 110° , г) 78° , д) 240° .

5. а) $25^\circ 18'$, б) $50^\circ 20'$, в) 60° , г) $85^\circ 05'$, д) 100° .

6. $\pi/2$, $2\pi/3$, $5\pi/6$.

7. $\pi/6$, $\pi/4$, $7\pi/12$.

8. 0,25 м. 9. 0,05 м². 10. 0,5. 11. 8 м.

64. $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. 65. $x = \pi k$. 66. $\pi k + \frac{\pi}{4}$.

71. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \arctg 2 + \pi k$.

72. $x = \operatorname{arccctg} 6 + \pi k$, $x = -\operatorname{arccctg} 2 + \pi k$.

73. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\arctg \frac{3}{2} + \pi k$.

74. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \arctg \frac{3}{4} + \pi k$.

105. $x = \frac{\pi}{3} k$. 106. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. 107. $x = \pi k$.

108. а) $-\frac{24}{25}$, б) $-0,92$, в) $3\frac{3}{7}$.

109. а) $-\frac{8}{15}$, б) $\frac{119}{169}$, $\frac{120}{119}$.

111. а) $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$, б) $8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$,

в) $16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$.

116. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 117. $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{1}{2}$.

118. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. 119. $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 120. $\sin 2\alpha$.

123. а) $\frac{4}{5}$, б) $-\frac{4}{5}$, в) $-\sqrt{3}$.

127. а) $\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 8x$,

б) $\frac{1}{4} \cos \frac{13x}{12} + \frac{1}{4} \cos \frac{5x}{12} + \frac{1}{4} \cos \frac{7x}{12} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{12}$.

132. а) $\frac{1}{2}$, б) $2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$, в) $\frac{\sin 10^\circ}{\cos 15^\circ \cos 25^\circ}$

г) $\sin 8\alpha \sin 2\alpha$.

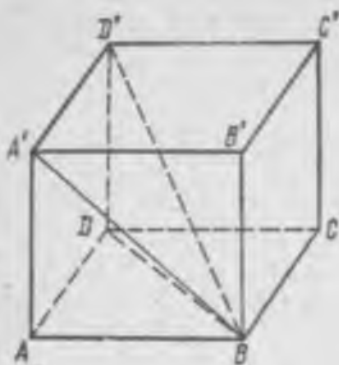
133. $2 \sin \alpha \cos 4\alpha$. 134. $\cos 10^\circ$.

135. $2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 136. $4 \sin \frac{3x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2}$.
 138. $8 - 6\sqrt{2}$. 139. $\frac{2}{3}$. 140. $4x \cos(2x^2 + 3)$.
 141. $15\varphi \sin 5\varphi^2 \sin 10\varphi^2$. 142. $-\frac{6 \cos 2x}{\sin^4 2x}$.
 143. $\operatorname{ctg} 2x \sqrt{\sin 2x}$. 144. $\frac{10 \cos 5x}{\sqrt[3]{\sin 5x}}$.
 145. $-\frac{2}{3} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 146. 1 м/сек^2 . 147. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
 148. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} \right)$. 149. $\frac{3\pi}{4}$. 150. $-\operatorname{arctg} 3$.
 151. $4\sqrt{3}$. 152. $\sqrt{3} + 1$. 153. $-1/2$. 154. $4/3$.
 155. $\frac{1 + \sqrt{3}}{6}$. 156. $-2x \sin(x^2 - 3)$. 157. $-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \sin 2\sqrt[3]{x}$.
 158. $\frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$. 159. $\frac{6 \sin 3x}{\cos^2 3x}$. 160. $-\frac{3x^2}{\sin^2 x^2}$.
 161. $-\frac{2\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin 4x}$. 162. $\frac{2}{3 \sin 2x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$. 163. $-\frac{1}{\sin x}$.
 164. $2 \operatorname{ctg}(x - 1)$. 165. $\frac{8x}{\sin^2 2x^2}$. 166. $2 \cos 2t$.
 167. $e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$. 168. $\operatorname{ctg} x (1 - \sin 2x)$.
 169. $-\frac{1}{1 + x^2}$. 170. $\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$. 171. 16 .
 172. $-\frac{1}{\sqrt{2x(1 - 2x)}}$. 173. $\frac{2a}{x^2 + a^2}$. 174. $-\frac{1}{(1 + 2x)\sqrt{2x}}$.
 175. $\frac{1}{1 + x^2}$. 178. $\frac{y^2}{\cos y - 2xy}$. 179. $-\frac{2x}{\sin 2y}$.
 180. $\frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$. 181. $\sqrt{1 - y^2}$. 182. $-2x(1 + y^2)$.

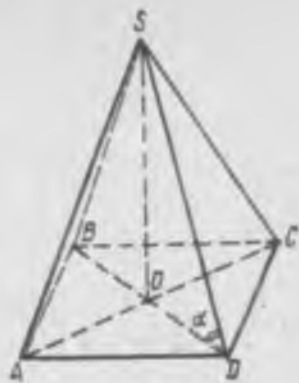
191. Ечилиши. Тўғри бурчакли $ABCD A'B'C'D'$ (10.49-расм) параллелепипед берилган. Унинг диагонали $BD' = a$, $\angle D'BD = \alpha$ ва $\angle A'BD' = \beta$.

$D'BD$ учбурчакдан ($\angle D = 90^\circ$) $H = DD' = BD' \sin \alpha = a \sin \alpha$ ни топамиз. $BA'D'$ учбурчакдан ($\angle A' = 90^\circ$) $A'D' = AD = BD' \times \sin \beta = a \sin \beta$, $A'B = BD' \cos \beta = a \cos \beta$ ни топамиз. $A'AB$ учбурчакда ($\angle A = 90^\circ$) $AA' = DD' = a \sin \alpha$, бундан

$$AB = \sqrt{(A'B)^2 - (A'A)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \beta - a^2 \sin^2 \alpha} = a \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$



10.49- расм.



10.50- расм.

У ҳолда

$S = AB \cdot AD = a^2 \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$ ва, демак, $V = S \cdot H = a^3 \sin \alpha \times \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$. Ҳосил қилинган натижани соддалаштириш мумкин:

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \sin^2 \alpha = \\ &= \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \sin \alpha \right] \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \sin \alpha \right] = \\ &= 4 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2} = \\ &= \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta). \end{aligned}$$

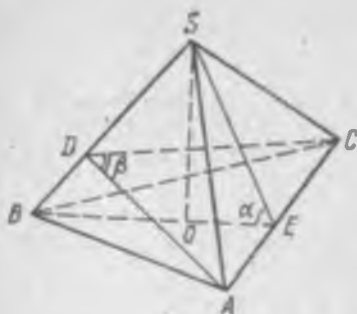
Жавоби. $V = a^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}$.

192. Жавоби. $V = \frac{\sqrt{2} m^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos \beta}{128 \cos^3 \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right)}$.

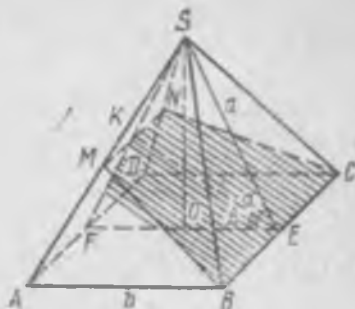
193. Жавоби. $V_1 = \frac{1}{2} m^3 \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}$, $V^2 = \frac{1}{2} m^3 (2 \cos \alpha - \sin \alpha) \sqrt{\cos \alpha}$.

194. Масала шартига кўра (10.50- расм) $OA = a \cos \alpha$, $d = 2OA = 2a \cos \alpha$. Пирамиданинг баландлиги $H = a \sin \alpha$. Асосдаги квадрат томони $x = \frac{d \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} a \cos \alpha$. Пирамида асосининг юзи $Q = 2a^2 \cos^2 \alpha$. Апофема:

$$l = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2} = a \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2}}$$



10. 51- расм.



10. 52- расм

Пирамида ён сиртини ва ҳажмини маълум формулалар орқали топамиз.

Жавоби. $S_{\text{ён}} = 2a^2 \cos \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$,

$$V = \frac{1}{3} a^3 \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

195. Жавоби. $V = \frac{2}{3} h^3 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \operatorname{ctg}^2 \gamma$.

196. Жавоби. $\varphi = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos (\alpha/2)}$,

$$S = \frac{a^2}{8 \sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)}}$$

197. Жавоби. $V = \frac{4k^3}{27 \sin \alpha \sin 2\alpha}$.

198. Жавоби. $V = \frac{a^3}{6} \sin^2 \beta \operatorname{tg} \alpha$, $S = a^2 \sin \beta (1 + \sec \alpha)$.

199. Ечилиш. Асос томони a га тенг бўлсин. Унда ён ёқнинг пирамида учидан ўтказилган баландлиги $SE = \frac{a \sqrt{3}}{6 \cos \alpha}$ га тенг (10.51- расм), ён

қирра $SC = SA = SB = \frac{a \sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 3}$. Энди асос учидан ён қиррага ўтказилган ён ёқ баландлигини топамиз: $AD = DC = \frac{a}{2 \sin (\beta/2)}$. Сўнгра $\triangle ASC$ ва $\triangle BAS$ учбурчак юзларини топим ва ҳосил қилинган натижаларни тенглаш лозим. Жавоби. $3 \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos \beta$.

200. Жавоби. $1 + \cos^2 \alpha = -2 \cos \beta$.

201. Жавоби. $\arccos \frac{1 - 3 \cos^2 \beta}{2}$.

202. Ечилиши. Ҳосил қилинган кесим тенг ёнли трапеция эканлигини исботлаш қийин эмас. OSE учбурчакдан (10.52-расм) $OE = a \cos \alpha$, $b = 2 \cdot OE = 2a \cos \alpha$. ESK учбурчакдан синуслар теоремасига кўра

$$\frac{KE}{\sin (180^\circ - 2\alpha)} = \frac{KC}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin (\alpha + \beta)}, \text{ бундан трапеция баландлиги } KE = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin (\alpha + \beta)}, KS = \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Сўнгра $\triangle ASD \sim \triangle MSN$, шунинг учун $\frac{MN}{b} = \frac{KS}{a}$, бундан трапеция асосининг кичик асоси $MN = \frac{b \cdot KS}{a} = \frac{2a \cos \alpha \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}$. Изланган кесим юзи

$$S = \left[a \cos \alpha + \frac{a \cos \alpha \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} \right] \frac{a \sin 2\alpha}{\sin (\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos \alpha \sin 2\alpha [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]}{\sin^2 (\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos \alpha \sin 2\alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}.$$

Жавоби. $S = \frac{a^2 \sin 2\alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$.

203. Жавоби. $S = \frac{1}{2} b^2 \cos \alpha$.

204. Кўрсатма. Призма баландлиги ички чизилган шар радиусига тенг.

Жавоби. $V = S \cdot 2r = \frac{h^3 \sqrt{2}}{2 \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$

205. Жавоби. $V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 2\gamma \operatorname{tg} \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$.

206. Жавоби. $S = \frac{\pi a^2 \cos \alpha}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

$$207. \text{ Жавоби. } r = b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

$$208. \text{ Жавоби. } R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

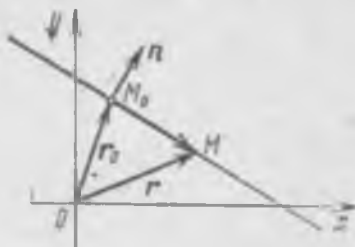
$$209. \text{ Жавоби. } h = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{1/3}.$$

ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАР

11.1-§. Текисликда тўғри чизиқни вектор ва координата формадаги тенгламалар билан берилиши

11.1.1. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. l чизиқ xOy координата текислигидаги тўғри чизиқ $L_0(x_0, y_0)$ даги фиксирланган нуқта, $n = (A; B)$ бу тўғри чизиққа перпендикуляр ва ноль бўлмаган вектор бўлсин. Бу векторни тўғри чизигимизнинг *нормал вектори* деб атаймиз. M_0 нуқта ва n векторнинг берилиши l ни аниқлашини ҳамда xOy текисликдаги исталган тўғри чизиқ ана шундай қилиб берилиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз (11.1-расм).

Ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта



11.1-расм

M_0M_1 ва n векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина l тўғри чизиққа тегишли бўлади. Бунинг учун, ўз навбатида, бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\overrightarrow{n \cdot M_0M} = 0. \quad (11.1)$$

M_0 нуқтанинг радиус-векторини r_0 орқали ва M нуқтанинг радиус-векторини r орқали белгилаб, (11.1) формулани қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\overrightarrow{n(r - r_0)} = 0. \quad (11.2)$$

(11.2) муносабат M нуқтанинг l тўғри чизиққа тегишли бўлишининг зарур ва етарли шартини ифодалайди. У тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси деб аталади.

$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ бўлгани учун $\overline{n \cdot M_0M}$ скаляр кўпайтмани кўпайтувчиларнинг координаталари орқали ифодаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (11.3)$$

(11.3) тенглама тўғри чизиқнинг координата формадаги тенгламасини ифодалайди.

11.1.2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. (11.3) тенгламада қавсларни очамиз:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

ва $-Ax_0 - By_0$ ни C орқали белгилаймиз.

У ҳолда бу тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$Ax + By + C = 0. \quad (11.4)$$

(11.4) тенглама текисликдаги *тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси* дейилади. «Умумий» термини шу билан тушунтирилади: текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиқ x ва y га нисбатан биринчи даражали (бунда A ва B коэффициентлар бир вақтда нолга айланмайди, чунки $\overline{n}$ вектор нолга тенг эмас) тенглама орқали берилади. Бунинг тескарисини ҳам кўрсатиш қийин эмас: (11.4) кўринишдаги ҳар қандай тенглама A ва B бир вақтда нолга айланмаганда тўғри чизиқни беради. Масалан, агар $A \neq 0$ бўлса, $M_0 \left(-\frac{C}{A}; 0 \right)$ нуқтадан ўтувчи бу тўғри чизиқ $\overline{n} = (A; B)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ бўлади.

Тўғри чизиқ умумий тенгламаси коэффициентларининг баъзилари нолга тенг бўлгандаги характерли хусусий ҳолларни қайд қилиб ўтамиз.

