

517

4-25

Т. ШАРИФОВА, Э. ИУЛДОШЕВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими
вазирлиги педагогика институтлари ва
университетлар талабалари учун
қўлланма сифатида тавсия этган

12



ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1996

Тақризчилар:

Физика-математика фанлари доктори, профессор Ш. А. Аюпов
Физика-математика фанлари номзоди, доцент Ф. Зокиров

Ушбу қўлланма педагогика институтлари ва университетларининг физика факультетида ўтиладиган математик анализ фани дас турига мослаб тузилган. Унда 1300 га яқин мисол ва масалалар берилган бўлиб, улардан 300 дан ортиғи ечиб кўрсатилган, қолганлари учун эса жавоблар келтирилган.

Қўлланмадан асосан педагогика институтлари ва университетларининг физика факультетида тахсил кўраётган талабалар, шунингдек, олий техника ўқув юртлари математик анализ фани ўрганиладиган факультетларнинг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

ШАРИФОВА ТОЖИ.
ПҮЛДОШЕВ ЭРКИН

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Педагогика институтлари ва университетлар талабалар
учун қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Муҳаррирлар С. Бекбова, Н. Фошпа
Расмлар муҳаррири Т. Қаноатова
Тех. муҳаррир Ш. Бобоходова
Мусахҳишлар: И. Қаришова, Э. Содиқова

ИБ № 6332

Теринишга берилди 6.05.95. Босишга рухсат этилди 16.02.96. Бичими 84x108.
Тип. қоғози. Литературная гарнитураси Юж.ри босма усулида босилди. Ш.
ли б. л 20.16. Нашр л. 12.59. Шартли кр-отт. 24.31. 3000 нусхада босилди.
Буюртма № 2761.

«Ўқитувчи» нашриёти Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-98-93.

Ўзбекистон Давлат матбуот қўмитасининг Ташполсграфкомбинати. Тошкент.
Навоий кўчаси. 30. 1996.

Ш 4306010500—101
353 (04) — 96 46—94

© «Ўқитувчи» нашриёти,
Тошкент, 1996

ISBN 5—645—02165—7

СУЗ БОШИ

Ушбу қўлланма асосан педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўқиётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, «Математик анализ» курсининг «физика-астрономия», «физика-информатика» ихтисосликлари дастурининг 1- қисмига мослаб ёзилган.

Қўпинча педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўзбек тилида тахсил кўраётган талабалар «Математик анализ» фанидан мисол ва масалалар ечишда қийналадилар, ундан ташқари, улар учун бу фандан ўзбек тилида бир бутун машқлар тўплами ҳам йўқ.

Ушбу қўлланма А. Ф. Ҳикматов, У. Т. Тошметов, К. Карашеваларнинг «Математик анализдан машқлар ва масалалар тўплами» деб ёзилган китобларидан кейинги ўзбек тилидаги иккинчи қўлланмадир, бу қўлланманинг юқоридагидан фарқи шундаки, бунда физика-математика талабалар учун ҳар бир темага доир 4—5 типик мисол ва масалалар ечиб кўрсатилган, изоҳлар берилган. Сўнгра талабаларнинг мустақил ечишлари учун бир қатор мисол ва масалалар келтирилган.

Бу қўлланмани ёзишдан мақсад талабаларга математик анализга доир мисол ва масалаларни мустақил ечишга йўлланма бериш, назарияни амалиётга татбиқ қилишни пухта ўргатиш ва математик қобилиятни ўсатиришдир.

Қўлланманинг I—IV бобларини Т. Шарифова, V—VIII бобларини Э. А. Пўлдошев ёзган. Ушбу китобнинг ўлғэмасини тайёрлашда Низомий номидаги Тошкент давлат педагогика институти математик анализ кафедрасининг доцентлари А. Ф. Ҳикматов, У. Т. Тошметов ўртоқлар ўзларининг қимматли маслаҳатлари билан қўлдан ёрдам бердилар.

Қўлғэмани тақриз қилишда математика институтининг директори, физика-математика фанлари доктори, профессор Ш. А. Аюпов ва Тошкент автомобиллар институтининг доценти, физика-математика фанлари номзоди Ф. Зокировлар қимматли маслаҳатлар билан кўмаклашдилар. Биз юқорида тилга олинган ўртоқларга сазимий миннатдорчилигимизни билдирамыз.

Муаллифлар

Тақризчилар:

Физика-математика фанлари доктори, профессор **Ш. А. Аюпов**
Физика-математика фанлари номзоди, доцент **Ф. Зокиров**

Ушбу қўлланма педагогика институтлари ва университетлари нинг физика факультетида ўтиладиган математик анализ фани дас-
турига мослаб тузилган. Унда 1300 га яқин мисол ва масалалар бе-
рилган бўлиб, улардан 300 дан ортиғи ечиб кўрсатилган, қолганлари
учун эса жавоблар келтирилган.

Қўлланмадан асосан педагогика институтлари ва университет-
ларнинг физика факультетида таҳсил кўраётган талабалар, шунинг-
дек, олий техника ўқув юртлари математик анализ фани урганила-
диган факультетларнинг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

ШАРИФОВА ТОЖИ,
ПҲЛДОШЕВ ЭРКИН

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Педагогика институтлари ва университетлар талабалар
учун қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Муҳаррирлар **С. Бекбоева, Н. Гошпоз**
Расмлар муҳаррири **Т. Қаноатова**
Тех. муҳаррир **Ш. Бобоходонова**
Мусахҳидлар: **Н. Каримов, З. Содиқова**

ИБ № 6332

Терёшга берилди 6.05.95. Босишга руҳсат этилди 16.02.96. Бичими 84×108.
Тип. қоғози Литературная гарнитураси. Юқ.ри босма усулида босилди. Ша-
ли 6. л 20.16. Нашр л. 12,59. Шартли кр-отт. 24,31. 3000 нускада босилди.
Буюртма № 2761.

«Ўқитувчи» нашриёти Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-98-93.

Ўзбекистон Давлат матбуот қўмитасининг Ташполиграфкомбинати. Тошкент.
Навоий кўчаси. 30. 1996.

4306010500—101
353 (04) — 96 46—94

ISBN 5—645—02165—7

© «Ўқитувчи» нашриёти,
Тошкент, 1996

СУЗ БОШИ

Ушбу қўлланма асосан педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўқиётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, «Математик анализ» курсининг «физика-астрономия», «физика-информатика» ихтисосликлари дастурининг 1-қисмига мослаб ёзилган.

Қўпинча педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўзбек тилида таҳсил кўраётган талабалар «Математик анализ» фанидан мисол ва масалалар ечишда қийналадилар, ундан ташқари, улар учун бу фандан ўзбек тилида бир бутун машқлар тўплами ҳам йўқ.

Ушбу қўлланма А. Ғ. Ҳикматов, У. Т. Тошметов, К. Қарашеваларнинг «Математик анализдан машқлар ва масалалар тўплами» деб ёзилган китобларидан кейинги ўзбек тилидаги иккинчи қўлланмадир, бу қўлланманинг юқоридагидан фарқи шундаки, бунда физикалар учун ҳар бир темага доир 4—5 типик мисол ва масалалар ечиб кўрсатилган, изоҳлар берилган. Сўнгра талабаларнинг мустақил ечишлари учун бир қатор мисол ва масалалар келтирилган.

Бу қўлланмани ёзишдан мақсад талабаларга математик анализга доир мисол ва масалаларни мустақил ечишга йўлланма бериш, назарияни амалиётга татбиқ қилишни пухта ўргатиш ва математик қобилиятни ўсатиришдир.

Қўлланманинг I—IV бобларини Т. Шарифова, V—VIII бобларини Э. А. Йўлдошев ёзган. Ушбу китобнинг ўлжасининг тайёрлашда Низомий номидаги Тошкент давлат педагогика институти математик анализ кафедрасининг доцентлари А. Ғ. Ҳикматов, У. Т. Тошметов ўртоқлар ўзларининг қимматли маслаҳатлари билан ёқиндан ёрдам бердилар.

Қўлжамани тақриз қилишда математика институтининг директори, физика-математика фанлари доктори, профессор Ш. А. Аюпов ва Тошкент автомобиллар институтининг доценти, физика-математика фанлари номзоди Ф. Зокировлар қимматли маслаҳатлар билан кўмаклашдилар. Биз юқорида тилга олинган ўртоқларга самимий миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Муаллифлар

демак, 1) тенгламанинг ечими — 2; 4.

2) тенгсизликни ечишда ҳақиқий сон абсолют қийматининг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз, яъни $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow 3 - 5 \leq 2x - 3 + 3 \leq 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Демак, 2) тенгсизликнинг ечими $-1 \leq x \leq 4$ экан.

2) тенгсизликни ҳақиқий сон абсолют қийматининг таърифидан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин; биз бу йўлни 1) мисолда айтиб ўтдик.

3) тенгсизликни ечишда ҳақиқий сон абсолют қийматининг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз, яъни: $|t - 4| > 1 \Leftrightarrow t - 4 > 1$ ва $t - 4 < -1 \Leftrightarrow t > 5$ ва $t < 3$. Демак, 3) тенгсизликнинг ечими $(-\infty; 3) \cup (5; \infty)$.

$$4) \text{ тенглама } \begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3z + 4 = z + 4, \\ 3z + 4 > 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} -(3z + 4) = z + 4, \\ 3z + 4 < 0 \end{cases} \end{array}$$

системаларга тенг кучли.

а) системани ечамиз:

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ 3z > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z > -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 0;$$

б) системани ечамиз:

$$\begin{cases} -4z = 8 \\ 3z < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ z < -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow z = -2.$$

Шундай қилиб, 4) тенглама $z = -2$ ва 0 ечимларга эга экан. ▲

3. Қуйидаги сонларнинг қайсилари рационал, қайсилари иррационал сон эканлигини аниқланг ва рационал сонларни оддий каср кўринишда ёзинг:

- 1) 3,(32); 2) 2,2121121112 ...; 3) 2,2(11); 4) 3,01(611);
5) 1,1(21); 6) 1,121121112 ...; 7) 5,4(13); 8) 3,7(6);
9) 2,21(10).

4. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

- 1) $|x - 1| \leq 3$; 4) $|x - 1| < |x + 1|$;
2) $|x + 3| > 2$; 5) $|x + 2| + |x - 2| \leq 10$;
3) $|2x + 1| < 1$; 6) $|x| > x$.

5. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

- 1) $|x| = x + 1$;
- 2) $|x| = -x$;
- 3) $|2x + 3| = x^2$;
- 4) $|x^2 - 5x + 9| = 3$;
- 5) $|x + 1| = x + 1$;
- 6) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$.

2-§. ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ АНИҚЛАНИШ СОҲАСИ

1. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган X ва Y тўпламлар берилган бўлсин. Агар ҳар бир $x \in X$ сонга бирор қоида ва қомунга биноан аниқ битта $y \in Y$ сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда f функция берилган дейилади ва $y = f(x)$ кўринишда ёзилади; x эркли ўзгаришчи аргумент дейилади.

X га функциянинг аниқланиш (мавжудлик) соҳаси дейилади ва у $D(f)$ кўринишда белгиланади. Функциянинг қийматлар тўплами $f(X)$ кўринишда белгиланади.

2. Функция аналитик усулда берилиб, аниқланиш соҳаси кўрсатилмаган бўлса, аргументнинг аналитик ифода маънога (ҳақиқий қийматга) эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш соҳалари қуйидагичадир:

1) Даражали функция $y = x^\mu$ ($f(x) = x^\mu$).

а) $\mu = n$ натурал сон бўлганда $D(f) = (-\infty; \infty)$,

б) $\mu = \frac{p}{q}$ (p, q лар бутун сонлар ва $q \neq 0$) да p, q лар мусбат бўлиб, q тоқ сон бўлса ($q = 2n + 1$), у ҳолда $D(f) = (-\infty; \infty)$; агар q жуфт сон бўлса ($q = 2n$), у ҳолда $D(f) = [0; \infty)$.

2) Кўрсаткичли функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) учун $D(f) = (-\infty; \infty)$.

3) $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) логарифмик функция $0 < x < \infty$ интервалда аниқланган.

4) $y = \sin x, y = \cos x$ тригонометрик функциялар $(-\infty; \infty)$ интервалда аниқланган;

$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{sec} x$ функциялар сонлар ўқининг $x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нуқталаридан бошқа нуқталарда аниқланган;

$y = \operatorname{ctg} x, y = \operatorname{cosec} x$ лар сонлар ўқининг $x_k = k\pi$ нуқталаридан бошқа нуқталарда аниқланган.

5) $y = \arcsin x, y = \arccos x$ тескари тригонометрик функ-

циялар $[-1; 1]$ да; $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$ лар эса $(-\infty; \infty)$ да аниқланган.

$y = f(x)$ формула билан берилган элементар функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топишда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

1) жуфт даражали илдиз маънога эга бўлиши учун илдиз остидаги ифода манфий бўлмаслиги керак;

2) каср ифодали функциялар каср махражи 0 дан фарқли ($\neq 0$) x ларда аниқланган бўлади;

3) трансцендент функциялар $\log_a x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$ ўзларининг аргументларининг кўрсатилган қийматларида аниқланган бўлади.

Агар $y = f(x)$ формулада юқорида санаб кўрсатилган элементлар бўлмаса, y ҳолда y функциянинг аниқланмиш соҳаси $(-\infty; \infty)$ бўлади (бунда масаланинг алоҳида шартларига бўйсунган функциянинг аниқланиш соҳаси кирмайди).

6. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

$$1) y = \sqrt{1-x^2};$$

$$2) u = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1};$$

$$3) v = \arcsin \frac{1-2x}{3};$$

$$4) z = \lg(x^2-9).$$

Δ 1) x аргумент жуфт даражали илдиз остида қатнашгани учун $1-x^2 \geq 0$ тенгсизликни ечамиз:

$$x^2 \leq 1; |x| \leq 1; -1 \leq x \leq 1.$$

Демак, 1) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ экан.

2) Бунда u функция

$$u_1 = \frac{x-1}{x^2-5x+6} \text{ ва } u_2 = \sqrt[3]{2x+1} \text{ функциялар йиғиндисидан}$$

иборат бўлгани учун $D(f) = D_1(f) \cap D_2(f)$ ўринли бўлади. $D_1(f)$ u_1 функциянинг, $D_2(f)$ u_2 функциянинг аниқланиш соҳасидир. u_1 функция касрнинг махражи $x^2-5x+6 \neq 0$ учун маънога эгадир, чунки 0 га бўлишнинг маъноси йўқ. $x^2-5x+6=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=2$, $x_2=3$. Демак, u_1 функция сонлар ўқида x нинг 2 ва 3 га тенг қийматларидан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган, яъни

$$D_1(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty).$$

$u_2 = \sqrt[3]{2x+1}$ функцияда x аргумент тоқ даражали илдиз остида қатнашгани учун $D_2(f) = (-\infty; \infty)$ дир. Шундай қилиб, u функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = D_1(f) \cap D_2(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$ дир.

3) v функция фақат $-1 \leq \frac{1-2x}{3} \leq 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда аниқланган. Бу тенгсизликни ечиб, қуйидагига эга бўламиз: $-3 \leq 1-2x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq -2x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$; бу кесма v функциянинг аниқланиш соҳасини билдиради.

4) Логарифмик функция z ўз аргументининг мусбат қийматлари учун аниқланган. Шунинг учун $x^2 - 9 > 0$. Бу тенгсизликни ечиб, $|x| > 3$ га эга бўламиз, бундан $-\infty < x < -3$ ва $3 < x < \infty$ келиб чиқади, яъни z функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; -3)$ ва $(3; \infty)$ интерваллардан иборат. ▲

7. $f(x) = x^2 - x + 1$ берилган. $f(0)$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$ ларни топинг.

8. $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ берилган. $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ларни топинг.

9. $F(x) = x^2$ берилган.

1) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$ ларни ҳисобланг.

10. $f(x) = 2 \sin 2x + \cos x$ функция берилган. $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(1)$, $f(a)$ ларни топинг.

11. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-1}$ функция берилган. $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$ ларни топинг. $f(1)$ мавжудми?

12.
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ x-1, & \text{агар } 1 \leq x \leq 3 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$f(2)$, $f(0)$, $f(0.5)$, $f(-0.5)$, $f(3)$ ларни топинг. $f(4.5)$ мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

13. $y = x^2 - 7x + 12$.

14. $y = \frac{x}{x+1}$.

$$15. y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$16. y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$17. y = \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$$

$$18. y = \frac{2x - 1}{x^2 - 7x + 12}$$

$$19. y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$20. y = \sqrt{4 - x}$$

$$21. y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$$

$$22. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$23. y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$24. y = \lg(2x - 3)$$

$$25. y = \lg(x^2 - 4x + 3)$$

$$26. y = \arcsin(2x - 5)$$

$$27. y = \arccos \frac{3x - 2}{4}$$

$$28. y = \arccos(5x - 8)$$

$$29. y = \sqrt{3 - x} +$$

$$30. y = \frac{3}{4 - x^2} + \lg(x^3 - x)$$

$$+ \arccos \frac{x - 2}{3}$$

$$31. y = 4 - \log_a x$$

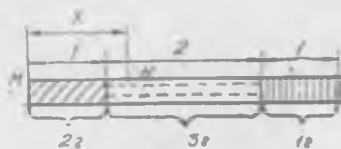
$$32. y = \frac{|x|}{x}$$

$$33. y = \frac{x}{\lg(1 - x)}$$

34. $y = f(x)$ функция $[0; 1]$ да аниқланган бўлса, а) $f(x^2)$, б) $f(\sin x)$, в) $f(x + a)$, г) $f(x + a) + f(x - a)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаларининг топинг.

35. $s = \frac{gt^2}{2}$ қонуниятга кўра h баландликдан тушаётган қаттиқ жисмнинг босиб ўтган йўлини ифодаловчи функциянинг аниқланиш соҳасини топинг. $s = \frac{gt^2}{2}$ аналитик ифоданинг аниқланиш соҳаси қандай бўлади?

36. Узунликлари мос равишда 1, 2, 1 узунлик бирлигига, массалари мос равишда 2, 3, 1 масса бирлигига тенг бўлган 3 та моддий кесмадан тўсин ясалган (1-чизма). Узунлиги x га тенг ўзгарувчи MN кесманинг массаси x нинг функциясидир. Бу функция x нинг қандай қийматлари учун аниқланган? Унинг аналитик ифодаси қандай?



1- чизма

37. $y = \frac{1}{x!}$ функциянинг $1 \leq x \leq 6$ да бутун сон қийматларида қабул қиладиган қийматлари учун жадвал тuzинг.

38. R радиусли шар ичига тўғри доиравий конус чизилган. Конус ён сиртининг юзи S билан унинг ясовчиси x орасидаги функционал боғланишни ва бу функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

3-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ КОМПОЗИЦИЯСИ ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР

1. $y = f(u)$ функция U тўпламда, $u = \varphi(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, $u = \varphi(x)$ нинг қийматлар тўплами $\varphi(X)$ U нинг қисм тўплами бўлсин. Агар $y = f(u)$ да u нинг ўрнига $\varphi(x)$ ни қўйсак, $y = f(\varphi(x))$ функцияга эга бўламиз. Бу функцияни $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ функцияларнинг композицияси ёки *мураккаб функция* дейилади.

2. Агар X тўпламга ҳар бир x сон билан биргаликда $-x$ ҳам тегишли бўлса, X координаталар бошига нисбатан симметрик тўплам дейилади.

$y = f(x)$ функция координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган X тўпламда берилган бўлсин.

а) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ *жуфт функция* дейилади.

б) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ *тоқ функция* дейилади.

39. 1) $y = \sqrt{u+1}$, $u = 3^x$ функциялар берилган, y ни x орқали ифодаланг.

2) $f(x) = x^3$ ва $\varphi(x) = 3^x$ функциялар берилган. $f(f(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

3) $f(x) = x^3 - x$ ва $\varphi(x) = \sin 2x$ функциялар берилган. $\varphi(f(1))$, $\varphi(f(2))$, $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ларни топинг.

4) Қуйидаги функцияларнинг тоқ, жуфтлигини кўрсатинг:

а) $f(x) = 3 - x^2$, б) $f(x) = \frac{1}{2} x^3$,

в) $f(x) = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, г) $f(x) = \lg x$,

д) $f(x) = \lg x^2$, е) $f(x) = \sin x - \cos x$.

Δ 1) $u = 3^x$ функциянинг қийматлар тўплами $\varphi(X) = (0; \infty)$ бўлиб, $y = \sqrt{u+1}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $U = [-1; \infty)$ нинг қисми бўлгани учун $y = \sqrt{3^x+1}$ мураккаб функцияга эга бўламиз.

$$2) f(f(x)) = f(x^3) = (x^3)^3 = x^9, \quad f(f(x)) = x^9;$$

$$f(\varphi(x)) = f(3^x) = (3^x)^3 = 3^{3x} = 27^x, \quad f(\varphi(x)) = 27^x;$$

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x^3) = 3^{x^3}; \quad \varphi(\varphi(x)) = \varphi(3^x) = 3^{3^x}.$$

$$3) f(1) = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0, \quad f(2) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6; \quad \varphi(f(1)) = \varphi(0) = \sin 2 \cdot 0 = \sin 0 = 0; \quad \varphi(f(2)) =$$

$$= \varphi(6) = \sin 2 \cdot 6 = \sin 12; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0;$$

$$f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(0) = 0^3 - 0 = 0.$$

4) а) $f(x) = 3 - x^2$ функция симметрик $(-\infty; \infty)$ тўпламда берилган бўлиб, $f(-x) = 3 - (-x)^2 = 3 - x^2 = f(x)$ тенглик бажарилгани учун у жуфт функциядир.

б) $f(x) = \frac{1}{2} x^3$ функция симметрик $(-\infty; \infty)$ тўпламда берилган бўлиб, $f(-x) = \frac{1}{2} (-x)^3 = \frac{1}{2} (-1)^3 x^3 = -\frac{1}{2} x^3 = -f(x)$ тенглик бажарилгани учун у тоқ функциядир.

в) $f(x) = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ функция $(-\infty; \infty)$ симметрик тўпламда берилган ва $f(-x) = (-x) \cdot \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = -x \cdot \frac{\frac{1}{a^x} - 1}{\frac{1}{a^x} + 1} =$

$$= -x \cdot \frac{\frac{1 - a^x}{a^x}}{\frac{1 + a^x}{a^x}} = -x \cdot \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -x \cdot (-1) \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = x \cdot$$

$\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = f(x)$, яъни $f(-x) = f(x)$. Демак, $f(x)$ функция жуфт функциядир.

г) $f(x) = \lg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(0; \infty)$ симметрик тўплам бўлмагани учун уни тоқ-жуфтликка текшира олмаймиз.

д) $f(x) = \lg x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ симметрик тўплам ва

$$f(-x) = \lg (-x)^2 = \lg x^2 = f(x)$$

тенглик ўринли бўлгани учун $\lg x^2$ жуфт функциядир.

е) $f(x) = \sin x - \cos x$ функция симметрик $(-\infty; \infty)$ тўпламда берилган, лекин бу тўпламда $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ тенгликлардан бирортаси ҳам бажарилмайди. Ҳақиқатан ҳам, $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x) \neq -f(x)$. Демак, $f(x) = \sin x - \cos x$ функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. ▲

40. $y = u^2$, $u = x - 1$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

41. $y = 1 - u^2$, $u = \sin x$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

42. $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x = a^t$ функциялар берилган. y ни t орқали ифодаланг.

43. $f(x) = x^2$ ва $\varphi(x) = 2^x$ функциялар берилган. $f(f(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

44. $f(x) = \frac{5x^3 + 1}{2 - x}$ функция учун $f(3x)$, $f(x^3)$, $3f(x)$, $(f(x))^3$ ларни топинг.

Қуйидаги функцияларнинг тоқ-жуфтлигини текширинг.

45. $f(x) = x^4 - 2x^2$. 46. $f(x) = 3 \cos x$.

47. $f(x) = 1 - x^3$. 48. $f(x) = 2^x$.

49. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. 50. $f(x) = 2^{-x^2}$.

51. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. 52. $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$.

53. $f(x) = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$. 54. $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$.

55. $f(x) + f(-x)$ функциянинг жуфт эканлигини, $f(x) - f(-x)$ функциянинг тоқ функция эканлигини исботланг.

56. Бир вақтда ҳам тоқ, ҳам жуфт бўлган функциялар мавжудми?

57. $y = f(x)$ жуфт функция ва $f(x) \neq 0$. $y = \frac{1}{f(x)}$ функциянинг жуфт эканлигини кўрсатинг.

4-§. ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР. МОНОТОН ФУНКЦИЯЛАР

1. $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар $l \neq 0$ сон учун $x \pm l \in X$ бўлганда $f(x \pm l) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция *даврий функция* дейилади ва l унинг *даври* дейилади. Функциянинг энг кичик мусбат даври (агар у мавжуд бўлса) унинг асосий даври дейилади.

2. $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ дан:

а) $f(x_1) < f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсувчи;
б) $f(x_1) \leq f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаймайди-
ган;

в) $f(x_1) > f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаювчи;
г) $f(x_1) \geq f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсмайди-
гн дейилади. Бу тўрт турдаги функциялар бир сўз билан *мо-
нотон* функциялар дейилади. Ўсувчи ва камаювчи функ-
циялар *қатъий монотон* функциялар дейилади.

58. Қуйидаги функцияларнинг даврий эканлигини аниқ-
ланг ва даврий функцияларнинг асосий даврини кўрсатинг:

1) $f(x) = \sin 5x$, 2) $\varphi(x) = 3 \sin \pi x$,

3) $\psi(x) = 2 + \sin x$,

4) $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

△ 1) Шундай $l \neq 0$ сон топилиб, барча x ларда $\sin 5(x + l) = \sin 5x$ тенглик ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бу тенгликдан, хусусий ҳолда, $x = \frac{\pi}{10}$ бўлганда, $\sin 5\left(\frac{\pi}{10} + l\right) = \sin \frac{\pi}{2}$ келиб чиқади. Бундан $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 5l\right) = \sin \frac{\pi}{2}$, $\cos 5l = 1$ га эга бўламиз; $5l = 0; 2\pi$, лекин $l \neq 0$, демак, $l = \frac{2\pi}{5}$; $l = \frac{2\pi}{5}$ функциянинг даври эканлигини кўрсатамиз.

Демак, $\sin 5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin (5x + 2\pi) = \sin 5x = f(x)$.

$kl = k \cdot \frac{2\pi}{5}$ (бунда $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) сонлар ҳам $\sin 5x$ функция учун давр бўлиб, мусбат kl сонлар ичида энг кичиги $\frac{2\pi}{5}$ бўлгани учун $l = \frac{2\pi}{5}$ сон $\sin 5x$ функция учун асосий давр бўлади.

2) $\varphi(x) = 3 \sin \pi x$ функция даврий бўлиб, унинг асосий даври 2 сонига тенгдир. Ҳақиқатан, агар l функциянинг даври бўлса, $\varphi(x+l) = 3 \sin \pi(x+l) = 3 \sin \pi x = \varphi(x)$ айниятдан $\sin(\pi x + \pi l) = \sin \pi x$ га эга бўламиз, бу айният x нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида ўринли бўлгани учун (функция $(-\infty; \infty)$ тўпламда аниқланган) $x=0$ да ҳам тўғри бўлади, яъни $\sin \pi l = \sin 0 = 0 \Rightarrow \pi l = 0, \pi, 2\pi$. Лекин $l \neq 0, l=1$ бўлганда $\sin(\pi x + \pi) = \sin \pi x \Rightarrow -\sin \pi x = \sin \pi x$ га эга бўламиз, бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас. $l=2$ да $\sin(\pi x + 2\pi) = \sin \pi x$, демак, $\sin \pi x = \sin \pi x$ ўринлидир. Энди $l=2$ берилган $\varphi(x) = 3 \sin \pi x$ функция учун давр эканини кўрсатайлик: $\varphi(x+2) = 3 \sin \pi(x+2) = 3 \sin(\pi x + 2\pi) = 3 \sin \pi x = \varphi(x)$. Худди шунинг каби $\varphi(x-2) = 3 \sin \pi(x-2) = 3 \sin(\pi x - 2\pi) = -3 \sin(2\pi - \pi x) = -3 \cdot (-\sin \pi x) = 3 \sin \pi x = \varphi(x)$. Шундай қилиб, $2k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) сонлар берилган функция учун даврдир. Мусбат даврлар ичида энг кичиги 2 дир, шунинг учун 2 асосий даврдир.

3) $\psi(x) = 2 + \sin x$ функция даврий функция бўлиб, унинг асосий даври 2π га тенгдир. Ҳақиқатан, агар l ($l \neq 0$) сон функциянинг даври бўлса, у ҳолда барча x ларда

$$\psi(x+l) = 2 + \sin(x+l) = 2 + \sin x = \psi(x)$$

айният ўринли бўлади, бундан $\sin(x+l) = \sin x, x = \frac{\pi}{2}$

десак, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos l = 1 \Rightarrow l = 0; 2\pi; l \neq 0$

бўлгани учун $l = 2\pi$ дир. Худди юқоридаги мисоллардаги каби йўл билан $l = 2\pi$ соннинг $\psi(x) = 2 + \sin x$ функция учун давр эканини ва унинг мусбат даврлар ичида энг кичик эканини кўрсатиш мумкин.

4) $D(x)$ — Дирихле функцияси даврий функция бўлиб, ҳар бир рационал r сон унинг даври бўлади. Ҳақиқатан, агар x — рационал сон бўлса, у ҳолда $x+r$ ҳам рационал сон бўлади, агар x — иррационал сон бўлса, у ҳолда $x+r$ ҳам иррационал сон бўлади. Демак,

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Бундан $D(x+r) = D(x)$ тенглик келиб чиқади. Энг кичик мусбат рационал сон йўқлигидан бу функция асосий даврга эга эмас.

59. 1) $f(x) = |x|$ функциянинг $(-\infty; 0)$ да қатъий камаювчи; $(0; \infty)$ да қатъий ўсувчи эканини кўрсатинг.

2) $\varphi(x) = |x| - x$ функциянинг монотонлик интервалларини топинг.

3) $\psi(x) = \sin x$ функциянинг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ да монотон эканини кўрсатинг.

(Δ 1) $x < 0$ бўлганда $f(x) = -x$ бўлиб, бу функция $(-\infty; 0)$ да камаяди. Ҳақиқатан ҳам, $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$) лар учун $f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$ тенгсизлик бажарилади, демак, $f(x) = |x|$ функция $(-\infty; 0)$ да камаяди.

$x > 0$ бўлганда $f(x) = x$ бўлиб, бу функция $(0; \infty)$ да ўсади. Ҳақиқатан ҳам, $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in (0; \infty)$) лар учун $f(x_1) < f(x_2)$ ўринлидир, яъни аргументнинг катта қиймати-га функциянинг катта қиймати мос келяпти. Бу эса функциянинг $(0; \infty)$ да ўсувчи эканини билдиради.

2) $x < 0$ бўлганда $\varphi(x) = |x| - x = -x - x = -2x$. $\varphi(x) = -2x$ функция камаяди (1-мисолга қаранг), агар $x \geq 0$ бўлса, $\varphi(x) = |x| - x = x - x = 0$, $\varphi(x) = 0$ — доимий. Демак, ихтиёрый $x \in (-\infty; \infty)$ да $x_1 < x_2$ бўлганда $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун $\varphi(x) = |x| - x$ функция $(-\infty; \infty)$ да ўсмайдиган функция бўлади.

3) $x_1 < x_2$ (бунда $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) бўлганда $\psi(x_2) - \psi(x_1)$ айирмани текширамыз: $\psi(x_2) - \psi(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$. $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун $\frac{x_2 + x_1}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, $\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. $x_2 - x_1 > 0$ ўринли бўлгани учун $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ ҳам мусбат бўлиб, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ да $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ дир. Демак, $\psi(x_2) - \psi(x_1) > 0$, яъни $\psi(x_1) < \psi(x_2)$. Шундай қилиб, $\psi(x) = \sin x$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ да ўсувчи экан. ▲

Қуйидаги функцияларнинг қайсилари даврий эканлигини аниқланг ва даврий функцияларнинг асосий даврини кўрсатинг.

60. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

61. $f(x) = \operatorname{tg} \pi x$.

62. $f(x) = \sin^2 x$.

63. $f(x) = x \cos x$.

64. $f(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x$.

65. $f(x) = \cos (x - 2)$.

66. $f(x) = \{x\}$.

67. $f(x) = 4$.

68. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

69. $f(x) = \left\{ \frac{x}{a} \right\} (a > 0)$.

Қуйидаги функцияларнинг қатъий монотонлик оралиқларини топинг:

70. $f(x) = 2x - 1$.

71. $f(x) = x^2$.

72. $f(x) = 2^x$.

73. $f(x) = x^3$.

74. $f(x) = \arcsin x$.

75. $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

76. $f(x) = \arctg x$.

77. $f(x) = 2^{-x}$.

5-§. НУҚТАЛАРГА КЎРА ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

X тўпلامда аниқланган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Функциянинг x га мос келган $f(x)$ қийматини ҳисобласак, координаталар текислигида $M(x; f(x))$ нуқтага эга бўламиз. Текисликдаги нуқталарнинг $\{M(x; f(x)) / x \in X\}$ тўплами $y = f(x)$ функциянинг графиги дейилади.

Аналитик кўринишда берилган функциянинг нуқталарга кўра графигини ясаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) функциянинг берилган аналитик ифодасига кўра бир-бирга мос ўзгарувчиларнинг қийматлари бўйича жадвал тузилади;

2) ҳар бир ўзгарувчига мос масштаб бирлигига эга бўлган координат системаси танланади.

Одатда иккала координата ўқлари учун бир хил масштаб бирлигига эга бўлган тўғри бурчакли координаталар системаси қўлланилади;

3) координаталари жадвалдаги аргумент ва функция қийматларидан иборат бўлган нуқталар топилади;

4) топилган нуқталар текис чизиқ билан туташтирилади.

Агар функция жуфт, тоқ ёки даврий бўлса, унинг графигини ясаш бирмунча соддалашади. Жуфт функциянинг графиги OY ўққа нисбатан, тоқ функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрикдир.

Даврий функциянинг графиги унинг узунлиги битта даврга тенг бўлган қисмидаги графигини такрорлаш натижасида ҳосил бўлади.

78. Кўрсатилган тўпламларда қуйидаги функцияларнинг графигини ясанг:

1) $y = x^2 - 2x - 1, \quad x \in [-2; 4];$

2) $y = -\frac{4x}{x^2+1}, \quad x \in [-5; 5];$

3) $y = \frac{16}{x^2} - 1, \quad x \in [-4; 4];$

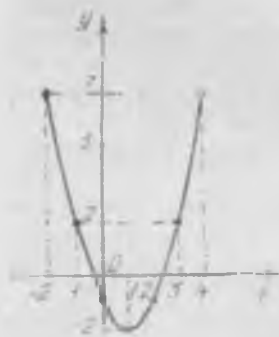
4) $y = \{x\}, \{x\} - x$ ҳақиқий соннинг каср қисми;

5) $y = \sin 2x.$

Δ 1) $x \in [-2; 4]$ ни эътиборга олиб, соддалик учун x га бутун сон қийматлар бериб ва бу қийматларга мос y нинг қийматларини ҳисоблаб жадвал тузамиз:

x	y
-2	7
-1	2
0	-1
1	-2
2	-1
3	2
4	7

Бир хил масштаб бирлигига эга бўлган тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. Сунгра жадвалдаги аргумент x нинг қийматларини абсцисса ўқи Ox га, функция y нинг қийматларини ордината ўқи Oy га жойлаб чиқиб, текисликда $(-2; 7), (-1; 2), (0; -1), (1; -2), (2; -1), (3; 2), (4; 7)$ нуқталарни топамиз, уларни кетма-кет текис силлиқ чиқиқ билан туташтирамиз, натижада ҳосил бўлган чиқиқ (2-чизма) берилган функциянинг графигини ифодалайди.



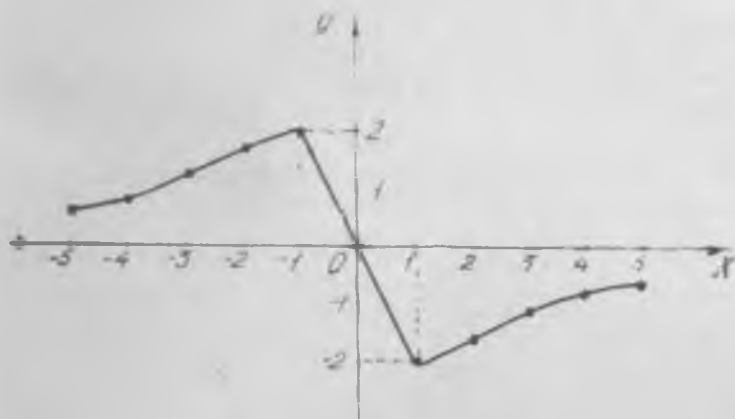
2- чизма

2) $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ функция тоқ

функциядир, чунки $y(-x) = -y(x)$. Аргументнинг ишоралари билан фарқ қилувчи қийматларида функция қийматлари ҳам ишоралари

билан фарқ қилади. Шунинг учун жадвал тузишда фақат аргументнинг мусбат қийматлари учун функция қийматларини ҳисоблаш етарли.

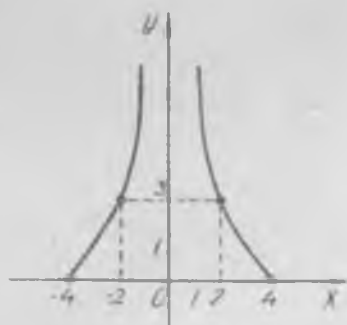
x	y
0	0
± 1	∓ 2
± 2	$\mp 8/5$
± 3	$\mp 6/5$
± 4	$\mp 16/17$
± 5	$\mp 10/13$



3-чизма

Жадвалдаги ҳар бир жуфт x ва y ларнинг қийматларини координаталар системасига киритамиз; бу нуқталарни текис силлиқ чизиқ билан туташтириб, координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган графикка эга бўламиз (3-чизма).

3) $y = \frac{16}{x^2} - 1$ функция жуфт функциядир, чунки $y(-x) = y(x)$. $[-4; 0) \cup (0; 4]$



4-чизма

да берилган жуфт функция қийматлари учун жадвал тузиб, унинг графигини ясаймиз (4-чизма).

x	y
$\pm 0,5$	63
± 1	15
± 2	3
± 4	0

$x = 0$ да функция ҳеч қандай сон қийматга эга эмас, лекин $x = 0$ га чап ва ўнг томондан яқинлашганда функция қийматлари чексиз катталашади, шунинг учун график 2 та алоҳида чексиз тармоқдан иборат бўлади.

4) $y = \{x\} = x - [x]$, бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; \infty)$ бўлиб, асосий даври 1 га тенгдир (66-мисолга қаранг), шунинг учун $y = \{x\}$ нинг графигини $[0; 1]$ да чизиб, бу графикни такрорлаймиз.

$[0; 1]$ да функция қийматлари учун жадвал тузиб, функция графигини ясаймиз (5-чизма).

x	y
0	0
0,1	0,1
0,2	0,2
0,5	0,5
0,8	0,8
1	0

Ҳақиқатан $\{0\} = 0 - [0] = 0 - 0 = 0$; $\{0,1\} = 0,1 - [0,1] = 0,1 - 0 = 0,1$; $\{0,2\} = 0,2 - [0,2] = 0,2 - 0 = 0,2$; $\{0,8\} = 0,8 - [0,8] = 0,8 - 0 = 0,8$; $\{1\} = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$.

$y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўплами $[0; 1]$ дан иборат бўлгани учун функциянинг графиги Ox ўқдан юқорида жойлашган бўлиб,



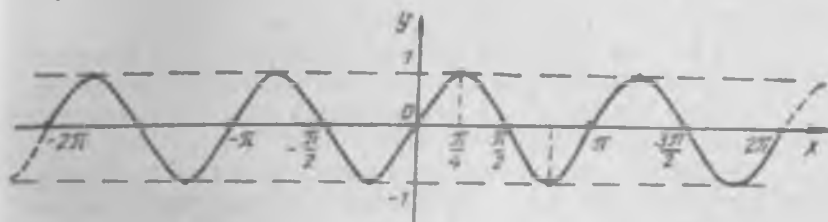
5- чизма

текисликдаги $(k, 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ нуқталар графикка қирмайди.

5) $y = \sin 2x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; \infty)$ бўлиб,

асосий даври π га тенгдир, чунки $\sin 2(x \pm \pi) = \sin(2x \pm 2\pi) = \sin 2x$ тенглик уринлидир. $[0; \pi]$ да $y = \sin 2x$ функциянинг графигини ясаб, бу графикни $(-\infty; \infty)$ да такрорлаб, $y = \sin 2x$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз.

Худди аввалги мисоллардаги каби $[0; \pi]$ да функция қийматлари учун жадвал тузамиз, жадвал устунидаги ҳар бир жуфт қийматлар учун координаталар системасида нуқта-ларни белгилаб, уларни силлиқ чизиқ билан туташтириб чиқамиз (6-чизма).



6-чизма

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0

$y = \sin 2x$ функциянинг энг кичик қиймати -1 га, энг катта қиймати 1 га тенг бўлгани учун $y = \sin 2x$ функция графиги $y = -1$ ва $y = 1$ тўғри чизиқлар орасида жойлашган бўлади.

Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг.

79. $y = 3x - 2$.

80. $y = 2x + 1$.

81. $y = x^2$.

82. $y = -x^2$.

83. $y = x^2 + 1$.

84. $y = -x^2 + 1$.

85. $y = \frac{2}{x}$.

86. $y = \frac{1}{x^2}$.

87. $y = 1 - 2^x$.

88. $y = |x| + x$.

89. $y = \frac{x}{x-1}$.

90. $y = \begin{cases} x^2, & \text{агар } -2 \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2x - 1, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 1 \leq x \leq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$

91. $y = [x]$; $[x]$ — x нинг бутун қисми.

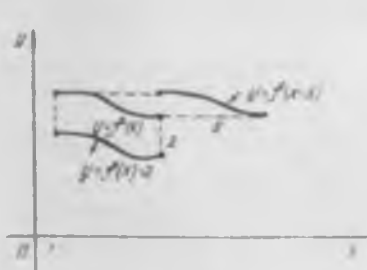
92. $y = |x| - x$.

6-§. БИРОР ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ СИЛЖИТИШ ВА ДЕФОРМАЦИЯЛАШ БИЛАН БОШҚА ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

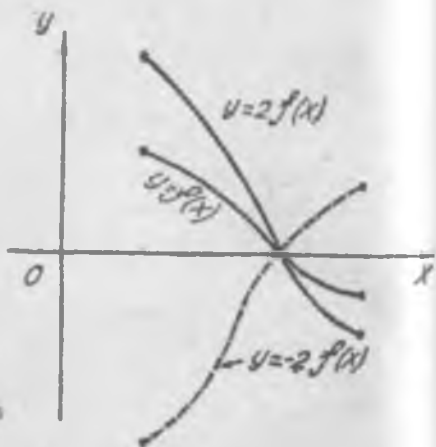
Қандайдир функциянинг графигини билган ҳолда, аргумент ва функция қийматлари учун жадвал тузмасдан, берилган функцияга нисбатан мураккаброқ бўлган функция графигини соф геометрик йўл билан ясаш мумкин. Масалан, $y = f(x)$ функциянинг графигини силжитиш ёки деформациялаш (торайтириш ёки кенгайтириш) йўли билан $y = f(x-a)$, $y = f(x) + b$, $y = Af(x)$, $y = f(kx)$, $y = Af(k(x-a)) + b$ функцияларнинг графигини ясаш мумкин.

$y = f(x-a)$ функция графиги берилган $f(x)$ функция графигини абсцисса ўқи бўйлаб a масштаб бирлиги қадар, $a > 0$ бўлса, ўнгга, $a < 0$ бўлса, чапга силжитиш (суриш) билан ҳосил қилинади (7-чизма).

$y = f(x) + b$ функциянинг графиги эса $y = f(x)$ функция графигини ордината ўқи бўйлаб $b > 0$ бўлганда юқорига, $b < 0$ бўлганда пастга b масштаб бирлиги қадар суриш билан ҳосил қилинади (7-чизма).



7-чизма

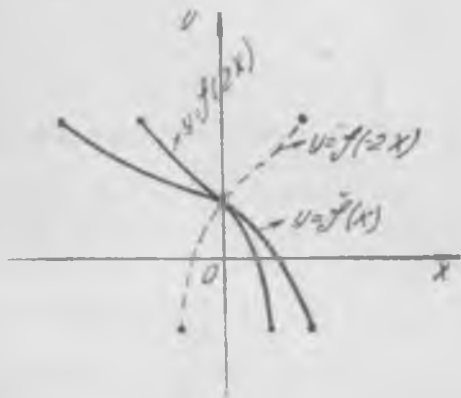


8-чизма

$y = Af(x)$ функциянинг графиги берилган $f(x)$ функция графиги нуқталари ординаталарини A коэффициентга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинади. Бунда, агар $|A| > 1$ бўлса, $Af(x)$ функция графиги нуқталарининг ординаталари абсолют қиймати бўйича $|A|$ марта ортади, агар $|A| < 1$ бўлса, $\frac{1}{|A|}$ марта камайд. $A < 0$ бўлганда $y = Af(x)$ функция

графикни абсцисса ўқига нисбатан $y = |A| \cdot f(x)$ функция гра-
фикига симметрик бўлади (8-чизма). $y = f(kx)$ функциянинг
графикни $y = f(x)$ функция графикидан ундаги нуқта абсцис-
саларини k коэффициентга бўлиш натижасида ҳосил бўла-
ди. Бунда, агар $|k| > 1$ бўлса, изланаётган графикдаги ҳам-
ма нуқталар абсциссалари абсолют қийматлари бўйича k
марта камаяди; агар $|k| < 1$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{|k|}$ марта орта-

ди; агар $k < 0$ бўлса,
у ҳолда уларнинг
ишоралари ҳам ўзга-
ради. $k < 0$ бўлганда
 $y = f(kx)$ функция
графикни ордината ўқи-
га нисбатан $y = f(|k|x)$
функция графикни би-
лан симметрик бўлади
(9-чизма). $y = f(x)$
функция графикини
курсатилган тартибда
кетма-кет сиқитиш
ва деформациялаш би-
лан мураккаброқ бўл-
ган $y = Af(k(x -$
 $- a)) + b$ (1) кури-
нишдаги функциянинг графикни яшаш мумкин.



9-чизма

93. $[0; 9]$ сегментда $y = \sqrt{x}$ функция графикдан фой-
даланиб, уни деформациялаш ва сиқитиш билан $y = 1 +$
 $+\sqrt{2x}$ функция графикни ясанг.

Δ $y = \sqrt{x}$ функция учун x ва y нинг қийматларидан
жадвал тузиб, функциянинг графикни чизамиз (10-чизма).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

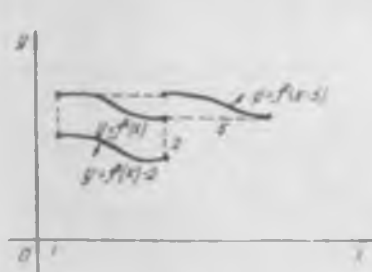
$\sqrt{x}$ ни $f(x)$ десак, у ҳолда $y = 1 + \sqrt{2x} = 1 + f(2x)$ бўлади, бун-
да $k = 2$, $a = 0$, $b = 1$ бўлиб, аввал $f(2x) = \sqrt{2x}$ функциянинг
графикни ҳосил қиламиз. Бунинг учун $f(x) = \sqrt{x}$ функция
графикдаги нуқталар ординаталарини ўзгаришсиз қолдириб,

6-§. БИРОР ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ СИЛЖИТИШ ВА ДЕФОРМАЦИЯЛАШ БИЛАН БОШҚА ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

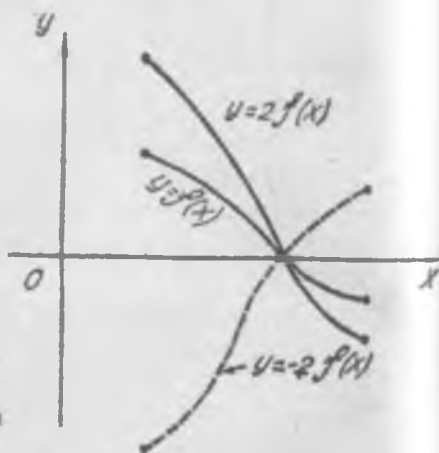
Қандайдир функциянинг графигини билган ҳолда, аргумент ва функция қийматлари учун жадвал тузмасдан, берилган функцияга нисбатан мураккаброқ бўлган функция графигини соф геометрик йўл билан ясаш мумкин. Масалан, $y = f(x)$ функциянинг графигини силжитиш ёки деформациялаш (торайтириш ёки кенгайтириш) йўли билан $y = f(x-a)$, $y = f(x) + b$, $y = Af(x)$, $y = f(kx)$, $y = Af(k(x-a)) + b$, функцияларнинг графигини ясаш мумкин.

$y = f(x-a)$ функция графиги берилган $f(x)$ функция графигини абсцисса ўқи бўйлаб a масштаб бирлиги қадар, $a > 0$ бўлса, ўнгга, $a < 0$ бўлса, чапга силжитиш (суриш) билан ҳосил қилинади (7-чизма).

$y = f(x) + b$ функциянинг графиги эса $y = f(x)$ функция графигини ордината ўқи бўйлаб $b > 0$ бўлганда юқори-га, $b < 0$ бўлганда пастга b масштаб бирлиги қадар суриш билан ҳосил қилинади (7-чизма).

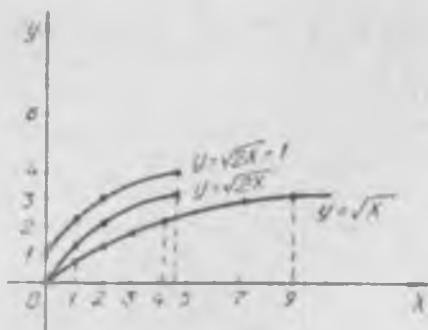


7-ЧИЗМА



8-ЧИЗМА

$y = Af(x)$ функциянинг графиги берилган $f(x)$ функция графиги нуқталари ординаталарини A коэффициентга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинади. Бунда, агар $|A| > 1$ бўлса, $Af(x)$ функция графиги нуқталарининг ординаталари абсолют қиймати бўйича $|A|$ марта ортади, агар $|A| < 1$ бўлса, $\frac{1}{|A|}$ марта камаяди. $A < 0$ бўлганда $y = Af(x)$ функция



10-чизма

абсциссаларини эса 2 марта камайтирамин сўнгра $y = \sqrt{2x}$ функция графиги нуқталарини ордината ўқи бўйлаб 1 масштаб бирлиги қадар юқорига кўчириб $y = 1 + \sqrt{2x}$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз. ▲

94. $y = \sin x$ функция графигини деформациялаш ва силжитиш ёрдамида $y = -3\sin(2x + 8)$ (1) функция графигини ясанг.

Δ (1) ифодадаги ихтиёрий функция симболи f ни тригонометрик функция симболи $\sin$ билан ифодалаб,

$$y = A \sin k(x - a) + b \quad (2)$$

га эга бўламиз. Берилган функцияни $y = -3\sin 2(x + 4)$ кўринишда ёзиб ва уни (2) ифода билан солиштирсак, параметрларнинг қуйидаги қийматларига эга бўламиз: $A = -3$, $k = 2$, $a = -4$; $b = 0$. Сўнгра умумий кўрсатмаларга кўра изланаётган графкни ясаймиз.

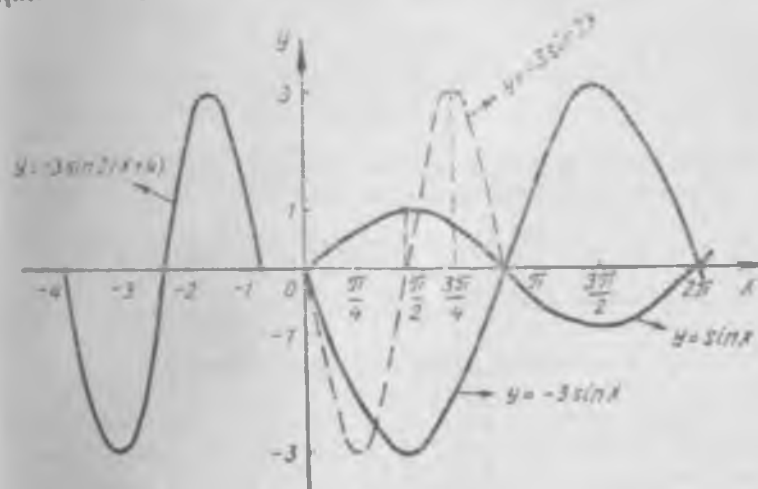
$y = \sin x$ функция графигидаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини эса абсолют қийматлари бўйича 3 марта кўпайтириб ва уларнинг ишораларини ўзгартириб, $y = -3\sin x$ функциянинг графигини ясаймиз; сўнгра $y = -3\sin x$ функция графигидаги нуқталар ординаталарини ўзгартирмай, абсциссаларини эса 2 марта камайтириб, $y = -3\sin 2x$ функциянинг графигини ясаймиз ва бу графикка тегишли нуқталарни абсцисса ўқи бўйлаб чапга 4 масштаб бирлигига кўчириб, изланаётган $y = -3\sin 2(x + 4)$ функция графигини ҳосил қиламиз. Функциянинг даврийлигидан фойдаланиб, ҳосил қилинган графкни ҳар икки томонга давом эттириш мумкин (11-чизма). ▲

95. $[-4, 4]$ да нуқталарга кўра $y = x^2$ функциянинг графигини ясанг, сўнгра уни деформациялаш ва силжитиш билан $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$ функция графигини ясанг.

Δ $[-4; 4]$ да $y = x^2$ функция қийматлари учун жадвал тузиб, функция графигини ясаймиз

x	± 4	± 3	± 2	± 1	0	$\pm 0,5$	$\pm 1,5$	$\pm 2,2$
y	16	9	4	1	0	0,25	2,25	4,84

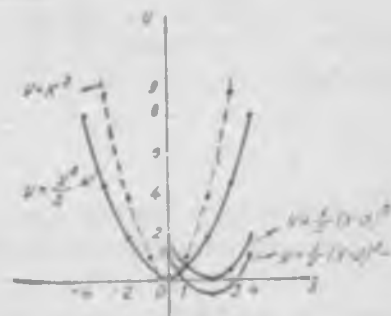
$y = x^2$ функция графигидаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини $1/2$ га кўпайтириб, $y = \frac{x^2}{2}$ функция графигини ясаймиз, сўнгра бу графикни абсцисса ўқи бўйлаб ўнг томонга 2 масштаб бирлигига тенг масофага кўчириб, $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз, бу графикни эса ордината ўқи бўйлаб 1 масштаб



11-чизма.

бирлигига тенг масофага пастга силжитсак, изланган $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$ функция графигига эга бўламиз (12-чизма). ▲

96. $[-4; 4]$ сегментда нуқталарга кўра $y = x^2$ функциянинг графигини ясанг ва уни деформациялаш ҳамда силжитиш билан



12-чизма

қуйидаги функцияларнинг графикларини (аллоқанда-алоқиди чизмаларда) ясанг:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 2x^2 - 3, & 2) y = 3 - \frac{x^2}{2}, \\ 3) y = 2(x+1)^2 + 1, & 4) y = -2(x-1)^2 - 1. \end{array}$$

97. $y = \sin x$ функция графигидан фойдаланиб, унинг деформациялаш ва силжитиш ёрдамида (алоқиди-алоқиди чизмаларда) қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 2\sin(x+1), & 2) y = 1 + 3\sin 2x, \\ 3) y = -2\sin 3(x-1), & 4) y = 2 - \sin \frac{4-x}{2}. \end{array}$$

98. $y = x^2$ функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{1}{2}x^2; & 2) y = x^2 - 1; \\ 3) y = |x^2 - 1|; & 4) y = 1 - x^2; \\ 5) y = x^2 - x + 4; & 6) y = x - x^2. \end{array}$$

99. $y = \cos x$ функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 1 - \frac{1}{2}\cos x; & 2) y = 2,3 + 4\cos(1,4 - x); \\ 3) y = -4\cos(2x + 3). \end{array}$$

7-§. СОНЛИ КЕТМА-КЕТЛИК ЛИМИТИ

1. Барча $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ натурал сонлар тўпламида аниқланган $f(n)$ функция сонлар кетма-кетлиги дейилади ва $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ (1) кўринишда ёзилади.

$f(1)$ қийматни x_1 орқали, $f(2)$ қийматни x_2 орқали ва ҳоказо $f(n)$ қийматни x_n орқали белгиласак, (1) қуйидаги кўринишга келади:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (2), \text{ бу ерда } x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$$

(2) кетма-кетлик қисқача (x_n) деб ёзилади.

(2) кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon)$ сон топилиб, барча $n > N$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда a сон (2) кетма-кетликнинг **лимити** дейилади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ каби ёзилади.

Лимитга эга бўлган кетма-кетлик **яқинлашувчи**, лимитга эга бўлмаган кетма-кетлик **узоқлашувчи** дейилади.

2. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ бўлса, у ҳолда x_n **чексиз кичик миқдор** (ёки қисқача чексиз кичик) дейилади.

3. Агар исталганча катта $\Delta > 0$ учун шундай $N = N(\Delta)$ сон топилиб, $n > N$ лар учун $|x_n| > \Delta$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда x_n **чексиз катта миқдор** (қисқача чексиз катта) дейилади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ кўринишда ёзилади.

4. Агар ихтиёрий n номер учун $|x_n| \leq M$ тенгсизлики қаноатлантирувчи M сон мавжуд бўлса (мавжуд бўлмаса), (x_n) кетма-кетлик **чегараланган** (чегараланмаган) дейилади.

Теорема. Агар x_n чексиз кичик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз катта бўлади.

Агар x_n чексиз катта бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз кичик бўлади.

5. **Теорема.** Агар $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0)$$

бўлади.

6. **Теорема.** Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ва (y_n) чегараланган бўлса, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ бўлади.

100. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ қийматларда

$$1) x_n = 1 + 0,1^n; \quad 2) y_n = (-0,1)^{-n};$$

$$3) z_n = (-0,1)^n; \quad 4) u_n = (-1)^n + 0,1^n$$

ўзгарувчиларнинг қийматларини учун жадвал тузинг ва $n \rightarrow \infty$ уларнинг ўзгариш характерини аниқланг.

1) n га $0, 1, 2, 3, \dots$ қийматлар бериб, бу қийматларда берилган ўзгарувчиларнинг қийматларини ҳисоблаб, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

n	0	1	2	3	4	5 ...	$n \rightarrow +\infty$
x_n	2	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001 ...	$x_n \rightarrow 1 + 0$
y_n	-1	-10	-100	-1000	-10000	-100000	$y_n \rightarrow -\infty$
z_n	1	-0,1	0,01	-0,001	0,0001	-0,00001 ...	$z_n \rightarrow 0$
u_n	2	-0,9	1,01	-0,999	1,0001	-0,99999	

Бу жадвални қараб чиқиб қуйидаги хулосага келамиз:

1) n нинг ортиши билан x_n ўзгарувчининг кетма-кет келган қийматлари 1 га шундай яқинлашадики, натижада ҳар қандай кичик мусбат сон ε берилмасин, n нинг етарли катта қийматларида $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тасдиқни исботлайлик.

$\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. $|x_n - 1| = 0,1^n < \varepsilon$ деб, n ни топамиз: тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаб, $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ га эга бўламиз, яъни $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, таърифга кўра $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ бўлиб, бирга ўнг томондан интилади.

2) n нинг ортиши билан (y_n) кетма-кетликнинг ҳадлари шундай камаядики, натижада n нинг етарли катта қийматларида y_n нинг абсолют қиймати аввалдан берилган мусбат катта N сонидан ҳам катта бўлади, яъни $|y_n| > N$. Бу тасдиқнинг ўринли эканини исботлайлик.

$N > 0$ катта сон берилган бўлсин. $|y_n| = 0,1^{-n} > N$ деб, бу тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаб, $n > \lg N$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $n > \lg N$ бўлганда $|y_n| > N$ тенгсизлик ўринли бўлади, бу эса y_n ўзгарувчининг чексиз катта миқдор эканлигини ифодалайди:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty.$$

3) n нинг ортиши билан (z_n) кетма-кетлик ҳадлари 0 га шундай яқинлашадики, натижада ҳар қандай кичик мусбат

сон ε берилмасин, n нинг етарли катта қийматларида $|z_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳақиқатан шундай эканини исботлайлик.

$\varepsilon > 0$ берилган бўлсин. $|z_n| = 0,1^n < \varepsilon$ деб, $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ га эга бўламиз, яъни $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда $|z_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади ва таърифга кўра $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Бунда (z_n) кетма-кетлик 0 га унинг атрофида тебраниб интилади.

4) n нинг ортиши билан (u_n) кетма-кетликнинг ҳадлари бирор аниқ сонга интилмайди, шунинг учун (u_n) кетма-кетлик лимитга эга эмас, шу билан бирга u_n чексиз катта миқдор ҳам эмас, лекин у чегараланган миқдор. ▲

Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб, қуйидагиларни исботланг:

$$101. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

$$102. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0.$$

$$103. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

$$104. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}. \text{ Қайси } n \text{ дан бошлаб } \left| \frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| < 0,0001 \text{ тенгсизлик ўринли бўлади?}$$

$$105. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}. \text{ Қайси } n \text{ дан бошлаб } \left| \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < 0,001 \text{ тенгсизлик ўринли бўлади?}$$

$$106. \text{ а) } x_n = 3n - 1; \text{ б) } x_n = \sqrt{n^2 + 2} \text{ ларнинг чексиз катта эканлигини исботланг.}$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$107. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2}$$

$$108. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-1}{2n^3+3n^2+1}$$

$$109. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$$

$$110. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^4+2n+3}$$

$$111. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

$$112. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$$

$$113. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1} \right)$$

$$114. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \sin n^2.$$

$$115. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$116. x_n = \begin{cases} 1, & \text{агар } n \text{ — жуфт бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ — тоқ бўлса.} \end{cases}$$

(x_n) кетма-кетликнинг лимити бор-йўқлигини аниқланг.

$$117. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$118. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$$

$$119. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - 1}{n + 2}$$

$$120. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \cos n^3 - \frac{3n}{6n+1} \right).$$

$$121. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} \sin n! + \frac{2n^3}{1 - 9n^2} \right).$$

8-§. ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1. $y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) топилиб, тўпламнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча x нуқталарида $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги лимити дейилади ва $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ кўринишда ёзилади.

2. Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\Delta > 0$ топилиб, $|x| > \Delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча x ларда $|f(x) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, B $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади ва $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$ кўринишда ёзилади.

Агар $x > 0$ бўлса, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$, $x < 0$ бўлса, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ кўринишда ёзилади.

3. Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) топилиб, $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$) тенгсизлиқни қаноатлантирувчи x ларда $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги чап (ўнг) лимити дейилади. Чап лимит $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$. Ҳамини ўнг лимит $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ кўринишда белгиланади.

4. $x = a$ нуқтада функция лимитга эга бўлиши учун $f(a - 0) = f(a + 0)$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теорема. Агар $x = a$ нуқтада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, у ҳолда;

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x),$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0)$$

тенгликлар ўринли булади.

Функция лимитини топаётганда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 кўринишдаги ҳоллар юз берса, улар аниқмасликлар дейилади.

122. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$ тенгликни исботланг, δ нинг қандай қийматларида $0 < |x - 3| < \delta$ тенгсизликдан $|(2x + 1) - 7| < 0,001$ тенгсизлик келиб чиқишини кўрсатинг.

Δ Ҳар бир $\varepsilon > 0$ га мос равишда шундай $\delta > 0$ топилиб, $0 < |x - 3| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча x ларда $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак. $\varepsilon > 0$ ни олайлик. $|(2x + 1) - 7| = |2x - 6| = 2|x - 3|$. Бундан $2|x - 3| < \varepsilon$, $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Агар

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олсак, $0 < |x - 3| < \delta$ тенгсизликдан $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади ва шу билан $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$ экани исботланди. Энди $\varepsilon = 0,01$ десак, $\delta = \frac{0,01}{2} = 0,005$ бўлади. Демак, $0 < |x - 3| < 0,005$ бўлганда $|(2x + 1) - 7| < 0,01$ бўлар экан. $\blacktriangle$

123. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ эканини исботланг ва $\varepsilon = 0,01$ учун Δ ни топинг.

Δ Ҳар бир $\varepsilon > 0$ га мос равишда шундай $\Delta > 0$ топилиб, $x > \Delta$ бўлганда $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$ тенгсизлиқнинг ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак, сўнгра $\varepsilon = 0,01$ учун Δ ни топишимиз керак.

$\varepsilon > 0$ берилган бўлсин. $\left| \frac{1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{x-x-1}{x+1} \right| < \varepsilon$, $\frac{1}{x+1} < \varepsilon$, $1 < \varepsilon x + \varepsilon$, $x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, демак, $\Delta = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ десак, у ҳолда $x > \Delta$ бўлганда $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли

бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ экани исботланган бўлади. Энди $\varepsilon = 0,01$ учун $\Delta > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1-0,01}{0,01} = \frac{0,99}{0,01} = 99$. Шундан қилиб, $x > 99$ бўлганда $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < 0,01$ тенгсизлик ўринли бўлар экан. ▲

124. $f(x) = \frac{5}{2-x}$ функциянинг: 1) $x \rightarrow 2-0$; 2) $x \rightarrow 2+0$ даги лимитларини топинг ва ечимини жадвал орқали тушунтиринг.

Δ 1) агар x иккига иккидан кичик бўлиб интилса, у ҳолда $2-x$ мусбат чексиз кичик миқдор бўлиб, $\frac{5}{2-x}$ эса мусбат чексиз катта, яъни $(2-x) \rightarrow +0$, $\frac{5}{2-x} \rightarrow +\infty$. Ёки $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$ бўлади. x , $2-x$, $\frac{5}{2-x}$ ўзгарувчиларнинг юқоридаги характерини қуйидаги жадвалда равшан кўриш мумкин:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999	...
$2-x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	...
$\frac{5}{2-x}$	5	50	500	5000	50000	500000	5000000	...

2) Агар $x \rightarrow 2+0$ бўлса, у ҳолда $(2-x) \rightarrow -0$.

$$\frac{5}{2-x} \rightarrow -\infty, \text{ ёки } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{5}{2-x} = -\infty.$$

Буларни қуйидаги жадвалда яққол кўриш мумкин:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001	...
$2-x$	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	-0,000001	...
$\frac{5}{2-x}$	-5	-50	-500	-5000	-50000	-500000	-5000000	...

$y = \frac{5}{2-x}$ функциянинг графиги 13-чизмада кўрсатилган. ▲

125. 1) $x \rightarrow -0$; 2) $x \rightarrow +0$; 3) $x \rightarrow 0$ да $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ функциянинг лимитини топинг.

Δ 1) Агар $x \rightarrow -0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, $\arctg \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, яъни $\lim_{x \rightarrow -0} \arctg \frac{1}{x} = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Агар $x \rightarrow +0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $\arctg \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, яъни $\lim_{x \rightarrow +0} \arctg \frac{1}{x} = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

3) Агар $x \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$, функция ҳеч қандай қийматга интилмайди, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg \frac{1}{x}$ — мавжуд эмас.

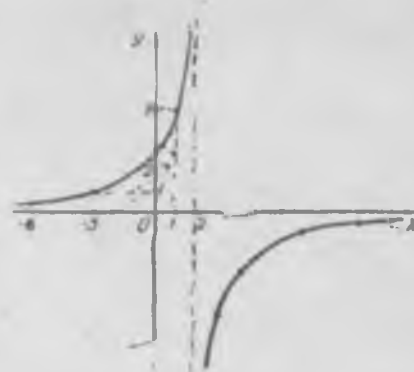
$f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ функциянинг графиги 14-чизмада берилган. ▲

126. Қуйидаги лимитларни топинг:

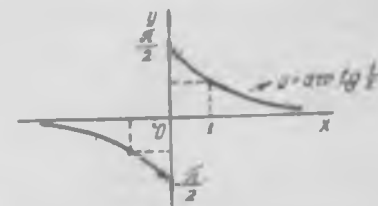
1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2x - 3 - \frac{1}{x} \right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$; 4) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$.



13- чизма



14- чизма

Δ Юқорида кўрсатилган теоремалардан кетма-кет фан ланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(2x - 3 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 3 - \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = 2 - 3 - \frac{1}{1} = -2;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 - 3(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 + 2\lim_{x \rightarrow -1} x - 5}{(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 + 2} = \frac{(-1)^2 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5}{(-1)^2 + 2} = \frac{-1 - 3 - 2 - 5}{3} = -\frac{11}{3};$$

3) $x \rightarrow 0$ да аргумент $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$, $\sin \frac{1}{x}$ функция -1 билан орасида тебраниб, ҳеч қандай аниқ сонга интилмайди, кин у чегараланган функция, яъни $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Чексиз кичик билан чегараланган миқдор $\sin \frac{1}{x}$ нинг кўпайтмаси чексиз кичикин бергани учун бу кўпайтманинг лимити 0 га бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$4) a) \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0 \text{ бўлгани учун}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow -0} 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \text{ бўлади.}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow +0} 2^{1/x} = 2^{+\infty} = +\infty \text{ бўлгани учун}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow +0} 2^{1/x}} = 0 \text{ бўлади.}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}$ мавжуд бўлмагани учун $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$ ҳам мавжуд бўлмайди. ▲

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$127. \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 5x + 6).$$

$$128. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + 3z}{\sqrt{z+3}}$$

$$129. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(2a-y)^2 - \sin y}{a^2 + y^2 + \lg 2 y}$$

$$130. \lim_{x \rightarrow \pi} 7 \cdot \sin \frac{3x}{x-\pi}$$

$$131. 1) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}.$$

§ 5. ЧЕКСИЗ КАМАЮВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ВА ЛИМИТЛАР ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

1. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ $x \rightarrow a$ да чексиз камаювчи функция дейилади (қисқача — «чексиз кичик»), $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар чексиз кичиклар.

2. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ни $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик дейилади ва $\alpha(x) = o(\beta(x))$ кўринишда ёзилади.

3. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ ($c \neq 0$, $c \neq \infty$) бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар бир хил тартибли чексиз кичиклар дейилади. Агар $c=1$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар эквивалент чексиз кичиклар дейилади ва $\alpha(x) \sim \beta(x)$ кўринишда ёзилади.

Энди лимитлар ҳақидаги теоремаларни келтирайлик:

4. Агар $x = a$ нуқта атрофида $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ лар чексиз кичик ва $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ бўлади.

5. Чекли сондаги чексиз кичикларнинг йиғиндиси чексиз кичикдир.

6. Чексиз кичик билан чегараланган катталиқ (миқдор) кўпайтмаси чексиз кичикдир.

7. Ўзгармас соннинг лимити ўзига тенг.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ га 1-ажойиб лимит дейилади, бунда x — бурчакнинг радиан ўлчови.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arc} \sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = 1$$

лар 1-ажойиб лимитдан келиб чиқади.

132. $x \rightarrow 0$ да қуйидаги функцияларнинг қайсыларининг эквивалент чексиз кичикдир:

1) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ ва $\beta(x) = \frac{1}{2}x$;

2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ ва $\beta(x) = \frac{1}{n}x$;

3) $\alpha(x) = \sin ax$ ва $\beta(x) = ax$;

4) $\alpha(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$ ва $\beta(x) = \sin x$?

Δ $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ чексиз камаювчи функциянинг $\beta(x)$ чексиз камаювчи функцияга нисбатининг лимитини топамиз; а бу лимит 1 га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз камаювчи функциялар эквивалент бўлади, акс ҳолда эквивалент бўлмайди.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{\frac{x}{2} \cdot (\sqrt[3]{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Демак, $x \rightarrow 0$ ва $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{n} \cdot x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt[3]{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\frac{1}{n} \cdot (t^n-1)} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot n}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\dots+t+1)} = \frac{n}{n} = 1,$$

демак, $x \rightarrow 0$ да $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

(бунда 1-ажойиб лимитдан фойдаланилди: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), демак, $x \rightarrow 0$ да $\sin ax \sim ax$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin x \cdot \sin 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{\sin x \cdot \sin 2x \sqrt{1+x+x^2}+1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sin 2x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty,$$

демак, 4) даги $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар ўзаро эквивалент эмас. $\blacktriangle$

Эквивалент чексиз кичиклардан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг:

133. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

134. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x+x^2}$

135. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

136. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

137. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x-x}}{\lg \sqrt{x}}$

138. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

10-§. ЛИМИТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ ЙЎЛЛАРИ

Функциянинг лимити унинг аргументининг интилган сонда аниқланган бўлишига боғлиқ эмас. Амалда эса функция лимитини топишда бу муносабат катта аҳамиятга эга.

а) Агар берилган $f(x)$ функция элементар бўлиб, x интилган сон унинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда функциянинг лимити $f(x)$ нинг x интилган сон қийматидаги хусусий қийматига тенг бўлади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

139. Функциялар лимитларини топинг:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$, $x \rightarrow -2$;

2) $\varphi(t) = t \cdot \sqrt{t^2-20} - \lg(t+\sqrt{t^2-20})$, $t \rightarrow 6$.

Δ Ҳар иккала функция ҳам элементар функциялар бўлиб, аргумент интилган сонлар уларнинг аниқланиш соҳасига кирганлиги учун уларнинг лимити функцияларнинг аргу-

ментлари интилган сон қийматидаги хусусий қийматларни тенг:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 4) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) + 4 = -20; \quad \Delta$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 6} (t\sqrt{t^2-20} - \lg(t + \sqrt{t^2-20})) = 6 \cdot 4 - \lg(6+4) = 23. \quad \Delta$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$140. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x+1}$$

$$141. \lim_{x \rightarrow 2} \lg(2+2x+x^2)$$

$$142. \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 5^{x+1} + 3)$$

$$143. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \sin 2x$$

б) Агар функцияда аргумент ∞ ка ёки унинг аниқлиниш соҳасига тегишли бўлмаган сонга интилса, бу ҳолда функция лимитини топишда алоҳида текшириш олиб бериш керак бўлади. 8, 9-§ лардаги баён қилинган лимит хоссаларига суяниб, қуйидаги кўп учрайдиган лимитлар билан:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} ax = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = +\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{агар } a < 1; \\ +\infty, & \text{агар } a > 1; \\ \infty, & \text{агар } a < -1. \end{cases}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{агар } |a| > 1; \\ +\infty, & \text{агар } 0 < a < 1; \\ \infty, & \text{агар } -1 < a < 0^*. \end{cases}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{агар } a > 1; \\ -\infty, & \text{агар } 0 < a < 1. \end{cases}$$

* $a < 0$ бўлганда x фақат бутун сон қийматларини қабул қилиши мумкин, x нинг ҳамма қийматлари учун $a < 0$ бўлганда a^x аниқланмаган.

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{агар } a > 1; \\ +\infty, & \text{агар } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x - \text{бурчакнинг радиан ўлчови}).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828.$$

Бу оддий лимитлардан формула тариқасида фойдаланиш мумкин, уларда қатнашган $a > 0$ ўзгармас сондир.

Функция лимитини топишда $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty,$

1 кўринишдаги аниқмасликлар рўй берган бўлсин. Бунда мисолларга қараб, маълум алгебраик ва тригонометрик алмаштиришлар бажариб, сўнгра лимитларни ҳисоб қилиш.

1. $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз кичик миқдорнинг нисбатидан $\left(\frac{0}{0}\right)$ иборат бўлган ҳол.

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$144. 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$$

Δ 1) x^2-9 ни кўпайтувчиларга ажратиб, касрни $(x-3)$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6};$$

бунда 0 га қисқартириш бўлгани йўқ, чунки аргумент x 3 га ҳеч қачон тенг бўлмасдан интилади, шунинг учун $x-3 \neq 0$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}.$$

Бунда $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ дан фойдаланилди, x_1, x_2 лар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизларидир.

3) Касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ратиб, касрни $1 + \cos x$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \frac{2}{3}. \blacktriangle$$

145. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

Δ 1) Касрнинг сурат ва махражини $(1 + \sqrt{x+1})$ га кўпайтириб, суратдаги иррационалликни йўқотамиз, сўнгра касрни x га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}.$$

2) Касрнинг сурат ва махражини $1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$ га кўпайтириб, сўнгра касрни $\operatorname{tg} x$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg} x})}{1 - 1 - \operatorname{tg} x} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}) = -2.$$

3) Касрнинг сурат ва махражини $(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})$ кўпайтмага кўпайтириб, сўнгра касрни $(1 - x)$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{3}{2}.$$

Бу мисолни ўзгарувчини алмаштириш усули билан ечиш мумкин. Бунинг учун $\sqrt{x}$ ва $\sqrt[3]{x}$ илдишларни хил кўрсаткичли илдишга, яъни $\sqrt{x^3}$ ва $\sqrt[3]{x^2}$ га келтиришимиз ва $\sqrt{x} = t$ белгилаш киритамиз, у ҳолда $x \rightarrow 1$ да $t \rightarrow 1$ га эга бўламиз ва

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^3}{1 - t^3} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t)(1 + t + t^2)}{(1 - t)(1 + t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + t + t^2}{1 + t} = \frac{3}{2}. \blacktriangle$$

146. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 2)}$.