1. $A = 0, B \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (11.4) тенглама

$$y = b \quad (b = -C/B)$$

кўринишни олади. Бундан, тўғри чизиқнинг барча нуқталари b га тенг бўлган бир хил ординатага эгаллиги келиб чиқади; демак, тўғри чизиқ абсциссалар ўқига параллел.

2. $B = 0, A \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

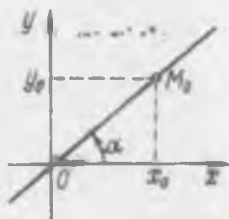
$$x = a \quad (a = -C/A)$$

га эгамиз. Тўғри чизиқнинг барча нуқталари бир хил абсциссага эга; демак, тўғри чизиқ ординаталар ўқига параллел.

3. $C = 0$, $B \neq 0$ бўлсин. — A/B ни k орқали белгилаб (11.4) тенгламани

$$y = kx$$

кўринишга келтирамыз. k коэффициентнинг маъносини аниқлаймиз. Тўғри чизиқ тенгламасини $(0; 0)$ нуқта қанъатлантиради, демак, тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Тўғри чизиқда ихтиёрий $M_0(x_0; y_0)$ ($x_0 \neq 0$) нуқтани олиб, $y_0 = kx_0$ ни ҳосил қиламиз, ундан $k = y_0/x_0$. 11.2-расмга мурожаат қилиб, k сон тўғри чизиқнинг x ўққа қиялик бурчаги α нинг тангенс эканлигини кўрамыз. k сон *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади.



11.2-расм.

11.1.3. $B \neq 0$ деб фараз қилинганда тўғри чизиқ тенгламасининг махсус ҳоллари. Тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ ёки } y = kx + b. \quad (11.5)$$

b соннинг маъносини аниқлаймиз. Агар $x=0$ бўлса, y ҳолда $y = b$, демак, бизнинг тўғри чизигимиз ординаталар ўқини $(0; b)$ нуқтада кесиб ўтади. b сон *тўғри чизиқнинг бошланғич ординатаси*, (11.5) тенглама эса *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти ва бошланғич ординатаси тенгламаси* дейилади.

Агар (11.3) тенгламани B га бўлиб (албатта $B \neq 0$ деб ҳисоблаб) ва яна $k = -A/B$ деб,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (11.6)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама *берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Фиксирланган $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада ва турли k да бу тенглама тўғри чизиқлар тўпламини беради. Бу тўплам маркази M_0 нуқтада бўлган *тўғри чизиқлар дастаси* деб аталади. M_0 нуқтадан ўтувчи фақат битта тўғри чизиқ, чунончи абсциссалар ўқиға перпендикуляр тўғри чизиқ бундай тенглама орқали ифодаланмаслигини эслатиб ўтамыз. Унинг тенгламаси $x = x_0$ бўлади.

Берилган иккита $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузиш талаб қилинсин ($x_1 \neq x_2$ деб ҳисоблаймиз).

Берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз. Бунинг учун M_1M_2 кесманинг абсциссалар ўқи билан ташкил қиладиган бурчагининг тангенсини топамиз. 11.3-расмдан

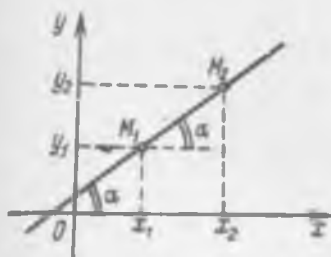
$$\operatorname{tg} \alpha = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (11.7)$$

ни кўриш осон. k нинг бу қийматини маркази $M_1(x_1; y_1)$ нуқтада бўлган тўғри чизиқ дастасининг тенгламасига қўйиб,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу формулани анча симметрик бўлган формада (бунда $y_1 \neq y_2$ деб ҳисоблаймиз) ёзамиз:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (11.8)$$



11.3- расм.

Ҳосил қилинган тенглама ўша изланаётган тенгламадир.

У берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси дейилади.

$(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ нуқталардан ўтувчи инсталган тўғри чизиқ тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинлигини текшириш осон:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.9)$$

Ҳақиқатан, бу детерминантнинг биринчи сатридан ва учинчи сатридан унинг иккинчи сатрини айириб ва детерминантни учинчи устун элементлари бўйича ёйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0. \quad (11.10)$$

11.1.4. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Коллинеарлик ва перпендикулярлик шартлари. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар мос равишда қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (11.11)$$

У ҳолда $n_1 = (A_1; B_1)$ вектор l_1 га нормал вектор, $n_2 = -(A_2; B_2)$ вектор эса l_2 га нормал вектор бўлади. Агар

l_1 ва l_2 неколлинеар бўлса, у ҳолда n_1 ва n_2 орасидаги φ бурчак l_1 ва l_2 ташкил қилган бурчаклардан бирига тенг, агар $l_1 \parallel l_2$ бўлса, у ҳолда $\varphi = 0$ ёки $\varphi = \pi$. φ ни n_1 ва n_2 нинг скаляр кўпайтмаси ва уларнинг узунликлари орқали ифодалаб ва сўнгра бу векторларнинг координаталарига ўтиб,

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (11.12)$$

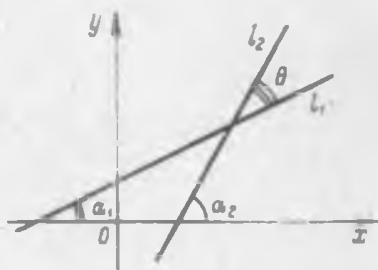
ни ҳосил қиламиз. Агар $B_1 \neq 0$ ва $B_2 \neq 0$ бўлса, ўнг томон ҳадларини ҳаммасини $B_1 B_2$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} + 1}{\sqrt{\frac{A_1^2}{B_1^2} + 1} \sqrt{\frac{A_2^2}{B_2^2} + 1}}$$

$k_1 = -A_1/B_1$ ва $k_2 = -A_2/B_2$ ни киритиб, $\cos \varphi$ учун тўғри чизиқларнинг бурчак коэффицентлари орқали ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\cos \varphi = \frac{k_1 k_2 + 1}{1 + (k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)} \quad (11.13)$$

Кўпинча икки тўғри чизик орасидаги бурчак тангенсини бу тўғри чизиқлар коэффицентлари орқали ифодалаш формуласи қулай бўлмайди, чунки тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири θ l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг Ox ўққа қиялик бурчаклари айирмаси $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ ни ифодалайди (11.4-расм) ёки бу айирмалардан $\pm \pi$ га фарқ қилади, унда (албатта, $\theta \neq \pi/2$, $\alpha_2 \neq \pi/2$ ва $\alpha_1 \neq \pi/2$ бўлган ҳолларда)



11.4- расм.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + 1} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1}. \quad (11.14)$$

k_1 ни $-A_1/B_1$ ва k_2 ни $-A_2/B_2$ га алмаштириб, навбатдаги алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (11.15)$$

Икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартини $n_1 \cdot n_2$ скаляр кўпайтманинг нолга тенг бўлиши шартидан ҳосил қилиш мумкин:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0,$$

ёки тўғри чизиқлардан ҳеч бири Oy га коллинеар бўлмаса,

$$k_1 k_2 + 1 = 0.$$

Икки тўғри чизиқнинг параллеллик шартини нормал векторларнинг коллинеарлик шартидан келиб чиқади:

$$n_1 = m n_2 \text{ ёки } (A_1; B_1) = (m A_2; m B_2),$$

бу

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad (11.16)$$

га тенг кучли. (11.16) нинг иккала томонини $B_1 B_2$ га бўлиб ($B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ деб ҳисоблаб),

$$k_1 = k_2 \quad (11.17)$$

ни ҳосил қиламиз. (11.17) кўринишдаги коллинеарлик шартини α_1 ва α_2 нинг тенглигидан яққол келиб чиқади.

11.1.5. Масалалар ечиш намуналари. 11.1-мисол. Абсциссалар ва ординаталар ўқларида катталиклари a ва b га тенг бўлган йўналган кесмалар ажратувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

Ечилиши. Изланаётган тўғри чизиқ $M_1(a; 0)$ ва $M_2(0; b)$ нуқталардан ўтади; икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг (11.8) тенгламасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \text{ ёки } \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1,$$

бундан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (11.18)$$

Тўғри чизиқнинг бундай формадаги тенгламаси *тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси* дейилади.

11.2-мисол. $2x + 2y - 13 = 0$, $7x - y + 8 = 0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

(11.12) формулага кўра $\cos \varphi = \frac{2 \cdot 7 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1}} = \frac{3}{5} = 0,6$ ни топамиз. Жадвалдан

$$\varphi = 53^\circ 08'$$

ни топамиз.

11.3-мисол. M_0 (7; 9) нуқтадан

$$3x + 4y - 17 = 0 \quad (11.19)$$

тўғри чизиққача бўлган масофани топинг. M_0 нуқта орқали берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни ўтказамиз. Берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти — $3/4$, перпендикуляр тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$ шартдан топамиз. Ундан $k_2 = -4/3$; k нинг бу қийматини маркази M_0 нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастаси тенгламасига қўйиб, $y - 9 = -\frac{4}{3}(x - 7)$ ёки $4x - 3y - 1 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. M_0 нуқтадан берилган тўғри чизиққа ўтказилган перпендикулярнинг асосини, яъни

$$\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0, \\ 3x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$$

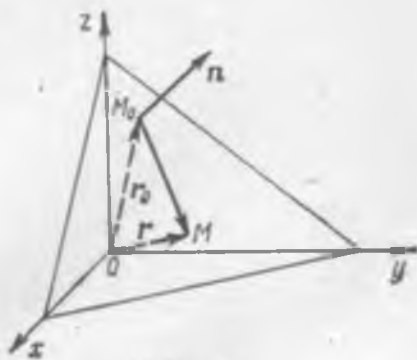
тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси M_1 ни топамиз. Системани ечиб, M_1 (11/5; 13/5) нуқтани ҳосил қиламиз. Энди M_1 ва M_0 нуқталар орасидаги масофани топамиз:

$$d = \sqrt{\left(7 - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(9 - \frac{13}{5}\right)^2} = 8.$$

11.2-§. Текисликни вектор ва координата формадаги тенгламалар билан берилиши

11.2.1. Берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи текислик тенгламаси. Фазодаги бирорта P текисликка тегишли $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқта ва ноль бўлмаган $n(A; B; C)$ вектор берилган бўлсин. Бу вектор берилган текисликка перпендикуляр. n вектор P учун нормал вектор дейилади. Бу иккита элемент билан фазода текисликнинг вазияти тўла аниқланади (11.5-расм).

M_0M ва n векторлар бири-бирига перпендикуляр бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда $M(x; y; z)$ нуқта P



11.5-расм.

га тегишли бўлади, унинг учун ўз навбатида уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0. \quad (11.20)$$

(11.19) да $\vec{M_0M}$ ни $\vec{r} - \vec{r_0}$ га алмаштириб (бу ерда $\vec{r}$ вектор M нуқтанинг радиус-вектори, $\vec{r_0}$ эса M_0 нуқтанинг радиус-вектори),

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \quad (11.21)$$

тенгламага келамиз.

Бу тенглама P текислиқнинг вектор формадаги *тенгламаси* дейилади.

$\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ бўлгани учун (11.20) да координаталарга ўтиб,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (11.22)$$

ни ҳосил қиламиз.

11.2.2. Текислиқнинг умумий тенгламаси. (11.22) да қавсларни очиб ва $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ деб белгилаб,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (11.23)$$

ни ҳосил қиламиз. (11.23) тенглама текислиқнинг координата формадаги *умумий тенгламаси* дейилади.

Текислиқнинг $\vec{n}$ нормал вектори ноль бўлмаган вектор бўлгани учун A , B ва C лар бир вақтда нолга тенг бўлмайди.

A , B , C ва D коэффициентларнинг баъзилари нолга тенг бўлгандаги текислиқ жойлашинининг хусусий ҳолларини кўриб ўтамиз.

1. $D = 0$. Бундай тенглама $Ax + By + Cz = 0$ кўринишни олади. Бу тенгламани $O(0; 0; 0)$ нуқта қаноатлантиради, демак, текислиқ координаталар бошидан ўтади.

2. $A = 0$. Текислиқ тенгламаси

$$By + Cz + D = 0$$

кўринишни олади. Бу ерда $\vec{n}(0; B; C)$ нормал вектор Ox ўқда O га тенг ташкил этувчига эга, демак, у Ox ўққа перпендикуляр. Бу ҳолда, берилган векторга перпендикуляр текислиқ Ox ўққа параллел.

Худди шунингдек, $B=0$ ёки $C=0$ да текислик Og ёки Oz ўққа параллел.

3. $A=0$ ва $B=0$. Текислик тенгламаси

$$Cz + D = 0$$

га айланади. $n(0; 0; c)$ вектор Oz ўққа коллинеар. Демак, текислик Oz ўққа перпендикуляр ва Oxy координаталар текислигига параллел, у Oz ўқда — D/C кесмани ажратади.

$A=0$ ва $C=0$ ёки $B=0$ ва $C=0$ ҳоллар шунга ўхшаш текширилади.

4. $A=0$ ва $D=0$. Текислик тенгламаси

$$By + Cz = 0$$

кўринишни олади. 1- ва 2- ҳолларни эътиборга олиб, текислик x ўқ орқали ўтади деб хулоса қиламиз.

5. $A=0$, $B=0$, $D=0$, $C \neq 0$. $Cz=0$ ёки $z=0$ тенглама Oxy координата текислигини аниқлайди. Қолган хусусий ҳоллар шунга ўхшаш текширилади.

11.2.3. Масалалар ечиш намуналари. 11.4- мисол. Берилган учта $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини топинг. Қуйидаги учта векторни кўриб ўтамиз:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; \quad y - y_1; \quad z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; \quad y_2 - y_1; \quad z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; \quad y_3 - y_1; \quad z_3 - z_1).$$

$M(x; y; z) \in P$ бўлиши учун $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли, чунки, бу векторлар компланар бўлиши керак:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

Векторлар координаталарини қўйиб ва кўпайтмани детерминант орқали ёзиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.24)$$

Бу P текисликнинг изланаётган тенгламасидир.