Δ Бу тўртала лимит $\frac{0}{0}$ туридаги аниқмасликни ифода қилади. Бундай лимитларни топишда 1-ажойиб лимит $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ дан фойдаланамиз:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$

2) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ дан иборат тригонометрик формуладан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3) Аввал $1 - x = t$ алмаштириш киритамиз, у ҳолда $x \rightarrow 1$ да $t \rightarrow 0$, сўнгра 1-ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} t \right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{t} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

4) $\arctg(x+2) = v$ деб белгилаш киритсак, $x+2 = \lg$ га эга бўламиз, бунда $x \rightarrow -2$ да $v \rightarrow 0$ ва

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\arctg(x+2)} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(v-2)^2 - 4}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(v-4) \lg v}{v} =$$

$$= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\lg v - 4}{\cos v} \cdot \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} = -4 \cdot 1 = -4. \blacktriangle$$

$$147. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$151. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{3x^2 - x - 14}$$

$$153. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$$

$$155. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{2x^2}$$

$$157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+3x} - 3}{\sqrt{25+2x} - 5}$$

$$159. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$163. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ дан фойдаланиб, қуйидаги лимитлар
топинг:

$$165. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$167. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}$$

$$169. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$148. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$152. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$154. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$156. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$158. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$$

$$160. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x}$$

$$162. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 1}$$

$$164. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$166. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$$

$$168. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{5x}$$

$$170. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

$$171. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

$$173. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{2x^2};$$

$$172. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2 - 1}$$

$$174. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

$$175. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$$

$$176. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$$

$$177. 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{h}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$$

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$179. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$$

$$180. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \lg x$$

$$181. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 + \sin x - \cos x}$$

$$182. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$$

$$183^*. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x+1)}$$

$$184^*. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\lg x} - \sqrt{1-\lg x}}$$

II. $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз катта миқдорнинг нисбатидан $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ иборат бўлган ҳол.

Лимитларни топинг:

$$185. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 1}{5x^3 + 2x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\lg 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$$

Δ Бу иккала лимит $\frac{\infty}{\infty}$ типдаги аниқмасликни ифода
лайди.

1) Касрнинг сурат ва махражининг x нинг энг юқори да
ражаси x^3 га бўламиз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 1}{5x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{4-0}{5+0} = \frac{4}{5}.$$

$x \rightarrow \infty$ да $\frac{1}{x^3}$ ва $\frac{2}{x}$ лар чексиз кичик миқдорлардир.

Бу мисолни ўзгарувчини алмаштириш йўли билан, яъни
 $x = \frac{1}{\alpha}$ деб, бунда $x \rightarrow \infty$ да $\alpha \rightarrow 0$, ечиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 1}{5x^3 + 2x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{\alpha^3} - 1}{5 + \frac{2}{\alpha^3}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 - \alpha^3}{5 + 2\alpha} = \frac{4}{5}.$$

2) Касрни 0 га интилувчи кўпайтувчига қисқартири
мумкин бўладиган қилиб айний алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x} = \\ &= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \frac{1}{2}. \quad \Delta \end{aligned}$$

III. $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция чексиз кичик ва
чексиз катта миқдорлар кўпайтмаси ($0 \cdot \infty$) дан иборат бўл-
ган ҳол. Бу ҳол маълум алмаштиришлар ёрдамида I ёки
II ҳолга келади.

IV. $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз
катта миқдорлар айирмаси ($\infty - \infty$) дан иборат бўлган ҳол.
Бунда функцияни каср билан алмаштирилса, I ёки II
ҳолдан биринга келади.

Лимитларни топинг:

186. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{arccotg} x$;

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{3\pi}{4} + x \right)$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$.

Δ 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} =$
 $= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} (1-x)}{\sin \frac{\pi}{2} (1-x)} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$

Бунда лимитни ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ҳам ечиш
мумкин эди. $1-x = u$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \cos \frac{\pi u}{2}}{\sin \frac{\pi u}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \cos \frac{\pi u}{2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin \frac{\pi u}{2}} = \\ &= 1 \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin \frac{\pi u}{2}} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

2) $\arctg x = \alpha$ деб белгиласак, $x = \ctg \alpha$ га эга бўламиз, бунда $x \rightarrow +\infty$ да $\alpha \rightarrow +0$ ва

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \arctg x = (\infty \cdot 0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha \cdot \ctg \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \cos \alpha \cdot \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3) $\frac{\pi}{4} - x = t$ деб белгилаш билан қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{3\pi}{4} + x \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{cosec} (\pi - t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{1}{\sin (\pi - t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

4) Қасрларнинг айирмасидан ҳосил бўлган қасрни ($x-2$) га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

5) Берилган функцияни махражи 1 га тенг бўлган ҳолатида қараб, унинг суратидаги иррационалликни йўқотамиз, сўнгра қасрнинг сурат ва махражини x га қисқартирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

6) Берилган функцияни қаср шаклига келтириб, сўнгра қасрни $\sin x$ га қисқартирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \ctg x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

187. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x + 3}.$

188. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 1}.$

189. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4 + 3x^2 + 1}{0.1x^4 + 1}.$

190. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^2}{1 + x^2 + 3x^3}.$

191. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ctg 2x.$

192. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 2x \cdot \ctg x.$

193. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n}.$

194. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \lg 2^{-n}.$

195. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right).$

196. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tg x - \sec x).$

197. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}).$

198. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x + 1}}{1 - x^2}.$

199. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x).$

200. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$

V. $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция асоси 1 га, кўра ∞ га интиладиган даража (1^∞) бўлган ҳол.

Бундай функцияларнинг лимитини топишда 2-ажойиб

лимитдан фойдаланилади: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, бунда e — ир-

рационал сон бўлиб, $e = 2.7182818 \dots$

Лимитларни топинг:

$$201. 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1-2x};$$

$$3) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\lg x)^{\lg 2x}.$$

Δ 1) $n = ax$ деб белгилаш киритсак, $n \rightarrow \infty$ да $x \rightarrow \infty$ ва

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^a = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^a = e^a. \end{aligned}$$

Бу мисолни бошқача йўл билан ҳам ечиш мумкин:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a = e^a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) -2x = \alpha \text{ десак, } x \rightarrow 0 \text{ да } \alpha \rightarrow 0 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} &= \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} &= \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-2} = e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Касрнинг бутун қисмини ажратиб, } -\frac{5}{t+2} = x \text{ деб} \\ \text{олсак, бу ҳолда } t \rightarrow \infty \text{ да } x \rightarrow 0 \text{ ва } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1} &= \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{t+2}\right)^{2t+1} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{10}{x}-3} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-10} \times \\ \times \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-3} &= e^{-10} \cdot 1 = e^{-10}. \end{aligned}$$

4) $\lg x = 1 + \alpha$ деб белгилаб, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ да $\alpha \rightarrow 0$ га бўламиз ва

$$\begin{aligned} \lg 2x &= \frac{2 \lg x}{1 - \lg^2 x} = -\frac{2(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+2)}; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\lg x)^{\lg 2x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2} = 1. \blacktriangle$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$202. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x.$$

$$203. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$204. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{2x}.$$

$$205. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^x.$$

$$206. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{mx}.$$

$$207. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x} \right)^{-x}.$$

$$208. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$209. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{2 \sec x}$$

Баъзи бир ажойиб лимитлар:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Шулардан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$210. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}.$$

$$211. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$212. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}.$$

$$213. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$214. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x}$$

$$215. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$$

$$216. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1}{x^2}$$

$$217. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}$$

$$218. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - \sqrt{3 + x^2}}{x - 1}$$

11- §. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР, ФУНКЦИЯЛАРНИНГ УЗИЛИШ НУҚТАЛАРИ

1. Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

2. Аргументнинг x ва x_0 қийматлари орасидаги $x - x_0$ айрма аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta x = x - x_0$ орқали белгиланади. Функциянинг $x = x_0 + \Delta x$ ва x_0 нуқталардаги қийматларининг $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айирмаси эса функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ орқали белгиланади.

Узлуксизликнинг таърифини яна қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\text{Агар } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Теорема. $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

қўш тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар қўш тенглик бирор жойидан бузилса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси дейилади.

$x = x_0$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлсин. Агар $f(x_0 - 0)$ ва $f(x_0 + 0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ни $f(x_0 - 0)$ билан, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ ни $f(x_0 + 0)$ билан белгилаш мумкин) бир томонли чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $x = x_0$ функциянинг 1- тур узилиш нуқтаси дейилади. Узилиш нуқтасининг бундан бошқа барча ҳоллари 2- тур узилиш нуқталари дейилади.

1-тур узилиш нуқталари икки хил бўлади:

а) агар $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $x = x_0$ да функциянинг узлуксизлигини тиклаш мумкин. Бунинг учун $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ деб олнш ке-

б) Агар $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ да сакрашга эга дейилади. Сакраш катталиги $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ га тенг бўлади.

Агар $f(x)$ функция $(a; b)$ интервалнинг ҳар бир нуқта-да узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция (a, b) интервал-да узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция $(a; b)$ интервалда узлуксиз бўлиб, a нуқтанинг ўнг томонидан, b нуқтанинг чап томонидан уз-луксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда уз-луксиз дейилади.

Барча элементар функциялар ўзларининг аниқланиш со-ҳаларида узлуксиздир.

219. Элементар функциялар

$$1) y = 1 - 3x^2, \quad 2) v = \operatorname{cosec} x$$

нинг ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиз эканини кўрсатинг.

Δ Аввал функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топамиз, сўнгра узлуксизликнинг таърифидан фойдаланиб, ўша со-ҳада функциянинг узлуксизлигини кўрсатамиз.

1) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = (-\infty; \infty)$; $\forall x \in (-\infty; \infty)$ ни оламиз ва унга $\Delta x (\Delta x \neq 0)$ орттирма бе-риб, функциянинг x нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 1 - 3(x + \Delta x)^2 - (1 - 3x^2) = 1 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 - 1 + 3x^2 = -6x\Delta x - 3(\Delta x)^2.$$

Энди $\Delta x \rightarrow 0$ бўлсин, у ҳолда x нинг ҳар қандай қийматида $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ бўлади.

Демак, узлуксизликнинг таърифига кўра берилган функ-ция $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлади.

2) $v = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ функция сонлар ўқининг $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, лардан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Худди юқоридагидек муҳокама юртиб, функ-ция орттирмаси Δv ни, сўнгра $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v$ ни топамиз:

$$\Delta v = \operatorname{cosec}(x + \Delta x) - \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{1}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x + \Delta x)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} \cdot 0 = 0, \text{ бунда } x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Демак, $v = \operatorname{cosec} x$ элементар функциянинг узлуксизлиги соҳаси билан аниқланиш соҳаси бир хил экан. ▲

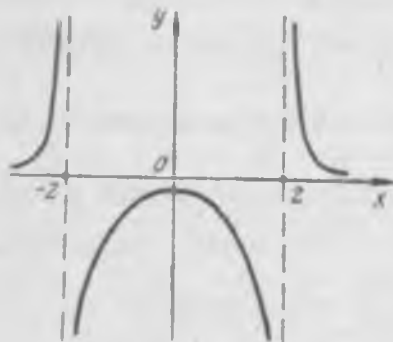
Қуйдаги функцияларни узлуксизликка текширинг, узлиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларини ясанг.

220. 1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; 2) $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$;

3) $\psi(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 4) $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{агар } x \leq 2, \\ x, & \text{агар } x > 2; \end{cases}$

5) $\Phi(x) = \begin{cases} 2x + 5, & \text{агар } -\infty < x < -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{агар } -1 \leq x < \infty. \end{cases}$

Δ 1) $f(x)$ функция сонлар ўқининг $x = \pm 2$ дан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Бу функция элементар функция бўлгани учун у ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир. $f(x)$ функция $x_{1,2} = \pm 2$ нуқталарда аниқланмаган, шунинг учун $x_{1,2}$ ни узлишга текшираимиз.



15-чизма

а) $x_1 = -2$. $f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$,
демак, $x_1 = -2$ нуқтада функция 2-тур узлишга эга. б) $x_2 = 2$. $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$, бу ҳолда ҳам 2-тур узлиш мавжуд.

Эслатма. Функцияни узлишга текширганда $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ лардан бири $+\infty$ ёки $-\infty$ чиқса, иккинчисини тек-

ширамайди, лекин функция графигини чизишда ҳар иккала ҳолатдан фойдаланиш мумкин бўлмайди.

$f(x)$ функциянинг графиги 15-чизмада тасвирланган.
2) $\varphi(x)$ функция элементар бўлиб, у сонлар ўқининг $x = 2$ дан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Демак, $\varphi(x)$ функция $x = 2$ нуқтада узлишга эга. Узлиш характерини текшираимиз:

$$\varphi(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1,$$

$$\varphi(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1.$$

Демак, $\varphi(x)$ функция $x = 2$ нуқтада 1-тур узлишнинг сакрашга эга бўлган ҳоли юз беради. Сакраш катталиги

$$\omega = |\varphi(2+0) - \varphi(2-0)| = |1 - (-1)| = 2;$$

қуйдаги функциянинг графиги 16-чизмада тасвирланган.



16-чизма

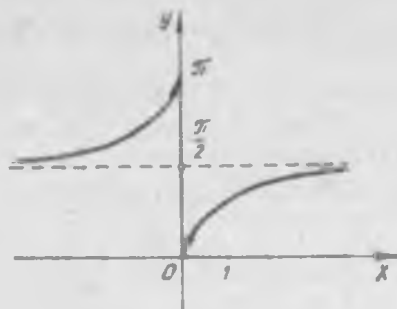
3) $\psi(x)$ функция сонлар ўқининг $x = 0$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган элементар функция. Шунинг учун сонлар ўқининг O нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарида узлуксиз ва $\psi(0)$ нуқтада функция узлишга эга. Узлиш характерини текшираимиз:

$$\psi(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi,$$

$$\psi(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(+\infty) = 0.$$

Демак, $x = 0$ да 1-тур узлишнинг сакрашга эга бўлган. Сакраш катталиги $\omega = |\psi(0+0) - \psi(0-0)| = \pi$. Функциянинг графиги 17-чизмада тасвирланган.

4) $F(x)$ функция сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида аниқланган, лекин бундан у узлуксиз ҳам деган маъно келтириб чиқмайди, чунки $F(x)$ функция 2 та ҳар хил формулар ёрдамида берилган ноэлементар функциядир. Бу функциянинг аналитик ифодасининг ўзгарган нуқтаси



17- чизма

$x = 2$ да узилишга бўлиши мумкин. $x = 2$ нуктада $F(x)$ функцияни текшираемиз.

$$F(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2, \quad F(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2.$$

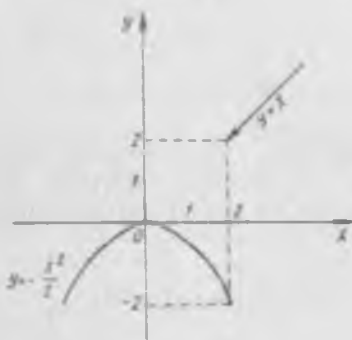
Чунки икки нуктанинг ҳамма томонида $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$, шунинг учун томонида $F(x) = x$.

Демак, $x = 2$ нуктада 1-тур узилишнинг сакраши-

га эга бўлган ҳоли юз беради ва

$$\omega = |F(2+0) - F(2-0)| = |2 - (-2)| = 4.$$

$F(x)$ функция $x = 2$ нуктадан бошқа ҳамма нукталарда узлуксиздир, чунки уни ташкил этган иккита функция элементар узлуксиз функциялардир.



18- чизма

$F(x)$ функциянинг графиги 18-чизмада тасвирланган.

5) Элементар бўлмаган $\Phi(x)$ функция сонлар ўқининг $x=0$ нуктасидан бошқа ҳамма нукталарда аниқланган. Демак, $\Phi(x)$ функция $x=0$ нуктада узилишга эга.

$x=0$ нуктада узилиш хараakterини текшираемиз:

$$\Phi(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Демак, $\Phi(x)$ функция $x=0$ нуктада 2-тур узилишга эга. $\Phi(x)$ функция аналитик ифодасининг ўзгарган нуктаси $x=-1$ нуктани текшираемиз. Бу нуктада функция узилишга эга бўлиши мумкин.

$$\Phi(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (2x+5) = 3,$$

$$-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1} \Phi(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1.$$

Демак, $\Phi(x)$ функция $x=-1$ нуктада 1-тур узилишнинг сакрашига эга. Бу ҳолига эга ва сакраши

$$\omega = \Phi(-1+0) - \Phi(-1-0) = 4.$$

Шунинг бошқа нуктада берилган функция узлуксиз. Унинг графиги 19-чизмада кўрсатилган. ▲

Таърифга биноан қуйидаги функцияларнинг узлуксизлиги исботланг:

$$221. f(x) = x^2 - x + 2, \quad \text{барча } x \in (-\infty; \infty) \text{ ларда.}$$

$$222. f(x) = \sin 2x, \quad \text{барча } x \in (-\infty; \infty) \text{ ларда.}$$

$$223. f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{барча } x \in (2; \infty) \text{ ларда.}$$

$$224. f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{барча } x \in [0; \infty) \text{ ларда.}$$

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нукталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларини ясанг.

$$225. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

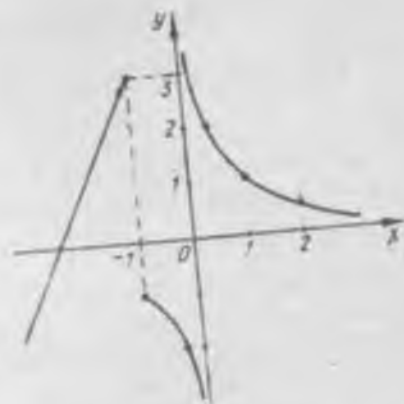
$$226. f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{агар } -1 \leq x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } 1 < x < 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$227. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ 3, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

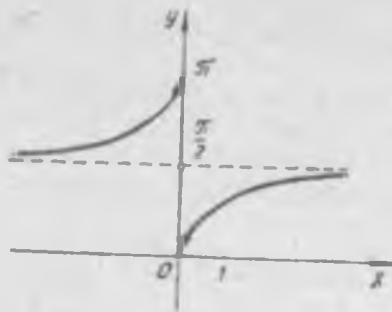
$$228. f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ 3, & \text{агар } 2 \leq x < 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$229. f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 230. f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

$$231. f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}, \quad 232. f(x) = \frac{4}{4 - x^2}.$$



19- чизма

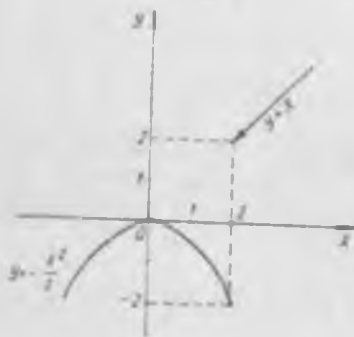


17- чизма

га эга бўлган ҳоли юз беради ва

$$\omega = |F(2+0) - F(2-0)| = |2 - (-2)| = 4.$$

$F(x)$ функция $x=2$ нуқтадан бошқа ҳамма нуқталарда узлуксиздир, чунки уни ташкил этган иккита функция элементар узлуксиз функциялардир.



18- чизма

Демак, $\Phi(x)$ функция $x=0$ нуқтада 2-тур узилишга эга. $\Phi(x)$ функция аналитик ифодасининг ўзгарган нуқтаси $x=0$ нуқтани текшираимиз. Бу нуқтада функция узилишга эга бўлиши мумкин.

$$\Phi(-1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 5) = 3.$$

$x=2$ да узилишга эга бўлиши мумкин. $x=2$ нуқтада $F(x)$ функцияни текшираимиз.

$$F(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -2, \quad F(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2.$$

Чунки икки нуқтанинг ҳар бири томонида $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Унг томонида $F(x) = x$.

Демак, $x=2$ нуқтада 1-тур узилишнинг сакраши.

$$\Phi(-1+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \Phi(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1.$$

Демак, $\Phi(x)$ функция $x=-1$ нуқтада 1-тур узилишнинг сакрашига эга. Бу ҳолига эга ва сакрашига эга.

$$\Phi(-1+0) = -\Phi(-1-0) = 4.$$

Функциянинг бошқа нуқталарда берилган функциянинг графиги чизмада кўрсатилган. ▲

Таърифга биноан қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини исботланг:

221. $f(x) = x^2 - x + 2$, барча $x \in (-\infty; \infty)$ ларда.

222. $f(x) = \sin 2x$, барча $x \in (-\infty; \infty)$ ларда.

223. $f(x) = \frac{1}{x-2}$, барча $x \in (2; \infty)$ ларда.

224. $f(x) = \sqrt{x}$, барча $x \in [0; \infty)$ ларда.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларини ясанг.

225. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

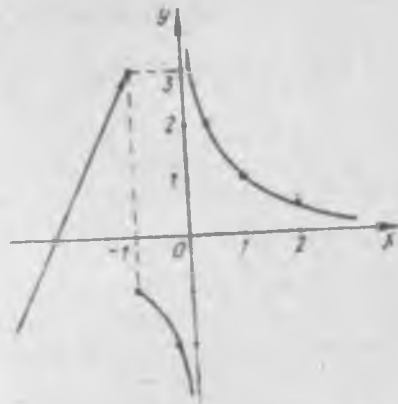
226. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{агар } -1 \leq x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } 1 < x < 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$

227. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ 3, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$

228. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ 3, & \text{агар } 2 \leq x < 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$

229. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 230. $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

231. $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$, 232. $f(x) = \frac{4}{4 - x^2}$.



19- чизма

II боб. КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АРИФМЕТИК ТҮРТ АМАЛ

Комплекс сон деб $a + bi$ ифодага айтилади, бу ерда a ва b ҳақиқий сонлар, i — мавҳум бирлик бўлиб, у

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ёки} \quad i^2 = -1$$

тенгликлар билан аниқланади; a — комплекс соннинг ҳақиқий қисми, bi — мавҳум қисми дейилади. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган икки комплекс сон: $a + bi$ ва $a - bi$ ўзаро қўшма дейилади. Қўшнча $a + bi$ комплекс сон битта α ҳарфи билан белгиланади.

$$\alpha = a + bi.$$

$a + bi$ комплекс соннинг ҳақиқий қисмининг $a = \operatorname{Re} \alpha$ билан, мавҳум қисмининг коэффициентини $b = \operatorname{Im} \alpha$ билан белгилайдилар. α комплекс соннинг $a + bi$ кўринишидаги ёзувига унинг алгебранинг шакли дейилади.

1. Агар иккита $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ ва $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ комплекс сонда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ бўлса, бу икки комплекс сон тенг дейилади ($\alpha_1 = \alpha_2$). Агар $\alpha = a + bi$ комплекс сонда $a = 0$, $b = 0$ бўлса, бу комплекс сон 0 га ($\alpha = 0$) тенг бўлади. Агар $\alpha = a + bi$ комплекс сонда $b = 0$ бўлса, ҳақиқий сон ҳосил бўлади: $a + 0 \cdot i = a$; агар $a = 0$ бўлса, $0 + bi = bi$ соф мавҳум сон дейилади.

2. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ ва $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси деб ҳақиқий қисми қўшилувчи комплекс сонлар ҳақиқий қисмларининг йиғиндисига, мавҳум қисми уларнинг мавҳум қисмларининг йиғиндисига тенг бўлган α комплекс сонга айтилади ва қуйидагича ёзнади:

$$\alpha = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \quad (1)$$

Комплекс сонларни қўшиш қуйидаги хоссаларга эга:

1) ассоциативлик: $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$;

2) коммутативлик: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$.

— $a - bi$ комплекс сон $a + bi$ комплекс сонга қарама-қарши сон дейилади. α комплекс сонга қарама-қарши комплекс сон $-\alpha$ деб ёзнади.

3. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ комплекс сондан $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ комплекс соннинг айирмаси деб α_1 билан α_2 га қарама-қарши бўлган $-\alpha_2$ сонларнинг йиғиндисидан иборат бўлган комплекс сонга айтилади:

$$\alpha = \alpha_1 + (-\alpha_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \quad (2)$$

1. $\alpha_1 = a_1 + b_1i$ ва $\alpha_2 = a_2 + b_2i$ комплекс сонларнинг айтадигани деб

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (3)$$

лекс сонга айтилади.

Комплекс сонларни кўпайтирганда $i^2 = -1$, $i^3 = (-1) \times$

$= -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = 1 \cdot i$ ва ҳоказо, уму-

k бутун бўлганда $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$,

$i^{4k+3} = -i$ эканлигини эътиборга олиш керак.

Комплекс сонларни кўпайтириш қўйидаги хоссаларга

ассоциативлик: $(\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot \alpha_3 = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \alpha_3)$,

коммутативлик: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1$.

3. α_1 комплекс соннинг α_2 ($\alpha_2 \neq 0$) комплекс сонга бў-
лиши деб $\alpha_1 = \alpha \cdot \alpha_2$ тенгликни қаноатлантирадиган α
лекс сонга айтилади ва у қўйидаги формула билан
айтилади:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i. \quad (4)$$

Комплекс сонлар учун қўшиш ва кўпайтиришга кўра
дистрибутивлик хоссаси ўринлидир: $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \alpha_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 +$
 $\alpha_2 \cdot \alpha_3$.

6. Қўшма комплекс сонлар қўйидаги хоссаларга эга:

1) $\alpha = a + bi$ ва $\bar{\alpha} = a - bi$ комплекс сонларнинг кў-
лиши ҳақиқий сонни беради:

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2) Агар $\bar{\alpha}$ сон α комплекс сонга қўшма бўлса, у ҳол-
да α комплекс сонга қўшма комплекс сон α сонни беради:

$$(\bar{\alpha}) = \alpha.$$

3) Агар $\bar{\alpha}_1$ сон α_1 комплекс сонга, $\bar{\alpha}_2$ сон α_2 комплекс
сонга қўшма бўлса, у ҳолда қўйидаги тенгликлар ўринли
лидир:

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)}, \quad \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} = \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} \right), \quad \alpha_2 \neq 0.$$

4) $\alpha = a + bi$, $\bar{\alpha} = a - bi$ қўшма комплекс сонлар учун

$$a = \operatorname{Re} \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad b = \operatorname{Im} \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

ўринли бўлади.

233. $\alpha_1 = -3 + 2i$ ва $\alpha_2 = 13 - i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг.

$$\begin{aligned} \Delta \quad \alpha_1 + \alpha_2 &= (-3 + 2i) + (13 - i) = 10 + i, \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= (-3 + 2i)(13 - i) = -39 + 3i + \\ &\quad + 26i + 2 = -37 + 29i. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

234. $\alpha_1 = a + bi$ ва $\alpha_2 = -a - bi$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг.

$$\begin{aligned} \Delta \quad \alpha_1 + \alpha_2 &= (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0, \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= (a + bi)(-a - bi) = -a^2 - abi - abi - b^2i^2 = \\ &= -a^2 + b^2 - 2abi = b^2 - a^2 - 2abi. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

235. $\alpha_1 = -3 + 2i$ ва $\alpha_2 = 13 - i$ комплекс сонлар берилган. $\alpha_2 - \alpha_1$ айирма ва $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ бўлинишни топинг.

$$\begin{aligned} \Delta \quad \alpha_2 - \alpha_1 &= (13 - i) - (-3 + 2i) = 16 - 3i, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= \frac{13 - i}{-3 + 2i} = \frac{(13 - i)(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = \\ &= \frac{-39 - 26i + 3i - 2}{9 + 4} = \frac{-41}{13} - \frac{23}{13}i, \end{aligned}$$

бунда касрнинг сурат ва махражини қўшма комплекс сонига кўпайтирилди, чунки (4) формулани эсда сақлаш қийин. $\blacktriangle$

236. $\alpha = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ комплекс сонни алгебранг кўринишда ёзинг.

$$\begin{aligned} \Delta \quad \alpha &= \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i} = \\ &= \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Қуйидаги амалларни бажаринг:

237. 1) $(5 + 4i) + (3 - 7i)$;
 2) $(2 - 8i) + (5 - i)$;
 3) $(2 + 5i) + (-2 - 2i)$;
 4) $(4 + 3i) + (-4 + 3i)$;

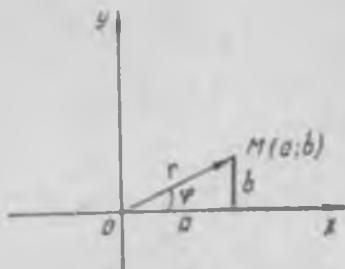
- 5) $(2 - 4i) + (-2 + 4i)$;
 6) $(1 + i) + (2 + i) + (3 + i)$;
 7) $(0,5 - 3,2i) + (1,5 - 0,8i) + (-4 - i)$;
 8) $(3x - 4yi) + (-x + 2yi)$.
 1) $(5 + 4i) - (2 - 3i)$;
 2) $(2 + i) + (3 - 6i) - (1 - i)$;
 3) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right)$;
 4) $(0,8 - 0,2i) + (0,1 - 1,3i) - (1,5 + 0,7i) -$
 $- (2,3 - 0,6i)$;
 5) $(2a - 3bi) + (-a - bi) + (4a + 2bi) -$
 $- (2a - 5bi)$;
 6) $(m - ni) + (3m - 2ni) - ((-m - ni) -$
 $- (5m + 10ni))$.

239. 1) $2i \cdot 3i$;
 2) $5i \cdot (-4i)$;
 3) $(1 - i) \cdot (-4)$;
 4) $(-3 + 4i) \cdot 2i$;
 5) $(2 - 3i)(4 - i)$;
 6) $(1 - 2i)(5 - i)$;
 7) $(5 + i)(5 - i)$;
 8) $(3 + 2i)(3 - 2i)$;
 9) $(0,5 - i)(0,5 + i)$.

240. 1) $8i : 4$; 5) $\frac{5 + 2i}{1 - 2i}$;
 2) $10i : 5i$; 6) $\frac{7 - 3i}{1 + 3i}$;
 3) $2i : (-3i)$; 7) $\frac{5 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$;
 4) $\frac{2i}{1 - i}$; 8) $\frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{6} - 2i}$.

2-§. КОМПЛЕКС СОННИНГ ГЕОМЕТРИК ТАСВИРИ ВА УНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ШАҚЛИ. МУАВР ФОРМУЛАСИ

Ҳар қандай комплекс сон $a + bi$ ни *Оху* текисликда
 координатлари a ва b бўлган $A(a, b)$ нуқта шаклида тас-
 вirlaш мумкин (20-чизма) ва аксинча, *Оху* текисликдаги
 ҳар қандай $A(a, b)$ нуқтани $a + bi$ комплекс соннинг гео-



20-чизма

метрик образи деб қараш мумкин. Комплекс сонларни текисликда тасвирлаганда Oy ўқ мавжум, Ox ўқ эса ҳақиқий ўқ деб олинади. Координаталар бошини қутб, Ox ўқнинг мусбат йўналишини қутб ўқи деб олиб, $A(a; b)$ нуқтанинг қутб координаталарини φ ва $r (r \geq 0)$ билан белгилаймиз, у ҳолда

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5)$$

формулага эга бўламиз, бунда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$ бўлиб, r га $a + bi$ комплекс соннинг модули, φ га эса комплекс соннинг аргументи дейилади, $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ га $a + bi$ комплекс соннинг тригонометрик шакли дейилади.

$$\text{Бурчак } \varphi \left\{ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}$$

шартлардан топилади. $a + bi$ комплекс соннинг модулини $|a + bi|$ деб ҳам белгилаш мумкин, у ҳолда $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Одатда бурчак φ нинг $[-2\pi; 0]$ ёки $[0; 2\pi]$ даги қиймати олинади.

241. 1) $\alpha = -1 - i$; 2) $\beta = -2$;
 3) $\gamma = i$; 4) $\lambda = 1 + i$;
 5) $\nu = \sqrt{3} - i$

комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзинг.

Δ 1) $r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,
 $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлгани учун $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$
 бўлиб, $\alpha = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$.

2) $r = |-2| = 2$, $\sin \varphi = \frac{0}{2} = 0$, $\cos \varphi = \frac{-2}{2} = -1$,
 демак, $\varphi = \pi$ ва $\beta = -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

3) $r = |i| = \sqrt{1^2} = 1$, $\sin \varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\cos \varphi = \frac{0}{1} = 0$,
 демак, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ва $\gamma = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

4) $r = |1 + i| = \sqrt{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 демак, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\lambda = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

$$5) r = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2, \sin \varphi = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

демак, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ ва $v = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$. ▲

$$242. 1) \alpha_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{4} - 2i \sin \frac{\pi}{4};$$

$$2) \alpha_2 = -\cos \frac{\pi}{17} + i \sin \frac{\pi}{17}$$

сонларни тригонометрик кўринишда ифодаланг.

Δ 1) α_1 ва 2) α_2 комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзиш учун уларнинг модуль ва аргументларини топиш шарт эмас.

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right), \quad -\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right),$$

$$-\cos \frac{\pi}{17} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{17} \right) = \cos \frac{16\pi}{17}; \quad \sin \frac{\pi}{17} =$$

$$= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{17} \right) = \sin \frac{16\pi}{17}$$

формулалардан фойдалансак, α_1 ва α_2 сонларнинг тригонометрик кўринишига эга бўламиз:

$$\alpha_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right),$$

$$\alpha_2 = \cos \frac{16\pi}{17} + i \sin \frac{16\pi}{17}. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзинг:

243. 1) 1; 2) $-i$;
 3) -2 ; 4) $2 + 2\sqrt{3}i$;
 5) $\sqrt{3} + i$; 6) $12i - 5$;
 7) $3i$; 8) $-2i$;
 9) $3i - 4$; 10) $1 - i$.

Тригонометрик кўринишда берилган икки комплекс сон кўпайтмаси шундай комплекс сонки, унинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига, аргументи эса кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (6)$$

Агар n натурал сон бўлиб, $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ тригонометрик кўринишдаги комплекс сон бўлса, у ҳолда

$$\alpha^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (7)$$

ўринли бўлади. Бунга *Муавр формуласи* дейилади.

Тригонометрик кўринишда берилган икки комплекс сон бўлинмасининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг бўлинмасига тенг бўлиб, бўлинманинг аргументи бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмасига тенгдир, яъни

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (8)$$

ўринлидир.

$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$ илдиз қуйидаги формула билан топилади:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (9)$$

бунда n — натурал сон, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Икки ҳадли тенгламаларни ечишда (9) формула жуда кўп қўлланилади.

244. $x^4 + 1 = 0$ тенгламанинг барча илдизларини топинг.

Δ Бу тенгламани ечишда (9) формуладан фойдаланамиз.

$$x^4 = -1, \quad x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}.$$

$$k = 0: x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i);$$

$$k = 1: x_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1 + i);$$

$$k = 2: x_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (1 + i);$$

$$k=3: x_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Топилган x_1, x_2, x_3, x_4 ларнинг исталган бирини 4- даражага кўтарсак, — 1 ҳосил бўлади.

245. $x^6 + 64 = 0$ тенгламани ечинг.

$$\Delta x^6 = -64. \quad x = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}(\cos \pi + i \sin \pi) = \\ = \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$x_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i;$$

$$x_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i; \quad x_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ = -\sqrt{3} + i;$$

$$x_4 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$x_5 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i;$$

$$x_6 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i. \quad \blacktriangle$$

246. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ);$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{100};$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^8;$

4) $\frac{\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ}{\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ};$

5) $\frac{-\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}.$

Δ 1) мисолни ечишда (6) формуладан фойдаланамиз:

$$5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) = \\ = 5 \cdot 3 (\cos(40^\circ + 50^\circ) + i \sin(40^\circ + 50^\circ)) = 15(\cos 90^\circ + \\ + i \sin 90^\circ) = 15i.$$

2) мисолни ечишда аввал $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ни тригонометрик формада ёзиб, сўнгра (7) Муавр формуласидан фойдаланамиз:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ);$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100} = (\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))^{100} = \cos(-3000^\circ) + i\sin(-3000^\circ) = \cos 3000^\circ - i\sin 3000^\circ = \cos 120^\circ - i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) мисолни ҳам худди 2) мисол каби ечамиз:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = (\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^8 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1 + i \cdot 0 = 1.$$

4) мисолни ечишда (8) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ}{\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ} &= \cos(240^\circ - 300^\circ) + i\sin(240^\circ - 300^\circ) = \\ &= \cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ) = \cos 60^\circ - i\sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

5) қасрнинг сурат ва махражидаги сонни тригонометрик кўринишдаги комплекс сон сифатида ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{-\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ} &= \frac{-\cos(180^\circ - 80^\circ) + i\sin(180^\circ - 80^\circ)}{\cos(-40^\circ) + i\sin(-40^\circ)} = \\ &= \frac{\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ}{\cos(-40^\circ) + i\sin(-40^\circ)} = \cos(80^\circ - (-40^\circ)) + \\ &+ i\sin(80^\circ - (-40^\circ)) = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Қуйидаги амалларни бажаринг:

247. 1) $2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) \cdot 7(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$;

2) $3(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \cdot 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$;

3) $4\left(\cos \frac{\pi}{8} + i\sin \frac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos \frac{7\pi}{8} + i\sin \frac{7\pi}{8}\right)$;

4) $7\left(\cos \frac{8\pi}{15} + i\sin \frac{8\pi}{15}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right) \times$
 $\times 2\left(\cos \frac{4\pi}{5} + i\sin \frac{4\pi}{5}\right)$;

5) $\frac{\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$;

6) $\frac{2(\cos 107^\circ + i\sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ)}$;

$$7) \frac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ};$$

$$8) \frac{\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ}{\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ};$$

$$9) i^{18};$$

$$10) i^{30};$$

$$11) (-i)^{10};$$

$$12) (-i)^{21}.$$

248. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

$$1) x^2 + 1 = 0;$$

$$2) x^2 + 27 = 0;$$

$$3) x^2 - 1 = 0;$$

$$4) 8x^3 + 1 = 0;$$

$$5) x^4 - 16 = 0;$$

$$6) x^6 - 9x^3 + 8 = 0;$$

$$7) x^5 = i.$$

249. Агар x_1, x_2, x_3 сонлар $x^3 - 1 = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликларнинг тўғри эканлигини кўрсатинг:

$$a) x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad б) x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1.$$

3-§. ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСИ.

КОМПЛЕКС СОННИНГ КЎРСАТКИЧЛИ ШАКЛИ

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (1)$$

га Эйлер формуласи дейилади, бунда $e = 2,71828 \dots$, y — ҳақиқий, i — мавҳум сонлар. (1) да y ни $-y$ билан алмаштирсак,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (2)$$

га эга бўламиз.

(1) ва (2) дан:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (3)$$

осил бўлади.

Комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ёзиш учун уни аввал тригонометрик шаклда ёзиб оламиз, сўнгга Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}. \quad (4)$$

250. $1, i, -2, 1+i, \sqrt{3}-i$ сонларни кўрсаткичли шаклда ифодаланг.

$$\Delta \quad 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i}; \quad i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2} i}; \quad -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i};$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i};$$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right) = 2e^{\frac{11}{6} \pi i}. \quad \blacktriangle$$

251. Қуйидаги сонларни кўрсаткичли шаклда ифодаланг:

1) $-i$;

2) $\sqrt{3} + i$;

3) $2 + 2\sqrt{3}i$;

4) $-2i$;

5) $3i$;

6) 2 .

III БОБ. БИР АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. ҲОСИЛА ТУШУНЧАСИ

1. $y = f(x)$ функция X тўпلامда берилган ва $x \in X$ бўлсин. x аргументга Δx ($\Delta x > 0$ ёки $\Delta x < 0$) орттирма берамиз ҳамда $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги орттирмаси $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ ни топамиз.

$y = f(x)$ функция орттирмаси Δy нинг мос аргумент орттирмаси Δx га бўлган нисбатининг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимитига унинг x нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ лардан бири билан белгиланади.

2. Функция ҳосиласини топиш қондаси.

$y = f(x)$ функция ҳосиласини топиш учун қуйидаги ишларни бажариш керак: 1) $f(x)$ функциянинг $(x + \Delta x)$ даги қиймати $f(x + \Delta x)$ ни топамиз;

2) функциянинг кейинги қиймати $f(x + \Delta x)$ дан унинг олдинги қиймати $f(x)$ ни айириб, функция орттирмаси Δy ни топамиз:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) функция орттирмаси Δy ни аргумент орттирмаси Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини излаймиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3. Бир томонли ҳосилалар.

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

лар мос равишда $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларни дейилади.

$f(x)$ функция x нуқтада ҳосиллага эга бўлиши учун $f'_+(x) = f'_-(x)$ нинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Функция ҳосиласини топиш амалига функцияни дифференциаллаш дейилади.

4. Дифференциаллашнинг асосий қондалари.

Агар C — ўзгармас ва $u(x)$, $v(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда

$$1) (C)' = 0.$$

$$2) (x)' = 1.$$

$$3) (C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

$$4) (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$5) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$6) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}.$$

$$7) \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$$

$$5. \text{ Мураккаб функция ҳосиласи: } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

$$6. \text{ Тескари функция ҳосиласи: } y'_x = \frac{1}{x'_{y}}.$$

7. Дифференциаллашнинг асосий формулалари:

$$1) (u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'.$$

$$2) (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$3) (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$4) (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$5) (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$6) (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$7) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

$$8) (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$9) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$10) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$$11) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

$$12) (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

$$13) (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$$

$$14) (\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

$$15) (\operatorname{cth} u)' = \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}.$$

$$16) (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

252. 1) $y = \sqrt[3]{x}$ функция, $x = 0$ ва $\Delta x = 0,001$ берилган.
 Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

2) $y = \sqrt{x}$ функция, $x = 0$ ва $\Delta x = 0,0001$ берилган.
 Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

3) $y = \lg x$ функция, $x = 100000$ ва $\Delta x = -90000$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ дан фойдаланамиз:

$$1) f(x) = \sqrt[3]{x}; \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x};$$

$$x = 0 \text{ ва } \Delta x = 0,001 \text{ учун } \Delta y = \sqrt[3]{0 + 0,001} - \sqrt[3]{0} = 0,1;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,1}{0,001} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ бўлади.}$$

$$2) \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}; \quad x = 0,$$

$$\Delta x = 0,0001 \text{ учун } \Delta y = \sqrt{0 + 0,0001} - 0 = 0,01; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{0,01}{0,0001} = 100 \text{ бўлади.}$$

$$3) f(x) = \lg x; \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \lg(x + \Delta x) - \lg x;$$

$$x = 100000 \text{ ва } \Delta x = -90000 \text{ учун}$$

$$\Delta y = \lg(100000 - 90000) - \lg 100000 = \lg 10000 - \lg 100000 = 4 - 5 = -1;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{-90000} = \frac{1}{90000} \text{ бўлади. } \blacktriangle$$

253. Таърифдан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$1) y = 5x^2 - 3x; \quad 2) y = -\frac{1}{x};$$

$$3) y = \sqrt{x}; \quad 4) y = \sin 3x.$$

$$\Delta \quad 1) y = f(x) = 5x^2 - 3x; \quad \text{а) } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$= 5(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (5x^2 - 3x) = 5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 5x^2 + 3x = 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 3\Delta x;$$

$$\text{б) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x - 3;$$

$$\text{в) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (10x + 5\Delta x - 3) = 10x - 3.$$

Демак, $\frac{dy}{dx} = 10x - 3$.

$$2) y = f(x) = -\frac{1}{x}; \text{ а) } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \\ = \frac{1}{x + \Delta x} - \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x + \Delta x} + \frac{1}{x} = \frac{-x + x + \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \\ = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}; \text{ б) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = \frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$\text{в) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x + \Delta x)} = \frac{1}{x^2},$$

демак, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$.

$$3) y = f(x) = \sqrt{x}; \text{ а) } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \\ = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}, \text{ б) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}; \text{ в) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \text{ демак, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$4) y = f(x) = \sin 3x; \text{ а) } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \\ = \sin 3(x + \Delta x) - \sin 3x = 2 \cos \frac{3x + 3\Delta x + 3x}{2} \times \\ \times \sin \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{2} = 2 \cos \left(3x + \frac{3}{2}\Delta x\right) \cdot \sin \frac{3\Delta x}{2};$$

$$\text{б) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x};$$

$$\text{в) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cos \left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}} \cdot \frac{3}{2} = 3 \cos 3x,$$

демак, $\frac{dy}{dx} = 3 \cos 3x$. ▲

Бевосита таърифдан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$254. 1) y = x^2 + 3x - 2; \quad 2) y = \frac{1}{x^2};$$

- 3) $y = \sqrt{4x+1}$; 4) $y = \cos 2x$;
 5) $y = \lg 2x$; 6) $y = \frac{1}{x}$;
 7) $y = x^3$; 8) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

255. $y = |x|$ функциянинг $x = 0$ да бир томонли ҳосилаларини топинг. Бу функция $x = 0$ да ҳосиллага эгами?

$$\Delta \quad f(x) = |x|; \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Демак, $y = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада бир томонли ҳосилаларга эга, лекин $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ бўлгани учун бу функция $x = 0$ нуқтада ҳосиллага эга эмас.

256. $y = |2x - 1|$ функция $x = \frac{1}{2}$ нуқтада ҳосиллага эгами? Текширинг.

257. $y = |\ln x|$ функциянинг $x = 1$ да бир томонли ҳосилаларини топинг.

258. $y = \frac{x^3}{3} - 1$ функциянинг $x = 2$ нуқтада бир томонли ҳосилаларини топинг.

259. Дифференциаллашнинг қонда ва формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$1) y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^2};$$

$$2) z = x^5 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right);$$

$$3) \varphi(t) = \frac{10}{a \sin t - b \cos t};$$

$$4) y = (1 + 5x)^3;$$

$$5) y = \cos^2 x;$$

$$6) y = \sin x^2;$$

$$7) y = \sqrt[3]{2+x^4},$$

$$8) y = \arcsin \frac{2x}{x+1}.$$

Δ 1) Каср ва манфий кўрсаткични киритиб, берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз: $y = x^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3} x^{-3}$. Дифференциаллашнинг асосий формулаларини

$$\text{қўллаб, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} - (-2) x^{-3} + \frac{1}{3} (-3) x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \text{ га эга бўламиз.}$$

2) 1-усул. Дифференциаллаш формуласидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} z' &= (x^5)' \cdot \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right) + \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right)' \cdot x^5 = \\ &= 5x^4 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right) + x^5 \left(-\frac{1}{3} + 6x\right) = \\ &= 10x^4 - 2x^5 + 21x^3. \end{aligned}$$

2-усул. Аввал қавсларни очиб, сўнгра йиғиндидан ҳосил оламиз: $z = 2x^5 - \frac{x^6}{3} + 3x^7$; $z' = 10x^4 - 2x^5 + 21x^6$.

Кўриниб турибдики, 2-усул натижага тезроқ олиб келди. Шунинг учун функциялардан ҳосил олганда натижага тезроқ эриштирадиган йўллارни излаш керак.

$$\begin{aligned} 3) \varphi'(t) &= \left(\frac{10}{(a \sin t - b \cos t)^2}\right)' = -\frac{10(a \sin t - b \cos t)'}{(a \sin t - b \cos t)^3} = \\ &= -\frac{10(a \cos t + b \sin t)}{(a \sin t - b \cos t)^3}. \end{aligned}$$

Бундан кейинги (4—8) мисолларни ечишда мураккаб функция ҳосиласининг формуласидан фойдаланамиз.

$$4) y = u^3, u = 1 + 5x \text{ десак, у ҳолда } \frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 5;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 5 = 15(1+5x)^2.$$

5) $\cos x = u$ деб, дифференциаллаш формулаларини қўлласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$y' = (\cos^2 x)' = (u^2)' = 2u \cdot u' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x.$$

6) $x^2 = u$ деб, дифференциаллаш формулаларига кўра $(\sin x^2)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$ га эга бўламиз.

7) $2 + x^4 = u$ деб, дифференциаллаш формуласига кўра

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2+x^4})' &= (\sqrt[3]{u})' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3} (2+x^4)^{-\frac{2}{3}} \times \\ &\times 4x^3 = \frac{4x^3}{3 \cdot \sqrt[3]{(2+x^4)^2}} \text{ га эга бўламиз.} \end{aligned}$$

8) $\frac{2x}{x+1} = u$ деб, дифференциаллаш формуласига кўра

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \frac{2x}{x+1}\right)' &= (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2}} \times \\ &\times \frac{2((x+1)-x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(1+x)\sqrt{1+2x-3x^2}} \text{ ҳосил бўлади. } \blacktriangle \end{aligned}$$

$$260. f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3} \text{ берилган. } f(-1); f'(-1); f'(2);$$

$f'\left(\frac{1}{a}\right)$ ларни топинг.

$$\Delta f(-1) = \frac{(-1)^2 - 5(-1) - 1}{(-1)^3} = \frac{1+5-1}{-1} = -5; f'(t) =$$

$$= \left(\frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}\right)' = (t^{-1} - 5t^{-2} - t^{-3})' = -\frac{1}{t^2} + \frac{10}{t^3} + \frac{3}{t^4} =$$

$$= \frac{3+10t-t^2}{t^4}; f'(-1) = \frac{3+10(-1)-(-1)^2}{(-1)^4} = \frac{-8}{1} = -8;$$

$$f'(2) = \frac{3+10 \cdot 2-2^2}{2^4} = \frac{3+20-4}{16} = \frac{19}{16} = 1\frac{3}{16};$$

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) = -a^2 + 10 \cdot a^3 + 3a^4 = a^2(3a^2 + 10a - 1). \blacktriangle$$

Дифференциаллашнинг асосий қоида ва формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$261. y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$$

$$262. y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{-3}.$$

$$263. y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4.$$

$$264. y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$$

$$265. y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}.$$

$$266. y = \frac{a+bx}{c+dx}.$$

$$267. y = 5\sin x - \cos x.$$

$$268. y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

$$269. y = \lambda \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$270. y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

$$271. y = \arctg x + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x.$$

$$272. y = \frac{(1+x^2) \arctg x - x}{2}.$$

$$273. y = x^7 \cdot e^x.$$

$$274. y = e^x \cdot \cos x.$$

$$275. y = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$276. y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}.$$

$$277. y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x.$$

$$278. y = x \cdot \operatorname{sh} x.$$

$$279. y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$$

$$280. y = \operatorname{th} x - x.$$

$$281. y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}.$$

$$282. y = (x^2 + 1)^{10}.$$

$$283. y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}.$$

$$284. y = e^{-x}.$$

$$285. y = \sin 3x.$$

$$286. y = \operatorname{tg} 5x.$$

$$287. a) y = \text{Int}gx;$$

$$б) * y = 4^{\cos x}.$$

$$288. y = \sin (x^2 + 5x + 1).$$

$$289. y = \cos^4 x.$$

$$290. y = \ln (x^2 + 3x + 4).$$

$$291. y = \text{tg} (x^2 + 1).$$

$$292. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$293. y = \text{arctg} \sqrt{x}.$$

$$294. y = \ln (1 + \sqrt{x}).$$

$$295. y = \cos (\ln x).$$

$$296. y = \ln \text{arctg} \sqrt{x}. y' \text{ ни топинг.}$$

Δ $\text{arctg} \sqrt{x}$ ни u деб қараб, $y' = \frac{(\text{arctg} \sqrt{x})'}{\text{arctg} \sqrt{x}}$ га эга бў-

ламиз, $(\text{arctg} \sqrt{x})'$ да эса $\sqrt{x}$ ни v деб қараб, ҳосила ола-

$$\text{миз: } (\text{arctg} \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Топилган бу қийматни y' га қўйиб, пировард натижада

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x) \text{arctg} \sqrt{x}}$$

ни ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

$$297. y = \ln \text{tg} \frac{x}{2}.$$

$$298. y = 4^{\text{arctg} \sqrt{x^2-1}}.$$

$$299. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$300. y = \text{tg}^2 2x \cdot \cos^2 2x.$$

$$301. y = \frac{x^2 (x^2 + 1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \text{ берилган. } y' \text{ ни топинг.}$$

Δ Берилган тенгликнинг икки томонини логарифмлаймиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодани дифференциаллаймиз, нати-

$$263. y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4.$$

$$264. y = \frac{a}{\sqrt{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt{x}}.$$

$$265. y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}.$$

$$266. y = \frac{a+bx}{c+dx}.$$

$$267. y = 5\sin x - \cos x.$$

$$268. y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

$$269. y = \lambda \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$270. y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

$$271. y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x.$$

$$272. y = \frac{(1+x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}.$$

$$273. y = x^7 \cdot e^x.$$

$$274. y = e^x \cdot \cos x.$$

$$275. y = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$276. y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}.$$

$$277. y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x.$$

$$278. y = x \cdot \operatorname{sh} x.$$

$$279. y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$$

$$280. y = \operatorname{th} x - x.$$

$$281. y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}.$$

$$282. y = (x^2 + 1)^{10}.$$

$$283. y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

$$284. y = e^{-x}.$$

$$285. y = \sin 3x.$$

$$286. y = \operatorname{tg} 5x.$$

$$287. a) y = \operatorname{Intg} x;$$

$$б) y = 4^{\cos x}.$$

$$288. y = \sin (x^3 + 5x + 1).$$

$$289. y = \cos^4 x.$$

$$290. y = \ln (x^3 + 3x + 4).$$

$$291. y = \operatorname{tg} (x^3 + 1).$$

$$292. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$293. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$294. y = \ln (1 + \sqrt{x}).$$

$$295. y = \cos (\ln x).$$

$$296. y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}. y' \text{ ни топинг.}$$

Δ $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ни u деб қараб, $y' = \frac{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ га эга бў-

ламиз, $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'$ да эса $\sqrt{x}$ ни v деб қараб, ҳосила ола-

$$\text{миз: } (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Топилган бу қийматни y' га қўйиб, пировард натижада

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$$

ни ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

$$297. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$298. y = 4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}}$$

$$299. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$300. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos^2 2x.$$

$$301. y = \frac{x^3 (x^3 + 1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \text{ берилган. } y' \text{ ни топинг.}$$

Δ Берилган тенгликнинг икки томонини логарифмлаймиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодани дифференциаллаймиз, нати-

жада куйндагига эга бўламиз (бундай услуб логарифмик ҳосила олиш услуби дейилади):

$$\begin{aligned}\ln y &= 3 \ln x + 4 \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x - 1) = \\ &= \frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x - 1) + 4 \ln (x^2 + 1); \\ \frac{y'}{y} &= \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \Leftrightarrow y' = \\ &= y \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right) = \frac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \times \\ &\times \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

302. $y = (\operatorname{ctgx})^{x^3}$ берилган. y' ни топинг.

Δ Логарифмик ҳосила олиш услубидан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned}\ln y &= x^3 \cdot \ln \operatorname{ctgx}; \quad \frac{y'}{y} = -x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctgx} \cdot \sin^2 x} + 3x^2 \ln \operatorname{ctgx} = \\ &= 3x^2 \ln \operatorname{ctgx} - \frac{x^3}{\sin x \cdot \cos x}; \quad y' = (\operatorname{ctgx})^{x^3} \times \\ &\times \left(3x^2 \ln \operatorname{ctgx} - \frac{x^3}{\sin x \cos x} \right). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$303. y = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x}}.$$

$$304. y = x^6 (x^2 + 1)^{10} (x^3 + 1)^5.$$

$$305. y = x^x.$$

$$306. y = x^{\sin x}.$$

$$307. y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$308. y = (\ln x)^x + x^{\ln x}.$$

$$309. \text{ а) } y = x |x|; \quad \text{ б) } y = \ln |x|.$$

$$310. y = \sqrt[3]{x \sqrt{x} \sqrt{x}}.$$

2-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР

1. $y = f(x)$ функция ҳосиласи y' нинг ҳосиласи берилган $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилган ва y'' ёки $\frac{d^2y}{dx^2}$ каби белгиланади. Умуман, $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).

2. Агар $u(x)$ ва $v(x)$ n марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $(c_1u + c_2v)^{(n)} = c_1u^{(n)} + c_2v^{(n)}$ бўлиб, $(u \cdot v)^{(n)} = v \cdot u^{(n)} + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2} \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots +$

$$+ u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

(Лейбниц формуласи) орқали ифодаланади. Бунда $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Асосий формулалар:

$$1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0; \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$2) (x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

$$3) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

$$4) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг:

$$311. y = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 1, \quad y^{(5)} = ?$$

$$312. y = \sqrt{x}, \quad y^{(4)} = ?$$

$$313. y = x^2 \cdot \sin 2x, \quad y^{(3)} = ?$$

$$314. y = \arcsin x, \quad y^{(2)} = ?$$

$$315. y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad y^{(2)} = ?$$

жада куйндагига эга бўламиз (бундай услуб логарифмик ҳосила олиш услуби дейилади):

$$\begin{aligned}\ln y &= 3 \ln x + 4 \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x - 1) = \\ &= \frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x - 1) + 4 \ln (x^2 + 1); \\ \frac{y'}{y} &= \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \Leftrightarrow y' = \\ &= y \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right) = \frac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \times \\ &\times \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

302. $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$ берилган. y' ни топинг.
 Δ Логарифмик ҳосила олиш услубидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}\ln y &= x^3 \cdot \ln \operatorname{ctg} x; \quad \frac{y'}{y} = -x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x} + 3x^2 \ln \operatorname{ctg} x = \\ &= 3x^2 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin x \cdot \cos x}; \quad y' = (\operatorname{ctg} x)^{x^3} \times \\ &\times \left(3x^2 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin x \cdot \cos x} \right). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$303. y = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x}}.$$

$$304. y = x^6 (x^2 + 1)^{10} (x^3 + 1)^5.$$

$$305. y = x^x.$$

$$306. y = x^{\sin x}.$$

$$307. y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$308. y = (\ln x)^x + x^{\ln x}.$$

$$309. \text{ а) } y = x |x|; \quad \text{ б) } y = \ln |x|.$$

$$310. y = \sqrt[3]{x \sqrt{x \sqrt{x}}}.$$

2-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР

1. $y = f(x)$ функция ҳосиласи y' нинг ҳосиласи берилган $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилди ва y'' ёки $\frac{d^2 y}{dx^2}$ каби белгиланади. Умуман, $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$.

2. Агар $u(x)$ ва $v(x)$ n марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $(c_1 u + c_2 v)^{(n)} = c_1 u^{(n)} + c_2 v^{(n)}$ бўлиб, $(u \cdot v)^{(n)} = v \cdot u^{(n)} + n u^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2} u^{(n-2)} v'' + \dots +$

$$+ u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

(Лейбниц формуласи) орқали ифодаланади. Бунда $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Асосий формулалар:

$$1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0; \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$2) (x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1) x^{m-n}.$$

$$3) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

$$4) (\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5) (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг:

$$311. y = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 1, \quad y^{(5)} = ?$$

$$312. y = \sqrt{x}, \quad y^{(4)} = ?$$

$$313. y = x^2 \cdot \sin 2x, \quad y^{(3)} = ?$$

$$314. y = \arcsin x, \quad y^{(2)} = ?$$

$$315. y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad y^{(2)} = ?$$

$$316. y = 2x^3 + x + 6, \quad y^{(4)} = ?$$

$$317. y = \ln(ax + b), \quad y^{(n)} = ?$$

$$318. y = \operatorname{sh} x, \quad y^{(n)} = ?$$

$$319. y = \sin^2 x, \quad y^{(n)} = ?$$

$$320. y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y^{(n)} = ?$$

$$321. f(x) = (2x-3)^5 \text{ берилган, } f'''(3) = ?$$

$$322. y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2} \text{ функциянинг } 1 + y'^2 = 2yy'' \text{ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$323. y = \frac{1}{2} x^2 e^x \text{ функциянинг } y'' - 2y' + y = e^x \text{ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$324. y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \text{ функция ўзгармас } c_1 \text{ ва } c_2 \text{ ларнинг ихтёрий қийматларида } y'' + 3y' + 2y = 0 \text{ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$325. \text{ Лейбниц формуласидан фойдаланиб, } y^{(n)} \text{ ни топинг}$$

$$1) y = x^2 \cdot e^{-2x};$$

$$2) y = (1 - x^2) \cos x.$$

3-§. ОШКОРМАС ВА ПАРАМЕТРИК ҲОЛДА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1. Иккита x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари ўзаро бирор $F(x, y) = 0$ (1) тенглама билан боғланган бўлсин. Агар $y = f(x)$ функция бирор $(a; b)$ да аниқланган бўлиб, (1) тенгламада y ўрнига $f(x)$ нфода қўйилганда тенглама x га нисбатан айниятга айланса, у ҳолда $y = f(x)$ функция (1) тенглама билан аниқланган ошқормас функция дейилади.

Ошқормас функциянинг ҳосиласини қуйидагича топиш мумкин:

1) (1) тенгликнинг чап томонидан y ни x нинг функцияси сифатида қараб ҳосила оламиз ва уни 0 га тенглаштираемиз.

2) Ҳосил бўлган тенгламадан y' ни

$$y' = f(x, y)$$

кўринишда топамиз.

Ошқормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топиш учун (2) тенгликни дифференциаллаймиз (бунда яна y ни x нинг функцияси сифатида қараймиз), сўнгра ўнг томондаги y' ўрнига (2) ни қўямиз.

2. Агар $y = f(x)$ функция параметрик кўринишда берилган бўлса, яъни

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

бўлса, у ҳолда

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (3)$$

ва

$$f''(x) = \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \quad (4)$$

бўлади.

$$326. x^2 y^2 + 5xy + 4 = 0 \text{ берилган. } y' \text{ ни топинг.}$$

△ Берилган муносабатни y ни x нинг функцияси деб қараб дифференциаллаймиз:

$$3x^2 y^2 + 2x^2 y \cdot y' + 5y + 5xy' = 0.$$

Ҳосил бўлган тенгламадан y' ни топамиз:

$$y' = -\frac{3x^2 y^2 + 5y}{2x^2 y + 5x}. \triangle$$

$$327. \operatorname{arctg} y - y + x = 0 \text{ берилган. } y'' \text{ ни топинг.}$$

△ Берилган муносабатни дифференциаллаймиз ва ундан y' ни топамиз:

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \text{ ёки } y' - y' - \frac{y^2 y'}{1+y^2} + 1 + y^2 = 0,$$

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1. \quad (5)$$

Энди (5) ни дифференциаллаймиз:

$$y'' = -2y^{-3} y' = -\frac{2}{y^3} \cdot y'. \quad (6)$$

(6) даги y' ўрнига (5) ни қўйиб, қуйидаги натижани ҳосил

$$\text{қиламиз: } y'' = -\frac{2}{y^3} \cdot \frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}. \triangle$$

$$328. \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \text{ берилган, } \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

Δ (3) ва (4) формулалардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t; \quad \varphi''(t) = (\varphi'(t))' = \\ &= (-3a \cos^2 t \sin t)' = 3a \cos t (2 \sin^2 t - \cos^2 t), \quad \psi''(t) = \\ &= (\psi'(t))' = (3a \sin^2 t \cos t)' = 3a \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t); \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \varphi''(t) \psi'(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{3a \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t) (-3a \cos^2 t \sin t) -}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3} \\ &\quad - \frac{3a \cos t (2 \sin^2 t - \cos^2 t) (3a \sin^2 t \cos t)}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3} = \\ &= \frac{9a^2 \sin^4 t \cos^2 t (-2 \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \sin^2 t + \cos^2 t)}{-27a^3 \cos^6 t \sin^3 t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t} \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} t) = -\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= -\frac{\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$329. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ берилган, } \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$\Delta \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Худди юқоридагига ўхшаш

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) = \frac{\frac{d \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{2a \sin \frac{t}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4a \sin^3 \frac{t}{2}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг.

$$330. x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0, \quad y' = ?$$

$$331. x^2 y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0, \quad y' = ?$$

$$332. xy^3 + 2y - 1 = 0, \quad y'' = ?$$

$$333. x^3 + 2xy - 3y^2 = 0, \quad y''(1; 1) = ?$$

$$334. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad y' = ?$$

$$335. \ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c, \quad y' = ?$$

$$336. xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad y' = ?$$

$$337. \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3, \end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} = ?$$

$$338. \begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$339. \begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2}, \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$340. \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^3}{1+t^2}, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$341. \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$342. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$343. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} \text{ нинг } t = \frac{\pi}{4} \text{ даги қийматини то-} \\ \text{пинг.}$$

$$344. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$345. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$328. \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \text{ берилган, } \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

Δ (3) ва (4) формулалардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t; \quad \psi''(t) = (\psi'(t))' = \\ &= (-3a \cos^2 t \sin t)' = 3a \cos t (2 \sin^2 t - \cos^2 t), \quad \psi''(t) = \\ &= (\psi'(t))' = (3a \sin^2 t \cos t)' = 3a \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t); \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \varphi''(t) \psi'(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{3a \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t) (-3a \cos^2 t \sin t)}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3} \\ &= \frac{3a \cos t (2 \sin^2 t - \cos^2 t) (3a \sin^2 t \cos t)}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3} = \\ &= \frac{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (-2 \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \sin^2 t + \cos^2 t)}{-27a^2 \cos^4 t \sin^4 t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t} \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} t) = -\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= -\frac{\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$329. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ берилган, } \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$\Delta \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Худди юқоридагига ўхшаш

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) = \frac{\frac{d \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{2a \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг.

$$330. x^2y - 3x^2y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0, y' = ?$$

$$331. x^2y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0, y' = ?$$

$$332. xy^3 + 2y - 1 = 0, y'' = ?$$

$$333. x^3 + 2xy - 3y^2 = 0, y''(1; 1) = ?$$

$$334. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), y' = ?$$

$$335. \ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c, y' = ?$$

$$336. xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, y' = ?$$

$$337. \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3, \end{cases} y' = \frac{dy}{dx} = ?$$

$$338. \begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^2 t, \end{cases} \frac{dy}{dx} = ?$$

$$339. \begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2}, \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases} \frac{dy}{dx} = ?$$

$$340. \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^3}{1+t^2}, \end{cases} \frac{dy}{dx} = ?$$

$$341. \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}, \end{cases} \frac{dy}{dx} = ?$$

$$342. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \frac{dy}{dx} = ?$$

$$343. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \frac{dy}{dx} \text{ нинг } t = \frac{\pi}{4} \text{ даги қийматини то-}$$

пниг.

$$344. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3, \end{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$345. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$346. \begin{cases} x = a (\sin t - t \cos t), \\ y = a (\cos t + t \sin t). \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$347. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

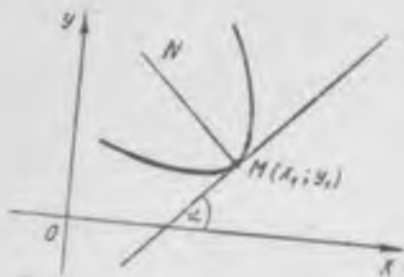
$$348. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2} t^2. \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$349. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ нинг } t=0 \text{ даги қиймати топинг.}$$

$$350. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \operatorname{arcsin} t. \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

4-5. ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚИ

1. Ҳосиланинг геометрик маъноси



21- чизма

чизиқнинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги (21- чизма).
 $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ тенгламаси:

$$y - y_1 = f'(x_1) (x - x_1).$$

MN нормал тўғри чизиқ тенгламаси эса:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} (x - x_1).$$

2) $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ функциялар графикларининг $M(x_1, y_1)$ кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар орасидаги φ бурчак берилган икки эгри чизиқ орасидаги бурчакни ифодалайди ва

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2'(x_1) - f_1'(x_1)}{1 + f_1'(x_1) f_2'(x_1)} \quad (3)$$

формула билан топилади.

Ҳосиланинг геометрик маъносидан фойдаланиб, аналитик геометриядаги кўпгина масалаларни ечиш мумкин.

2. Ҳосиланинг механик маъноси

$y = f(x)$ ҳаракат қонунияти берилган бўлса, $f'(x_1)$ механик томондан унинг x_1 моментдаги (пайтдаги) ўзгариш суръатининг ($v(x_1) = f'(x_1)$), $f''(x_1)$ эса ҳаракатнинг тезланишининг ($a(x_1) = f''(x_1)$) ифодалайди.

351. $y = x^3 + 2x$ эгри чизиқнинг $M(1; 3)$ нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормал тўғри чизиқлар тенгламаларини топинг.

△ Уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш учун аввал берилган функциядан ҳосил оламиз:

$$y'_1 = 3x^2 + 2.$$

Бу ҳосиланинг $x = 1$ нуқтадаги қиймати уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ифодалайди, яъни $k = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Шундай қилиб, уринма тенгламаси $y - 3 = 5(x - 1)$ ёки $5x - y - 2 = 0$ бўлиб, нормал тўғри чизиқ тенгламаси эса $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$ ёки $x + 5y - 16 = 0$. ▲

352. Қуйидаги эгри чизиқларнинг кесишиш бурчагини топинг:

1) $x + y - 4 = 0$ тўғри чизиқ билан $2y = 8 - x^2$ парабола;

2) $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс билан $4y = 4 - 5x^2$ парабола.

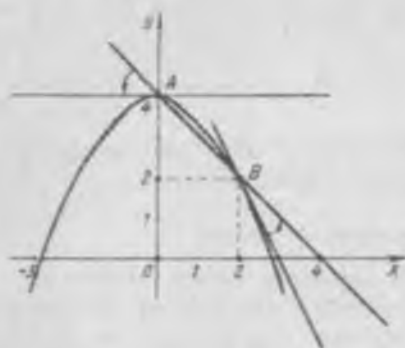
△ 1) Тўғри чизиқ билан парабола тенгламаларини система қилиб ечиб, уларнинг кесишган нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ 2y = 8 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x, \\ 2(4 - x) = 8 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2; y_1 = 4, y_2 = 2.$$

Демак, $A(0; 4)$, $B(2; 2)$ (22- чизма). Сўнгра парабола тенгламасидан y' ни топамиз: $y' = -x$. Параболанинг A ва B нуқталаридан ўтган уринма тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_A = y'_A = 0, k_B = y'_B = -2.$$



22- чизма



23- чизма

$x + y - 4 = 0$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентининг ҳамма нуқталарида -1 га тенг.

(3) формулага кўра $\operatorname{tg} A = \frac{0 - (-1)}{1 + (-1) \cdot 0} = 1$, $A = 45^\circ$;

$$\operatorname{tg} B = \frac{-1 + 2}{1 + 2} = \frac{1}{3}, \quad B \approx 18,5^\circ.$$

2) Эгри чизиқларнинг тенгламаларини система қилиб ечиб, уларнинг умумий нуқталарини топамиз: $A(1, 2; -0,8)$, $B(0; 1)$, $C(-1, 2; -0,8)$ (23- чизма).

Энди эллипс ва параболаларнинг исталган нуқтасидан ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентларини уларнинг тенгламаларидан y ни x нинг функцияси сифатида қараб ҳосил олиш билан топамиз:

$$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}; \quad k_1 = y' = -\frac{x}{4y};$$

$$y = 1 - \frac{5}{4}x^2; \quad k_2 = y' = -\frac{5}{2}x.$$

Буларга A нуқтанинг координаталарини қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k_1 = \frac{3}{8}, \quad k_2 = -3; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{8} + 3}{1 - \frac{9}{8}} = -27, \quad \varphi \approx 92^\circ.$$

Берилган эгри чизиқлар Oy ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун C нуқтада ҳам улар 92° бурчак остида кесишади.

В нуқтада $k_1 = -\frac{0}{4} = 0$, $k_2 = -\frac{5}{2} \cdot 0 = 0$ бўлгани учун $\varphi = 0$ бўлиб, эгри чизиқлар умумий уринма тўғри чизиқка эга бўлади, бу ҳолда улар кесишмайди, балки бир-бирига уринади. ▲

353. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s = t^2 + 2t + 3$ қонуниятга кўра ҳаракат қилса, унинг $t = 5$ секунддаги ҳаракат тезлигини топинг (йўл s метр билан ўлчанади).

Ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги v йўл s дан вақт t бўйи олинган ҳосила билан ифодаланади. Берилган масала шартига кўра $v = 2t + 2$ умумий тезлиқни ифодалайди. Бу ҳолда $t = 5$ секунддаги ҳаракат тезлиги

$$v_s = (2t + 2)_{t=5} = 12 \text{ м/сек бўлади. } \blacktriangle$$

354. $y = x^2 - 2x + 5$ эгри чизиқда ординатаси абсциссасига нисбатан 4 марта тезроқ ўсадиган нуқтани топинг. Берилган функциядан ҳосила оламиз:

$$y' = 2x - 2.$$

Ҳосила абсцисса (аргумент) нинг ўсишига нисбатан ордината (функция)нинг ўсиш тезлигини билдиргани учун $2x - 2 = 4$ шарт изланаётган нуқтанинг абсциссасини ифодалайди, ординатаси эса эгри чизиқ тенгламаси $y = x^2 - 2x + 5$ да x ўрнига 3 ни қўйиш билан топилади. Шундай қилиб, изланаётган нуқта (3; 8) экан. ▲

355. Моддий нуқта $s = 2t^2 + 3t + 5$ қонуниятга кўра ҳаракат қилади, бунда масофа s сантиметр, вақт t секундлар билан ўлчанади. Моддий нуқтанинг $t = 1$ дан $t = 5$ гача бўлган вақт оралиғидаги ўртача тезлигини топинг.

Δ Моддий нуқтанинг ўртача тезлиги $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ формула билан топилади, бунда $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ моддий нуқтанинг Δt вақт ичида босиб ўтган йўли. Масала шартидан $t_0 = 1$ сек, $t_0 + \Delta t = 5$ сек бўлгани учун $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(1)}{4} = \frac{2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 5 - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 5)}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ см/сек. } \blacktriangle$

356. Иситилган жисм пастроқ температурали ҳолатга киритилса, совий бошлайди. а) Совишнинг ўртача тезлиги; б) берилган пайтдаги совиш тезлиги деганда нималар тушунилади? Изохланг.

Δ Жисмнинг t пайтдаги температураси T бўлсин. Маълум Δt вақт ўтиши билан иситилган жисм температураси ўзга-

ради, уни ΔT деб белгилаймиз. У ҳолда совишнинг ўртача тезлиги $v_{\text{ор}} = \frac{\Delta T}{\Delta t}$ дан иборат бўлади. t пайтдаги совиш тезлиги эса

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ор}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$$

дан иборат бўлади. ▲

357. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $x = A \sin \omega t$ қонуният бўйича тебранма ҳаракат қилади. Нуқтанинг $t = \frac{2\pi}{\omega}$ пайтдаги тезлиги ва тезланишини топинг. Ҳаракат тезланишининг x нинг четланишига пропорционал эканини кўрсатинг.

△ Ҳаракатнинг ихтиёрий t пайтдаги тезлиги v ва тезланиши ω ларни топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t; \quad \omega = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t.$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \text{ да } v = A \omega; \quad \omega = 0.$$

Тезланиш ω нинг ифодаси билан x нинг ифодасини солиштириб, бири иккинчисидан ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилишини кўрсатамиз: $\omega = -\omega^2 x$. ▲

358. Тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги унинг босиб ўтган йўлининг квадрат илдизига пропорционал. Бўлаётган ҳаракатнинг ўзгармас куч таъсирида бажарилаётганини исботланг.

△ Ньютон қонуни бўйича ҳаракатни чақирувчи F куч тезланишга пропорционал:

$$F = k \cdot \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Масала шартига кўра $\frac{dS}{dt} = \lambda \sqrt{S}$. Бундан ҳосила олиб топамиз:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{S}} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{S}} \cdot \lambda \sqrt{S} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Демак, таъсир этувчи куч $F = \frac{k\lambda^2}{2} (\text{const})$. ▲

359. $y = x^2 + 5x - 1$ эгри чизиқнинг $M(1; 5)$ нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

160. $y = \frac{\ln x}{x}$ эгри чизиқнинг $M(1; 0)$ нуқтасидан ўтган нормал тенгламасини топинг.

361. $y = \frac{3x-4}{2x-3}$ чизиқнинг $M(2; 2)$ нуқтасидан ўтган уринма ва нормал тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

362. $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ эгри чизиқ абсцисса ўқи билан қандай бұрак остида кесишади?

363. $y = \sin x$ синусоида абсцисса ўқи билан координатлар бошида қандай бұрак остида кесишади?

364. $y = x^2 + 3x - 5$ параболанинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ $7x - y + 3 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

365. $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$ эгри чизиқнинг $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринманинг бұрак коэффициентини топинг ва уринма тенгламасини тузинг.

366. $y = x^2$ параболада $x_1 = 1$ ва $x_2 = 3$ нуқталар орқали кесувчи ўтказилган. Параболанинг қандай нуқтасидан ўтказилган уринма кесувчига параллел бўлади?