11.5-мисол. Икки текислик орасидаги бурчакни топинг. Икки текислик орасидаги бурчак деб бу текисликлар ташкил қилган қўшни икки ёқли бурчаклардан ихтиёрий биттасига айтилади. Улардан бири текисликларнинг нормал векторлари орасидаги бурчакка тенг.

Текисликликлар умумий тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.25)$$

У ҳолда $n_1(A_1; B_1; C_1)$ ва $n_2(A_2; B_2; C_2)$ нормал векторлар орасидаги бурчак

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

скаляр кўпайтма ёрдамида ҳисобланади.

11.6-мисол. Текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Текисликлар параллел бўлиши учун уларнинг нормал векторлари коллинеар бўлиши керак, яъни

$$n_1 = \lambda n_2$$

бўлиши керак, бу эса

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2 \quad (11.27)$$

га тенг кучли. Агар $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу тенгликлардан

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (11.28)$$

келиб чиқади. Албатта, (11.28) дан ҳам $\lambda = A_1/A_2$ да (11.27) ни ҳосил қиламиз.

Текисликлар перпендикуляр бўлиши учун уларнинг нормал векторлари перпендикуляр бўлиши зарур ва етарли

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$

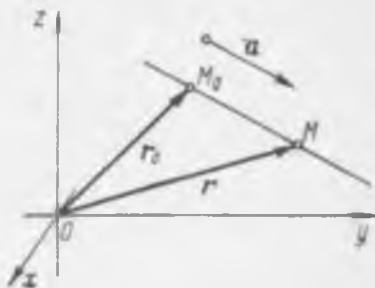
Демак,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (11.29)$$

шарт (11.25) текисликлар перпендикулярлигининг зарурийлик ва етарлилик шarti бўлади.

11.3-§. Тўғри чизиқнинг фазода берилиши

11.3.1. Тўғри чизиқнинг вектор-параметрик тенгламаси ва унинг натижалари. Бирор l тўғри чизиқнинг нуқтаси ва l га коллинеар a вектор берилган бўлсин (a вектор тўғри чизиқнинг йўналиштирувчи вектори дейилади). Бу икки элемент орқали l тўғри чизиқнинг фазода вазияти тўла аниқланади (11.6-расм). $M(x, y, z) \in l$ бўлиши учун



11.6-расм.

M_0M ва a векторлар коллинеар бўлиши зарур ва етарли. Бунинг учун ўз навбатида биронта ҳақиқий t сон учун

$$\overrightarrow{M_0M} = t a \quad (11.30)$$

бўлиши керак. (11.30) да M_0M ни $r - r_0$ га (бу ерда одатдагидек, r ва r_0 ни M ва M_0 нуқталарнинг радиус-векторлари деб тушунамиз) алмаштириб,

$$r = r_0 + t a \quad (11.31)$$

тенгламага келамиз. (11.31) тенглама l тўғри чизиқнинг *вектор-параметрик тенгламаси* дейилади.

(11.30) да M_0M ва a t векторларнинг координаталарига ўтиб, $(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + (m; n; p)t$ ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \quad (11.32)$$

келиб чиқади. Бу тенгликларни

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad \frac{y - y_0}{n} = t \quad \text{ва} \quad \frac{z - z_0}{p} = t$$

формада ёзиб олиб ва параметрни тушириб қолдириб,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (11.33)$$

ни ҳосил қиламиз. (11.33) тенглама тўғри чизиқнинг *каноник тенгламаси*, (11.32) тенгламалар системаси эса унинг координата-параметрик формадаги *тенгламалар системаси* дейилади.

11.3.2. Масалалар ечиш намуналари. 11.7-мисол. Берилган иккита $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ва $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгласини топинг.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор берилган тўғри чизикқа коллинеар бўлади. Уни йўналтирувчи вектор сифатида ва M_1 нуқтани бошланғич нуқта сифатида олиб,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1M_2}t$$

ёки

$$(x; y; z) = (x_1; y_1; z_1) + (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)t$$

ни ҳосил қиламиз. Каноник кўринишда бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (11.34)$$

11.8-мисол. Фазодаги икки тўғри чизик орасидаги бурчакни топинг.

Фазодаги икки тўғри чизик орасидаги *бурчак* деб фазонинг ихтиёрий нуқтасидан берилган тўғри чизикларга параллел қилиб ўтказилган икки тўғри чизик орасидаги бурчакка айтилади. Демак, тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакни изланаётган бурчак учун қабул қилиш мумкин.

Тўғри чизиклар каноник тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad (11.35)-$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

У ҳолда $a_1(m_1; n_1; p_1)$ ва $a_2(m_2; n_2; p_2)$ векторлар орасидаги бурчак

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (11.36)$$

формула бўйича ҳисобланади. Бу ердан икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шarti келиб чиқади:

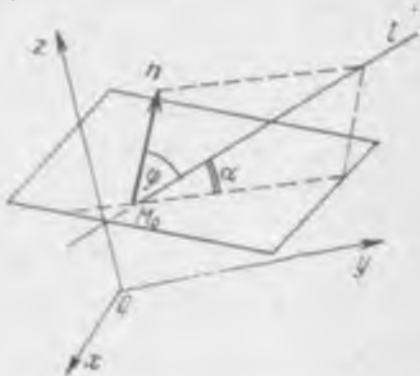
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (11.37)$$

Тўғри чизикларнинг параллеллик шартини уларнинг йўналишувчи векторларининг коллинеарлигидан келтириб чиқарамиз. У

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (11.38)$$

кўринишга эга.

11.9-мисол. Тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчакни топинг. Тўғри чизик билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчак тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак ҳисоблангани сабабли (11.7-расм) изланаётган бурчак учун текисликнинг нормал вектори ва тўғри чизикнинг нормал вектори орасидаги бурчакни $\pi/2$ гача тўлдирувчи бурчакни олиш мумкин. Бунда векторларнинг йўналишини улар орасидаги бурчак $\pi/2$ дан ортмайдиган қилиб олиш керак.



11.7-расм.

Текислик ва тўғри чизик қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (11.39)$$

У ҳолда изланаётган φ бурчак қуйидаги формула бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (11.40)$$

Бундан (11.39) тенгламалар билан берилган тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик шarti келиб чиқади. Параллеллик шarti

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad (n \cdot a = 0)$$

кўринишга эга, перпендикулярлик шarti эса

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \quad (n = \lambda a)$$

кўринишга эга.

11.3.3. Фазода тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш тўғри чизиги сифатида берилиши. Ихтиёрий параллел бўлмаган текисликлар тўғри чизиқ бўйлаб кесишади.

Қуйидаги икки текислик берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Агар бу текисликларнинг йўналтирувчи векторлари параллел бўлса, у ҳолда ёзилган тенгламалар системаси бирор тўғри чизиқни аниқлайди.

(11.41) системадан тўғри чизиқнинг каноник тенгламасига ўтамиз. Бунинг учун тўғри чизиқнинг бирор нуқтасига ва унинг йўналтирувчи векторига эга бўлиш керак. Агар координаталардан бирига ихтиёрий қиймат берилса ва ҳосил қилинган икки тенгламадан иборат системани қолган координаталарга нисбатан ечилса, тўғри чизиқнинг нуқтаси топилади.

Равшанки, иккала текисликка тегишли тўғри чизиқ уларнинг $n_1(A_1; B_1; C_1)$, $n_2(A_2; B_2; C_2)$ йўналтирувчи векторларининг ҳар бирига перпендикуляр бўлади.

Шундай қилиб, n_1 ва n_2 га перпендикуляр бўлган исталган вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади.

Юқоридагилардан маълумки, n_1 ва n_2 векторларнинг вектор кўпайтмаси иккала векторга ҳам перпендикуляр, шу сабабли a йўналтирувчи вектор учун $n_1 \times n_2$ векторни олиш мумкин.

11.10-мисол. Қуйидаги текисликлар билан берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ёзинг:

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z - 5 &= 0, \\ 4x - y + 2z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$n_1(3; 5; -1)$, $n_2(4; -1; 2)$ га эгамиз. Вектор кўпайтма:

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9i - 10j - 23k.$$

Бошланғич нуқтани топамиз. $z = 2$ деб, $\begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0, \\ 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$ системадан $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $M_0(-1; 2; 2) \in l$. Шундай қилиб, тўғри чизиқни изланаётган тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x+1}{9} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z-2}{-23}.$$

Бу бобнинг якунида шуни қайд қилиб ўтамизки, текисликдаги (фазодаги) ихтиёрий тўғри чизик биринчи даражали тенглама (тенгламалар системаси) орқали берилиши мумкин. Шу сабабли улар биринчи тартибли чизиклар деб аталади.

Текисликлар ҳам ана шу сабабга кўра биринчи тартибли сиртлар деб аталади.

11-БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. xOy текисликда берилган нуқта орқали берилган векторга перпендикуляр ўтувчи тўғри чизик тенгламасини умумий кўринишда (вектор ва координата формада) ёзинг. Мисоллар келтиринг.

2. Декарт координата текислигида тўғри чизикнинг умумий тенгламаси деб нимага айтилади? Унинг умумий тенгламасида у ёки бу коэффициентлар 0 га тенг бўлса, тўғри чизик координаталар ўқига нисбатан қандай жойлашади? Мисоллар келтиринг.

3. Декарт координата текислигида тўғри чизик тенгламаларининг қандай махсус кўринишларини биласиз? Мисоллар келтиринг.

4. Декарт координата текислигида икки тўғри чизик орасидаги бурчакни қандай формулалар орқали топиш мумкин? Ўз жавобингизни мисоллар билан тушунтиринг. Икки тўғри чизикнинг коллинеарлик ва перпендикулярлик шартларини тавсифлаб беринг.

5. Берилган нуқтадан берилган векторга перпендикуляр равишда ўтувчи текислик тенгламасини умумий кўринишда (вектор ва координата формада) ёзинг. Мисоллар келтиринг.

6. Текисликнинг умумий тенгламаси деб нимага айтилади? Агар текисликнинг умумий тенгламасида у ёки бу коэффициентлар нолга тенг бўлса, текислик координаталар ўқига нисбатан қандай жойлашади? Мисоллар келтиринг.

7. Берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини қандай формула орқали топиш мумкин? Ўз жавобингизни мисоллар билан тушунтиринг.

8. Икки текислик орасидаги бурчак катталигини қандай топиш мумкин? Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.

9. Берилган нуқтадан берилган векторга коллинеар равишда ўтувчи тўғри чизикни аналитик қандай баён қилиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

10. Икки тўғри чизик орасидаги бурчакни қандай формулалар орқали топиш мумкин? Тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчакни-чи? Икки тўғри чизикнинг коллинеарлик ва перпендикулярлик шартлари нимадан иборат? Тўғри чизик ва текисликни-чи? Ўз жавобингизни мисоллар билан тушунтиринг.

11. Декарт координата текислигида тўғри чизикни қандай усуллар билан аналитик бериш мумкин? Мисоллар келтиринг.

12. Нима учун тўғри чизиклар биринчи тартибли чизиклар, текисликлар эса биринчи тартибли сиртлар номи билан аталади?

11-БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Учбурчакнинг учлари $A(3; -4)$, $B(1; 3)$ ва $C(-4; -2)$ нуқталарда жойлашган. Унинг томонлари ва баландликлари тенгламаларини тузинг.

2. $x - y - 1 = 0$ ва $x - 2y = 0$ — параллелограмм томонларининг тенгламалари. $M(3; -1)$ — диагоналлarning кесишиш нуқтаси. Бу параллелограмм учларининг координаталарини топинг.

3. $A(-6; 2)$ ва $B(2; -2)$ — учбурчак учлари, $M(1; 2)$ — баландликларининг кесишиш нуқтаси. Учинчи уч координаталарини топинг.

4. Тенг ёнли учбурчак асосининг тенгламаси $x + y - 1 = 0$, унинг ён томонининг тенгламаси $x - 2y - 2 = 0$. $(-2; 0)$ нуқта иккинчи ён томонга тегишчи. Бу томоннинг тенгламасини тапиш талаб қилинади.

5. $(5; 4)$ нуқтадан тўғри чизиқни шундай ўтказингки, бу тўғри чизиқ ва координата ўқлари ҳосил қилган учбурчакнинг юзى 40 га тенг бўлсин.

6. Тўғри тўртбурчак томонининг тенгламаси $2x - y - 8 = 0$. $M(-1; 6)$ нуқта берилган томонга параллел томонда ётади, диагональ тенгламаси $8x + y - 12 = 0$, қолган томонларининг тенгламасини топинг.

7. $M(3; 4; -5)$ нуқтадан $a = (3; 1; -1)$ ва $b = (1; -2; 1)$ векторларга параллел равишда ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

8. $M(1; -1; 2)$ нуқтадан $2x - y + 3z - 1 = 0$ ва $x + 2y + z = 0$ текисликларга перпендикуляр равишда ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

9. l тўғри чизиқ $2x + y - 3z - 1 = 0$ ва $3x + 2y + 4z - 11 = 0$ текисликларнинг кесишиш чизигини фойдалайди. Унинг каноник тенгламасини ва координата-параметрик формадаги тенгламасини тузинг. Бу тўғри чизиқнинг $2x + y + z - 9 = 0$ текислик билан кесишиш нуқтасини топинг.

10. $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$ тўғри чизиқ ва $M(2; -2; 1)$ нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

11-БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. Жавоби.

$$AB: 7x + 2y - 13 = 0,$$

$$AC: 2x + 7y + 22 = 0,$$

$$BC: x - y + 2 = 0,$$

$$AD: x + y + 1 = 0,$$

$$BE: 7x - 2y - 1 = 0,$$

$$CF: 2x - 7y - 6 = 0.$$

2. Параллелограмм диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишидан фойдаланиш қулай.

Жавоби. $(2; 1)$, $(-8; -9)$, $(4; -3)$, $(14; 7)$.

3. Жавоби. $(2; 4)$.

4. Жавоби. $2x - y + 4 = 0$.

5. Тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан «тенгламасидан фойдаланиш қулай».

Жавоби 1) $\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1$, 2) $\frac{x}{10(\sqrt{2}-1)} -$

$-\frac{y}{8(\sqrt{2}+1)} = 1$, 3) $-\frac{x}{10(\sqrt{2}+1)} + \frac{y}{8(\sqrt{2}-1)} = 1$.

6. Жавоби. $2x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$.

7. Нормал вектор сифатида $n = a \times b$ ни олиш мумкин.

Жавоби. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

Жавоби. $7x - y - 5z + 2 = 0$.

9. Жавоби. $\frac{x-1}{10} = \frac{y-2}{-17} = \frac{z-1}{1}$, $x = 10t + 1$, $y =$

$= -17t + 2$, $z = t + 1$, $(11; -15; 2)$.

10. Жавоби. $4x + 6y + 5z - 1 = 0$.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР ВА СИРТЛАР

12.1-§. Иккинчи тартибли эгри чизиклар

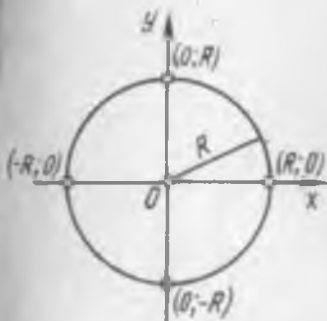
12.1.1. Айлана. Иккинчи тартибли эгри чизик (*сирт*) дейилганда бирор Декарт координата системасида бу эгри чизик (*сирт*) ўзгарувчи нуқтасининг координаталарига нисбатан иккинчи тартибли тенглама билан берилиши мумкин бўлган чизик (*сирт*) тушунилади. Иккинчи тартибли эгри чизикнинг энг соддаси маркази координаталар бошида бўлган R радиусли айланадир (12.1-расм):

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (12.1)$$

Айлана чегараланган соҳада, чунончи томони $2R$ га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган квадрат ичида жойлашган ёпиқ эгри чизикни тасвирлайди. Бу эгри чизик координаталар ўқиға ва координаталар бошиға нисбатан симметрикдир.

12.1.2. Эллипс. Иккинчи тартибли

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (12.2)$$



12.1-расм.

эгри чизикни қараймиз, бу ерда a ва b — бирор мусбат сонлар.

Бирорта Декарт координаталар системасида бундай тенглама билан берилиши мумкин бўлган чизик *эллипс* деб аталади, (12.2) тенглама эса эллипснинг *каноник тенгламаси* дейилади. Бу эгри чизикнинг хоссаларини ва формасини унинг тенгламаси бўйича ўрганамиз. (12.2) тенгламадан кўриладики,

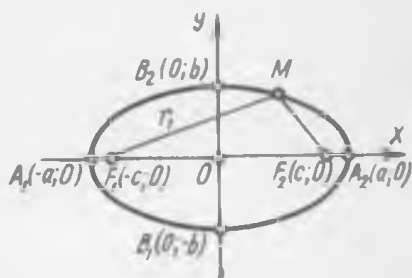
$$\frac{x^2}{a^2} < 1, \quad \frac{y^2}{b^2} < 1$$

ёки

$$|x| < a, \quad |y| < b. \quad (12.3)$$

Бу икки тенгсизликдан кўринадикки эллипс бу томонлари $2a$ ва $2b$, маркази координаталар бошида бўлган тўғри тўртбурчак билан чегараланган эгри чизик экан (12.2-расм). (12.2) тенгламадан кўринадикки, агар $M_1(x; y)$ нуқта эллипсга тегишли бўлса, $M_2(x; y)$, $M_3(-x; y)$ ва $M_4(-x; -y)$ нуқталар ҳам эллипсга тегишли бўлади. Бундан эллипснинг координаталар ўқи ва координаталар бошига нисбатан симметриклиги келиб чиқади.

Симметрия маркази — координаталар бошининг эллипснинг маркази деб атаймиз. Симметрия ўқларининг (координаталар ўқларининг) эллипс билан кесишиш нуқталари $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ эллипснинг *учлари* дейилади. Аниқлик учун $a > b$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда Ox ўқдаги A_1 ва A_2 учлар орасидаги узунлиги $2a$ бўлган кесмани эллипснинг *катта ўқи*, Oy ўқдаги B_1 ва B_2 учлар орасидаги узунлиги $2b$ бўлган кесмани эллипснинг *кичик ўқи* деб атаймиз. $\angle$



12. 2- расм.

Эллипс формасини ўрганиш учун эллипснинг координата ўқларига нисбатан юқорида кўрсатилган симметриклигига асосан унинг координата текислигининг биринчи чораги $x \geq 0$, $y \geq 0$ даги бўлагини ўрганиш етарли.

Қилинган фаразга кўра (12.2) тенгламадан

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эллипс графиги биринчи чоракда $B_2(0; b)$ нуқтадан $A_2(a; 0)$ нуқтага қараб ҳаракатланганда ординатаси b дан 0 гача камайдиган узлуксиз чизик бўлиши келиб чиқади. Қолган чоракларда эллипс юқорида кўрсатилган симметрикликни ҳисобга олган ҳолда ясалади.

$\angle$ сонни $c^2 = a^2 - b^2$ ($c < a$) формула бўйича кирита-

миз. $F_1(-c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталар эллипсининг *фокуслари* дейилади. $c < a$ бўлгани учун F_1 ва F_2 фокуслар A_1 ва A_2 учлар орасида ётади.

Эллипсининг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан F_1 ва F_2 фокусларигача бўлган r_1 ва r_2 масофаларни M нуқтанинг *фокал радиуслари* деб атаймиз. ✓

r_1 ва r_2 нинг узунликларини топамиз:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + a^2} = \\ &= \sqrt{\frac{x^2 c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right|. \end{aligned}$$

Худди шунингдек, $r_2 = \left| -\frac{xc}{a} + a \right|$ ни топамиз. $|x| \leq a$ ва $c/a < 1$ бўлгани учун

$$r_1 = \frac{xc}{a} + a \text{ ва } r_2 = -\frac{xc}{a} + a \quad (12.4)$$

га эгамиз. Равшанки, B_1 ва B_2 нуқталарнинг фокал радиуслари a ($x=0$) га тенг. Бу фактдан эллипсни унинг ярим уқлари бўйича ясашда фойдаланиш мумкин.

(12.4) тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (12.5)$$

ни ҳосил қиламиз.

(12.5) тенглик эллипсининг қуйидаги асосий хоссасини ифодалайди: *эллипсининг ҳар бир нуқтасидан фокусларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси $2a$ га тенг бўлган ўзгармас сондир. $e = c/a$ ($0 < e < 1$) сон эллипс эксцентриситети дейилади. У эллипсининг чузиқлигини характерлайди.*

Агар (12.2) эллипсда $b = a$ бўлса, эллипс радиуси a бўлган айланага айланади. Бунда $c=0$ ва $F_1(0; 0) = F_2(0; 0) = O(0; 0)$ — фокуслар эллипс марказига тортилади ($e = 0$). Айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Шундай қилиб, айланани эллипсининг хусусий ҳоли, яъни эксцентриситети нолга тенг эллипс деб қараш мумкин.

12.1.3. Гипербола. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (12.6)$$

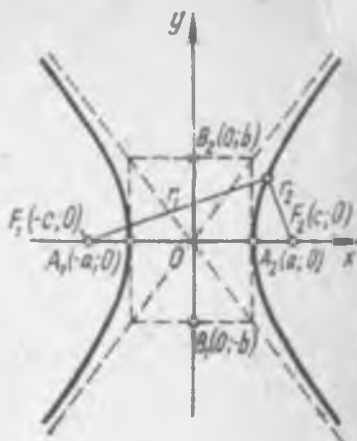
иккинчи тартибли эгри чизикни қарайлик. Бирор Декарт координата системасида бу тенглама билан берилган эгри чизик *гипербола* деб аталади. (12.6) тенглама эса *гиперболанинг каноник тенгламаси* дейилади. Бу эгри чизикнинг хоссаларини ва формасини унинг тенгламаси бўйича ўрганамиз.

(12.6) тенгламадан кўринади-

ки, $\frac{x^2}{a^2} > 1$ ёки $|x| \geq a$. У ҳол-

да (12.6) гиперболанинг $-a <$

$< x \leq a$, $|y| < +\infty$ полосанинг чегарасида ётган $A_1(-a; 0)$ ва $A_2(a; 0)$ нуқталардан ташқари барча нуқталари бу полосадан ташқарида ётади (12.3-расм).

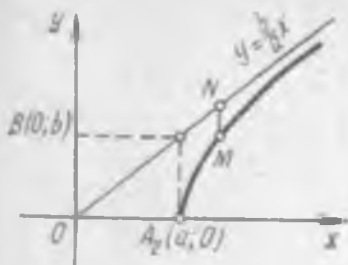


12.3- расм.

Бунда $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ тенгликдан гипербола эллипсдан фарқли ўлароқ чегараланмаган эгри чизик бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан, $x \rightarrow +\infty (-\infty)$ да $|y| \rightarrow +\infty$. Эллипсдаги каби, $M_1(x; y)$, $M_2(x; -y)$, $M_3(-x; y)$ ва $M_4(-x; -y)$ нуқталарнинг бир вақтда бу чизикқа тегишли бўлишидан симметрия ўқлари Ox ва Oy координата ўқлари ҳамда координаталар бошига нисбатан симметрия маркази мавжудлигини кўрали. $A_1(-a; 0)$ ва $A_2(a; 0)$ нуқталар *гиперболанинг ўқлари*, улар орасидаги $2a$ узунликка тенг кесма эса гиперболанинг *ҳақиқий ўқи* дейилади. (12.6) тенгламадан, шунингдек, гипербола Oy ўқни кесиб ўтмаслиги келиб чиқади, чунки $x = 0$ деб, ҳақиқий ечимга эга бўлмаган $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламага келамиз. Oy ўқда $B_1(0; -b)$ ва $B_2(0; b)$ нуқталарни белгилаймиз. $B_1(0; b)$ нуқтадан $B_2(0; -b)$ нуқтагача бўлган $2b$ узунликдаги кесма гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади.

Гиперболани яшаш учун унинг хоссаларини ва формасини биринчи чоракда, яъни $a < x < +\infty$, $y \geq 0$ соҳада ўрганиш кифоя. Унда

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$



12.4-расм.

га эга бўламиз. Бундан кўринадики, x а дан $+\infty$ гача ўзгарганда y ордината 0 дан $+\infty$ гача ўсади. Бунда

$$y < \frac{b}{a} x.$$

Бу эса гипербола координаталар бошидан ўтувчи

$$y = \frac{b}{a} x \quad (12.7)$$

тўғри чизиқдан пастдан ётишни билдиради (12.4-расм). (12.6)

гипербола ва (12.7) тўғри чизиқ ординаталари орасидаги $MN = \delta = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x$ айирмани баҳолаб, $x \rightarrow +\infty$ да $\delta \rightarrow 0$ бўлишини кўриш осон. Ҳақиқатан, $x \rightarrow +\infty$ да $\delta = \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \rightarrow 0$.

Шундай қилиб, x чексиз ўсганда M нуқта N нуқтага чексиз яқинлашади. (12.7) тўғри чизиқ (12.6) гиперболанинг асимптотаси ҳисобланади (5.3.1-пунктга қаранг).

Юқорида айтилганлардан кўринадики, биринчи чоракда гипербола $x \rightarrow +\infty$ да $A_2(a; 0)$ нуқтадан бошланиб, (12.7) тўғри чизиққа асимптотик яқинлашувчи эгри чизиқ экан.

$y = \pm \frac{b}{a} x$ асимптоталар тўғри тўртбурчак диагоналлари (томонлари мос равишда $2a$ ва $2b$ га тенг ҳамда Ox ва Oy ўқларга параллел) қўлқазни координаталар бошида бўлган) бўлиб, ундан ташқарида ва асимптоталар орасида гиперболанинг ўзи жойлашган бўлишини эслатиб ўтамиз.

$c^2 = a^2 + b^2 (c > a)$ формула бўйича $c > 0$ сонни киритамиз. $F_1(-c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ нуқталар гиперболанинг фокуслари дейилади. $c > 0$ бўлгани учун F_1 ва F_2 фокуслар гиперболанинг учларидан ташқарида, демак, $|x| < a$ полоса ташқарисида ётади. Гиперболанинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтасидан фокусларгача бўлган r_1 ва r_2 масофалар M нуқтанинг фокуслари радиуслари дейилади.

Фокал радиусларнинг узунликларини топамиз:

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2} =$$

$$= \sqrt{x\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2xc + a^2} = \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right|.$$

Худди шунингдек,

$r_2 = \left|\frac{xc}{a} - a\right|$ ни тоғамиз. $|x| > a$ ва $c/a > 1$ бўлгани сабабдан, $x > 0$ учун $r_1 = \frac{c}{a}x + a$, $r_2 = \frac{c}{a}x - a$ га эга бўламиз. Бундан $r_1 - r_2 = 2a$; $x < 0$ учун

$$r_1 = -\frac{cx}{a} - a, \quad r_2 = -\frac{cx}{a} + a$$

га эгамиз ва яна

$$r_2 - r_1 = 2a.$$

Демак, гиперболанинг барча нуқталари учун

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (12.8)$$

(12.8) тенглик гиперболанинг қуйидаги асосий хоссасини ифодалайди: *гипербола нуқтасидан унинг фокуслари гача бўлган масофаларнинг айирмаси абсолют қиймати бўйича 2a га тенг бўлган ўзгармас сондир.*

$e = c/a$ ($e > 1$) катталиқ гиперболанинг эксцентриситети дейилади.