367. $y = \sin x$ синусоида ва $x = \cos x$ косинусоидалар қандай бұрак остида кесишади?

368. $x = t - 1$, $y = t^3 - 12t + 1$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма: а) Ox ўққа параллел; б) $9x + y + 3 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

△ Бу масалани ечишда тўғри чизиқларнинг параллеллик шартидан фойдаланамиз. Агар тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, у ҳолда уларнинг бұрак коэффициентлари тенг бўлади. Эгри чизиқ параметрик кўринишда берилгани учун ҳосила олишда 3-§ даги (3) формуладан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 12}{1} = 3t^2 - 12.$$

Бу ҳосила берилган эгри чизиқнинг исталган нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқнинг бұрак коэффициентини фойдалайди.

а) y' ни Ox ўқнинг бұрак коэффициентига тенглаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$3t^2 - 12 = 0; \quad t^2 = 4, \quad t = \pm 2.$$

t параметрининг топилган қийматларини берилган эгри чизиқ тенгламасига қўйиб, Ox ўққа параллел бўлган урин-

ма тўғри чизиққа тегишли нуқта координаталарига эгаллашди: (1; -15); (-3; 17).

б) Худди а) даги каби йўл тутиб, $y' = 3t^2 - 12 = 0$ бўлса, $t = \pm 1$ га эга бўламиз ва (0; -10); (-2; 12) нуқталарни ҳосил қиламиз. ▲

369. Ҳаракат қонуни $s = t \ln(1+t)$ кўринишда берилган. $t = 2$ пайтдаги ҳаракат тезлигини аниқланг.

370. 8 г массали жисм $s = -1 + \ln(1+t) + (1+t)^2$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Ҳаракат бошланишидан бир секунд кейин жисмнинг кинетик энергияси $\frac{mv^2}{2}$ ни топинг.

371. Химик реакция жараёнида t вақтга боғлиқ равишда ҳосил бўладиган Q миқдор $Q = a(1 + be^{-mt})$ формула билан берилган. Реакция тезлигини топинг.

372. Гилдирак шундай айланадики, унинг айланиш бурчига вақтнинг квадратига пропорционал. Гилдирак биринчи айланишни 8 секундда бажаради. Ҳаракат бошлангандан 32 сек ўтгандан кейинги айланиш тезлиги ω ни топинг.

373. Симдан ўтувчи электр токининг миқдори $t = 0$ пайтдан бошлаб $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кЛ) формула билан берилган. 5 секунддан кейинги ток кучини топинг.

374. Массаси m га тенг бўлган нуқта Ox ўқ бўйлаб тебранади. Унинг t пайтдаги турғунлик ҳолатидан x четланиши $x = Ae^{-at} \cos(at + b)$ формула билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат тезлигини ва унга таъсир этувчи кучни топинг.

375. Моддий нуқтага таъсир этувчи куч унинг ҳаракат тезлигига тескари пропорционал. Бу ҳолда нуқтанинг кинетик энергияси вақтнинг чизиқли функцияси бўлишини исботланг.

5.5. ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Агар $y = f(x)$ функциянинг Δy орттирмасини $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, орттирманинг Δx га нисбатан чизиқли қисми $A \Delta x$ га функциянинг дифференциали дейилади ва dy ёки $df(x)$ орқали белгиланади:

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Бунда A бирор сон бўлиб, Δx га боғлиқ эмас (фақат x га боғлиқ бўлиши мумкин), $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Дифференциал мавжуд бўлиши учун чекли ҳосила $f'(x)$

нинг мавжудлиги зарур ва етарлидир, у ҳолда $dy = f'(x) dx$ бўлади.

2. Агар $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ мураккаб функция берилган бўлса, у ҳолда $dy = f'(u) du$ (дифференциал формасининг инвариантлиги) бўлади.

3. Агар Δx етарлича кичик бўлса, у ҳолда $\Delta y \approx dy$ тақрибий формула ўринли бўлиб, $|\Delta y - dy|$ абсолют хато-нисбий хатони ифодалайди.

4. Юқори тартибли дифференциаллар $d^2y, d^3y, \dots, d^ny$ бўлиб, x эркин ўзгарувчи бўлганда $d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n$ бўлади. Агар $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ бўлса, $d^2y = f''(u) du^2 + f'(u) d^2u$ бўлиб, бунда дифференциал формасининг инвариантлиги бўлади.

376. Қуйидаги функцияларнинг дифференциалларини топинг:

$$1) y = x^2 - 3^x,$$

$$2) F(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{3} + \sin \frac{3}{\varphi},$$

$$3) z = \ln(1 + e^{10x}), dz|_{x=0; \Delta x=0.1} = ?$$

Δ Берилган функциянинг ҳосиласини топиб ва уни эркин ўзгарувчининг дифференциалига кўпайтириб, берилган функциянинг дифференциалини топамиз:

$$1) dy = y' dx = (x^2 - 3^x)' dx = (2x - 3^x \ln 3) dx;$$

$$2) dF(\varphi) = d\left(\cos \frac{\varphi}{3} + \sin \frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos \frac{\varphi}{3} + \sin \frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$$

$$= \left(-\sin \frac{\varphi}{3} \left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos \frac{3}{\varphi} \cdot \left(\frac{3}{\varphi}\right)'\right) d\varphi = -\left(\frac{1}{3} \sin \frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2} \times \cos \frac{3}{\varphi}\right) d\varphi;$$

$$3) dz = \frac{(1 + e^{10x})'}{1 + e^{10x}} dx = \frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} dx.$$

$$dz|_{x=0, dx=0.1} = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} dx\right)\bigg|_{x=0; dx=0.1} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0.1}{2} = 0.5. \quad \blacktriangle$$

377. Қуйидагиларни тақрибий ҳисобланг:

$$1) \sqrt[4]{17}; \quad 2) \arctg 0.98; \quad 3) \sin 29^\circ.$$

Δ Агар $f(x_1)$ ни ҳисоблаётганда $f(x_0)$, $f'(x_0)$ ларни ҳисоблаш соддароқ бўлса, у ҳолда $x_1 - x_0 = dx$ айирманинг

абсолют қиймати бўйича етарли кичик қийматида функциянинг орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштира оламиз. Бунда топилиши мумкин: $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0) dx$. Бунда топилиши мумкин бўлган миқдорнинг тақрибий қиймати

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) dx$$

формула билан топилади.

1) $\sqrt[4]{17}$ ни $f(x) = \sqrt[4]{x}$ функциянинг $x_1 = 17$ даги хусусий қиймати деб қараймиз.

$$x_0 = 16 \text{ бўлсин, у ҳолда } f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2, f'(x_0) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \Big|_{x=16} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{2^{12}}} = \frac{1}{32}; dx = x_1 - x_0 = 1$$

Буларни (а) формулага қўямиз:

$$\sqrt[4]{17} \approx (f(x_0) + f'(x_0) dx) \Big|_{x_0=16; dx=1} = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2,03$$

2) $\arctg 0,98$ ни $y = \arctg x$ функциянинг $x_1 = 0,98$ даги хусусий қиймати деб қараймиз. $x_0 = 1$ бўлсин, у ҳолда $y(x_0) = \frac{\pi}{4}$; $y'(x_0) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$; $dx = x_1 - x_0 = 0,98 - 1 = -0,02$.

(а) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\arctg 0,8 \approx y(x_0) + y'(x_0) dx = \arctg 1 + \frac{1 \cdot (-0,02)}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (-0,02) \approx 0,7754.$$

3) $y = \sin x$ функциянинг $x = \arcsin 29^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 29 = x_1$ даги хусусий қийматини $\sin 29^\circ$ ва $x_0 = \frac{\pi}{6}$ деб қараб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y(x_0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; y'(x_0) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}; \sin 29^\circ \approx y(x_0) + y'(x_0) dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4848. \blacktriangle$$

378. $y = \ln \arctg(\sin x)$ функциянинг дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциалини бевосита топишни кўрсатайлик:

$$y = \frac{d(\arctg(\sin x))}{d(\sin x)} = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot d(\sin x) = \frac{\cos x \cdot dx}{(1+\sin^2 x) \arctg(\sin x)} \blacktriangle$$

379. $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$ берилган. Агар $\Delta x = 0,1$ бўлганда $\Delta f(1)$ ва $df(1)$ ларни топинг.

380. $y = x^3 - 7x^2 + 8$ функция берилган. $x = 5$ ва $\Delta x = 0,01$ бўлганда функция орттирмаси Δy ни ҳисобланг.

381. $f(x) = \frac{1}{x}$ функция берилган. $x = 1$ ва $\Delta x = 0,01$ бўлганда $\Delta f(1)$ ва $df(1)$ ни топинг. Абсолют хато $|\Delta y - dy|$ ва нисбий хато $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right|$ ларни ҳисобланг.

382. Шар радиуси $R = 15$ см ни 2 мм га узайтирилса, унинг ҳажми тахминан қанчага кўпаяди?

383. Ом қонуни $I = \frac{E}{R}$ га кўра қаршиликнинг етарли кичик миқдорда ўзгариши билан ток кучи ҳам ўзгаради. Бу ҳолда ток кучининг ўзгариши тақрибан $\Delta I = -\frac{I}{R} \Delta R$ формула билан топилишини кўрсатинг.

$$384. y = \arctg \frac{1}{x}, \quad dy = ?$$

$$385. y = (\arcsin x)^5, \quad dy = ?$$

$$386. y = \sqrt{1 + \sin^2 x}, \quad dy = ?$$

$$387. y = \sqrt{1 - x^2}, \quad d^2 y = ?$$

$$388. y = \arccos x, \quad d^2 y = ?$$

$$389. y = \sin x \cdot \ln x, \quad d^2 y = ?$$

$$390. y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad d^2 y = ?$$

391. x га нисбатан $|\Delta x|$ нинг етарли кичик қийматлари учун $\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{x^n}}$ тақрибий формулани келтириб чиқаринг.

392. α нинг етарли кичик қийматларида $\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$ эканини кўрсатинг.

393. $\sqrt[4]{16,64}$ ни тақрибан ҳисобланг.

394. $\ln 0,9$ ни тақрибан ҳисобланг.

395. $\cos 31^\circ$ ни тақрибан ҳисобланг.

6-§. ЛОПИТАЛЬ ҚОИДАСИ ВА УНИНГ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИНИ ТОПИШГА ТАТБИҚИ

1. Лопиталь қондаси. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар нуқтанинг бирор $u(a; \delta)$ атрофида (a дан бошқа) дифференциалланувчи (бунда a — сон ёки ∞ бўлиши мумкин) ва $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади (унг томондаги лимит мавжуд деб қаралади).

Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ҳолига келса ва бу ҳолда натижага эришишда Лопиталь қондаси аҳамиятлироқ бўлса, ундан қайта-қайта фойдаланиш мумкин.

2. $(0 \cdot \infty)$ ва $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмасликлар алгебраик шакл ўзгартириш билан 1-қоидага, яъни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ аниқмасликларга келтирилади.

3. (0^0) , (∞^0) , (1^∞) кўринишдаги аниқмасликлар логарифмлаш ёки $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \cdot \ln f(x)}$ шакл ўзгартириш билан $(0 \cdot \infty)$ кўринишга келтирилади.

Қуйидаги функцияларнинг лимитларини ҳисобланг:

396. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16};$

2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx};$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n},$ бунда $k > 0$, n — натурал сон;

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\lg x}{\sec x}.$

Δ 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^4 - 16)'}{(x^3 + 5x^2 - 6x - 16)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2}{3x^2 + 10x - 6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^m - a^m)'}{(x^n - a^n)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \\ = \frac{m}{n} a^{m-n};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos ax)'}{(1 - \cos bx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin ax}{b \sin bx} = \\ = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a \sin ax)'}{(b \sin bx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cos ax}{b^2 \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Бу мисолда Лопиталь қондаси 2 марта қўлланилди.

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{kx})'}{(x^n)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ke^{kx}}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ke^{kx})'}{(n x^{n-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^2 e^{kx}}{n(n-1) x^{n-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n e^{kx}}{n!} = +\infty.$$

Бу мисолда Лопиталь қондасидан n марта фойдаланил-

ди.

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\sec x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} = \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sec x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \dots$$

Бу ерда Лопиталь қондасидан фойдаланиш аҳамиятсиздир. Бундай ҳолда лимитларни ҳисоблаш учун Лопиталь қондасидан фойдаланмасдан оддий элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1. \blacktriangle$$

$$397. 1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \cdot \ln x;$$

$$3) \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} \varphi - \sec \varphi);$$

$$4) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} - \frac{1}{t} \right).$$

Δ Бу лимитлар $0 \cdot \infty$ ёки $\infty - \infty$ каби ҳоллар бўлгани учун уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ ларнинг бирига келтириб, сўнгра Лопиталь қондасидан фойдаланамиз:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \sec^2 2x} = \frac{1}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(1/\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/3 \cdot \sqrt{x}} = -3 \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0;$$

$$3) \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} \varphi - \sec \varphi) = (\infty - \infty) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi - 1}{\cos \varphi} =$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \varphi - 1)'}{(\cos \varphi)'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{-\sin \varphi} = 0;$$

$$4) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t \sin t} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin t)'}{(t \sin t)'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t + t \cos t} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)'}{(\sin t + t \cos t)'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cos t - t \sin t} = 0.$$

Бу мисолда Лопиталь қондаси 2 марта ишлатилди. ▲

$$398. 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

Бу лимитлар 1^∞ , ∞^0 , 0^0 кўринишдаги ҳоллар бўлгани учун уларни $0 \cdot \infty$ кўринишга келтирамиз, сўнгра уни $\frac{0}{0}$

кўринишга келтириб, Лопиталь қондасидан фойдаланамиз. Бунинг учун берилган функцияни логарифмлаймиз функция логарифмининг лимитини топамиз:

$$1) a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = (1^\infty); \quad \ln a = \ln \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{ctg} 2x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x}{-2 \operatorname{cosec}^2 2x} = -1.$$

демак, $\ln a = -1$; $a = e^{-1}$, яъни $a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1} =$

$\frac{1}{e}$ экан;

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty^0). \text{ Бунда ҳам } a = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} \text{ деб}$$

логарифмлаймиз:

$$\ln a = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{1}{x} = (0 \cdot \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1} =$$

$$= 0,$$

демак, $\ln a = 0 \Rightarrow a = e^0 = 1$, яъни $a = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = 1$

экан;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (x)^{\sin x} = (0^0)$; $a = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ деб логарифмлай.

миз: $\ln a = \ln \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = (0 \cdot (-\infty)) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/\sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(1/\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0; \quad \ln a = 0, \quad a = e^0 = 1,$$

яъни $a = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1$ экан. ▲

399. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$

400. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^a \sqrt{x} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$

401. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\cos x - 1}.$

402. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$

403. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$

404. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^n \cdot e^{-x}).$

405. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right).$

406. $\lim_{\varphi \rightarrow a} \left((a^2 - \varphi^2) \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{2a} \right).$

407. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$

408. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$

409. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot e^{1/x^2}).$

410. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$

411. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}.$

$$412. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

413. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1$ тенгликни исботланг ва бунда Лопиталь қондасини ишлатиб бўлмаслигини текширинг.

$$414. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}.$$

7-§. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ ВА УНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАРГА ТАТБИҚИ

$x = a$ нуқтани ўз ичига олган бирор интервалда $f(x)$ функция $(n+1)$ - тартибгача барча ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функцияни n - даражали кўпҳад ва R_n қолдиқ ҳад йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(T); R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(қолдиқ ҳаднинг Лагранж кўриниши), бунда c сон a билан x орасида ётувчи сон, $c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$. (Т) формулага Тейлор формуласи дейилиб, ундан ихтиёрий $f(x)$ функцияни тақрибан кўпҳад кўринишда ифодалашда фойдаланилади:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (*)$$

(*) га Тейлор кўпҳадлиги дейилади.

Агар Тейлор формуласида $a = 0$ бўлса, у ҳолда Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

лекин кўпчилик функциялар учун Маклорен формуласини ишлатиб бўлмайди, чунки $x = 0$ да бу функциялар ёки

уларнинг ҳосилалари мавжуд бўлмайди (масалан: $\ln x$; $\sqrt{x}$; $\operatorname{ctg} x$; $\frac{1}{x}$).

415. Қуйидаги функцияларнинг ҳар бирини тақрибан x га нисбатан n -даражали кўпхад кўринишида ифодаланг; қолдиқ ҳадни баҳоланг ва унинг x нинг қандай қийматида чексиз кичрайишини кўрсатинг:

1) e^x ; 2) $\sin x$, 3) $\cos x$.

Δ Берилган $f(x)$ функцияни x га нисбатан n -даражали кўпхад кўринишида тақрибан ифодалаш учун $f(x)$ функциянинг Маклорен кўпхадияни ёзиб олиш керак. Сўнгра $f(x)$ функция учун Маклорен формуласидан қолдиқ ҳад R_n ни топиш керак ва $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ ўринли бўладиган x нинг қийматларини аниқлаш керак.

1) $f(x) = e^x$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = 0$ даги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(k)}(x) = e^x;$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 1.$$

Энди Маклорен кўпхадлигидан фойдаланиб, трансцендент функция e^x нинг тақрибан n -даражали кўпхад кўринишидаги ифодасини ҳосил қиламиз:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \quad (1)$$

Бу тақрибий тенгликда қилинган хато Маклорен формуласидаги қолдиқ ҳад билан аниқланади. e^x функция учун қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1,$$

R_n нинг қиймати n га ва x га боғлиқдир. Масалан, $n = 3$ ва $x = 1$ да $R_3 = \frac{1}{4!} e^{\theta} < \frac{1}{4!} e < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$, чунки $0 < \theta < 1$, $e < 3$.

$n = 5$ ва $x = 1$ да $R_5 = \frac{1}{6!} e^{\theta} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}$ ва ҳоказо.

x қандай бўлмасин $n \rightarrow \infty$ да қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0$$

ни кўрсатайлик, бунинг учун $n \rightarrow \infty$ да $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ ни исботлаш етарли, чунки $0 < \theta < 1$ бўлгани учун $e^{\theta x}$ чекланган миқдор.

Агар x тайин сон бўлса, у ҳолда шундай бутун мусбат N сон топиладики, $|x| < N$ бўлади. $\frac{|x|}{N} = q$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $0 < q < 1$ ни эътиборга олиб, $n = N + 1, N + 2, N + 3$ ва ҳоказо қийматларда қуйидагини ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| &= \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \cdots \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \cdots \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| < \\ &< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdots q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \cdot q^{n-N+2}, \text{ чунки} \\ &\left| \frac{x}{N} \right| = q, \left| \frac{x}{N+1} \right| < q, \dots, \left| \frac{x}{n+1} \right| < q. \end{aligned}$$

Аммо, $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ миқдор ўзгармас, яъни n га боғлиқ эмас, q^{n-N+2} эса $n \rightarrow \infty$ да 0 га интилади. Шунинг учун $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0.$$

Шундай қилиб, x ҳар қандай бўлганда ҳам етарли сондаги ҳадларни олиб, e^x ни исталган аниқлик билан ҳисоблай оламиз;

2) $\sin x$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = 0$ даги қийматларини топамиз:

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{IV}(0) = 0,$$

$$\dots \dots \dots f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin n \frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right).$$

Бу ҳолда

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

ва қолдиқ ҳад

$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot \sin\left(\theta x + (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1,$$

ларга эга бўламиз.

$$\left| \sin\left(\theta x + (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1 \quad \text{бўлгани учун} \quad |R_{2m}| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!} \text{ бўлиб, } m \rightarrow \infty \text{ да } R_{2m} \rightarrow 0, \text{ чунки } x \text{ нинг ҳар}$$

қандай қийматида ва $n \rightarrow \infty$ да $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ (бунда x бурчаниннинг радиан ўлчовини билдиради). Шундай қилиб, $\sin x$ функцияни ҳам x нинг ҳар қандай қийматида ихтиёрий кичик хатолик билан Маклорен кўпҳадлиги кўринишида ифода лаш мумкин экан;

3) $f(x) = \cos x$ функциянинг $x = 0$ даги кетма-кет ҳосилаларини топиш ва Маклорен формуласига қўйиш билан ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot \cos\left(\theta x + (2m+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

бунда $0 < \theta < 1$, қолдиқ ҳад

$$R_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot \cos\left(\theta x + \left(2m+2\right) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

$$\left| \cos\left(\theta x + (2m+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1 \quad \text{бўлгани учун} \quad |R_{2m+1}(x)| \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \text{ ва } m \rightarrow \infty \text{ да } R_{2m+1}(x) \rightarrow 0.$$

Шундай қилиб, x нинг ихтиёрий қиймати учун (бунда x бурчакнинг радиан ўлчовини билдиради)

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad (3)$$

ўринлидир ($m = 0, 1, 2, 3, \dots, m$). ▲

416. $f(x) = x^m$ (m — ихтиёрий ҳақиқий сон) функцияни $(x-1)$ икки ҳадга нисбатан n -даражали кўпҳад кўринишида тақрибан ифодаланг ва йўл қўйилган хатоликни баҳолаг. Сўнгра $x-1=t$ деб берилган функцияни t нинг даражасига нисбатан ёйинг.

△ $f(x)$ функцияни $(x-1)$ икки ҳадга нисбатан n -даражали кўпҳад кўринишида ифодалаш учун $a=1$ деб бу функция учун Тейлор кўпҳадини ёзиш керак. Функцияни кўпҳад билан алмаштиришда ҳосил бўладиган хатолик берилган функциянинг Тейлор формуласидаги қолдиқ ҳад R_n нинг катталиги билан аниқланади.

$f(x) = x^m$ функция учун қуйидагиларга эгамиз:

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1}, & f(1) &= 1, & f'(1) &= m, \\ f''(x) &= m(m-1)x^{m-2}, & f''(1) &= m(m-1), \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3}, & f'''(1) &= m(m-1)(m-2), \\ &\dots & & & & \\ f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)x^{m-k}, \\ f^{(k)}(1) &= m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1). \end{aligned}$$

(*) Тейлор кўпҳадлигидан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} x^m &\approx 1 + \frac{m}{1!}(x-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{n!}(x-1)^n \end{aligned}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тақрибий тенгликда йўл қўйилган хатони $f(x) = x^m$ функциянинг Тейлор формуласидаги қолдиқ ҳад R_n орқали топамиз:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \times$$

$$\times (1 + \theta(x-1))^{m-n-1},$$

бунда $a = 1, 0 < \theta < 1$.

$x-1=t$ белгилаш киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(1+t)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}t^n, \\ R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}t^{n+1} \cdot (1+t)^{m-n-1}. \quad (4)$$

(4) формула Ньютон биномининг ихтиёрий m кўрсаткич (m - ҳақиқий сон) учун умумлашмасини беради. Хусусий ҳолда, кўрсаткич m бутун мусбат сон бўлганда, $R_m = 0$ бўлиб, (4) тенглик Ньютон биномининг элементар формуласига айланади. Агар m бутун мусбат сон бўлмаса, у ҳолда (4) тенглик Ньютон биномининг тақрибий ифодасини беради.

$n \rightarrow \infty$ да $-1 < t < 1$ қийматларда (4) даги $R_n \rightarrow 0$ (қаторлар назариясида исбот қилинади). $n = 1, 2, 3$ деб энг содда тақрибий биномиал формулаларга эга бўламиз:

$$(1+t)^m \approx 1 + mt,$$

$$(1+t)^m \approx 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2,$$

$$(1+t)^m \approx 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3.$$

Бу формулалардан иккинчиси биринчисига, учинчиси иккинчисига нисбатан аниқроқдир. ▲

417. 1) $\cos 5^\circ$; 2) $\sqrt[5]{121}$ ларнинг тақрибий қийматларини 10^{-6} гача аниқликда ҳисобланг.

Δ 1) $\cos x$ функция учун 415-мисолда чиқарилган тақрибий формула (3) дан фойдаланамиз. Бу формулага 5° нинг радиан ўлчови $x = \arcsin 5^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}$ ни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2! \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{4! \cdot 36^4} - \dots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)! \cdot 36^{2n}}.$$

Бу тақрибий формула билан $\cos 5^\circ$ ни 10^{-6} гача аниқликда ҳисоблаш учун биринчи ҳаддан бошлаб нечта ҳадни олиш кераклигини билиш мақсадида қолдиқ ҳад R_{2m+1} нинг катталигини кетма-кет баҳолаймиз:

$$|R_1| \leq \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2! \cdot 36^2} < 0,004;$$

$$|R_3| \leq \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4! \cdot 36^4} < 0,000003;$$

$$|R_5| \leq \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6! \cdot 36^6} < 0,00000003.$$

Бунда $|R_5| < 10^{-6}$. Шунинг учун $\cos 5^\circ$ ни 10^{-6} гача аниқликда тақрибий ҳисоблаш учун формуладаги биринчи 3 та ҳадни олиш етарли:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 36^4} \approx 1 - 0,0038077 + 0,0000024 \approx 0,996195.$$

Бу ерда ҳисоблашни 10^{-6} гача аниқликда таъминлаш учун π нинг қиймати ($\pi \approx 3,1415917$) ва барча оралиқ натижалар 10^{-7} гача аниқликда олинди;

2) $\sqrt[5]{121}$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt[5]{121} = \sqrt[5]{125 - 4} = 5 \left(1 - \frac{4}{125} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

(4) биномиал формулада $t = -\frac{4}{125} = -0,032$ ва $m = \frac{1}{5}$ деб топамиз:

$$\sqrt[5]{121} = 5 \left(1 - \frac{0,032}{3} + \frac{0,032^2}{9} - \frac{5 \cdot 0,032^3}{81} - \frac{10 \cdot 0,032^4}{243} - \dots + R_n \right).$$

Қолдиқ ҳадни кетма-кет баҳолаш йўли билан қуйидагини топамиз:

$$5|R_3| = \frac{5 \left| \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \right|}{4!} \cdot 0,032^4 (1 - 0,0320)^{\frac{1}{5} - 3 - 1} < 10^{-6}.$$

Шундай қилиб, биномиал формулада R_3 дан олдинги биринчи 4 та ҳадни олиш ҳисоблашни 10^{-6} гача аниқликда таъминлайди:

$$\sqrt[5]{121} \approx 5(1 - 0,0106667 + 0,0001138 - 0,0000020) \approx 4,946088. \quad \blacktriangle$$

Худди шунга ўхшаш Тейлор формуласи ёрдамида трансцендент функциялар ва мураккаб алгебраик функцияларнинг сон қийматини топиш мумкин. Кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик функцияларнинг сон қийматлари, квадрат ва куб илдизларнинг сон қийматларининг жадвали мана шундай йўл билан тузилган.

418. 1) 3^x ; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) xe^x функцияларни x га нисбатан n -даражали кўпхад кўринишда тақрибий топинг, хатоликларни аниқланг ва уларни x нинг қандай қийматларида етарлича кичик қилиш мумкинлигини кўрсатинг.

419. 1) e^a ; 2) $\cos x$ функцияларни $(x - a)$ икки ҳадга нисбатан n -даражали кўпхад кўринишида тақрибий ифода-ланг ва бунда ҳосил бўладиган хатоликни баҳоланг.

420. Қуйидагиларни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг:

1) $\cos 10^\circ$, 2) $\sqrt[3]{e}$, 3) $\sqrt[7]{129}$, 4) $\sin 36^\circ$.

8-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ МОНОТОНЛИК ШАРТИ. ЭКСТРЕМУМЛАР

1. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да узлуксиз, $(a; b)$ да дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда а) $\forall x \in (a; b)$ учун $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) бўлганда $f(x)$ $[a; b]$ да ўсувчи (камаювчи) бўлади; б) $\forall x \in (a; b)$ учун $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) бўлганда $f(x)$ функция $[a; b]$ да камаймайдиган (ўсмайдиган) бўлади. $f'(x) = 0$ тенгламанн қаноатлантирадиган нуқталарга стационар нуқталар дейилади.

Қоида. $f(x)$ функциянинг монотонлик интервалларини топиш учун унинг аниқланиш соҳасини стационар нуқталар билан маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади. Агар стационар нуқталар мавжуд бўлмаса; $f'(x)$ нинг ишораси $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасида текширилади.

2. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да аниқланган бўлиб, $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a; b)$ атрофдаги барча x нуқталар учун $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) ўринли бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг максимум (минимум) нуқтаси дейилади.

Максимум ва минимум нуқталар экстремум нуқталари дейилади. Функциянинг максимум қиймати $y_{\max}$ билан, минимум қиймати $y_{\min}$ билан белгилаб ёзилади.

3. Экстремумнинг зарурий шarti.

Агар x_0 $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f'(x_0) = 0$ ёки $f'(x_0)$ мавжуд бўлмайди. $f'(x_0) = 0$ ва чекли ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталар критик нуқталар дейилади.

4. Экстремумнинг етарли шarti.

1-қоида. Агар x_0 критик нуқта ва етарли кичик $\delta > 0$ учун $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$ ($f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$) бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади. Агар $f'(x_0 - \delta) \cdot f'(x_0 + \delta) > 0$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди.

$f'(x_0)$	$f'(x_0 - \delta)$	$f'(x_0 + \delta)$	$f(x)$
0 ёки мавжуд эмас	+	-	максимум
0 ёки мавжуд эмас	-	+	минимум
0 ёки мавжуд эмас	+	+	экстремум мавжуд бўлмайди
0 ёки мавжуд эмас	-	-	экстремум мавжуд бўлмайди

$f(x)$ функциянинг экстремум қийматларини топиш учун қуйидаги ишлар бажарилади:

1) $f(x)$ нинг аниқланиш соҳаси топилади;
2) $f'(x)$ топилади ва $f(x)$ функция аниқланиш соҳасининг ички қисмида ётувчи барча критик нуқталар аниқланади;

3) функция аниқланиш соҳасининг чегаравий нуқталари ва топилган критик нуқталарни ўсиш тартибига қараб ёзиб олинади, сўнгра бу нуқталар билан функция аниқланиш соҳасини маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади ва юқоридаги қоидага амал қилиб экстремум нуқталар топилади. Бундай йўл билан экстремум қийматларини топиш функция графигини чинида катта аҳамиятга эга.

2-қоида. Агар $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади.

3-қоида. Агар $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда n жуфт сон бўлганда $f(x)$ нуқтада экстремумга эришади. Бунда $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$) бўлганда максимум (минимум) бўлади. n —тоқ сон бўлганда, экстремум мавжуд бўлмайди.

Худди шунга ўхшаш Тейлор формуласи ёрдамида трансцендент функциялар ва мураккаб алгебраик функцияларнинг сон қийматини топиш мумкин. Кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик функцияларнинг сон қийматлари, квадрат ва куб илдиэларнинг сон қийматларининг жадвали маш шундай йўл билан тузилган.

418. 1) 3^x ; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) xe^x функцияларни x га нисбатан n -даражали кўпхад кўринишда тақрибий топинг, хатоликларни аниқланг ва уларни x нинг қандай қийматларида етарлича кичик қилиш мумкинлигини кўрсатинг.

419. 1) e^a ; 2) $\cos x$ функцияларни $(x - a)$ икки ҳадг нисбатан n -даражали кўпхад кўринишда тақрибий ифода-ланг ва бунда ҳосил бўладиган хатоликни баҳоланг.

420. Қуйидагиларни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг:

1) $\cos 10^\circ$, 2) $\sqrt[3]{e}$, 3) $\sqrt[7]{129}$, 4) $\sin 36^\circ$.

8-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ МОНОТОНЛИК ШАРТИ. ЭКСТРЕМУМЛАР

1. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да узлуксиз, $(a; b)$ да дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда а) $\forall x \in (a; b)$ учун $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) бўлганда $f(x)$ $[a; b]$ да ўсувчи (камаювчи) бўлади; б) $\forall x \in (a; b)$ учун $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) бўлганда $f(x)$ функция $[a; b]$ да камаймайдиган (ўсмайдиган) бўлади. $f'(x) = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталарга стационар нуқталар дейилади.

Қоида. $f(x)$ функциянинг монотонлик интервалларини топиш учун унинг аниқланиш соҳасини стационар нуқталар билан маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади. Агар стационар нуқталар мавжуд бўлмаса; $f'(x)$ нинг ишораси $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасида текширилади.

2. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да аниқланган бўлиб, $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a; b)$ атрофдаги барча x нуқталар учун $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) ўринли бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг максимум (минимум) нуқтаси дейилади.

Максимум ва минимум нуқталар экстремум нуқталари дейилади. Функциянинг максимум қиймати $y_{\max}$ билан, минимум қиймати $y_{\min}$ билан белгилаб ёзилади.

3. Экстремумнинг зарурий шарти.

Агар x_0 $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f'(x_0) = 0$ ёки $f'(x_0)$ мавжуд бўлмайди. $f'(x_0) = 0$ ва чекли ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталар критик нуқталар дейилади.

4. Экстремумнинг етарли шарти.

1-қоида. Агар x_0 критик нуқта ва етарли кичик $\delta > 0$ учун $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$ ($f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$) бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади. Агар $f'(x_0 - \delta) \cdot f'(x_0 + \delta) > 0$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди.

$f'(x_0)$	$f'(x_0 - \delta)$	$f'(x_0 + \delta)$	$f(x)$
0 ёки мавжуд эмас	+	-	максимум
0 ёки мавжуд эмас	-	+	минимум
0 ёки мавжуд эмас	+	+	экстремум мавжуд бўлмайди
0 ёки мавжуд эмас	-	-	экстремум мавжуд бўлмайди

$f(x)$ функциянинг экстремум қийматларини топиш учун қуйидаги ишлар бажарилади:

- 1) $f(x)$ нинг аниқланиш соҳаси топилади;
- 2) $f'(x)$ топилади ва $f(x)$ функция аниқланиш соҳасининг ички қисмида ётувчи барча критик нуқталар аниқланади;

3) функция аниқланиш соҳасининг чегаравий нуқталари ва топилган критик нуқталарни ўсиш тартибига қараб ёзиб олинади, сўнг бу нуқталар билан функция аниқланиш соҳасини маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади ва юқоридаги қондага асосан экстремум нуқталар топилади. Бундай йўл билан экстремум қийматларини топиш функция графигини чинишда катта аҳамиятга эга.

2-қоида. Агар $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади.

3-қоида. Агар $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда n жуфт сон бўлганда $f(x)$ нуқтада экстремумга эришади. Бунда $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$) бўлганда максимум (минимум) бўлади. n —тоқ сон бўлганда, экстремум мавжуд бўлмайди.

5. $[a; b]$ да узлуксиз бўлган $f(x)$ функциянинг энг катта (кичик) қийматларини топиш учун $f(x)$ функциянинг $x = a$, $x = b$ нуқталардаги қийматлари ва $(a; b)$ га тегиштли критик нуқталардаги қийматларини таққослаб, уларнинг энг каттаси (кичиги) ни аниқлаш керак.

Агар $f(x)$ функция бирор интервалда узлуксиз ва бу интервалда фақат битта экстремумга эга бўлиб, экстремум қиймати максимум (минимум) бўлса, у ҳолда максимум (минимум) қиймат $f(x)$ функциянинг берилган интервалдаги энг катта (энг кичик) қиймати бўлади.

421. Қуйидаги функцияларнинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг:

1) $x = \ln(1 - x^2)$;

2) $z = x + (1 + 2\sqrt{x})$;

3) $u = 1 - 24x + 15x^2 - 2x^3$;

4) $v = \ln|x|$.

Δ 1) а) $D(y) : 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$; $D(y) = (-1; 1)$;

б) $y' = \frac{-2x}{1 - x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 0$;

в)

	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$
$y'(x)$	+	-
$y(x)$	↗	↘

Демак, $-1 < x < 0$ да $y = \ln(1 - x^2)$ функция ўсади, $0 < x < 1$ да камаёди.

2) а) $D(z) = [0; \infty)$; б) $z' = 1 + 3\sqrt{x}$, бунда стационар нуқта йўқ (чунки $1 + 3\sqrt{x} \neq 0$), $[0; \infty)$ да z' нинг ишорасини қараш билан чекланамиз, бу оралиқда $z' > 0$, демак z функция $[0; \infty)$ да ўсади.

3) а) $D(u) = (-\infty; \infty)$ б) $u' = -24 + 30x - 6x^2 = 0$
 $\Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $u' = -6(x - 1)(x - 4)$;

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 4)$	$(4; \infty)$
u'	-	+	-
u	↘ функция камаёди	↗ функция ўсади	↘ функция камаёди

$$4) a) D(v) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty);$$

$$б) v' = (\ln |x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \pm \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} \neq 0$$

(яъни ҳақиқий илдиэларга эга эмас), шунинг учун v' нинг ишорасини $D(v)$ да қараш билан чекланамиз.

в) $x > 0$ да $v' > 0$; $x < 0$ да $v' < 0$. Демак, $(-\infty; 0)$ да $v(x)$ функция камайдн; $(0; \infty)$ да эса ўсади. ▲

422. Қуйидаги функцияларни ўсиш ва камайишга текширинг:

$$1) y = x^3 + 3x^2 + 3x; \quad 4) y = \sqrt[3]{(x^2 - 9)^3};$$

$$2) y = x^3 - 3x + 5; \quad 5) y = \cos x - x;$$

$$3) y = e^{kx}; \quad 6) y = x|x|.$$

423. Қуйидаги функцияларнинг экстремум нуқталарини топинг:

$$1) y = x^3 - 12x; \quad 4) v = x^2 + \sqrt{x^5};$$

$$2) z = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2); \quad 5) \omega = \sin^2 x;$$

$$3) u = x\sqrt{1-x^2}; \quad 6) \lambda = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Δ 1) $y = x^3 - 12x$ функциянинг экстремум нуқталарини 1-қондага кўра топайлик. y' ни ва критик нуқталарни толамиз:

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4), \quad y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 2.$$

$y = x^3 - 12$ функция $(-\infty; \infty)$ да аниқланган ва уз-
вуксиз бўлгани, $x_{1,2} = \pm 2$ бу соҳанинг ички нуқталари
ўлгани ҳамда $y' = 3(x^2 - 4)$ $(-\infty; \infty)$ да мавжуд бўлга-
ни учун берилган функциянинг $x_{1,2} = \pm 2$ дан бошқа кри-
тик нуқталари йўқ.

Энди критик нуқталарнинг ҳар бирининг чап ва ўнг то-
монида (а) критик нуқтанинг етарли кичик атрофида ёки б)
функциянинг аниқланиш соҳасини критик нуқталар билан
ўлган интервалларда) y' нинг ишорасини текшира-
миз. Ҳи-
областини қисқартириш мақсадида текшириш ишларини қуйи-
ги жадваллар орқали бериш қулайдир:

а)

x	-3	-2	1	2	3
y'	+	0	-	0	+
y	ўсади	$y_{\max}(-2) = 16$	камаяди	$y_{\min}(0) = -16$	ўсади

Бунда -2 ва 2 ларнинг $\delta = 1$ атрофи олинди.

б)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗ ўсади	$y_{\max} = 16$	камаяди ↘	$y_{\min} = -16$	↗ ўсади

Энди $y = x^3 - 12x$ функциянинг экстремум қийматларини 2-қоидага кўра топайлик. Бунинг учун берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз ва ҳар бир стационар нуқтада функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текшираемиз: $y' = 3(x^2 - 4)$; $y'' = 6x$; $y''(-2) = -12 < 0$, демак, $x = -2$ да функция максимумга эришади ва $y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$; $y''(2) = 12 > 0$, демак, $x = 2$ да функция минимумга эришади ва $y_{\min} = y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

2) $z(x)$ функция $(-\infty; \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Бу функция $(-\infty; \infty)$ да ҳосилага эга, шунинг учун критик нуқталарни $z'(x) = 0$ шартдан аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} z'(x) &= (2x+1)(x^2+x-2) + (2x+1)(x^2+x+2) = \\ &= (2x+1)(x^2+x-2+x^2+x+2) = (2x+1) \cdot 2x \cdot (x+1) \\ z' = 0 &\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0. \end{aligned}$$

Бу нуқталар функция аниқланиш соҳасига тегишли ички нуқталардир. Функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартидаги 1-қоидадан фойдаланамиз. Биринчи тартибли ҳосила ишорасининг ўзгаришини қуйидаги жадвал орқали ифодалаймиз:

	$\infty < x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < -\frac{1}{2}$	$x_2 = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x_3 = 0$	$0 < x < \infty$
$z'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$z(x)$	↘	$z_{\min} = -4$	↗	$z_{\max} = -\frac{63}{16}$	↘	$z_{\min} = -4$	↗

$z'(x)$ нинг $(-\infty; -1)$ даги ишорасини билиш учун бу ораликка тегишли бирор, масалан, $x = -2$ сонда $z'(x)$ нинг ишорасини билиш етарли: $z'(-2) = (2x(2x+1)(x+1))_{x=-2} = -4(-3)(-1) < 0$, демак, $(-\infty; -1)$ да $z'(x) < 0$. Бошқа интервалларда ҳам $z'(x)$ нинг ишораси худди шунинг каби аниқланади.

$x_1 = -1$ ва $x_3 = 0$ нуқталарнинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартиргани учун бу нуқталарда функция минимумга эга бўлади; $x_2 = -\frac{1}{2}$ нуқтанинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ишорасини «+» дан «-» га ўзгартиргани учун бу нуқтада функция максимумга эга бўлади:

$$z_{\min}(-1) = -4; z_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{63}{16}; z_{\min}(0) = -4.$$

Агар функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдалансак, иш анча осон кўчатилади. Бунинг учун $z''(x)$ ни топамиз:

$$\begin{aligned} z''(x) &= (2x(2x+1)(x+1))' = 2(2x^3 + 3x^2 + x)' = \\ &= 2(6x^2 + 6x + 1). \end{aligned}$$

Энди $z''(x)$ нинг ишорасини $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 0$ стационар нуқталарда текшираемиз (бунда стационар нуқталар критик нуқталар бўлади):

$$\begin{aligned} z''(-1) &= (2(6x^2 + 6x + 1))_{x=-1} = 2(6 - 6 + 1) = 2 > 0, \\ z''\left(-\frac{1}{2}\right) &= -1 < 0, z''(0) = 2 > 0. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, қоидага кўра $x_1 = -1$; $x_3 = 0$ нуқталарда функция минимумга, $x_2 = -\frac{1}{2}$ да максимумга эга.

а)

x	-3	-2	1	2	3
y'	+	0	-	0	+
y	ўсади	$y_{\max}(-2) = 16$	камаяди	$y_{\min}(0) = -16$	ўсади

Бунда -2 ва 2 ларнинг $\delta = 1$ атрофи олинди.

б)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗ ўсади	$y_{\max} = 16$	↘ камаяди	$y_{\min} = -16$	↗ ўсади

Энди $y = x^3 - 12x$ функциянинг экстремум қийматларини 2-қоидага кўра топайлик. Бунинг учун берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз ва ҳар бир стационар нуқтада функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текшираемиз: $y' = 3(x^2 - 4)$; $y'' = 6x$; $y''(-2) = -12 < 0$, демак, $x = -2$ да функция максимумга эришади ва $y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$; $y''(2) = 12 > 0$, демак, $x = 2$ да функция минимумга эришади ва $y_{\min} = y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

2) $z(x)$ функция $(-\infty; \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Бу функция $(-\infty; \infty)$ да ҳосиллага эга, шунинг учун критик нуқталарни $z'(x) = 0$ шартдан аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} z'(x) &= (2x+1)(x^2+x-2) + (2x+1)(x^2+x+2) = \\ &= (2x+1)(x^2+x-2+x^2+x+2) = (2x+1) \cdot 2x \cdot (x+1) \\ z' &= 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0. \end{aligned}$$

Бу нуқталар функция аниқланиш соҳасига тегишли ички нуқталардир. Функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартидаги 1-қоидадан фойдаланамиз. Биринчи тартибли ҳосила ишорасининг ўзгаришини қуйидаги жадвал орқали ифодаalayмиз:

	$-\infty < x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < -\frac{1}{2}$	$x_2 = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x_3 = 0$	$0 < x < \infty$
$z'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$z(x)$	↘	$z_{\min} = -4$	↗	$z_{\max} = -\frac{63}{16}$	↘	$z_{\min} = -4$	↗

$z'(x)$ нинг $(-\infty; -1)$ даги ишорасини билиш учун бу оралиққа тегишли бирор, масалан, $x = -2$ сонда $z'(x)$ нинг ишорасини билиш етарли: $z'(-2) = (2x(2x+1)(x+1))_{x=-2} = -4(-3)(-1) < 0$, демак, $(-\infty; -1)$ да $z'(x) < 0$. Бошқа интервалларда ҳам $z'(x)$ нинг ишораси худди шунинг каби аниқланади.

$x_1 = -1$ ва $x_3 = 0$ нуқталарнинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартиргани учун бу нуқталарда функция минимумга эга бўлади; $x_2 = -\frac{1}{2}$ нуқтанинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ишорасини «+» дан «-» га ўзгартиргани учун бу нуқтада функция максимумга эга бўлади:

$$z_{\min}(-1) = -4; z_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{63}{16}; z_{\min}(0) = -4.$$

Агар функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдалансак, иш анча осон кўчарди. Бунинг учун $z''(x)$ ни топамиз:

$$\begin{aligned} z''(x) &= (2x(2x+1)(x+1))' = 2(2x^3 + 3x^2 + x)' = \\ &= 2(6x^2 + 6x + 1). \end{aligned}$$

Энди $z''(x)$ нинг ишорасини $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 0$ стационар нуқталарда текшираемиз (бунда стационар нуқталар критик нуқталар бўлади):

$$z''(-1) = (2(6x^2 + 6x + 1))_{x=-1} = 2(6 - 6 + 1) = 2 > 0,$$

$$z''\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0, z''(0) = 2 > 0.$$

Шундай қилиб, қоидага кўра $x_1 = -1$; $x_3 = 0$ нуқталарда функция минимумга, $x_2 = -\frac{1}{2}$ да максимумга эга.

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз. $D(u) = [-1; 1]$.

Критик нуқталарни излаймиз: $u' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $u' = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_{3,4} = \pm 1$ да u' мавжуд бўлмайди.

дан $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси нинг ички нуқталари бўлгани ва бу нуқталарда узлуксиз бўлгани учун критик нуқталар бўлади. $x = \pm 1$ нуқталар $D(u)$ нинг ички нуқтаси бўлмай, чегара бўлгани учун критик нуқталар бўлмайди.

Энди критик нуқталарга қушни нуқталарда u расини текшираемиз. Бунинг учун қуйидаги жадвални тузимиз:

	-0,9	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0,9
u'	-	0	+	0	-
u	✓	$u_{\min} = -\frac{1}{2}$	✓	$u_{\max} = \frac{1}{2}$	✓

$$u_{\min} = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}; \quad u_{\max} = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

4) $v(x)$ функция $[0; \infty)$ да аниқланган.

$v(x)$ функциянинг ҳосиласи ва критик нуқталарини топамиз:

$$v'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}; \quad v' = 0 \Rightarrow x = 0$$

лекин $x = 0$ нуқта $v(x)$ функция аниқланиш соҳаси нинг ички нуқтаси эмас, аммо $v(x)$ функция узлуксиз. Шунинг учун $x = 0$ критик нуқтаси эмас. $x = 0$ да v' мавжуд ва бу оралиқда $v(x)$ функция би-та ҳам критик нуқтага эга бўлмагани учун экстремумга эга эмас. Функция ўзининг аниқланиш соҳасида монотон ўсди.

Агар $x = 0$ нуқта $[0; \infty)$ нинг ички нуқтаси эмас, эътиборга олмасдан, функциянинг экстремумга эга бўлиши

етарли шартининг 2-қондасидан фойдалансак, $v'' = \frac{15}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

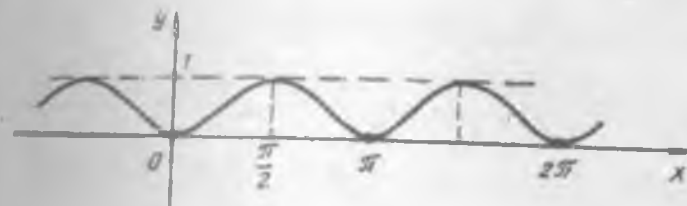
$v''(0) = 2 > 0$, демак, $x = 0$ да $v(x)$ функция минимумга эга деган нотиқри хулосага келамиз.

5) Критик нуқталарини топамиз:

$$\omega' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x; \quad \omega' = 0 \Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{2},$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ҳамма x_k нуқталар критик нуқталардир, чунки функция сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида аниқланган ва узлуксиз, ω' ҳам $(-\infty; \infty)$ да мавжуд.

Критик нуқталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текшираемиз: $\omega'' = 2 \cos 2x$; $\omega''(x_k) = 2 \cos k\pi$.



24-чизма

k — жуфт сон бўлганда $\omega''(x_k) = 2 > 0$ бўлиб, x_k нуқталар минимум нуқталари ва $\omega_{\min} = 0$; k — тоқ сон бўлганда $\omega''(x_k) = -2 < 0$ бўлиб, x_k нуқталари максимум нуқталари бўлиб, $\omega_{\max} = 1$ (24-чизма) ўринлидир. Бу ерда ω функциянинг максимум ва минимумлари қатъий алмашиб боради.

6) $\lambda(x)$ функция $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ да аниқланган. Унинг критик нуқталарини топамиз:

$$\lambda'(x) = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-3x}{3x^{1/3}(x+2)^2} = \frac{4-x}{3x^{1/3}(x+2)^2}$$

$$\lambda'(x) = 0 \Rightarrow x = 4; \quad x = 0 \text{ ва } x = -2 \text{ да } \lambda'(x) = \infty.$$

Шундай қилиб, $x = 4$, $x = 0$ лар берилган функциянинг критик нуқталаридир ($x = -2$ функциянинг аниқланиш соҳасига қирмагани учун критик нуқта бўла олмайди). $\lambda'(x)$ нинг ишорасининг ўзгаришини билиш учун қуйидаги жадвални тузимиз:

	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x < \infty$
$\lambda'(x)$	—	∞	—	∞	+	0	—
$\lambda(x)$	↗	мавж. эмас	↗	$\lambda_{\min} = 0$	↗	$\lambda_{\max} = \sqrt[3]{2/3}$	↗

$x = -3$ да $\lambda'(-3) < 0$, шунинг учун $(-\infty; -2)$ да $\lambda'(x) < 0$ ва ҳоказо бошқа интервалларда ҳам $\lambda'(x)$ нинг ишораси худди шунинг каби аниқланади.

Жадвалдан $\lambda_{\min} = \lambda(0) = 0$, $\lambda_{\max} = \lambda(4) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ эканлиги кўринади. $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ ларни топайлик:

$$\lambda_{\min} = \lambda(0) = \left(x^{2/3} \cdot \frac{1}{x+2} \right)_{x=0} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0; \quad \lambda_{\max} = \lambda(4) = \left(x^{2/3} \cdot \frac{1}{x+2} \right)_{x=4} = 4^{2/3} \cdot \frac{1}{6} = 2^{4/3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Бу мисолда $x = 0$ критик нуқтанинг характери аниқлашда экстремум етарли шартининг 2-қондасидан фойдаланиб бўлмайди, чунки $x = 0$ нуқтада функция дифференциалланувчи эмас. ▲

424. $f(x) = x^2 e^{-x}$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

Δ Критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x^2 e^{-x} (3 - x); \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3. \text{ Бу нуқталар критик нуқталардир.}$$

$f'(x)$ $(-\infty; \infty)$ да мавжуд бўлгани учун экстремумнинг етарли шартининг 2-қондасидан фойдаланиш қулайдир. Бунинг учун $f''(x)$ ни топамиз:

$$f''(x) = 2x e^{-x} (3 - x) - x^2 e^{-x} (3 - x) - x^2 e^{-x} = x e^{-x} (x^2 - 6x + 6).$$

Критик нуқталарни $f''(x)$ га қўйсак, $f''(0) = 0$; $f''(3) = 3e^{-3}(9 - 18 + 6) < 0$ га эга бўламиз. Экстремум етарли шартининг 2-қондасига кўра $f''(3) < 0$ бўлгани учун $x = 3$ нуқтада функция максимумга эга бўлади ва у $f(3) = 27e^{-3}$ га тенг. $x_1 = 0$ критик нуқтанинг характери ҳозирча аниқ эмас, чунки

$$f''(0) = 0.$$

$x_1 = 0$ критик нуқтанинг характери аниқлаш учун экстремумнинг етарли шартининг 3-қондасидан фойдаланамиз. Бунинг учун $f'''(0)$ ни топамиз:

$$f'''(x) = -e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) + e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \quad f'''(0) = 6 \neq 0.$$

$x = 0$ нуқтада биринчи 0 дан фарqli ҳосила 3-тартибли (тоқ тартибли). Демак, $x = 0$ критик нуқта экстремум нуқтаси эмас. ▲

425. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ функциянинг $[-1; 4]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ 1) $f(x)$ функциянинг сегментнинг чегараларидаги қийматларини топамиз:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3; \quad f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 1 = 17.$$

2) $f(x)$ функциянинг $(-1; 4)$ интервалдаги критик нуқталари ва бу нуқталардаги функциянинг қийматларини топамиз:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2); \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Бу нуқталар критик нуқталардир.

$$f(0) = (x^3 - 3x^2 + 1)_{x=0} = 1; \quad f(2) = (x^3 - 3x^2 + 1)_{x=2} = -3.$$

3) Функциянинг топилган қийматларини ўзаро солиштирамиз:

$$f(-1) = -3, \quad f(4) = 17, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = -3.$$

Демак, $\max_{[-1; 4]} f(x) = 17$; $\min_{[-1; 4]} f(x) = -3$. ▲

426. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ функциянинг $(0; \infty)$ даги энг катта қийматини аниқланг.

Δ $(0; \infty)$ да функция дифференциалланувчи, критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

критик нуқтадир.

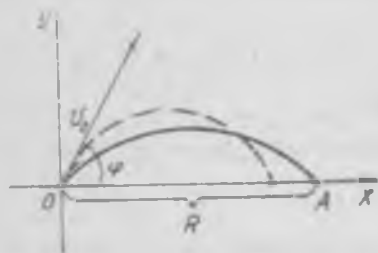
$x = 0$ да $f'(x) = \infty$, лекин $x = 0$ нуқтада $f(x)$ функция аниқланмагани учун $x = 0$ критик нуқта бўла олмайди.

Демак, $(0; \infty)$ интервалда битта $x = e$ критик нуқта бор экан. Энди бу нуқтада экстремумнинг қайси бир қиймати мавжуд бўлишини кўрайлик. Бунинг учун экстремумнинг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдаланамиз:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^3 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x(3 - \ln x)}{x^4} = -\frac{3 - \ln x}{x^3},$$

$$f''(e) = -\frac{3 - \ln e}{e^3} = -\frac{3 - 1}{e^3} = -\frac{2}{e^3} < 0.$$

Демак, $x = e$ да функция максимумга эга экан ва $f_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$. Шундай қилиб, $f(x)$ функция $(0; \infty)$ да фақат битта максимум нуқтасига эга бўлди, шунинг учун $\max_{(0; \infty)} f(x) = \frac{1}{e}$ ўринлидир. ▲



25- чизма

427. Горизонтга φ бурчак билан қиялатиб қўйилган тўпдан v_0 бошланғич тезлик билан отилган ўқнинг бўшлиқда учиш узоқлиги $R = OA$ (25- чизма)

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

формула билан аниқланади (g —оғирлик кучининг тезлани-

ши). Берилган v_0 бошланғич тезликда ўқнинг учиш узоқлиги R энг катта бўлиши учун φ бурчак қандай бўлиши аниқлансин.

▲ R миқдор ўзгарувчи φ бурчакнинг функцияси. Шу функцияни $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ кесмада максимумга текшираамиз.

$R(\varphi)$ функция $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ да узлуксиз бўлгани учун $R(\varphi)$ нинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ даги энг катта қийматини қуйидагича топамиз:

1) $R(0) = 0; R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

2) $R(\varphi)$ нинг $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ даги критик нуқталарини топамиз

$$R'(\varphi) = \frac{2v_0}{g} \cos 2\varphi; R'(\varphi) = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g};$$

3) Топилган $R(0) = 0, R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}$ қийматларни солиштираамиз.

Шундай қилиб, $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} R(\varphi) = \frac{v_0^2}{g}$ экан. ▲

428. Пароходга ёкиш учун сарфланган ёнилғининг харажати унинг тезлигининг кубига пропорционал. 10 км/соат тезликда сарфланаётган ёнилғи харажати соатига 30 сўм, қолган харажатлар (тезликка боғлиқ бўлмаган) соатига 480 сўмни ташкил қилади. Қандай тезликда 1 км масофага сарфланган харажатлар энг кичик бўлади? Шунда умумий харажатлар йиғиндиси соатига қанча бўлади? ▲ Пароходнинг тезлигини x км/соат деб белгилайлик; шу тезликка мос келган харажат y сўм бўлсин дейлик. Бу ҳолда $\frac{y}{x^3} = \frac{30}{10^3} = \frac{3}{100} = 0,03; y = 0,03x^3$ соатига сарф қилинган харажатни билдиради.

Пароход 1 км масофани x км/соат тезлик билан $\frac{1}{x}$ соатда босиб ўтади; 1 соатда қилинган умумий харажат $(0,03x^3 + 480)$ сўмни ташкил этади. $\frac{1}{x}$ соатда қилинган умумий харажат $y = \frac{1}{x}(0,03x^3 + 480) = \frac{3x^2}{100} + \frac{480}{x}$ бўлади.

Энди $y = \frac{3x^2}{100} + \frac{480}{x}$ функциянинг x нинг қандай қийматида энг кичик бўлишини текшираамиз. $D(y) = (0; \infty)$ ва бунда $y(x)$ функция узлуксиз, $y(x)$ функциянинг критик нуқталарини топамиз:

$$y'(x) = \frac{6x}{100} - \frac{480}{x^2} = \frac{3x}{50} - \frac{480}{x^2} = \frac{3x^3 - 24000}{50x^2};$$

$y' = 0 \Rightarrow x^3 = 8000, x = 20$ (км/с) критик нуқта бўлади, $x = 0$ да y' мавжуд бўлмаса-да, бу нуқтада $y(x)$ функция аниқланмагани учун критик нуқта бўла олмайди.

Энди критик нуқта $x = 20$ да экстремумнинг қайси бир қиймати мавжуд бўлишини кўрайлик, бунинг учун экстре-

$$S'_\Delta > 0.$$

Шундай қилиб,

$$\min S_\Delta = \left(\frac{48}{x_0 \sqrt{8-x_0^2}} \right)_{x_0=2} = \frac{48}{2 \cdot 2} = 12 \text{ кв. бирл.}$$

булиб, $N(x_0; y_0) = N(2; 3)$ экан. ▲

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматларини топинг:

$$430. y = x^2(x-6).$$

$$431. y = 3 - 2x^2 - x^4.$$

$$432. y = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

$$433. y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}.$$

$$434. y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$$

$$435. y = e^{-x} + e^{2x}.$$

$$436. y = \sin x + \cos x.$$

$$437. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$438. y = \sqrt{4x - x^2}.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини аниқланг:

$$439. y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10, \quad [0; 3].$$

$$440. y = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2; 1].$$

$$441. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, \quad [-1; 3].$$

$$442. y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}, \quad [-2; 1].$$

$$443. y = \ln x, \quad (0; 1].$$

$$444. y = e^{-x^2}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$445. y = 2x + \cos 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$446. y = \sin x \cdot \sin 2x, \quad (-\infty; \infty).$$

447. Цилиндр шаклидаги очиқ бакка U л маҳсулот синади. Унинг баландлиги ва асоснинг радиуси қандай бўлганда бакка энг кам маҳсулот кетади?

448. Узунлиги l га тенг бўлган сим бўлагини букиб шундай тўғри тўртбурчак ясангки, унинг юзи энг кичик бўлсин.

449. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ҳовлининг бир томони канал четига туташган, уч томони эса девор билан ўралган. Ҳовлининг ўлчамлари қандай бўлганда унинг юзи 800 м^2 га тенг бўлиб, девор узунлиги энг кичик бўлади?

450. Узунлиги 48 см, эни 30 см бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги қалин қоғоз (картон) нинг тўрт учидан бир хил квадратчалар қирқиб олиниб, қоғознинг қолган қисмидан тўғри тўртбурчак шаклида очиқ қутича тайёрланган. Қутичанинг ҳажми энг катта бўлиши учун қирқиб олинган квадратчанинг томони қандай бўлиши керак?

451. Ричаг A да таянч нуқтасига эга бўлиб, B ($AB = a$) нуқтага P юк осилган. Ричаг узунлиги бирлигининг оғирлиги k га тенг. Энг кичик куч билан P юк текислашиши учун ричаг узунлиги қандай бўлиши керак? (Текислашиш кучининг моменти юк ва ричаг моментларининг йиғиндисига тенг бўлиши керак.)

452. Бошланғич массаси m_0 га тенг бўлган ёмғир томчиси оғирлик кучининг таъсирида текис буғланиб тушади, бунда унинг массасининг камайиши вақтга пропорционал (пропорционаллик коэффиценти k га тенг). Томчи туша бошлагандан қанча вақтдан кейин унинг кинетик энергияси энг катта бўлади ва у қандай бўлади? (Бунда ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмайди.)

453. Ҳарбий кема лангарда турибди, ундан қирғоқнинг энг яқин нуқтасигача 9 км; кемадан лагерга чопар юбориш керак (лагерь қирғоқда жойлашган); кемага қирғоқдаги энг яқин нуқтадан лагергача бўлган масофа қирғоқ бўйлаб 15 км. Агар чопар пиёда 5 км/соат, эшакли қайиқда 4 км/соат тезлик билан юрса, у лагерга энг кам вақтда бориши учун эшакли қайиқ билан лагерга неча км қолгунга қадар сузиб бориши керак?

454. 1,4 м баландликка эга бўлган расм деворга шундай осилганки, унинг пастки чети кузатувчининг кўзидан 1,8 м баландликда. Расмни яхши кўриш учун кузатувчи девордан қандай масофада туриши керак (яъни кўриш бурчани энг катта бўлиши учун)?

455. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ичига чизилган энг катта юзли тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

456. Қандай мусбат сонни ўзига тескари сонга қўшганда йиғинди энг кичик бўлади?

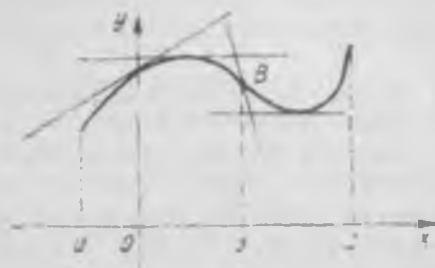
457. R радиусли шарга энг катта ҳажмли цилиндрни ички чизинг.

458. R радиусли шарга энг катта ҳажмли конусни ички чизинг.

459. Узунликлари бир хил бўлган 3 та тахтадан кўндаланг кесими трапеция бўлган тарнов ясаш керак. Тарнов ён ёқларининг қиялиги қанча бўлганда унинг кўндаланг кесим юзи энг катта бўлади?

460. Берилган ҳажмдаги цилиндрнинг тўла сирти энг кичик бўлиши учун унинг радиуси R билан баландлиги H ўртасидаги боғланишни топинг.

9-§. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ ВА БОТИҚЛИГИ. БУРИЛИШ НУҚТАСИ. АСИМПТОТАЛАР



27- чизма

1. Таъриф. Агар $(a; b)$ да $y = f(x)$ эгри чизиқнинг барча нуқталарининг ҳар қандай уринмасидан юқорида (пастда) бўлса, шу оралиқда эгри чизиқ ботиқлиги билан юқorigа (пастга) қараган дейилади (27-чизма).

27-чизмада $(a; b)$ да эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга (қавариқ), $(b; c)$ да юқorigа (ботиқ) қараган.

Эгри чизиқнинг қавариқ қисмини ботиқ қисмидан ажратган нуқта унинг бурилиш нуқтаси дейилади.

2. Ҳосила ёрдамида ботиқлик (қавариқлик)ни текшириш.

Агар $a < x < b$ да	y ҳолда $(a; b)$ да
$f''(x) > 0$ бўлса,	$y = f(x)$ ботиқлиги билан юқorigа (қавариқлиги пастга) қараган бўлади.
$f''(x) < 0$ бўлса,	$y = f(x)$ ботиқлиги билан пастга (қавариқлиги юқorigа) қараган бўлади.

Ботиқлиги билан юқorigа (пастга) қараган деган сўзлар ўрнида $\cap$ ($\cup$) белгиларни ишлатамиз, яъни

Агар $a > x < b$ да

у ҳолда $y = f(x)$

$f''(x) > 0$ бўлса,

$f''(x) < 0$ бўлса,

○

○

$y = f(x)$ функция иккинчи тартибли ҳосиласини 0 га айлантирадиган ва мавжуд этмайдиган, лекин $f(x)$ эгри чизиқ узлуксиз бўладиган ва аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўладиган нуқталарни бурилишга *гумон* нуқталар дейилади (бундай нуқталарни критик нуқталар билан алмаштириб юборманг).

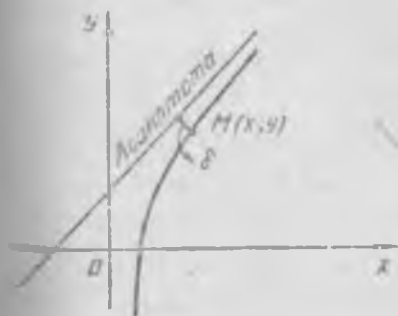
Бурилишнинг мавжудлиги учун (агар иккинчи тартибли ҳосила мавжуд деб фараз этилса) $y'' = 0$ шарт зарурийдир, лекин етарли эмас.

3. Етарли шарт. Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан аниқланган бўлсин. Агар $f''(a) = 0$ бўлса ёки $f''(a)$ мавжуд бўлмаса ($x = a$ нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлса) ва $x = a$ нуқтадан ўтишда $f''(x)$ нинг ишораси ўзгарса, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси *бурилиш* нуқтаси бўлади.

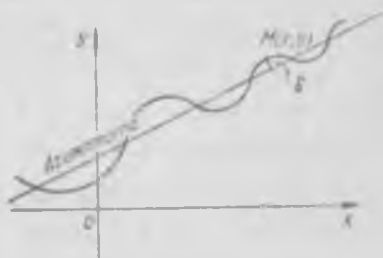
4. Эгри чизиқнинг асимптоталарини топиш.

Таъриф. Агар эгри чизиқнинг ўзгарувчи нуқтаси M чексиз узоқлашганда унинг бирорта a тўғри чизиқдан масофаси нолга интилса, a тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси деб аталади (28-29-чизмалар).

а) Агар $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm \infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm \infty$ бўлса, $x = a$ *вертикал асимптота* бўлади.



28- чизма



29- чизма

6) Агар $k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx)$ лар мавжуд бўлса (бу иккала формулада $x \rightarrow +\infty$ ёки $x \rightarrow -\infty$), у ҳолда $y = kx + b$ оғма асимптота бўлади.

Агар k ва b лардан бирортаси ∞ (ёки $-\infty$) га тенг бўлса, оғма асимптота мавжуд бўлмайди.

Берилган эгри чизик ўзининг асимптотасига худди ўзгаришнинг ўзининг лимитига яқинлашгани каби яқинлашгани мумкин.

461. Қуйидаги эгри чизикларнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ва бурилиш нуқталарини топинг:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; 2) $z = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $u = 4 \sqrt{(x-1)^5} + 20 \sqrt{(x-1)^3}$; 4) $v = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Берилган функцияларнинг ботиқлик, қавариқлик интервалларини топиш учун уларнинг аниқланиш соҳаларини ва бурилишга гумон нуқталарини топамиз. Сўнгра бурилишга гумон нуқталар билан функция аниқланиш соҳасини маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текшираимиз. Агар бир интервалдан иккинчи интервалга ўтишда $f''(x)$ ўз ишорасини ўзгартса, у ҳолда бу икки интервални ажратиб туровчи бурилишга гумон нуқтада бурилиш мавжуд бўлади, акс ҳолда бурилиш мавжуд бўлмайди.

Δ 1) а) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = (-\infty; \infty)$;

б) бурилишга гумон нуқталарни топамиз: $y' = 15x^4 - 20x^3$; $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$; $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $y''(-\infty; \infty)$ да мавжуд бўлгани учун $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ функциянинг $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ дан бошқа бурилишга гумон нуқтаси йўқ;

в) бурилиш учун гумон нуқталарнинг характерни (ҳолатини) қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y''	—	0	—	0	+
y	∩	бур. йўқ	∩	$y_{\text{бур}} = y(1) = 2$	∪

Бўлинган интервалларда y'' нинг ишорасини текшириш учун бу интервалларнинг бирор нуқтасида y'' нинг ишорасини би-

лиш етарли, масалан, $y''(-1) = -120 < 0$, демак, $(-\infty; 0)$ да $y' < 0$.

$y_{\text{бур}} = y(1) = (3x^5 - 5x^4 + 4)_{x=1} = 2$.

2) а) $D(z) = (-\infty; \infty)$,

б) $z' = -\frac{7}{5}(x+2)^{-\frac{7}{5}}$; $z'' = -\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{5}(x+2)^{-\frac{12}{5}} =$

$= -\frac{14}{25} \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}$.

z'' бирор нуқтада ҳам 0 га айланмайди, лекин $x = -2$ да мавжуд эмас ва бу нуқта функция аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўлиб, бу нуқтада функция узлуксиз бўлгани учун $x = -2$ да $z = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$ эгри чизик бурилишга эга бўлиши мумкин. Буни қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; \infty)$
z''	+	мав. эмас	—
z	∪	бур. бор $z_{\text{бур}} = z(-2) = 3$	∩

$z_{\text{бур}} = z(-2) = (3 - \sqrt[5]{(x+2)^7})_{x=-2} = 3$.

3) а) $D(u) = [1; \infty)$,

б) $u'' = 15(x-1)^{\frac{1}{2}} + 15(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}$; $u''(x)$

$x = 0$ да 0 га тенг бўлиб, $x = 1$ да мавжуд бўлмайди. Лекин $x = 0$, $x = 1$ ларнинг бирортаси ҳам бурилишга гумон нуқтанинг абсциссаси бўла олмайди, чунки улар $[1; \infty)$ нинг ички нуқталари эмас. Шундай қилиб, $u(x)$ эгри чизик бирорта ҳам бурилиш нуқтасига эга бўлмай, ўзининг аниқланиш соҳасида ботиқлиги билан юқорига қарагандир, чунки $[1; \infty)$ да $u''(x) > 0$.

4) а) $D(v) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$;

б) $v' = -\frac{3}{(x+1)^4}$; $v'' = \frac{12}{(x+1)^5}$.

бу ерда $v''(x)$ ни 0 га айлантирадиган нуқта йўқ, $x = -1$ да $v''(x)$ мавжуд эмас. Лекин $x = -1$ да $v(x)$ функция узил-лишга эга бўлгани учун у бурилишга гумон нуқтанинг абсциссаси бўла олмайди. Шундай қилиб, $x \in (-\infty; -1)$ да $v''(x) < 0$; $x \in (-1; \infty)$ да эса $v''(x) > 0$, яъни $(-\infty; -1)$ да $v(x)$ эгри чизик ботиқлиги билан пастга, $(-1; \infty)$ да эса ботиқлиги билан юқорига қараган. ▲

462. Қуйидаги эгри чизикларнинг асимптоталарини топинг:

$$1) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$$

$$2) y = xe^x;$$

$$3) y = x + \frac{\sin x}{x};$$

$$4) y = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$$

$$5) y = \ln(4 - x^2).$$

Δ 1) а) Эгри чизикнинг вертикал асимптоталарини унинг узилиш нуқталаридан излаймиз: $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ функция

$x = 3$ да аниқланмаган, яъни узилган. $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} =$

$= -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = \infty$, яъни $x = 3$ вертикал асимптота экан;

б) оғма асимптотани топамиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 3x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 3}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

k ва b ларнинг топилган қийматларини $y = kx + b$ тенгламага қўйиб, $y = x - 3$ оғма асимптота тенгламасига эга бўламиз. $x \rightarrow -\infty$ да k ва b ларнинг қийматлари аввалги топилган қийматларга тенг бўлгани учун берилган эгри чизик бошқа асимптоталарга эга эмас.

2) а) $y = xe^x$ эгри чизик $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлгани учун вертикал асимптотага эга эмас.

$$6) k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty,$$

бу ҳолда оғма асимптотанинг бурчак коэффициенти мавжуд бўлмайди, демак, оғма асимптота мавжуд эмас. Энди $x \rightarrow -\infty$ да k ва b ларни топайлик.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

(бу ерда Лопиталь қондасидан фойдаланилди).

Демак, $x \rightarrow -\infty$ да эгри чизик $y=0$ оғма (бу ерда горизонтал) асимптотага эга экан.

3) а) $y = x + \frac{\sin x}{x}$ эгри чизик $x=0$ да аниқланмаган, лекин $x \rightarrow 0 + 0$ ($x \rightarrow 0 - 0$) да $y \rightarrow \pm \infty$ учун $x=0$ вертикал асимптота бўла олмайди;

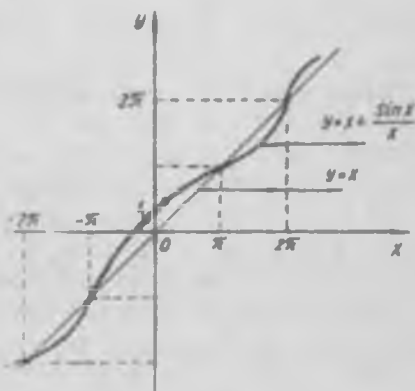
$$6) k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2} \right) = 1, \text{ чунки } |\sin x| \leq 1; \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \quad x \rightarrow -\infty \text{ да ҳам асимп-}$$

тотанинг параметрларининг қийматлари юқоридагидек бўлади. Шундай қилиб, $x \rightarrow \infty$ ва $x \rightarrow -\infty$ да эгри чизик $y=x$ оғма асимптотага эга. Бу ҳолда эгри чизик ўз асимптотасини чексиз кўп нуқталарда кесди (30-чизмага қаранг).

4) а) $y = x \operatorname{arccotg} x$ функция $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлгани учун $y = x \operatorname{arccotg} x$ эгри чизик вертикал асимптотага эга эмас;

$$6) k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} (+\infty) = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arccotg} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$$



30- чизма

2 марта Лопиталь қондасини қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x}{1/x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Демак, $x \rightarrow +\infty$ да берилган эгри чизик $y = 1$ оғма (горизонтал) асимптотага эга.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \arctg x (-\infty) = \pi, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \arctg x - \pi x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\arctg x - \pi) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg x - \pi}{1/x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Демак, $x \rightarrow -\infty$ да эгри чизик $y = \pi x + 1$ асимптотага эга.

5) а) $y = \ln(4 - x^2)$ эгри чизик $x = \pm 2$ да чексиз узилишга ($x \rightarrow 2 + 0$ да $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 2 - 0$ да $y \rightarrow \infty$) эга бўлгани учун $x = \pm 2$ тўғри чизиклар билан берилган эгри чизик учун вертикал асимптота бўлади;

б) $y = \ln(4 - x^2)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $-2 < x < 2$ бўлгани учун $x \rightarrow \infty$ га интила олмайди, демак, берилган эгри чизик оғма асимптотага эга бўла олмайди. ▲ Қуйидаги эгри чизикларнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ва бурилиш нуқталарини топинг.

463. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$

464. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$

465. $y = (x + 2)^6 + 2x + 2.$

466. $y = a - \sqrt[3]{x - b}.$

467. $y = \ln(1 + x^2).$

468. $y = \frac{1}{x^2 - 4}.$

469. $y = \arctg \frac{1}{x}.$

470. $y = xe^{-x}.$

471. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ эгри чизикнинг бир тўғри чизикда ётув-

3 та бурилиш нуқтасига эга эканини кўрсатинг.

472. $y = x \sin x$ эгри чизикнинг бурилиш нуқталари $(4 + x^2) = 4x^2$ чизикда ётишини кўрсатинг.

473. $x = 1$ да $y = x^3 + ax^2 + 1$ эгри чизикнинг бурилиш нуқтаси бўлиши учун a қандай бўлиши керак?

474. Коэффициентлари мусбат, номаълум эса фақат жуфт жаларда қатнашган ҳар қандай кўпхад графиги қавариқ билан пастга қараган бўлади. Исботланг.

Қуйидаги чизикларнинг асимптоталарини топинг.

475. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

476. $xy = a.$

477. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$

478. $2y(x^2 + 1)^2 = x^3.$

479. $y^3 = 6x^2 + x^3.$

480. $y = xe^{-x}.$

481. $y = \frac{\ln x}{x}.$

482. $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}.$

10-§. ФУНКЦИЯНИ УМУМИЙ УСУЛДА ТЕКШИРИШ ВА УНИНГ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

$y = f(x)$ функцияни умумий усулда текшириш ва унинг графигини ясаш учун қуйидаги ишларни бажариш керак:

- I. функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;
- II. функциянинг узилиш нуқталарини ва бу нуқталардаги бир томонли лимитларни топиш;
- III. функциянинг тоқ, жуфтлиги, даврийлигини аниқлаш;
- IV. функция графигининг координата ўқлари билан кесилган нуқтасини топиш, бунинг учун

а) $\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \text{ (Ox)}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0 \text{ (Oy)} \end{cases}$

системаларни ечиш ва аниқланиш соҳасининг чегараларида функция ҳолатини аниқлаш;

V. $y = f(x)$ эгри чизиқнинг: а) вертикал, б) оғма асимптоталарини топиш;

VI. функциянинг ўсиш ва камайиш интерваллари ҳамда экстремум нуқталарини топиш;

VII. $y = f(x)$ эгри чизиқнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ҳамда бурилиш нуқталарини топиш;

VIII. олинган натижаларга қараб функция графигини ясаш.

483. Қуйидаги функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графигини ясанг:

$$1) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$$

$$2) y = xe^x;$$

$$3) y = x \cdot \arcsin x;$$

$$4) y = \ln(4 - x^2);$$

$$5) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Δ Ҳар бир функцияни тўла текшириб, унинг графигини ясашда юқоридаги кўрсатмаларга кетма-кет амал қиламиз.

$$1) \text{ I. } y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} \text{ функциянинг аниқланиш соҳаси}$$

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty).$$

II. Функция $x = 3$ да узилишга эга.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = -\infty.$$

$$\text{III. } y(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 3}{-x - 3} = -\frac{x^2 + 6x + 3}{x + 3} \neq y(x);$$

$$-y(x).$$

Демак, берилган функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. Бундан ташқари даврий ҳам эмас.

$$\text{IV. а) } \begin{cases} y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} \\ y = 0 \quad (0x) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6} \approx 3 \pm 2,4; A_1(0,6; 0), A_2(5,4; 0).$$

$$6) \begin{cases} y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} \\ x = 0 \text{ (Oy)} \end{cases} \Rightarrow y = -1; B(0; -1).$$

Демак, функциянинг графиги A_1, A_2, B нуқталардан ўтади.

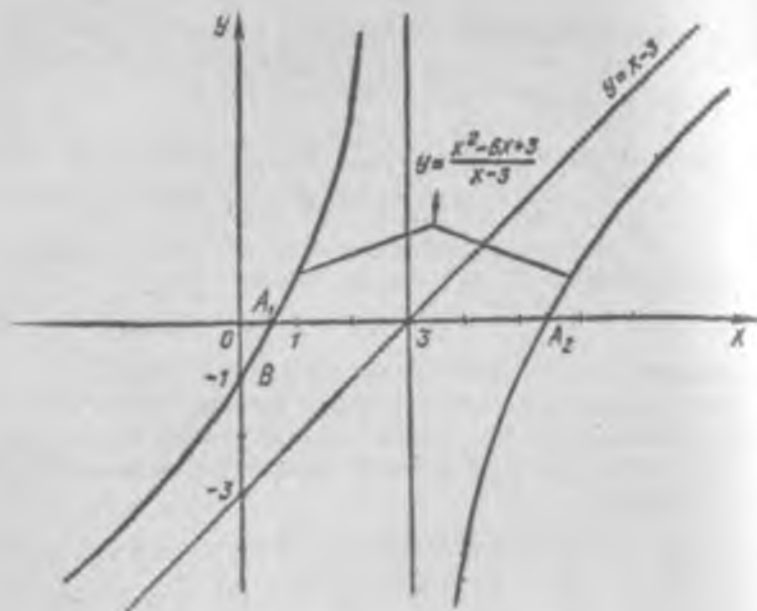
V. $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ эгри чизиқнинг: а) вертикал асимптотаси $x = 3$, б) оғма асимптотаси $y = x - 3$ (булар 462, 1)-мисолда топилган).

VI. $y' = \frac{x^2 - 6x + 15}{(x - 3)^2}$; $y' = 0$. Бу тенгламанинг ҳақиқий ялдиэлари йўқ. $x = 3$ да y' мавжуд эмас, лекин $x = 3$ да функция аниқланмаганлиги учун у критик нуқта бўла олмайди. Шундай қилиб, критик нуқталар йўқ, шунинг учун y' нинг ишорасини функциянинг аниқланиш соҳасининг ўзида текшираимиз:

x	$(-\infty; 3)$	$(3; \infty)$
$y'(x)$	+	+
$y(x)$	↗	↗

VII. $y'' = -\frac{12}{(x - 3)^3}$; $y''(x)$ ни 0 га айлантирадиган нуқта йўқ, лекин $y''(x)$ ни мавжуд этмайдиган $x = 3$ нуқта бор, бу нуқтада берилган функция ўзлуксиз бўлмаганлиги ва аниқланиш соҳага тегишли ички нуқта бўлмагани учун у бурилишга гумон нуқта бўла олмайди. Шундай қилиб, берилган эгри чизик бурилишга гумон нуқталарга эга эмас, шунинг учун $y''(x)$ нинг ишорасини функциянинг аниқланиш соҳасида текшириб қўя қоламиз:

x	$(-\infty; 3)$	$(3; \infty)$
$y''(x)$	+	-
$y(x)$	∪	∩



31- чизма

VIII. Олинган барча натижаларга қараб функция графини ясаймиз (31- чизма).

2) I. $D(y) = (-\infty; \infty)$.

II. Функция узилиш нуқталарига эга эмас, чунки $y (-\infty; \infty)$ да узлуксиз.

III. Функциянинг тоқ, жуфт ва даврийлигини текшира-миз:

$$y(-x) = -xe^{-x} = -\frac{x}{e^x} \neq y(x); -y(x).$$

Демак, функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас, шу билан биргаликда даврий ҳам эмас, чунки $y(x \pm l) \neq y(x)$, $l \neq 0$.

$$\text{IV. а) } \begin{cases} y = xe^x, \\ y = 0 \text{ (Ox)} \end{cases} \Rightarrow x = 0; \text{ демак, } O(0; 0)$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = xe^x, \\ x = 0 \text{ (Oy)} \end{cases} \Rightarrow y = 0; O(0; 0).$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ да } y \rightarrow 0; x \rightarrow \infty \text{ да } y \rightarrow \infty.$$

V. $y = xe^x$ эгри чизиқнинг вертикал ва оғма асимптоталари 462, 2) - мисолда топилган: $y = 0$ (горизонтал) асимптота.

VI. $y' = e^x (1 + x)$; $y' = 0 \Rightarrow x = -1$ критик нуқтадир, бундан бошқа критик нуқта йўқ, чунки $(-\infty; \infty)$ да $y'(x)$ мавжуддир.

Критик нуқтанинг ҳолатини қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; \infty)$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\swarrow$	$y_{\min} =$ $= y(-1) =$ $= -\frac{1}{e} \approx$ $\approx -0,4$	$\nearrow$

VII. $y'' = e^x (2 + x)$; $y'' = 0 \Rightarrow x = -2$ нуқта берилган эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтада $y = xe^x$ эгри чизиқ аниқланган ва $x = -2$ $D(y) = (-\infty; \infty)$ нинг ички нуқтаси. Бурилишга бошқа гумон нуқталар йўқ, чунки $y''(x)$ $x \in (-\infty; \infty)$ да мавжуд.

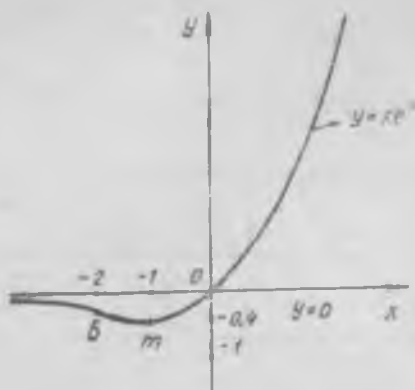
Бурилишга гумон нуқта $x = -2$ нинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифодалаймиз:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; \infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\cap$	$y_{\text{бур.}} =$ $= y(-2) =$ $= -2/e^2$	$\cup$

$$y_{\text{бур.}} = y(-2) = (xe^x)_{x=-2} = -\frac{2}{e^2} \approx -0,3;$$

$$B\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right).$$

VIII. Олинган натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (32- чизма).



32- чизма

3) I. $D(y) = (-\infty; \infty)$ ва бунда берилган функция узлуксиз.

II. $y = x \arctg x$ функция узлишга эга эмас.

III. Функциянинг тоқ, жуфтлиги ва даврийлигини текширамиз:

$$y(-x) = -x \cdot \arctg(-x) = -x(\pi - \arctg x) \neq y(x);$$

$$-y(x),$$

демак, берилган функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас;

$$y(x \pm l) = (x \pm l) \arctg(x \pm l) \neq x \arctg x \quad (l \neq 0),$$

яъни функция даврий ҳам эмас.

$$\text{IV. а) } \begin{cases} y = x \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; \quad \text{б) } \begin{cases} y = x \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0; \quad (Oy)$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ да } y \rightarrow -\infty \text{ ва } x \rightarrow \infty \text{ да } y \rightarrow 1.$$

$$\text{Ҳақиқатан, } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}{1/x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

V. $y = x \arctg x$ эгри чизиқнинг оғма асимптоталари $x = 1$, $y = \pi x + 1$ бўлиб, вертикал асимптотаси йўқ (462, 4)- мисолда кўрсатилган).

VI. $y' = \arctg x - \frac{x}{1 + x^2}$; $x \in (-\infty; \infty)$ да $y' > 0$, демак, $(-\infty; \infty)$ да $y = x \arctg x$ функция ўсувчидир. y' ни 0 га айлантирадиган ёки уни мавжуд этмайдиган нуқталар йўқ, шунинг учун критик нуқталар ҳам йўқ.

$$\text{VII. } y'' = -\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{-1 - x^2 - 1 + x^2}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{(1 + x^2)^2},$$

y'' ни 0 га айлантирадиган ёки уни мавжуд этмайдиган нуқталар йўқ, шунинг учун бурилишга гумон нуқталар ҳам йўқ.

$$x \in (-\infty; \infty) \text{ да } y'' < 0, \text{ бу ҳолда } y = x \arctg x$$

эгри чизик ботиқлиги билан пастга қараган бўлади.

VIII. Юқорида олинган натижаларга қараб функция графигини чизамиз (33-чизма).

4) I. $D(y) = (-2; 2)$ ва бунда берилган функция узлуксиз.

II. $y = \ln(4 - x^2)$ функция $x = \pm 2$ да узилишга эга.

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \ln(4 - x^2) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

III. Функциянинг тоқ, жуфтлиги ва даврийлигини текшираемиз:

$$y(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = y(x),$$

демак, $y = \ln(4 - x^2)$ функция жуфт экан. Бу ҳолда унинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик бўлади. Берилган функция даврий эмас.

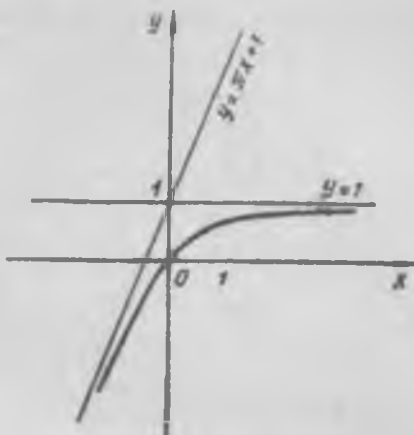
$$\text{IV. а) } \begin{cases} y = \ln(4 - x^2), \\ y = 0 \text{ (Ox)} \end{cases} \Rightarrow \ln(4 - x^2) = 0 = \ln 1 \Rightarrow 4 - x^2 = 1,$$

$$x^2 = 3; x_{1,2} = \pm \sqrt{3} \approx \pm 1,7. A_1(-1,7; 0), A_2(1,7; 0).$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = \ln(4 - x^2), \\ x = 0 \text{ (Oy)} \end{cases} \Rightarrow y = \ln 4; B(0; \ln 4).$$

V. $y = \ln(4 - x^2)$ эгри чизик $x = \pm 2$ вертикал асимптоталарга эга бўлиб, оғма асимптотага эга эмас (462, 5-мисолга қаранг).

$$\text{VI. } y' = \frac{-2x}{4 - x^2}, y' = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ бу нуқта критик нуқтадир, чунки бу нуқта } D(y) = (-2; 2) \text{ нинг ички нуқтаси бўлиб, берилган функция шу нуқтада узлуксиз. } y' \text{ ни мавжуд этмайдиган нуқта } x = \pm 2 \text{ мавжуд, лекин булар берилган функциянинг критик нуқталари бўла олмайди, чунки бу нуқталарда функция аниқланмаган. } x = 0 \text{ критик нуқтанинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифодалаймиз.}$$



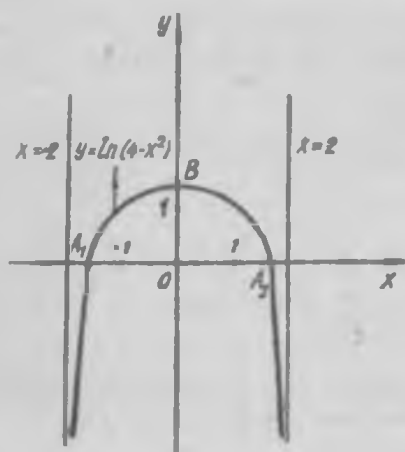
33-чизма

x	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$y_{\max} = y(0) = \ln 4$	$\searrow$

$$y_{\max} = y(0) = (\ln(4 - x^2))_{x=0} = \ln 4.$$

VII. $y'' = -\frac{2(4+x^2)}{(4-x^2)^2}$. y'' ни 0 га айлантирадиган x нинг

ҳақиқий қиймати йўқ, лекин y'' ни мавжуд этмайдиган қийматлар мавжуд бўлса-да, улар функциянинг аниқланиш соҳасига кирмаганлиги учун бурилишга гумон нуқталар бўла олмайди. Шундай қилиб, $y = \ln(4 - x^2)$ эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқтаси йўқ. $x \in (-2; 2)$ да $y'' < 0$ бўлгани учун бу интервалда эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга қараган бўлади.



34- чизма

VIII. Юқоридаги натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (34- чизма).

5) I, II. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ функция $(-\infty; \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз.

$$\begin{aligned} \text{III. } y(-x) &= \sqrt[3]{(-x+1)^2} - \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} \\ &= -\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = -(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}) = -y(x), \end{aligned}$$

демак, берилган функция тоқ экан, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

IV. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \\ y = 0(Ox) \end{cases} \Rightarrow O(0; 0);$

б) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \\ x = 0(Oy) \end{cases} \Rightarrow O(0; 0).$

$x < 0$ бўлса, $y < 0$ ва $x > 0$ бўлса, $y > 0$ бўлади.

V. а) Берилган эгри чизиқ вертикал асимптотага эга эмас;

$$\begin{aligned} \text{б) } k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right) = 0; b = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3}) = \\ &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \end{aligned}$$

(касрнинг сурат ва махражини $x^{4/3}$ га бўламиз)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4/\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}} = 0.$$

Топилган $k = 0$, $b = 0$ қийматларни $y = kx + b$ га қўйиб, $y = 0$ оғма асимптотага эга бўламиз. $x \rightarrow -\infty$ да худди шундай натижага эга бўламиз.

$$\begin{aligned} \text{VI. } y' &= \frac{2}{3} (x+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} (x-1)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}; \end{aligned}$$

y' x нинг бирорта қийматида ҳам 0 га айланмайди, лекин $x = \pm 1$ да мавжуд бўлмайди. Берилган функция $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлиб, $x = \pm 1$ бу интервалнинг ички нуқталари бўлгани учун функциянинг критик нуқталари бўлади. Критик нуқталарнинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифода-лаймиз.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y'(x)$	—	мав. эмас.	+	мав. эмас.	—
$y(x)$	↙	$y_{\min} = -\sqrt[3]{4}$	↗	$y_{\max} = \sqrt[3]{4}$	↘

$$y_{\min} = y(-1) = (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})_{x=-1} = -\sqrt[3]{4} \approx -1,6;$$

$$y_{\max} = y(1) = \sqrt[3]{4} \approx 1,6.$$

Эслатма. $\sqrt[3]{}$ белги функциянинг камайишини, $\nearrow$ белги функциянинг ўсишини билдиради.

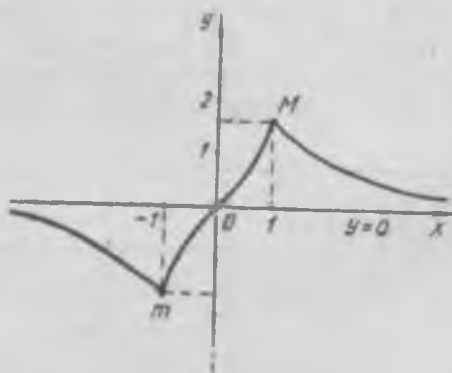
$$\text{VII. } y'' = -\frac{2}{9} (x+1)^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9} (x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}; \quad x=0 \text{ да } y''=0 \text{ ва } x=$$

$= \pm 1$ да y'' мавжуд эмас. Берилган функция $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлиб, $x=0$ ва $x=\pm 1$ лар $(-\infty; \infty)$ нинг ички нуқталари бўлгани учун бу нуқталар эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқталаридир, уларнинг ҳолатини қуйидаги жадвал орқали ифодалаймиз:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y''(x)$	$-$	мав. эмас	$-$	0	$+$	мав. эмас	$+$
$y(x)$	$\cap$	бур. йўқ.	$\cap$	$y_{\text{бури}} = y(0) = 0$	$\cup$	бур. йўқ.	$\cup$

VIII. Юқорида олинган натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (35- чизма).



35- чизма

Қуйидаги функцияларни тула текшириб, графигини
ясанг.

$$484. y = x^5 - x^3 - 2x.$$

$$485. y = 2x^4 - x^2 + 1.$$

$$486. y = \frac{1}{x(x-1)}.$$

$$487. y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

$$488. y = x + \frac{x}{3x - 1}.$$

$$489. y^2 = x^3 + 1.$$

$$490. y^2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3x}.$$

$$491. y = xe^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

$$492. y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$493. y = \sin x + \cos x.$$

$$494. y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$495. y = \frac{2x^3}{x^3 + 1}.$$

$$496. y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

$$497. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$498. y = x - 2 \operatorname{arctg} x.$$

$$499. y = x^3 e^{-4x}.$$

$$500. y = 2|x| - x^2.$$

IV бoб. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл.

АСОСИЙ ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ

1. Агар $F(x)$ функция бирор E ораликда узлуксиз бўлиб, шу ораликда $F'(x) = f(x)$ ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

Берилган $f(x)$ функциянинг бирор E ораликдаги барча бошланғич функциялари тўплами $F(x) + C$ берилган функциянинг E ораликдаги аниқмас интеграли дейилади ва $\int f(x)dx$ орқали белгиланади, яъни

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

(C — ўзгармас сон).

Берилган функциянинг аниқмас интегрални топиш амали интеграллаш дейилади.

2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари:

a) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$;

б) $\int F'(x) dx = F(x) + C$ ёки $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$,

яъни ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси олдида чиқариш мумкин;

г) $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx$,

яъни йиғиндининг интегралли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенгдир.

3. Асосий интеграллар жадвали:

I. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$.

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. III'. $\int e^x dx = e^x + C$.

IV. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

V. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$.

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$\text{XII. } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\text{XIV. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$\text{XVI. } \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

4. Интеграллашнинг асосий усуллари.

а) Бевосита интеграллаш. Берилган интеграл асосий интеграллар жадвалида бўлмаслиги мумкин, лекин уни баъзи айнан шакл ўзгартиришлар натижасида жадвалдаги интегралларга келтириш мумкин.

501. Бевосита интеграллаш йўли билан қуйидаги интегралларни топинг:

$$I_1 = \int \sqrt{t} dt; \quad I_2 = \int 3^t dt;$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{t^2 + 3}; \quad I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}};$$

$$I_5 = \int \frac{2t}{t^2 + 7} dt; \quad I_6 = \int 5 \sin 5t dt;$$

$$I_7 = \int e^{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi; \quad I_8 = \int \frac{e^t dt}{e^{2t} - 1}.$$

Δ I_1 интегрални I формула ёрдамида ҳисоблаймиз, бунда

$$x = t, \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad I_1 = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C.$$

I_2 интегралда $t = x$, $3 = a$ деб қаралса, у III формулага келади:

$$I_2 = \int 3' dt = \frac{3'}{\ln 3} + C.$$

$I_3 = \int \frac{dt}{t^2 + 3}$ интегралда $t = x$, $\sqrt{3} = a$ деб қарасак, у IX формулага келади:

$$I_3 = \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C.$$

$I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}}$ интеграл XI формула ёрдами билан топилади:

$$I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}} = \ln |t + \sqrt{t^2 - 5}| + C,$$

бунда XI формуладаги x ўрнида t , a ўрнида 5 сони турибди деб қарандик.

$$I_5 = \int \frac{2tdt}{t^2 + 7} \text{ интегралда } 2tdt = d(t^2 + 7)$$

бўлгани учун $(d(t^2 + 7) = (t^2 + 7)' dt = 2tdt)$ II формулага кўра

$$I_5 = \int \frac{2tdt}{t^2 + 7} = \int \frac{d(t^2 + 7)}{t^2 + 7} = \ln(t^2 + 7) + C,$$

бунда $t^2 + 7 > 0$ бўлгани учун $\ln$ дан кейин абсолют қиймат ишораси тушириб қолинди.

$$I_6 = \int 5 \sin 5t dt = \int \sin 5t \cdot d(5t)$$

интегралда $x = 5t$ деб қаралса, у V формулага келади; шунинг учун $I_6 = -\cos 5t + C$. $\cos \varphi d\varphi = d \sin \varphi$ бўлгани учун I_7 интегрални қуйидагича ёзиш мумкин: $I_7 = \int e^{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi = \int e^{\sin \varphi} d \sin \varphi$, бунда $\sin \varphi = x$ десак, III' формулага кўра $I_7 = e^{\sin \varphi} + C$ га эга бўламиз.

$$I_8 = \int \frac{e^t dt}{e^t - 1} = \int \frac{d(e^t)}{(e^t) - 1}, \text{ чунки } e^t dt = de^t.$$

Энди X формулада $x = e^t$, $a = 1$ десак, у ҳолда қуйидаги натижага эга бўламиз: $I_8 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \right| + C$. ▲

Ҳар бир интеграл натижаси уни дифференциаллаш билан текширилади. Агар интеграл натижасининг ҳосиласи интеграл остидаги функцияни берса, у ҳолда интеграл тўғри топилган бўлади, акс ҳолда нотўғри бўлади.

502. Қуйидаги интегралларни топинг ва натижаларининг тўғри ёки нотўғри эканлигини текширинг:

$$1) \int \frac{dt}{t^3}; \quad 2) \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}};$$

$$3) \int \sqrt{t+1} dt; \quad 4) \frac{dt}{2t^2-6}.$$

$$\Delta \quad 1) \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = (\text{I формулага кўра}) = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \\ = C - \frac{1}{2t^2}.$$

Текшириш:

$$\left(C - \frac{1}{2t^2} \right)' = 0 - \frac{1}{2} (t^{-2})' = -\frac{1}{2} (-2) t^{-3} = \frac{1}{t^3},$$

демак, интеграл тўғри топилган.

2) интегрални топиш учун VIII формуладан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

бунда VIII формуладаги x ўрнида t , a ўрнида $\sqrt{2}$ олинди.

Текшириш:

$$d \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C \right) = \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} \right)' dt = \\ = \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt.$$

$$3) \int \sqrt{t+1} dt = \int (t+1)^{\frac{1}{2}} d(t+1) = \frac{2}{3} (t+1)^{\frac{3}{2}} + C = \\ = \frac{2}{3} \sqrt{(t+1)^3} + C,$$

бунда I формуладан фойдаландик ($x = t+1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ деб қаралди).

Теш и Р иш: $d($

$$+ C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (t+1)^{\frac{3}{2}} + C = \left(\frac{2}{3} \sqrt{(t+1)^3} + C \right)$$

А) $\frac{dx}{2x^2 + 6}$ ни а $\frac{1}{2} dt = \sqrt{t+1} dt$.
 ва $\frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1}$ ладан фой

с интегралнинг 2-в) хоссасидан
 иб топамиз:

Теш и Р иш:

$$d \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C.$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} (\ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right|)' = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right)' dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}} \right)' dt = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}} \right) dt = \frac{dt}{2(t^2-3)};$$

булганда $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right|$ ни топимизда $(\ln |u|)' = \frac{1}{u} u'$ нилди. $\blacktriangle$

1) $\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}};$

ларни топинг:

3) $\frac{dt}{t^2-25};$

2) $\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}};$

5) $\int \frac{1}{5t^2+4} dt.$

4) $\int \sin(at+b) dt;$

Δ 1)-в) хоссага

де, $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t-5}{t+5} \right|$ натижа

ва 1 формулада $x=t, a=-\frac{1}{3}$ а буламиз:

$$\int -\frac{1}{3} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}} + C =$$

2)-в) хосса ва $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{t^3} + C.$

ладан фойдаланиб,

$t, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ булганда VIII форму
 (гига эга буламиз:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

3) Берилган интегрални $-\frac{1}{2}$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўламиз, сўнгра $-\frac{1}{2}$ кўпайтувчини дифференциал ишораси остига киритиб ва $x = -\frac{t}{2}$ деб III формуладан фойдаланамиз:

$$\int e^{-\frac{t}{2}} dt = -2 \int e^{-\frac{t}{2}} d\left(-\frac{t}{2}\right) = -2e^{-\frac{t}{2}} + C.$$

4) Берилган интегрални a га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда $adt = d(at+b)$ эканини эътиборга олиб, V формулада $x = at+b$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}\int \sin(at+b)dt &= \frac{1}{a} \int \sin(at+b) d(at+b) = \\ &= -\frac{1}{a} \cos(at+b) + C.\end{aligned}$$

5) Интегрални 5 га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда II формулада $x = 5t+4$; $x' = 5$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{5t+4} &= \frac{1}{5} \int \frac{5}{5t+4} dt = \frac{1}{5} \int \frac{d(5t+4)}{5t+4} = \\ &= \frac{1}{5} \ln |5t+4| + C.\end{aligned}$$

$\int \frac{dt}{5t+4}$ ни қуйидагича ҳам топиш мумкин:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{5t+4} &= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t+\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \int \frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t+\frac{4}{5}} = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left|t+\frac{4}{5}\right| + C.\end{aligned}$$

Топилган иккала натижа ҳам тўғридир, бунга натижаларни

Текшириш: $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C\right) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C\right)' dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (t+1)^{1/2} dt = \sqrt{t+1} dt.$

4) $\int \frac{dt}{2t^2 + 6}$ ни аниқмас интегралнинг 2—в) хоссасидан ва X формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{dt}{2t^2 - 6} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Текшириш:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C\right) &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| \right)' dt = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} (\ln|t - \sqrt{3}| - \ln|t + \sqrt{3}|)' dt = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t + \sqrt{3}} \right) dt = \frac{dt}{2(t^2 - 3)}; \end{aligned}$$

бунда $(\ln|t - \sqrt{3}|)'$ ва $(\ln|t + \sqrt{3}|)'$ ни топнишда $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ формуладан фойдаланилди. ▲

503. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{5t}};$

2) $\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}};$

3) $\int e^{-\frac{t}{2}} dt;$

4) $\int \sin(at + b) dt;$

5) $\int \frac{1}{5t+4} dt.$

Δ 1) 2—в) хоссага кўра ва I формулада $x = t$, $\alpha = -\frac{1}{3}$ деб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{5t}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = \\ &= \frac{3}{2\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[3]{t^2} + C. \end{aligned}$$

2) 2—в) хосса ва $x = t$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлганда VIII формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \\ = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Берилган интегрални $-\frac{1}{2}$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўламиз, сўнгра $-\frac{1}{2}$ кўпайтувчини дифференциал ишораси остига киритиб ва $x = -\frac{t}{2}$ деб III формуладан фойдаланамиз:

$$\int e^{-\frac{t}{2}} dt = -2 \int e^{-\frac{t}{2}} d\left(-\frac{t}{2}\right) = -2e^{-\frac{t}{2}} + C.$$

4) Берилган интегрални a га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда $adt = d(at+b)$ эканини эътиборга олиб, V формулада $x = at+b$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin(at+b)dt = \frac{1}{a} \int \sin(at+b) d(at+b) = \\ = -\frac{1}{a} \cos(at+b) + C.$$

5) Интегрални 5 га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда II формулада $x = 5t+4$; $x' = 5$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5t+4} dt = \frac{1}{5} \int \frac{d(5t+4)}{5t+4} = \\ = \frac{1}{5} \ln 5t+4 + C.$$

$\int \frac{dt}{5t+4}$ ни қуйидагича ҳам топиш мумкин:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t+\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \int \frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t+\frac{4}{5}} = \\ = \frac{1}{5} \ln \left| t + \frac{4}{5} \right| + C.$$

Топилган иккала натижа ҳам тўғридир, бунга натижаларни

Текшириш: $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C\right) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C\right)' dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (t+1)^{1/2} dt = \sqrt{t+1} dt.$

4) $\int \frac{dt}{2t^2 + 6}$ ни аниқмас интегралнинг 2—в) хоссасидан ва X формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{dt}{2t^2 - 6} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Текшириш:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C\right) &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| \right)' dt = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} (\ln |t - \sqrt{3}| - \ln |t + \sqrt{3}|)' dt = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t + \sqrt{3}} \right) dt = \frac{dt}{2(t^2 - 3)}; \end{aligned}$$

бунда $(\ln |t - \sqrt{3}|)'$ ва $(\ln |t + \sqrt{3}|)'$ ни топнишда $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ формуладан фойдаланилди. ▲

503. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{dt}{\sqrt[5]{5t}}$;

2) $\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}$;

3) $\int e^{-\frac{t}{2}} dt$;

4) $\int \sin(at + b) dt$;

5) $\int \frac{1}{5t+4} dt$.

Δ 1) 2—в) хоссага кўра ва I формулада $x = t$, $\alpha = -\frac{1}{3}$ деб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt[5]{5t}} &= \frac{1}{\sqrt[5]{5}} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{\sqrt[5]{5}} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = \\ &= \frac{3}{2\sqrt[5]{5}} \cdot \sqrt[3]{t^2} + C. \end{aligned}$$

2) 2—в) хосса ва $x = t$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлганда VIII формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Берилган интегрални $-\frac{1}{2}$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўламиз, сўнгра $-\frac{1}{2}$ кўпайтувчини дифференциал ишораси остига киритиб ва $x = -\frac{t}{2}$ деб III формуладан фойдаланамиз:

$$\int e^{-\frac{t}{2}} dt = -2 \int e^{-\frac{t}{2}} d\left(-\frac{t}{2}\right) = -2e^{-\frac{t}{2}} + C.$$

4) Берилган интегрални a га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда $adt = d(at+b)$ эканини эътиборга олиб, V формулада $x = at+b$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin(at+b)dt = \frac{1}{a} \int \sin(at+b)d(at+b) =$$

$$= -\frac{1}{a} \cos(at+b) + C.$$

5) Интегрални 5 га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда II формулада $x = 5t+4$; $x' = 5$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5t+4} dt = \frac{1}{5} \int \frac{d(5t+4)}{5t+4} =$$

$$= \frac{1}{5} \ln |5t+4| + C.$$

$\int \frac{dt}{5t+4}$ ни қуйидагича ҳам топиш мумкин:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t+\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \int \frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t+\frac{4}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| t + \frac{4}{5} \right| + C.$$

Топилган иккала натижа ҳам тўғридир, бунга натижаларни

дифференциаллаш билан тўла ишонч ҳосил қилиш мумкин. ▲

504. 1) $\int (3 - 2x)^7 dx;$

2) $\int \sec^2(m - nx) dx;$

3) $\int \operatorname{ctg} \varphi d\varphi$

интегралларни топинг.

Δ 1) Берилган интегрални -2 га кўпайтириб ва бўлиб, сўнгра -2 кўпайтувчининг интеграл ишораси остига киритиб, $-2dx = d(3 - 2x)$ эканини эътиборга олиб, I формулада x ўрнига $(3 - 2x)$ ни қўйиб ва $\alpha = 7$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int (3 - 2x)^7 dx &= -\frac{1}{2} \int (3 - 2x)^7 \cdot (-2dx) = \\ &= -\frac{1}{2} \int (3 - 2x)^7 d(3 - 2x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 - 2x)^8}{8} + C. \end{aligned}$$

2) Интегрални $-n$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўлиб ва $-ndx = d(m - nx)$ тенгликдан, сўнгра VI формуладан (бунда x ўрнига $m - nx$ қўйилади) фойдаланиб, ушбу натижага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int \sec^2(m - nx) dx &= -\frac{1}{n} \int \sec^2(m - nx) \cdot (-ndx) = \\ &= -\frac{1}{n} \int \sec^2(m - nx) d(m - nx) = -\frac{1}{n} \operatorname{tg}(m - nx) + C. \end{aligned}$$

3) $\operatorname{ctg} \varphi$ ни $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ орқали ифодалаб ва II формуладан фойдаланиб (бунда $x = \sin \varphi$, $dx = \cos \varphi d\varphi$ деб қаралади), қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \int \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi} = \ln |\sin \varphi| + C. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

505. $\int x^4 dx.$

506. $\int \sqrt[5]{t^2} dt.$

507. $\int \frac{dy}{3y^2}.$

508. $\int \frac{dx}{x+3}.$

$$509. \int (a-5)^8 da.$$

$$510. \int \frac{dx}{x^2+9}.$$

$$511. \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+7}}.$$

$$512. \int \frac{dz}{2z^2-4}.$$

$$513. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$514. \int \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$515. \int \operatorname{cosec}^2 2\varphi d\varphi.$$

$$516. \int e^{4x} dx.$$

$$517. \int \frac{3 dt}{5^{2t}}.$$

$$518. \int \frac{dx}{2x+5}.$$

$$519. \int \frac{dx}{(3x+2)^2}.$$

$$520. \int \operatorname{tg} x dx.$$

Агар интеграл остидаги функция бир қанча қўшилувчи функцияларнинг алгебранк йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда 2-г) хоссага кўра ҳар бир қўшилувчи функцияни алоҳида интеграллаш мумкин.

521. Қуйидаги интегралларни топинг:

$$1) \int (3x^2 - 2x + 5) dx; \quad 2) \int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx;$$

$$3) \int (1 + e^x)^2 dx; \quad 4) \int \frac{2x+3}{x^2-5} dx;$$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx; \quad 6) \int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi.$$

Δ 1) Ҳар бир қўшилувчини алоҳида I формула бўйича интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int (3x^2 - 2x + 5) dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx =$$

$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - x^2 + 5x + C.$$

2) Интеграл остидаги каср функциянинг суратини махражга бўлиб, қўшилувчи функцияларга ажратамиз. Сўнгра интеграллашнинг II, I формулаларидан фойдаланиб, ҳар бир қўшилувчини интеграллаймиз:

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx = 2 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = \\ = 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

3) $(1 + e^x)$ ни квадратга кўтариб, сўнгра ҳар бир қўшилувчини алоҳида интеграллаб топамиз:

$$\int (1 + e^x)^2 dx = \int (1 + 2e^x + e^{2x}) dx = \\ = \int dx + 2 \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \\ = x + 2e^x + \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

4) Интеграл остидаги каср функцияни 2 та каср функцияга ажратиб, сўнгра II, X формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5} dx = \int \frac{2x}{x^2-5} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2-5} = \\ = \ln |x^2-5| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C.$$

5) Интеграл остидаги функциянинг суратини махражга бўлиб, бутун қисмини ажратиб, сўнгра интеграллаймиз:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + C.$$

6) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ тригонометрик формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi = \int (\sec^2 \varphi - 1) d\varphi = \int \sec^2 \varphi d\varphi - \\ - \int d\varphi = \operatorname{tg} \varphi - \varphi + C. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

$$522. \int (2 \sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x+5}) dx.$$

$$523. \int (\sin \varphi - \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

$$524.* \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx.$$

$$525. \int \frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$526.* \int \frac{x^3}{x^2+6} dx.$$

$$527. \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$$

$$528. \int (e^x - e^{-x})^2 dx.$$

$$529.* \int \frac{x^2-2}{x+2} dx.$$

б) Ўзгарувчини алмаштириш билан интеграллаш

Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int F(t) dt,$$

бунда $\varphi'(t)$ узлуксиз функция.

Агар янги t ўзгарувчига боғлиқ бўлган интеграл $\int F(t) dt$ топилса, у ҳолда $x = \varphi(t)$ формуладан фойдаланиб, натижани x орқали ифодалаб, берилган интегралнинг изланаётган ифодасини ҳосил қиламиз. Масалан, $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ интегрални топишда $x = t^2$ деб олайлик, у ҳолда $dx = 2t dt$ ва

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \\ &= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

* Агар алгебраик каср-рационал функцияда суратдаги кўпхаднинг даражаси махражидagi кўпхаднинг даражасига тенг ёки ундan катта бўлса, бундай каср-рационал функция нотўғри каср-рационал функция дейилади.

$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - x^2 + 5x + C.$$

2) Интеграл остидаги каср функциянинг суратини махражига бўлиб, қўшилувчи функцияларга ажратамиз. Сўнгра интеграллашнинг II, I формулаларидан фойдаланиб, ҳар бир қўшилувчинини интеграллаймиз:

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx = 2 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = \\ = 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

3) $(1 + e^x)$ ни квадратга кўтариб, сўнгра ҳар бир қўшилувчинини алоҳида интеграллаб топамиз:

$$\int (1 + e^x)^2 dx = \int (1 + 2e^x + e^{2x}) dx = \\ = \int dx + 2 \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \\ = x + 2e^x + \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

4) Интеграл остидаги каср функцияни 2 та каср функцияга ажратиб, сўнгра II, X формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5} dx = \int \frac{2x}{x^2-5} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2-5} = \\ = \ln |x^2-5| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C.$$

5) Интеграл остидаги функциянинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратиб, сўнгра интеграллаймиз:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + C.$$

6) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ тригонометрик формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi = \int (\sec^2 \varphi - 1) d\varphi = \int \sec^2 \varphi d\varphi - \\ - \int d\varphi = \operatorname{tg} \varphi - \varphi + C. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

$$522. \int (2 \sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x+5}) dx.$$

$$523. \int (\sin \varphi - \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

$$524.* \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx.$$

$$525. \int \frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$526.* \int \frac{x^2}{x^2+6} dx.$$

$$527. \int (\lg x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$$

$$528. \int (e^x - e^{-x})^2 dx.$$

$$529.* \int \frac{x^2-2}{x+2} dx.$$

б) Ўзгарувчини алмаштириш билан интеграллаш

Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int F(t) dt,$$

бунда $\varphi'(t)$ узлуксиз функция.

Агар янги t ўзгарувчига боғлиқ бўлган интеграл $\int F(t) dt$ топилса, у ҳолда $x = \varphi(t)$ формуладан фойдаланиб, натижани x орқали ифодалаб, берилган интегралнинг изланган ифодасини ҳосил қиламиз. Масалан, $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ интегрални топишда $x = t^2$ деб олайлик, у ҳолда $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \\ &= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

* Агар алгебраик каср-рационал функцияда суратдаги кўпхаднинг даражаси махражидagi кўпхаднинг даражасига тенг ёки ундan катта бўлса, бундай каср-рационал функция нотўғри каср-рационал функция дейилади.

Берилган $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ интегрални ўзгарувчини бошқача белгилаш, яъни $t = 1 + \sqrt{x}$ билан ҳам топиш мумкин:

$$\begin{aligned} x &= (t-1)^2, \quad dx = 2(t-1)dt \quad \text{ва} \quad I = \int \frac{2(t-1)}{t} dt = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} = 2t - 2 \ln t + \\ &+ C = 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

I интегралнинг топилган натижалари бир-биридан иккинчи ўзгармас сонга тенг қўшилувчиси билан фарқ қилади; иккала натижанинг тўғрилигига уларни дифференциаллаш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Юқоридаги мисолда кўрсатилганидек, ўзгарувчини алмаштиришда x ни t орқали ифодаловчи $x = \varphi(t)$ ёки t ни x орқали ифодаловчи $t = \psi(x)$ формулалардан фойдаланиш мумкин.

Ўзгарувчини алмаштиришда қулай формулани (белгилаш-ни) танлаш катта аҳамиятга эга, шу билан бирга яхши белгилаш учун битта умумий қондани бериш мумкин эмас. Баъзи бир хусусий қондаларни қуйидаги интеграл турлари учун кўрсатамиз.

530. Қуйидаги интегралларни топинг:

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{2x dx}{x^4 + 3}; & 2) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}; \\ 3) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^3 + a}}; & 4) \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx; \\ 5) \int \frac{dy}{\sqrt{e^y + 1}}. \end{array}$$

Δ 1) $x^3 = t$ белгилаш киритиб, уни дифференциаллаймиз; $2x dx = dt$, сўнгра буларни интеграл остидаги ифодага қўйиб, янги интегрални топамиз ва берилган x ўзгарувчига қайтамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x dx}{x^4 + 3} &= \int \frac{dt}{t^{\frac{4}{3}} + 3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt[3]{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \arctg \frac{x^3}{\sqrt[3]{3}} + C. \end{aligned}$$

2) $1 + 2 \cos x = t$ белгилаш киритамиз, бунда $-2 \sin x dx = dt$ ва

алан:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$+ C = C - \sqrt{t} = C - \sqrt{1+2\cos x}.$$

3) $x^2 + a = z$ десак, $2x dx = dz$ ва

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^3+a}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{3}} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} +$$

$$+ C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+a)^2} + C \text{ га эга бўламиз.}$$

4) $1 + \ln x = v$ белгилаш қуйидагиларни беради:

$$\frac{dx}{x} = dv; \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{v} dv = \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ C = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

5) $e^y + 1 = t^2$ белгилаш киритиб ва унинг дифференциали $e^y dy = 2t dt$ дан dy ни топамиз: $dy = \frac{2t dt}{e^y} = \frac{2t dt}{t^2-1}$.

Буларни интеграл остидаги ифодага қўйиб, ҳосил бўлган интегрални топиб, сўнгра эски y ўзгарувчига қайтамиз:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y+1}} = \int \frac{2t dt}{t(t^2-1)} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} +$$

$$+ C = \ln \frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1} + C. \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

531. $\int \frac{x^3 dx}{5-x^4}, \quad t = x^4 \text{ белгилаш билан.}$

532. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}, \quad z = 3+4e^x \text{ белгилаш билан.}$

533. $\int \operatorname{tg}^3 \varphi d\varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} t \text{ белгиланш билан.}$

534. $\int x^3 \sqrt{a-x^2} dx, \quad \sqrt{a-x^2} = z \text{ белгилаш билан.}$

535. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3} dx, \quad x-2 = t \text{ белгилаш билан.}$

536. $\int x \sqrt{a-x} dx, \quad a-x = t^2 \text{ белгилаш билан.}$

$$537^*. \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}, \quad x = \frac{1}{t} \text{ белгилаш билан.}$$

$$538^*. \int \frac{dx}{\sin 2x}, \quad \operatorname{tg} x = z \text{ белгилаш билан.}$$

$$539. \int \frac{x dx}{x^4 + 1}$$

$$540. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$541. \int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$$

$$542. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$543. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + 2 \sin^2 x}}$$

$$544. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx$$

$$545^*. \int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^x}$$

$$546. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x^3}}$$

в) Бўлаклаб интеграллаш. Кўпайтманинг дифференциалини билдирувчи $d(u \cdot v) = u dv + v du$ тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаш билан бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (*)$$

ни ҳосил қилиш мумкин. Бу формула билан $\int u dv$ интегрални топиш бошқа $\int v du$ интегрални топишга келтирилади. Агар $\int v du$ интеграл $\int u dv$ интегралга нисбатан соддароқ ёки унга ўхшаш бўлса, бу ҳолда берилган интегрални топишда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Бирор $\int f(x) dx$ интегралга нисбатан бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этиш учун интеграл остидаги ифода $f(x) dx$ ни u ва dv кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш керак; бунда dv учун dx ни ўз ичига олган шундай ифода танланадики, бу ифодадан интеграллаш йўли билан v ни топиш мумкин бўлади; u учун кўп ҳолларда

дифференциаллаш натижасида соддалашадиган (масалан: $\arcsin x$; $\ln x$; $\arctg 3x$; x^3) функциялар олинадн.

547. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int x \cos x \, dx$;

2) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$;

3) $\int x \arctg x \, dx$;

4) $\int \arcsin x \, dx$;

5) $\int x^2 e^{3x} \, dx$;

6) $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} \, dx$.

Δ Берилган интегралларнинг ҳаммасини (*) формуладан бойдаланиб ечамиз:

1) $\int x \cos x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & dv = \cos x \, dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{matrix} \right\| = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$

2) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{x^3} \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{2x^2} \end{matrix} \right\| =$
 $= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2x^2} \ln x -$
 $-\frac{1}{4x^2} + C = C - \frac{1 + 2 \ln x}{4x^2}.$

3) $I = \int x \arctg x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arctg x, & dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| =$
 $= \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} \quad (1).$

Энди $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ ни алоҳида топамиз. Сўнгга топилган ифодани (1) га қўйиб, I ни топамиз:

$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx =$
 $= x - \arctg x \quad \text{ва}$

$I = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + C = C -$
 $-\frac{x}{2} + \frac{x^2 + 1}{2} \arctg x.$

$$4) \int \arcsin x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \end{array} \right\| =$$

$$= x \arcsin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2)$$

(2) даги $\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални I формулага келтириб топамиз ва топилган ифодани (2) га қўйиб, I ни топамиз:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$I = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$5) I = \int x^2 e^{3x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = e^{3x} dx \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} x dx. \quad (3)$$

(3) даги $\int e^{3x} x dx$ га яна бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) ни татбиқ этамиз:

$$\int x e^{3x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{3x} dx \\ du = dx, \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\| = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} \int e^{3x} d(3x) = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}.$$

Топилган ифодани (3) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C.$$

5) интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) 2 марта ишлатилди. Агар интеграл остидаги x^2 ўрнида x^3 бўлганда (*) формулани 3 марта ишлатишга тўғри келар эди. Умуман

$$\int x^n e^x dx \quad \text{ва} \quad \int x^n \sin x dx, \quad \int x^n \cos x dx$$

(n — бутун мусбат сон) интегралларни топишда (*) формулани n марта қўллаш керак бўлади.

$$6) I = \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{-x}, \quad dv = \cos \frac{x}{2} dx \\ du = -e^{-x} dx, \quad v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= 2 e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2 \int e^{-x} \sin \frac{x}{2} dx = 2 e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2 I_1. \quad (4)$$

I_1 интегралга нисбатан ҳам бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этамиз. $u = e^{-x}$, $dv = \sin \frac{x}{2} dx$ деб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$du = -e^{-x} dx; \quad v = \int \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -2 \cos \frac{x}{2};$$

$$I_1 = \int e^{-x} \sin \frac{x}{2} dx = -2 e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2 \int e^{-x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$= -2 e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2 I.$$

I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйиб, I номаълум интегралга нисбатан тенглама ҳосил қиламиз:

$$I = 2 e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2 \left(-2 e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2 I \right);$$

$$5 I = 2 e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 4 e^{-x} \cos \frac{x}{2};$$

$$I = \frac{2}{5} e^{-x} \left(\sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} \right) + C.$$

Агар I_1 ни топишда $u = \sin \frac{x}{2}$, $dv = e^{-x} dx$ деб олинса, у ҳолда $du = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx$, $v = -e^{-x}$, $I_1 = -e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = -e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} I$ ларга эга бўламиз. Бунда I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйсақ, бефойда айниятга эга бўламиз:

$$I = 2 e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2 \left(-e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} I \right), \quad 0 = 0. \quad \blacktriangle$$

$$4) \int \arcsin x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \end{array} \right\| =$$

$$= x \arcsin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

(2) даги $\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални I формулага келтириб топамиз ва топилган ифодани (2) га қўйиб, I ни топамиз:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$I = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$5) I = \int x^2 e^{3x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = e^{3x} dx \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} \cdot x dx. \quad (3)$$

(3) даги $\int e^{3x} \cdot x dx$ га яна бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) ни татбиқ этамиз:

$$\int x e^{3x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{3x} dx \\ du = dx, \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\| = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} \int e^{3x} d(3x) = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}.$$

Топилган ифодани (3) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C.$$

5) интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) 2 марта ишлатилди. Агар интеграл остидаги x^2 ўрнида x^3 бўлганда (*) формулани 3 марта ишлатишга тўғри келар эди. Умуман

$$\int x^n e^x dx \quad \text{ва} \quad \int x^n \sin x dx, \quad \int x^n \cos x dx$$

(n — бутун мусбат сон) интегралларни топишда (*) формулани n марта қўллаш керак бўлади.

$$6) I = \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{-x}, \quad dv = \cos \frac{x}{2} dx \\ du = -e^{-x} dx, \quad v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2 \int e^{-x} \sin \frac{x}{2} dx = 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2I_1. \quad (4)$$

I_1 интегралга нисбатан ҳам бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этамиз. $u = e^{-x}$, $dv = \sin \frac{x}{2} dx$ деб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$du = -e^{-x} dx; \quad v = \int \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -2 \cos \frac{x}{2};$$

$$I_1 = \int e^{-x} \sin \frac{x}{2} dx = -2e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2 \int e^{-x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$= -2e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2I.$$

I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйиб, I номаълум интегралга нисбатан тенглама ҳосил қиламиз:

$$I = 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2(-2e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 2I);$$

$$5I = 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 4e^{-x} \cos \frac{x}{2};$$

$$I = \frac{2}{5} e^{-x} \left(\sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} \right) + C.$$

Агар I_1 ни топишда $u = \sin \frac{x}{2}$, $dv = e^{-x} dx$ деб олинса, у ҳолда $du = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx$, $v = -e^{-x}$, $I_1 = -e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = -e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot I$ ларга эга бўламиз. Бунда I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйиб, бефойда айниятга эга бўламиз:

$$I = 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} + 2(-e^{-x} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} I), \quad 0 = 0. \quad \blacktriangle$$

Шундай қилиб, такрорий бўлаклаб интеграллаш дастлабки I интегралга олиб келиши мумкин экан. Бу ҳолда ё I интегрални осон топиш мумкин бўлган тенглама, ёки такрорий бўлаклаб интеграллашда u , dv ларни ўринсиз танлаш натижасида бефойда айният ҳосил бўлади.

Баъзан бўлаклаб интеграллаш бирор даражали функциянинг аниқмас интегрални билан кўрсаткичи берилган функциянинг даража кўрсаткичидан кам бўлган ўша функциядан олинган аниқмас интеграл орасидаги муносабатни ҳосил қилади. Бундай муносабатга рекуррент (қайталама) формула дейилади.

548. 1) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ учун рекуррент формула келтириб чиқаринг ва унинг ёрдамида $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$ ни топинг.

$$\Delta \quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx.$$

Охирги интегралда $u = x$, $dv = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} dx$ десак, у ҳолда $du = dx$, $v = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} + C$ га эга бўламиз. Шунинг учун

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} = \frac{1}{2n-2} \times \left(\frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right).$$

Шундай қилиб, биз қуйидаги рекуррент формулани ҳосил қилдик:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Бунда рекуррент формулани такрорий қўллаш натижасида

жадвалдаги $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$ интеграл ҳосил бўлади. $n = 2$ да рекуррент формулани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

$$n = 3 \text{ да: } I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctg x + C. \blacktriangle$$

2) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ интеграл учун рекуррент формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$$

эканлигига ишонч ҳосил қилинг.

Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интегралланг:

549. $\int x \sin x dx.$

550. $\int x^2 \ln x dx.$

551. $\int (x^2 + 1) e^{-2x} dx.$

552. $\int x \cdot \sec^2 x dx.$

553. $\int x \cdot \ln(x-1) dx.$

554. $\int \arctg t dt.$

555. $\int e^x \sin x dx.$

556. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$

557. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$

558. $\int x^3 e^x dx.$

559. $\int e^{ax} \cos nx dx.$

560*. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$

561. $I_n = \int x^k \ln^n x dx \quad (n > 0, \text{ бутун})$ интеграл учун рекуррент формула келтириб чиқаринг.

Қўрсатма: $u = \ln^n x$ деб белгиланг.

562. $I_n = \int \sin^n x dx$ ($n > 0$, бутун) интеграл учун рекуррент формула келтириб чиқаринг ва унинг ёрдамида $\int \sin^4 x dx$ ни топинг.

Қўрсатма: $\sin^n x$ ни $\sin^n x = \sin^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x)$ орқали ифодалаб, $u = \cos x$, $du = \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx$ деб белгиланг.

2-§. КВАДРАТ УЧҲАДНИ ЎЗ ИЧИГА ОЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ИНТЕГРАЛЛАРИ

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx; \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx; \quad \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

квадрат учҳадни ўз ичига олган функцияларни интеграллаш жадвалидаги формулаларга келтириб интеграллаш учун аввало квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб олиш керак. Бу ҳолда $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад қуйидаги қўринишга келади:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right).$$

Сўнгра алмаштиришлар йўли билан юқоридаги интегралларни интеграллаш жадвалидаги формулаларга келтириш мумкин.

563. Қуйидаги интегралларни топинг:

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; & 2) \int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx; \\ 3) \int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx; & 4) \int \frac{6x^2 - 7x + 3}{2x - 3x^2} dx. \end{array}$$

Δ 1) Квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$$

ва dx ўрнига $d(x + 2)$ ни ёзиб, x формула бўйича интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x + 2}{2} + C.$$

2) $2x^2 - 3x + 1$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{16}\right) = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$$

ва $x - \frac{3}{4} = t$ алмаштириш бажариб, $dx = dt$ ҳамда

$$I = \int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - 8t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt$$

га эга бўламиз. Бу интегрални касрнинг суратидаги икки-ҳадга кўра 2 та қўшилувчи интегралга ажратамиз:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{16}} - 2 \int \frac{2t dt}{t^2 - \frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}} \right| - 2 \ln \left| t^2 - \frac{1}{16} \right| + C,$$

бунда қўшилувчи интеграллардан биринчиси IX, иккинчиси II формулага кўра интеграллаиди. Энди x ўзгарувчига қайтиб, пировард натижага эга бўламиз:

$$I = \ln \left| \frac{x - 1}{x - 0,5} \right| - 2 \ln |x^2 - 1,5x + 0,5| + C.$$

3) Тўлиқ квадратни ажратиб, яъни $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ ва $t = x + 3$ деб, қуйидагиларга эга бўламиз:
 $dx = dt,$

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{3t - 11}{t^2} dt = \int \left(\frac{3}{t} - \frac{11}{t^2} \right) dt =$$

$$= 3 \int \frac{dt}{t} - 11 \int t^{-2} dt = 3 \ln |t| + 11 t^{-1} +$$

$$+ C = 3 \ln |x + 3| + \frac{11}{x + 3} + C.$$

4) Аввал интеграл остидаги нотўғри каср рационал функциянинг суратини махражигга бўлиб, бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} = -2x + 1 + \frac{x - 1}{2x - 3x^2},$$

сўнгра ҳар бир қўшилувчини алоҳида интеграллаймиз:

$$I = \int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} dx = -2 \int x dx + \int dx + \\ + \int \frac{(x-1)dx}{2x-3x^2} = -x^2 + x + I_1$$

I_1 интегрални интеграллаш жадвалидаги II, IX формулалар кўринишига келтириб топамиз:

$$I_1 = -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1)dx}{x^2 - \frac{2}{3}x} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - \frac{2}{3}} + \\ + \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}} = -\frac{1}{3} \ln \left|x - \frac{2}{3}\right| + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \right| = -\frac{1}{3} \ln \left|x - \frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{3}}{x} \right|$$

у ҳолда

$$I = -x^2 + x + I_1 = -x^2 + x + \frac{1}{6} \ln \left|x - \frac{2}{3}\right| - \\ - \frac{1}{2} \ln |x| + C$$

бўлади. ▲

$$564. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}; \quad 2) \int \frac{(3x-5)}{\sqrt{9+6x-3x^2}} dx$$

интегралларни топинг.

Δ 1) $x^2 - 4x - 3$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб, яъни $x^2 - 4x - 3 = (x-2)^2 - 7$, $dx = d(x-2)$ деб, интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 - 7}} = \ln |x-2 + \\ + \sqrt{(x-2)^2 - 7}| + C$$

(бунда XI формуладан фойдаландик).

2) $9 + 6x - 3x^2$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратамиз: $9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3((x-1)^2 - 4)$

— 4) = 3(4 - (x - 1)^2) ва z = x - 1 алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$dx = dz, I = \int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}} dz$$

бўлади. Ҳосил бўлган интегрални 2 та интегралга ажратамиз ва уларнинг ҳар қайсисини алоҳида топамиз:

$$I = \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{z dz}{\sqrt{4-z^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = \sqrt{3} I_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} I_2,$$

$$I_1 = \int \frac{z dz}{\sqrt{4-z^2}} = -\frac{1}{2} \int (4-z^2)^{-\frac{1}{2}} (-2z dz) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (4-z^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-z^2) = -(4-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

(бунда I формуладан фойдаланилди). VIII формулада x = z, a = 2 деб олсак, у ҳолда

$$I_2 = \int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = \arcsin \frac{z}{2}$$

бўлади. Топилган I₁ ва I₂ ларни I га қўйиб ва аввалги ўзгарувчи x га ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \sqrt{3} I_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} I_2 = C - \sqrt{3(4-z^2)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{z}{2} =$$

$$= C - \sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2} \quad \blacktriangle$$

565. Бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

(1-§, 4-в банди) га кўра

А) $\int \sqrt{t^2+b} dt$ ва Б) $\int \sqrt{a^2-t^2} dt$ ларни топинг. Сўнг-
ра топилган натижаларни формулалар деб қараб, қуйидаги
интегралларни топинг:

$$1) \int \sqrt{x^2-3} dx; \quad 2) \int \sqrt{x^2+2x+6} dx;$$

$$3) \int \sqrt{3+4x-x^2} dx.$$

Δ А) u = $\sqrt{t^2+b}$, dv = dt деб қуйидагиларга эга бў-

ламиз: $du = \frac{t dt}{\sqrt{t^2+b}}$, v = t ва

$$I = \int \sqrt{t^2 + b} dt = t + \sqrt{t^2 + b} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + b}} dt.$$

Охирги интеграл $\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + b}} dt$ да интеграл остидаги каср функциянинг суратига ўзгармас b ни ҳам қўшиб, ҳам айириб, интегрални 2 та интегралга ажратамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + b}} &= \int \frac{t^2 + b - b}{\sqrt{t^2 + b}} dt = \int \sqrt{t^2 + b} dt - b \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} = \\ &= I - b \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{У ҳолда } I &= t\sqrt{t^2 + b} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + b}} dt = t\sqrt{t^2 + b} - \\ &- I + b \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}}; \quad 2I = t\sqrt{t^2 + b} + b \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} \Rightarrow I = \\ &= \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + b} + \frac{b}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + b}| + C \quad (\text{А}) \end{aligned}$$

(бунда XI формуладан фойдаланилди).

$$\begin{aligned} \text{Б) } I &= \int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad dv = dt \\ du = -\frac{t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad v = t \end{array} \right| = \\ &= t\sqrt{a^2 - t^2} - \int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = t\sqrt{a^2 - t^2} - \\ &- \int \frac{a^2 - t^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = t\sqrt{a^2 - t^2} - \int \sqrt{a^2 - t^2} dt + \\ &+ a^2 \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = t\sqrt{a^2 - t^2} - I + a^2 \arcsin \frac{t}{a}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $I = t\sqrt{a^2 - t^2} - I + a^2 \arcsin \frac{t}{a}$ ва бундан

$$I = \int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} + C. \quad (\text{Б})$$

1) (А) тенгликни формула сифатида қараб, $t = x$, $b = 3$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sqrt{x^2 - 3} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 3} - \frac{3}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| + C.$$

2) Квадрат илдиз остидаги ифодадан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$x^2 + 2x + 6 = (x + 1)^2 + 5,$$

сўнгра $t = x + 1$, $b = 5$ деб (А) формулани татбиқ этамиз:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 2x + 6} dx &= \int \sqrt{(x+1)^2 + 5} d(x+1) = \\ &= \frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + 5} + \frac{5}{2} \ln |x+1 + \\ &\quad + \sqrt{(x+1)^2 + 5}| + C.\end{aligned}$$

3) $3 + 4x - x^2$ квадрат учқаддан тўлиқ квадратни ажратамиз:

$3 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x - 3) = -((x-2)^2 - 7) = 7 - (x-2)^2$ ва $t = x - 2$, $a^2 = 7$ деб (Б) формулани татбиқ этамиз:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3 + 4x - x^2} dx &= \int \sqrt{7 - (x-2)^2} dx = \\ &= \frac{x-2}{2} \sqrt{7 - (x-2)^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{7}} + C. \blacktriangle\end{aligned}$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

566. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$

567. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$

568. $\int \frac{dx}{4x - 1 - 4x^2}$

569. $\int \frac{(4x - 3) dx}{x^2 + 3x + 4}$

570. $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 5x} dx$

571. $\int \frac{18x^2 + 13x}{1 + 6x + 9x^2} dx$

572*. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3} dx$

573. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$

574. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

575. $\int \frac{(x + 3) dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$$576. \int \frac{(x-3) dx}{\sqrt{x^2+6x}}$$

$$577^*. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$$

$$578. \int \sqrt{1-2x-x^2} dx.$$

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Номаълум коэффициентлар усули. Бутун рационал функция (кўпхад) бевосита интегралланади:

$$\int P_n(x) dx = \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \\ = a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

Каср-рационал функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (бунда $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ лар кўпхадлар) $n \geq m$ бўлганда, суратини махражга бўлиш билан, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = r(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ га келтирилади, бунда $k < m$, n, m, k — мусбат бутун сонлар, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — нотўғри каср-рационал функция, $r(x)$ — бутун рационал функция).

Тўғри каср-рационал функция $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ ни

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\gamma$$

ёйилмасидан фойдаланиб, элементар касрлар (содда касрлар) йиғиндиси шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \\ + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} + \dots + \\ + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{x^2+px+q}, (*)$$

бунда $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda, N_1, N_2, \dots, N_\lambda$ ($\alpha + \beta + \dots + \lambda = m$) номаълум коэффициентлар бўлиб, улар коэффициентларни солиштириш

усули билан аниқланади. Бунинг учун (*) тенгликнинг ҳар икки томонини $Q_m(x)$ га кўпайтириб, икки томондаги суратларда айний кўпхадлар ҳосил қилинади. Бир хил даражадаги x ларнинг коэффициентларини тенглаштириб, номаълум коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади ва бу системани ечиб, номаълум коэффициентларни топиб, уларни (*) га қўйилади. Шундай қилиб, ҳар қандай тўғри каср-рационал функциянинг интеграли, интеграл остидаги функцияни элементар касрларга ажратгандан кейин, қуйидаги кўринишдаги интегралларни топишга келтирилади:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^m}; \quad I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

(бунда $p^2 - 4q < 0$), бу ерда m, n — мусбат бутун сонлар.

Агар $m \neq 1$ бўлса, I_1 интеграл интеграллаш жадвалидаги I формулага, $m = 1$ бўлганда эса II формулага келади:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

I_2 интеграл 2-§ да кўрсатилган қоидага кўра топилади. $n = 1$ бўлганда

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (4q-p^2 < 0);$$

$n = k$ бўлганда

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ + \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$$

булиб, бунда $u = x + \frac{p}{2}$; $a = \frac{1}{2} \sqrt{4q-p^2}$ ва рекуррент формула

$$I_k = \int \frac{du}{(a^2+u^2)^k} = \frac{u}{a^2(2k-2)(u^2+a^2)^{k-1}} + \\ + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1}$$

($k = 2, 3, \dots$) дан фойдаланилади.

$$\frac{1}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

касрларга элементар (ёки содда) касрлар дейилади (бунда m, n — мусбат бутун сонлар, $p^2 - 4q < 0$).

2. Остроградский усули.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

формула Остроградский формуласи бўлиб, бунда $Q(x)$ функция каррали илдизларга эга бўлиб, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — тўғри каср = рационал функция, $Q_1(x)$ эса $Q(x)$ ва $Q'(x)$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси, $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$, $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ коэффициентлар номаълум даражалари эса мос ҳолда $Q_1(x)$ ва $Q_2(x)$ даражаларидан битта кам. Номаълум коэффициентлар $\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ айниятдан номаълум коэффициентлар усули ёрдамида топилади.

Ҳар қандай рационал функциянинг интегралли элементар функция бўлади.

579. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx;$

2) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} dx;$

3) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} dx;$

4) $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25} dx.$

Δ 1) Интеграл остидаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз. Бунинг учун:

а) берилган касрнинг махражини ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2;$$

б) интеграл остидаги каср-рационал функцияни элементар касрларга ёйиш схемасини ёзамиз:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2};$$

в) тенгликнинг иккала томонидаги махраждан қутуламиз, бунинг учун тенгликнинг иккала томонини $x(x+2)^2$ га кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} 3x^2+8 &= A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx = \\ &= (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A; \end{aligned}$$

г) ҳосил бўлган айниятнинг иккала томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни солиштириб, номаълум коэффициентларга нисбатан тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A=8; \end{cases}$$

д) бу системани ечамиз: $A=2, B=1, C=-10$ ва топилган қийматларни б) банддаги схемага қўямиз ва бу ҳолда тенгликнинг икки томонидан интеграл олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}; \\ \int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = \\ &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} - 10 \int (x+2)^{-2} d(x+2) = 2 \ln|x| + \\ &\quad + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C. \end{aligned}$$

2) Интеграл остидаги нотўғри каср-рационал функциядан унинг суратини махражига бўлиб бутун қисминини ажратамиз:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^2+3x^2}.$$

Ҳосил бўлган натижадаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

а) $x^4+3x^2 = x^2(x^2+3);$

б) $\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3};$

в) $1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B;$

$$г) A + C = 0, B + D = 0, 3A = 0, 3B = 1;$$

$$д) A = 0, B = \frac{1}{3}, C = 0, D = -\frac{1}{3}; \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Демак, $\frac{2x^2+6x^2+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^2+3x^2} = 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}$. Бу тенгликнинг икки томонидан интеграл олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+6x^2+1}{x^4+3x^2} dx &= \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx = \\ &= 2 \int x dx + \frac{1}{3} \int x^{-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+3} = \\ &= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

3) Интеграл остидаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

$$а) x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1);$$

$$б) \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1};$$

$$в) x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = A(x^3 + 1) + Bx(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x) = (A + B + C)x^3 + (C + D - B)x^2 + (B + D)x + A;$$

$$г) A + B + C = 1, C + D - B = 4, B + D = -2, A = 1;$$

$$д) A = 1, B = -2, C = 2, D = 0;$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}.$$

Буларни интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + \\ &+ 2 \int \frac{x dx}{x^2 - x + 1} = \ln|x| - 2 \ln|x+1| + 2I_1. (*) \end{aligned}$$

I_1 интегрални 2-§ даги қондага кўра топамиз. Махраждан тўлиқ квадратни ажратамиз:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \text{ва} \quad x - \frac{1}{2} = t \quad \text{деб топа-$$

миз:

$$\begin{aligned} dx &= dt, I_1 = \int \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Буларни (*) тенгликка қўйиб, қуйндагига эга бўламиз:

$$I = \ln \frac{|x|(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4) Интеграл остидаги каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

$$а) x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2;$$

$$б) \frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 5)^2};$$

$$в) x^3 - 3 = (Ax + B)(x^2 + 5) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (5A + C)x + (5B + D);$$

$$г) \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ 5A + C = 0, \\ 5B + D = -3; \end{cases}$$

$$д) A = 1, B = 0, C = -5, D = -3.$$

$$\frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2} = \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{5x + 3}{(x^2 + 5)^2}. (**)$$

(**) тенгликни интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2} dx = \int \frac{x dx}{x^2 + 5} - 5 \int \frac{x dx}{(x^2 + 5)^2} - \\ &- 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 5)^2} (***) \end{aligned}$$

(***) даги $I_1 = \int \frac{x dx}{x^2 + 5}$ интегрални интеграллаш жадвалидаги II формулага келтирамиз:

$$I_1 = \int \frac{x dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 5)}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5).$$

$I_2 = \int \frac{x dx}{(x^2 + 5)^2}$ интегрални эса интеграллаш жадвалидаги I формулага келтирамиз:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x dx}{(x^2 + 5)^2} = \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^{-2} d(x^2 + 5) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 5)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(x^2 + 5)}. \end{aligned}$$

(***) тенгликдаги учинчи интегрални топилганда рекуррент формуладан (548,2) мисолга қаранг) фойдаланамиз; яъни учинчи интегрални K_2 деб белгилаймиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} K_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + 5)^2} = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \frac{x}{x^2 + 5} + \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot K_1 = \\ &= \frac{x}{10(x^2 + 5)} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{10} \left(\frac{x}{x^2 + 5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{10 \cdot \sqrt{5}} \left(\frac{x \sqrt{5}}{x^2 + 5} + \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

га эга бўламиз. Топилган I_1, I_2, K_2 ларнинг ифодаларини (***) тенгликка қўйсақ, қуйидаги натижа ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + \frac{5}{2(x^2 + 5)} - \frac{3}{10 \sqrt{5}} \left(\frac{x \sqrt{5}}{x^2 + 5} + \right. \\ &+ \left. \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + \frac{25 - 3x}{10(x^2 + 5)} - \\ &- \frac{3}{10 \sqrt{5}} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Эслатма: K_2 интегрални топилганда ўзгарувчини алмаштириш усулидан ҳам фойдаланиш мумкин, бунинг учун $x = \sqrt{5} \arctg z$ деб белгилаш мақсадга мувофиқдир. ▲

Қуйидаги интегралларни топинг:

580. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}.$

581. $\int \frac{dx}{x^3 + x}.$

582. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$

$$583. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

$$584. \int \frac{(7x - 15)}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx.$$

$$585. \int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

$$586. \int \frac{dx}{(x^2 + 2)(x - 1)^2}.$$

$$587. \int \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

$$588. \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$589. \int \frac{x^2 dx}{1 - x^4}.$$

$$590. \int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

Эслатма: Каср-рационал функцияларни интеграллашда, соддароқ йўл турганда, у функцияларни содда касрларга ажратишга шоғинмаслик керак. Масалан, $\int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx$ интегрални топишда $x^4 - 1 = t$ алмаштиришни бажариш керак, чунки $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4 - 1)$. Худди шунга ўхшаш $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$ интегрални топишда $x^2 = t$ алмаштиришни бажариш мақсадга мувофиқдир ва ҳоказо.

591. Остроградский усули билан $\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}$ интегрални топинг.

$$\Delta \quad \int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 - 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1} dx.$$

Бу айниятни дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{1}{(x^3 - 1)^2} = \frac{(2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C)}{(x^3 - 1)^2} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1}$$

$$1 \equiv (2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C) + (Dx^2 + Ex + F)(x^3 - 1) \Rightarrow D = 0, E - A = 0, F - 2B = 0, D + 3C = 0,$$

$$E + 2A = 0, B + F = -1 \Rightarrow A = 0, B = -\frac{1}{3},$$

$$C = 0, D = 0, E = 0, F = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Демак, } \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални топиш учун $\frac{1}{x^3-1}$ каср-рационал функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}; \quad 1 = L(x^2+x+1) + \\ &+ Mx(x-1) + N(x-1) = (L+M)x^2 + (L-M+N)x + \\ &+ (L-N) \Rightarrow L+M=0, L-M+N=0, L-N=1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = \frac{1}{3}, M = -\frac{1}{3}, N = -\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

демак,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} &= -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ушбу интегралларни Остроградский усули билан ечинг:

$$592. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

$$593. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

$$594. \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$$

$$595. \int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx.$$

4- §. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Рационаллаштириш усули. Баъзи иррационал функцияларни интеграллашда ўзгарувчини тегишлича алмаштириб, рационал функциянинг интегралига келтириш, одатда, рационаллаштириш усули дейилади.

$\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}) dx$ интеграл $x=t^\mu$ алмаштириш билан t га нисбатан рационаллашади, бунда $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ лар рационал сонлар, μ эса ана шу каср сонларнинг умумий махражи, интеграл остидаги R эса ўз аргументларининг рационал функциясини билдиради.

Умумийроқ кўринишдаги

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

ёки

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

интегралларни мос равишда $ax+b=t^\mu$ ёки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^\mu$ алмаштириш билан рационаллаштириш мумкин.

2. Тригонометрик функцияларга рационал боғлиқ бўлган функциялар интегралларига келтириладиган интеграллар:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \text{ да } x = a \sin t \text{ белгилаш,}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \text{ да } x = a \operatorname{tg} t \text{ белгилаш,}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \text{ да } x = a \sec t \text{ белгилаш}$$

Сериалган интегралларни t га нисбатан рационаллаштирилади.

3. Биномиал дифференциални интеграллаш. $x^m(a+bx^n)^p$ ни интеграллаш (бунда $m, n, p \in \mathbb{Q}$) Чебишев теоремасига кўра фақат қуйидаги 3 та ҳолда бажарилади:

1) $p \in \mathbb{Z}$ бўлса, $p > 0$ да $(a+bx^n)^p$ Ньютон биноми

$$E + 2A = 0, B + F = -1 \Rightarrow A = 0, B = -\frac{1}{3},$$

$$C = 0, D = 0, E = 0, F = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Демак, } \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални топиш учун $\frac{1}{x^3-1}$ каср-рационал функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}; \quad 1 = L(x^2+x+1) + \\ &+ Mx(x-1) + N(x-1) = (L+M)x^2 + (L-M+N)x + \\ &+ (L-N) \Rightarrow L+M=0, L-M+N=0, L-N=1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = \frac{1}{3}, M = -\frac{1}{3}, N = -\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

демак,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} &= -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ушбу интегралларни Остроградский усули билан ечинг:

$$592. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

$$593. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

$$594. \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}.$$

$$595. \int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

4- §. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Рационаллаштириш усули. Баъзи иррационал функцияларни интеграллашда ўзгарувчини тегишлича алмаштириб, рационал функциянинг интегралига келтириш, одатда, рационаллаштириш усули дейилади.

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \text{ интеграл } x=t^\mu \text{ алмаштириш}$$

билан t га нисбатан рационаллашади, бунда $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots,$

$\frac{m_k}{n_k}$ лар рационал сонлар, μ эса ана шу каср сонларнинг умумий махражи, интеграл остидаги R эса ўз аргументларининг рационал функциясини билдиради.

Умумийроқ кўринишдаги

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

ёки

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

интегралларни мос равишда $ax+b=t^\mu$ ёки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^\mu$ алмаштириш билан рационаллаштириш мумкин.

2. Тригонометрик функцияларга рационал боғлиқ бўлган функциялар интегралларига келтириладиган интеграллар:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \text{ да } x = a \sin t \text{ белгилаш,}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \text{ да } x = a \operatorname{tg} t \text{ белгилаш,}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \text{ да } x_1^2 = a \sec t \text{ белгилаш}$$

Серилган интегралларни t га нисбатан рационаллаштиради.

3. Биномиал дифференциални интеграллаш. $x^m(a+bx^n)^p$ ни интеграллаш (бунда $m, n, p \in \mathbb{Q}$) Чебишев теоремасига кўра фақат қуйидаги 3 та ҳолда бажарилади:

1) $p \in \mathbb{Z}$ бўлса, $p > 0$ да $(a+bx^n)^p$ Ньютон бинóми

формуласи бўйича ёйилади, $p < 0$ да $x = t^m$ деб олинади, бунда m берилган m ва n нинг умумий махражн;

2) $p = \frac{l}{s} - \text{каср сон, лекин } \frac{m+1}{n} - \text{бутун сон бўлса,}$
 $a + bx^n = t^s$ алмаштириш қўлланилади;

3) $p = \frac{l}{s}, \frac{m+1}{n} - \text{каср сонлар бўлиб, } p + \frac{m+1}{n} -$
 бутун сон бўлса, $a + bx^n = t^s x^n$ алмаштириш қўлланилади.

4. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx$ (бунда $P_n(x)$ n - даражали кўпхад,

$v = ax^2 + bx + c$) кўринишдаги интеграл ушбу формула билан топилади:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx = (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n) \sqrt{v} + B \int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Бунда $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ лар ўзгармаслар бўлиб, улар юқоридаги тенгликни дифференциаллаб $\sqrt{v}$ га кўпайтириш ва x нинг бир хил даражаларининг коэффицентларини солиштириш натижасида топилади.

$\int P_n(x) \sqrt{v} dx$ кўринишдаги интеграл ҳам худди юқоридагига ўхшаш йўл билан топилади:

$$\int P_n(x) \sqrt{v} dx = \int \frac{v P_n(x) dx}{\sqrt{v}} = (A_1 x^{n+1} + A_2 x^n + \dots + A_{n+2}) \cdot \sqrt{v} + B \int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

5. $\int \frac{(Ax + B) dx}{(x-a) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ни $x - a = \frac{1}{t}$ алмаштириш билан топиш мумкин.

6. Эйлер алмаштиришлари.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

кўринишдаги интеграллар Эйлер алмаштиришлари ёрдамида рационаллаштириш усули билан топилади:

1) агар $a > 0$ бўлса, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x \sqrt{a}$;

2) агар $c > 0$ бўлса, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;

3) агар $\alpha ax^2 + bx + c = 0$ нинг ҳақиқий илдизларида бири бўлса, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$ алмаштириш бажарилади.

596. Қуйидаги интегралларни топинг:

$$1) \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx; \quad 2) \int \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx;$$

$$3) \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}};$$

$$5) \int \frac{2x^3 - x - 5}{\sqrt{x^3 - 2x}} dx; \quad 6) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^3}};$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^3}}.$$

Δ 1) I қондага кўра $x = t^4$ белгилаш киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} dx &= 4t^3 dt, \quad I = \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{t^4 + t^2} \cdot 4t^3 dt = \\ &= 4 \int \frac{t^3 + t}{t^2 + 1} dt = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = \\ &= 4 \left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 4t + 2 \ln(t^2+1) - \\ &\quad - 4 \operatorname{arctgt} + C. \end{aligned}$$

x ўзгарувчига қайтсак, $I = 4 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C$ ҳосил бўлади.

2) I қондани қўллаб, $\frac{1+x}{x} = t^2$ алмаштириш киритамиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}, \quad \int \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx = \\ &= \int (t^2-1)^3 \cdot t \cdot \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} = -2 \int t^2 dt = \\ &= -\frac{2}{3} t^3 + C = C - \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}. \end{aligned}$$

3) II қондани қўллаб, $x = 2\sin t$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} dx &= 2\cos t dt \text{ ва } \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t} \times \\ &\times 2\cos t dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg} t) = \end{aligned}$$

формуласи бўйича ёйилади, $p < 0$ да $x = t^\mu$ деб олинади, бунда μ берилган m ва n нинг умумий махражи;

2) $p = \frac{l}{s}$ — каср сон, лекин $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, $a + bx^n = t^s$ алмаштириш қўлланилади;

3) $p = \frac{l}{s}$, $\frac{m+1}{n}$ — каср сонлар бўлиб, $p + \frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, $a + bx^n = t^s x^n$ алмаштириш қўлланилади.

4. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx$ (бунда $P_n(x)$ n - даражали кўпхад,

$v = ax^2 + bx + c$) кўринишдаги интеграл ушбу формула билан топилади:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx = (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n) \sqrt{v} + B \int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Бунда $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ лар ўзгармаслар бўлиб, улар юқоридаги тенгликни дифференциаллаб $\sqrt{v}$ га кўпайтириш ва x нинг бир хил даражаларининг коэффициентларини солиштириш натижасида топилади.

$\int P_n(x) \sqrt{v} dx$ кўринишдаги интеграл ҳам худди юқоридигига ўхшаш йўл билан топилади:

$$\int P_n(x) \sqrt{v} dx = \int \frac{v P_n(x) dx}{\sqrt{v}} = (A_2 x^{n+1} + A_3 x^n + \dots + A_{n+3}) \cdot \sqrt{v} + B \int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

5. $\int \frac{(Ax+B) dx}{(x-a) \sqrt{ax^2+bx+c}}$ ни $x-a = \frac{1}{t}$ алмаштириш билан топиш мумкин.

6. Эйлер алмаштиришлари.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

кўринишдаги интеграллар Эйлер алмаштиришлари ёрдамида рационаллаштириш усули билан топилади:

1) агар $a > 0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \sqrt{a}$;

2) агар $c > 0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$;

3) агар α $ax^2+bx+c=0$ нинг ҳақиқий илдизларида бири бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ алмаштириш бажарилди.

596. Қуйндаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx;$

2) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx;$

3) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^9} dx;$

4) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}};$

5) $\int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx;$

6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}};$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}.$

Δ 1) I қондага кўра $x = t^4$ белгилаш киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} dx &= 4t^3 dt, \quad I = \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{t^4 + t^2} \cdot 4t^3 dt = \\ &= 4 \int \frac{t^3 + t}{t^4 + 1} dt = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^4 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \left(\int dt + \int \frac{t dt}{t^4 + 1} - \int \frac{dt}{t^4 + 1} \right) = 4t + 2 \ln(t^2 + 1) - \\ &\quad - 4 \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

x ўзгарувчига қайтсак, $I = 4 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C$ ҳосил бўлади.

2) I қондани қўллаб, $\frac{1+x}{x} = t^2$ алмаштириш киритамиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2t dt}{(t^2 - 1)^2}, \quad \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx = \\ &= \int (t^2 - 1)^2 \cdot t \cdot \frac{-2t dt}{(t^2 - 1)^2} = -2 \int t^2 dt = \\ &= -\frac{2}{3} t^3 + C = C - \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}. \end{aligned}$$

3) II қондани қўллаб, $x = 2 \sin t$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} dx &= 2 \cos t dt \quad \text{ва} \quad \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^9} dx = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64 \sin^9 t} \times \\ &\times 2 \cos t dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^9 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^5 t} dt = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg} t) = \end{aligned}$$

чунки $\sqrt{t^2} = |t|$ бўлиб, $-1 < x < 1$ ўринли бўлгани учун $x-1 < 0$ да $t < 0$ ва шунинг учун $|t| = -t$. Энди

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} \text{ интегрални интеграллаш жадвалидаги } I$$

формулага келтирамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} d(-1-2t) = \\ &= -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} = \\ &= C - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}. \end{aligned}$$

7) VI қонданинг 2-бандига кўра қуйидагини ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}} &= \parallel c = 4 > 0, \text{ демак, } \sqrt{4+2x-x^2} = \\ &= tx-2, x = \frac{4t+2}{1+t^2}; dx = \frac{-4(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2} dt; \\ \sqrt{4+2x-x^2} &= t \cdot \frac{4t+2}{1+t^2} - 2 = \frac{2(t^2+t-1)}{1+t^2} \parallel = \\ &= \int \frac{-4(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2} dt = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = C - 2 \operatorname{arctg} t = \\ &= C - 2 \operatorname{arctg} \frac{2 + \sqrt{4+2x-x^2}}{x}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Рационаллаштириш усулидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

$$597. \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x^2}} dx.$$

$$598. \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$599. \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$600. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}.$$

$$601. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx.$$

$$602. \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{3x+4}} dx.$$

$$603. \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

$$604. \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Биномиал дифференциалларни интегралланг:

$$605. \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$606. \int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

$$607. \int x \sqrt{1+x^4} dx.$$

$$608. \int x^5 (1 + x^2)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$609. \int \frac{\sqrt{4 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$610. \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$611. \int \sqrt[4]{\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^3} dx.$$

$$612. \int \frac{\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

IV қондага ёки Эйлер алмаштиришларидан фойдаланб, қуйидаги интегралларни топинг:

$$613. \int \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$614. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

чунки $\sqrt{t^2} = |t|$ булиб, $-1 < x < 1$ уринли бўлгани учун $x-1 < 0$ да $t < 0$ ва шунинг учун $|t| = -t$. Энди

$I = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}$ интегрални интеграллаш жадвалидаги I формулага келтирамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} d(-1-2t) = \\ &= -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} = \\ &= C - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}. \end{aligned}$$

7) VI қонданинг 2-бандига кўра қуйидагини ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}} &= \left\| c = 4 > 0, \text{ демак, } \sqrt{4+2x-x^2} = \right. \\ &= tx-2, \quad x = \frac{4t+2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{-4(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2} dt; \\ \sqrt{4+2x-x^2} &= t \cdot \frac{4t+2}{1+t^2} - 2 = \frac{2(t^2+t-1)}{1+t^2} \left\| = \right. \\ &= \int \frac{-4(t^2+t-1)}{\frac{(1+t^2)^2}{\frac{2(t^2+t-1)}{1+t^2}}} dt = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = C - 2 \operatorname{arctg} t = \\ &= C - 2 \operatorname{arctg} \frac{2 + \sqrt{4+2x-x^2}}{x}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Рационаллаштириш усулидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

597. $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x^2}} dx.$

598. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

599. $\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx.$

$$600. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}.$$

$$601. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx.$$

$$602. \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{3x+4}} dx.$$

$$603. \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

$$604. \int \frac{\sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Биномиал дифференциалларни интегралланг:

$$605. \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$606. \int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

$$607. \int x \sqrt{1+x^4} dx.$$

$$608. \int x^5 (1 + x^2)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$609. \int \frac{\sqrt{4 + \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$610. \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$611. \int \sqrt[4]{\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^3} dx.$$

$$612. \int \frac{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

IV қондага ёки Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

$$613. \int \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$614. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 2x + 3}}.$$

$$615. \int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$616^*. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$617^*. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$618. \int \sqrt{1 - 4x - x^2} dx.$$

$$619. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$620. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$621. \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$622. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 4x - 4}}.$$

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ВА ГИПЕРБОЛИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

I. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (бунда $R(\sin x, \cos x)$ $\sin x$ ва $\cos x$ ларга нисбатан рационал функция) ни интеграллашда умумий усул (универсал тригонометрик алмаштириш усули деб ҳам айтилади) $t = \tan \frac{x}{2}$ алмаштиришдан фойдаланилади, бунда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{булиб}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \text{ бўлади, яъни } t \text{ га нисбатан рационал ифодани интеграллашга келади.}$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаганда қуйидаги кўринишдаги интеграллар кўп учрайди:

$$\text{II. } \int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx.$$

$$\text{III. } \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx.$$

$$\text{IV. } \int \tan^n x dx, \int \cot^n x dx,$$

буларда m, n лар мусбат бутун сонлар.

$$\text{V. } \int \sin ax \cdot \cos b x dx, \int \sin ax \cdot \sin b x dx, \int \cos ax \cdot \cos b x dx.$$

Бундай интегралларни қуйидаги қондаларга амал қилиб топамиз:

1. Жуфт даражали синус ёки косинус функцияларнинг интегралини топишда даражаларни пасайтириш формулаларидан фойдаланилади:

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} (1 - \cos 2u), \quad \cos^2 u = \frac{1}{2} (1 + \cos 2u),$$

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u.$$

2. Тоқ даражали синус ёки косинус функцияларнинг интегралини топишда ундан битта кўпайтувчининг ажратиб, сўнгга кофункция* янги ўзгарувчи билан алмаштирилади.

3. Агар m ва n ларнинг ҳар иккаласи жуфт сон бўлса, у ҳолда III кўринишдаги интегрални 1-қоидага кўра ва агар m ва n лардан бири ёки ҳар иккаласи тоқ сон бўлса, 2-қоидага кўра топиш мумкин.

4. IV турдаги интегралларни $\operatorname{tg} x = t$ ёки мос равишда $\operatorname{ctg} x = t$ алмаштириш билан топиш мумкин.

5. V турдаги интегралларни топишда кўпайтмани йиғиндига келтириш формулаларидан фойдаланилади:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin (a + b)x + \sin (a - b)x),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos (a - b)x - \cos (a + b)x),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos (a + b)x + \cos (a - b)x).$$

6. Агар $\int \sin^m x \cos^n x dx$ да m ва n жуфт сонлар бўлиб, камида биттаси манфий бўлса, $\operatorname{tg} x = t$ ($\operatorname{ctg} x = t$) алмаштиришни қўллаш лозим, бунда $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ бўлади.

VI. Ги перболик функцияларни интеграллаш. Бунда қуйидаги формулалардан фойдаланиш лозим:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \left(\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

* $\sin x$ функциянинг кофункцияси $\cos x$, $\cos x$ функциянинг дияси $\sin x$ дир.

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1),$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1).$$

Универсал алмаштириш $\operatorname{th} \frac{x}{2} = z$ бўлса, $\operatorname{sh} x = \frac{2z}{1-z^2}$,

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+z^2}{1-z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1-z^2} \quad \text{бўлади, бунда} \quad x = 2\operatorname{Arth} z = \\ = \ln \frac{1+z}{1-z} \quad (-1 < z < 1).$$

623. Қуйидаги интегралларни топинг:

$$1) \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x};$$

$$2) \int \sin^2 3x dx;$$

$$3) \int \cos^4 x dx;$$

$$4) \int \sin^5 x dx;$$

$$5) \int \sin^4 x \cos^2 x dx;$$

$$6) \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx;$$

$$7) \int \operatorname{tg}^4 x dx;$$

$$8) \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx.$$

Δ 1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажариб, $\sin x$, $\cos x$ ва dx ларни t орқали ифодалаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \int \frac{2dt}{t^2 + 4t - 1} = 2 \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 5} = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

2) 1-қондани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \\ - \frac{1}{12} \int \cos 6x d(6x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

3) 1-қондага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \\ = \frac{1}{4} (\int dx + \int \cos 2x d(2x) + \int \cos^2 2x dx).$$

Бунда биринчи иккита интеграл интеграллаш жадвалидаги формулага келади, учинчи интегрални эса 1-қондани қўллаб топамиз:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \\ + \frac{1}{8} \int \cos 4x d(4x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x.$$

$$\text{Шундай қилиб, } I = \int \cos^4 x dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + \\ + C = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

4) 2-қондага кўра тоқ даражали $\sin^5 x$ функциядан битта кўпайтувчинини ажратиб оламиз: $\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x$ ва кофункцияни янги ўзгарувчи билан белгилаймиз, яъни $\cos x = t$, у ҳолда

$$- \sin x dx = dt; \int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \\ = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \int (1 - t^2)^2 (-dt) = \\ = - \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{t^5}{5} + C = \\ = C(1 - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x).$$

5) 3 (1)-қондани қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \\ = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{8} (\int \sin^2 2x dx - \\ - \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx) = \frac{1}{8} (I_1 - I_2).$$

I_1 интегрални 1-қондага кўра топамиз:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x d(4x) = \\ = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x.$$

I_2 интегрални $\sin 2x = t$ деб 3 (2)-қондага кўра топамиз:

$$2 \cos 2x dx = dt, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{t^3}{6} = \frac{1}{6} \sin^3 2x.$$

I_1 ва I_2 ларнинг топилган ифодаларини I га қўйиб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C.$$

6) 3 (2)-қондани қўллаб, энг кичик тоқ даражали функ-
циядан битта кўпайтувчининг ажратамиз, $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$
ва $\cos x = t$ деб қуйидагиларга эга бўламиз: $-\sin x dx = dt$
ва

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \cdot \sin x dx = \\ &= - \int (1 - t^2) t^5 dt = - \int t^5 dt + \int t^7 dt = \\ &= -\frac{1}{6} t^6 + \frac{1}{8} t^8 + C = \frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + C. \end{aligned}$$

7) 4-қондани қўллаб, $\operatorname{tg} x = t$ десак, y ҳолда

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \\ &= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

8) 5-қондадан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin (-2x)) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = \\ &= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

624. Қуйидаги интегралларни топинг:

- 1) $\int \operatorname{ch}^2 x dx$; 2) $\int \operatorname{ch}^4 x dx$;
3) $\int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}$; 4) $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx$.

Δ Бу интегралларни топишда VI даги формулалардан фой-
даланамиз.

$$\begin{aligned} 1) \int \operatorname{ch}^2 x dx &= \left\| \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) \right\| = \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \operatorname{ch} 2x d(2x) + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int \operatorname{ch}^4 x dx &= \int (\operatorname{ch}^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) \right)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2x + 2\operatorname{ch} 2x + 1) dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{ch}^2 2x dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x dx + \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 4x + 1) dx + \\
 &+ \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \\
 &+ \frac{x}{4} + C = \frac{3x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.
 \end{aligned}$$

3) Бу интегрални топишда универсал алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{th} \frac{x}{2} = t, \text{ у ҳолда } \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\
 dx = \frac{2dt}{1-t^2} \text{ ва } \int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} &= \int \frac{2dt/(1-t^2)}{2 \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 3 \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2}} = \\
 &= \int \frac{2dt}{3t^2 + 4t + 3} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}t + 1} = \\
 &= \frac{2}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{2}{3}\right)}{\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \parallel \text{интеграллаш жадвалидаги VIII}
 \end{aligned}$$

$$\text{формулага кўра} \parallel = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t + 2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3\operatorname{th} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} \right) + C.$$

$$4) \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx = \left| \begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x &= -\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} 3x); \\ \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x &= -\frac{1}{4} (\operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 4x - \operatorname{sh} 6x) \end{aligned} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4} \int (\operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 4x - \operatorname{sh} 6x) dx = -\frac{\operatorname{ch} 2x}{8} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} + \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} + C. \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

$$625. \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$627. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$$

$$629^*. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

$$631. \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$$

$$633. \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx.$$

$$635. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$637. \int \sin 5x \cdot \sin 6x dx.$$

$$639^*. \int (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^3 dz.$$

$$641. \int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} x dx.$$

$$643. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$645. \int \operatorname{th}^3 x dx.$$

$$647^*. \int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}.$$

$$626. \int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$628. \int \operatorname{tg}^3 3x dx.$$

$$630. \int \cos^2 5x dx.$$

$$632. \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$634. \int \sin^4 x dx.$$

$$636. \int \cos \frac{4}{3} x \cdot \cos 3x dx.$$

$$638^*. \int \sin 3x \cdot \sin 4x \cdot \sin 5x dx.$$

$$640. \int \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$642. \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$644. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$646. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$648. \int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}.$$

V БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

1. Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган масалалар

Фан ва техникада жуда кўп масалалар чегараланмаган сондаги чексиз кичик қўшилувчилар йигиндисини ҳисоблаш масаласига келтирилади. Бу масала эса, ўз навбатида, математиканинг асосий тушунчаларидан бири бўлган аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган баъзи масалаларни кўриб ўтайлик.

I. Эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш масаласи. $[a, b]$ кесмада узлуксиз $y = f(x) > 0$ функция берилган бўлсин. $y = f(x)$ эгри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган текис фигура $ABCD$ эгри чизиқли трапеция дейилади. Шу трапециянинг юзини топиш керак бўлсин.

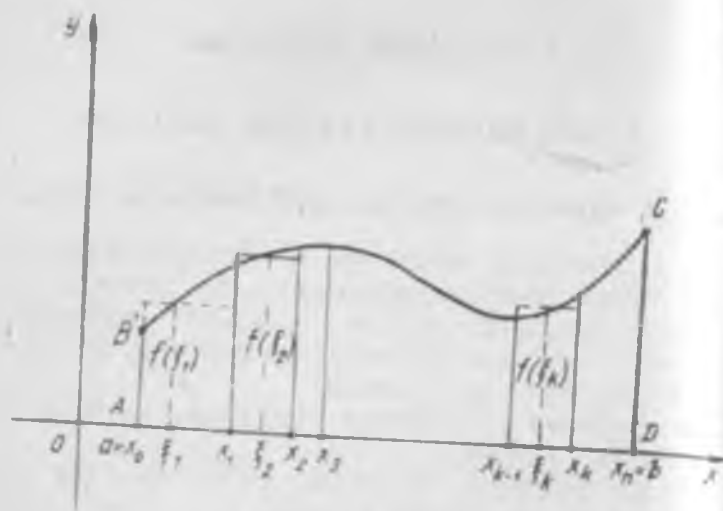
Бунинг учун $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та (ихтиёрий) бўлакка бўламиз ва бўлиниш нуқталаридан Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, $ABCD$ эгри чизиқли трапецияни n та кичик эгри чизиқли трапецияларга ажратамиз. Ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачада ихтиёрий ξ_k нуқта олиб, $f(\xi_k)$ ординатани ўтказамиз. $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачанинг узунлигини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ каби белгилаймиз ва $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \lambda$ деб оламиз. Ҳар бир эгри чизиқли трапецияда асоси Δx_k , баландлиги $f(\xi_k)$ бўлган тўғри тўртбурчак чизамиз (36-а чизма). Бу тўғри тўртбурчак юзларининг йигиндиси қуйидагига тенг:

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n =$$

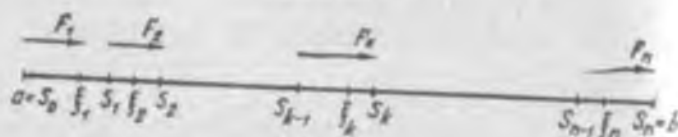
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

$\lambda \rightarrow 0$ да (n бўлиниш сони чексиз ўсганда) S_n ифода эгри чизиқли трапеция юзига тобора яқинлаша боради. Шу сабабли эгри чизиқли трапециянинг юзи учун

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$



36-а чизма



36-б чизма

ни қабул қиламиз.

II. Куч таъсирида бажариладиган ишни ҳисоблаш масаласи. Бирор F куч таъсири остида M моддий нуқта O_s тўғри чизик бўйича ҳаракат қилсин, бунда кучнинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлсин. M нуқта $s = a$ вазиятдан $s = b$ вазиятга кўчганда кучнинг бажарган ишини топиш керак. Агар F куч ўзгармас бўлса, у ҳолда кучнинг бажарган A иши $Fs = F(b-a)$ ($A = F \cdot s$) кўпайтма билан ифодаланиши ўқувчига механикадан маълум. Фараз қилайлик, F куч ўзгарувчи, яъни s оралиқнинг функцияси ($F = F(s)$) бўлсин. Бундай ҳолда $A = F \cdot s$ формуладан фойдалана олмаймиз. Бу ҳолда ҳам худди I-масаладагидек $[a; b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$$

нуқталар орқали n та $[s_0; s_1], [s_1; s_2], \dots, [s_{n-1}; s_n]$ кесмачаларга бўламиз ва ҳар бир $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k ($k = \overline{1, n}$) нуқта танлаймиз (36-б чизма).

Агар ҳар бир $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачада F кучни ўзгармас ва

$F(\xi_k)$ га тенг деб фараз қилсак, бу кесмачада бажарилган иш $F(\xi_k) \Delta s_k$ га тенг бўлади, бунда

$$\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$$

у ҳолда $[a; b]$ кесмада $F(s)$ куч бажарган иш тақрибан

$$F(\xi_1) \Delta s_1 + F(\xi_2) \Delta s_2 + \dots + F(\xi_n) \Delta s_n = \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta s_k$$

га тенг бўлади. Энди $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачаларнинг энг узунини кичрайтира бориб, нолга интилтирсак, яъни $\Delta s = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k \rightarrow 0$ бўлса, F куч таъсирида бажариладиган иш учун

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta s_k \quad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

III. Босиб ўтилган йўлни тезлик бўйича топиш масаласи. Нотекис ҳаракатдаги моддий нуқтанинг t моментдаги тезлиги $v = v(t)$ берилган бўлсин. Вақт $t = T_1$ дан $t = T_2$ гача ўзгарганда босиб ўтилган йўлни топиш керак. Маълумки, моддий нуқта нотекис ҳаракатланаётганлиги учун $s = vt$ деб ололмаймиз (текис ҳаракатда $s = vt$ эди). Бу ҳолда босиб ўтилган йўлни худди юқоридегидек аниқлаймиз. Вақт оралиғи $[T_1; T_2]$ ни ихтиёрий равишда

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$$

нуқталар орқали n та $[t_0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{k-1}; t_k], \dots, [t_{n-1}; t_n]$ кесмачаларга бўламиз ва ҳар бир $[t_{k-1}; t_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k нуқта танлаймиз. Агар бу кесмачалар етарли даражада кичик бўлса, бу кесмачаларда тезлик $v = v(\xi_k)$ бўлиб, моддий нуқта текис ҳаракат қилди дейиш мумкин.

$[t_{k-1}; t_k]$ кесмачада босиб ўтилган йўл тақрибан

$$s_k = v(\xi_k) \Delta t_k, \Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Бутун вақт оралиғи $[T_1; T_2]$ да эса босиб ўтилган йўл тақрибан

$$s_n = v(\xi_1) \Delta t_1 + v(\xi_2) \Delta t_2 + \dots + v(\xi_n) \Delta t_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$$

га тенг бўлади. Вақт ораликлари $[t_{k-1}; t_k]$ нинг энг катта нолга интилтирсак, яъни $\Delta t = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k \rightarrow 0$ бўлганда, бу сиб ўтилган йўл учун

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$$

ни ҳосил қиламиз.

IV. Моддий чизик массасининг зичлик бўлиши масаласи. Бирор моддий чизик кесмасининг бу чизикнинг ҳар бир s нуқтасида зичлик маълум бўлсин, яъни $\delta = f(s)$, $0 \leq s \leq S$. Худди юқоридагидек, $[0; S]$ кесмада моддий чизик массасини қуйидагича аниқлаш:

$$m = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (s_k - s_{k-1}),$$

бунда $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = S$ $[0; S]$ кесмани бўлиш нуқталари, $s_{k-1} \leq \xi_k \leq s_k$, $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$.

$$\Delta s = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Агар $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачани етарли даражада кичик деб қарасак, бу кесмачада зичликни ўзгармас ва $f(\xi_k)$ ($s_{k-1} \leq \xi_k \leq s_k$) га тенг деб олишимиз мумкин. Бу ҳолда йиғиндилардаги ҳар бир $f(\xi_k) (s_k - s_{k-1})$ қўшилувчи $[s_{k-1}; s_k]$ ораликдаги чизикнинг массасини ифодалайди. Шундай қилиб, юқоридаги масалаларни ечиш умуман олганда қуйидаги

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

кўрinishдаги йиғиндиларнинг лимитини ҳисоблаш масаласига олиб келади. Шунга ўхшаш кўпгина физик, геометрия ва ҳоказо масалалар шу кўрinishдаги йиғиндининг лимитини нэлашга келтирилади.

Энди масалани умумий ҳолда ечайлик. $\mu = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аниқланган бўлсин. $[a; b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

нуқталар билан n та $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) кесмачаларга бўлишамиз. Ҳар бир $[x_{k-1}; x_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k нуқта олиб, $f(\xi_k)$ ни ҳисоблаймиз ва қуйидаги

$$\begin{aligned} f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \\ = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \end{aligned} \quad (5)$$

йиғиндини тузамиз, бунда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

(5) йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги интеграл йиғиндиси дейилади. (5) интеграл йиғиндининг қиймати $[a; b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқталарининг танланишига боғлиқ, яъни $[a; b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция учун $[a; b]$ кесмани ихтиёрий равишда n та бўлакка бўлиб, ҳар бир бўлакчадан ихтиёрий ξ_k нуқталарини танлаш билан чексиз кўп интеграл йиғиндилар тўпламини тузиш мумкин.

Агар (5) интеграл йиғиндининг чекли I лимити $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) да $[a; b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқталарининг танланишига боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуд бўлса, у ҳолда бу I лимит $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ даги аниқ интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

Таърифга кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx, \quad (6)$$

бу ерда a ва b лар мос равишда аниқ интегралнинг қуйи ва юқори чегаралари дейилади.

Бундай ҳолда $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада интегралланувчи дейилади.

Аниқ интеграл таърифидан фойдаланиб, юқорида кўрилган геометрик, физик масалаларни қуйидагича ифодалаш мумкин:

1') Эгри чизикли трапеция юзи:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

2') F куч таъсирида бажарилган иш:

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta s_k = \int_a^b F(s) ds.$$

3) Тезлик бўйича босиб ўтилган йўл:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

4') Зичлик бўйича масса:

$$m = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta s_k = \int_0^S f(s) ds.$$

2. Аниқ интегралнинг хоссалари ва уни ҳисоблаш

1) Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисига ташқарига чиқариш мумкин: агар $k = \text{const}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

2) Интеграллаш чегараларининг ўринлари алмаштирилганда интегралнинг ишораси ўзгаради:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3) Интеграллаш чегаралари бир хил ($a = b$) бўлганда интегралнинг қиймати нолга тенг бўлади:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4) Бир неча функция алгебраик йиғиндисининг аниқ интегрални қўшилувчи функциялар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx. \end{aligned}$$

5) Агар $[a; b]$ ($a < b$) кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $f(x) \leq \varphi(x)$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

6) Агар $f(x)$ функция учун $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$, $\int_a^b f(x) dx$ мавжуд бўлса, у ҳолда ҳар қандай учта a, b, c оғир учун

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

7) Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар $[a; b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $\varphi(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда $(a; b)$ оралиқда камида бitta шундай c нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad a < c < b$$

тенглик ўринли бўлади.

$\varphi(x) = 1$ бўлганда 7-хоссадан қуйидаги муҳим хосса келиб чиқади:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \quad (a < c < b).$$

$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги ўрта қиймати дейилади.

Маълумки, $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, унинг бошланғич функцияси мавжуд бўлади. $F(x)$ унинг бошланғич функцияларидан бири бўлсин, яъни $F'(x) = f(x)$. У ҳолда қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (7)$$

формула ўринлидир. Бу формула аниқ интегралларни ҳисоблашда

собластининг асосий формуласи бўлиб, Ньютон—Лейбниц формуласи дейилади.

649. Аниқ интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_0^1 x \frac{dx}{(2x+1)^3};$

б) $\int_0^1 x(2-x^2)^4 dx;$

в) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$

г) $\int_0^2 |1-x| dx.$

Δ Ньютон—Лейбниц формуласини ва аниқ интегралларини қўлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^{-3} d(2x+1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{-2}}{-2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{4(2x+1)^2} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{2}{9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^1 x(2-x^2)^4 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (2-x^2)^4 d(2-x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(2-x^2)^5}{5} \Big|_0^1 = -\frac{1}{10} (1-2^5) = \frac{31}{10} = 3 \frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}} &= \int_1^e (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\ln x) = \\ &= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^e = 2 \sqrt{1+\ln x} \Big|_1^e = 2(2-1) = 2; \end{aligned}$$

г) $\int_0^2 |1-x| dx$ ни ҳисоблашда интеграл остидаги функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига асосан

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-x| dx &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \\ &= -\frac{(1-x)^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

650. $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Δ Маълумки

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2. \end{aligned}$$

Изоҳ. Агар $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ кесмада $\cos x < 0$ эканлигини эътиборга олмасак, $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x$ бўлиб, $\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$ нолўғри натижага эга бўламиз. ▲

651. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг $[1; 4]$ даги ўртача қийматини аниқланг.

Δ Маълумки, $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги ўртача

қиймати $f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ эди ($a < c < b$). Ўртача қиймат
муласига асосан

$$f(c) = \frac{\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx}{3} = \frac{\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} (8-1) + 2 \right) = \frac{20}{9}$$

652. Агар электр юритувчи куч E қуйидаги

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

формула билан ифодаланган бўлса, вақт $t=0$ дан $t=\frac{T}{2}$ ўзгарганда электр юритувчи кучнинг ўртача қийматини, бунда T — давр, E_0 — амплитуда ($t = \frac{T}{4}$ қиймат катта қийматга эга бўлади), $\frac{2\pi t}{T}$ — фаза.

$\Delta E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ нинг $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ кесмадаги ўртача қийматини топамиз:

$$E_{\text{ср}} = \frac{E_0}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{2E_0}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T} d\left(\frac{2\pi t}{T}\right) =$$

$$= \frac{E_0}{\pi} \left(-\cos \frac{2\pi t}{T} \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} E_0. \quad \blacktriangle$$

653. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$, $\int_0^1 x^3 dx$ аниқ интегралларни ҳисоблашдан, қайси бири катта эканлигини кўрсатинг.

Δ Маълумки, $(0; 1)$ оралиқда $\sqrt{x} > x^3$ бўлгани учун интегралнинг 5-хоссасига асосан $\int_0^1 \sqrt{x} dx > \int_0^1 x^3 dx$ бўлади.

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг:

654. $\int_0^2 (3x+1) dx$.

656. $\int_{-2}^0 \frac{(a+x)^2}{a} dx$.

658. $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$.

660. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

662. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0 \right) dt$.

664. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{агар } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ бўлса $\int_0^2 f(x) dx$

ни ҳисобланг.

665. $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx$.

666. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисоблашда Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаш мумкинми:

667. $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

668. $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) dx$.

669. $\int_2^4 \frac{dz}{(z-3)^2}$.

670. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x dx$?

Аниқ интегралларни ҳисобламасдан қайси бири катта эканлигини кўрсатинг:

671. $\int_0^1 x dx$, $\int_0^1 x^2 dx$.

672. $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

$$673. \int_0^1 e^{-x} dx, \int_0^1 e^{-x^2} dx. \quad 674. \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x dx, \int_{-2}^{-1} 2^x dx$$

$$675. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Берилган кесмада берилган функциянинг ўрта қисми топинг:

$$676. f(x) = x^2, [0; 1]. \quad 677. f(x) = 2x, [-1, 1].$$

$$678. f(x) = \sqrt{x}, [0; 10]. \quad 679. f(x) = \frac{1}{x}, [1; 2]$$

$$680. f(x) = \sin x + 2 \cos x + 3, [0; 2].$$

$$681. f(x) = x^2 + x - 1, [1; 4].$$

682. Агар p босим билан V ҳажм орасидаги боғи қуйидаги

$$pV^{\frac{3}{2}} = 160$$

кўринишда берилса, босим $p = 2$ дан $p = 10$ атм. га гарганда босимнинг ($p_{\text{ор}}$) ўртача қийматини топинг.

683. Ўзгарувчан ток кучи $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ қанят билан ўзгаради, бунда I_0 — амплитуда, t — вақт, T — давр, φ — бошланғич фаза. Ток кучи квадратининг (I^2) ораликдаги ўртача қийматини топинг.

2. §. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ

$[a; b]$ кесмада $u = u(x)$, $v = v(x)$ функциялар узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, қуйидаги бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлади:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

684. Интегралларни ҳисобланг:

$$a) \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$б) \int_1^2 x \ln x dx;$$

$$в) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx, \quad г) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin b x dx.$$

а) $u = x$, $dv = e^{-x} dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = dx$, $v = -e^{-x}$ бўлади. (1) формулага асосан:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}; \quad \blacktriangle$$

б) $u = \ln x$, $dv = x dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. (1) формулага асосан:

$$\int_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}; \quad \blacktriangle$$

в) $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ десак, $du = 2x dx$, $v = -\cos x$. (1) формулага асосан:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2 I_1,$$

бунда $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. I_1 ни яна бўлаклаб интеграллаймиз.

Бунинг учун $u = x$, $dv = \cos x dx$ десак, $du = dx$, $v = \sin x$. У ҳолда

$$I_1 = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1, \quad I_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Шундай қилиб,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi - 2. \quad \Delta$$

Δ г) $u = \sin bx$, $dv = e^{ax} dx$ деб оламиз, у ҳолда $v = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$. (1) га асосан:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \Big|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx \\ &= -\frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx = -\frac{b}{a} I_1, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx \end{aligned}$$

$$I = -\frac{b}{a} I_1.$$

I_1 ни яна бўлаклаб интеграллаймиз:

$$u = \cos bx, \quad dv = e^{ax} dx,$$

$$du = -b \sin bx, \quad v = \frac{1}{a} e^{ax},$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \Big|_0^{\frac{\pi}{b}} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx \\ &= -\frac{1}{a} e^{\frac{a\pi}{b}} - \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{a} (e^{\frac{a\pi}{b}} + 1) + \frac{b}{a} I. \end{aligned}$$

(2) га асосан:

$$I = -\frac{b}{a} \left(-\frac{1}{a} (e^{\frac{a\pi}{b}} + 1) + \frac{b}{a} I \right) = \frac{b}{a^2} (e^{\frac{a\pi}{b}} + 1) - \frac{b^2}{a^2} I,$$

бундан

$$I + \frac{b^2}{a^2} I = \frac{b}{a^2} (e^{\frac{a\pi}{b}} + 1), \quad I = \frac{b(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1)}{a^2 + b^2}.$$

мак,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx = \frac{b(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1)}{a^2 + b^2}.$$

усусий ҳолда $a = b = 1$ бўлса, $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$ бў-

ади. Δ Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

685. $\int_0^1 \ln(1+x) dx.$

686. $\int_0^1 2x \operatorname{arctg} x dx.$

687. $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3) \sin(ax) dx.$

688. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$

689. $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx.$

690. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛДА ЎЗГАРУВЧИНИ АЛМАШТИРИШ

$\int_a^b f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. $x = \varphi(t)$,

$\alpha < t < \beta$ алмаштиришни қўллаймиз. Агар $[\alpha; \beta]$ кесмада $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ функциялар узлуксиз ва $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бўлса, қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

формула ўринли.

Баъзи ҳолларда $x = \varphi(t)$ алмаштириш ўрнига $t = \varphi(x)$ кўринишдаги алмаштиришдан фойдаланилади. Бу ҳолда $t = \varphi(x)$ функцияга тескари функция мавжуд бўлиб, бу функция юқоридаги шартларни қаноатлантириши керак.

691. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$a) \int_0^5 \frac{3 dx}{\sqrt[3]{3x+1}};$$

$$б) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$в) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x},$$

($a > 0, b > 0$).

Δ а) $3x + 1 = t^4$ алмаштиришни қўлаймиз. Бунда

$$3x = t^4 - 1, \quad 3 dx = 4t^3 dt.$$

Янги ўзгарувчининг чегараларини аниқлаймиз:

$x = 0$ бўлганда $t = 1$, $x = 5$ бўлганда $t = 2$.

У ҳолда

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{3 dx}{\sqrt[3]{3x+1}} &= \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t} = 4 \int_1^2 t^2 dt = 4 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{4}{3} (8 - 1) = \frac{28}{3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

б) Δ $1 + \ln x = t^2$ алмаштиришдан фойдаланиб $\frac{dx}{x} = 2t dt$ ни топамиз. Интеграллашнинг янги чегаралар:

$$\frac{x}{t} \Big|_1^{\frac{1}{t}} \frac{e^2}{\sqrt{3}} \quad \text{бўлиб,}$$

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t dt}{t} = 2t \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1). \quad \blacktriangle$$

в) Δ $x = a \sin t$ алмаштиришни қўлаб, $dx = a \cos t dt$, $t = 0, t = \frac{\pi}{2}$ ларни топамиз. У ҳолда $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin t \cos t)^2 dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{a^4}{8} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt \right) = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi a^4}{16}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

г) Δ $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни қўлаб, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ ва $t = 0, t = 1$ ларни топамиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} &= \int_0^1 \frac{dt}{\cos^2 x (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x)} = \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \\ &= \frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2} + t^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} t \Big|_0^1 = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Хусусий ҳолда $a = b = 1$ бўлса,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^1 dx = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$692. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$693. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}.$$

$$694. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$695. \int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}.$$

$$696. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$697. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

$$698. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$699. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5 \sin x + \sin^2 x}.$$

700. Агар $f(x)$ [функция $[-a; a]$ кесмада жуфт,
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ бўлади. Исботланг.

701. Агар $f(x)$ функция $[-a; a]$ кесмада тоқ,
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ бўлади. Исботланг.

702. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $\int_{-a}^a \cos x f(x^2) dx = 2 \int_0^a \cos x f(x^2) dx;$

б) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^3 \sin^6 x dx = 0;$

в) $\int_{-a}^a \sin x f(\cos x) dx = 0.$

VI БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

§ 1. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ЙИГИДИНИНГ ЛИМИТИНИ ТОПИШ

Биз юқорида кўрдикки, чегараланмаган сондаги чексиз кичик қўшилувчиларнинг йиғиндисини ҳисоблаш масаласи, уни йиғиндининг лимитини излаш масаласи аниқ интеграл ушунчасига олиб келди. Кўп ҳолларда қўшилувчилар сони чексиз ортганда йиғиндининг лимитини излаш керак бўлади. Агар берилган йиғиндини бирор функция учун интеграл йиғинди бўладиган кўринишга келтириш мумкин бўлса, бу йиғиндининг лимитини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Масалан, $[0; 1]$ кесмани $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 =$

$= \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n}$ нуқталар ёрдамида узунлиги $\Delta x = \frac{1}{n}$ бўлган n та тенг бўлакка бўлайлик. Бу ҳолда ихтиёрий узлуксиз функция учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\left(\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx, \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x; \xi_k = \frac{k}{n} \right).$$

703. Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right).$

Δ а) Ўрта қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x)$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмани узунлиги $\Delta x = \frac{\pi}{n}$

та тенг бўлакка бўлувчи $x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_n = \frac{(n-1)\pi}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Агар $\sin \frac{\pi}{n}$

эканини ҳисобга олсак, S_n йиғинди $[0; \pi]$ кесмада $f(x) = \sin x$ функция учун интеграл йиғинди бўлади. Таърифга кўра $n \rightarrow \infty$ да бу интеграл йиғиндининг limiti $f(x) = \sin x$ функциядан 0 дан π гача олинган аниқ интегралдир, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2;$$

$$(\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x = \frac{\pi}{n}; \xi_k = \frac{k}{n}).$$

б) ΔS_n — йиғиндини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

Қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функциянинг $[0; 1]$ кесмани узунлиги $\Delta x = \frac{1}{n}$ бўлган n та тенг бўлакка бўлувчи $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Бу ҳолда S_n йиғинди $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функция учун $[0; 1]$ кесмада интеграл йиғинди бўлади ($\Delta x_k = \Delta x = \frac{1}{n}, \xi_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1, n}$). Аниқ интегралнинг таърифига асосан $n \rightarrow \infty$ да S_n интеграл йиғиндининг limiti $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функциядан 0 дан 1 гача олинган аниқ интегрални ифода қилади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2. \blacktriangle$$

в) ΔS_n йиғиндини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{n\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}} \right).$$

Қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ функциянинг $[0; 1]$ кесмани n та тенг бўлакка бўлувчи $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Худди юқоридагидек S_n йиғинди $[0; 1]$ кесмада $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ функция учун интеграл йиғиндидир. Таърифга асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \blacktriangle$$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$704. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$705. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

$$706. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

$$707. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

2-§. ЯССИ ФИГУРАЛАР ЮЗЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

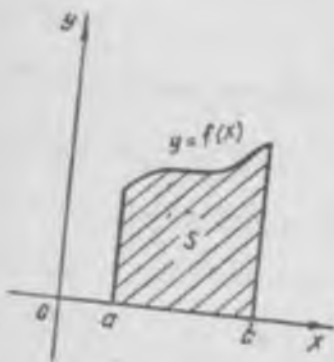
1. Фигура юзини декарт координаталар системасида ҳисоблаш

а) Узлуксиз $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) эгри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқнинг $[a; b]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

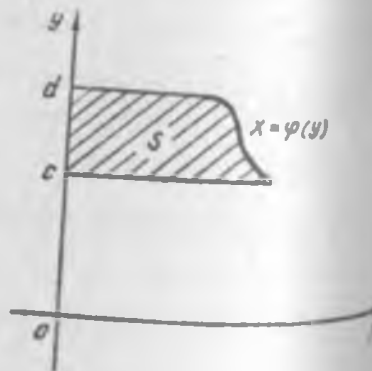
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

формула билан ҳисобланади (37- чизма).

б) Узлуксиз $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) эгри чизиқ $y = c$, $y = d$ тўғри чизиқлар ҳамда Oy ўқнинг $[c; d]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи



37- чизма



38- чизма

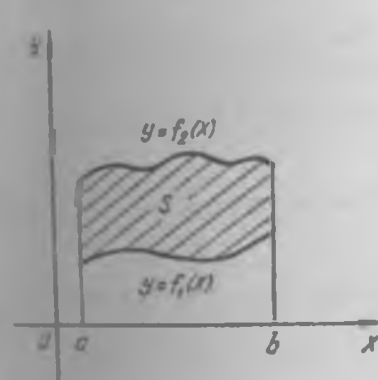
тўғри чизиқлар ҳамда Oy ўқнинг $[c; d]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (2)$$

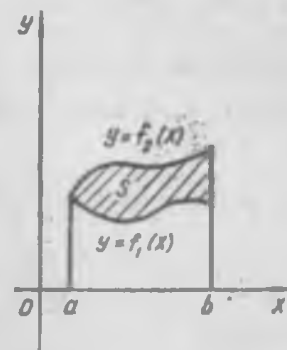
формула билан ҳисобланади (38- чизма).

в) Узлуксиз $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) эгри чизиқлар ҳамда $x = a$, $x = b$ ($a < b$) тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (3)$$



39- чизма



40- чизма

формула билан ҳисобланади (39, 40- чизмалар).

г) Узлуксиз $x = \varphi_1(y)$ ва $x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) эгри чизиқлар ҳамда $y = c$, $y = d$ ($c < d$) тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy \quad (4)$$

формула билан ҳисобланади (41, 42- чизмалар).

708. а) $0 \leq x \leq 2\pi$ бўлганда $y = \cos x$ ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

б) $y = x^2 + 1$ парабола $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

в) $x^2 + y^2 \leq 3$ доиранинг биринчи чоракда жойлашган ички қисми ва $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

$$704. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$705. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

$$706. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^3}}.$$

$$707. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

2-§. ЯССИ ФИГУРАЛАР ЮЗЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

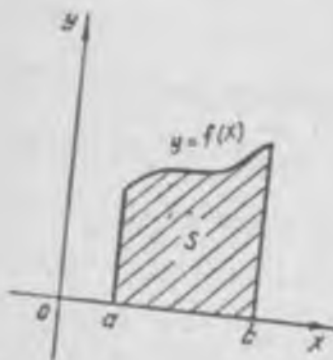
1. Фигура юзини декарт координаталар системасида ҳисоблаш

а) Узлуксиз $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) эгри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқнинг $[a; b]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

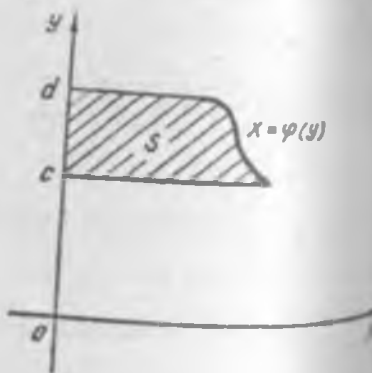
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

формула билан ҳисобланади (37- чизма).

б) Узлуксиз $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) эгри чизиқ $y = c$, $y = d$



37- чизма



38- чизма

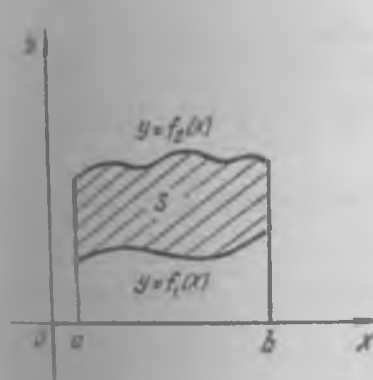
тўғри чизиқлар ҳамда Oy ўқнинг $[c; d]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (2)$$

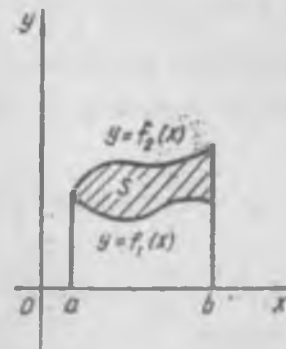
формула билан ҳисобланади (38- чизма).

в) Узлуксиз $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) эгри чизиқлар ҳамда $x = a$, $x = b$ ($a < b$) тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (3)$$



39- чизма



40- чизма

формула билан ҳисобланади (39, 40- чизмалар).

г) Узлуксиз $x = \varphi_1(y)$ ва $x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) эгри чизиқлар ҳамда $y = c$, $y = d$ ($c < d$) тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

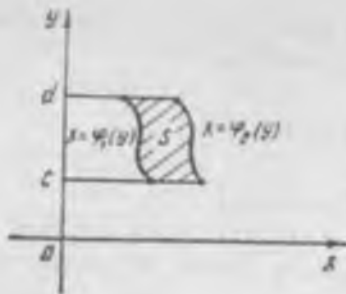
$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy \quad (4)$$

формула билан ҳисобланади (41, 42- чизмалар).

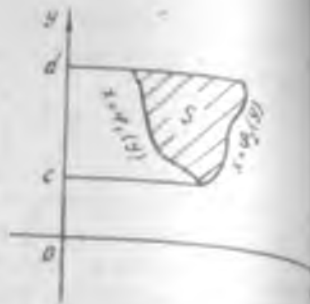
708. а) $0 \leq x \leq 2\pi$ бўлганда $y = \cos x$ ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

б) $y = x^2 + 1$ парабола $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

в) $x^2 + y^2 \leq 3$ доиранинг биринчи чоракда жойлашган ички қисми ва $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



41- чизма



42- чизма

г) $y = x^\alpha$, $x = y^\alpha$ ($\alpha > 1$) чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

д) $y = 2x + 1$, $y = \cos x$ чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Δ а) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ бўлганда $\cos x > 0$;

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ бўлганда $\cos x \leq 0$;

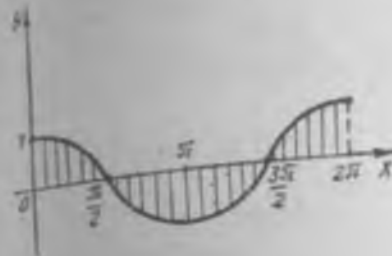
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ бўлганда $\cos x > 0$ бўлгани учун (43- чизма),

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx.$$

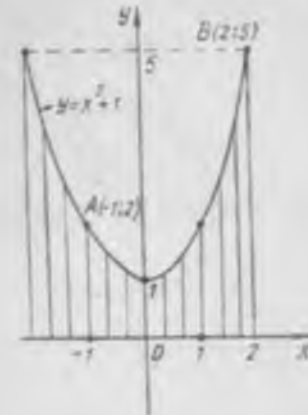
Бундаги аниқ интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисобласан:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1;$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2;$$



43- чизма



44- чизма

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1.$$

У ҳолда изланган юз

$$S = 1 + |-2| + 1 = 4 \text{ кв. б. } \blacktriangle$$

б) Δ $y = x^2 + 1$ параболанинг $x = -1$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан кесишish нуқталарини топамиз (44- чизма): $A(-1; 2)$, $B(2; 5)$. Юқоридаги (1) формулага кўра:

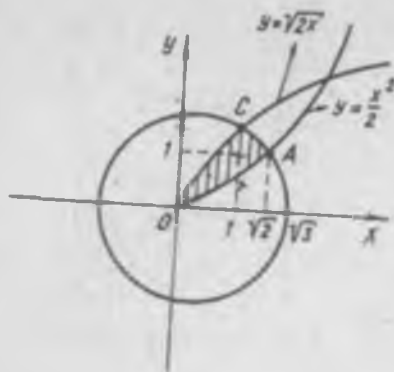
$$S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) \, dx = \int_{-1}^2 x^2 \, dx + \int_{-1}^2 1 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + x \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2 + 1 = 6 \text{ кв. б. } \blacktriangle$$

в) Δ $x^2 + y^2 = 3$ айлананинг $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ параболалар билан кесишish нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -3; \quad x^2 = 2y = 2, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{2};$$

$$A(\sqrt{2}; 1) \quad B(-\sqrt{2}; 1)$$

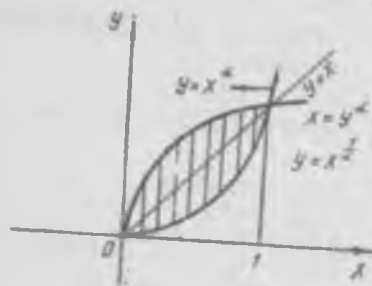
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -3; \quad y^2 = 2, \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{2};$$



45- чизма

$f_1(x) = \frac{x^2}{2}$ узлуксиз функциялардир. Аниқ интеграл аддитивлик хоссасига асосан:

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3-x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x}{2} \sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$



46- чизма

г) $\Delta y = x^a, x = y^a$ эки қисмларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (46- чизма).

$C(1; \sqrt{2}), D(1; -\sqrt{2})$ (45- чизма).

Юз 1- чоракда қарашлиги учун B, D нуқталари эътиборга олмабди ҳолда изланаётган юз йидагига тенг:

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

бунда

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{3-x^2}, & 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = x^a \Rightarrow x^{a^2} = x, x_1 = 0, x_2 = 1. y_1 = 0, y_2 = 1. O(0; 0), A(1; 1).$$

(3) формулага асосан:

$$S = \int_0^1 (x^{\frac{1}{a}} - x^a) dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{a}+1}}{\frac{1}{a}+1} - \frac{x^{a+1}}{a+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{a}+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a-1}{a+1}.$$

д) $\Delta y = 2x+1, y = \cos x, y = 0$ кесишиш нуқталарини топамиз (47- чизма):

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

$$A\left(-\frac{1}{2}; 0\right);$$

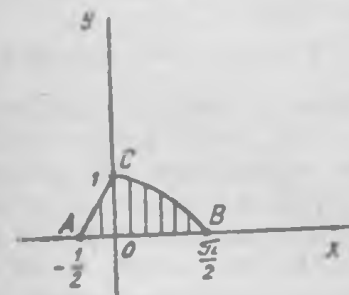
$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, B\left(\frac{\pi}{2}; 0\right), C(0; 1).$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ функция } \left[-\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ кесма-}$$

да узлуксиз.

Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига ва (1) формулага асосан изланаётган юз қуйидагига тенг:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x+1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$



47- чизма

$$= \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \text{ кв. б. } \blacktriangle$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

709. Ушбу $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

710. $y = x^2 + 1$ парабола ва $y = 3 - x$ тўғри чизик билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

711. $x = 0$, $x = 2$ тўғри чизиклар ва $y = 2^x$, $y = -x^2$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

712. $y = \frac{1}{x}$ гиперболола $x = 1$, $x = 3$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

713. $y = x^3$ кубик парабола ва $y = 2x$ тўғри чизик билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

714. $y = x^2 - x$ ва $y^2 = 2x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

715. $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

716. $y = \ln x$ эгри чизик, Ox ўқи ва $x = e$ тўғри чизик билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

717. $y = -x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

718. $y = |x - 1|$, $y = 3 - |x|$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

719. $y = \sin x$, $y = \cos x$ эгри чизиклар ва абсцисса билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиклар билан чегараланган фигура юзини ҳисоблаш

Агар фигура

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик кўринишда берилган ёпиқ эгри чизик билан чегараланган бўлса, унинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt,$$

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt,$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt \quad (7)$$

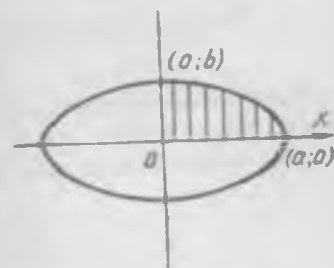
формулаларнинг бири билан ҳисобланади.

720. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) эллипс билан чегараланган

б) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) астроида юзини ҳисобланг.

а) Координата ўқлари эллипсининг симметрия ўқлари билан қисма-уст тушганлиги учун (48-чизма) улар эллипсни тўртта тенг бўлакка бўлади. Эллипснинг I квадрантда ётувчи қисмининг юзи (6) формулага асосан қуйидагига тенг:



48-чизма

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) x'(t) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right) = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Бундан $S = \pi ab$.

Агар $a = b$ бўлса, доиранинг юзи $S = \pi a^2$ келиб чиқади. Эллипснинг юзини (7) формуладан фойдаланиб, оsonгина топиш ҳам мумкин:

$$\begin{aligned} xy' - yx' &= a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t (-a \sin t) = \\ &= ab \cos^2 t + ab \sin^2 t = ab. \end{aligned}$$

$$\text{Ҳолда } S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \frac{1}{2} ab t \Big|_0^{2\pi} = \pi ab. \blacktriangle$$

Δ б) (7) формулага асосан:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{3}{8} a^2 \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} a^2 \pi. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

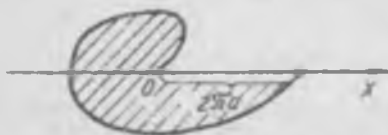
3. Фигура юзини қутб координаталар системасида ҳисоблаш

Қутб координаталар системасида берилган узлуксиз $\rho = \rho(\varphi)$ эгри чизик ва $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) нурлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$$

формула билан ҳисобланади.

721. а) $\rho = a\varphi$ Архимед спиралининг бир ўрамини ва $\varphi = 2\pi$ нури билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш.



49-чизма

б) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатаси билан $\varphi = 0$ ва $\varphi = \pi$ нурлари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш.

в) $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ айлана билан $\rho = 1 + \cos \varphi$ кардиоданинг кесишиш нуқталарини топиш учун

Δ а) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. (8) формулага асосан (49-чизма)

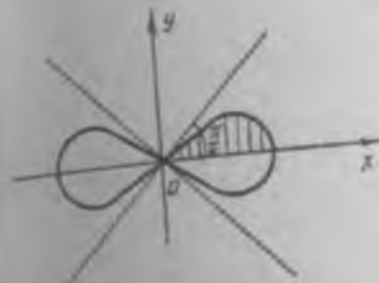
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4a^2 \pi^3}{3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Δ б) $\sqrt{\cos 2\varphi}$ функция — $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$

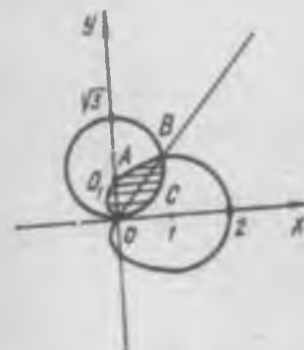
оралиқларда аниқланган. Бернулли лемнискатаси координаталар системасида

фигурага симметрик бўлгани учун изланаётган юзининг $\frac{1}{4}$ бўлагини топамиз (50-чизма). (8) формулага асосан:

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$



50-чизма



51-чизма

бундан $S = a^2$. $\blacktriangle$

в) $\Delta \rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ айлана билан $\rho = 1 + \cos \varphi$ кардиоданинг кесишиш нуқталарини топиш учун

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{3} \sin \varphi \\ \rho &= 1 + \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

системани ечамиз. Натижада $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$ га эга бўламиз (51-чизма).

Изланаётган юз OAB доиравий сегмент ($0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$) билан OAB кардионда сегменти ($\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$) юзларининг йиғиндисига тенг. (8) формулага асосан:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\
&= \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \left(\varphi + 2\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) = \\
&= \frac{7\pi}{12} - \frac{11\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} (\pi - \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

722. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ доира чорагининг юзини ҳисобланг.

723. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

724. $x = \sin t$, $y = \sin 2t$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

725. $x = a \cos t(1 + \cos t)$, $y = a \sin t(1 + \cos t)$ кардиоид билан чегараланган юзни ҳисобланг.

726. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоид билан чегараланган юзни ҳисобланг.

727. $\rho = a \cos \varphi$ эгри чизик билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

728. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ кардиоид ва $\rho = a$ айлан билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2-§. ЁЙ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Тўғри бурчакли декарт координаталари системасида берилган эгри чизик ёйининг узунлиги

$[a; b]$ да $y = f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизик учун $f(x)$ узлуксиз бўлса, эгри чизик $[a; b]$ да силлиқ эгри чизик дейилади.

Агар $y = f(x)$ $[a; b]$ да силлиқ эгри чизик (яъни $f'(x)$ узлуксиз) бўлса, у ҳолда унинг ёйи узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда a ва b ёй учларининг абсциссаларидир ($a < b$).

Агар эгри чизик $x = \varphi(y)$ ($c \leq y \leq d$) кўринишда берилса, ёй узунлиги

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (2)$$

формула билан ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизик ёйининг узунлиги

Агар эгри чизик

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

кўринишда берилган бўлиб, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда эгри чизик ёйининг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда α ва β лар t параметрининг ёй учларига мос қийматларидир ($\alpha < \beta$).

3. Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизик ёйининг узунлиги

Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизик $\rho = f(\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ёйининг узунлиги

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\
&= \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) = \\
&= \frac{7\pi}{12} - \frac{11\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} (\pi - \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигурани ҳисобланг:

722. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ доира чорагининг юзини ҳисобланг.

723. $x = \frac{c^2}{a} \cos^2 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^2 t$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

724. $x = \sin t$, $y = \sin 2t$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

725. $x = a \cos t (1 + \cos t)$, $y = a \sin t (1 + \cos t)$ кардиоида билан чегараланган юзини ҳисобланг.

726. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоида билан чегараланган юзини ҳисобланг.

727. $\rho = a \cos \varphi$ эгри чизик билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

728. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ кардиоида ва $\rho = a$ айлани билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

3-6. ЕЙ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Тўғри бурчакли декарт координаталари системасида берилган эгри чизик ёйининг узунлиги

$[a, b]$ да $y = f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизик узлуксиз бўлса, эгри чизик $[a, b]$ да силлик эгри чизик дейилади. Агар $y = f(x)$ $[a, b]$ да силлик эгри чизик (яъни $f'(x)$ узлуксиз) бўлса, у ҳолда унинг ёйи узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда a ва b ёй учларининг абсциссаларидир ($a < b$).

Агар эгри чизик $x = \varphi(y)$ ($c \leq y \leq d$) кўринишда берилса, ёй узунлиги

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (2)$$

формула билан ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизик ёйининг узунлиги

Агар эгри чизик

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

кўринишда берилган бўлиб, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда эгри чизик ёйининг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда α ва β лар t параметрининг ёй учларига мос қийматларидир ($\alpha < \beta$).

3. Қутб координаталар системасида берилган силлик эгри чизик ёйининг узунлиги

Қутб координаталар системасида берилган силлик эгри чизик $\rho = f(\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ёйининг узунлиги

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \quad (4)$$

732. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ циклоиданинг $t = 0$ дан $t = \pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.
 Δ Циклоиданинг параметрик тенгламасини t бўйича дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} &= \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = a\sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= 2a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

(3) формулага асосан:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

733. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ доира эвольвентасининг $t = 0$ дан $t = \pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.
 Δ Эгри чизиқ параметрик тенгламасини t бўйича дифференциаллаймиз:

$$x'_t = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t,$$

$$y'_t = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t.$$

У ҳолда

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = at.$$

(3) формулага асосан:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_0^{\pi} at dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi^2}{2}. \quad \blacktriangle$$

734. $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2 \\ y = t^3 - t^2 \end{cases}$ эгри чизиқ (сиртмоқ) ёйининг узунлигини топинг.

Δ Интеграллаш чегараларини топамиз: $x = \sqrt{3}t^2 \geq 0$, яъни эгри чизиқ ўнг ярим текисликда ётади ҳамда $y \geq 0$.

Эгри чизиқ симметрик ($x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$) (54-чизма).
 $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm 1$;
 $x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3}$,
 $x(-1) = x(1) = \sqrt{3}$.

Демак, интеграллаш чегараси — 1 дан 1 гача бўлади.
Эгри чизиқнинг параметрик тенг-ламасини дифференциаллаймиз:

$$x'_t = 2\sqrt{3}t, \quad y'_t = 1 - 2t^2.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} &= \sqrt{12t^2 + 1 - 4t^2 + 4t^4} = \sqrt{(3t^2 + 1)^2} = \\ &= 3t^2 + 1. \end{aligned}$$

(3) формулага асосан:

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_{-1}^1 (3t^2 + 1) dt = (t^3 + t) \Big|_{-1}^1 = 4. \quad \blacktriangle$$

735. $\rho = ae^{m\varphi}$ логарифмик спиралнинг $(\rho_0; \varphi_0)$ дан $(\rho_1; \varphi_1)$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.
 Δ Қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} \rho' &= ame^{m\varphi}, \quad \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} = \\ &= a\sqrt{1 + m^2} e^{m\varphi}. \end{aligned}$$

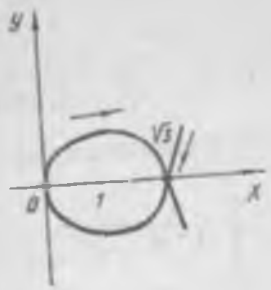
(4) формулага асосан ($\rho_1 > \rho_0$):

$$\begin{aligned} l &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a\sqrt{1 + m^2} e^{m\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m} e^{m\varphi} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m} (e^{m\varphi_1} - e^{m\varphi_0}) = \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} (\rho_1 - \rho_0). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

736. $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ ($0 \leq \varphi \leq 3\pi$) эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Δ Берилган функция ҳосиласини топамиз:

$$\rho' = -a \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3}.$$



54-чизма

У ҳолда

$$V_{\rho^2 + \rho'^2} = V_{a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos^4 \frac{\varphi}{3}} = a \cos \frac{\varphi}{3}$$

(4) формулага асосан:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{3\pi} V_{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_0^{3\pi} a \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \frac{1 + \cos \frac{2\varphi}{3}}{2} d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left(\int_0^{3\pi} d\varphi + \frac{3}{2} \int_0^{3\pi} \cos \frac{2\varphi}{3} d\left(\frac{2\varphi}{3}\right) \right) = \frac{a}{2} \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{3\pi} \\ &= \frac{3\pi}{2} a. \end{aligned}$$

737. $\varphi = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$ эгри чизик ёйининг узунлигини топинг ($1 \leq \rho \leq 3$).

Δ Маълумки, $l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} V_{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$. Тескари функцияларга асосан $\left(\rho'(\varphi) = \frac{1}{\varphi'(\rho)} \right)$: $l = \int_{\rho_0}^{\rho_1} V_{\rho^2 + \left(\frac{1}{\varphi'(\rho)} \right)^2} \varphi'(\rho) d\rho$

$$\begin{aligned} &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} V_{(\rho\varphi'(\rho))^2 + 1} d\rho = \int_1^3 V_{\left(\frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \right)^2 + 1} d\rho = \\ &= \int_1^3 \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\rho} \right) d\rho = \left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{2} \ln \rho \right) \Big|_1^3 = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \ln 3. \blacktriangle \end{aligned}$$

Қуйидаги эгри чизик ёйларининг узунликларини аниқлаш.

738. $y^2 = 4x$ параболанинг $O(0; 0)$ нуқтадан $A(1; 2)$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

739. $y^2 = x^2$ эгри чизикнинг $x = \frac{4}{3}$ тўғри чизик билан кесилган қисмининг узунлигини топинг.

740. $y = \frac{x^2}{2} - 1$ параболанинг Ox ўқ билан кесилган ёйининг узунлигини топинг.

741. $y = \ln x$ эгри чизикнинг $(\sqrt{3}; \ln \sqrt{3})$ нуқтадан $(\sqrt{8}; \ln \sqrt{8})$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

742. $y = \ln(1 - x^2)$ эгри чизикнинг $x = 0$ дан $x = \frac{1}{2}$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

743. $x^2 + y^2 = r^2$ айлана узунлигини топинг.

744. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ занжир чизикнинг $x = -a$ дан $x = 0$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

745. $y = \ln \cos x$ эгри чизикнинг $x = 0$ дан $x = a$ ($a < \frac{\pi}{2}$) гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

746. $x^2 = (y + 1)^2$ ва $y = 4$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг периметрини топинг.

747. $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$ айлана узунлигини топинг.

748. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ астроида узунлигини топинг.

749. $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ кардиоида узунлигини топинг.

750. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}$ эгри чизикнинг $t = 0$ дан $t = \pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

751. $\begin{cases} x = f''(t) \cos t + f'(t) \sin t \\ y = -f'(t) \sin t + f''(t) \cos t \end{cases}$ эгри чизикнинг $t = t_1$ дан $t = t_2$ гача бўлган ёйи узунлиги $(f(t) + f''(t)) \Big|_{t_1}^{t_2}$ га тенг эканини исботланг.

752. Юқоридаги 751-масала натижасини қўллаб,

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$$

эгри чизикнинг $t = 0$ дан t гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

753. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t}{3} (t^2 - 3) \end{cases}$ эгри чизикнинг Ox ўқ билан кесилган нуқталари орасидаги ёйи узунлигини топинг.

754. $\rho = r$ айлана узунлигини топинг.

755. $\rho = a\varphi$ Архимед спирали бир ўрамининг узунлигини топинг.

756. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) кардиоиданинг $\varphi = 2\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

757. $\rho\varphi = 1$ гиперболик спиралнинг $\varphi = \frac{3}{4}$ дан $\varphi = \frac{5}{4}$ гача бўлган ёни узунлигини топинг.

758. $\varphi = \sqrt{\rho}$ эгри чизиқнинг $\rho = 0$ дан $\rho = 5$ гача бўлган ёни узунлигини топинг.

4-§. ҲАЖМЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

1. Жисм ҳажмини унинг кўндаланг кесимлари бўйича ҳисоблаш

Агар жисмни Ox ўқнинг x нуқтасига ўтказилган перпендикуляр текисликлар билан кесишдан ҳосил бўлган кесим юзи $S(x)$ берилган бўлса, жисм ҳажми

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

формула билан ҳисобланади, бунда a ва b лар x нинг ўзгариш чегаралари бўлиб, $S(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз деб қаралади.

2. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида айланма жисм ҳажми

а) $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (2)$$

формула билан ҳисобланади:

б) $x = \varphi(y)$ эгри чизиқ, Oy ўқ ва $y = c$, $y = d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади.

в) $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx \quad (4)$$

формула билан ҳисобланади. мумкин ҳолда, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) чизиқлар ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ва Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми мос равишда қуйидаги

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (5)$$

$$V_y = \pi \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (6)$$

формула билан ҳисобланади.

3. Параметрик шаклида берилган эгри чизиқнинг айланишидан ҳосил бўлган айланма жисм ҳажми

Агар $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) эгри чизиқ параметрик усулда

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$$

шаклида берилган бўлса, эгри чизиқли трапециянинг Ox атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (y(t))^2 x'(t) dt \quad (7)$$

формула билан ҳисобланади.

4. Қутб координаталари системасида айланма жисм ҳажми

Қутб координаталар системасида берилган $\rho = f(\varphi)$ эгри чизиқ ва $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ радиус векторлар билан чегараланган ясси фигуранинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

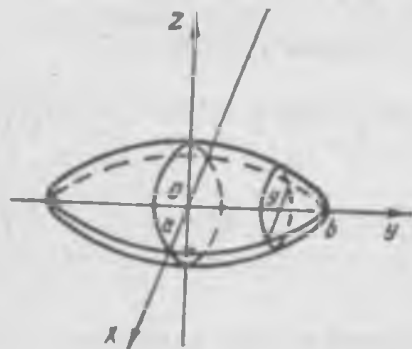
$$V = \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin^3 \varphi d\varphi \quad (8)$$

формула билан ҳисобланади. $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$ бўлганда

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin \varphi d\varphi. \quad (9)$$

759. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ҳажмини
 Δ Эллипсоидни Oxz текисликка параллел бўлган
 масофа узоқликдан ўтган текислик билан кесганда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$



55- чизма

ёки ярим ўқлар

$$= \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot 2$$

$$= 2 \sqrt{b^2 - y^2} \text{ бўлган}$$

$$\left(\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{c}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2$$

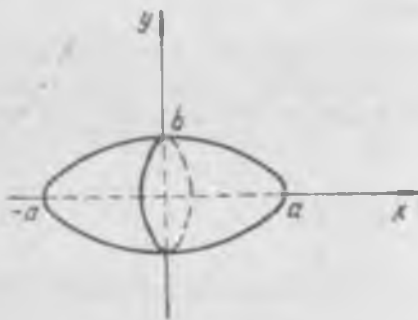
эллипс ҳосил бўлади (56- чизма).

Бизга маълумки, бундай эллипснинг юзи πAB га тенг, демак эллипсоид кўндаланг кесимининг юзи қуйидагига тенг:

$$S(y) = \frac{\pi ac}{b^2} (b^2 - y^2).$$

(I) формулага асосан эллипсоиднинг ҳажми қуйидагига тенг:

$$V = \int_{-b}^b S(y) dy = \frac{2\pi ac}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \frac{2\pi ac}{b^2} \left[b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{2\pi ac}{b^2} \left(b^3 - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{4\pi abc}{3}.$$



56- чизма

Агар $a = b = c$ бўлса, эллипсоид шарга айланиб, шарнинг ҳажми $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ га тенг бўлади.

$$760. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипсни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма диган айланма эллипсоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

$$761. y = x^2 \text{ ва } 8x = y^2 \text{ па-}$$

раболалар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Параболаларнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$x^2 = 8x \Rightarrow x(x - 8) = 0$$

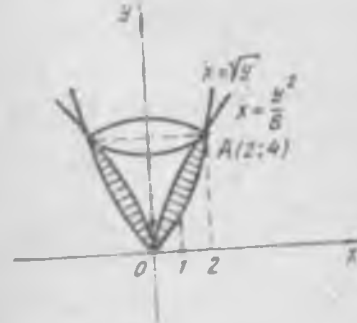
тенгламасидан:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

формулага асосан (56- чизма):

$$\int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

761. $y = x^2$ ва $8x = y^2$ параболалар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг. Параболаларнинг кесишиш нуқталарини топамиз:



57- чизма

$$x^2 = 8x \Rightarrow x(x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 8;$$

$$y_1 = 0, y_2 = 4.$$

$$\text{Нуқталар: } O(0; 0), A(2; 4)$$

$$x_2(y) = \sqrt{y}$$

$$x_1(y) = \frac{y^2}{8}$$

$$x_2(y) - x_1(y) = \sqrt{y} - \frac{y^2}{8}$$

$$\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8} \right) dy = \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^3}{24} \right]_0^4 = \frac{16}{3} - \frac{64}{24} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8} \right) dy = \pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

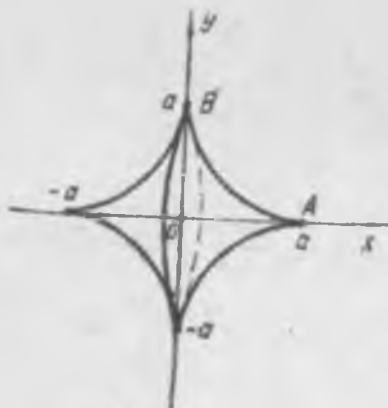
$$762. x = a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t$$

астроиднинг Ox ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Δ Илган ҳажм AOB фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисм ҳажмининг иккиланганига тенг. Шунинг учун

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} y^2 dx$$



58-чизма

бўлади (58-чизма).
 t параметрининг

чегараларини топиш

$$x = a \cos^2 t$$

$$dx = -2a \cos t \sin t dt$$

$$x = 0 \text{ да } t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \text{ да } t = 0 \text{ бўлади}$$

У ҳолда (7) ф

асосан:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t (-2a \cos t \sin t dt) =$$

$$= -6a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \sin t dt = -6a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^2 t dt$$

$$= 6a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) d(\cos t) =$$

$$= 6a^3 \pi \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^9 t}{9} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{105} a^3 \pi$$

763. $y = \frac{x^2}{3} + 1$ парабола, координата ўқлари ва тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

764. $y = x^2$ парабола, Oy ўқ ва $y = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

765. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) эллипсини Oy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

766. $y = x^2 - 4$ парабола билан Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

767. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлиқини

$0 \leq x \leq \pi$ кесмаси билан чегараланган фигуранинг атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

768. $y = 2x - x^2$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

769. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

770. $y = 4 - x^2$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг $x = 3$ тўғри чизиқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

771. $y = \frac{R}{H} x$ тўғри чизиқни $[0; H]$ кесмада Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган конус ҳажмини ҳисоб-

772. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($b > r$) доиранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган тор ҳажмини ҳисобланг.

773. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ парабола ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

774. $x = a(t - \sin t)$
 $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бир аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида,

Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

775. $\rho = a\varphi$ ($a > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) Архимед спиралининг айланасини қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

776. $x = a \cos^3 t$
 $y = a \sin^3 t$ астроиданинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

777. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоиданинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

778. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола, $2ay - bx = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

5-5. АЙЛАНМА ЖИСМ СИРТНИНГ ЮЗИ

1. $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) силлиқ эгри чизик ёни ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

формула билан ҳисобланади.

2. Агар силлиқ эгри чизик

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, сирт юзи

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

формула билан ҳисобланади.

3. Агар силлиқ эгри чизик қутб координата

$$\rho = f(\varphi), \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

кўринишда берилган бўлса, қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

формула билан ҳисобланади.

$$779. y = \operatorname{tg} x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзини топиш.

$$\Delta \text{ Маълумки, } y' = (\operatorname{tg} x)' = 1$$



59- чизма

(59- чизма).

(1) формулага асосан:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/4} y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + 1} dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \sqrt{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\left| \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg}^2 x = t, \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = dt; \\ x = 0, t = 1; \\ x = \frac{\pi}{4}, t = 2; \end{cases} \right| =$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = \pi \int_1^2 \frac{1+t}{t\sqrt{1+t}} dt = \pi \int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} +$$

$$+ \pi \int_1^2 \frac{tdt}{t\sqrt{1+t}} = -\pi \int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}} +$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 (1+t)^{-\frac{1}{2}} d(1+t) = -\pi \left(\ln \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t}} \right) \Big|_1^2 +$$

$$\pi \sqrt{1+t} \Big|_1^2 = \pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2} \right). \Delta$$

$$780. x^2 + (y-b)^2 = R^2$$

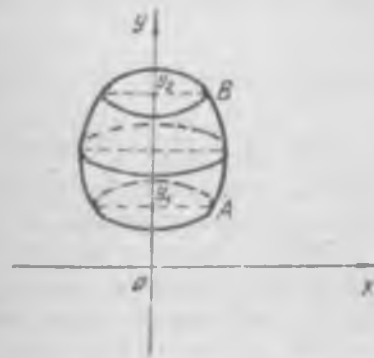
($a \leq y \leq y_2$) айлана ёни ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисоблаш.

Айлана ёни Oy ўқни кесиб, бу ёнинг Oy ўқ атрофида айланишидан сферик камар бўлади (60- чизма).