Айталик (12.6) гиперболада $b = a$ бўлса,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ёки

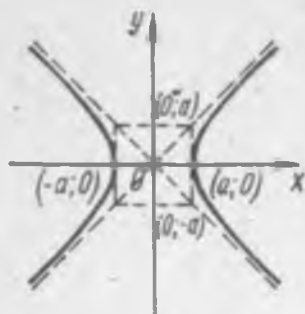
$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (12.9)$$

Бундай гипербола *тенг томонли гипербола* дейилади. Бу гиперболанинг асимптоталари

$$y = \pm x \quad (12.10)$$

булади. Булар координата бурчакларининг биссектрисаларидир. (12.10) биссектрисалар ўзаро перпендикуляр бўлгани учун уларни янги тўғри бурчакли Декарт координата системасининг Ox' , Oy' ўқлари деб қабул қилиш мумкин. (12.9) ни

$$(x+y)^2 \cdot (x-y)^2 = a^4$$



12. 5- расм.



12. 6- расм.

кўринишда қайта ёзиб ва

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

деб $x'y' = 2a^2$ ни ҳосил қиламиз. Бунини ўқувчиларга мактаб курсидан таниш бўлган

$$y' = \frac{2a^2}{x'} \quad (12.11)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (12.11) тенглама гиперболанинг асимптоталарга келтирилган, яъни гипербола асимптоталари координата ўқлари бўлгандаги тенгламаси дейилади (12.6-расм). Шундай қилиб, тескари пропорционал боғланиш графиги тенг ёнли гипербола экан. Барча тенг ёнли гиперболалар $\sqrt{2}$ га тенг бўлган бир хил эксцентриситетга эга.

12.1.4 Парабола. Иккинчи тартибли

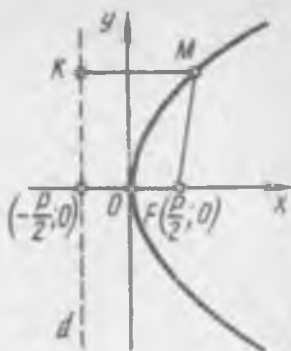
$$y^2 = 2px \quad (12.12)$$

эгри чизиқни қарайлик. Бирор Декарт координата системасида бундай тенглама билан берилиши мумкин бўлган эгри чизиқ *парабола*, (12.12) тенглама эса *параболанинг каноник тенгламаси* дейилади. $p > 0$ сон параболанинг *параметри* дейилади. (12.12) парабола ҳам (12.6) гипербола каби чегараланмаган эгри чизиқ, чунки формула

$$x \rightarrow +\infty \text{ да } y = \pm \sqrt{2px} \Rightarrow |y| \rightarrow +\infty.$$

Эллипс ва гиперболадан фарқи ўлароқ парабола битта симметрия ўқига эга, симметрия марказига эса эга эмас. Симметрия ўқини парабола ўқи дейилади. Симметрия ўқининг (12.12) парабола билан кесишиш нуқтаси *параболанинг учи* дейилади. $F(p/2; 0)$ нуқта *параболанинг фокуси* дейилади (12.7-расм).

$$x = -p/2 \quad (12.13)$$



12.7-расм.

тенглама билан берилган тўғри қизиқ *параболанинг директрисаси* дейилади. У бундай хоссага эга: (12.12) *параболанинг ихтиёрий M нуқтасидан* (12.13) *директрисасигача бўлган MK масофа шу нуқтадан парабола фокусигача бўлган MF масофага тенг.*

$$|MK| = |MF|. \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Ҳақиқатан, } |MK| &= x + \frac{p}{2}, \quad MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = x + \frac{p}{2} \end{aligned}$$

га эгамиз, бундан (12.14) келиб чиқади.

Агар биз x ва y ҳарфларни алмаштрсак, ҳосил қилинган

$$x^2 = 2py \quad (12.15)$$

тенглама симметрия ўқи Oy ўқ бўлган парабола тенгламаси бўлишни кўриш осон.

(12.15) тенгламани y га нисбатан ечилган тенглама кўринишида ёзиб олиб, *параболанинг мактаб курсидан маълум бўлган*

$$y = \frac{1}{2p} x^2 \text{ ёки } y = ax^2 \left(a = \frac{1}{2p}\right)$$

тенгламасини ҳосил қиламиз.

12.1.5. Мисоллар ечиш. 12.1-мисол.

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

тенгламани текширинг.

Ечилиши. Бу тенгламани

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

кўринишга келтирамиз. Қўрамизки, бу ярим ўқлари $a = 5$, $b = 4$ бўлган эллипс экан. $c^2 = a^2 - b^2$ формуладан $c = 3$ ни топамиз, бундан $F_1(-3; 0)$ ва $F_2(3; 0)$. Эллипс эксцентриситети $e = 3/5$.

12.2-мисол. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ тенгламани текширинг.

Бу гипербола: $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$; $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $e = 5/4$. Асимптоталарининг тенгламалари $y = 3x/4$ ва $y = -3x/4$.

12.3-мисол. $y^2 + 8x = 0$, тенгламани текширинг.

Бу тенгламани

$$y^2 = -8x$$

кўринишга келтириб, уни парабола эканлигини кўрамиз. У чап ярим текисликда жойлашган, фокуси $F(-2; 0)$, директрисасининг тенгламаси $x - 2 = 0$.

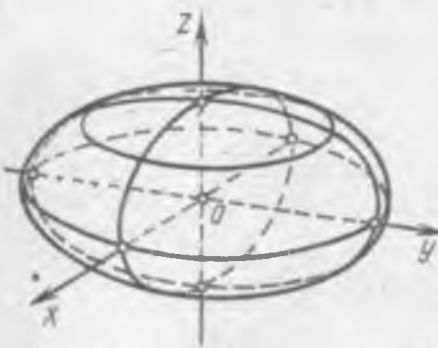
12.2-§. Иккинчи тартибли сиртлар

12.2.1. Эллипсоид. Бирор *Охуз* Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12.16)$$

тенглама билан берилиши мумкин бўлган иккинчи тартибли сирт эллипсоид дейилади. Тенгламадан

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$$



12.8- расм.

бўлиши бевосита кўринади. Бу эса эллипсоид ўлчамлари $2a$, $2b$, $2c$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчакли параллелипипедга жойлашган сирт бўлишини билдиради. Бу сонлар эллипсоиднинг ўқлари дейилади.

x , y , z ўзгарувчилар тенгламага иккинчи даражада кирганлик шартидан сирт учала координата текислигига ва координаталар бошига нисбатан симметриклиги келиб чиқади. Координаталар боши эллипсоиднинг маркази дейилади. Координата ўқларининг эллипсоид билан кесишиш нуқталари эллипсоиднинг учлари дейилади.

Оху текисликка параллел текислик орқали эллипсоиднинг кесилини ўтказамиз.

Бу $z = z_0$ текислик ва бунда $|z_0| < c$ бўлсин. Унда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}. \quad (12.17)$$

Мусбат $1 - \frac{z_0^2}{c^2}$ сонни k^2 орқали белгилаймиз. Унда (12.17) дан

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

Қўрамызки, эллипсоиднинг $z = z_0$ текислик билан кесими ярим ўқлари ak ва bk бўлган ва z_0 ўсиши билан кичрайдиган эллипс экан; $z_0 = c$ да бу эллипс нуқтага—эллипсоиднинг учига айланади. Худди шунингдек, эллипсоидни $x = x_0$ ва $y = y_0$ текисликлар билан кесимлари ҳам эллипслардан иборат эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Эллипсоид 12.8-расмда тасвирланган. $a = b$ бўлган хусусий ҳолда

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Равшанки, унинг $z = z_0$ текислик билан кесими радиуси ak бўлган айланадир. Бундай эллипсоид, масалан, *Оуз* текисликда жойлашган

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипси *Оз* ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади. Бундай сирт *айлантирилган эллипсоиди* дейилади.

Агар учалар ўқ ҳам тенг бўлса ($a = b = c$),

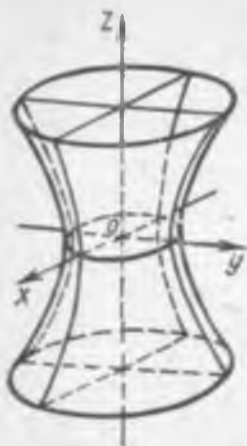
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ни яъни сферани ҳосил қиламиз. Демак, сфера эллипсоиднинг хусусий ҳоли экан.

12.2.2. Гиперболоидлар. Бирорта Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12.18)$$

тенглама билан сирт берялиши мумкин бўлган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади.



12.9- расм.

Равшанки, (12.18) сирт координата текисликларига ва координаталар бошига нисбатан симметрик. Унинг Oxy ($z = z_0$) текисликка параллел текисликлар билан кесимини топамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} = k^2$$

ёки

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1. \quad (12.19)$$

(12.19) тенгламадан кесимлар чексиз ўсувчи ўқли эллипслар. (12.18) сирт эса Oz ўқ бўйлаб чексиз тарқаладиган бўлиши келиб чиқади (12.9- расм).

Кесимнинг энг кичиги бу гиперболоиднинг $Oxy(z = 0)$ текислик билан кесимидир:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Энди $Oyz(x = 0)$ текислик билан кесимни топамиз:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

га эгамиз. Бу гиперболола бўлиб, Oz ўқ унинг мавҳум ўқидир. Шунга ўхшаш, гиперболоиднинг $Oxz(y = 0)$ текислик билан кесими

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ox ўқ мавҳум ўқи бўлган гиперболоиддир.

Бир паллали (12.18) гиперболоид 12.9- расмда кўрсатилган кўринишга эга.

Агар $b = a$ десак,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12.20)$$

тенгламадан гиперболоидни Oxy текисликка параллел текисликлар билан кесими радиуси ak бўлган айланалар бўлиши келиб чиқади.

(12.20) сирт бир паллали айланиш гиперболоиди дейилади.

Бирор Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (12.21)$$

тенглама билан берилиши мумкин бўлган сирт *икки паллали гиперболоид* дейилади.

Унинг $z = z_0$ текислик билан кесимини топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = k^2$$

ёки

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1.$$

(12.21) тенгламадан $|z| > c$ бўлиши кераклигини кўрамиз, демак, сирт бири $z \geq c$, иккинчиси $z \leq -c$ бўлган *икки бўлакка ажралади* (12.10- расм).

Кесимлар ak ва bk ўқлари чексиз ўсувчи эллипсларни ифодалайди. Икки паллали гиперболоиднинг $x = 0$ ва $y = 0$ текисликлар билан кесимлари $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ва $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ гиперболалардир. $b = a$ да

икки паллали (Oz ўқ атрофида) айланиш гиперболоидини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

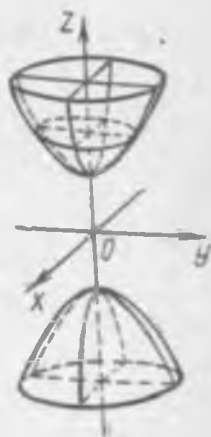
Икки паллали гиперболоид 12. 10- расмда кўрсатилган тасвирга эга.

12.2.3. Параболоидлар. Бирор Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (12.22)$$

тенглама билан берилиши мумкин бўлган сирт *эллиптик параболоид* дейилади.

$z > 0$ бўлгани учун сирт юқори ярим фазода жойлашган ва Oz ўқ бўйлаб чексиз чўзилади. Унинг $z = z_0 > 0$ текисликлар билан кесимлари



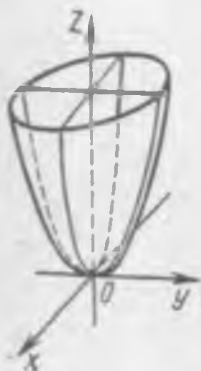
12.10- расм.

$$\frac{x^2}{a^2 z_0} + \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1$$

эллипслардир.

$Oyz(x=0)$ ва $Oxz(y=0)$ координата текисликлари билан кесимлари эса Oz ўққа нисбатан симметрик бўлган

$$y^2 = b^2 z \text{ ва } x^2 = a^2 z$$



12.11-расм.

параболоидлардан иборат.

Эллиптик параболоид иккита Oxz ва Oyz симметрия текислигига, Oz симметрия ўқига, учга — координаталар бошига эга.

Агар $b = a$ десак,

$$a^2 z = z^2 + y^2$$

айланниш параболоидини ҳосил қиламиз. Унинг $z = z_0 > 0$ текисликлар билан кесими айланалардан иборат.

Эллиптик параболоид 12.11-расмда кўрсатилган тасвирга эга.

Бирор Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (12.23)$$

тенглама билан берилиши мумкин бўлган сирт *гиперболик параболоид* дейилади. Oxz ва Oyz текисликлар бу сиртнинг симметрия текисликларидир, уларнинг кесишиш чизиқлари — Oz ўқ — сиртнинг симметрия ўқидир. Сиртнинг Oxz ва Oxy текисликлар билан

$$x^2 = a^2 z, \quad (12.24)$$

$$y^2 = -b^2 z \quad (12.25)$$

кесими параболалардан (асосий параболалар) иборат. Улар Oz ўқ билан устма-уст тушади ва қарама-қарши томонга йўналган. Гиперболик параболоидни $z = z_0$ текислик билан кесими параболалардир. Бу параболанинг Oxy текисликдаги проекциясининг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2 z_0} - \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1 \quad (12.26)$$

кўринишга эга. Агар $z_0 > 0$ бўлса, бу гиперболанинг ҳақиқий ўқи Ox ўқ бўйлаб, мавҳум ўқи эса Oy ўқ бўйлаб йўналган. Бу гиперболанинг ярим ўқлари $a\sqrt{z_0}$ ва $b\sqrt{z_0}$ га тенг. z_0 ўсиши билан бу ярим ўқлар чексиз ўсади. Агар $z_0 < 0$ бўлса, гиперболанинг (12.26) тенгламасини

$$\frac{x^2}{a^2(-z_0)} + \frac{y^2}{b^2(-z_0)} = 1 \quad (12.27)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан кўринадики, бу гиперболанинг ҳақиқий ўқи Oy ўқ бўйлаб, мавҳум ўқи эса Ox ўқ бўйлаб йўналган. Бу гиперболанинг ярим ўқлари $b\sqrt{-z_0}$ ва $a\sqrt{-z_0}$ га тенг. $z_0 \rightarrow -\infty$ да бу ярим ўқлар чексиз ўсади. Агар гиперболик параболоиднинг $z = z_0 = 0$ текислик билан кесимини ҳосил қилсак, кесимда тенгламалари

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ёки

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

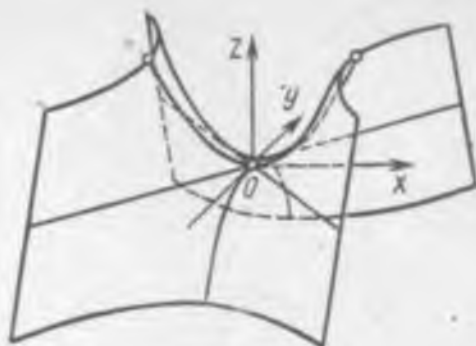
бўлган иккита тўғри чизик ҳосил бўлади. Бу тенгламаларни $y = \frac{b}{a}x$ ва $y = -\frac{b}{a}x$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу (12.26) ва (12.27) тенгламалар билан берилган гипербодаларнинг асимптоталаридир. Агар гиперболик параболоиднинг Oyz текисликка параллел $x = x_0$ текислик билан кесимини ўтказсак, кесимда Oyz текисликдаги проекциясининг тенгламаси

$$\frac{y^2}{b^2} = -z + \frac{x_0^2}{a^2}$$

ёки

$$y^2 = -b^2(z - z_0)$$

кўринишга эга бўлган чизик ҳосил бўлади. Бу ерда $z_0 = -\frac{x_0^2}{a^2}$ ёки $x_0^2 = a^2 z_0$, яъни кесим (12.25) параболадек бўлиб, лекин кўчирилган учга эга. Бу параболанинг учи бошқа асосий парабола учнда жойлашган. Гиперболик параболоиднинг $y = y_0$ текислик билан кесимини ҳам ўтказиб, худди шунингдек натижага эришамиз.



12. 12- расм.

Шундай қилиб, гиперболик параболоид бу парабрла ҳосил қилган сирт экан. Бу параболанинг учи иккинчи қўзғалмас парабрла бўйлаб сирғанади. Иккинчи параболанинг текислиги ҳаракатланаётган парабрла текислигига перпендикуляр. Ҳаракатланаётган ва ҳаракатланмаётган парабрларнинг ўқлари қарама-қарши томонга йўналган. Гиперболик параболоид 12.12- расмда кўрсатилган тасвирга эга.

12.2.4. Иккинчи тартибли конуслар. Бирор Декарт координата системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (12.28)$$

тенглама билан берилиши мумкин бўлган сирт *иккинчи тартибли* конус дейилади. Бу сирт учта симметрия ўқиға (координата текисликларига) эга бўлиб, унинг симметрия маркази координаталар бошидир.

Координаталар боши бу сиртга тегишли ва у сиртнинг *учи* дейилади. Конуснинг $z = z_0 < 0$ текисликлар билан кесимлари

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1 \quad \left(k^2 = \frac{z_0^2}{c^2} \right)$$

эллипслардир.

Конус $z > 0$ ва $z < 0$ да z ўқ бўйлаб, чексиз чўзиладиган икки паллага эга. Конуснинг Oxz ва Oyz текисликлар билан кесими тўғри чизиқлардан иборат. Кесимларнинг тенгламалари

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ва

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Булар тегишли координата текисликларида жойлашган

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

ва

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{c}\right) = 0$$

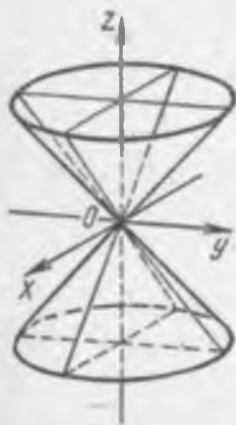
тўғри чиқиқлар жуфтларидир.

Агар $b=a$ бўлса, $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ айланиш конусини ҳосил қиламиз. Унинг Oxy текисликка параллел текисликлар билан кесими

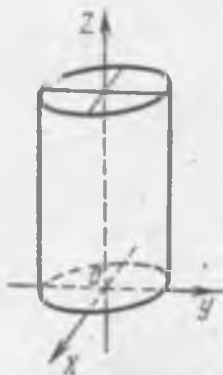
$$x^2 + y^2 = \frac{z_0^2}{c^2} a^2$$

айланадир.

Конус 12.13- расмда кўрсатилган тасвирга эга.



12.13- расм.



12.14- расм.

12.2.5. Иккинчи тартибли цилиндрлар. Бирор Декарт координата сис темасида

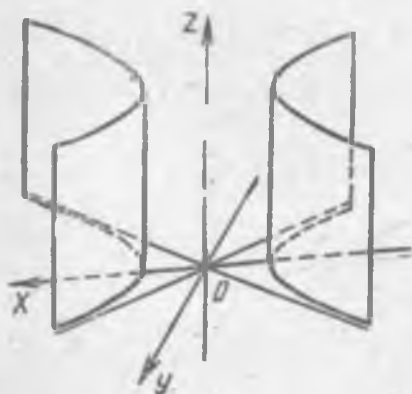
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (12.29)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (12.30)$$

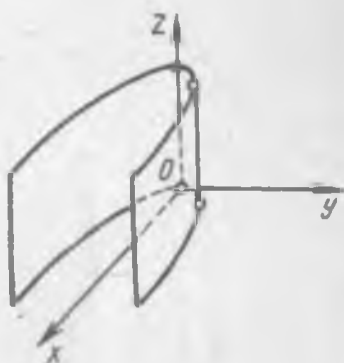
$$y^2 = 2px$$

(12.31)

(z ҳарфни $у$ з ичига олмаган) тенгламалар билан берилиши мумкин бўлган сиртлар *иккинчи тартибли* мос равишда *эллиптик, гиперболик, параболоик цилиндрлар* дейилади. Бу сиртларнинг ҳар бирига $(x; y; 0)$ нуқта билан бирга ихтиёрий z_0 га эга бўлган $(x; y; z_0)$ нуқталар ҳам тегишли бўлади, шунинг учун сиртлар Oz ўққа параллел бўлган ва цилиндрнинг *ясовчиси* деб аталувчи тўғри чизиқларга эга. Цилиндрнинг Oxy текисликда ётувчи кесимлари унинг *йўналтирувчилари* дейилади. (12.29), (12.30), (12.31) цилиндрлар мос равишда 12.14, 12.15, 12.16-расмларда тасвирланган.



12.15- расм.



12.16- расм.

12- БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Эллипс, гипербола ва парабола таърифларини айтиб бѐринг. Бу эгри чизикларнинг формалари қандай?

2. Эллипс, гипербола, параболанинг фокуслари нима? Улар қандай хоссаларга эга?

3. Эллипс ва гиперболанинг эксцентриситети деб нимага айтилади? Эксцентриситет катталигига қараб, эгри чизик формаси ҳақида қандай мулоҳаза қилиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

4. Гипербола асимптоталари қандай тенгламаларга эга? Мисоллар келтиринг.

5. Эллипсоид, бир паллали ва икки паллали гиперболоидлар, эллиптик ва гиперболик параболоидлар, иккинчи тартибли конус, эллиптик, гиперболик ва парабolik цилиндрларнинг таърифларини айтиб бѐринг. Бу сиртлар формаларини қандай метод билан текшириш мумкин?

12- БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1—8- мисолларда иккинчи тартибли эгри чизикнинг турини аниқлаш ва уни ясаш талаб қилинади. Фокуснинг координаталарини, директрисалар ва асимптоталарнинг тенгламаларини топиш, эксцентриситетни ҳисобланг.

1. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

2. $16x^2 - 9y^2 = 144$.

3. $6x - y^2 = 0$

4. $xy = 4$.

5. $10x^2 + 7y^2 = 140$.

6. $2x^2 + y = 0$

7. $4x^2 - y^2 + 16 = 0$.

3. $2xy + 3 = 0$.

9—12- мисолларда $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ формулалар бўйича координаталар системасини алмаштириш билан эгри чизик тенгламасини каноник кўринишга келтириш ва уни ясаш талаб қилинади.

9. $4x^2 + 8x + y^2 = 12$.

10. $y^2 - 2y = 2x$.

11. $x^2 - y^2 = 4x$.

12. $xy = x + y$.

12- БОБГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

1. Учлари $(\pm 5; 0)$ ва $(0; \pm 3)$ нуқтада, фокуслари $(\pm 4; 0)$, $e = 0,8$ бўлган эллипс.

2. Учлари $(\pm 3; 0)$ (ҳақиқий) ва $(0; \pm 4)$ (мавҳум) нуқталарда, фокуслари $(\pm 5; 0)$, асимптоталари $y = \pm 4/3x$, $e = 5/3$ бўлган гипербола.

3. Фокуси $F(3/2; 0)$ директрисасининг тенгламаси $x = -3/2$ бўлган парабола.

4. Асимптоталарига келтирилган тенг ёни гипербола. Ҳақиқий уч-

лари $(2; 2)$ ва $(-2; -2)$ нуқта тарда, мавҳум учлари $(2; -2)$ ва $(-2; 2)$ нуқта тарда, $e\sqrt{2}$.

9. «Эски» x ва y координаталарни «янги» X ва Y координаталар билан алмаштириб ва бу ифодаларни эгри чизиқ тенгламасига қўйиб $4(X + x_0)^2 + 8(X + x_0) + (Y + y_0)^2 = 12$ ни, ёки алмаштиришдан сўнг, $4X^2 + Y^2 + X(8x_0 + 8) + Y \cdot 2y_0 = 12 - 4x_0^2 - 8x_0 - y_0^2$ ни ҳосил қиламиз. x_0 ва y_0 ни шундай тан аймизки, X ва Y нинг биринчи даражаларини олдидаги коэффициентлар нолга айлансин. $8x_0 + 8 = 0$, $2y_0 = 0$, бундан $x_0 = -1$, $y_0 = 0$. «Янги» координаталарда тенглама $4X^2 + Y^2 = 16$ ёки $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$ кўринишни олади. $X = x + 1$ ва $Y = y$ формулалар «янги» координата системаси эски координата системасини Ox ўқ бўйлаб

чапга бир бирлик қадар суриш натижасида ҳосил қилинганини кўрсатади. Битта расмда «эски» ва «янги» координата системаларини ва берилган эгри чизиқни («янги» системада) ясаб, бир вақтининг ўзида биз эгри чизиқнинг «эски» координата системасига нисбатан чизмасини ҳам ҳосил қиламиз.

БАЎЗИ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ЖАДВАЛЛАРИ

1. Тригонометрик функциялар

α°	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$	
0	0,0000	0,0000	—	1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,0000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,9999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	999	87
4	0,0693	0,0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,0945	0,0951	9,51	995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	993	83
8	0,139	0,141	7,11	990	82
9	0,158	0,158	6,31	883	81
10	0,174	0,176	5,67	985	80
11	0,191	0,194	5,145	988	79
12	0,208	0,213	4,705	972	78
13	0,225	0,231	4,331	974	77
14	0,242	0,249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	4,87	961	74
17	0,292	0,306	271	956	73
18	0,309	0,325	3,078	951	72
19	0,325	0,344	2,904	946	71
20	0,342	0,354	2,747	0,940	70
21	0,358	0,381	605	934	69
22	0,375	0,404	475	927	68
23	0,391	0,424	356	921	67
24	0,407	0,445	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,498	2,050	899	64
27	0,454	0,510	1,963	891	63
28	0,469	0,532	881	883	62
29	0,485	0,554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	664	857	59
32	0,530	0,625	600	848	58
33	0,545	0,649	540	839	57
34	0,559	0,675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,589	0,727	376	809	54
37	0,602	0,754	327	799	53
38	0,616	0,781	280	788	52
39	0,629	0,810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	150	755	49
42	0,669	0,900	111	743	48
43	0,682	0,933	072	731	47
44	0,695	0,966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	α°

2. x сон қиймат учун e^x , e^{-x} , $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларнинг қийматлари жадвали

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0000
02	1,0202	0,9802	0,0200	0,9998
03	1,0305	0,9704	0,0300	0,9996
04	1,0408	0,9608	0,0400	0,9992
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	0,9988
06	1,0618	0,9418	0,0600	0,9982
07	1,0725	0,9324	0,0699	0,9976
08	1,0833	0,9231	0,0799	0,9968
09	1,0942	0,9139	0,0899	0,9960
0,10	1,1052	0,9048	0,0998	0,9950
11	1,1163	0,8958	0,1098	0,9940
12	1,1275	0,8869	0,1197	0,9928
13	1,1388	0,8781	0,1296	0,9916
14	1,1503	0,8694	0,1395	0,9902
0,15	1,1618	0,8607	0,1494	0,9888
16	1,1735	0,8521	0,1593	0,9872
17	1,1853	0,8437	0,1692	0,9856
18	1,1972	0,8353	0,1790	0,9838
19	1,2092	0,8270	0,1889	0,9820
0,20	1,2214	0,8187	0,1987	0,9801
21	1,2337	0,8106	0,2085	0,9780
22	1,2461	0,8025	0,2182	0,9759
23	1,2586	0,7945	0,2280	0,9737
24	1,2712	0,7866	0,2377	0,9713
0,25	1,2840	0,7788	0,2474	0,9689
26	1,2969	0,7711	0,2571	0,9664
27	1,3100	0,7634	0,2667	0,9638
28	1,3231	0,7558	0,2764	0,9611
29	1,3364	0,7483	0,2860	0,9582
0,30	1,3499	0,7408	0,2955	0,9553
31	1,3634	0,7334	0,3051	0,9523
32	1,3771	0,7261	0,3146	0,9492
33	1,3910	0,7189	0,3240	0,9460
34	1,4049	0,7118	0,3335	0,9428
0,35	1,4191	0,7046	0,3429	0,9394
36	1,4333	0,6977	0,3523	0,9359
37	1,4477	0,6907	0,3616	0,9323
38	1,4623	0,6839	0,3709	0,9287
39	1,4770	0,6771	0,3802	0,9249