Сферик камар сиртининг юзини топиш.

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (4)$$

формуладан фойдаланамиз. Айлана тенгламасини y бўйича ҳал қилиш билан, $2xx' + 2(y-b) = 0$ ёки $xx' = -(y-b)$ ҳосил бўлади. (4) га асосан:



60- чизма

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (x')^2} dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{R^2 - (y-b)^2 + (y-b)^2} dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} R dy = 2\pi R (y_2 - y_1);$$

$$S = 2\pi R \cdot H, \quad H = y_2 - y_1.$$

Агар $H = 2R$ бўлса, сфера юзи $S = 4\pi R^2$ бўлади.

$$781. \quad x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ циклоида ёйлашишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.}$$

Циклоида тенгламасини t бўйича дифференциаллаштириб, x' ва y' нисбатини топишдан ҳосил бўлади:

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t.$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

У ҳолда (2) формулага асосан:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} dt = 4\pi a^2 [t - \sin t]_0^{2\pi} = 8\pi a^2.$$

782. $y = \frac{x^2}{2}$ параболанинг $y = \frac{3}{2}$ тўғри чизик билан қишишган қисмининг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

783. $x = y^2 - 4$ параболанинг $x = 2$ тўғри чизик билан қишишган қисмининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

784. $x^2 + y^2 = 4$ ($y > 0$) айлананинг $x = -1$ дан $x = 1$ гача ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт (шар камари) юзини ҳисобланг.

785. $y = \frac{x^3}{3}$ параболанинг $x = -2$ дан $x = 2$ гача ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

786. $y = \sin x$ синусоиданинг $x = 0$ дан $x = \pi$ гача бўлган ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

787. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ занжир чизикнинг $x = 0$ дан $x = a$ гача бўлган ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи билан айланма жисм сиртининг орасидаги боғланиш $S = \frac{2}{a} V$ кўринишда бўлишини исбот қилиш.

788. $9y^2 = x(3-x)^2$ эгри чизик сиртмоғининг (илморат) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

789. Радиуси R , баландлиги H бўлган конус сиртининг сирт юзини ҳисобланг.

790. $x = e^t \sin t$
 $y = e^t \cos t$ эгри чизикнинг $t = 0$ дан $t = \frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёйининг абсцисса ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

791. $x = r \cos t$
 $y = r \sin t$ айланани ўз диаметри атрофида айланишидан ҳосил бўлган сферик сирт юзини ҳисобланг.

792. $x = a(t - \sin t)$
 $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) циклоида бир арканинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

793. $x = a \cos^3 t$
 $y = a \sin^3 t$ астроиданинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

794. $\rho = 2r \sin \varphi$ айлананинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

795. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) кардиоиданинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

796. $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ Бернулли лемнискатасининг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

6. МОМЕНТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ. ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ.

ГУЛЬДЕН ТЕОРЕМАЛАРИ

Бу параграфда зичликни ўзгармас ва $\mu = 1$ деб ҳисобланган $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ силлиқ эгри чизик ёйининг Ox ўқларга нисбатан статик моментлари мос равишда қуйидагича:

$$M_x = \int_a^b y dl = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b x dl = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади, бунда $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$.
Агар эгри чизик тенгламаси

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \end{aligned}$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, эгри чизик Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос равишда

$$M_x = \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b y(t) dl,$$

$$M_y = \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b x(t) dl$$

формулалар билан ҳисобланади, бунда $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.
Эгри чизик AB ёни оғирлик марказининг координатлари

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{M_y}{l} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}, \\ y_0 &= \frac{M_x}{l} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx} \end{aligned}$$

ёки

$$x_0 = \frac{M_y}{l} = \frac{\int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt},$$

$$y_0 = \frac{M_x}{l} = \frac{\int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt} \quad (8)$$

формулалар билан ҳисобланади, бунда l — AB ёй узунлиги.
Эгри чизик AB ёйининг координата ўқларига нисбатан инер-
моменти эса қуйидаги

$$I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (9)$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (10)$$

$$I_x = \int_a^b y^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (11)$$

$$I_y = \int_a^b x^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (12)$$

формулалар билан ҳисобланади.

(8) дан $y_0 \cdot l = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$ тенгликни ёзиб, бу тенг-
ликка томонини 2π га кўпайтириб, қуйидаги

$$2\pi y_0 \cdot l = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (13)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва Гульденнинг 1-теоремасига ке-
ламиз.

$y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) силлиқ эгри чизик AB ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзи шу ёй узунлиги билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узун-
лигининг кўпайтмасига тенг.

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x) \quad (a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq f_2(x))$$

силлиқ эгри чизиклар ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиклар би-
р чегараланган G фигуранинг Ox , Oy координата ўқла-
рига нисбатан статик моментлари мос равишда қуйидаги

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (14)$$

$$M_y = \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

формулалар билан ҳисобланади.

Хусусий ҳолда $f_1(x) = 0$ бўлса, эгри чизиқнинг Ox ўқларига нисбатан статик моментларининг координата ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx,$$

$$M_y = \int_a^b xy dx$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

G фигура оғирлик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{M_y}{S},$$

$$y_0 = \frac{M_x}{S}$$

формулалар ёрдамида топилади, бунда S — G фигуранинг юзи.

G фигуранинг координата ўқларига нисбатан инерция моментлари қуйидаги

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b (f_2^3(x) - f_1^3(x)) dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2 (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

$$(19) \text{ дан } y_0 \cdot S = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \text{ тенгликни ҳосил қиламиз}$$

тенгликнинг иккала томонини 2π га кўпайтириб, Гульмининг 2-теоремасига келамиз, яъни

$$2\pi y_0 \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

(1) эгри чизиқ. $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқларига нисбатан статик моментларининг координата ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги

формулалар билан ҳисобланади. Хусусий ҳолда $f_1(x) = 0$ бўлса, эгри чизиқнинг Ox ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги

формулалар ёрдамида ҳисобланади. G фигура оғирлик марказининг координаталари

$$\Delta M_x = \int_a^b y dl = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

қуйидаги формуладан фойдаланамиз ва

$$y dl = y \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{y^2 + (yy')^2} dx$$

эллипс тенгламасидан қуйидагиларни топамиз:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), yy' = -\frac{b^2}{a^2} x.$$

$$y dl = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{b^4}{a^4} x^2} dx =$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2\right)} dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2} dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx.$$

бунда e — эллипс эксцентриситети, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$.

Қуйидаги формулага асосан:

$$M_x = \int_{-a}^a y dl = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx =$$

$$= \frac{2b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx = \left| \begin{array}{l} ex = a \sin t, e dx = a \cos t dt, \\ x = 0 \text{ да } t = 0; \\ x = a \text{ да } t = \arcsin e \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2b}{a} \int_0^{\arcsin e} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot \frac{a}{e} \cos t dt = \\
&= \frac{2ab}{e} \int_0^{\arcsin e} \cos^2 t dt = \frac{2ab}{e} \int_0^{\arcsin e} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
&= \frac{ab}{e} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\arcsin e} = \frac{ab}{e} (\arcsin e + e \sqrt{1-e^2}) = \\
&= \frac{ab}{e} \arcsin e + b^2 = b \left(b + \frac{a}{e} \arcsin e \right), \quad (\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a})
\end{aligned}$$

798. I квадрантда ётувчи

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

астроида ёйининг оғирлик маркази координаталарининг.

Δ Ёй оғирлик марказининг координаталари (5), (6) формулалар бўйича ҳисобланади. Астроида ёйи симметрия ($y=x$) эга бўлгани учун M_x , M_y статик моментлар бўлади, яъни $M_x = M_y$. Бу ҳолда оғирлик марказининг координаталари ҳам бир-бирига тенг, яъни $x_0 = y_0$. Демак,

$$x_0 = y_0 = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}$$

Астроида тенгламасини y га нисбатан ечиб, y' ни то

$$\begin{aligned}
y &= (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}} = \\
&= - (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) x^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$$

Бу ҳолда

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx &= a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} a^2, \\
\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx &= a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{5}{3}} \Big|_0^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2} a^2.
\end{aligned}$$

Бу формулага асосан ёй оғирлик марказининг координаталари қуйидагига тенг:

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{3}{5} a^2}{\frac{3}{2} a} = \frac{2}{5} a.$$

Демак, $C \left(\frac{2}{5} a; \frac{2}{5} a \right)$. ▲

799. Агар айлананинг ҳар бир нуқтасидаги чизикли зич-шуну нуқта координаталарининг кўпайтмасига пропорционал бўлса, I квадрантда ётувчи $x^2 + y^2 = a^2$ айлана чоракнинг оғирлик маркази координаталарини топинг. Мисалнинг шартига асосан, зичлик қуйидагига тенг:

$$\mu(x; y) = kxy.$$

Зичлик ўзгарувчи бўлган ҳолда $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) қисмидаги чизик ёйи оғирлик марказининг координаталари қуйи-

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\int_a^b \mu x dl}{\int_a^b \mu dl} = \frac{\int_a^b \mu(x; y) x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \mu(x; y) \sqrt{1+y'^2} dx}, \\
y_0 &= \frac{\int_a^b \mu y dl}{\int_a^b \mu dl} = \frac{\int_a^b \mu(x; y) y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \mu(x; y) \sqrt{1+y'^2} dx}
\end{aligned}$$

формулалар орқали топилади. Айлана тенгламасидан y' , dl ни топамиз:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

$$dl = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{a}{y} dx.$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu x dl &= \int_0^a kxyx \frac{a}{y} dx = ak \int_0^a x^2 dx = \\ &= ak \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{ka^4}{3}, \quad \int_a^b \mu y dl = \int_0^a kxy^2 \frac{a}{y} dx = \\ &= ak \int_0^a xy dx = ak \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= -\frac{ak}{2} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = \\ &= -\frac{ak}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{ka^4}{3}, \end{aligned}$$

$$\int_a^b \mu dl = ak \int_0^a xy \frac{dx}{y} = ak \int_0^a x dx = \frac{ka^2}{2}.$$

Топилганларни юқоридаги формулага қўйсак,

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{ka^4}{3}}{\frac{ka^2}{2}} = \frac{2}{3} a.$$

Демак, $C \left(\frac{2}{3} a; \frac{2}{3} a \right)$. ▲

800. I квадрантда ётувчи $x^2 + y^2 = R^2$ айлана

Оу ўққа нисбатан инерция моментини ҳисобланг.

Δ Айлана тенгламасидан

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

топамиз ва топилганларни (10) формулага қўйиб,
 нга эга бўламиз:

$$= \int_0^R x^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^R x^2 \frac{R dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R \int_0^R x \frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}} \\ v = -\sqrt{R^2-x^2} \end{array} \right| = R \left(-x \sqrt{R^2-x^2} \right) \Big|_0^R +$$

$$+ R \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = R \sin t, dx = R \cos t dt, \\ x = 0 \text{ да } t = 0 \\ x = R \text{ да } t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{R^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R^3}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{4}. \blacktriangle$$

801. $y = \frac{2}{\pi} x$ тўғри чи-

ва $y = \sin x$ ($x > 0$)
 синусоида билан чегаралан-
 ган фигура оғирлик марка-
 зининг координаталарини
 топинг.

$\Delta y = \frac{2}{\pi} x$ тўғри чи-
 зиқ

билан $y = \sin x$ синусоида-
 янинг қисмидаги нуқталари

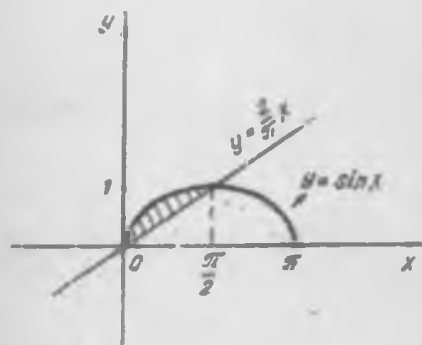
$O(0; 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ бўлади

(61-чизма).

Фигура оғирлик марказининг координаталарини (18),

(19) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx =$$



61-чизма

$$= \left(-\cos x - \frac{x^3}{\pi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}.$$

$$M_y = \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{24} =$$

$$= \frac{12-\pi^2}{12};$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi} x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^3}{24} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

Топилганларни (18), (19) формулаларга қўйсак,

$$x_0 = \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{12-\pi^2}{12}}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)},$$

$$y_0 = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{\pi}{24}}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

$$\text{Жаъба. } C \left(\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}; \frac{\pi}{6(4-\pi)} \right). \blacktriangle$$

802. Ярим ўқлари a ва b бўлган эллиптик пластинка-координата ўқларига нисбатан инерция моментини то-

пишди. Маълумки, эллипснинг параметрик тенгламаси қуйидаги шуда бўлади:

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Эллиптик пластинка координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун фигура чорагининг инерция моментини топиб, натижани 4 га кўпайтириш кифоя.

Фигура инерция моментларини (20), (21) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b (f_2^3(x) - f_1^3(x)) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2^3(x) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^3 \cos^3 t \cos t dt = \frac{ab^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt =$$

$$= \frac{ab^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{ab^3}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt =$$

$$= \frac{ab^3}{12} (t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab^3}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{ab^3 \pi}{24} + \frac{ab^3}{24} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab^3}{96} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^3 \pi}{16}, \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4};$$

$$\frac{I_y}{4} = \int_a^b x^2 (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b x^2 f_2(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cos t a \cos t dt = a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{a^3 b}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^3 b}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\
 &= \frac{a^3 b}{4} \left(\frac{1}{2} t - \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3 b}{16}, \quad I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.
 \end{aligned}$$

803. Гульденнинг 2-теоремасидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

циклоида бир аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган G гуранинг огирлик маркази координаталарини топинг. ΔG фигура $x = \pi a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрияли бўлгани учун юқоридаги эслатмага асосан огирлик марказининг абсциссаси $x_0 = \pi a$ га тенг бўлади.

Гульденнинг 2-теоремасига асосан:

$$2\pi y_0 \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx = V,$$

бунда V — G фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, S G фигуранинг юзи. 5.1-суратни топамиз:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t) dt = \\
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \\
 &\quad - \cos^3 t) dt = \pi a^3 \left(t - 3\sin t \right) \Big|_0^{2\pi} + 3\pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt = 2\pi^2 a^3 + 3\pi a^3 \left(\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d \sin t = 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 - \pi a^3 (\sin t - \\
 &\quad - \frac{\sin^3 t}{3}) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3; \quad V = 5\pi^2 a^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 (t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + \\
 &+ a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2\pi a^2 + a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2, \quad S = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

Гульденнинг 2-теоремасига асосан:

$$V = 2\pi y_0 \cdot S, \quad y_0 = \frac{V}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}, \quad y_0 = \frac{5a}{6}.$$

Яъна, $C\left(\pi a; \frac{5a}{6}\right)$. ▲

804. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқ координата ўқлари орасидаги кесмасининг координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

805. $y^2 = 2x$ парабола ёйининг ($0 \leq x \leq 2$) координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

806. $y = \cos x$ эгри чизиқ ёйининг $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ Ox ўқига нисбатан статик моментини топинг.

807. $y = a - x$ тўғри чизиқ ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчак огирлик марказининг координаталарини топинг.

808. $x^2 + y^2 = R^2$ ($y \geq 0$) айлана ёйининг огирлик марказини координаталарини топинг.

809. $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) синусоида ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг координата ўқларига нисбатан статик моментларини ва огирлик маркази координаталарини топинг.

810. $y = x^2$, $x = y^2$ парабодалар билан чегараланган фигуранинг огирлик маркази координаталарини топинг.

811. $y^2 = 2px$ парабола ва $y = 0$, $x = 1$ тўғри лар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг моментларини ва оғирлик маркази координаталарини топинг.

812. $x^2 + y^2 = R^2$ айлананинг Ox ўқ билан ҳосил бўлган ярим доира оғирлик марказининг координаталарини топинг.

813. Биринчи квадрантда жойлашган

$$x = acost$$

$$y = bsint$$

эллипс ёйи ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

814. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ парабола ва координата билан чегараланган фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

815. Биринчи квадрантда ётувчи

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

эллипс ва $x^2 + y^2 = 9$ айлана билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказининг координаталарини топинг.

816. Агар ҳар бир нуқтадаги чизиқли зичлик шу нуқтанинг абсциссасига пропорционал бўлса, биринчи квадрантда жойлашган

$$x = acos^3 t$$

$$y = asin^3 t$$

астроида оғирлик марказининг координаталарини топинг.

817. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) эгри чизик ёйининг Ox ўқи нисбатан инерция моментини топинг.

818. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бир астроида оғирлик марказининг координаталарини топинг.

819. $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг координаталарини топинг.

820. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизик ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан инерция моментларини топинг.

821. $y^2 = 4ax$ парабола ва $x = a$ тўғри чизиқ билан
 ҳосилланган фигуранинг Oy ўққа нисбатан инерция момен-
 топинг.
 822. R радиусли ярим доиранинг ($y > 0$) диаметрга нис-
 батан инерция моментини топинг.
 823. Гульден теоремасидан фойдаланиб, R радиусли
 айлана оғирлик марказининг координаталарини топинг.
 824. Гульден теоремасидан фойдаланиб, шар сиртининг
 инерция моментини ҳисобланг.

7.4. ФИЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚИ

1. Эгри чизиқ массасини ҳисоблаш

Декарт координаталар системасида L ясси эгри чизиқ
 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) тенглама билан берилган бўлиб,
 $(x, y) \in L$ нуқтадаги чизикли зичлик $\mu(x, y)$ бўлсин. Бу
 ҳолда эгри чизиқ массаси қуйидаги формула орқали ҳисоб-
 ланади:

$$m = \int_a^b \mu(x, y) \, dl = \int_a^b \mu(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \quad (1)$$

Агар эгри чизиқ $x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$)

параметрик кўринишда берилган бўлса, эгри чизиқ массаси
 қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, dt. \quad (2)$$

Хусусий ҳолда зичлик $\mu(x, y) = 1$ бўлса, эгри чизиқ
 массаси эгри чизиқ узунлигига тенг бўлади.

2. Тезлик бўйича босиб ўтилган йўлни ҳисоблаш

Агар моддий нуқта бирор эгри чизиқ бўйича ҳаракат-
 ланаётган бўлса ва унинг t моментдаги тезлиги $v = f(t)$
 қанчалик бўлса, у ҳолда бу моддий нуқтанинг $[t_1, t_2]$ вақт
 интервалида босиб ўтган йўли қуйидаги формула ёрдамида
 ҳисобланади.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt \quad (3)$$

3. Үзгарувчи кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш

М моддий нуқтага нуқтанинг ҳолатига қараб Ox ўқини бўйлаб қўйилган $F = f(x)$ куч таъсир қилганда, нуқтани $x = a$ ҳолатидан $x = b$ ҳолатига кўчиришда бажарган иш қуйидагидек ҳисобланади:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

формула орқали топилади.

4. Суюқликнинг босим кучини аниқлаш

Суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучи, Паскаль қонунига асосан, қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$p = \gamma \int_a^b xy dx,$$

бунда a — пластинканинг энг юқори нуқтаси турган чуқурлик;

b — унинг энг пастки нуқтаси турган чуқурлик;

γ — суюқликнинг солиштирма оғирлиги;

x — пластинка нуқталаридан суюқлик сатҳига қалқонган масофа;

y — пластинка горизонтал кесимининг узунлиги;

$y = f(x)$ — пластинканинг шаклига боғлиқ бўлган математик функция.

825. $y = \ln x$ эгри чизиқ AB ($x_A = 1$, $x_B = 3$) ёнидаги массасини топинг, бунда эгри чизиқ ҳар бир нуқтасидаги зичлик нуқта абсциссасининг квадратига пропорционал. Δ Масаланинг шартига кўра, зичлик $\mu = kx^2$ га тенг бўлади, бунда k — пропорционаллик коэффициентини.

(1) формулага асосан:

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \mu(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^3 kx^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx = \\ &= k \int_1^3 x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{k}{2} \int_1^3 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \end{aligned}$$

$$\left. \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right|_1^3 = \frac{k}{3} \left. \sqrt{1+x^2} \right|_1^3 = \frac{k}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}). \blacktriangle$$

826. Нуқтанинг ҳаракат тезлиги $V = \sqrt{1+t}$ м/с формула билан берилган. Нуқтанинг бошланғич $t = 10$ с вақтда босиб ўтган йўлини топинг. Бу вақт оралиғидаги тезликни топинг.

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{10}^{11} \sqrt{1+t} dt = \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_{10}^{11} = \\ &= \frac{2}{3} (11\sqrt{11} - 1) \approx 23,7 \text{ м.} \end{aligned}$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{t_2 - t_1} = \frac{11\sqrt{11} - 1}{15} \approx 2,4 \text{ м/с. } \blacktriangle$$

827. 6 кг куч пужинани 8 см га чўзади. Шу куч қанча иш бажаради?

Δ Гук қонунига кўра куч чўзилишга ва қисилишга пропорционалдир, яъни $F = kx$, бунда k — пропорционаллик коэффициенти, x — чўзилиш ёки қисилиш катталиги. Масаланинг шартига кўра,

$$F = 6 \text{ кг}, x = 8 \text{ см} = 0,08 \text{ м}, a = 0, b = 0,09 \text{ м.}$$

ёрилганларни куч тенгламасига қўйсак,

$$6 = k \cdot 0,08, k = \frac{6}{0,08}.$$

Демак, $F = f(x) = \frac{6}{0,08} x$. (4) формулага асосан бажарилган иш қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,08} \frac{6}{0,08} x dx = \frac{6}{0,08} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,08} = \frac{6}{0,08} \frac{(0,08)^2}{2} = \\ &= 3 \cdot 0,08 = 0,24 \text{ кГм. } \blacktriangle \end{aligned}$$

828. Пужинани 5 см га чўзишда 3 кГм иш бажарилган. Агар 1 кГм иш бажарилса, пужина қанча чўзилади?

$$\Delta A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kx dx \text{ формуладан фойдаланамиз. Ма-}$$

сала шартда берилган барча катталикларни шартда ифодалаймиз:

$x_0 = a = 0$, $x_1 = b = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$, $x_2 = ?$
 $A_1 = 3 \text{ кгм} = 3 \cdot 9,81 = 29,43 \text{ (ж)}$, $A_2 = 1 \text{ кгм} = 9,81$
 Берилганларни формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил

$$29,43 = k \int_0^{0,05} x dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = \frac{k \cdot 0,0025}{2}$$

бундан

$$k = \frac{29,43 \cdot 2}{0,0025} = 23544. A_2 = k \int_{x_1}^{x_2} x dx,$$

$$9,81 = 23544 \int_0^{x_2} x dx = 23544 \frac{x^2}{2}, \quad x_2^2 = \frac{2 \cdot 9,81}{23544} = 0,00083$$

$$x_2 = \sqrt{0,00083} \approx 0,029 \text{ м}. \blacktriangle$$

829. Оғирлиги $P = 1,5 \text{ т}$ бўлган ракетани ердан $H = 2000 \text{ км}$ баландликка кўтариш учун сарф этиш

бўлган ишни аниқланг.
 Δ Қуйидаги белгилашларни киритайлик: m — ракета саси, M — ер массаси, ернинг ракетани тортиш кучи син. U ҳолда Ньютон қонунига кўра

$$F = k \frac{m \cdot M}{x^2}$$

бўлади, бунда x — ракетадан ернинг марказигача бўлган софа, k — пропорционаллик коэффициент. $kmM = \lambda$ белгилаш киритсак, $F = \frac{\lambda}{x^2}$ ҳосил бўлади, бунда $R \leq x \leq R + H$, R — ер радиуси, $x = R$ бўлганда $F(R)$ куч ракета оғирлигига тенг бўлади, яъни $F(R) = P = \frac{\lambda}{R^2}$, бундан $\lambda = PR^2$ ва тортиш кучи қуйидагига тенг:

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Ракетани H баландликка кўтариш учун бажарилиши рақ бўлган иш (4) формулага асосан топилади:

$$\int_R^{R+H} \frac{PR^2}{x^2} dx = pR^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}, \quad A = \frac{PRH}{R+H}.$$

шартда берилган қийматларни қўйсак, яъни $1,5 \text{ т}$, $H = 2000 \text{ км}$, $R = 6400 \text{ км}$ деб олсак,
 $A \approx 2285714000 \text{ кгм} \approx 22422854340 \text{ (ж)}. \blacktriangle$

830. Сув тўлдирилаётган идишнинг бир томони узунли- баландлиги 20 см . Сувнинг шу деворга берган бо- қийни топинг.

Сувнинг босим кучини

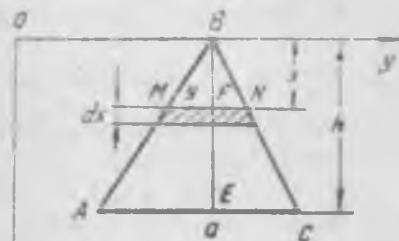
$$p = \gamma \int_a^b xy dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз. Масаланинг шартига кўра 0 , идиш сув билан тўлдирилганлиги учун $b = 20 \text{ см}$, 60 см , сувнинг солиштира оғирлиги $\gamma = 1 \text{ г/см}^3$. Бу

$$p = \int_0^{20} 60x dx = 60 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{20} = 12000 \text{ г} = 12 \text{ кг}, \quad p = 12 \text{ кг}. \blacktriangle$$

831. Асоси a , баландли- h бўлган учбурчак шак- h бўлган пластинка тик ҳо- h пластинкага ботирилган. h пластинканинг учи h сатҳида ётган бўлса, h сувнинг шу пластинкага h берган босимини топинг.

Δ Координата системасини h қўйиб, h курсатилгандай қи- h қўйлаштирамиз ва (5) h формуладаги $y = f(x)$ нинг h топамиз (62-чиз-



62- чизма

ABC ва MBN учбур- h ларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BF}{BE}, \quad \frac{MN}{a} = \frac{x}{h}, \quad MN = \frac{ax}{h}, \quad y = \frac{ax}{h}.$$

Сувнинг солиштира оғирлиги $\lambda = 1$ деб оламиз. (5) формулага асосан:

$$p = \int_0^h xy dx = \frac{a}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{ax^3}{3h} \Big|_0^h = \frac{ah^2}{3}$$

832. Агар стерженнинг чизиqli зичлиги $\mu = 6 +$ қонуният билан ўзгарса, узунлиги $l = 10$ см бўлган жень массасини топинг.

833. Агар r радиусли шарнинг ҳар бир нуқтасидаги лик шар марказидан шу нуқтагача бўлган масофага порционал бўлса, шар массасини топинг.

834. Абсцисса ўқи бўйича координата боши агар гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқта ракат тезлиги

$$v = \frac{a\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

формула билан берилган (t — вақт, T — тебраниш φ_0 — бошланғич фаза). Агар $t = t_1$ вақтда моддий $x = x_1$ нуқтада бўлса, $t = t_2$ вақтда нуқтанинг ҳолати аниқланг.

835. Бошланғич тезлиги v_0 бўлган, юқорига тик ган жисм тезлиги (ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинган) $v = v_0 - gt$ формула билан берилган. Юқорига олган вақтдан бошлаб t_c вақт мобайнида моддий нуқта бошланғич ҳолатдан қандай масофада бўлади.

836. Нуқтанинг ҳаракат тезлиги

$$v = te^{-0.01t} \text{ м/с}$$

формула билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат бошлаганди тўхтагунга қадар босиб ўтган йўлини топинг.

837. Ракетали снаряд тик юқорига кўтарилмоқда. Ракета тезланиш, тортиш кучи доимий бўлганда, ракета нининг камайиши ҳисобига

$$W = \frac{A}{a - bt} \quad (a - bt > 0)$$

қонуният бўйича ортиб боради. Агар ракетанинг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлса, унинг ҳар бир t вақтда тезлигини топинг. $t = t_1$ вақтда ракета эришган баландлик ҳисобланг.

838. Агар 1 Н куч пружинани 1 см га чўзса, пружинани 6 см га чўзиш учун сарф этиш керак бўлган иш аниқланг.

839. Узунлиги 1 м, кўндаланг кесми радиуси 2 мм бўлган

839. 0,001 м чўзиш учун сарф этилган ишни ҳисобланг.

840. Асосининг радиуси R , баландлиги H бўлган цилиндрдаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш ҳисобланг.

841. Координата бошида жойлашган E электр заряди нуқтадаги e зарядни ($b; 0$) нуқтага кўчиради. Кўчириш кучи F нинг бажарган иши A ни аниқланг.

842. Асосининг радиуси R , баландлиги H бўлган айланма параболоид шаклидаги қозон суюқлик билан тўлдирилган бўлса, қозондаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган ишни ҳисобланг.

843. Қаршилиги R бўлган ўтказгичдан ўтаётган

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right)$$

тегармоник ўзгарувчи токнинг T давр оралиғида ажратиб берилган иссиқлик миқдорини топинг.

844. Радиуси R га тенг бўлган ярим доира тик ҳолатда қўйиб ботирилган. Агар ярим доира диаметри сув сатҳида бўлса, шу юзга бўлган сув босимини аниқланг.

845. Асоси a , баландлиги h бўлган тўғри тўртбурчакли шлюзга бўлган сув босимини аниқланг.

846. Асослари a ва b , баландлиги h бўлган трапеция шаклидаги тик дамбага бўлган сув босимини аниқланг.

5.5. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Берилган $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функцияни топиш мумкин бўлса, Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интегрални ҳисоблаймиз.

Лекин ҳар қандай узлуксиз функция учун унинг бошланғич функциясини ҳамма вақт топиш мумкин эмас, баъзи ҳолларда эса бошланғич функцияни элементар функциялар орқали ифода қилиб бўлмайди. Бундай ҳолларда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдалана олмаймиз. Шунинг учун аниқ интегралларни ҳисоблашда турли тақрибий усуллардан фойдаланамиз. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аналитик ёки жадвал усулда берилган бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

Тақрибий аниқлаймиз:

1) $[a; b]$ кесмани $x_k = a + kh$ нуқталар орқали $h = \frac{b-a}{n}$ узунликдаги тенг n та бўлакка бўламиз ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

2) Интеграл остидаги $y = f(x)$ функциянинг $y_0 = f(a = x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ қийматларини ҳисоблаймиз.

3) Тақрибий формулаларнинг бирортасидан фойдаланамиз:

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h \sum_{i=1}^n y_i$$

бунда $f(x)$ ҳосиласи узлуксиз бўлган функция. (1) ёки формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{2n},$$

бунда $M_1 = |y'|$ нинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

II. Трапециялар формуласи:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right).$$

бунда $f(x)$ иккинчи тартибли узлуксиз ҳосиллага эга бўлган функция. (3) формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади.

$$\delta(n) \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2},$$

бунда $M_2 = |y''|$ нинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

III. Параболалар (Симпсон) формуласи:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})).$$

бунда $f(x)$ тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосиллага эга бўлган функция, n — жуфт сон.

(4) формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180n^4}. \quad (C)$$

47. Қуйидаги $M_3 = |y^{IV}|$ нинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \left(\frac{\pi}{4} = 0,785398 \dots \right) \text{ интегрални тақрибан ҳисобланг.}$$

48. $[a; b] = [0; 1]$ кесмани тенг 10 та бўлакка бўламиз. У ҳолда $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ бўлади. Интеграл остидаги функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ нинг қийматлари жадвалини тузамиз:

	$y = \frac{1}{1+x^2}$	x	$y = \frac{1}{1+x^2}$	
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$x_5 = 0,5$	$y_5 = 0,8000$	$y_1 + y_2 + \dots + y_9 = 7,0998$
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,9901$	$x_6 = 0,6$	$y_6 = 0,7353$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,9615$	$x_7 = 0,7$	$y_7 = 0,6711$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,9174$	$x_8 = 0,8$	$y_8 = 0,6098$	
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,8621$	$x_9 = 0,9$	$y_9 = 0,5525$	
		$x_{10} = 1$	$y_{10} = 0,5000$	

1. Тўғри тўртбурчакларнинг (1) формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1 (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 8,0998 = 0,8099 \approx 0,81.$$

2) формулага асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1 (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 7,5998 = 0,7599 = 0,76.$$

Қилинган хатоликни (A) формулага асосан баҳолаймиз. Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функция ҳосиласини топамиз:

$$y' = f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

бундан

$$|y'| = |f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad M_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} |y'| = 1.$$

Бу ҳолда хатолик қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Ҳақиқий хато ҳақиқатан ҳам бу чегарадан кичик.

II. (3) трапециялар формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h \left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + \dots + y_9 \right) = 0,1 \cdot 7,8498$$

$$= 0,78498 \approx 0,785.$$

Тақрибий ҳисоблашда қилинган хатони баҳолаймиз.

рал остидаги $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциянинг иккинчи тартибли

силаси $y'' = 2 \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$, бунда $M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} |y''| = 2$ ($y = \frac{1}{1+x^2}$)

нинг ўзи $\arctg x$ нинг ҳосиласи эканлигини ҳисобга олган

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right)$$

формула ўринли.)

(B) га асосан:

$$\delta(n) \leq \frac{M_2(b-a)^2}{12n^2} = \frac{2}{1200} < 0,0017.$$

III. (4) Симпсон формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)).$$

Ҳисоблашлар осон бўлиши учун $[0; 1]$ кесмани x_0

$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ нуқталар орқали тенг т

та бўлакка бўламиз ($2n = 4$). Бу ҳолда интеграл ости

функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y_0 = 1; 4y_1 = 3,76471; 2y_2 = 1,6; 4y_3 = 2,56; y_4 = 0,5$$

Юқоридаги формулага асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$

$$= \frac{1}{12} (1 + 0,5 + 3,76471 + 2,56 + 1,6) = 0,78539 \dots$$

Симпсон формуласини қўллашда қилинган хатони (B) фор

га асосан баҳолаймиз. Осон бўлиши учун $f^{(4)}(x)$ ҳо

ни баҳолашда (*) формуладан фойдаланамиз. У ҳолда

$$f^{(4)}(x) = 24 \cos^5 y \sin^5 \left(y + \frac{\pi}{2} \right), \text{ бундан}$$

$$\max |y^{(4)}| = 24, \quad M_4 = 24.$$

га асосан:

$$\delta(n) \leq \frac{M_4(b-a)^4}{180 \cdot n^4} = \frac{24}{180 \cdot 256} = \frac{1}{1920} < 0,0006.$$

У ҳолда ҳам ҳақиқий хатолик бу чегарадан анча кичикли

ни куриш мумкин. Ҳақиқатдан

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398 \dots$$

Шундай қилиб, $[0; 1]$ кесмани тўртта бўлакка бўлганда Симпсон формуласи бўйича вергулдан кейин бешта ишончли рақам ҳосил қиламиз. $[0; 1]$ кесмани 10 та бўлакка бўлганда трапециялар формуласи бўйича вергулдан кейин 3 та ишончли рақам, тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича эса вергулдан кейин битта ишончли рақам ҳосил қиламиз. ▲

848. Симпсон формуласи бўйича

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

интегралнинг тақрибий қийматини 0,00001 аниқликда ҳисобланг.

▲ Масалани ечишдан олдин, берилган интегрални кўрсатилган аниқликда ҳисоблаш учун интеграллаш оралиғи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

ни неча бўлакка бўлиш кераклигини аниқлаймиз. Юқоридаги (C) формулага асосан

$$\frac{(b-a)^5 M_3}{180 n^4} < 10^{-6},$$

бунда $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $M_3 = 1$ ($|y^{(4)}| = |\cos x| \leq 1$). У ҳолда

$$\frac{\pi^5}{2^5 \cdot 180 n^4} < 10^{-6}, \quad n > 5\pi \sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} = 8,5.$$

Бундан $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмани $n = 10$ та (8,5 га яқин бўлган жуп сон 10) тенг бўлакка бўлиш кераклиги келиб чиқади. Интеграл остидаги функциянинг бўлиниш нуқталардаги қадматларини ҳисоблаймиз:

x	$y = \cos x$	x	$y = \cos x$
$x_0 = 0,000000$	$y_0 = 1,000000$	$x_6 = 0,942478$	$y_6 = 0,587785$
$x_1 = 0,157080$	$y_1 = 0,987668$	$x_7 = 1,099557$	$y_7 = 0,453991$
$x_2 = 0,314159$	$y_2 = 0,951057$	$x_8 = 1,256637$	$y_8 = 0,309017$
$x_3 = 0,471239$	$y_3 = 0,891007$	$x_9 = 1,413716$	$y_9 = 0,156435$
$x_4 = 0,628318$	$y_4 = 0,809017$	$x_{10} = 1,570796$	$y_{10} = 0,000000$
$x_5 = 0,785398$	$y_5 = 0,707107$		

Симпсон формуласига асосан: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) = 0,0523599 (1 + 4 \cdot 3,196228 + 2 \cdot 2,656876) \approx 1,000000. \blacktriangle$

849. $\int_0^1 x^2 dx$ ($n = 10$) интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон формулалари ёрдамида ҳисобланг натижаларни интегралнинг аниқ қиймати билан таққосланг.

850. $\int_0^2 x^4 dx$ ($n = 2$) интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг ва хатосини баҳоланг.

851. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ($n = 10$) интегрални трапециялар формуласи

ласи ёрдамида ҳисобланг ва хатосини баҳоланг.

852. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегрални трапециялар, Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг ва хатоларини баҳоланг.

853. $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) dx$ интегрални трапециялар, Симпсон формулалари ёрдамида ҳисобланг.

854. $\pi = 6 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ нинг тақрибий қийматини Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг.

855. Агар $f(x)$ функция қуйидаги жадвал усулда берилган бўлса, $\int_{1.05}^{1.35} f(x) dx$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг.

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

856. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегрални 1) тўғри тўртбурчаклар, 2) трапециялар, 3) Симпсон формулалари ёрдамида 0,1 гача аниқликда ҳисоблаш учун интеграллаш оралиғини неча бўлакка бўлиш керак?

857. $\int_0^{\pi} \sin x dx$ ($n = 6$) интегрални трапециялар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

858. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида 0,0001 аниқликда ҳисобланг.

9-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1. Чегаралари чексиз интеграллар

Агар $f(x)$ функция x нинг $a \leq x < \infty$ оралиқдаги барча қийматларида аниқланган ва узлуксиз бўлса,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

лимит $f(x)$ функциянинг a дан $+\infty$ гача олинган хосмас интеграл дейилади ва $\int_a^{\infty} f(x) dx$ каби белгиланади. Таърифга кўра

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Бошқа чексиз интерваллар [учун ҳам хосмас интеграллар шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Агар кўрсатилган лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграллар *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи* дейилади.

Кўп ҳолларда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини билиш ва унинг қийматини баҳолаш етарли бўлади.

Солиштириш аломати:

I-теорема. Агар барча x ($x \geq a$) лар учун $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ тенгсизлик бажарилса ва $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади ҳамда

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$$

эрини бўлиди.

2-теорема. Агар барча x ($x > a$) лар учун $0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$ тенгсизликлар бажарилса ҳамда $\int_a^{\infty} \psi(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

3-теорема. Агар $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бу ҳолда $\int_a^{\infty} f(x) dx$ интеграл абсолют яқинлашувчи дейилади.

859. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ интегрални ҳисобланг (63- чизма).

△ Таъриф бўйича

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1. \end{aligned}$$



63- чизма

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

Геометрик нуқтан назардан, қаралаётган хосмас интеграл (63- чизма) штрихланган чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзини нфодалайди. ▲

860. α нинг қандай қийматларида

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

хосмас интеграл яқинлашувчи ва қандай қийматларида узоқлашувчи бўлишини текширинг.

△ Қуйидаги уч ҳолни алоҳида- алоҳида қараймиз:

1) $\alpha > 1$ бўлсин, у ҳолда

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Бу ҳолда хосмас интеграл яқинлашувчи экан.

2) $\alpha = 1$ бўлганда, $\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \infty$ бўлади ва бу ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи.

3) $\alpha < 1$ бўлганда, $\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = \infty$. Бу ҳолда ҳам хосмас интеграл узоқлашувчи.

Юқорида қаралган ҳоллардаги каби хосмас интеграллар механика ва электростатика масалаларида кўп учрайди.

Координата бошида жойлашган, массаси m бўлган M нуқтанинг Ox ўқда M нуқтадан x масофада жойлашган массаси 1 га тенг бўлган ихтиёрий M_1 нуқтани тортиш кучи F Ньютон қонунига асосан қуйидагига тенг:

$$F = k \frac{m}{x^2} \quad (k - \text{ўзгармас}).$$

M_1 нуқтани $x=r$ нуқтадан $x=b$ ($b>r>0$) нуқтага кўчиришда бажарилган иш қуйидагича аниқланади:

$$A = - \int_r^b k \frac{m}{x^2} dx = km \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)$$

(бу ерда айирув ишораси куч йўналиши M нуқтанинг ҳаракат йўналишига тескари бўлгани учун олинди). Агар нуқта чексиз узоқлашса (яъни $b = \infty$ да)

$$A = - \int_r^\infty k \frac{m}{x^2} dx = - \frac{km}{r}.$$

Агар M_1 нуқта чексизликдан $x=r$ нуқтага кўчирилса, бажарилган иш мусбат бўлади, яъни $A = \frac{km}{r}$. ▲

861. Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x}$;

б) $\int_0^\infty x \sin x dx$;

в) $\int_1^\infty \frac{\ln x dx}{x^3}$;

г) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3 + 2x + 5}$.

а) Таърифга кўра

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln^2 b} \right) = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

б) Таърифга асосан

$$\int_0^\infty x \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-x \cos x \Big|_0^b + \int_0^b \cos x dx \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b \cos b + \sin b) - \text{мав-}$$

жуд эмас.

Шунинг учун берилган интеграл узоқлашувчи. ▲

в) Таърифга асосан

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{-3} dx, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^b + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

(Лопиталь қондасига асосан $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln b}{2b^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{b}}{4b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4b^2} = 0$ эканидан фойдаландик.) ▲

г) Таърифга асосан

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3 + 2x + 5} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^3 + 2x + 5} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 2x + 5} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^3 + 4} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^3 + 4} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{a+1}{2} \right) +$$

$$+ \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{b+1}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи. $\blacktriangle$

862. Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашишини текширинг:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^3}}$

б) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$

в) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$

Δ а) $x > 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{1+x^3}} < \frac{1}{\frac{1}{x^2} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}.$$

$\alpha = \frac{7}{6} > 1$ бўлганлиги учун $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}} = \frac{1}{6}$ интеграл яқин-

лашувчи. Демак, 1-теоремага асосан берилган интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг қиймати $\frac{1}{6}$ дан кичик. $\blacktriangle$

Δ б) $x > e$ бўлганда $\ln x > 1$ бўлгани учун

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ бўлганлиги учун $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ интеграл узоқлашувчи ва

3-теоремага асосан берилган интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади. $\blacktriangle$ Интеграл остидаги функция ншораси узгарувчи функция бўлгани учун ($x > 1$)

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| < \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2}.$$

Лекин $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ интеграл яқинлашувчи ($\alpha = 2$). У ҳолда

$\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ интеграл яқинлашувчи ва бундан эса берилган

хосмас интегралнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. $\blacktriangle$ Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

863. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$

864. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

865. $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - 1}.$

866. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$

867. $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx.$

868. $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^2}}.$

869. $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx.$

870. $\int_{-\infty}^1 e^x dx.$

871. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx.$

872. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$

873. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^2}.$

874. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашишини текширинг:

875. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$

876. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}.$

$$877. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$878. \int_2^{\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$879. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$880. \int_2^{\infty} \frac{2 + \arcsin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} dx.$$

$$881. \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x}} dx.$$

882. $\int_a^{\infty} e^{-px} dx$, $\int_{-\infty}^b e^{px} dx$ хосмас интеграллар $p > 0$ бўлганда яқинлашувчи, $p < 0$ бўлганда узоқлашувчи бўлишини исботланг (p — ихтиёрий ўзгармас сон).

$$883. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 (1+e^x)}.$$

884. k нинг қандай қийматларида $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k}$ интеграл яқинлашувчи бўлади?

2. Чегараланмаган функциянинг интегралли

$f(x)$ функция $[a; b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - a$) кесмада аниқланган ва интегралланувчи бўлиб, b нуқта атрофида чегараланмаган бўлсин ($x = b$ нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* дейилади). Агар $\varepsilon \rightarrow 0$ да $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ интегралнинг чекли лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг a дан b гача *хосмас интегралли* дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (1)$$

каби белгиланади. Бу ҳолда (1) хосмас интеграл *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи* дейилади.

Худди шунингдек, $x = a$ нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* бўлса,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

белгиланади. Агар $x = c$, $c \in (a; b)$ нуқта $f(x)$ функциясининг махсус нуқтаси бўлиб, $\int_a^c f(x) dx$ ва $\int_c^b f(x) dx$ хосмас интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_1}^b f(x) dx$$

бўлиб, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a; c]$ кесманинг c нуқтасида узилишга эга ва $\varphi(x) > f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^c \varphi(x) dx$

нинг яқинлашувчи бўлишидан $\int_a^c f(x) dx$ нинг яқинлашувчи

эканлиги келиб чиқади ва $\int_a^c f(x) dx \leq \int_a^c \varphi(x) dx$ бўлади;

$\int_a^c f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^c \varphi(x) dx$

нинг узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесманинг $x = b$ нуқтасида узилишга эга бўлиб,

$|f(x)| dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ ин-

теграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k} \quad (k > 0)$$

хосмас интеграллар $k < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $k > 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

885. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

Δ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функция $[0; 1-\varepsilon]$ да интегралланувчи бўлиб, $x = 1$ да узилишга эга. Таърифга асосан

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1 - \epsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

886. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}$ интегрални ҳисобланг.

△ Таърифга асосан

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^e \frac{d(\ln x)}{(1+\epsilon \ln x)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^e (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d(\ln x) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{\frac{2}{3}} \right|_{1+\epsilon}^e = \frac{3}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{\ln^2 e} - \sqrt[3]{\ln^2(1+\epsilon)} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

887. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ интегрални ҳисобланг.

△ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ функци $x=1$, $x=3$ нуқталарда узилишга эга. Бу ҳолда берилган интегрални қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

(бунда $x=2$ нуқта ўрнига $[1; 3]$ кесманинг исталган ички нуқтасини олиш мумкин). Бу интегралларни алоҳид-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\arcsin 0 - \\ &\quad - \arcsin(\epsilon-1)) = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_2^{2-\epsilon} \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\arcsin(x-2)) \Big|_2^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

У ҳолда берилган интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

га тенг бўлади ва бундан хосмас интегралнинг яқинлашув-
чи эканлиги келиб чиқади. ▲

888. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ интегрални ҳисобланг.

Δ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ функция $x=1$ да
узалишга эга. Берилган интегрални

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

қўйишида ёзамиз ва ҳар бир қўшилувчини алоҳида-алоҳи-
да ҳисоблаймиз: $0 \leq x < 1$ бўлганда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\arcsin x \Big|_0^{1-\epsilon}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 < x \leq 2 \text{ бўлганда } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Big|_{1+\epsilon}^2 = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \epsilon + \sqrt{(1+\epsilon)^2-1})) = \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

У ҳолда

VII 606 ҚАТОРЛАР

1-§. СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1. Асосий тушунчалар

Сонларнинг бирор чексиз кетма-кетлиги берилган бўлсин:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Бу сонлардан тузилган қуйидаги

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2)$$

ифода сонли қатор дейилади, бунда $a_1, a_2, \dots$ сонлар — қатор ҳадлари, a_n — қаторнинг умумий ҳади дейилади. Қаторнинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

қаторнинг n -хусусий йиғиндиси дейилади.

Агар $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ чекли лимит мавжуд бўлса, (2) қатор яқинлашувчи дейилади ва S (2) қаторнинг йиғиндиси дейилади. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ ёки мавжуд бўлмаса, қатор узоқлашувчи дейилади.

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (3)$$

қатор (2) қаторнинг n ҳадидан кейинги қолдиғи дейилади.

Энг содда теоремалар:

1°. Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (3) қатор яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

2°. Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса ва йиғиндиси S га тенг бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси cS га тенг бўлади.

3°. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилари мос равишда a ва b га тенг бўлса, y ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлади ва уларнинг йиғиндилари мос равишда $a + b$ ва $a - b$ га тенг бўлади.

4°. Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг умумий ҳади $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ да нолга интилади, яъни

(4)

(4) шарт қатор яқинлашиши учун зарурий шарт бўлиб, шарт эмас. Бошқача айтганда (4) шарт бажарилганда қатор узоқлашувчи бўлиши мумкин. Агар (4) шарт бузилса, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ бўлса, қатор

узоқлашувчи бўлади.

Коши критерияси:

(2) қатор яқинлашиши учун $\forall \epsilon > 0, \exists N$, барча $n > N$ $p > 0$ (p — натурал сон) сонлар учун

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$$

тенгсизлиكنинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Қуйидаги

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (5)$$

қуйидаги қатор умумлашган гармоник қатор дейилади. Хусусий ҳолда, $k = 1$ бўлганда (5) дан

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (6)$$

қатор ҳосил бўлади ва бу қатор гармоник қатор дейилади. $k > 1$ бўлганда (5) қатор яқинлашувчи, $k \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. Гармоник қаторнинг $a_n = \frac{1}{n}$ умумий ҳади $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади, лекин гармоник қатор узоқлашувчи. Қуйидаги

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (7)$$

қуйидаги қатор геометрик қатор дейилади.

(7) қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлиб, $|q| > 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

902. Умумий ҳади $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ бўлган қатор

йиғиндиси топинг.

Δn га кетма-кет 1, 2, 3, ... қийматлар бериб, қуйидаги

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} +$$

$$+ \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

қаторни ҳосил қиламиз. Қаторнинг n -хусусий йиғиндисини

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

га тенг. S_n хусусий йиғиндини соддароқ кўринишга келтириш учун қатор умумий ҳади $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ни аниқ

мас коэффициентлар усули бўйича содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

Бунда

$$1 = 2An + A + 2Bn - B$$

ёки

$$1 = (2A + 2B)n + A - B.$$

Бир хил даражадаги n ларнинг коэффициентларини тенглаш натижасида қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0, \\ A - B = 1. \end{cases}$$

Бундан $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. У ҳолда $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$. Қаторнинг ҳар бир ҳадини икки

қўшилувчи йиғиндисини кўринишида ифодаласак, S_n хусусий йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)} \right) + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Қатор йиғиндисини S ни қуйидагича топамиз:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи бўлиб, қаторнинг йиғиндисини $\frac{1}{2}$ га тенг бўлади. ▲

903. $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ геометрик қатор яқинлашувчинини текширинг.

▲ Қаторнинг хусусий йиғиндисини

$$S_n = a + aq + \dots + aq^n$$

Маълумки, $q \neq 1$ бўлганда

$$S_n = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^{n+1}}{1 - q}.$$

Бу ерда бир неча ҳол бор:

1) $|q| < 1$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$. Демак,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

Бу ҳолда қатор яқинлашувчи бўлиб, қаторнинг йиғиндисини

$S = \frac{a}{1 - q}$ бўлади.

2) $|q| > 1$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^{n+1}| = \infty$. Бу ҳолда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^{n+1}}{1 - q} \right) = \infty$$

бўлиб, қатор узоқлашувчи бўлади.

3) $q = 1$ бўлса, $S_n = a + a + \dots + a = na$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty.$$

Бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи.

4) $q = -1$ бўлса, $S_n = a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ — жуфт бўлса,} \\ a, & \text{агар } n \text{ — тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Бу ҳолда хусусий йиғинди S_n нинг limiti мавжуд эмас.

Демак, қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, $a + aq + \dots + aq^n + \dots$ геометрик қатор $|q| < 1$ бўлгандагина яқинлашувчи бўлади ва қаторнинг йиғиндисини $S = \frac{a}{1 - q}$ га тенг бўлади. ▲

904. Коши критериясидан фойдаланиб,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканини кўрсатинг.

Δ Коши критериясига асосан $\forall \varepsilon = \frac{1}{4}$, $\exists N$, $n > N$ $p = n$ лар учун $|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{4} = \varepsilon$ бўлиши керак. Лекин

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Бундан эса гармоник қаторнинг узоқлашувчи экани келиб чиқади. ▲

905. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$ қатор учун яқинлашишнинг зарурий шarti бажариладими?

Δ Берилган қаторнинг умумий ҳади $\frac{2n}{2n+1}$ кўринишда бўлади. У ҳолда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1} + \dots, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

(4) га асосан:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Қатор яқинлашишнинг зарурий шarti бажарилмади, шунинг учун берилган қатор узоқлашувчи. ▲

906. $a_n = \frac{n}{2^n(n+1)}$ бўлса, a_1, a_2, a_3, a_4 ларни топинг.

907. $a_n = \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$ бўлса, a_1, a_2, a_3 ларни топинг.

908. $a_n = \frac{1}{3^n + 1}$ бўлса, $a_{n+1}, a_{2n}, a_n, a_{n!}$ ларни топинг.

909. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$ бўлса, $a_{n+1}, a_{2n}, a_n, \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ларни топинг.

910. $a_n = \frac{(2n)!}{(2n+1)!}$ бўлса, a_1, a_2, a_3 ларни топинг.

Қаторларнинг йиғиндиларини топинг.

911. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \dots$

912. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

$$913. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$914. \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$$

$$915. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$916. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

Қуйидаги қаторлар учун яқинлашишнинг зарурий шarti бажариладими:

$$917. \frac{2}{1} + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{n^2+1}{n^3} + \dots$$

$$918. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots$$

$$919. \cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \dots + \cos \frac{1}{n} + \dots$$

$$920. \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots$$

$$921. \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$$

$$922. (1+1) + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

2. Мусбат ҳадли қаторлар

Мусбат ҳадли қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

қаторлар берилган бўлсин ($\forall n \in N$ учун $a_n > 0$, $b_n > 0$).

1°. 1-солиштириш аломати. Агар $\forall n \in N$ учун $a_n \leq b_n$ ўринли бўлса, у ҳолда

а) (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади;

б) (1) қатор узоқлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

2°. 2-солиштириш аломати. Агар чекли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (2) қаторлар бир да яқинлашувчи ёки бир вақтда узоқлашувчи бўлади.

3° Даламбер аломати. Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

мавжуд бўлиб,

- а) $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи,
- б) $l > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи,
- в) $l = 1$ бўлса, шубҳали ҳол бўлади.

Изоҳ: Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ бўлиб, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4°. Кошининг радикал аломати. Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

мавжуд бўлиб,

- а) $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи,
- б) $l > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи,
- в) $l = 1$ бўлса, шубҳали ҳол бўлади.

5°. Кошининг интеграл аломати. Агар $a_n = f(n)$ бўлиб, бунда $f(x)$ функция $x > a > 1$ соҳада мусбат, монотон камаювчи ва узлуксиз бўлса, у ҳолда (1) қатор ва $\int_a^{\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

923. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ (Дирихле қатори).

Δ а) Берилган қаторнинг $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$ умумий ҳади яқинлашувчи бўлган қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

геометрик $(q = \frac{1}{3} < 1)$ қаторнинг умумий ҳадидан кичик, яъни

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{3^{n-1}} = b_n.$$

1-солиштириш аломатига асосан, берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ б) Умумий ҳади $a_n = \frac{1}{2n-1}$ бўлган берилган қаторни умумий ҳади $b_n = \frac{1}{n}$ бўлган узоқлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қатор билан солиштирамиз.

2-солиштириш аломатига асосан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

бўлганлиги учун берилган қатор узоқлашувчи бўлади. ▲

Δ в) $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Даламбер аломатига асосан:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

бўлгани учун берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ▲

$$\Delta \text{ г) } a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Даламбер аломатига асосан,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \end{aligned}$$

булганлиги учун берилган қатор узоқлашувчи. $\blacktriangle$
 Δ д) Кошининг радикал аломатига асосан,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

булгани учун берилган қатор яқинлашувчи. $\blacktriangle$

Δ е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ қаторни яқинлашишга текширишда Кошининг интеграл аломатидан фойдаланамиз.

$f(x) = \frac{1}{x^k}$ деб олиб, ушбу $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ хосмас интегрални текшираемиз:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-k} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-k} (b^{1-k} - 1), & k \neq 1; \\ \ln b, & k = 1; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{k-1}, & \text{агар } k > 1 \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } k < 1 \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } k = 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \end{aligned}$$

Демак, хосмас интеграл $k > 1$ да яқинлашувчи, $k \leq 1$ да узоқлашувчи. Кошининг интеграл аломатига асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

қатор $k > 1$ да яқинлашувчи, $k \leq 1$ да узоқлашувчи бўлади. $k = 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қатор ҳосил бўлади.

Бу ерда гармоник қаторнинг узоқлашувчи бўлишининг яна бир исботи берилди. $\blacktriangle$
 Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қуйидаги қаторнинг яқинлашишини ёки узоқлашишини кўрсатинг:

$$924. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad 925. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

$$926. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(1+2^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3(1+3^2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} + \dots$$

$$927. \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{9} + \dots + \sin \frac{\pi}{3^n} + \dots$$

$$928. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

$$929. 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots$$

$$930. \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \dots + \sin \frac{1}{n} + \dots$$

$$931. \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2^2+2}{2^2+1} + \ln \frac{3^2+2}{3^2+1} + \dots + \ln \frac{n^2+2}{n^2+1} + \dots$$

$$932. 2 \sin \frac{\pi}{3} + 2^2 \sin \frac{\pi}{3^2} + \dots + 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} + \dots$$

Даламбер ва Коши аломатларидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

$$933. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$934. \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \dots + \frac{5^n}{n!} + \dots$$

$$935. 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \dots + \frac{n^2}{n!} + \dots$$

$$936. 2 + \left(\frac{2+1}{2 \cdot 2-1}\right)^n + \left(\frac{3+1}{2 \cdot 3-1}\right)^n + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

$$937. \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$$

$$938. 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots$$

$$939. 1 + \frac{1 \cdot 4}{3!!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5!!} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(2n-1)!!} + \dots$$

$$940. \sin \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \dots + \sin^n \frac{\pi}{2n} + \dots$$

$$941. \frac{3}{2^{-1}} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \dots + \frac{3^{2n+1}}{2^{2n-1}} + \dots$$

$$942. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^2}} + \dots + \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}} + \dots$$

Кошининг интеграл аломатидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

$$943. \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{3(\ln 3)^2} + \dots + \frac{1}{n(\ln n)^2} + \dots$$

$$944. 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \dots$$

$$945. \frac{2}{3+1^2} + \frac{2}{3+2^2} + \frac{2}{3+3^2} + \dots + \frac{2}{3+n^2} + \dots$$

$$946. \left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2 + \left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2 + \dots$$

$$947. \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} + \dots$$

$$948. \frac{e^{-\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} + \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

$$949. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$950. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$951. \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2} + \dots$$

$$952. \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} + \dots$$

$$953. 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

$$954. 1 + \frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^2} + \dots + \frac{n!}{3^{n-1}} + \dots$$

$$955. \frac{1}{2!!} + \frac{2}{4!!} + \frac{3}{6!!} + \dots + \frac{n}{(2n)!!} + \dots$$

$$956. \frac{1}{2} + \frac{3}{9} + \frac{5}{19} + \dots + \frac{2n-1}{2n^2+1} + \dots$$

$$957. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n} + \dots$$

$$958. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{19} + \dots + \frac{n^2}{2n^2+1} + \dots$$

$$959. \frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots + \frac{n^3}{e^n} + \dots$$

$$960. 2 + \frac{2}{2^2} \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \frac{2}{2^3} \left(\frac{4}{3}\right)^9 + \dots + \frac{2}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + \dots$$

$$961. \left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2 + \left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2 + \dots$$

$$962. \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$$

963. $1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \dots$
 964. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$

964. $\frac{3}{3^4-9} + \frac{4}{4^4-9} + \frac{5}{5^4-9} + \dots + \frac{n}{n^4-9} + \dots$

$$965. \quad 1 + \frac{1 \cdot 4}{3!!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5!!} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(2n-1)!!} + \dots$$

966. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \dots$

3. Ишоралари ўзгарувчи қаторлар

Агар қаторнинг ҳадлари орасида мусбатлари ҳам, ~~му~~
фийлари ҳам бўлса, бундай қатор *ишоралари ўзгарувчи*
тор дейилади. *Ишоралари ўзгарувчи*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан ушбу

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

қаторни тузамиз.

Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (1) қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, (2) қатор узоқлашувчи бўлса, (1) қатор *шартли яқинлашувчи* дейилади. Ҳар қандай яқинлашувчи қатор гуруҳлаш хоссасига эга. Абсолют яқинлашувчи қаторлар ўрин алмаштириш хоссасига эга. Лекин шартли яқинлашувчи қаторлар ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$$

қаторлар учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + \dots + a_n b_1)$$

(3) ва (4) қаторларнинг *қунайтмаси* дейилади.

Агар (3), (4) қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлса, (5) қатор абсолют яқинлашувчи бўлади ва (5) қатор йнғини $S = S_1 \cdot S_2$ бўлади. Агар қатор ҳадларининг ишоратининг баъзан-навбат алмашиб келса, яъни

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (6)$$

...а, бундай қатор ишоралари алмашинувчи қатор дейилади.
...нда $a_k > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). (6) қатор (1) қаторнинг му-
...хуссий ҳолидир.

Лейбниц теоремаси. Агар ишоралари алмашинув-
(6) қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича
сериал камайса, яъни

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (8)$$

Болса, у ҳолда (6) қатор яқинлашувчи бўлиб, $|S| < a_1$, $|r_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$ бўлади.

967. Қуйидаги ишоралари ўзгарувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ёки узоқлашишини текширинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{3^n}$, (α — произвольный угол);

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{4}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n};$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Δ а) Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан янги қатор тузамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n \alpha|}{3^n} \quad (9)$$

ва бу қаторни

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (10)$$

қатор билан таққослаймиз. Маълумки,

$$\frac{|\sin n\alpha|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

(10) геометрик қатор $(q = \frac{1}{3} < 1)$ яқинлашувчи бўлгани учун, мусбат ҳадли қаторларни солиштириш аломати кўра, (9) қатор яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. ▲

Δ б) Берилган ишоралари ўзгарувчи қатор учун яқинлашишининг зарурий шarti бажарилмайди.

Ҳақиқатан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{4}$$

мавжуд эмас. Демак, берилган қатор ўзоқлашувчи. ▲

Δ в) Ишоралари алмашинувчи берилган қаторнинг лари абсолют қийматлари бўйича монотон камайд, яъни

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2 \cdot 2^2} > \frac{1}{3 \cdot 2^3} > \dots$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = 0.$$

Лейбниц теоремасига асосан берилган қатор яқинлашувчи. Қаторнинг абсолют ёки шартли яқинлашишини текшириш учун берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматлари

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad (11)$$

қатор тузамиз. Бу қаторнинг яқинлашишини Даламбер аломати бўйича текшираемиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Демак, (11) қатор яқинлашувчи бўлгани учун берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ г) Ишоралари алмашинувчи берилган қаторнинг ҳад-ларининг Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиради,

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи. Берилган қаторнинг абсолют ёки шартли яқинлашишини текшириш учун қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad (12)$$

қатор тузамиз. Кошининг интеграл аломатига асосан

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x-1} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |2x-1| \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln (2b-1) = +\infty \end{aligned}$$

бўлганлиги учун (12) қатор ўзоқлашувчи. Бу ҳолда берилган қатор шартли яқинлашувчи. ▲

Қуйидаги ишоралари ўзгарувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ва ўзоқлашишини текширинг:

$$968. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$969. \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots$$

$$970. \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$$

$$971. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$972. -\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n + \dots$$

$$973. \frac{\cos \alpha}{\ln 10} + \frac{\cos 2\alpha}{(\ln 10)^2} + \dots + \frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n} + \dots$$

$$974. \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} + \dots$$

$$975. \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{9} - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3n} + \dots$$

$$976. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3} + \dots$$

$$977. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \dots$$

$$978. \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}} + \dots$$

$$979. \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

тенгликни исботланг.

980. Шартли яқинлашувчи

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштирингки, ҳосил бўлган қатор узоқлашувчи бўлсин.

981. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ қатор йиғиндисини 0,01 гача аниқликда топинг.

982. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ қатор йиғиндисини 0,01 гача аниқликда топиш учун қаторнинг неча ҳадини олиш керак?

2-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

1. Асосий тушунчалар. Аниқланиш соҳаси

Ҳадлари ўзгарувчи x нинг бирор D соҳада аниқланган функцияларидан иборат бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

қатор функционал қатор дейилади.

$x \in D$ га ҳар хил сон қийматлар бериб, турли сонли қаторларни ҳосил қиламиз. Бу қаторлар яқинлашувчи ёки яқинлашувчи бўлиши мумкин.

Қаторнинг (1) функционал қатор яқинлашадиган қийматларнинг (1) функционал қаторнинг яқинлашувчи соҳаси дейилади.

$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функция (1) қаторнинг йиғиндисини, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ қатор қолдиғи дейилади, бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Функционал қаторларнинг муҳим хусусий ҳоли даражали қаторлардир. Қуйидаги

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (2)$$

ёки

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3)$$

куринишдаги функционал қатор даражали қатор дейилади, бу ерда $a_k (k=0, 1, 2, \dots)$ ўзгармас сонлар қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Абел теоремаси.

1) Агар (3) даражали қатор нолдан фарқли бирор x_0 қийматда яқинлашувчи бўлса, x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматларида (3) қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

2) Агар (3) қатор x_0 қийматда узоқлашувчи бўлса, x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматларида (3) қатор узоқлашувчи бўлади.

(3) даражали қаторнинг яқинлашувчи радиуси деб шундай R сонга айтиладики, $|x| < R$ да (3) қатор яқинлашувчи ва $|x| > R$ да узоқлашувчи бўлади. $(-R; R)$ оралиқ эса (3) қаторнинг яқинлашувчи интервали дейилади. (2) қаторнинг яқинлашувчи интервали $(x_0 - R; x_0 + R)$ дан иборат. (2), (3) қаторларнинг яқинлашувчи радиуси қуйидаги

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4) \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (5)$$

формулалар орқали топилади.

2. Текис яқинлашиш

Агар ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ сон учун x га боғлиқ бўлган шундай $N(\varepsilon)$ мавжуд бўлсаки, $n > N$ бўлганда $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ кесмадан олинган ихтиёрий x учун $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, (1) функционал қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи дейилади.

Текис яқинлашиш критерияси.

Агар $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), n > N$ ва $\forall x \in [a; b] \Rightarrow |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлади аксинча.

Вейерштрасс аломати.

Агар (1) функционал қаторнинг ҳадлари $[a; b]$ кесмада $|u_n(x)| \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) тенгсизликни қаноатлантирса, c_n лар бирор яқинлашувчи мусбат ҳадли сонли

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

қаторнинг ҳадлари бўлса, у ҳолда (1) қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлади.

Текис яқинлашувчи қаторларнинг хосса-лари.

1) Ҳадлари $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган (1) функционал қатор текис яқинлашувчи бўлса, қаторнинг йиғиндис-шу кесмада узлуксиз бўлади.

2) Узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

3) Агар $[a; b]$ кесмада (1) қаторнинг ҳар бир ҳади узлуксиз дифференциалланувчи, (1) қатор яқинлашувчи бўлса,

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин, яъни

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Хусусий ҳолда (3) даражали қаторни ўзининг яқинлашиш шартини нчида ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш мумкин.

983. Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (8-x^2)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n, x \neq 0$.

Δ а) Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$u_n(x) = \frac{1}{n(x+3)^n}; u_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{(n+1)(x+3)} \right| = \frac{1}{|x+3|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{|x+3|}.$$

Даламбер аломатига кўра, қатор яқинлашувчи бўлиши учун $l < 1$ бўлиши керак. Бу ҳолда

$$\frac{1}{|x+3|} < 1; |x+3| > 1 \Rightarrow x+3 > 1 \text{ ва } x+3 < -1 \Rightarrow x >$$

$$> -2 \text{ ва } x < -4.$$

Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty; -4); (-2; \infty)$ дан иборат. Топилган интервалнинг чегараларида қаторни алоҳида текширамиз:

$x = -4$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-1)^n}$ ишоралари алмашинувчи қатор ҳосил бўлиб, бу қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи бўлади.

$x = -2$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ узоқлашувчи бўлган гармоник қатор ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty; -4]$ ва $(-2; \infty)$ дан иборат. ▲

Δ б) Берилган функционал қаторни махражи $q = 8 - x^2$ бўлган геометрик қатор деб қарашимиз мумкин. Маълумки, $|q| = |8 - x^2| < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи

бўлади. $|8 - x^2| < 1$ тенгсизликини ечасак: $-1 < 8 - x^2 < 1$ ёки $7 < x^2 < 9$, бундан $\sqrt{7} < |x| < 3$.

Қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-3; -\sqrt{7})$ ва $(\sqrt{7}; 3)$ дан иборат. Энди қаторнинг яқинлашишининг интервал чегараларида текшириб кўрамиз: $x = 3$, $x = -3$; $x = \sqrt{7}$; $x = -\sqrt{7}$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ узоқлашувчи қаторлар бўлади.

Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(\sqrt{7}; 3)$ дан иборат. ▲

Δ в) Функционал қаторнинг ҳадлари сонлар ўқинини $x = 0$ дан бошқа барча нуқталарида аниқланган. Агар $x < 0$ бўлса, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ бўлади. Бу ҳолда ишоралар алмашинуви $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатор Лейбниц аломатига кўра, яқинлашувчи бўлади.

Агар $x > 0$ бўлса, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ бўлади. Бу ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ узоқлашувчи гармоник қатор ҳосил бўлади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty; 0)$ дан иборат бўлади. ▲

984. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини ва яқинлашиш интервалларини топинг. Яқинлашиш интервалнинг чегараларида қаторнинг яқинлашишини текшириш.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{3^n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2n-2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x-2)^n}{n^n}$.

Δ а) n - ҳаднинг коэффциенти $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Қаторнинг яқинлашиш радиусини (4) формулага асосан топамиз:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2,$$

$R = 2.$

Яқинлашиш интервали $(-2, 2)$ бўлади. Энди қаторнинг яқинлашишининг интервалнинг чегараларида текшириб кўрамиз: $x =$

-2 бўлса, ишоралари алмашинувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатор ҳосил бўлади. Бу қатор Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиргани учун яқинлашувчи бўлади. $x = 2$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ узоқлашувчи гармоник қатор ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган даражали қатор $[-2; 2)$ ярим сегментда яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ б) Бу ерда $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{3^n}}$. (5) формулага асосан, қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Яқинлашиш интервали $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ бўлади. Интервал-

нинг чегараларида қаторнинг яқинлашишини текшираимиз:

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади.

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ дан иборат. ▲

Δ в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2n-2}$ қаторда x нинг барча натурал (x нинг тоқ даражалари қатнашмайди) даражалари қатнашмаганлиги учун қаторнинг яқинлашиш радиусини топишда (4) формуладан фойдалана олмаймиз. Қаторнинг яқинлашиш интервалини топишда Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$u_n(x) = 2^{n-1} x^{2n-2}, \quad u_{n+1}(x) = 2^n x^{2n}.$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1} x^{2n-2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x^2| = 2x^2 < 1,$$

бундан $x^2 < \frac{1}{2}$ ёки $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлади. Қаторнинг яқинлашиш интервали $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ бўлади.

Энди қаторнинг яқинлашишининг интервалнинг чегараларини текшираемиз:

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган даражали қатор $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ интервалда яқинлашувчи бўлади. ▲

$$\Delta \text{ г) } u_n(x) = \frac{n!(x-2)^n}{n^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!(x-2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

Даламбер аломатига асосан:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!(x-2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!(x-2)^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)n^n}{(n+1)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x-2|}{e} < 1 \end{aligned}$$

бўлиб, бундан $|x-2| < e$, $-e < x-2 < e$, $2-e < x < 2+e$ келиб чиқали. Демак, $R=e$ бўлиб, қаторнинг яқинлашиш интервали $(2-e; 2+e)$ бўлади.

Энди қаторнинг яқинлашишининг интервалнинг чегараларида текшириб кўраемиз:

$x = 2+e$ бўлса,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n} \quad (6)$$

сонли қатор ҳосил бўлади. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нисбатни текшираемиз

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!e^n} = \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

бўлгани учун (Даламбер аломатидаги изоҳга асосан) (6) қатор узоқлашувчи.

$x = 2-e$ бўлганда, ишоралари алмашинувчи $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \frac{n!e^n}{n^n}$ қатор ҳосил бўлиб, бу қатор ҳам узоқлашувчи бўлади (нима учун?) Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(2-e; 2+e)$ дан иборат. ▲

Изоҳ: Берилган қаторни, $x-2=y$ белгилаш ёрдамида

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!y^n}{n^n}$ кўринишда ёзиш мумкин ва бу қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилади.

985. Функционал қаторларнинг текис яқинлашишининг кўрсаткичи.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n \pi x}{3^n}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+(2n+1)x}} \quad (0 \leq x < \infty), \quad |\varphi_n(x)| < 0,01$$

бўлиши учун n қандай бўлиши керак.

Δ а) x нинг барча қийматлари учун

$$\frac{1}{n^4 + x^2} < \frac{1}{n^4} \quad (7)$$

тенгсизлик ўринли. Маълумки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ қатор ($\alpha = 4 > 1$) бўлганлиги учун, умумлашган гармоник қаторни эсланг) яқинлашувчи. (7) тенгсизлик ўринли бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор x нинг барча қийматларида текис яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ б) $|\sin kx| \leq 1$ бўлгани учун

$$\left| \frac{\sin 3^n \pi x}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n}$$

тенгсизлик ўринли. n -ҳади $\frac{1}{3^n}$ бўлган $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ қатор

метрик қатор бўлиб, $q = \frac{1}{3} < 1$ бўлганлиги учун яқинлашувчи. (8) тенгсизлик ўринли бўлганлиги учун, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор x нинг барча қийматлари текис яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ в) Қаралаётган ораликда қуйидаги

$$\frac{1}{2^n \sqrt{1 + (2n+1)x}} \leq \frac{1}{2^n}$$

тенгсизлик ўринли. Махражи $q = \frac{1}{2} < 1$ бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

геометрик қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун, (9) га асосан, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор қаралаётган ораликда текис яқинлашувчи бўлади. Функционал қаторнинг қолдиғи $\varphi_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ни баҳолаш учун (10) сонли қаторнинг қолдиғи $R_n = S - S_n$ ни баҳолаймиз. Матлумки,

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1$$

ва

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{2^n}.$$

Берилган функционал қатор қолдиғи $\varphi_n(x)$ (10) сонли қаторнинг R_n қолдиғидан катта бўла олмайди. Шунинг учун

$\varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ бўлади. $\varphi_n(x) < 0,01$ тенгсизлик ўринли бўлиши учун $\frac{1}{2^n} < 0,01$ тенгсизликни ечамиз. Бу ҳолда

$2^n > 100$ бўлиб, $n \geq 7$ бўлади. ▲

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

$$986. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

$$988. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$$

$$990. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

$$992. \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\sin^n x}$$

$$994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини ва яқинлашиш интервалларини топинг. Яқинлашиш интервалининг чегараларида қатор яқинлашишини текширинг:

$$995. \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$997. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$999. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$1001. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}$$

$$1003. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}$$

$$1005. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$$

$$1007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} x^{2n}$$

$$1009. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

$$1011. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{n^2}$$

$$987. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$989. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$$

$$991. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

$$993. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$996. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$$

$$998. \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$$

$$1000. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)}{3^{n+1}}$$

$$1002. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$1004. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$1006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt[n]{n}}$$

$$1008. \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n^2}$$

$$1010. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^n}$$

$$1012. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos^2 x}$$

$$1013. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n} + n}.$$

1014. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5n}$ функция x нинг ҳар қандай матларида узлуксиз эканини кўрсатинг.

1015. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ функция сонлар ўқида узлуксиз ва узлуксиз ҳосиллага эга эканлигини кўрсатинг.

1016. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \dots$ функционал қаторни $(-\infty; \infty)$ да ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинми?

1017. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!}$ функционал қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкинми?

1018. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ функциянинг $(-\infty; \infty)$ оралиғидаги ҳар қандай x нуқтада дифференциалланувчи ва $f(x) = e^x$ эканини кўрсатинг.