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,40	1,4918	0,6703	0,3894	0,9211
41	1,5068	0,6637	0,3986	0,9171
42	1,5220	0,6570	0,4078	0,9131
43	1,5373	0,6505	0,4169	0,9090
44	1,5527	0,6440	0,4259	0,9048
0,45	1,5683	0,6376	0,4350	0,9004
46	1,5841	0,6313	0,4439	0,8961
47	1,6000	0,6250	0,4529	0,8916
48	1,6161	0,6188	0,4618	0,8870
49	1,6323	0,6126	0,4706	0,8823
0,50	1,6487	0,6065	0,4794	0,8776
51	1,6653	0,6005	0,4882	0,8727
52	1,6820	0,5945	0,4969	0,8678
53	1,6989	0,5886	0,5055	0,8628
54	1,7160	0,5827	0,5141	0,8577
0,55	1,7333	0,5769	0,5227	0,8525
56	1,7507	0,5712	0,5312	0,8473
57	1,7683	0,5655	0,5396	0,8419
58	1,7860	0,5599	0,5480	0,8365
59	1,8040	0,5543	0,5564	0,8309
0,60	1,8221	0,5488	0,5646	0,8253
61	1,8404	0,5434	0,5729	0,8196
62	1,8589	0,5379	0,5810	0,8139
63	1,8776	0,5326	0,5891	0,8080
64	1,8965	0,5273	0,5972	0,8021
0,65	1,9155	0,5220	0,6052	0,7961
66	1,9348	0,5169	0,6131	0,7900
67	1,9542	0,5117	0,6210	0,7838
68	1,9739	0,5066	0,6288	0,7776
69	1,9937	0,5016	0,6365	0,7712
0,70	2,0138	0,4966	0,6442	0,7648
71	2,0340	0,4916	0,6518	0,7584
72	2,0544	0,4868	0,6594	0,7518
73	2,0751	0,4819	0,6669	0,7452
74	2,0959	0,4771	0,6743	0,7385
0,75	2,1170	0,4724	0,6816	0,7317
76	2,1383	0,4677	0,6889	0,7248
77	2,1598	0,4630	0,6961	0,7179
78	2,1815	0,4584	0,7033	0,7109
79	2,2034	0,4538	0,7104	0,7038

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,80	2,2255	0,4493	0,7174	0,6967
81	2,2479	0,4449	0,7243	0,6895
82	2,2705	0,4404	0,7311	0,6822
83	2,2933	0,4360	0,7379	0,6749
84	2,3164	0,4317	0,7446	0,6675
0,85	2,3396	0,4274	0,7513	0,6600
86	2,3632	0,4232	0,7578	0,6524
87	2,3869	0,4190	0,7643	0,6448
88	2,4109	0,4148	0,7707	0,6372
89	2,4351	0,4107	0,7771	0,6294
0,90	2,4596	0,4066	0,7833	0,6216
91	2,4843	0,4025	0,7895	0,6137
92	2,5093	0,3985	0,7956	0,6058
93	2,5345	0,3946	0,8016	0,5978
94	2,5600	0,3906	0,8076	0,5898
0,95	2,5857	0,3867	0,8134	0,5817
96	2,6117	0,3829	0,8192	0,5735
97	2,6379	0,3791	0,8249	0,5653
98	2,6645	0,3753	0,8306	0,5570
99	2,6912	0,3716	0,8360	0,5487
1,00	2,7183	0,3679	0,8415	0,5403
01	2,7456	0,3642	0,8468	0,5319
02	2,7732	0,3606	0,8521	0,5234
03	2,8011	0,3570	0,8573	0,5148
04	2,8292	0,3535	0,8624	0,5062
1,05	2,8577	0,3499	0,8674	0,4976
06	2,8864	0,3465	0,8724	0,4889
07	2,9154	0,3430	0,8772	0,4801
08	2,9447	0,3396	0,8820	0,4713
09	2,9743	0,3362	0,8866	0,4625
1,10	3,0042	0,3329	0,8912	0,4536
11	3,0344	0,3296	0,8957	0,4447
12	3,0649	0,3263	0,9001	0,4357
13	3,0957	0,3230	0,9044	0,4267
14	3,1268	0,3198	0,9086	0,4176
1,15	3,1582	0,3166	0,9128	0,4085
16	3,1899	0,3135	0,9168	0,3993
17	3,2220	0,3104	0,9208	0,3902
18	3,2544	0,3073	0,9246	0,3809
19	3,2871	0,3042	0,9284	0,3717

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
1,20	3,3201	0,3012	0,9320	0,3624
21	3,3535	0,2982	0,9356	0,3530
22	3,3872	0,2952	0,9391	0,3436
23	3,4212	0,2923	0,9425	0,3342
24	3,4556	0,2894	0,9458	0,3248
1,25	3,4903	0,2865	0,9490	0,3153
26	3,5254	0,2837	0,9521	0,3058
27	3,5609	0,2808	0,9551	0,2963
28	3,5966	0,2780	0,9580	0,2867
29	3,6328	0,2753	0,9608	0,2771
1,30	3,6693	0,2725	0,9636	0,2675
31	3,7062	0,2698	0,9662	0,2579
32	3,7334	0,2671	0,9687	0,2482
33	3,7810	0,2645	0,9711	0,2385
34	3,8190	0,2618	0,9735	0,2288
1,35	3,8574	0,2792	0,9757	0,2190
36	3,8962	0,2567	0,9779	0,2092
37	3,9354	0,2541	0,9799	0,1994
38	3,9749	0,2516	0,9819	0,1896
39	4,0149	0,2491	0,9837	0,1798
1,40	4,0552	0,2466	0,9854	0,1700
41	4,0960	0,2441	0,9871	0,1601
42	4,1371	0,2417	0,9887	0,1502
43	4,1787	0,2393	0,9901	0,1403
44	4,2207	0,2369	0,9915	0,1304
1,45	4,2631	0,2346	0,9927	0,1205
46	4,3060	0,2322	0,9939	0,1106
47	4,3492	0,2299	0,9949	0,1006
48	4,3929	0,2276	0,9959	0,0907
49	4,4371	0,2254	0,9967	0,0807
1,50	4,4817	0,2231	0,9975	0,0707
51	4,5267	0,2209	0,9982	0,0608
52	4,5722	0,2187	0,9987	0,0508
53	4,6182	0,2165	0,9992	0,0408
54	4,6646	0,2144	0,9995	0,0308
1,55	4,7115	0,2122	0,9998	0,0208
56	4,7588	0,2101	0,9999	0,0108
57	4,8066	0,2080	1,0000	+0,0008
58	4,8550	0,2060	1,0000	-0,0092
59	4,9037	0,2039	0,9998	-0,0192

**3. Тескарн катталыклар, квадрат ва куб илдизлар,
логарифмлар, курсаткичли функция**

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	0,00	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	182	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	262	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	29	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,22	3,87	1,14	2,47	5,31	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	26	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	30	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	455	48	69	30	80	6,03	342	789	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,35	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	384	61	10	38	96	38	415	955	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	01	54	447	1,030	16,5	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	18	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	81	75	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	532	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	0,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,8	3,6
3,7	270	92	08	55	33	18	568	308	40,4	3,7
3,8	262	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	98	25	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,33	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	03	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	236	05	48	61	48	49	625	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	634	458	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	644	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	15	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	78	672	548	110	4,7
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	121	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
5.5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	244	5,5
5,6	179	37	43	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	170	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	88	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	89	08	79	833	917	898	6,8
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	66	43	92	14	92	851	960	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,00	863	988	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,68	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	77	77	97	25	17	886	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	27	21	892	054	2441	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	123	85	9,00	01	33	32	908	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	120	88	11	02	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	929	2,140	4915	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	06	45	58	944	175	6634	8,8
8,9	112	98	43	07	46	62	949	186	7332	8,9
9,0	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	954	2,197	8103	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	968	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12089	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	84	982	262	14765	9,6
9,7	103	11	85	13	59	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

$\lg x$ графасида ўли логарифмларнинг мантиссалари берилган.

10 дан катта ёки 1 дан кичик сонларнинг натурал логарифмларини топишда

$$\ln(x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10$$

формуладан фойдаланиш лозим.

Қуйидагиларни эслатиб ўтамиз:

$$\ln 10 = 2,303;$$

$$\lg x = 0,4343 \ln x;$$

$$\ln 10^2 = 4,605;$$

$$\ln x = 2,303 \lg x.$$

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
1-боб. Сонли тўпламлар	5
1.1-§. Ҳақиқий сонлар	5
1.1.1. Рационал сонлар тўплами (5). 1.1.2. Рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурлиги (9). 1.1.3. Ҳақиқий сонлар тўплами (11). 1.1.4. Рационал ва иррационал сонлар, уларни чексиз ўнли касрлар кўринишида тасвирланиши (13) 1.1.5. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати (14).	
1.2-§. Комплекс сонлар	14
1.2.1. Сон тушунчасини янада кенгайтиришнинг зарурлиги (14)	
1.2.2. Комплекс сонлар (15). 1.2.3. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири (19).	
1-бобга доир такрорлаш учун саволлар	21
2-боб. Тўпламлар ва функциялар	22
2.1-§. Тўпламлар	22
2.1.1. Асосий тушунчалар ва таърифлар (22). 2.1.2. Интерваллар (24). 2.1.3. Тўпламлар бирлашмаси (25). 2.1.4. Тўпламлар кесишмаси (25). 2.1.5. Тўпламлар кўпайтмаси (26). 2.1.6. Тўпламлар айирмаси (27). 2.1.7. Тўпламларнинг ўзаро бир қийматли ҳослиги. Эквивалент тўпламлар. Қувват (28). 2.1.8. Саноқли ва саноқсиз тўпламлар (29). 2.1.9. Ҳақиқий сонлар тўпламининг чегаралари (29). 2.1.10. ϵ -атроф ҳақида тушунча (29).	
2-§. Функция	30
2.2.1. Функция ва акслантириш (30). 2.2.2. Функциянинг графиги (31). 2.2.3. Сонли функцияларнинг асосий характеристикалари (33). 2.2.4. Сонли функциялар тўпламида арифметик амаллар (34). 2.2.5. Образ ва прообраз ҳақида тушунча. Акслантиришлар классификацияси (35). 2.2.6. Тескари функция ҳақида тушунча. Биектив функциянинг хоссаси. Функциянинг торайиши. (36). 2.2.7. Функцияларнинг суперпозицияси ҳақида тушунча. (37). 2.2.8. Ошкор ва ошқормас функциялар (38). 2.2.9. Функциянинг параметрик берилиши (39). 2.2.10. Элементар функциялар. Элементар функция-	

ларнинг классификацияси (39). 2.2.11. Курсаткичли функция (41). 2.2.12. Логарифмик функция. Унинг курсаткичли функция билан боғланиши (42)	
2-бобни такрорлашга доир саволлар	44
2-бобга доир машқлар	45
3-боб. Функциянинг limiti ва узлуксизлиги	47
3.1-§. Сонли кетма-кетликнинг limiti	47
3.1.1. Сонли кетма-кетлик натурал аргументнинг функцияси сифатида. (47). 3.1.2. Сонли кетма-кетликнинг limiti, унинг геометрик алқини. (48). 3.1.3. Кетма-кетлик limitiнинг ягоналиги ҳақидаги теорема (53). 3.1.4. Монотон кетма-кетликлар (54). 3.1.5. Чексиз кичик кетма-кетликлар (57). 3.1.6. Чексиз катта кетма-кетликлар ва уларнинг чексиз кетма-кетликлар билан боғланиши (60). 3.1.7. Кетма-кетликлар limitларининг баъзи хоссалари (63)	
3.2-§. Функциянинг limiti	70
3.2.1. Функциянинг limiti тушунчаси (70). 3.2.2. Функция limitiнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремалар (75). 3.2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ ажойиб limit ва унинг натижалари. (78). 3.2.4. Чексиз кичик ва чексиз катта функцияларни таққослаш. (80).	
3.3-§. Функциянинг узлуксизлиги	83
3.3.1. Функциянинг нуқтада узлуксизлиги таъриф; аргумент ва функциянинг орттирмаси, узилиш турлари (83). 3.3.2. Мураккаб функциянинг узлуксиз шarti (86). 3.3.3. Узлуксиз функцияларнинг баъзи хоссалари (88)	
3-бобни такрорлаш учун саволлар	89
3-бобга доир машқлар	89
3-бобга доир жавоблар, курсатмалар ва ечи- лишлар	92
4-боб. Ҳосила. Функциянинг дифференциали ва унинг тат- биқлари	99
4.1-§. Ҳосила	99
4.1.1. Ҳосила, унинг геометрик ва механик маъноси (99). 4.1.2. Функция ҳосиласининг мавжудлиги ва функциянинг узлуксизлиги орасидаги боғланиш (104). 4.1.3. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи (105). 4.1.4. Даражали функ циянинг ҳосиласи (105). 4.1.5. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинимасининг ҳосиласи (106). 4.1.6. Мурак- каб функциянинг ҳосиласи (108). 4.1.7. Тескари функция- нинг ҳосиласи (109). 4.1.8. Курсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосиласи (110). 4.1.9. Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи (111). 4.1.10. Ошкормас функциянинг ҳосиласи (112). 4.1.11. Иккинчи тартибли ҳосила, унинг механик маъноси. Юқори тартибли ҳосилалар (113)	

4.2-§. Дифференциал	114
4.2.1. Функциянинг дифференциали (114). 4.2.2. Дифференциалнинг геометрик маъноси (114). 4.2.3. Дифференциални ҳисоблаш (115)	
4.3-§. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи	116
4.3.1. Абсолют ва нисбий хато (116). 4.3.2. Функция ортирмасининг тақрибий қийматини дифференциал ёрдамида ҳисоблаш (118). 4.3.3. Функциянинг тақрибий сон қийматини ҳисоблаш (119). 4.3.4. Хатоларни қатъий ҳисобга олиш усули бўйича ҳисоблашлар (119). 4.3.5. Кўпайтманинг нисбий хатоси (119). 4.3.6. Даражанинг нисбий хатоси (120). 4.3.7. Илдизнинг нисбий хатоси (121). 4.3.8. Бўлинманинг нисбий хатоси (121). 4.3.9. Даражаларни тақрибий ҳисоблаш (122). 4.3.10. Илдизларни тақрибий ҳисоблаш (122). 4.4.11. Тескари катталикларни тақрибий ҳисоблаш (123). 4.3.12. Кичик бурчакларнинг синус ва тангенсини тақрибий ҳисоблаш (123). 4.3.13. Ўнли логарифмларнинг жадвал айирмаларини ҳисоблаш (124). 4.3.14. Сонни унинг ўнли логарифми бўйича ҳисоблашда нисбий хатосини топиш (125)	
4-бобга доир такрорлаш учун саволлар	126
4-бобга доир машқлар	126
4-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	127
5-боб. Ҳосилаларнинг функцияларни текшириш ва графиклар ясашга татбиқи	129
5.1-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар	129
5.1.1. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари ҳақида (129). 5.1.2. Функциянинг экстремумлари (129). 5.1.3. Ферма теоремаси (130). 5.1.4. Роль теоремаси (131). 5.1.5. Лагранж теоремаси (132).	
5.2-§. Ҳосиланинг функция экстремумларини топишга татбиқ этиш	134
5.2.1. Функциянинг ўзгармаслик, ўсиш ва камайиш аломатлари (134). 5.2.2. Экстремум мавжудлигининг етарли шартлари (135). 5.2.3. Ёпиқ ин ервалда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш (137)	
5.3-§. Функцияларнинг ўзгаришини текширишни далам эттириш ва графиклар ясаш	138
5.3.1. Функциянинг узилиш нуқталарда ва чексиз интервалнинг охириларида ўзгариши. Асимптоталар (138). 5.3.2. Функция графигининг қавариқлик йўналиши; функция графигининг букилиш нуқталари (140). 5.3.3. Функцияни текширишнинг умумий схемаси (143). 5.3.4. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир татбиқий (амалий) характердаги масалалар (145)	

5-бобни такрорлаш учун саволлар	148
5-бобга доир машқлар	148
5-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	149
6-боб. Детерминантлар ва чизиқли тенгламалар системаси	150
6.1-§. Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси	150
6.1.1. Икки номаълумли чизиқли тенгламалар (150). 6.1.2. Икки номаълумли икки чизиқли тенглама системаси, геометрик интерпретацияси (151). 6.1.3. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини текшириш (152)	
6.2-§. Иккинчи тартибли детерминантлар	154
6.2.1. Асосий таърифлар. Крамер формулалари (154). 6.2.2. Иккинчи тартибли детерминантларнинг хоссалари (155).	
6.3-§. Учинчи ва юқори тартибли детерминантлар ва уларнинг чизиқли тенгламалар системаларига татбиқи	158
6.3.1. Учинчи тартибли детерминантлар ва уч номаълумли учта чизиқли тенглама системаси учун Крамер формулалари (158). 6.3.2. Учинчи тартибли детерминантнинг унинг бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиш (159). 6.3.3. Юқори тартибли детерминантлар (161). 6.3.4. n номаълумли n та чизиқли тенглама системаси (162). 6.3.5. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системалари (163)	
6.4-§. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш методлари	164
6.4.1. Гаусс методи (164). 6.4.2. Оддий итерациялар методи (165). 6.4.3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишда ҳисоблаш техникасидан фойдаланишга доир қисқача кўрсатма (166)	
6-бобни такрорлашга доир саволлар	167
6-бобга доир машқлар	167
6-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	170
7-боб. Матрицалар ва уларнинг чизиқли тенгламалар системаларига татбиқлари	175
7.1-§. Матрицалар ва улар устида амаллар	175
7.1.1. Асосий таърифлар (175). 7.1.2. Матрицаларни кўпайтириш амалининг хоссалари (176). 7.1.3. Бирлик матрица (179)	
7.2-§. Квадрат матрицалар	
7.2.1. Дастлабки изоҳлар (180). 7.2.2. Квадрат матрицанинг детерминанти (181). 7.2.3. Тескари матрица (182). 7.2.4. n номаълумли n та чизиқли тенглама системасини тескари матрица методи билан ечиш (185)	180
7.3-§. n номаълумли m та чизиқли тенглама системалари	187
7.3.1. Дастлабки мисоллар (187). 7.3.2. Матрица ранги. n номаълумли чизиқли тенгламалар системасининг ечилиш шартлари (189)	

7-бобни такрорлаш учун саволлар	192
7-бобга доир машқлар . Ҳ	192
7-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	193
8-боб. Фазола тўғри чизиқлар ва текисликлар	198
8.1-§. Евклид геометриясининг мантиқий структураси ҳақида тушунча	198
8.1.1. Геометрияни аксиоматик қуриш методи; стереометриянинг асосий аксиомалари (198). 8.1.2. Асосий аксиомаларнинг баъзи натижалари (201)	
8.2-§. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллиги . .	202
8.2.1. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг ўзаро вазияти (202).	
8.2.2. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллик аломатлари (203).	
8.3-§. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг перпендикулярлиги	205
8.3.1. Тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик аломатлари (205). 8.3.2. Текисликка перпендикуляр ва оғма (207). 8.3.3. Тўғри чизиқнинг текисликка проекцияси, тўғри чизиқлар орасидаги, тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак (209). 8.3.4. «Уч перпендикуляр» ҳақида теорема (211).	
8.4-§. Текисликларнинг ўзаро вазияти	213
8.4.1. Икки текислик орасидаги бурчак (213). 8.4.2. Текисликларнинг перпендикулярлик аломатлари (214)	
8.5-§. Икки ёқли, уч ёқли ва кўп ёқли бурчаклар	215
8.6-§. Кўпёк ар	218
8.6.1. Кўпёк; кўпёkning элементлари (218). 8.6.2. Призма (219). 8.6.3. Пирамида (220). 8.6.4. Параллелепипеднинг энг содда хоссалари (223). 8.6.5. Пирамиданинг энг содда хоссалари (225).	
8.7-§. Геометрик жисмларнинг ҳажмлари	227
8.7.1. Ҳажм аксиомалари (227). 8.7.2. Баъзи жисмларнинг ҳажмларини ўлчаш учун формулалар (228)	
8-бобни такрорлаш учун саволлар	229
8-бобга доир машқлар	230
8-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	233
9-боб. Векторлар алгебраси элементлари	239
9.1-§. Векторлар ва улар устида бажариладиган чизикли операциялар	239
9.1.1. Асосий тушунчалар (239). 9.1.2. Векторларни қўшиш ва айириш. Векторни сонга кўпайтириш (240). 9.1.3. Векторнинг ўқдаги проекцияси. Векторни берилган йўналишлар бўйича ёйиш (243).	

9.2- §. Декарт координата системасидаги векторлар	247
9.2.1. Фазода декарт координата -системаси. Векторнинг координаталари ва уларнинг векторнинг боши ва охирининг координаталари орқали ифодаси. (247). 9.2.2. Координата формадаги ёзувда векторлар устида бажариладиган чизиqli амаллар (249). 9.2.3. Векторнинг узунлигини унинг координаталари ва унинг боши ҳамда охирининг координаталари орқали ифодалаш. Кесмани берилган нисбатда бўлиш (250). 9.2.4. Декарт координата текислигида векторлар m ўлчовли векторлар ҳақида тушунча (252)	
9.3- §. Векторлар устида навбатдаги амаллар	253
9.3.1. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси (253). 9.3.2. Векторларни вектор кўпайтириш (256). 9.3.3. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси (257). 9.3.4. Терминология ва белгилашлар ҳақида изоҳлар (261).	
9- бобга доир такрорлаш учун саволлар	261
9- бобга доир машқлар	262
9- бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	263
10- боб. Тригонометрик функциялар	265
10.1- §. Сонли аргументнинг тригонометрик функциялари ва уларнинг энг содда хоссалари 265	
10.1.1. Ёйлар ва бурчакларнинг радиан ўлчови (265). 10.1.2. Ёй (бурчак) тушунчасини умумлаштириш. Координата текислиги. Бирлик айлана (271). 10.1.3. Сонли аргументнинг тригонометрик функцияларини аниқлаш (274). 10.1.4. Аргументнинг баъзи қийматлари учун тригонометрик функцияларнинг сонли қийматларини ҳисоблаш (278). 10.1.5. Аргумент 0 дан 2π гача ўсганда тригонометрик функцияларнинг ўзгариши (281). 10.1.6. Бир хил аргументнинг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлар. Асосий айниятлар (285). 10.1.7. Тригонометрик функцияларнинг жуфтлиги ва тоқлиги, уларнинг даврийлиги (289).	
10.2- §. Келтириш формулалари	293
10.2.1. Косинус ва синус даврлари ярмининг хоссаси (293). 10.2.2. Ўзаро тўлдирувчи аргументли тригонометрик функциялар (294). 10.2.3. $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ аргументларнинг тригонометрик функциялари (296)..	
10.3- §. Тригонометрик функцияларнинг графиклари	300
10.3.1. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиклари (300). 10.3.2. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиклари (302).	
10.4- §. Тескари тригонометрик функциялар	304
10.4.1. Синус ва косинуснинг берилган қийматлари бўйича ёйни (бурчакни) яшаш. $\arcsin x$ ва $\arccos x$ функциялар (304).	

10.4.2. Тангенс ва котангенсининг берилган қийматлари бўйича ёйни (бурчакни) яшаш. $\operatorname{arctg} x$ ва $\operatorname{arcsctg} x$ функциялар (308).	10.4.3. Энг содда тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликлар (311).
10.5-§. Қўйиш формулалари ва уларнинг натижалари	316
10.5.1. Икки аргумент йиғиндиси ва айырмасининг тригонометрик функциялари (316).	10.5.2. Иккиланган ва ярим аргументнинг тригонометрик функциялари (320).
10.5.3. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғиндига алмаштириш (324).	10.5.4. Тригонометрик функциялар алгебраик йиғиндисини кўпайтмага алмаштириш (327).
10.5.5. Мисоллар ечиш (333).	
10.6-§. Тригонометрик функцияларнинг узлуксизлиги ва уларнинг ҳосилалари	336
10.6.1. $ \sin x < x < \operatorname{tg} x $ тенгсизлик ва унинг натижалари (336).	10.6.2. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функциялар ҳосиласи (340).
10.6.3. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари (345).	
10.7-§. Комплекс соннинг тригонометрик формаси. Комплекс кўрсаткичли кўрсаткичли функция	347
10.7.1. Комплекс соннинг тригонометрик формаси (348).	10.7.2. Комплекс кўрсаткичли кўрсаткичли функция. Эйлер формуласи (352)
10-бобни такрорлаш учун саполлар	353
10-бобга доир машқлар	354
10-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	366
11-боб. Тўғри бурчакли координаталар системасида тўғри чизиклар ва текисликлар	372
11.1-§. Текисликда тўғри чизиқни вектор ва координата формадаги тенгламалар билан берилиши	372
11.1.1. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (372).	11.1.2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси (373).
11.1.3. $B \neq 0$ деб фараз қилинганда, тўғри чизиқ тенгламасининг махсус ҳоллари (374).	11.1.4. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Коллинеарлик ва перпендикулярлик шартлари (375).
11.1.5. Масалалар ечиш намуналари (377).	
11.2-§. Текисликни вектор ва координат формада берилиши	378
11.2.1. Берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи текислик тенгламаси (378).	11.2.2. Текисликнинг умумий тенгламаси (379).
11.2.3. Масалалар ечиш намуналари (380).	
11.3-§. Тўғри чизиқнинг фазода берилиши	382
11.3.1. Тўғри чизиқнинг вектор-параметрик тенгламаси ва унинг натижалари (382).	11.3.2. Масалалар ечиш намуналари

ри (383). 11.3.3. Фазода туғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш чизиги сифатида берилиши (385).

11-бобга доир машқлар	386
11-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	387
12-боб. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртлар	389
12.1-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар	389
12.1.1. Айлана (389). 12.1.2. Эллипс (389). 12.1.3. Гипербола. (391). 12.1.4. Парабола (395). 12.1.5. Мисоллар ечиш (396)	
12.2-§. Иккинчи тартибли сиртлар	397
12.2.1. Эллипсоид (397). 12.2.2. Гиперболоидлар (398). 12.2.3. Параболоидлар (400). 12.2.4. Иккинчи тартибли конуслар (403). 12.2.5. Иккинчи тартибли цилиндрлар (404).	
12-бобни такрорлашга доир саволлар	406
12-бобга доир машқлар	406
12-бобга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар	406
Илова. Баъзи элементар функциялар жадваллари	408

ИБ № 831

На узбекском языке

ВИТАЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ МАТВЕЕВ,
АРТУР АЛЕКСАНДРОВИЧ МАТЮШКИН-ГЕРКЕ,
НИКОЛАЙ ВАСИЛЬЕВИЧ БОГОМОЛОВ,
СЕМЕН МОИСЕЕВИЧ КОЗЛОВСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИКИ

для техникумов, ч. I

Учебное пособие для средних специальных
учебных заведений

Перевод с русского издания изд-ва «Наука», М., 1976

Издательство «Ўқитувчи»,
Ташкент—1978

$\lg^2 x = \lg x$
 $\lg x = \sqrt{\lg x}$

Таржимонлар: Хусанов У (1—8- боблар), Каримов Р (9—12- боблар)
Редактор: Ашмиев Х (1—8- боблар), Хусанов У (9—12- боблар)
Бадний редактор Соин Е.
Тех. редактор Грешникова Т.
Корректор Нуриддинова Ж.

Теришга берилди 5. 01. 1977 й. Босишга рухсат этилди 8.06. 1978 й. Формат 84×108¹/₃₂. Тип қоғози №3. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли 6. л. 22,26. Нашр. л. 19,64. Тиражи 20000. Зак №2085. Баҳоси 65 т.

«Уқитувчи» нашриёти, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома №243-77.

Ўзбекистон ССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чи-
лаб чиқариш бирлашмасининг полиграфия комбинати. Тошкент шаҳри, Навоий
кўчаси, 30. 1978 й.

Полиграфкомбинат, Ташкентского полиграфического производственного объ-
единения «Матбуот» Государственного комитета по делам издательств, поли-
графии и книжной торговли Совета Министров УзССР. гqr. Ташкент, ул.
Навои, 30.