3. Тейлор ва Маклорен қаторлари

Маълумки, $x = x_0$ нуқта атрофида $(n+1)$ -тартибга барча ҳосилаларга эга бўлган $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \quad (1)$$

бунда $R_n(x)$ — қолдиқ ҳад бўлиб,

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \quad 0 < \theta < 1. \quad (2)$$

Агар $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқта атрофида исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлса, (1) да n чексизликка интилганда ($n \rightarrow \infty$) $R_n(x)$ нолга интилса ($R_n(x) \rightarrow 0$), у ҳолда (1) дан x нинг $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ бўлгандаги қийматлари учун $f(x)$ функцияга яқинлашувчи қуйидаги

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (3)$$

қатор ҳосил бўлади. (3) қатор Тейлор қатори дейилади. $x_0 = 0$ бўлганда (3) дан қуйидаги

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (4)$$

қатор ҳосил бўлади ва бу қатор Маклорен қатори дейилади. Агар $f(x)$, $\varphi(x)$ функцияларнинг $x=0$ нуқта атрофида x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйилмаси

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots$$

кўринишда бўлса, у ҳолда $f(x)\varphi(x)$ кўпайтманинг $x=0$ нуқта атрофида x нинг даражалари бўйича ёйилмаси

$$f(x)\varphi(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)x^n + \dots \quad (5)$$

кўринишда бўлади. $f(x) = \varphi(x)$ бўлган ҳолда

$$(f(x))^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + \dots \quad (6)$$

Кўп учрайдиган баъзи элементар функцияларнинг даражалар қаторларга ёйилмаларини келтирамиз.

$$1^\circ. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$2^\circ. \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$3^\circ. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$4^\circ. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$5^\circ. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$6^\circ \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$7^\circ. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

бўлиб, бу қатор биномиал қатор дейилади.

1019. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ функцияни $x = 2$ нукта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

Δ Берилган функция ҳосилаларини ва $x = 2$ нуктада қийматларини топамиз:

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad f(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1,$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4^2} \sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^2}{4^2} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f''(2) = \frac{\pi^2}{4^2} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \pi \right) = -\frac{\pi^2}{4^2},$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{4^3} \cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^3}{4^3} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f'''(2) = \frac{\pi^3}{4^3} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = \frac{\pi^4}{4^4} \sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^4}{4^4} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f^{IV}(2) = \frac{\pi^4}{4^4} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + 2\pi \right) = \frac{\pi^4}{4^4},$$

$$\dots \dots \dots f^{(2k)}(x) = \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 2k \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f_{(2)}^{(2k)} = \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + k\pi \right) = (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}},$$

$$f^{(2k+1)}(x) = \frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f^{(2k+1)}(2) = \frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{(2k+1)\pi}{2} \right) = 0.$$

Топилганларни (1) формулага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sin \frac{\pi x}{4} = 1 - \frac{\pi^2}{4^2} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} (x-2)^{2k} + R_{2k+1}^{(x)}.$$

Ушбу

$$1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} (2k)!} (x-2)^{2k} + \dots$$

қаторни қараймиз. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш интервалини Даламбер аломати ёрдамида топамиз:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{2k+2}}{u_{2k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^{2k+2} (x-2)^{2k+2}}{4^{2k+2} (2k+2)!} \cdot \frac{4^{2k} (2k)!}{\pi^{2k} (x-2)^{2k}} \right| = \frac{\pi^2}{4^2} (x-2)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1$$

бўлгани учун x нинг барча қийматларида юқоридаги қатор яқинлашувчи, яъни қаторнинг яқинлашиш интервали $(-\infty, \infty)$ дан иборат. Энди Тейлор формуласидаги

$$R_{2k+1} = \frac{\pi^{2k+1} (x-2)^{2k+1}}{4^{2k+1} (2k+1)!} \sin \left(\frac{\pi \xi}{4} + (2k+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

қолдиқ ҳадни текшираимиз.

$$\text{Ҳар қандай } k \text{ ва } \xi \text{ учун } \left| \sin \left(\frac{\pi \xi}{4} + (2k+1) \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2k+1} = 0 \text{ ўринли. Ҳар қандай чекли } x \text{ учун}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0.$$

Бу ҳолда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k+1}(x) = 0.$$

Демак, берилган $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ функция исталган тартибги ҳосилага эга ва $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k+1}(x) = 0$ бўлгани учун бу функция $(x-2)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига яқинлади:

$$\sin \frac{\pi x}{4} = 1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} (x-2)^{2k} + \dots \triangle$$

1020. $f(x) = \frac{1}{x}$ функцияни $x = -3$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

△ Берилган $f(x) = \frac{1}{x}$ функциянинг ҳосилаларининг ҳосилаларининг $x = -3$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(-3) = -\frac{1}{3},$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(-3) = -\frac{1}{3^2},$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 x^{-3} = \frac{2!}{x^3}, \quad f''(-3) = -\frac{2!}{3^3},$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}, \quad f'''(-3) = -\frac{3!}{3^4},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad f^{(n)}(-3) = -\frac{n!}{3^{n+1}},$$

Топилганларни (3) га қўйсак, $f(x) = \frac{1}{x}$ функция учун Тейлор қатори

$$-\frac{1}{3} - \frac{1!}{3^2} \cdot \frac{x+3}{1!} - \frac{2!}{3^3} \cdot \frac{(x+3)^2}{2!} - \dots - \frac{n!}{3^{n+1}} \cdot \frac{(x+3)^n}{n!} - \dots = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{x+3}{3} + \frac{(x+3)^2}{3^2} + \dots + \frac{(x+3)^n}{3^n} + \dots \right)$$

хўрилишда бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш интервалини Даламбер атомати бўйича топамиз:

$$u_n(x) = \frac{(x+3)^n}{3^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x+3)^{n+1}}{3^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(x+3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+3|}{3} = \frac{|x+3|}{3} < 1.$$

Бундан $|x+3| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+3 < 3; -6 < x < 0$. Интервалнинг чегараларида, яъни $x = -6$, $x = 0$ да мос равишда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \\ 1 + 1 + 1 + \dots$$

узқлашувчи қаторлар ҳосил бўлади.

Демак, қаторнинг яқинлашиш интервали $(-6; 0)$ бўлади. Топилган қаторда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

эканини осонгина исбот қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{x+3}{3} + \frac{(x+3)^2}{3^2} + \dots + \frac{(x+3)^n}{3^n} + \dots \right). \triangle$$

1021. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ функцияни x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйинг.

△ $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ касрни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

У ҳолда 7° га асосан:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2 \left(1 - \frac{x}{2} \right)} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \right) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} - \dots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \dots, \\ (-2 < x < 2)$$

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots) =$$

$$= -1-x-x^2-\dots-x^n-\dots, \quad (-1 < x < 1).$$

Қаторларни ҳадма-ҳад айтириш натижасида қуйидагига бўламиз:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \dots +$$

$$+ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1. \quad \blacktriangle$$

1022. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+3x}{1-x}}$ функцияни Маклорен қаторига

ёйинг.

Δ Маълумки,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

У ҳолда

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^n}{n} \quad \left(-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right).$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\ln \sqrt{\frac{1+3x}{1-x}} = \frac{1}{2} (\ln(1+3x) - \ln(1-x)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} 3^n + 1) \frac{x^n}{n} \quad \left(-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right). \quad \blacktriangle$$

1023. $f(x) = e^{-x} \sin x$ функцияни Маклорен қаторига

ёйинг.

Δ Маълумки,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

У ҳолда

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(5) формулага асосан:

$$e^{-x} \sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \dots \quad (-\infty < x < \infty). \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги функцияларни $x = x_0$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйинг:

1025. $f(x) = x^3 - 3x; x_0 = 1.$

1024. $f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 3.$

1026. $f(x) = \ln(x+2); x_0 = 1.$

1027. $f(x) = x^4 - 4x^2; x_0 = -2.$

1028. $f(x) = \cos x; x_0 = \frac{\pi}{4}.$

1029. $f(x) = e^x; x_0 = -2.$

Қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйинг:

1030. $f(x) = 5^x.$

1031. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$

1032. $f(x) = \sin^2 x.$

1033. $f(x) = \ln(10+x).$

1034. $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$

1035. $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x.$

1036. $f(x) = (1+x)e^{-x}.$

1037. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$

1038. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

1039. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

1040. $f(x) = \ln(1+3x+2x^2).$

1041. Биномиал қатор ёрдами билан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}x^{2n} + \dots$$

эканини кўрсатинг ва қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш
 $\arcsin x$ учун қатор ёзинг.

1042. Биномиал қатор ёрдами билан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$$

эканлигини кўрсатинг ва қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш
 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ функция учун қатор ёзинг

4. Қаторнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

Функцияни қаторга ёйиш ёрдамида функциянинг тақрибий қийматини исталганча аниқликда ҳисоблаш мумкин. Агар $f(x)$ функция x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилган бўлса, функциянинг бирор $x = x_0$ нуқтадаги тақрибий қийматини топиш учун

1) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k x_0^k$ топилади;

2) $R_n = s - s_n$ қолдиқ баҳоланади.

Агар абсолют хато $\delta = |A - a| < \frac{1}{10^n}$ бўлса, a сонининг $\frac{1}{10^n}$ гача аниқликдаги тақрибий қиймати бўлади.

1043. $\ln 2$ ни 10^{-5} гача аниқликда ҳисобланг.

Δ Логарифмларни тақрибий ҳисоблашда қуйидаги формулалардан фойдаланиш қулай:

$$\ln(N+1) = \ln N + 2 \left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots \right),$$

$$\log(N+1) = \log N + \frac{2}{\ln 10} \left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \dots \right),$$

N — натурал сон.

$N = 1$ бўлганда,

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \dots \right).$$

R_{n+1} қолдиқ ҳадни баҳолаймиз:

$$R_{n+1} = 2 \left(\frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots \right) < \frac{2}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{2 \cdot 9}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3} \cdot 8} = \frac{1}{4(2n+3) \cdot 3^{2n+1}} < 10^{-5}.$$

Бундан $4(2n+3) \cdot 3^{2n+1} > 10^5$ ва бу тенгсизлик $n = 4$ бўлганда ўринли бўлади. Шундай қилиб,

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} \right) \approx 0,69314;$$

$$\ln 2 \approx 0,69314. \quad \blacktriangle$$

1044. $\ln 1,1$ ни 10^{-4} гача аниқликда ҳисобланг.

Δ Маълумки,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1.$$

$x = 0,1$ деб олсак,

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^4}{4} + \dots$$

Бу қатор ишоралари алмашинувчи Лейбниц қатори. Қатор 4-ҳадининг абсолют қиймати 10^{-4} дан кичик бўлгани сабабли $\ln 1,1$ ни 10^{-4} гача аниқликда ҳисоблаш учун қаторнинг учта ($n = 3$) ҳадини олиш етарлидир. Демак,

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} \approx 0,0953; \quad \ln 1,1 \approx 0,0953. \quad \blacktriangle$$

1045. $e^{0,1}$ ни 10^{-3} гача аниқликда ҳисобланг.

Δ Маълумки,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\xi}, \quad 0 < \xi < x.$$

$x = 0,1$ деб олсак, $e^{\xi} < e^{0,1} < e < 3$ бўлади. У ҳолда $R_n < \frac{3}{10^n \cdot n!} < 0,001$ тенгсизлик $n = 3$ бўлганда ўринли.

Шундай қилиб, $e^{0,1}$ ни 10^{-3} гача аниқликда ҳисоблаш учун қаторнинг учта ҳадини олиш kifoya, яъни

$$e^{0.1} \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} \approx 1.105, \quad e^{0.1} \approx 1.105. \quad \blacktriangle$$

1046. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ интегрални 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Δ Маълумки,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Бу тенгликда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots \quad (x > 0)$$

ҳосил бўлади. Бу тенглиkning иккала томонини 0 дан гача чегараларда интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx &= \left(x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} - \frac{x^4}{6! \cdot 4} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} + \frac{1}{4! \cdot 3} - \frac{1}{6! \cdot 4} + \dots \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган ишоралари алмашинувчи қатор 5-ҳадининг абсолют қиймати 0,0001 дан кичик бўлганлиги сабабли қаторнинг биринчи 4 та ҳадини олиш kifoya. Демак,

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0,7635,$$

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \approx 0,7635. \quad \blacktriangle$$

1047. $\sqrt[3]{130}$ ни 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Δ Бизга маълум бўлган

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n + \dots; \quad -1 < x < 1,$$

биноминал қатордан фойдаланамиз:

$$\sqrt[3]{130} \text{ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:}$$

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ бўлса, биноминал қатор қуйидаги

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots$$

кўринишда бўлади. Ҳосил бўлган қаторда x нинг ўрнига $\frac{1}{25}$ ни қўйсақ, ишоралари алмашинувчи қуйидаги

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 25} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^3} - \dots$$

қатор ҳосил бўлади. Илдизнинг қийматини 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисоблаш учун қаторнинг 3 та ҳадини олиш kifoya. Ҳақиқатан, қаторнинг 5 та кўпайтирилган тўртинчи ҳади учун

$$\frac{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^3} = \frac{1 \cdot 2}{3^3 \cdot 6 \cdot 5^2} = \frac{1}{81 \cdot 625} < 0,0001$$

тенгсизлик ўринли. Демак,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &\approx 5 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 25} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^2} \right) \approx 5,0000 + 0,0667 - \\ &- 0,0009 = 5,0658; \quad \sqrt[3]{130} \approx 5,0658. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1048. $\sin 5^\circ$ ни 10^{-6} гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Δ Маълумки,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

5° радиан ҳисобида $\frac{\pi}{36} \left(\frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36} \right)$ бўлганлиги учун

$$\sin \frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 36^3} + \frac{\pi^5}{5! \cdot 36^5} - \dots \text{ бўлади.}$$

Қаторнинг учинчи ҳадини баҳолаймиз:

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{36} \right)^5 < \frac{1}{5!} (0,1)^5 = \frac{1}{120} \cdot 10^{-5} = \frac{5}{6} \cdot 10^{-7}.$$

Бу ҳолда, $\sin 5^\circ$ ни тақрибий ҳисоблашда қаторнинг ҳади билан чегаралансак, қилинган хато $\frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$ дан бўлади. Шунинг учун

$$\sin \frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^3}{36^3} \approx 0,0872665 - 0,0001107 = 0,0871558; \quad \sin \frac{\pi}{36} \approx 0,0871558. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги ифодаларни берилган аниқликкача тақриб ҳисобланг:

1049. $\ln 5$ (0,001). 1050. $\ln 17$ (0,001).
1051. $\log 101$ (0,0001). 1052. $\sqrt[3]{30}$ (0,001).

1053. $\sqrt[3]{10}$ (0,001). 1054. $\sqrt[5]{250}$ (0,001).

1055. $\cos 10^\circ$ (0,0001). 1056. $\sin 0,4$ (0,001).
1057. $\sin 18^\circ$ (0,001). 1058. $\operatorname{arctg} 0,2$ (0,0001).

1059. $\sqrt{e}$ (0,001). 1060. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (0,001).

Қуйидаги интегралларни 0,001 гача аниқликда тақриб ҳисобланг:

1061. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$ 1062. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx.$

1063. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$ 1064. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

1065. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$ 1066. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx.$

1067. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^2} dx.$ 1068. $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+\sqrt{x}) dx.$

5. Комплекс ҳадли қаторлар

1 Комплекс ҳадли сонли қаторлар. Ҳадла-
ми комплекс сонлардан иборат бўлган

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (1)$$

қатор комплекс ҳадли сонли қатор дейилади. Бунда $c_n = a_n + ib_n$ бўлиб, a_n, b_n ҳақиқий сонлар. $S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ифода (1) қаторнинг хусусий йиғиндиси дейилади.

Агар $n \rightarrow \infty$ да S_n хусусий йиғинди биргина чекли S сонга интилса ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$), (1) қатор яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

комплекс ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сонли қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир. (1) қатор ҳадларининг модулларидан қуйидаги қаторни тузамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| + \dots \quad (2)$$

Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, (2) қатор узоқлашувчи бўлса, (1) қатор *шартли яқинлашувчи қатор* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (3)$$

Таъкидлаб ўтамизки, (3) шарт қатор яқинлашувчи учун фақат зарурий шарт бўлиб, етарли шарт эмас. Даламбер аломати. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l$$

бўлиб,

- а) $l < 1$ бўлса, (1) қатор яқинлашувчи,
- б) $l > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи,
- в) $l = 1$ бўлса, шубҳали ҳол бўлади.

Коши аломати. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$$

бўлиб,

- а) $l < 1$ бўлса, (1) қатор яқинлашувчи,
- б) $l > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи,
- в) $l = 1$ бўлса, шубҳали хол бўлади.

II. Комплекс ҳадли даражали қаторлар.
Қуйидаги кўринишдаги

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

қатор комплекс ҳадли даражали қатор дейилади, бу $c_n = a_n + ib_n$ комплекс сонлар, $z = x + iy$ — комплекс гарувчи ($n = 0, 1, 2, \dots$). (4) қатор учун маркази координата бошида бўлган R радиусли доира мавжудки, бу доирада ($|z| < R$). (4) қатор яқинлашувчи, доира ташқариси ($|z| > R$) эса қатор узоқлашувчи бўлади. Бу доира яқинлашиш доираси, R эса яқинлашиш радиуси дейилади.

Баъзи функцияларнинг даражали қаторга ёйилмалар келтирамиз:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Бу ёйилмалардан фойдаланиб, Эйлер формулаларини келтириб чиқариш мумкин:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Қуйидаги комплекс ҳадли сонли қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

$$1069. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n^2} \right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$$

$$\Delta \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n^2} \right) \text{ қаторда } a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Маълумки, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қатор узоқлашувчи бўлгани учун берилган қатор узоқлашувчи бўлади. Δ

$$\Delta \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ қаторни қуйидагича текширамиз:}$$

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

Маълумки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ($p > 1$) қатор яқинлашувчи, де-

мак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. Δ

Δ в) Даламбер аломатга асосан:

$$c_n = \frac{n(3i-1)^n}{5^n}, \quad c_{n+1} = \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n(3i-1)^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(3i-1)}{5n} \right| = \frac{|3i-1|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{|3i-1|}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{9+1}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1. \end{aligned}$$

Демак, Даламбер аломатига асосан, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. Δ

Қуйидаги даражали қаторнинг яқинлашишини текширинг:

$$1070. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt{n-1} - i) z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{z}{in} \right)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1+i)^n} (z-i)^n.$$

Δ а) Даламбер аломатига асосан:

$$u_n = 2^n (\sqrt{n-1} - i) z^n, \quad u_{n+1} = 2^{n+1} (\sqrt{n} - i) z^{n+1},$$

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (\sqrt{n} - i) z^{n+1}}{2^n (\sqrt{n-1} - i) z^n} \right| = \\
&= 2|z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n-1} - i} \right| = 2|z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sqrt{n} - i)(\sqrt{n-1} + i)}{(\sqrt{n-1} - i)(\sqrt{n-1} + i)} \right| = \\
&= 2|z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{n(n-1)}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})i}{n} = \\
&= 2|z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = 2|z| < 1; |z| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $|z| < \frac{1}{2}$ доирада қатор абсолют яқинлашувчи. Қаторнинг яқинлашишини донраннинг чегарасида текшириб кўрамиз.

$z = \frac{1}{2}$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-1} - i)$ қатор узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - i) \neq 0. \blacktriangle$$

Δ б) Коши аломатига асосан:

$$u_n = \frac{1}{(in)^n}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|in|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Демак, берилган қатор бутун комплекс текисликда яқинлашувчи. ▲

Δ в) Даламбер аломатига асосан:

$$u_n = \frac{1}{n^2(1+i)^n} (z-i)^n, \quad u_{n+1} = \frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)^2(1+i)^{n+1}} \cdot \frac{n^2(1+i)^n}{(z-i)^n} \right| = \\
&= \left| \frac{z-i}{1+i} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1, \quad |z-i| < \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Демак, берилган қатор маркази $z = i$ нуқтада, радиуси $R = \sqrt{2}$ бўлган доира ичида абсолют яқинлашувчи бўлади. ▲

Қуйидаги комплекс ҳадли сонли қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

$$1071. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}, \quad 1072. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^{n^2}.$$

$$1073. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}, \quad 1074. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}.$$

$$1075. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n \sqrt{n}}, \quad 1076. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-i}{n+1}.$$

$$1077. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{n \cdot 10^n}, \quad 1078. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$1079. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n, \quad 1080. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! (e-i)^n}.$$

Қуйидаги комплекс ҳадли даражали қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

$$1081. \sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n, \quad 1082. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$$

$$1083. \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad 1084. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}.$$

$$1085. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad 1086. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}} z^n.$$

$$1087. \sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n, \quad 1088. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

КУП ҲАВАРУВЧИЛИ (АРУМЕНТЛИ) ФУНКЦИЯЛАР

1.5. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

1. Куп ҳаварувчили функция таърифн. Юксаклик чирти ва юксаклик сирти

Агар D соҳадаги x ва y эркин ҳаварувчиларнинг ҳар бир $(x; y)$ жуфтига бирор усул ёки қонун бўйича ҳаварувчи Z соҳадаги маълум бир қиймати мос келтирилса, $u = f(x; y)$ ҳаварувчи D соҳадаги x, y эркин ҳаварувчиларнинг ҳар бир $(x; y)$ жуфтига дейилади ва қуйидаги белгилардан бири орқали белгиланади:

$z = f(x; y)$, $z = z(x; y)$, $z = \varphi(x; y)$ ва ҳ. к. бунда u лар эркин ҳаварувчилар ёки аргументлар, D — функциянинг аниқланиш соҳаси, Z эса функциянинг қиймат тўплами дейилади.

Маълумки, сонларнинг ҳар бир $(x; y)$ жуфтига oxy текислигининг ягона $P(x; y)$ нуқтаси мос келади ва аксинча, ҳар бир нуқта $P(x; y)$ шу сабабли икки ҳаварувчи функцияни $P(x; y)$ нуқтадаги функцияси сифатида қараш мумкин, яъни $f(P)$.

Икки ҳаварувчи функция таърифни $n = 3$ бўлган ҳолда учун ҳам осонгина умумлаштириш мумкин.

Агар E соҳадаги x, y, z эркин ҳаварувчиларнинг ҳар бир (x, y, z) учлигига бирор қонун ёки қондага кўра u ҳаварувчининг W соҳадаги маълум бир қиймати мос келтирилса, u ҳолда u ҳаварувчи E соҳадаги x, y, z эркин ҳаварувчиларнинг уч аргументли функцияси дейилади ва $u = f(x, y, z)$ деб ёзилади.

oxy текисликдаги $f(x; y) = c$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $z = f(x; y)$ функциянинг юксаклик (сатҳ) чизиғи дейилади.

Фазодаги $f(x; y; z) = c$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $u = f(x; y; z)$ функциянинг юксаклик сирти (эквипотенциал сирти) дейилади, бу ерда c — берилган ҳавагармас сон.

2. Куп ҳаварувчили функциянинг лимити ва узлуксизлик

$z = f(x; y)$ функция бирор D соҳада аниқланган бўлсин. Текисликдаги

$$\overline{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча $M(x; y)$ нуқталар тўплами $M_0(x_0; y_0) \in D$ нуқтасининг δ атрофи дейилади. Агар тандалган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладикки, $\overline{MM_0} < \delta$ тенгликни қаноатланидиган барча $P(x; y)$ нуқталар учун

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon \quad (|f(P) - A| < \varepsilon)$$

тенглик ўринли бўлса, $f(x; y)$ ҳаварувчи $P(x; y)$ нуқта $P_0(x_0; y_0)$ нуқтага интилганда $(x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0)$ да $f(x; y)$ ($f(P)$) функция A лимитга интилади дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A$$

ёки

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

Агар $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$ ёки $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

тенглик ўринли бўлса, $f(x; y)$ функция $P_0(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Агар $z = f(x; y) = f(P)$ функция

1) $f(P)$ функция P_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган,

2) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ лимит мавжуд;

3) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ бўлса, бу функция P_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

D соҳаниннг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция шу соҳада узлуксиз дейилади.

Агар юқоридаги учта шартдан бирортаси ўринли бўлмаганда, P_0 нуқта $f(P)$ функциянинг узилми нуқтаси дейилади.

1089. Учбурчакнинг периметри $2p$ берилган. Учбурчакнинг икки томонини x ва y деб, унинг юзи S ни шу томонларнинг функцияси сифатида аниқланг.

▲ Масаланиннг шартига асосан:

$$a = x, y = b, c = 2p - a - b = 2p - x - y;$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(a, b, c — учбурчак томонлари, p — ярим периметр).

Герон формуласига кўра

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)},$$

яъни учбурчакнинг S юзи x, y нинг функциясидир. ▲

1090. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ бўлса, $f(1; 2)$, $f(-3; 5)$, $f(a; \frac{1}{a})$, $f(y, x)$ ларни топинг.

$$\Delta f(1; 2) = \frac{1+2}{1-2} = -3, \quad f(-3; 5) = \frac{-3+5}{-3-5} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}, \quad f(a; b) = \frac{a+b}{a-b}$$

$$f\left(a; \frac{1}{a}\right) = \frac{a + \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}, \quad f(y; x) = \frac{y+x}{y-x}.$$

1091. $f(x; y; z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ булса, $f(0; 2; -3)$,
 $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}\right)$ ларни топинг.

$$\Delta f(0; 2; -3) = \frac{0+2-3}{0^2+2^2+(-3)^2} = -\frac{1}{13}. \quad y = \frac{1}{x}, \quad z = \frac{1}{x}$$

$$f(x, y, z) = f\left(x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{x^2(x^2 + x + 1)}{x^6 + x^2 + 1}$$

1092. Куйилаги функцияларнинг аниқланиш соҳати топинг.

$$a) z = \frac{1}{\sqrt{xy}};$$

$$6) z = \sqrt{(1+x)(y-4)};$$

B) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

$$+ \ln(4 - x^2 - y^2);$$

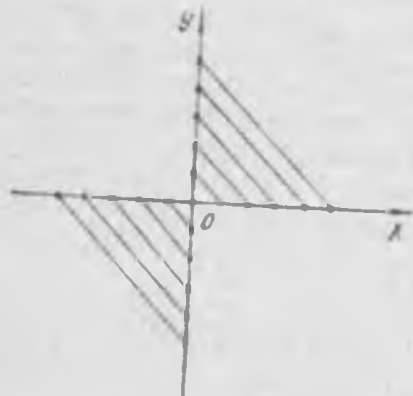
r) $z = \arcsin (x+y)$.

$$\Delta \quad a) \quad z = \frac{1}{1 - xu} \quad \text{фy}$$

циянинг аниқланиш соҳа
 $x_u > 0$ шартдан келиб
 қади, бу тенгсизлик эса

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \} \text{ ёки } \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array}$$

бўлганда уринли (64-
ма). Координата уқла
ҳага қирмайди. ▲



64- чизма

318

Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(1+x)(y-4) \geq 0$ шартдан топилди. Бу тенгсизлик эса қуйидаги шарт-
бажарилганда туғри бўлади:

1) $1+x > 0, \quad x > -1,$

$$1) \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ y-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} 1 + x \leq 0 \\ y - 4 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq -1 \\ y \leq 4 \end{array} \right\}$$

(5.4) $(\text{USR})_1$ $\blacktriangle$

Биринчи қушилувчининг
аниқланиш соҳаси $x^2 + y^2 -$
 $-1 > 0$ шартдан, иккинчи
қушилувчининг аниқланиш со-
ҳаси $4 - x^2 - y^2 > 0$ шартдан
чиқади.

Бу ҳолда функциянинг
...кланиш соҳаси

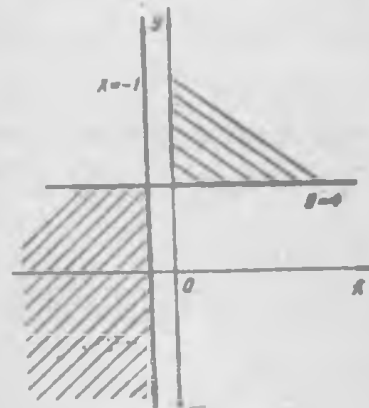
$$x^2 + y^2 \geq 1.)$$

$$x^2 + y^2 < 4$$

▲ ҳалқадан иборат (66-чизма), бунда ҳалқага $x^2 + y^2 = 1$ айланадаги нуқталар кирмайди. ▲

Δ г) $z = \arcsin(x + y)$ функциянинг аниқланиш соҳаси

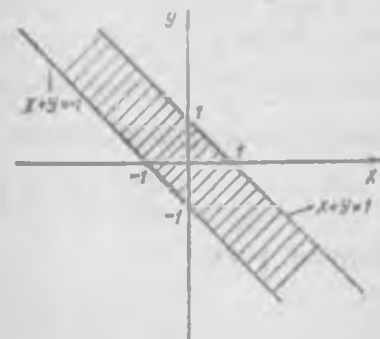
— $-1 \leq x + y \leq 1$ шартдан келиб чиқади, яъни берилган z функциянинг аниқланиш соҳаси Ox_1 координата текислиги-



65- чизма



06- чизма



67- чизма

нинг $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ параллел туғри
лар орасидаги қисмидан иборат (67-чизма). ▲
1093. Лимитни топинг:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

Δ $x = 0$, $y = 0$ бўлганда $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$ касрнинг су
ва махражи нолга тенг бўлиб, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқ
лик бўлади. $P(x; y)$ нуқта $P_0(0; 0)$ нуқтага интилган
($x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$) $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$ функциянинг лимитини
пиш талаб қилинади. Бу нуқталар орасидаги масофа
 $PP_0 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($x \rightarrow 0$
 $y \rightarrow 0$ да $\rho \rightarrow 0$).

У ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1)(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 + 1 - 1}{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1094. $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ функция $O(0; 0)$ нуқтада лимит
эга эмаслигини кўрсатинг.

Δ Фараз қилайлик, ўзгарувчи $P(x; y)$ нуқта $y = kx$ ту
чизиқ бўйича $O(0; 0)$ нуқтага яқинлашсин. Бу туғри чи
бўйича $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциянинг қиймати ўзгармас бў
Ҳақиқатан $y = kx$ бўлганда, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Шунинг учун

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ y = kx \\ \text{бўйича}}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

P нуқта O нуқтага Ox ($k = 0$) бўйлаб яқинлашади-
бўлса.

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ y = 0 \\ \text{бўйича}}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = 0.$$

P нуқта O нуқтага $y = x$ ($k = 1$) туғри чизиқ бўйлаб яқин-
лашган бўлса.

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ y = x \\ \text{бўйича}}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = 1.$$

Яна, $P(x; y)$ нуқта O нуқтага турли йўналишлар бўйича
лашганда функция турли лимит қийматларга эга бўла-
ди. Шунинг учун берилган функция $O(0; 0)$ нуқтада ли-
мит эга эмас. ▲

1095.

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}, & \text{агар } x \neq 0, y \neq 0, \\ 2, & \text{агар } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Бўлса, функциянинг узлуксизлигини текширинг.
Δ Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифига кўра

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy (\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy (\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x; y) &= f(0; 0) = 2 \end{aligned}$$

Бўлгани учун берилган функция $(0; 0)$ нуқтада узлуксиз. ▲

1096. Доиравий конуснинг V ҳажмини унинг x ясовчи-
асоси y радиусининг функцияси сифатида аниқланг.

1097. Учбурчакнинг S юзини унинг учта x, y, z томо-
нининг функцияси сифатида аниқланг.

1098. $f(x; y) = \frac{x-2y}{2x-y}$ бўлса, $f(1; 3)$, $f(1; 2)$, $f(2; 1)$,
 $f(a; a)$, $f(a, -a)$ ларни топинг.

1-2761

1099. $f(x, y) = e^{\cos(x-y)}$ бўлса, $f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(-\pi, -\pi)$, $f(-y, x)$ ларни топинг.

1100. $f(x, y) = x + \frac{1}{x}$ бўлса, $f(x, y) = f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right)$ эквивалентлиги исботланг.

1101. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x + 3y$ бўлса, $f(kx, ky) = kf(x, y)$ тенгликни исботланг.

1102. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{y-z}$ бўлса, $f(-x, -y, -z) = f\left(1; \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = f(x, y, z)$ тенгликни исботланг.

1103. $f(x, y) = \ln x \ln y$ функциянинг $f(xy, uv) = f(x, u) + f(x, v) + f(y, u) + f(y, v)$ функционал тенгламани лантиришни текширинг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

$$1104. z = \frac{3}{x^2 + y^2}.$$

$$1105. z = \sqrt{x + 4}$$

$$1106. z = \sqrt{3x} - \sqrt{2y} - \sqrt{1-x-y}$$

$$1107. z = \sqrt{1-x^2}$$

$$1108. z = \sqrt{2x} - \frac{4}{\sqrt{y}}$$

$$1109. z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

$$1110. z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}.$$

$$1111. z = \arcsin -$$

$$1112. z = \ln \left(1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right).$$

$$1113. z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$$

$$1114. z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}.$$

$$1115. z = \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{y-1}}$$

$$1116. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

$$1117. z = \frac{1}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}.$$

$$1118. z = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$1119. u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

$$1120. u = \arcsin \frac{x}{2} + \arcsin \frac{y}{2} + \arcsin \frac{z}{2}.$$

Қуйидаги функцияларнинг юксаклик (сатҳ) чизиқларини топинг:

$$1121. z = x + y.$$

$$1122. z = \frac{y}{x^2}.$$

$$1123. z = y - x.$$

$$1124. z = x^2 - y.$$

$$1125. z = x^2 + y^2.$$

$$1126. z = \ln(x^2 + y).$$

$$1127. z = \arccos(xy).$$

$$1128. u = x + y + z \text{ функция-}$$

юксаклик сиртларини топинг.

1129. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциянинг юксаклик сиртларини топинг.

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$1130. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{xy}.$$

$$1131. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\lg(xy)}{y}.$$

$$1132. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}.$$

$$1133. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}.$$

$$1134. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}.$$

$$1135. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

$$1136. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ мавжудми?}$$

Қуйидаги функцияларнинг узлуксиз ёки узлуксиз эмаслигини текширинг, агар узилиш нуқталари бўлса, улар қачонга жойлашганлигини кўрсатинг:

$$1137. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x}; & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0; & x = 0, y = 0. \end{cases}$$

$$1138. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}; & x \neq 0, y \neq 0; \\ 0; & x = 0, y = 0. \end{cases}$$

$$1139. f(x, y) = \frac{x+y+1}{x^2+y^2}.$$

$$1140. f(x, y) = \frac{x^2+2y+4}{y^2-2x}.$$

$$1141. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}.$$

$$1142. f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}.$$

2-§. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР. МУРАККАБ ВА ОШКОРМАС ФУНКЦИЯ ҲОСИЛАЛАРИ

1. Хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар

$z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

лимитга айтилади ва қуйидаги белгиларнинг бири билан белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, z'_x, f'_x(x, y).$$

Худди шунингдек, $z = f(x, y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

лимитга айтилади ва қуйидаги белгиларнинг бири билан белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, z'_y, f'_y(x, y).$$

Хусусий ҳосилаларга қуйидагича таъриф бериш ҳам мумкин.

$z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб, y ни ўзгармас деб фараз қилиб, x бўйича олинган ҳаддидиёқ сизимга айтилади.

$z = f(x, y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб, x ни ўзгармас деб фараз қилиб, y бўйича олинган ҳаддидиёқ сизимга айтилади.

$z = f(x, y)$ функциянинг тўла орттормаси

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

кўринишда ёзилади. $z = f(x, y)$ функция $(x, y) \in D$ нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин, деб фараз қилинмиш. Агар (1) тўла орттормани

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $z = f(x, y)$ функция (x, y) нуқтада дифференциалланувчи дейилади. Тўла ортторманинг Δx ва Δy га нисбатан чизиқли қисми функциянинг

дифференциали дейилади ва dz (df) каби белгиланади, бунда $\alpha \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ бўлади.

Таъриф бўйича

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\Delta x = dx, \Delta y = dy). \quad (3)$$

тенгликни қуйидаги

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

шаклда ёзамиз. У ҳолда

$$\Delta z \approx dz \quad (4)$$

ёки

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \quad (5)$$

таърибий тенгликни ҳосил қиламиз, (4) ёки (5) формуладан таърибий ҳисоблашларда фойдаланилади.

2. Мураккаб ва ошкормас функция ҳосилалари

Агар дифференциалланувчи $z = f(u, v)$ функция берилган бўлиб, ўз навбатида u, v лар бирор x ўзгарувчининг дифференциалланувчи функцияси, яъни $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ бўлса, у ҳолда x нинг мураккаб функцияси

$$z = f(\varphi(x), \psi(x))$$

дифференциалланувчи бўлади ва унинг ҳосиласи

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \quad (6)$$

формула орқали топилади.

Агар u, v лар x, y ларнинг функциялари, яъни

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

формулар орқали топилади.

x нинг узлуксиз y функцияси

$$F(x; y) = 0$$

тенглама билан ошкормас шаклда берилган бўлсин.

Агар $F(x; y)$, $F'_x(x; y)$, $F'_y(x; y)$ функциялар бўлиб, $F'_y(x; y) \neq 0$ бўлса, y ҳолда ошкормас шаклда берилган функция ҳосиласи

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

формула орқали топилади. Худди шунингдек, $F(x; y; z)$ тенглама билан берилган z ошкормас функциянинг ҳосилалари

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad (F'_z \neq 0)$$

формулалар орқали топилади.

1143. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = x^y + x^2y - xy^2$;

б) $f(x; y) = e^{-xy}$; $f'_x(1; 0) = ?$ $f'_y(1; 0) = ?$

в) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{z}{x}$.

Δ а) Хусусий ҳосилалар бир аргументли функцияни дифференциаллаш учун ишлатиладиган одатдаги қонун формулалар ёрдамида топилади. Масалан, x бўйича ҳосилани қидиришда бошқа аргументлар ўзгармас деб қаралади.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (x^y + x^2y - xy^2)'_x =$$

$$= (x^y)'_x + (x^2y)'_x - (xy^2)'_x = yx^{y-1} + 2xy - y^2.$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (x^y + x^2y - xy^2)'_y = (x^y)'_y + (x^2y)'_y -$$

$$- (xy^2)'_y = x^y \ln x + x^2 - 2xy. \quad \blacktriangle$$

Δ б) $z'_x = f'_x(x; y) = (e^{-xy})'_x = e^{-xy} (-xy)'_x = -ye^{-xy}$.

$$z'_y = f'_y(x; y) = (e^{-xy})'_y = e^{-xy} (-xy)'_y = -xe^{-xy}.$$

$$f'_x(1; 0) = 0, \quad f'_y(1; 0) = -1. \quad \blacktriangle$$

$$\Delta \text{ в) } u'_x = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{z}{x} \right)'_x = \left(\frac{x}{y} \right)'_x + \left(\frac{y}{x} \right)'_x - \left(\frac{z}{x} \right)'_x = \frac{1}{y} -$$

$$\frac{z}{x^2}; \quad u'_y = \left(\frac{x}{y} \right)'_y + \left(\frac{y}{x} \right)'_y - \left(\frac{z}{x} \right)'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x};$$

$$u'_z = \left(\frac{x}{y} \right)'_z + \left(\frac{y}{x} \right)'_z - \left(\frac{z}{x} \right)'_z = -\frac{1}{x}. \quad \blacktriangle$$

1144. $z = \frac{x+y^3}{x-y}$ функциянинг дифференциалини топинг.

Икки аргументли функция дифференциалини топишда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y^3)'_x \cdot (x-y) - (x-y)'_x \cdot (x+y^3)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x-y-(x+y^3)}{(x-y)^2} = -\frac{y(1+y^2)}{(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y^3)'_y \cdot (x-y) - (x-y)'_y \cdot (x+y^3)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{3y^2(x-y) + x + y^3}{(x-y)^2} = \frac{3xy^2 + x - 2y^3}{(x-y)^2};$$

$$dz = -\frac{y(1+y^2)}{(x-y)^2} dx + \frac{3xy^2 + x - 2y^3}{(x-y)^2} dy. \quad \blacktriangle$$

1145. $A = (0,99)^{3,01}$ даражани тақрибан ҳисобланг.

Δ $x = 1$, $y = 3$ қийматда $f(x; y) = x^y$ функцияни олиб, берилган A сонни

$$(0,99)^{3,01} = (x + \Delta x)^{y + \Delta y}$$

ниҳатда ёзамиз, бунда $\Delta x = -0,01$; $\Delta y = 0,01$.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y) \Delta x + f'_y(x; y) \Delta y$$

формулага асосан:

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + (x^y)'_x \cdot \Delta x + (x^y)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= x^y + yx^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y;$$

$$x = 1, y = 3; \Delta x = -0,01; \Delta y = 0,01 \text{ қийматларда}$$

$$(0,99)^{3,01} \approx 1 + 3(-0,01) + \ln 1 \cdot 0,01 = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Демак, $(0,99)^{3,01} \approx 0,97$. ▲

1146. Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = u^3 \sin v$; $u = \sin x$, $v = \frac{1}{x}$;

б) $z = u^2 \ln v$; $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$.

Δ а) (6) формулага асосан:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = 3u^2 \sin v \cdot \cos x + u^3 \cos v \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3u^2 \sin v \cdot \cos x - \frac{u^3}{x^2} \cos v. \quad \Delta$$

Δ б) (7) формулага асосан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} x = \\ &= -\frac{2ux}{y^2} + \frac{u^2 x}{v}. \quad \Delta \end{aligned}$$

1147. Ушбу $xe^{2y} = y \ln x + 8$ ($x > 0$) тенглама билан берилган $y(x)$ ошқормас функция ҳосиласини топинг.
Δ Берилган тенгламани

$$xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$$

қўринишда ёзиб, чап томонини $F(x; y)$ деб белгиланг.

$$F(x; y) = xe^{2y} - y \ln x - 8.$$

Бу функциянинг x , y бўйича хусусий ҳосилаларини топинг:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = e^{2y} - \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = 2xe^{2y} - \ln x.$$

У ҳолда (8) формулага асосан

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^{2y} - \frac{y}{x}}{2xe^{2y} - \ln x} = \frac{xe^{2y} - y}{x(\ln x - 2xe^{2y})}. \quad \Delta$$

1148. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$ тенглама билан

ошқормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

$$F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 1;$$

$$F'_x = 2x - 2z, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z - 2x.$$

формулага қўра,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x - 2z}{2z - 2x} = 1; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{2z - 2x} = \frac{y}{x - z}. \quad \Delta$$

1149. $z = ye^{\frac{x}{z}}$ бўлса, dz ни топинг.

$$\Delta F(x; y; z) = z - ye^{\frac{x}{z}}; \quad F'_x = -\frac{y}{z} e^{\frac{x}{z}}, \quad F'_y = -e^{\frac{x}{z}},$$

$$F'_z = 1 + \frac{xy}{z^2} e^{\frac{x}{z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} =$$

$$= -\frac{-\frac{y}{z} e^{\frac{x}{z}}}{1 + \frac{xy}{z^2} e^{\frac{x}{z}}} = \frac{yz e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xy e^{\frac{x}{z}}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{\frac{x}{z}}}{1 + \frac{xy}{z^2} e^{\frac{x}{z}}} = \frac{z^2 e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xy e^{\frac{x}{z}}};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ формулага асосан:}$$

$$dz = \frac{yz e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xy e^{\frac{x}{z}}} dx + \frac{z^2 e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xy e^{\frac{x}{z}}} dy. \quad \Delta$$

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

1150. $z = 2axy - x^2 - y^2$. 1151. $z = x^3 t - t^3 x$.

1152. $z = \frac{x}{y}$.

1153. $u = \frac{y}{x} + \frac{x}{z} - \frac{x}{y}$.

$$1154. s = a x e^{-t} + b t$$

(a, b ўзгармас сонлар)

$$1155. z = e^{\sin \frac{y}{x}}$$

$$1157. z = \frac{x}{y} e^y$$

$$1159. u = x^{yz}$$

$$1161. u = \sin(xy + yz)$$

$$1160. u = x^{yz}$$

$$1162. u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$$

$$1163. f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. f'_x(4; 3) \text{ ва } f'_y(4; 3) \text{ ларни топинг.}$$

$$1164. f(x, y, z) = \sin^2(3x + 2y - z). f'_x(1; -1; 4), f'_y(1; 1; 4), f'_z\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right) \text{ ларни топинг.}$$

$$1165. f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2 + z^2). f'_x(1; 1; 1) + f'_y(1; 1; 1) + f'_z(1; 1; 1)$$

$$1166. f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}. f'_x(2; 1), f'_y(2; 1) \text{ ларни топинг.}$$

$$1167. f(x, y, z) = \ln(xy + z). f'_x(1; 2; 0), f'_y(1; 2; 0), f'_z(1; 2; 0) \text{ ларни топинг.}$$

$$1168. z = \ln(e^x + e^y) \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ тенглигини ўринли эканини кўрсатинг.}$$

$$1169. z = x^y \text{ бўлса, } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z \text{ тенглигини ўринли эканини кўрсатинг.}$$

$$1170. z = x \ln \frac{y}{x} \text{ бўлса, } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \text{ тенглигини ўринли эканини кўрсатинг.}$$

$$1171. s = e^{\frac{x}{t}} \text{ бўлса, } 2x \frac{\partial s}{\partial x} + t \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \text{ тенглигини ўринли эканини кўрсатинг.}$$

$$1172. T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ бўлса, } l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0 \text{ тенглигини ўринли эканини кўрсатинг.}$$

$$1173. z = f(x, y) \text{ функция } f'_x(M_0), f'_y(M_0) (M_0(x_0, y_0) \text{ нуктадаги) хусусий ҳосилаларининг физик маънолари нимадан иборат?}$$

$$1174. z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ узлуксиз функция } O(0, 0) \text{ нуктада дифференциалланувчи бўладими?}$$

$$1175. z = \sqrt{x^4 + y^4} \text{ функция } O(0, 0) \text{ нуктада дифференциалланувчи бўладими?}$$

$$1176. z = 5x^3y^2. \text{ бу функцияларнинг тўла дифференциалини топиш.}$$

$$1177. z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

$$1178. u = (xy)^z$$

$$1179. z = e^{x^2+y^2}$$

$$1180. z = (\sin x)^{\cos y}$$

$$1181. z = \sin^2 x + \cos^2 y$$

$$1182. f(x, y) = \frac{y}{x^2} \text{ бўлса, } df(1; 1) \text{ ни топинг.}$$

$$1183. f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} \text{ бўлса, } df(0; 1; 2) \text{ ни топинг.}$$

$$1184. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, x = 1, y = 3, dx = 0.01, dy = -0.05 \text{ бўлганда } dz \text{ ни топинг.}$$

$$1185. x^2 \text{ дан } 2.1 \text{ гача, } y \text{ эса } 3 \text{ дан } 2.5 \text{ гача ўзгарганда } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \text{ функциянинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1186. \text{ Конусни деформация қилиш натижасида унинг жосининг радиуси } R \text{ } 5 \text{ см дан } 4.8 \text{ см гача камайиб, баландлиги } H \text{ } 10 \text{ см дан } 10.2 \text{ см гача ортса, конус ҳажми } V \text{ нинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1187. \text{ Цилиндрни деформация қилиш натижасида унинг радиуси } R \text{ } 2 \text{ дм дан } 2.05 \text{ дм гача ортиб, баландлиги } H \text{ } 10 \text{ дм дан } 9.8 \text{ дм гача камайганда, цилиндр ҳажми } V \text{ нинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1188. A = (1.04)^{2.03} \text{ ни тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1189. A = (0.97)^{2.02} \text{ ни тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1190. A = (1.94)^2 \cdot e^{0.12} \text{ ни тақрибан ҳисобланг.}$$

$$1191. A = \operatorname{arctg} \left(\frac{1.97}{1.02} - 1 \right) \text{ ни тақрибан ҳисобланг.}$$

$$\text{Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:}$$

$$1192. z = x^2 + xy^2, x = e^{-t}, y = \sin t \text{ бўлса, } \frac{dz}{dt} \text{ ни топинг.}$$

$$1193. z = \ln(e^x + e^y), x = t^3 \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{dz}{dt} \text{ ларни топинг.}$$

1194. $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{1+x^2}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топинг.

1195. $z = u^2v - uv^2$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

1196. $z = x^2 + \sqrt{xy}$, $x = s + t$, $y = s - t$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial t}$ ларни топинг.

1197. $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$ бўлса, ни топинг.

1198. $z = x^y$, $y = \varphi(x)$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ ларни топинг.

1199. $z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{x}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

1200. Агар $z = f(x + ay)$ дифференциалланувчи функция бўлса, $\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$ тенгликнинг тўғрилигини кўрсатинг.

1201. Дифференциалланувчи $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ функция $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгликни қаноатлантиришини кўрсатинг.

1202. $z = f(x^2 + y^2)$ функциянинг $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгликни қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда $z = f(x^2 + y^2)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция.

1203. $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$ тенгламанинг $u(0; y) = y^2$ шартини қаноатлантирувчи $u = u(x; y)$ ечимини топинг.

1204. $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ тенгламанинг $u(x; 0) = 0$ шартини қаноатлантирувчи $u = u(x, y)$ ечимини топинг.

Қуйидаги ошқормас шаклда берилган функцияларнинг $\frac{dy}{dx}$ ҳосилаларини топинг:

1205. $x^3 + y^3 = 3xy$.

1206. $xy + \ln y + \ln x = 1$.

1207. $x^y = y^x$, $y'(1) = ?$

1208. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

1209. $y = 1 + y^x$.

1210. $x \sin y + \cos 2y = \cos y$, $y'|_{y=\frac{\pi}{2}} = ?$

Қуйидаги ошқормас шаклда берилган функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

1211. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$.

1212. $e^z = xyz$.

1213. $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ бўлишини кўрсатинг.

1214. $xyz = x + y + z$ бўлса, dz ни топинг.

1215. $e^z = \cos x \cdot \cos y$ бўлса, dz ни топинг.

1216. $z = ye^{\frac{x}{y}}$ бўлса, dz ни топинг.

3-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ. СИРТГА ЎТҚАЗИЛГАН УРИНМА ТЕКИСЛИК ВА НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

1. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар

$z = f(x, y)$ функция $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларнинг хусусий ҳосилалари $z = f(x, y)$ функция-
2-тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва қуйида-
белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y).$$

$z = f(x, y)$ функциянинг учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади. Ҳосила олиш тартиби билангина фарқланувчи ҳосилалар узлуксиз бўлса, улар ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$$

ва ҳоказо.

Маълумки, $z = f(x, y)$ функция дифференциали

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

формула бўйича аниқланади.

Функция дифференциалининг дифференциали $z = f(x, y)$ функциянинг 2-тартибли дифференциали дейилади ва у каби белгиланади. Таъриф бўйича

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Соддалик учун (1) ни шартли равишда

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$$

кўринишда ёзиш мумкин. Худди шунингдек,

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z \text{ ва ҳоказо.}$$

2. Тейлор формуласи

Икки ўзгарувчи $z = f(x, y)$ функция учун Тейлор формуласи қуйидагича:

$$\Delta f(x, y) = df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1$$

ёки

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \dots + R_n$$

бунда R_n — қолдиқ ҳад.

3. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаси

Агар $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта тенгламаси $F(x, y, z) = 0$ бўлган сиртда ётса, у ҳолда сиртнинг M_0 нуқтадаги уринма текислик тенгламаси

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (4)$$

тенгламаси

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (5)$$

бўлади.

Агар сирт тенгламаси $z = f(x, y)$ кўринишда берилса, тенгламаси

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (6)$$

нормал тенгламаси

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad (7)$$

кўринишда бўлади.

Агар сиртдаги бирор M_0 нуқтада

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$$

болса, M_0 нуқта сиртнинг махсус нуқтаси дейилади. Махсус нуқтада сиртнинг нормали ҳам, уринма текислик ҳам бўлмайди.

1217. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг:

$$a) z = e^{xy}; \quad b) z = \sin^2(ax + by).$$

а) Берилган функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (e^{xy})'_x = e^{xy} (xy)'_x = ye^{xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (e^{xy})'_y = e^{xy} (xy)'_y = xe^{xy}.$$

Томилган ҳосилалардан яна x, y бўйича ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = (z'_x)'_x = (ye^{xy})'_x = y^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (ye^{xy})'_y = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy} (1 + xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (xe^{xy})'_y = x^2 e^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (xe^{xy})'_x = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1+x)$$

Бу мисолдан кўринадики, $z''_{xy} = z''_{yx}$. ▲

$$\Delta \text{ б) } z'_x = 2 \sin(ax + by) (\sin(ax + by))'_x = 2 \sin(ax + by) \cos(ax + by) (ax + by)'_x = 2a \sin(ax + by) \cos(ax + by) = a \sin 2(ax + by);$$

$$z'_y = 2 \sin(ax + by) (\sin(ax + by))'_y = 2b \sin(ax + by) \cos(ax + by) = b \sin 2(ax + by);$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (a \sin 2(ax + by))'_x = 2a^2 \cos 2(ax + by);$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (a \sin 2(ax + by))'_y = 2ab \cos 2(ax + by);$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (b \sin 2(ax + by))'_x = 2ab \cos 2(ax + by);$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (b \sin 2(ax + by))'_y = 2b^2 \cos 2(ax + by).$$

Бу мисолдан ҳам кўринадики, $z''_{xy} = z''_{yx}$. ▲

1218. $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ функциянинг қуйидаги

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

тор тебраниш тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатиш бунда $\varphi(x - at)$, $\psi(x + at)$ — икки марта дифференциалланувчи ихтиёрий функциялар.

Δ Берилган функция хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\varphi(x - at) + \psi(x + at))'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = (-a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at))'_t = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at) = a^2(\varphi''(x - at) + \psi''(x + at)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at))'_x = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at).$$

Топилганларни тор тебраниш тенгламасига қўйиб, $0 = 0$ аниқ ҳосил бўлади. Демак, $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ функция тор тебраниш тенгламасини қаноатлантиради. ▲

1219. $z = x^y$ функциянинг $M_0(1; 0)$ нуқтадаги иккинчи даражаси дифференциаллини топинг.
Δ Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топа-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln^2 x.$$

Хусусий ҳосилаларнинг $M_0(1; 0)$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (y(y-1)x^{y-2}) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (x^{y-1}(1 + y \ln x)) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (x^y \ln^2 x) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0.$$

Топилган қийматларни (1) формулага қўйиб, $d^2z = 2 dx dy$ бўлади. ▲

1220. $z = \sin(xy)$ бўлса, z'''_{xyy} ни топинг.

$$z'_x = (\sin(xy))'_x = \cos(xy) (xy)'_x = y \cos(xy),$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y \cos(xy))'_y = \cos(xy) - y \sin(xy) (xy)'_y = \cos(xy) - xy \sin(xy),$$

$$z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = (\cos(xy) - xy \sin(xy))'_y = -x \sin(xy) - (x \sin(xy) + xy \cos(xy) (xy)'_y) = -x \sin(xy) - x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) = -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy). \quad \Delta$$

1221. $z = f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ функцияни $M_0(0; 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг ($n = 2$).

Δ Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топиш:

$$f'_x(x; y) = (e^{\frac{x}{y}})'_x = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}},$$

$$f'_y(x; y) = (e^{\frac{x}{y}})'_y = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$f''_{xx}(x; y) = (f'_x)'_x = \left(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right)'_x = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x; y) &= (f'_x)'_y = \left(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right)'_y = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y \\ &= -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} (y + x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x; y) &= (f'_y)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \right)'_y = \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \left(-\frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y \\ &= \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}} = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^4} (2y + x). \end{aligned}$$

Хусусий ҳосилаларнинг $M_0(0; 1)$ нуқтадаги қийматларни топиш:

$$f(0; 1) = e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 1, \quad f'_x(0; 1) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 1,$$

$$f'_y(0; 1) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0, \quad f''_{xx}(0; 1) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 1,$$

$$f''_{xy}(0; 1) = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} (y + x) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -1,$$

$$f''_{yy}(0; 1) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^4} (2y + x) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0.$$

Топилган қийматларни (3) формулага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз ($\Delta x = x$, $\Delta y = y - 1$):

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^y} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - x(y - 1) + R_2 = 1 + 2x + \\ &+ \frac{1}{2} x^2 - xy + R_2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1222. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $M_0(1; 2; 3)$ нуқтаси-
уринма текислик ва нормал тенгламаларини ёзинг.
(сфера тенгламасини)

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

ёзиб, тенгликнинг чап томонини $F(x; y; z)$ би-
елгилаймиз, яъни $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.
Бундан

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z$$

хусусий ҳосилаларнинг берилган $M_0(1; 2; 3)$ нуқтадаги қий-
матларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(M_0) = 2, \quad F'_y(M_0) = 4, \quad F'_z(M_0) = 6$$

топилганларни (4), (5) га қўйиб, $2(x - 1) + 4(y - 2) +$
 $-6(z - 3) = 0$ ёки $x + 2y + 3z - 14 = 0$ уринма текислик
тенгламасини,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \quad \text{ёки} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

нормал тенгламасини ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

1223. $z = 2x^2 + y^2$ эллиптик параболоиднинг $M_0(1; -1; 3)$
нуқтасидаги уринма текислик ва нормал тенгламаларини
ёзинг.

Δ Берилган функция $z'_x = 4x$, $z'_y = 2y$ хусусий ҳосилала-
рининг M_0 нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z'_x(M_0) = 4, \quad z'_y(M_0) = -2.$$

Топилган қийматларни (6), (7) формулаларга қўйиб, $z - 3 =$
 $4(x - 1) - 2(y + 1)$ ёки $4x - 2y - z - 3 = 0$ уринма те-
кислик тенгламасини, $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ нормал тенг-
ламасини ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

Қуйидаги функцияларнинг барча иккинчи тартибли ху-
сусий ҳосилаларини топинг:

$$1224. \quad z = x^3 - 2x^2y + 3y^2. \quad 1225. \quad z = xe^y.$$

$$1226. z = \ln(x^2 + y).$$

$$1228. z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x.$$

$$1230. u = xy + yz + zx.$$

$$1231. z = \frac{x}{y} \text{ функция учун } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ тенг}$$

уринли бўлишни текширинг.

$$1232. z = x + y + xy; d^2z \text{ ни топинг.}$$

$$1233. z = y \ln x; d^2z, d^3z \text{ ларни топинг.}$$

$$1234. z = e^{x+y^2}; d^2z \text{ ни топинг.}$$

$$1235. z = x \sin^2 y; d^2z \text{ ни топинг.}$$

$$1236. f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 12xy^3 \text{ бўлса, } f''_{xx}(0; 1), f''_{xy}(-1; 2; 0) \text{ ларни топинг.}$$

$$1237. f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n \text{ бўлса, } f'_{xx}(0; 0), f'_{xy}(0; 0) \text{ ларни топинг.}$$

$$1238. z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y \text{ бўлса, } dz = df(1; 2), d^2z = d^2f(1; 2) \text{ ларни топинг.}$$

$$1239. z = \arctg \frac{x}{y} \text{ функциянинг } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ Лаплас тенгласини қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$1240. \text{Ўзгармас } a \text{ нинг қандай қийматларида } z = x^2 + axy^2 \text{ функция } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ тенгламани қаноатлантирадиган } u(x, y) \text{ ни топинг.}$$

$$1241. z = e^{\frac{x}{y}} \text{ функциянинг } y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \text{ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$1242. z = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right) \text{ функциянинг } 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \text{ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.}$$

$$1243. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \text{ тенгламани қаноатлантирадиган } u(x, y) \text{ ни топинг.}$$

$$1244. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ тенгламани қаноатлантирадиган } u(x, y) \text{ ни топинг.}$$

$$1245. f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4 \text{ функцияни } (-2, 1) \text{ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг } (n=2).$$

$$1246. f(x, y) = e^x \sin y \text{ функцияни } M_0(0; 0) \text{ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг } (n=3).$$

$$1247. f(x, y) = e^{x+y} \text{ функцияни } M_0(1; -1) \text{ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг } (n=3).$$

$$1227. u = e^{xy^2}.$$

$$1229. z = \cos(xy).$$

$$1248. \text{Тейлор формуласи ёрдамида } \sqrt{1.03} \cdot \sqrt{0.98} \text{ ифода-} \\ \text{ланган ҳисобланг.}$$

$$1249. \text{Тейлор формуласи ёрдамида } (0.95)^{2.01} \text{ ифодани тақ-} \\ \text{риб ҳисобланг } (n=2).$$

$$\text{Қуйидаги сиртларга берилган нуқталарда ўтказилган} \\ \text{нормал тенгламаларини ёйинг:}$$

$$1250. z = xy, (2; 1; 2). \quad 1251. z = 2x^2 - 4y^2, (2; 1; 4).$$

$$1252. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, (1; -1; 1). \quad 1253. e^z - z + xy = 3,$$

$$(1; 0; 0).$$

$$1254. z = \sin \frac{x}{y}, (\pi; 1; 0).$$

$$1255. x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ сферада шундай нуқта топингки,} \\ \text{нуқтада сферага ўтказилган уринма текислик } 3x - 12y -$$

$$4z = 0 \text{ текисликка параллел бўлсин.}$$

$$1256. z = 4 - x^2 - y^2 \text{ сиртнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма текислик } 2x + 2y + z = 0 \text{ текисликка парал-} \\ \text{лел бўлади. Уринма текислик тенгламасини ёйинг.}$$

$$1257. z^2 = x^2 + y^2 \text{ конус сиртнинг } (3; 4; 5) \text{ нуқтасида} \\ \text{ўтказилган нормал тенгламасини ёйинг. Конуснинг қандай} \\ \text{нуқтасида нормал аниқмас?}$$

§ 6. КҲП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

1. Экстремум мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти

$z = f(x, y)$ функция бирор D соҳада аниқланган ва $P_0(x_0, y_0)$ нуқта D соҳанинг ички нуқтаси бўлсин.

Агар $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг δ атрофида олинган барча (x, y) нуқталар учун $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$) бўлса, $f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада **максимумга** (минимумга) эга дейилади.

Бу таърифларни ҳар қандай сондаги аргументларнинг ҳолати учун ўзгаришсиз такрорлаш мумкин.

Функциянинг **максимуми** ва **минимуми** функциянинг **экстремумлари** дейилади.

Экстремум мавжудлигининг зарурий шарти қуйидагича қўйилади.

Агар $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада **экстремумга** эга бўлса, у ҳолда функциянинг биринчи тартибли барча хусусий ҳосилалари аргументларнинг шу қий-матларида **е** нолга тенг бўлади, **ё** мавжуд бўлмайди, яъни

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ ёки } f'_x(x_0, y_0) \text{ мавжуд эмас,}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ ёки } f'_y(x_0, y_0) \text{ мавжуд эмас.}$$

$z = f(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини нолга тенг қўйиб, **кандидат** экстремумларни топилади.

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, $x = 4$, $y = -2$ ларни топамиз. $M_0(4; -2)$ критик нуқта бўлади, чунки бу нуқтада функция Oxy текисликда аниқланган.

$M_0(4; -2)$ критик нуқтада иккинчи тартибли хосилаларнинг қийматларини топамиз ва критик нуқтанинг характерини аниқлаймиз:

$$z''_{xx}(M_0) = -2, z''_{xy}(M_0) = -1, z''_{yy}(M_0) = -2.$$

$$A = -2, B = -1, C = -2, \Delta = AC - B^2 = 3 > 0.$$

$\Delta > 0$, $A < 0$ бўлгани учун функция $M_0(4, -2)$ нуқтада максимумга эга ва $z_{\max}(M_0) = 13$ бўлади. ▲

Δ б) Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x,$$

$$z'_y = 2xy + 2y.$$

Ушбу

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб,

$$M_0(0; 0), M_1\left(-\frac{5}{3}; 0\right), M_2(-1; 2), M_3(-1; -2)$$

нуқталарни топамиз. Бу нуқталар критик нуқталар бўлади. M_0 нуқта учун

$$A = z''_{xx}(M_0) = 12x + 10 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 10,$$

$$B = z''_{xy}(M_0) = 2y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(M_0) = 2x + 2 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2.$$

$\Delta = AC - B^2 = 20 > 0$, $A > 0$ бўлгани учун функция $M_0(0, 0)$ нуқтада минимумга эга ва $z_{\min}(M_0) = 0$ бўлади.

M_1 нуқта учун

$$A = z''_{xx}(M_1) = 12x + 10 \Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3} \\ y=0}} = -10.$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = 2y \Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3} \\ y=0}} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = 2x + 2 \Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3} \\ y=0}} = -\frac{4}{3}.$$

$\Delta C - B^2 = \frac{40}{3} > 0$, $A < 0$ бўлгани учун функция $M_1(-\frac{5}{3}; 0)$ нуқтада максимумга эга ва $z_{\max}(M_1) = \frac{875}{27}$ бўлади.

$M_2(-1; 2)$ нуқта учун

$$A = z''_{xx}(M_2) = 12x + 10 \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}} = -2,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = 2y \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}} = 4,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = 2x + 2 \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}} = 0.$$

$\Delta C - B^2 = -16 < 0$ бўлгани учун функция M_2 нуқтада экстремумга эга эмас.

$M_3(-1; -2)$ нуқта учун

$$A = z''_{xx}(M_3) = 12x + 10 \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-2}} = -2,$$

$$B = z''_{xy}(M_3) = 2y \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-2}} = -4,$$

$$C = z''_{yy}(M_3) = 2x + 2 \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-2}} = 0.$$

$\Delta C - B^2 = -16 < 0$ бўлгани учун функция $M_3(-1, -2)$ нуқтада экстремумга эга эмас. ▲

Δ б) Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = 3x^2 - 3,$$

$$z'_y = 2y + 2\sqrt{y^3}.$$

Ушбу

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0, \\ 2y + 2\sqrt{y^3} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

тенгламалар системасини ечиб, $M_0(1, 0)$, $M_1(-1, 0)$ нуқталарни топамиз. Топилган нуқталар текшириладиган функция аниқланиш соҳаси $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$ нинг гарасига тегишли бўлгани учун бу нуқталар критик нуқта бўлмайди (критик нуқта бўлиши учун функция аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўлиши керак).

Шундай қилиб, берилган функция критик нуқтага эга бўлмаганлиги учун функция экстремумга эга эмас. ▲

1259. $x^2 + y^2 = 1$ шартда $z = 6 - 4x - 3y$ функция экстремумга текширинг.

△ Ердамчи Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = -3 + 2\lambda y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

ларни топамиз. Бу ҳолда функция шартли экстремумга бўлишлигининг зарурий шarti

$$\left. \begin{aligned} -4 + 2\lambda x &= 0, \\ -3 + 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламалар системасини ечиб, $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ ва $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$ ларни топамиз.

$F_{xx} = 2\lambda$, $F_{yy} = 0$, $F_{yy} = 2\lambda$ бўлгани учун $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$ бўлади. Шундай қилиб, $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ нуктада $d^2F > 0$ бўлгани учун функция $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ нуктада шартли минимумга эга бўлади ва $z_{\min}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$. $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ бўлганда, $d^2F < 0$ бўлгани учун функция бу нуктада шартли максимумга эга бўлади.

$$z_{\max}\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11. \quad \blacktriangle$$

Юзи S га тенг бўлган тунукадан энг катта ҳажмли бурчакли параллелепипед ясанг. Параллелепипед томонларини x , y , z деб белгилайлик. Қуйилган масала

$$xy + yz + xz = \frac{S}{2}$$

бажарилганда

$$V = xyz$$

функциянинг максимумини топишга келтирилади. Ердамчи Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda\left(xy + yz + xz - \frac{S}{2}\right)$$

функция хусусий ҳосилаларини топиб, уларни нолга тенглаштираемиз:

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= yz + \lambda(y + z) = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda(x + z) = 0, \\ F'_z &= xy + \lambda(x + y) = 0, \\ F'_\lambda &= xy + yz + xz - \frac{S}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

тенгламалар системасидаги биринчи учта тенгламани бир-биридан иккинчисини айирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left. \begin{aligned} (z + \lambda)(y - x) &= 0, \\ (x + \lambda)(z - y) &= 0, \\ (y + \lambda)(x - z) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасидан $x = y = z$ экани келиб чиқади. (*) даги охириги $xy + yz + xz = \frac{S}{2}$ тенгламасига асосан $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$ бўлади. Демак, юзи S га тенг бўлган тунукадан ясалган энг катта ҳажмли параллелепипед қирралари $\sqrt{\frac{S}{6}}$ га тенг бўлган куб бўлар.

1261. $z = x^2 - y^2 + 8$ функциянинг $x^2 + y^2 \leq 4$ доирасида энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ Функциянинг соҳа ичидаги критик нуқталарини нуқталардаги функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = -2y.$$

$$\left. \begin{aligned} 2x &= 0, \\ -2y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{тенгламалар системасини ечиб, } M_0(0; 0)$$

тик нуқтани ва функциянинг бу нуқтадаги $z(0; 0)$ қийматини топамиз.

Энди функциянинг чегарадаги, яъни $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Берилган $z = x^2 - y^2 + 8$ функцияни айлана нуқтада битта x нинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин:

$$z = x^2 - (4 - x^2) + 8$$

ёки

$$z = 2x^2 + 4, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Шундай қилиб, икки ўзгарувчи функциянинг $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласини бир ўзгарувчи $z = 2x^2 + 4$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласига келтирдик. $z(x) = 2x^2 + 4$ функциянинг $(-2; 2)$ интервалдаги критик нуқталарини ва функциянинг бу нуқтадаги ҳамда интервал чегаралари ($x = -2, x = 2$) нуқталарини топамиз:

$$z' = 4x, \quad 4x = 0, \quad x = 0 \text{ критик нуқта.}$$

$$z(x) \Big|_{x=0} = 4, \quad z(x) \Big|_{x=-2} = 12, \quad z(x) \Big|_{x=2} = 12.$$

Функциянинг топилган қийматларини ўзаро таққосласанда функциянинг энг катта қиймати 12 га, энг кичик қиймати 4 га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $z = x^2 - y^2 + 8$ функция $x^2 + y^2 \leq 4$ доирада ўзининг энг катта қийматига $x^2 + y^2 = 4$ айлананинг $M_1(-2, 0), M_2(2, 0)$ нуқталарида, энг кичик қийматига айлананинг $M_3(0, 2), M_4(0, -2)$ нуқталарида эришади.

1262. $z = x^2 y (2 - x - y)$ функциянинг координата ўқлари ва $x + y = 6$ тўғри чизиқ билан чегараланган учбурчадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2 y = x^2(2 - x - 2y).$$

Учбурчак ичида $x > 0$, $y > 0$ эканлини ҳисобга (68-чизма),

$$\left. \begin{aligned} 4 - 3x - 2y &= 0, \\ 2 - x - 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

тенгламалар системаси

$$1, \quad y = \frac{1}{2} \text{ ечимга}$$

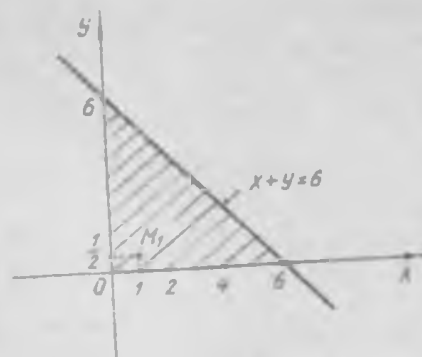
бўлади. $M_1(1; \frac{1}{2})$

та учбурчак ичида

энг кичик қиймати учун $M_1(1; \frac{1}{2})$

нуқтада функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$z(M_1) = x^2 y (2 - x - y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}.$$



68-чизма

Энди функцияни соҳанинг чегарасида текшираимиз. Учбурчакнинг $x = 0$ ва $y = 0$ бўлган томонларида функциянинг қиймати нолга тенг бўлади ($z \Big|_{x=0} = 0, z \Big|_{y=0} = 0$). Учбурчакнинг $x + y = 6$ бўлган томонида функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз: $y = 6 - x, 0 \leq x \leq 6$. У ҳолда $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$ бўлиб, интервал чегараларида $z(0) = 0, z(6) = 0$ бўлади. Худди юқоридагидек, $z = -4x^2(6 - x)$ функциянинг $[0; 6]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматларини топиш:

миз: $z' = -48x + 12x^2 = 12x(x - 4)$. $12x(x - 4) = 0$ тенгламани ечиб, $x = 4$ ($x = 0$ чегаравий нуқта бўлганлиги учун критик нуқта бўлмайди) критик нуқтани топамиз ва функциянинг $M_2(4; 2)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$z(M_2) = x^2 y (2 - x - y) \Big|_{\substack{x=4 \\ y=2}} = -128.$$

Шундай қилиб, берилган функциянинг учбурчакдаги энг катта қиймати $\frac{1}{4}$ бўлиб, функция бу қийматга учбурчак ичидаги

$M_1(1; \frac{1}{2})$ нуқтада эришади. Функциянинг учбурчакдаги энг кичик қиймати -128 бўлиб, функция бу қийматга учбурчак чегарасидаги $M_2(4; 2)$ нуқтада эришади. ▲

1163. $Z = (x - y^2) \sqrt[3]{x - 1}$ функциянинг $y^2 \leq x \leq 1$ тенгсизликлар билан берилган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
 Δ Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = \frac{5x - 2y^2 - 3}{3\sqrt[3]{x-1}}, \quad z'_y = -2y \sqrt[3]{x-1}.$$

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 - 3 = 0, \\ 2y \sqrt[3]{x-1} = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечишда $M_1\left(\frac{3}{5}; 0\right)$ критик нуқтани ва функциянинг бу нуқтадаги $z(M_1) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$ қийматини топамиз (69- чизма).

Осонгина кўриш мумкин, тенгламалар системасининг $x=1$ ва $y=\pm 1$ қийматлар ҳам ҳолатлантиради. Лекин, бу қийматлар соҳанинг чегараларини жойлашган $M_2(1, -1)$, $M_3(0; 0)$ нуқталарни беради. M_2 ва M_3 нуқталардан ташқари M_4, M_5 ватарининг қолган барча нуқталари критик нуқталардир, chunkи бу нуқталарда $z'_x = \infty$, $z'_y = 0$.

M_2, M_3 ватарининг барча нуқталарида $z = 0$.

Энди берилган функцияни соҳанинг чегараларида текшираемиз. Соҳа чегараси параболанинг M_4, M_2, OM_3, M_5 қисмида ва M_4, M_5 ватардан иборат.

1) M_4, M_2, OM_3, M_5 эгри чизиқ тенгламаси $x = y^2$ бўлиб, параболга чегарасида берилган функция нолга тенг, яъни $z = 0$.

2) M_4, M_5 ватар тенгламаси $x = 2$ бўлиб, берилган функция $z = 2 - y^2$ кўринишга келади.

$z'_y = -2y = 0$ дан $y = 0$. Бу ҳолда $M_6(2; 0)$ нуқта $z = 2 - y^2$ функция учун критик нуқта бўлиб, $z(M_6) = 2$. Шундай қилиб, функциянинг ҳамма топилган қийматларини таққослаб кўрсак, функция ўзининг энг катта қиймати $z = 2$ га M_6 нуқтада, энг кичик қиймати $z = 0$ га M_2, M_3 ватарда ва чегаранинг M_4, M_2, OM_3, M_5 қисмида эришади. Δ

Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

1264. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$. 1265. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

1266. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

1267. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

1268. $z = 2xy - 4x - 2y$. 1269. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$

1270. $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

1271. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$.

1272. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. 1273. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

1274. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Қуйидаги функцияларнинг шартли экстремумларини топинг:

1275. $z = xy, x + y = 1$.

1276. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x + y = 2$.

1277. $z = x + 2y, x^2 + y^2 = 5$.

1278. $z = x^2 + y^2, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

1279. Ҳажми V га тенг ва сирт юзи энг кичик бўлган цилиндрнинг ўлчамларини аниқланг.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган соҳалардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1280. $z = x + y; x^2 + y^2 \leq 1$ доирада.

1281. $z = 1 + x + 2y; x = 0, y = 0, x + y = 1 (x > 0, y > 0)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакда.

1282. $z = x^2 + 3y^2 - x - 18y; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ соҳада.

1283. $z = 2xy; x^2 + y^2 \leq 1$ доирада.

1284. $z = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}; x = 0, x = 1; y = 0, y = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда.

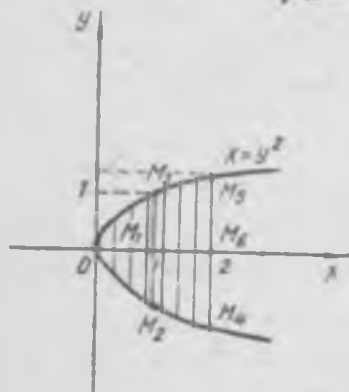
1285. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27; x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадратда.

1286. Берилган мусбат a сонни манфий бўлмаган шундай уч бўлакка ажратингки ($a = x + y + z$), уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

1287. Периметри $2p$ га тенг бўлган учбурчаклардан юзи энг катта бўлганини топинг.

1288. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболда $(0; 2)$ нуқтадан энг кичик масофада бўлган нуқтани топинг.

1289. $A(-1; 5)$ нуқтадан $y^2 = x$ параболгача бўлган энг қисқа масофани топинг.



69- чизма

ЖАВОБЛАР

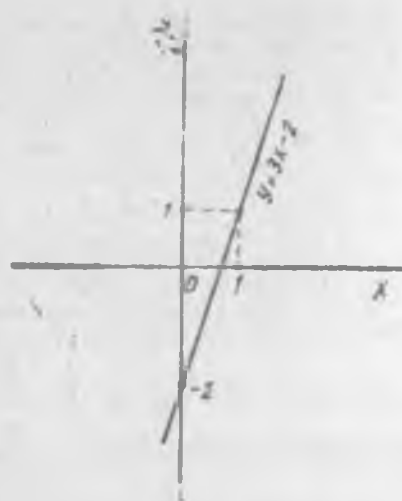
1606

3. 1) рационал сон, $3\frac{32}{99}$; 2) иррационал сон; 3) рационал сон;
 $2\frac{19}{90}$; 4) рационал сон, $3\frac{161}{9990}$; 5) рационал сон, $1\frac{4}{33}$; 6) иррационал сон;
 7) рационал сон, $5\frac{409}{990}$; 8) рационал сон, $3\frac{23}{30}$; 9) рационал сон;
 $2\frac{2089}{9900}$. 4. 1) $[-2; 4]$; 2) $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$; 3) $(-1; 0)$;
 4) $(0; \infty)$; 5) $[-5; 5]$; 6) $(-\infty; 0)$. 5. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $(-\infty; 0]$;
 3) $\{-1; 3\}$; 4) $\{2; 3\}$, $|x^2 - 5x + 9| = 3$ тенглама а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 9 = 3 \\ x^2 - 5x + 9 > 3 \end{cases}$
 б) $\begin{cases} -(x^2 - 5x + 9) = 3 \\ x^2 - 5x + 9 < 3 \end{cases}$ системаларга тенг кучли; 5) $[-1; \infty)$;
 6) $(-\infty; -1) \cup [1; \infty)$: агар $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ бўлса, $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$ бўлиб,
 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ тенгликка эга бўламиз. Демак, берилган тенглама
 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ тенгсизликка тенг кучлидир. Бу тенгсизликни ечиш учун
 а) $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x+1 < 0; \end{cases}$ системаларни ечиш керак. а) ҳол:
 $\begin{cases} x > 1, \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$, системанинг ечими $[1; \infty)$. б) ҳол:
 $\begin{cases} x \leq 1, \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$, системанинг ечими $(-\infty; -1)$. Шундай қилиб,
 тенгламанинг ечимлари тўплами $(-\infty; -1) \cup [1; \infty)$. 7. $f(0) = 1$,
 $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(a+1) = a^2 + a + 1$. 8. $\varphi(0) =$
 $= -3$, $\varphi(-1) = -\frac{5}{2}$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x(2-3x)}{1+x^2}$, $\frac{1}{\varphi(x)} =$
 $= \frac{x^2+1}{2x-3}$. 9. 1) $b+a$; 2) $2ah$. 10. $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 $f(1) = \cos 1 (1 + 4\sin 1)$, $f(a) = \cos a (1 + 4\sin a)$. 11. $f(0) = -3$,
 $f(2) = 1$, $f(-2) = -\frac{5}{3}$, $f(1)$ мавжуд эмас. 12. $f(2) = 1$, $f(0) = 2$,
 $f(0,5) = 2$, $f(-0,5) = -1$, $f(3) = 2$, $x = 4,5$ функциянинг аниқла-

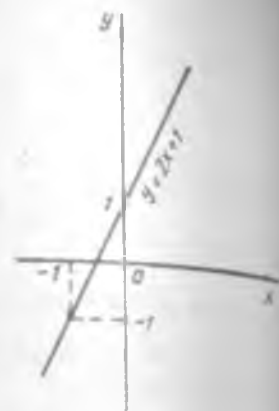
- масига қирматгани учун $f(4,5)$ мавжуд эмас. 13. $(-\infty; \infty)$. 14.
 $(-1) \cup (-1; \infty)$. 15. $(-\infty; \infty)$. 16. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$
 $(1; \infty)$. 17. $(-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$. 18. $(-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$;
 $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$. 20. $[4; \infty)$. 21. $(-\infty; 3] \cup [4; \infty)$;
 $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. 23. $(-\infty; 0)$. 24. $\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$. 25. $(-\infty; 1) \cup$
 $(1; \infty)$. 26. $[2; 3]$. 27. $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$. 28. $\left[\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right]$. 29. $[-1; 3]$.
 $(-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$. 31. $(0; \infty)$. 32. $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.
 $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. 34. а) $-1 \leq x \leq 1$; б) $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$,
 $k = 0, -1, -2, \dots$; в) $-a \leq$
 $1 - a$; г) агар $|a| = 0,5$ бўлса, у ҳолда $x = 0,5$; агар $|a| > 0,5$
 у ҳолда функция маънога эга эмас. 35. $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$,
 $< t < \infty$. 36. Агар $f(x)$ MN кесманинг массаси бўлса, у ҳолда
 $\begin{cases} 2x, \text{ агар } 0 \leq x \leq 1; \\ 2 + \frac{3}{2}(x-1), \text{ агар } 1 < x \leq 3; \\ x + 2, \text{ агар } 3 < x \leq 4 \end{cases}$
 функция $0 \leq x \leq 4$ да аниқланган.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	1/2	1/6	1/24	1/120	1/720

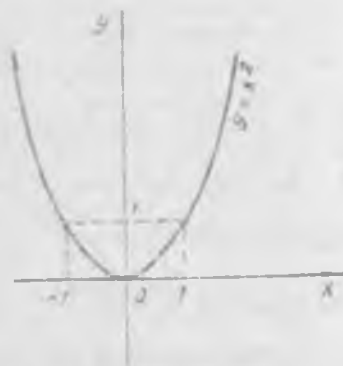
- $\frac{\pi x^2}{2R} \sqrt{4R^2 - x^2}$, $0 < x < 2R$. 40. $y = x^2 - 2x + 1$. 41. $y =$
 x^2x . 42. $y = \sqrt[3]{(1+a)^3}$. 43. $f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$,
 $f(x) = 4^x$, $\varphi(f(x)) = 2^{2^x}$, $\varphi(\varphi(x)) = 2^{2^{2^x}}$. 44. $f(3x) = \frac{45x^2+1}{2-3x}$,
 $f(x) = \frac{5x^2+1}{2-x^2}$, $3 \cdot f(x) = \frac{3(5x^2+1)}{2-x}$, $(f(x))^2 = \frac{25x^4+10x^2+1}{4-4x+x^2}$.
 Жуфт функция. 46. Жуфт функция. 47. Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас.
 Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. 49. Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. 50. Жуфт
 функция. 51. Тоқ функция. 52. Тоқ функция. 53. Жуфт функция. 54.
 Жуфт функция. 55. Бундай функциялар кўп, масалан учун $f(x) = 0$.
 Даврий функция, унинг асосий даври 4π . 61. Даврий функция,
 асосий даври π . 62. Даврий функция, унинг асосий даври π .
 Даврий функция эмас. 64. Даврий функция, унинг асосий даври 4 .
 Даврий функция, унинг асосий даври 2π . 66. Даврий функция,
 асосий даври 1 ; $\{x\}$ — бу x ҳақиқий соннинг каср қисмини ифо-
 да қиладиган ва $\{x\} = x - [x]$ деб ёзилади, бунда $[x]$ — x ҳақиқий соннинг
 бутун қисмини ифода қиладиган ва антие икс деб ўқил-
 67. Даврий функция, асосий даври йўқ. 68. Даврий функция эмас.
 Даврий функция, асосий даври a . 70. $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 71. $(-\infty,$
 $\infty)$ да камайдиган, $(0; \infty)$ да эса ўсади. 72. $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 73. $(-\infty;$



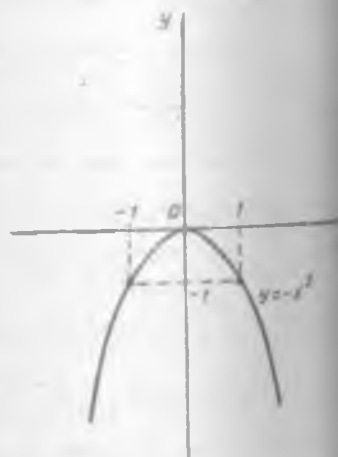
70- чизма



71- чизма



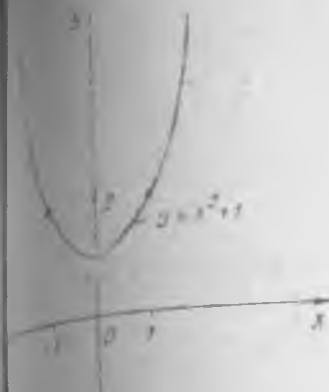
72- чизма



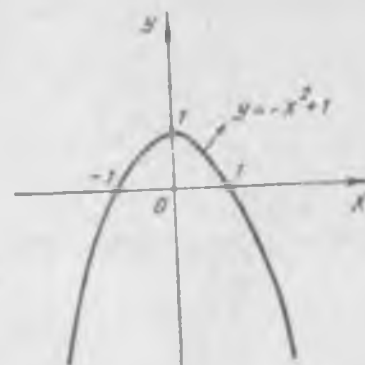
73- чизма

∞) да ўсади. 74. $[-1; 1]$ да ўсади. 75. $(-\infty; -1)$ да ўсади. 76. $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 77. $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 78. 79- чизма. 80. 71- чизма. 81. 72- чизма. 82. 73- чизма. 83. 74- чизма. 84. 75- чизма. 85. 76- чизма. 86. 77- чизма. 87. 78- чизма. 88. 79- чизма. 89. 80- чизма. 90. 81- чизма. 91. 82- чизма. 92. 83- чизма. 107

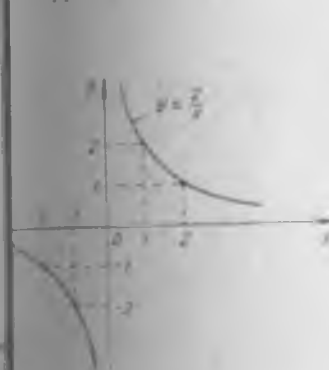
108. $\frac{1}{2}$. 109. 1. 110. 0. 111. $\frac{1}{2}$. 112. $\frac{4}{3}$. 113. $\frac{2}{3}$. 114. 0. 115



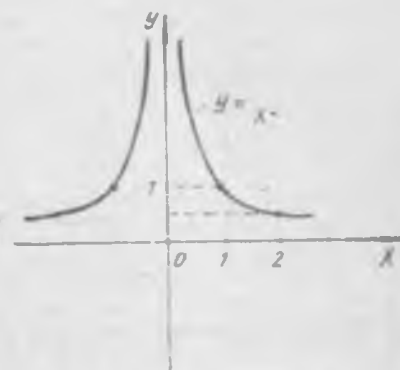
74- чизма



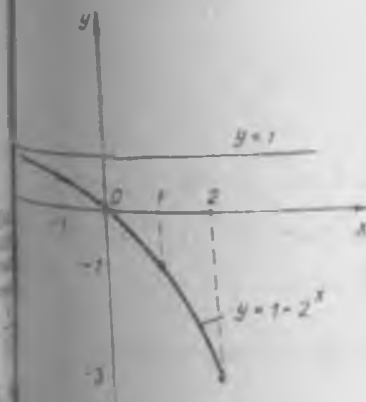
75- чизма



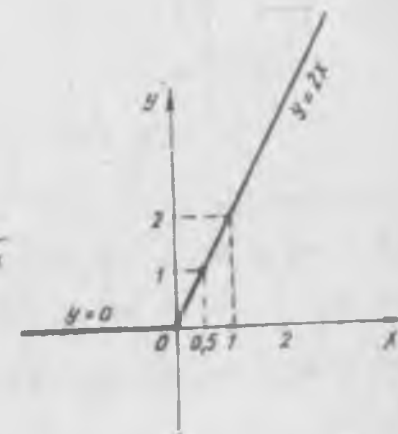
76- чизма



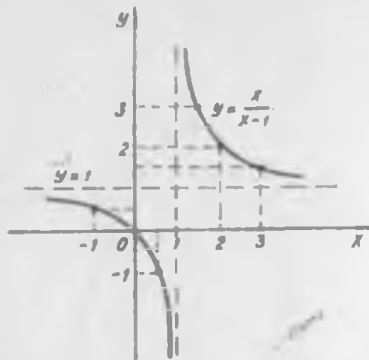
77- чизма



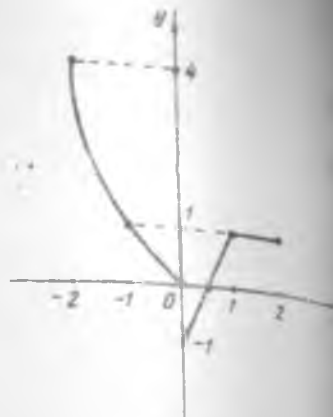
78- чизма



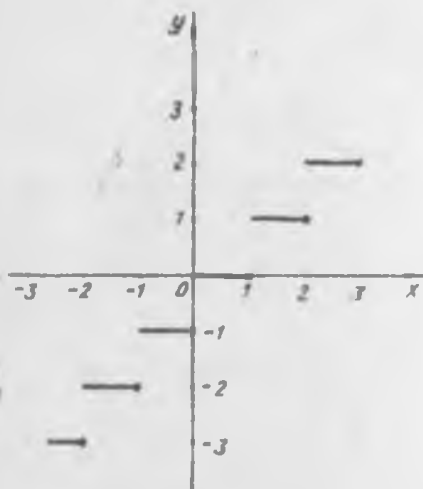
79- чизма



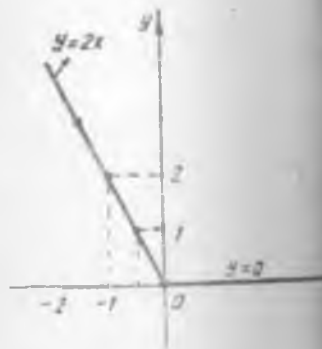
80- чизма



81- чизма



82- чизма



83- чизма

116. Лимити йуқ. 117. 0. 118. 0. 119. 1. 120. $-\frac{1}{2}$. 121. 127. 0. 128. 2. 129. 8a. 130. Мавжуд эмас. 131. 1) 8; 2) 0; 3) эмас. 133. $\frac{4}{3}$. 134. 5. 135. 36. 136. 1. 137. $\sqrt{2}$. 138. -1. 141. 1. 142. 1. 143. $\frac{1}{2}$. 147. -0.6. 148. 1. 149. 1. 150. $\frac{3}{2}$. 151. 152. $\frac{5}{2}$. 153. $\frac{2}{3}$. 154. 0. 155. $\frac{3}{4}$. 156. $\frac{1}{4}$. 157. $\frac{5}{2}$. 158. 4. 159.

161. 1. 162. -1. 163. -12. 164. $-\frac{1}{56}$. 165. 2. 166. $\frac{4}{3}$. 168. $\frac{1}{5}$. 169. $\frac{1}{4}$. 170. 2. 171. $6\sqrt{2}$. 172. $2\cos x$. 173. 1) ∞ ;

с а т м а: 1) мисолда $\arctg x = t$; 2) мисолда $\arcsin(1-2x) = t$

175. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$. 176. 4. 177. 1) $-2\sin x$;

178. $\frac{3}{4}$. 179. $\frac{1}{2}$. 180. 1. 181. -1. 182. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 183*. 3.

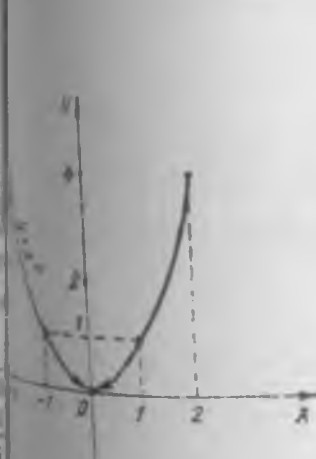
187. $\frac{2}{5}$. 188. 0. 189. 100. 190. -1. 191. 0.5. 192. 2. 193. x.

195. 1. 196. 0. 197. 0.5. 198. -1. 199. $\frac{1}{2}$. 200. 0. 202. e^{-1} .

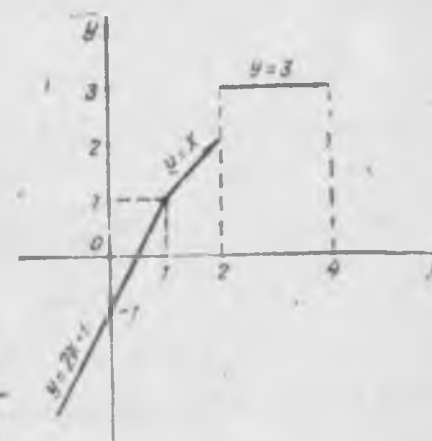
204. e^{10} . 205. e. 206. e^{mk} . 207. $e^{-3/2}$. 208. e. 209. e^2 . 210. $\frac{2}{3}$.

212. 1. 213. 1. 214. k. 215. $\frac{1}{a}$. 216. $\frac{1}{3}$. 217. $\frac{2}{3}$. 218. $-\frac{1}{4}$.

0 нуқтада функция узилишга эга, бу нуқтада узлуксизлигини текшириш, бунинг учун $f(0) = 0$ деб олин керак (84-чизма). $x = 1$ да сакрашга эга. Сакраш катталиги 3 га тенг. 227. $x = 1$ да узилишга (яъни узлуксизлигини теклаш мумкин) эга. 228. $x = 2$ да 1-тур узилиш (сакраш)га эга. Сакраш катталиги 1 га тенг. 229. $x = 0$ да 2-тур узилишга эга. 230. $x = 0$ да сакрашга катталиги 2 га тенг. 231. $x = 1$ да 2-тур узилишга эга. $x = \pm 2$ да 2-тур узилишга эга.



84- чизма



85- чизма

237. 3) $3i$; 4) $6i$; 5) 0. 238. 1) $3+7i$; 2) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$; 5) $3+2i$
 239. 6) $3-11i$; 8) 13. 240. 8) $\frac{6-\sqrt{6}}{10}+\frac{\sqrt{6}-1}{5}i$. 243. 1) $\cos 0$
 $+i \sin 0$; 2) $\cos \frac{3\pi}{2}+i \sin \frac{3\pi}{2}$; 3) $2(\cos \pi+i \sin \pi)$; 4) $4\left(\cos \frac{\pi}{3}+i \sin \frac{\pi}{3}\right)$; 5) $2\left(\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}\right)$; 6) $13(\cos(\pi-\varphi)+i \sin(\pi-\varphi))$
 бунда $\varphi = \arctg \frac{12}{5}$; 7) $3\left(\cos \frac{\pi}{2}+i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $2\left(\cos \frac{3\pi}{2}+i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$
 9) $5(\cos(\pi-\varphi)+i \sin(\pi-\varphi))$, бунда $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$; 10) $\sqrt{2}$
 $\times \left(\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$. 247. 1) $-7+7\sqrt{3}i$; 2) $6i$; 3) -24 ; 4) 12
 5) i ; 7) $\cos 190^\circ+i \sin 190^\circ$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 9) $-i$; 10) 1; 11) $-$
 12) $-i$. 248. 1) -1 ; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) -3 ; $\frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$; 3) $-1 \pm i\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$; 5) ± 2 ; $\pm 2i$; 6) 1; $-\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $-1 \pm i\sqrt{3}$; 7) $\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi\right)$; $k=0, 1, 2, 3, 4$. 251. 1) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 2) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$; 3) $4e^{\frac{\pi}{4}i}$
 4) $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$; 5) $3e^{\frac{\pi}{2}i}$; 6) $2e^{2k\pi i}$.

254. 1) $2x+3$; 2) $-\frac{2}{x^2}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; 4) $-2 \sin 2x$; 5) $2 \sec^2 x$
 6) $-\frac{1}{x^2}$; 7) $3x^2$; 8) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 256. Эта эмас. 257. $f_+'(1)$
 $=1$, $f_-'(1)=-1$. 258. $f_+'(2)=f_-'(2)=4$. 261. $5x^4-12x^3-2$
 262. $2x^{-1/3}-5x^{3/2}-3x^{-4}$. 263. $-\frac{1}{3}+2x-2x^2$. 264. $\frac{4b}{3x^2\sqrt{x}}$
 $-\frac{2a}{3x\sqrt{x^2}}$. 265. $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. 266. $\frac{bc-ab}{(c+dx)^2}$. 267. $5 \cos x$

268. $4/\sin^2 2x$. 269. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$. 270. $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$. 271.
 $x \operatorname{arctg} x$. 273. $x^2 e^x (x+7)$. 274. $e^x (\cos x - \sin x)$. 275.
 1) 276. $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$. 277. $\frac{2 \ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x}$. 278. $\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$.
 $\frac{x^2 - x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. 280. $-\operatorname{th}^2 x$. 281. $\frac{-3(x \ln x + \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x - \operatorname{sh}^2 x}$.
 $x^2 + 1^2 - 2x$. 283. $\frac{2ax+b}{3 \cdot \sqrt{(ax^2+bx+c)^2}}$. 284. $-e^{-x}$. 285.
 286. $\frac{5}{\cos^2 5x}$. 287. а) $\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$; б) $-4^{\cos x} \cdot \ln 4 \cdot \sin x$.
 5) $\cos(x^2 + 5x + 1)$. 289. $-4 \cos^2 x \sin x$. 290. $\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$.
 $\frac{2x}{x(x^2+1)}$. 292. $-\frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$. 293. $-\frac{1}{2(1+x) \sqrt{x}}$. 294.
 $\frac{1}{x}$. 295. $-\frac{1}{x} \sin(\ln x)$. 297. $\frac{1}{\sin x}$. 298. $4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}} \times$
 $\frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$. 299. $-\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1}$. 300. $2 \operatorname{tg}^2 2x \times$
 $-2 \sin^2 2x$. 303. $\frac{2}{\cos^2 2x}$. 304. $x^2 (x^2+1)^{10} (x^3+1)^2 \left(\frac{6}{x} + \frac{20x}{x^3+1} + \right.$
 $\left. \frac{x^2}{x^3+1} \right)$. 305. $x^x (1 + \ln x)$. 306. $x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right)$. 307.
 $\operatorname{tg} x \left(\frac{\ln \cos x}{1+x^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x \right)$. 308. $(\ln x)^{x-1} (\ln \ln x \cdot \ln x +$
 $2x^{\ln x-1} \cdot \ln x$. 309. а) $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$
 $2x,$
 $-2x,$
 $f'(0) = 0$. Демак, $x=0$ да дифференциалланувчи, лекин
 дифференциалланувчи эмас.
 $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \ln(-x), & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \begin{cases} y' = \frac{1}{x}, \\ x \neq 0. \end{cases}$
 $\frac{7}{12 \sqrt[3]{V \sqrt{x^5}}}$. 311. $y^{(5)} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. 312.
 $\frac{15}{16 x^3 \sqrt{x}}$. 313. $y^{(3)} = -4(2x^2 \cos 2x + 6x \sin 2x - 3 \cos 2x)$.
 $\frac{x}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$. 315. $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$. 316. $y^{(4)} = 0$. 317.

$$y^{(n)} = \begin{cases} \text{ch } x, & \text{агар } n - \text{тоқ сон бўлса,} \\ \text{sh } x, & \text{агар } n - \text{жуфт сон бўлса.} \end{cases}$$

319. $(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; бунда

ифода $\frac{n+1}{2}$ нинг бутун қисми. 320. $y^{(n)} = \frac{2^n n!}{(1-x)^{n+1}}$. 321. $f'''(x)$

$$= 4320. \quad 325. \quad 1) 2^{n-1} \cdot e^{-2x} (2(-1)^n x^3 + 2n(-1)^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-1)^{n-1})$$

$$2) (1-x^2) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx \cdot \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

$$330. y' = \frac{-3x^2y + 6xy^2 + 3}{x^3 - 6x^2y + 15y^2}. \quad 331. y' = \frac{-2x^3y - 2xy^3}{x^4 - 4x^2y^2 + y^4}$$

332. $y'' = \frac{2y^4(xy^2 + 1)}{(3xy^4 + 2)^3}$. 333. $\frac{13}{32}$. 334. $\frac{x+y}{x-y}$. 335. $\frac{1}{2}$

$$+ e^{\frac{y}{x}}. \quad 336. \frac{y}{x} \cdot \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}. \quad 337. \frac{3}{2} r^2. \quad 338. -\frac{b}{a}. \quad 339. -\frac{21}{1-}$$

340. $\frac{t(2-t^2)}{1-2t^2}$. 341. $-2e^{3t}$. 342. $\operatorname{tg} t$. 343. ∞ . 344. $9t^2$.

$-\frac{1}{a \sin^2 t}$. 346. $-\frac{1}{a \sin^3 t}$. 347. 0. 348. $(1+t^2)(1+3t^2)$. 3

$y = e^x - 1$ ва $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0} = 1$, бу ерда одий дифференциаллаш қош

уринти эмас. 350. $\frac{t^2 + t - 1}{t^{24} (1 - t^2) \sqrt{1 - t^2}}$ 359. $7x - y - 2 = 0$. 360.

$x - y - 1 = 0$. 361. $x + y - 4 = 0$ уринма түгри чизик. $x - y - 1 = 0$ нормал түгри чизик. 362. $\arctg \frac{1}{2} = 26^\circ 34'$. 363. $\frac{\pi}{4}$. 364. (2; 5).

$y'(1) = -6$; $y = -6x + 7$ — уринма түгрі чизик

$x = 2.367$, $\frac{v}{4} = 369$, $v = \frac{v}{3} + \ln 3$, $370. E = 625 \frac{m^2}{s^2}$, $371. \frac{d}{dt} = k(a - Q)$, $372. \omega = 2\pi \text{ rad/s}$, $373. 23 \text{ A}$, $374. v = -ae^{-at} \cos \omega t$

379. $\Delta f(t) = 0.0099$; $df(t) = 0.0$ 380. $\Delta u \approx du = 0.05$ 381. $\Delta f(t) = 0.0099$; $df(t) = 0.0$

$$= -0,01; |\Delta y - dy| = 0,0001; \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = 0,01. \quad 382. \quad 565 \text{ cm}^3.$$

$$-\frac{dx}{1+x^4}, \quad 385. \quad \frac{5(\arcsin x)^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 386. \quad \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx, \quad 387. \quad \frac{-dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

389. $\left(-\sin x \ln x + \frac{2 \cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) (dx)^a$. 390.

$$(d-1) \cdot (dx)^2. 393. 2.02. 394. - 0.1. 395. 0.851. 399. 0. 400.$$

— 2. 402. 2. 403. — 2. 404. 0. 405. a. 406. $\frac{4a^2}{\pi}$. 407

$$x^3 \ln^3 3, \quad x^n \cdot \ln^n 3, \quad R = \frac{x^{n+1} \cdot \ln^{n+1} 3}{e}$$

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

1) қандай қийматида $R_n \rightarrow 0$; 2) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n R_n = \left| \frac{x}{(n+1)!} \cdot \cos\left(\theta x - \frac{\pi}{4} + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \right|$$

$$R_n \rightarrow 0; \quad 3) \quad x + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

2) $\cos a + \frac{x-a}{2} \cos a$

$$\frac{(x-a)^n}{n!a^n}, x \in (-\infty; \infty) \text{ да } K_n \rightarrow 0, \text{ з) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^n}{n!a^n} = 0$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{2!} \cos\left(a + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cos\left(a + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

1) да криваяди; 3) $k > 0$ булганда $(-\infty; \infty)$ да функция $y = kx^2$ да функция

430. $y'' = 2x$; $y(0) = 0$; $y(4) = -32$. 431. $y_{\max} = y(\pm 1)$

432. Экстремум $y(0) = 3$. 433. Экстремум $y_{\min} = y(\pm 2) = 4$.

$$y(0,5) = 8; y_{\max} = y(1) = 10. \text{ 435. } y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$$

$$y(e) = e. \quad 438. \quad y_{\max} = y(2) = 2. \quad 439. \quad \max_{[0; 3]} y(x) = y($$

439. $\min_{[0; 3]} y(x) = y(0) = -10$. 440. $\min_{[-2; 1]} y(x) = y(\pm 1) = 2$;

442. $\min_{x \in [-2; 1]} y(x) = y(0) = 1$; $\max_{x \in [-2; 1]} y(x) = y(-2) = 3$.

444. $\max_{(-\infty; \infty)} y(x) = y(0) = 1$; $\min_{(-\infty; \infty)} y(x) = 0$; $\min_{(0; 1)} y(x) = 0$.

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$\max_{(-\infty; \infty)} y(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\min_{(-\infty; \infty)} y(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 447. $r = h = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
 448. Тўғри тўртбурчак квадрат бўлиши керак. 449. 20 м ва 6 см. 451. $\sqrt{\frac{2\pi}{k}}$. 452. $\frac{2m_0}{3k}$; $\frac{2}{27} \cdot \frac{m_0^3 g^2}{k^2}$. 453. Лагерга 3 ганда пиёда юриш керак. 454. 2,4 м. 455. $a\sqrt{2}$; $b\sqrt{2}$. 456. 457. Цилиндр баландлиги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ бўлганда ҳажм энг катта бўлади. 458. Конус баландлиги $\frac{4R}{3}$ бўлганда V конус энг катта бўлади. 459. $= \frac{\pi}{3}$. 460. $H = 2R$ бўлганда цилиндрининг тўла сирти энг кичик бўлади. 463. $(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27})$ — бурилиш нуқтаси, $(-\infty; \frac{5}{3})$ да қатъий $(\frac{5}{3}; \infty)$ да ботиқ. 464. Бурилиш нуқталари (2; 62) ва (4; 206), $(-\infty; 2)$ да ботиқ, (2; 4) да қавариқ, (4; ∞) да ботиқ. 465. Бурилиш нуқтаси $(b; a)$; $(-\infty; b)$ да қавариқ, $(b; \infty)$ да ботиқ. 467. Бурилиш нуқтаси $(\pm 1; \ln 2)$; $(-\infty; -1)$ да қавариқ, $(-1; 1)$ да ботиқ, $(1; \infty)$ да қавариқ. 468. Бурилиш нуқтаси йўқ; $(-\infty; -2)$ ва $(2; \infty)$ да ботиқ, $(-2; 2)$ да қавариқ. 469. Бурилиш нуқтаси йўқ; $(-\infty; 0)$ да қавариқ, $(0; \infty)$ да ботиқ. 470. $(2; \frac{2}{e^2})$ — бурилиш нуқтаси; $(-\infty; 2)$ да қавариқ, $(2; \infty)$ да ботиқ. 473. $a = -3$. 475. $y = \pm \frac{b}{a}x$. 476. $x = 0$; $y = 0$. 477. $x = -1$; $y = \frac{x}{2} - 1$. 479. $y = x + 2$. 480. $y = 0$. 481. $x = 0$; $y = 0$. 482. $x = -2$ ва $y = 2x - 4$. 484. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 485. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 486. Функция графиги координата бошига нисбатан симметрик, $y_{\max}(-1) = 2$, $y_{\min}(1) = -2$; бурилиш нуқталари: (0; 0), $(\pm 0,1 \cdot \sqrt{30}; \pm 0,2 \cdot \sqrt{30})$. Асимптотага эга эмас. 487. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 488. Функция $x = \frac{1}{3}$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. 489. Функция $x \geq -1$ лар учун аниқланган. 490. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 491. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 492. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 493. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 494. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 495. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 496. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 497. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 498. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 499. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган.

488. Функция $x = \frac{1}{3}$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. 489. Функция $x \geq -1$ лар учун аниқланган. 490. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 491. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 492. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 493. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 494. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 495. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 496. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 497. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 498. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган. 499. $(-\infty; \infty)$ да аниқланган.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{9\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln|x-1| + C. \quad 587. \\
& + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \operatorname{arctg} x + C. \quad 588. \\
& 590. \quad \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \\
& \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C. \quad 593. \\
& -\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C. \quad 594. \\
& -\frac{x}{4(x^2-1)} - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad 595. \\
& 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + C. \quad 598. \\
& +1) + C. \quad 599. \\
& + C. \quad 600. \\
& + \ln \left| \frac{\sqrt[6]{1+x}-1}{\sqrt[6]{1+x}+1} \right| + C. \quad 602. \\
& -\ln \sqrt[3]{3x+4} + 1 + C. \quad 603. \\
& -2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \quad 605. \\
& + 16\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}} - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \quad 606. \\
& 607. \quad \frac{1}{4} x^2 \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+x^2}{\sqrt{1+x^2}-x^2} \right| + C. \quad 608. \\
& + x^2)^{11/3} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{8/3} + \frac{3}{10} (1+x^2)^{5/3} + C. \quad 609. \\
& + C. \quad 610. \\
& \frac{8}{77} (7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4} + C. \quad 612.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C. \quad 613. \quad 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C. \quad 614. \\
& + C. \quad 615. \\
& + C. \quad 616. \\
& \ln \frac{|Cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}} \left(x = \frac{1}{z} \text{ алмаштириш ба-} \right. \\
& \left. \text{дужин} \right). \quad 618. \\
& C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1} \right|. \quad 621. \\
& + \frac{1}{6} \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + \\
& 622. \quad \frac{1}{2} \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C. \quad 625. \quad x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad 626. \\
& \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) + C. \quad 627. \\
& x - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C. \quad 629. \\
& - \frac{1}{20} \sin 10x + C. \quad 631. \\
& - \cos^3 x + C. \quad 633. \\
& \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad 635. \\
& \frac{13}{3} x + \frac{3}{10} \sin \frac{5}{3} x + C. \quad 637. \\
& \frac{\cos 12x}{48} - \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C. \quad 639. \\
& + 2 \ln |\operatorname{tg} z| + C. \quad 640. \\
& - \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad 643. \\
& 645. \quad \ln(\operatorname{ch} x) - \frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + C. \quad 646. \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x) + C. \quad 647.
\end{aligned}$$

$$-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C. \quad \text{Кўрсатма: } \frac{-1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} = \operatorname{sh} x +$$

айниятдан фойдаланинг. 648. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}) + C.$

V 606

$$654. 8. 655. \frac{72}{5}. 656. \frac{a^2}{3}. 657. \frac{3\pi}{8} + \frac{\ln 2}{2}. 658. -\ln 5. 659.$$

$$660. \ln 2. 661. \sqrt{e} - 1. 662. \frac{T}{\pi} \sin \varphi_0. 663. 1. 664. \frac{1}{3} (4)^2$$

$$-1). 665. 0 \leq a < b \text{ бўлса, } b-a; a < b \leq 0 \text{ бўлса, } a-b; a < 0$$

$$\text{бўлса, } a+b. 666. \frac{4}{3}. 667. \text{Йўқ, чунки } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ функция}$$

$$1] \text{ да чегараланмаган. Шунинг учун берилган интеграл мавжуд}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1 \text{ натижа эса тўғри эмас. 668. Йўқ, чунки}$$

$$\text{функция } \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) \text{ функция учун } [-1; 1] \text{ да}$$

$$\text{лангич функция бўлмайди. } F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ бошлангич фу}$$

$$x=0 \text{ да 1-тур узилишга эга: } \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{\pi}{2}. 669. \text{Йўқ, чунки } f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \text{ функция } [2; 4] \text{ кесма}$$

$$\text{аниқланмаган. 670. Йўқ, чунки } f(x) = \operatorname{tg}^2 x \text{ функция } [0; \pi] \text{ кесма}$$

$$\text{аниқланмаган, яъни функция } x = \frac{\pi}{2} \text{ да узилишга эга. Шунинг учун}$$

$$\text{Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаш мумкин эмас. 671. } \int_0^1 x dx$$

$$> \int_0^1 x^2 dx. 672. \int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx. 673. \int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)^x dx > \int_{-2}^{-1} 3^x dx. 675. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx. 676. \frac{1}{3}. 677.$$

$$678. \frac{2\sqrt{10}}{3}. 679. \ln 2. 680. 3. 681. \frac{153}{6}. 682. P_{11}$$

$$\frac{40}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} \approx 4,32 \text{ атм. } 683. I_{\text{sp}}^2 = \frac{I_0^2}{2}. 685. 2 \ln 2 - 1.$$

$$\frac{\pi}{2} - 1. 687. \frac{1+3a}{a^2}. 688. -\frac{\pi}{2}. 689. \frac{1}{e}. 690. 2 \left(1 - \right.$$

$$\left. |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & x \in \left[\frac{1}{e}; 1 \right] \\ \ln x, & x \in [1; e] \end{cases}, \text{ бўлгани учун } \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx =$$

$$(-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right). 692. 2 \ln 2 - 1. 693. \frac{1}{24};$$

$$\text{алмаштиришдан фойдаланинг. 694. } \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. 695.$$

$$-\frac{1}{3}. 696. \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. 697. \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \text{ алмаштиришдан}$$

$$\text{фойдаланинг. 698. } 2 - \frac{\pi}{2}. 699. \ln \frac{4}{3}; \sin x = t \text{ алмаштиришдан фой}$$

VI 606

$$704. \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). 705. 1. 706. \frac{3}{4}. 707. \frac{1}{p+1}. 709. 4 \frac{2}{3} \text{ кв. б.}$$

$$\frac{35}{6} \text{ кв. б. 711. } \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \text{ кв. б. 712. } \ln 3 \text{ кв. б. 713. } 2 \text{ кв. б.}$$

$$2 \text{ кв. б. 715. } \frac{4}{3} \text{ кв. б. 716. } 1 \text{ кв. б. 717. } 21 \text{ кв. б. 718. } 4 \text{ кв. б.}$$

$$2 - \sqrt{2}. 722. \pi. 723. \frac{3\pi c^3}{8ab}. 724. \frac{8}{3}. 725. \frac{3}{2} \pi a^2. 726. \frac{3\pi a^2}{2}.$$

$$-\frac{\pi a^2}{4}. 728. 2a^2 \left(\frac{5\pi}{8} - 1 \right). 738. \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right). 739. \frac{112}{27}.$$

$$\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}). 741. 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. 742. \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

$$2\pi. 744. \frac{a}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right). 745. \ln \operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right). 746. 10 \left(\frac{67}{27} + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{1}{3}} \right). 748. 6a. 749. 16a. 750. \frac{\pi^2}{3}. 752. 2(e^4 - 1). 753. 4\sqrt{3}.$$

$$3. \pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}). 756. 8a \sqrt{p^2 + p^2} =$$

$$= 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \begin{cases} 2a \cos \frac{\varphi}{2}, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ -2a \cos \frac{\varphi}{2}, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

дан фойдаланим.

$$757. \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \quad 758. \frac{10}{3}. \quad l = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \rho^2 (\theta'(\rho))^2} d\rho$$

$$\text{ладан фойдаланим. } 763. 14,4\pi. \quad 764. \frac{\pi}{2}. \quad 765. \frac{4\pi}{3} a^2 b. \quad 766. 34 \frac{2}{15}$$

$$767. \text{ а) } \frac{\pi^2}{2}; \text{ б) } 2\pi^2. \quad 768. \text{ а) } \frac{16}{15} \pi; \text{ б) } \frac{8\pi}{3}. \quad 769. 12\pi. \quad 770. 64$$

$$\text{кесим юзи } S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi((3+x)^2 - (3-x)^2) = 12\pi x =$$

$$= 12\pi \sqrt{4-y}; V = 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = 64\pi \quad 771. \frac{1}{3} \pi R^2 H. \quad 772. 2\pi$$

$$773. \frac{1}{15} \pi a^3. \quad 774. \text{ а) } 5\pi^2 a^2; \text{ б) } 6\pi^2 a^2. \quad 775. \frac{2}{3} \pi^2 a^3 (\pi^2 - 6). \quad 776. \frac{32}{105} \pi a^3$$

$$777. \frac{8}{3} \pi a^3. \quad 778. \frac{4\sqrt{3}-6}{9} \pi a b^2. \quad 782. \frac{14\pi}{3}. \quad 783. \frac{62\pi}{3}$$

$$784. 8\pi. \quad 785. \frac{\pi}{9} (34\sqrt{17} - 2). \quad 786. 2\pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

$$788. 3\pi. \quad 790. \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2). \quad 791. 4\pi r^2. \quad 792. 16a^2 \pi^2. \quad P_u =$$

$$= 2\pi \int_L x dl = 4\pi a^2 \int_0^\pi (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt + 4\pi a^2 \int_\pi^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2$$

$$793. \frac{12}{5} \pi a^2. \quad 794. 4\pi^2 r^2. \quad 795. \frac{32}{5} \pi a^2. \quad dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} =$$

$$= 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad y = \rho \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = 4a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \rho =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi y dl = 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{32}{5} \pi a^2. \quad 796. 2\pi a^2 (2 - \frac{1}{2}) \cos 2\varphi >$$

$$> 0, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{лемниската ўнг тармоғи}), \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4} \quad (\text{лемнис-$$

$$\text{ката чап тармоғи}). \quad dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad y = \rho \sin \varphi =$$

$$= a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}. \quad \text{Иккиланган сирт юзи, лемниската ўнг тармоғининг йў-$$

$$\text{нишидан ҳосил бўлган сирт юзининг иккиланганига тенг бўлади. Яъни}$$

$$370$$

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}). \quad 804.$$

$$\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad M_y = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \quad 805. \quad M_x =$$

$$\sqrt{5-1}, \quad M_y = \frac{9}{8} \sqrt{5} + \frac{1}{16} \ln(2+\sqrt{5}). \quad 806. \quad M_x = \sqrt{2} +$$

$$1+\sqrt{2}. \quad 807. \quad x_0 = y_0 = \frac{a}{3}. \quad 808. \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{2R}{\pi}. \quad 809. \quad M_x = \frac{\pi}{4},$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y_0 = \frac{\pi}{8}. \quad 810. \quad x_0 = y_0 = \frac{9}{20}. \quad 811. \quad M_x = \frac{P}{2},$$

$$\frac{2\sqrt{2}p}{5}; \quad x_0 = \frac{3}{5}, \quad y_0 = \frac{3}{8} \sqrt{2p}. \quad 812. \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{4}{3\pi} R.$$

$$x_0 = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}. \quad 814. \quad x_0 = y_0 = \frac{a}{5}. \quad \text{Фигура } y = x$$

$$y > 0) \text{ биссектрисага нисбатан симметрик бўлгани учун } x_c =$$

$$I_1 = \int_0^a xy dx = \int_0^a x (\sqrt{a-x} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{a^3}{30}. \quad I_2 = \int_0^a y dx = \int_0^a (\sqrt{a-x} -$$

$$\sqrt{x})^2 dx = \frac{a^3}{6}. \quad x_c = y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{a}{5}. \quad 815. \quad x_0 = \frac{4}{\pi}, \quad y_0 = \frac{20}{3\pi}. \quad 816. \quad x_0 = \frac{5a}{8},$$

$$\frac{256}{250}, \quad 817. \quad \frac{\sqrt{(1+\epsilon)^2 - 2\sqrt{2}}}{250}. \quad 818. \quad I_x = \frac{256}{15} a^3, \quad I_y = 16a^3 \left(\pi^2 - \frac{128}{45} \right).$$

$$I_x = \frac{a^3}{3}, \quad I_y = \frac{a^3}{3}. \quad 820. \quad I_x = \frac{ab^3}{12}, \quad I_y = \frac{a^3b}{12}. \quad 821. \quad I_y =$$

$$a^4. \quad 822. \quad \frac{\pi R^4}{8}. \quad 823. \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{2R}{\pi}. \quad V = 4\pi R^2, \quad l = \pi R,$$

$$l \cdot 2\pi y_0, \quad y_0 = \frac{4\pi R^2}{\pi R \cdot 2\pi} = \frac{2R}{\pi}. \quad 824. \quad S = 2\pi y_0 \cdot l, \quad y_0 = \frac{2R}{\pi},$$

$$\pi R, \quad S = 2\pi \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = 4\pi R^2. \quad 832. \quad m = 75 \text{ кг}. \quad 833. \quad m = k\pi r^4. \quad \text{Ихтиё-$$

$$\text{х радиусли шарнинг массаси } m(x) \text{ бўлсин. Масаланинг шартига асосан}$$

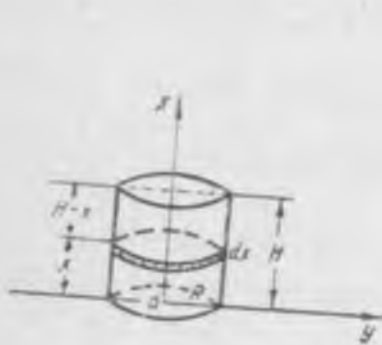
$$\mu = kx. \quad \text{Масса } m = \int_0^r \mu dv = \int_0^r kx \cdot 4\pi x^2 dx = 4k\pi \int_0^r x^3 dx = k\pi r^4.$$

$$x_2 = x_1 + \sin \left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0 \right) - \sin \left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0 \right). \quad 835. \quad S =$$

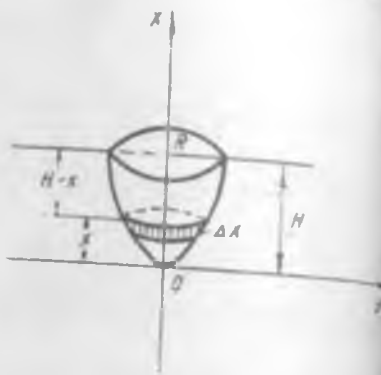
$$V = \frac{gR^2}{2}. \quad 836. \quad 10^4 \text{ м}. \quad 837. \quad V = \frac{A}{b} \ln \left(\frac{a}{a-bt} \right), \quad h = \frac{A}{b^2} \left(b^2 t_1 -$$

$$371$$

$-(a-b_1) \ln \frac{a}{a-b_1}$ 888. 0,18 Ж. 839. $A = 0,024$ кг/м. Узун
 l м, кесими S мм² бўлган симни x_m чузиш учун сарф этиладиган
 $F = E \frac{S \cdot x}{l}$ формула билан аниқланади, бунда E — эластиклик
 бўлиб, мис учун $E \approx 12000$ кг/мм² деб олиш мумкин. 840. $A = \frac{\pi}{2}$

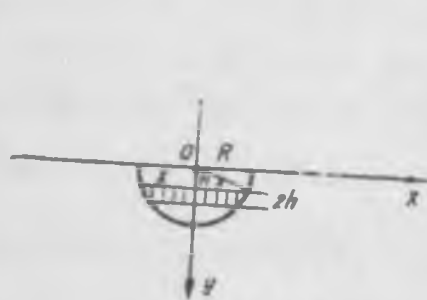


86- чизма

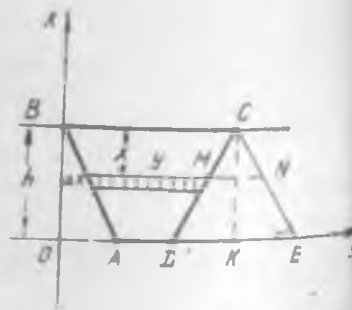


87- чизма

$\times R^2 H^2$. Элементар куч (огирлик кучи) $dF = \gamma \pi R^2 dx$, бунда γ — сувнинг
 солиштирма огирлиги ($dF = \gamma dV$). $A = \int_0^H \gamma \pi R^2 (H-x) dx = \frac{\pi \gamma}{2} R^2 H^2$
 (86- чизма). 841. $l_0/l_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$. 842. $\frac{\pi R^2 H^2 \mu g}{6}$, μ — зичлик. Кес
 юзи $S = \pi y^2$, элементар жисм ҳажми $\Delta V = \pi y^2 \Delta x$, огирлик кучи $\Delta F = \pi \mu y^2 (H-x) \Delta x$. $y^2 = 2px$, $x = H$, $y = R$ бўлса, $R^2 = 2pH$



88- чизма



89- чизма

$$\frac{R^2}{H} \cdot \frac{1}{H} = \frac{R^2}{H^2} x, A = \mu \pi \int_0^H \frac{R^2}{H} x (H-x) dx \quad (87\text{- чизма}). \quad 843.$$

$$RTI^2 Q = 0,24 I^2 R \quad \text{Жоуль-Ленц қонунидан фойдаланинг. } Q =$$

$$R \int_{I_1}^{I_2} I^2 dI. \quad 844. \frac{2}{3} R^3 \cdot dS = 2x dx = 2 \sqrt{R^2 - h^2} dh, \quad \gamma = 1, g = 1;$$

$$\int_0^H \sqrt{R^2 - h^2} dh. \quad dp = 2h \sqrt{R^2 - h^2} dh \quad (88\text{- чизма}). \quad 845.$$

$$\frac{dh^2}{2} (\gamma = 1). \quad 846. \frac{h^2(a+2b)}{6}. \quad \Delta DCE \sim \Delta MCN \quad \text{дан:}$$

$$= \frac{dx}{x}, \quad \frac{a-b}{a-y} = \frac{h}{x}, \quad y = a - \frac{x}{h} (a-b). \quad p = \int_0^h xy dx \quad (89\text{- чиз-}$$

$$\text{ма}). \approx 0,6938; \delta(n) \leq 0,0017. \quad 855. \approx 0,957. \quad 856. 1) n_1 > 100;$$

$$> 4; 3) n_2 > 1. \quad 857. \approx 1,9541. \quad 858. \approx 0,7468. \quad 866. \frac{1}{3}. \quad 864. \pi. \quad 865.$$

$$\text{қушувчи. } 866. \text{ Узоқлашувчи. } 867. \frac{3\pi^2}{32}. \quad 868. 1. \quad 869. \frac{1}{2}. \quad 870. e.$$

$$-1.872. \quad \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad 873. \frac{1}{2}. \quad 874. 2. \quad 875. \text{ Яқинлашувчи. } 876. \text{ Яқинла-}$$

$$\text{шувчи. } 877. \text{ Яқинлашувчи. } \int_2^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx. \quad x > 1$$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ бўлади. } \int_1^\infty e^{-x} dx \text{ яқинлашувчи, бу ҳолда берилган ин-}$$

$$\text{теграл яқинлашувчи бўлади. } 878. \text{ Узоқлашувчи. } 879. \text{ Узоқлашувчи,}$$

$$\text{да } \frac{1}{1+x} > \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ дан фойдаланинг. } 880. \text{ Яқинлашув-}$$

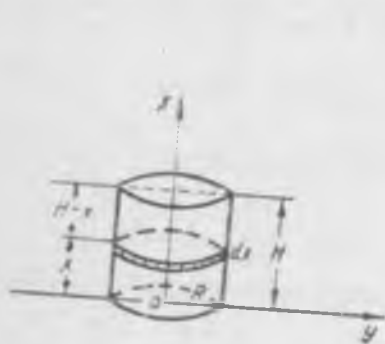
$$x > 2 \text{ да } 0 < \arcsin \frac{1}{x} \leq \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1, \quad 1+x\sqrt{x} > x\sqrt{x},$$

$$\text{ҳолда } \frac{2 + \arcsin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} < \frac{3}{\frac{3}{2}}; \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1 \text{ бўлгани учун берилган}$$

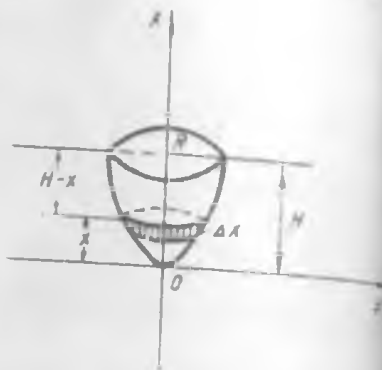
$$\text{мас интеграл яқинлашувчи бўлади. } 881. \text{ Узоқлашувчи. } \frac{x+1}{x\sqrt{x}} >$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ дан фойдаланинг. } 883. \text{ Яқинлашувчи. } x > 1.$$

$-(a-b_1) \ln \frac{a}{a-b_1}$ 838. 0,18 Ж. 839. $A = 0,024$ кг/м. Умуман
 l м, кесими S мм² бўлган симни x_m чузиш учун сарф этиладиган
 $F = E \frac{S \cdot x}{l}$ формула билан аниқланади. бунда E — эластиклик
 бўлиб, мис учун $E \approx 12000$ кг/мм² деб олиш мумкин. 840. $A = \frac{\pi}{2}$

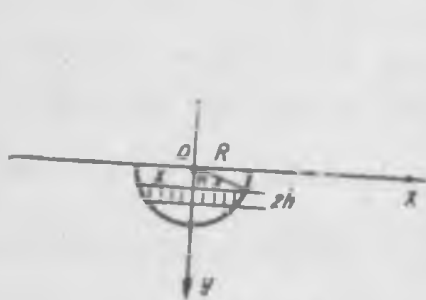


86- чизма

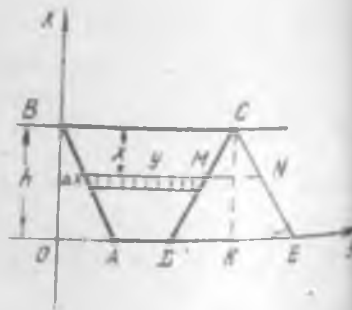


87- чизма

$\times R^2 H^2$. Элементар куч (оғирлик кучи) $dF = \gamma \pi R^2 dx$, бунда γ — сувица
 солиштирма оғирлиги ($dF = \gamma dV$). $A = \int_0^H \gamma \pi R^2 (H-x) dx = \frac{\pi \gamma}{2} R^2 H^2$
 (86- чизма). 841. $I_0 I_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$. 842. $\frac{\pi R^2 H^2 \mu g}{6}$, μ — зичлик. Кес
 юзи $S = \pi y^2$, элементар жисм ҳажми $\Delta V = \pi y^2 \Delta x$, оғирлик кучи
 $\Delta p = \pi \mu y^2 (H-x) \Delta x$. $y^2 = 2px$, $x = H$, $y = R$ бўлса, $R^2 = 2pH$



88- чизма



89- чизма

$y^2 = \frac{R^2}{H} x$, $A = \mu \pi \int_0^H \frac{R^2}{H} x (H-x) dx$ (87- чизма). 843.
 RTI_0 . $Q = 0,24 I^2 R$ Жоуль-Ленц қонунидан фойдаланинг. $Q =$
 $R \int_0^t I^2 dt$. 844. $\frac{2}{3} R^2 \cdot dS = 2x dx = 2 \sqrt{R^2 - h^2} dh$, $\gamma = 1$, $g = 1$;
 $2\pi g h \sqrt{R^2 - h^2} dh$. $dp = 2h \sqrt{R^2 - h^2} dh$ (88- чизма). 845.
 $\frac{h^3 (a+2b)}{6}$. $\Delta DCE \sim \Delta MCN$ дан:
 $\frac{x}{a} = \frac{a-b}{a-y} = \frac{h}{x}$, $y = a - \frac{x}{h} (a-b)$. $p = \int_0^h x y dx$ (89- чиз-
 ма). $\approx 0,6938$; $\delta(n) \leq 0,0017$. 855. $\approx 0,957$. 856. 1) $n_1 > 100$;
 > 4 ; 3) $n_3 > 1$. 857. $\approx 1,9541$. 858. $\approx 0,7468$. 860. $\frac{1}{3}$. 864. π . 865.
 шувчи. 866. Узоқлашувчи. 867. $\frac{3\pi^2}{32}$. 868. 1. 869. $\frac{1}{2}$. 870. e .
 $-1,872$. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 873. $\frac{1}{2}$. 874. 2. 875. Яқинлашувчи. 876. Яқинла-
 шувчи. 877. Яқинлашувчи. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$. $x > 1$
 $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ бўлади. $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ яқинлашувчи, бу ҳолда берилган ин-
 теграл яқинлашувчи бўлади. 878. Узоқлашувчи. 879. Узоқлашувчи,
 да $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ дан фойдаланинг. 880. Яқинлашув-
 $x \geq 2$ да $0 < \arcsin \frac{1}{x} \leq \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1$, $1+x\sqrt{x} > x\sqrt{x}$,
 ҳолда $\frac{2 + \arcsin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} < \frac{3}{\frac{3}{2}}$; $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ бўлгани учун берилган
 ҳас интеграл яқинлашувчи бўлади. 881. Узоқлашувчи. $\frac{x+1}{x\sqrt{x}} >$
 $\frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ дан фойдаланинг. 883. Яқинлашувчи. $x > 1$.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{3!} + \dots \Big); -\infty < x < \infty. \quad 1029. e^{-2} \left(1 + \frac{x+2}{1!} + \frac{(x+2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+2)^n}{n!} + \dots\right); -\infty < x < \infty. \quad 1030. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n 5}{n!}; -\infty < x < \infty. \quad 1031. 1 + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots; -\infty < x < \infty. \quad 1032. \sinh^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \dots \\
& + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots; -\infty < x < \infty. \quad 1033. \ln 10 + \left(\frac{x}{10} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 10^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \dots\right). \\
1034. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n; f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \\
= \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}. \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \\
\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \dots + (-1)^n 2^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\
\times 2^n x^n. \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n \\
\times 2^{n+1}) x^n. \quad 1035. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!}; -\infty < x < \infty. \\
(\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x). \quad 1036. f(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n; \\
-\infty < x < \infty. \quad 1037. f(x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \dots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \dots; -1 < x < 1. \\
1038. f(x) = x^2 + \frac{1}{2} x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+2} + \dots; \\
-1 < x < 1. \quad 1039. f(x) = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 - \\
- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x^4 + \dots; -1 < x < 1. \quad 1040. f(x) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n-1} (1+2^n) \frac{x^n}{n}; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \quad 1041. \arcsin x = x + \\
& \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \\
1,609. \quad 1050. 2,833. \quad 1051. 2,0043. \quad 1052. 3,1072. \quad 1053. 2,154 \\
= 2; \quad 1,25. \quad 1054. 3,017. \quad 1055. \sin 10^\circ \approx 0,9948. \quad 1056. 0,3894. \\
0,309. \quad 1058. 0,1973. \quad 1059. 1,649. \quad 1060. 0,779. \quad 1061. 0,608. \\
0,758. \quad 1063. 0,310. \quad 1064. 0,747. \quad 1065. 0,487. \quad 1066. 0,500. \\
0,508. \quad 1068. 0,072. \quad 1071. Абсолют яқинлашувчи. \quad 1072. Абсолют \\
лашувчи. \quad 1073. Узоқлашувчи $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ гармоник қатор билан \\
ланг. \quad 1074. Яқинлашувчи. \quad 1075. Яқинлашувчи. \quad 1076. Узоқла- \\
1077. Абсолют яқинлашувчи. \quad 1078. Узоқлашувчи. \quad 1079. Яқин- \\
лашувчи. \quad 1080. Яқинлашувчи. \quad 1081. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. \quad 1082. \\
 $\frac{1}{e}$. $|z| < \frac{1}{e}$. \quad 1083. $R = 0$, $z = 0$. \quad 1084. $R = 1$. \quad 1085. $R = \infty$. \\
 $R = 2$. \quad 1087. $R = \frac{1}{4}$. \quad 1088. $R = \frac{1}{4}$, $|z| < \frac{1}{4}$.
\end{aligned}$$

VIII 606

$$\begin{aligned}
V = \frac{1}{3} \pi y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \quad 1097. S = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}. \\
4. Координата бошидан бошқа бутун текислик. \quad 1105. $x + 4y > 5$. \\
 $x > 0$, $x > 0$, $x + y \leq 1$. \quad 1107. $x^2 + y^2 \leq 1$. \quad 1108. $x > 0$, $y > 0$. \\
 $y = \pm x$ тўғри чизиқлардан ташқари бутун текислик. \quad 1110. $-1 \leq$ \\
 $1 \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. \quad 1111. $-x \leq y \leq x$, $x > 0$; $-x > y > x$, $x < 0$. \\
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$. \quad 1113. $y > -x$, $y \leq x$. \quad 1114. $x > 2$, $-2 \leq y \leq 2$, \\
 -2 , $-2 \leq y \leq 2$. \quad 1115. $y > 0$, $y > x$, $x \neq 0$. \quad 1116. $x^2 + y^2 > 1$, \\
 $y^2 < 4$. \quad 1117. $y > \sqrt{x}$, $x > 0$. \quad 1118. $-\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$. \quad 1119. 1 \\
 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. \quad 1120. $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, $z = \pm 2$ текисликлар би- \\
нарилланган куб. \quad 1121. $x + y = C$. \quad 1122. $y = cx^2$. \quad 1123. $y = x + c$ тўғри \\
лиқлар оиласи. \quad 1124. $y = x^2 - c$ параболалар оиласи. \quad 1125. $x^2 + y^2 = c$ \\
лиқлар оиласи. \quad 1126. $y = c - x^2$ ($c > 0$) параболалар оиласи. \quad 1127. \\
с гиперболалар оиласи ($|c| \leq 1$) \quad 1128. $x + y + z = 0$ текисликка парал- \\
лел бўлган $x + y + z = c$ текисликлар оиласи. \quad 1129. $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ мар- \\
координата бошида бўлган концентрик сфералар оиласи \quad 1130. 0. \\
1. 2. \quad 1132. 0. \quad 1133. $-\frac{1}{4}$. \quad 1134. $\frac{1}{2a}$. \quad 1135. 0. $x = \rho \cos \varphi$, $y =
\end{aligned}$$$

$= \rho \sin \varphi$ қутб координаталарига ўтинг ва $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ формула

фойдаланинг. $\left. \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right\}$ да $\rho \rightarrow 0$. 1137. Узлуксиз. 1138. (0; 0) нуқтада
узлишга эга. 1139. (0; 0) нуқтада узлишга эга. 1140. (0; 0) нуқтада
узлишга эга. 1141. (0; 0) нуқтада узлишга эга. 1142. $x^2 + y^2$
айлананинг ҳар бир нуқтасида функция узлишга эга. 1150. $z_x = 2xy$

$- 2x$, $z_y = 2ax - 2y$. 1151. $z_x = 3x^2 t - t^3$, $z_y = x^3 - 3x^2 x$. 1152. z_x

$= \frac{1}{y}$, $z_y = -\frac{x}{y^2}$. 1153. $u_x = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}$, $u_y = \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2}$, u_z

$= -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{y}$. 1154. $S_t = -axe^{-t} + b$, $s_x = ae^{-t}$. 1155. z_x

$= e^{\frac{\sin x}{y}} \cdot \cos \frac{u}{x} \left(-\frac{u}{x^2} \right)$, $z_y = \frac{1}{x} e^{\frac{\sin x}{y}} \cdot \cos \frac{u}{x}$. 1156. z_x

$= 4(3xy^3 - x^3 + 5)^3(3y^3 - 2x)$, $z_y = 4(3xy^3 - x^3 + 5)^3(gxy^3)$. 1157. z

$= -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$, $z_y = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$. 1158. $z_x = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} +$

$+\frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$, $z_y = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$. 1159.

$u_x = yx^{y^2-1}$, $u_y = zx^{y^2} \ln x$, $u_z = yx^{y^2} \ln x$. 1160. $u_x = y^2 x^{y^2-1}$, u_y

$= x^{y^2} \ln x$, $z_y^{y^2-1} = zy^{y^2-1} x^{y^2} \ln x$, $u_z = y^2 x^{y^2} \ln x \cdot \ln y$. 1161. u_x

$= y \cos(xy + yz)$, $u_y = (x + z) \cos(xy + yz)$, $u_z = y \cos(xy + yz)$. 1162.

$u_x = -\frac{x}{y} \left(\frac{y}{x} \right)^2$, $u_y = \frac{z}{y} \left(\frac{y}{x} \right)^2$, $u_z = \left(\frac{y}{x} \right)^2 \ln \frac{y}{x}$. 1163. $f_x(4; 3)$

$= \frac{9}{5}$, $f_y(4; 3) = \frac{8}{5}$. 1164. $f_x(1; -1; 0) = 0$, $f_y(1; 1; 4) = 2 \sin$

$f_z \left(-\frac{1}{2}; 0; -1 \right) = -\sin(-1) \approx 0,84$. 1165. $\frac{3}{2}$. 1166. $f_x(2; 1) =$

$= \frac{1}{2}$, $f_y(2; 1) = 0$. 1167. $f_x(1; 2; 0) = 1$, $f_y(1; 2; 0) = \frac{1}{2}$, $f_z(1; 2; 0) =$

$0 = \frac{1}{2}$. 1173. $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0$ ҳақиқати йўналиши бўйича M_0 нуқтадаги

функциянинг ўзгариш темлигини ифодалайди. Худди шунингдек, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$

1174. Йўқ. $f_x(0; 0)$, $f_y(0; 0)$ лар мавжуд эмас ($z(x; 0) = |x|$ функциянинг $x = 0$ да ҳосиласи мавжуд эмас). 1175. Ҳа. 1176. $dz =$

$+ y^2 (xdx + ydy)$. 1180. $dz = \cos y (\sin x)^{\cos y - 1} \cdot \cos x dx -$

$\cos y \cdot \sin y \ln \sin x dy$. 1181. $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy$. 1182.

$1) = -2dx + dy$. 1183. $df(0; 1; 2) = 2e^3 dy + 4e^3 dz$. 1184. $dz =$

018. 1185. $\Delta z \approx -0,1$. 1186. $\Delta V = -15,7$. Конус ҳажми тахми-

15,7 см³ миқдорга камаяди. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, $R = 5$, $H = 10$,

$-0,2$; $dH = 0,2$; $\Delta v \approx dv = \frac{1}{3} \pi (2RHdR + R^2dH)$ га юқорида-

натларни қўйсақ, $\Delta v \approx -15,7$ см³ ҳосил бўлади. 1187. $\Delta v \approx dv$

туладан фойдаланинг. $\Delta v = 1,2$ дм³. 1188. $A \approx 0,08$. 1189. $A \approx$

94. 1190. $A \approx 4,24$. $(1,94)^2 e^{0,12}$ ни $f(x; y) = x^2 e^y$ функциянинг

$(1,94; 0,12)$ нуқтадаги қиймати деб қараймиз. $M_0(2; 0)$ бўлиб, $\Delta x =$

$-0,06$; $\Delta y = 0,12$ бўлади. $(1,94)^2 e^{0,12} \approx f(M_0) + f_x(M_0) \Delta x +$

$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t} (2e^{2t} + \sin^2 t) +$

$(M_0) \Delta y = 4,24$. 1191. $A \approx 0,75$. 1192. $\frac{dz}{dt} = 2e^{2t} (2e^{2t} + \sin^2 t) +$

$\sin 2t$. 1193. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{e^t}{e^x + e^t}$; $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 3e^{2t}}{e^x + e^t}$. 1194. $\frac{dz}{dx} =$

$\frac{1}{y^2 - x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}$. 1195. $\frac{\partial z}{\partial x} = (2uv - t^2) \cos y +$

$-2uv \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -x(2uv - t^2) \sin y + (u^2 - 2uv)x \cos y$. 1196.

$2x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial t} = 2x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} -$

$\sqrt{\frac{x}{y}}$. 1197. $\frac{dy}{dt} = 2t \ln t \cdot \operatorname{tg} t + \frac{t^2 + 1}{t} \operatorname{tg} t + \frac{t^2 + 1}{\cos^2 t} \ln t$. 1198.

yx^{y-1} , $\frac{dz}{dx} = x^y \left(y^y(x) \ln x + \frac{y}{x} \right)$. 1199. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \times$

$\left(xy + \frac{y}{x} \right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x} \right) y^y \left(xy + \frac{y}{x} \right)$. 1205. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{x - y^2}$.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. 1207. $y'(1) = 1$. 1208. $\frac{du}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$. 1210. $y' \Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = -1$. 1211. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x - z}$. 1212. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^x - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^x - xy}$.

$dz = \frac{(yz - 1) dx + (xz - 1) dy}{1 - xy}$. 1215. $dz = -\operatorname{tg} x dx -$

$\operatorname{tg} y dy$. 1216. $dz = \frac{ze^{\frac{x}{z}} (zdy + ydx)}{1 - xy}$. 1224. $z_{xx}'' = 6x - 4y$, $z_{xy}'' =$

$z^2 + xy e^{\frac{x}{z}}$. 1225. $z_{xx}'' = 0$, $z_{xy}'' = z_{yx}'' = e^y$, $z_{yy}'' = x e^y$. 1226.

$z_{xx}'' = -4x$, $z_{yy}'' = 6$. 1227. $u_{xx}'' = y^3 e^{xy^2}$, $u_{xy}'' =$

$\frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^3}$; $z_{xy}'' = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$, $z_{yy}'' = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}$. 1227. $u_{xx}'' = y^3 e^{xy^2}$,

$$\begin{aligned}
u_{xy}'' = u_{yx}'' = 2(1 + xyz)e^{xyz}; u_{xz}'' = u_{zx}'' = y(1 + xyz)e^{xyz}; u_{yz}'' = u_{zy}'' = x(1 + xyz)e^{xyz}; u_{yy}'' = x^2 z^2 e^{xyz}; u_{zz}'' = x^2 y^2 e^{xyz}. \quad 1228. z_{xx}'' = e^x \ln x - \frac{\sin y}{x^2}; z_{xy}'' = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}; z_{yy}'' = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \cdot \ln x. \quad 1229. z_{xx}'' = -y^2 \cos xy; z_{xy}'' = -xy \cos xy - \sin xy; z_{yy}'' = -x^2 \cos xy. \quad 1230. u_{xx}'' = u_{yy}'' = u_{zz}'' = 0; u_{xy}'' = u_{yz}'' = u_{zx}'' = 1. \quad 1232. d^2 z = 0. \quad 1233. d^2 z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy; d^2 z = \frac{2y}{x^2} dx^2 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy. \quad 1234. d^2 z = e^{x+y^2} (dx^2 + 4y dx dy + (2 + 4y^2) dy^2). \quad 1235. d^2 z = 2 \sin 2y dx dy + 2x \cos 2y 2dy^2. \quad 1236. f_{xx}''(0; 1) = 6; f_{xy}''(-1; 1) = 30; f_{yy}''(2; 0) = 0. \quad 1237. f_{xx}''(0; 0) = m(m-1), f_{xy}''(0; 0) = mn; f_{yy}''(0; 0) = n(n-1). \quad 1238. d^2 f(1; 2) = 6 dx^2 + 2 dx dy + 4,5 dy^2. \quad 1243. u(x; y) = \varphi(x) + \psi(y). \quad 1244. u(x; y) = x \varphi(y) + \psi(y). \quad 1245. f(x; y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2. \quad 1246. f(x; y) = y + xy + \frac{3x^2 y - y^2}{3!}. \quad 1247. e^{x+y} = 1 + ((x-1) + (y+1)) + \frac{((x-1) + (y+1))^2}{2!} + \frac{((x-1) + (y+1))^3}{3!} + \dots \quad 1248. f(x; y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \text{ деб олиб, } M_0(1; 1) \text{ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг. } (0,95)^{2,01} \approx 0,902. f(x; y) = y^x \text{ деб, олиб, } M_0(2; 1) \text{ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг. } 1250. z = x + 2y - 2; \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}. \quad 1251. 8x - 8y - z = 4; \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}. \quad 1252. x - 2y + 3z = 6; \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-11}{3}. \quad 1253. x + 2y = 4; \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}. \quad 1254. z = -x + \pi y; \frac{x-\pi}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}. \quad 1255. M_1(6; -24; 8), M_2(-6; 24; -8). \text{ Сиртнинг } (x_0; y_0; z_0) \text{ нуктасида сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси } x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0) + z_0(z-z_0) = 0 \text{ ёки } x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4 \text{ бўлади. Икки текислиكنинг параллеллик шартига асосан } \frac{x_0}{3} = \frac{x_0}{-12} = \frac{z_0}{4} = \lambda \text{ бўлади, бундан } x_0 = 3\lambda, y_0 = -12\lambda, z_0 = 4\lambda \text{ ларни сфера тенгламасига қўйсак, } \lambda = \pm 2 \text{ келиб чиқади ва изланган нукта топилади. } 1256. 2x + 2y + z = 6. \quad 1257. \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{-5}; O(0; 0; 0) \text{ нуктада нормал аниқланмаган. } 1264. z_{\min}(1; 0) = 0. \quad 1265. z_{\min}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 4. \quad 1266. \text{ Экстремумга эга эмас. } 1267.
\end{aligned}$$

$(1; 0) = -1$. 1268. Экстремумга эга эмас. 1269. $z_{\min}(\sqrt{3}; \sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$, $z_{\max}(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. 1270. $z_{\max}(4; -2) = 1271$. $z_{\max}(-1; -1) = -3$. 1272. $z_{\max}(4; 4) = 12$. 1273. $(-2; 0) = -\frac{2}{e}$. 1274. $z_{\min}(2; 1) = -28$, $z_{\max}(-2; -1) = 28$.
 $z_{\max}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. 1276. $z_{\min}(1; 1) = 2$. 1277. $z_{\max}(1; 2) = z_{\min}(-1; -2) = -5$. 1278. $z_{\min}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$. 1279. $x = \frac{v}{2\pi}$, $y = 2\sqrt{\frac{v}{2\pi}}$. x — цилиндр асосининг радиуси, y — цилиндр қилиги. Маълумки, цилиндр сиртининг юзи $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, $v = \pi x^2 y$. $x^2 y$ шартда $S = f(x; y) = 2\pi(x^2 + xy)$ функцияни экстремумга эриши керак. Ерданчи Лагранж функциясини $F = 2\pi(x^2 + xy) + (\pi x^2 y - v)$ кўринишда олинг. 1280. Энг катта қиймати $z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, энг кичик қиймати $z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$. $z'_x = 1 \neq 0$ бўлгани учун берилган функция энг катта ва энг кичик натижаларига соҳанинг чегарасида эришиши мумкин. $x^2 + y^2 = 1$ айланаси параметрик кўринишда $\left. \begin{matrix} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{matrix} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi$ бўлади. У ҳолда $z = \cos t + \sin t$, $z'_t = -\sin t + \cos t = 0$ дан $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$; $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1281. $z_{\text{кат. қ.}}(0; 1) = 3$. 1282. $z_{\text{кат. қ.}}(4; 4) = 128$, $z_{\text{кич. қ.}}(0; 0) = -4$. 1283. Энг катта қий-
 1 , энг кичик қиймати -1 . 1284. $z_{\text{кат. қ.}}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}$; $z_{\text{кич. қ.}}(1; 2) = -2$. 1285. $z_{\text{кат. қ.}}(4; 0) = z(0; 4) = 91$, $z_{\text{кич. қ.}}(3; 3) = 0$. 1286. $x = y = z = \frac{a}{3}$, $\frac{a^2}{27}$. Изланаётган қўши-
 x , y , $a - x - y$ бўлсин. Бу ҳолда қўйилган масала $z = xy(a - x - y)$ функциянинг максимумини излашга келтирилади. 1287. Тенг
 $2p - x - y$. 1288. $M_0(\sqrt{5}; 1)$, $M_1(-\sqrt{5}; 1)$, $x^2 - y^2 - 4 = 0$ шартда $z = d^2 = x^2 + (y - 2)^2$ функцияни минимумга текширинг. 1289. $\sqrt{20}$.

АДАБИЁТ

1. Г. И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. «Высшая школа», М., 1961.
2. Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах.
3. П. Е. Дюбюк, Г. И. Кручкович и др. Сборник задач к курсу высшей математики для вузов. «Высшая школа», М., 1963.
4. А. Ф. Хикматов, У. Т. Тошметов, К. Карашев. Математик анализдан машқлар ва масалалар туплами, «Ўқитувчи», Т., 1987.
5. Н. Я. Виленкин, Н. С. Куницкая, А. Г. Мордкович. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. «Просвещение», М., 1978.
6. Н. Я. Виленкин, Н. С. Куницкая, А. Г. Мордкович. Математический анализ. Интегральное исчисление. «Просвещение», М., 1979.
7. Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович и др. Задачи и упражнения по математическому анализу, для вузов. «Наука», М., 1972.
8. Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. «Просвещение», М., 1973.
9. Л. А. Кутузов. Сборник заданий по высшей математике. «Высшая школа» М., 1983.
10. В. Ф. Бутузов, Н. У. Крутицкая и др. Математический анализ в вопросах и задачах. «Высшая школа» М., 1984.
11. Г. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. «Наука» М., 1985.
12. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. ч. 2, «Просвещение», М., 1968.

МУНДАРИЖА

боши	3
6. Математик анализга кириш	4
1-§. Тўпламлар. Ҳақиқий сон ва унинг модули	4
2-§. Функция ва унинг аниқланиш соҳаси	7
3-§. Функцияларнинг композицияси. Жуфт ва тоқ функциялар	11
4-§. Даврий функциялар. Монотон функциялар	14
5-§. Нуқталарга кўра функция графигини яшаш	17
6-§. Бирор функция графигини силжитиш ва деформациялаш билан бошқа функция графигини яшаш	22
7-§. Сонли кетма-кетлик лимити	26
8-§. Функция лимити	30
9-§. Чексиз кичраювчи функциялар ва лимитлар ҳақидаги теоремалар	35
10-§. Лимитларни ҳисоблаш йўллари	37
11-§. Ўзлуксиз функциялар. Функцияларнинг ўзилиш нуқталари	50
6 б. Комплекс сонлар	56
1-§. Комплекс сонлар ва улар устида арифметик тўрт амал	56
2-§. Комплекс соннинг геометрик тасвири ва унинг тригонометрик шакли. Муавр формуласи	59
3-§. Эйлер формуласи. Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли	65
6 б 6. Бир аргументли функциянинг дифференциал ҳисоби	67
1-§. Ҳосила тушунчаси	67
2-§. Юқори тартибли ҳосилалар	77
3-§. Ошқормас ва параметрик ҳолда берилган функцияларнинг ҳосилалари	78
4-§. Ҳосиланинг татбиқи	82
1. Ҳосиланинг геометрик маъноси	82
2. Ҳосиланинг механик маъноси	83
5-§. Функция дифференциали	88
6-§. Лопиталь қондаси ва унинг функция лимитини топишга татбиқи	92
7-§. Тейлор формуласи ва унинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи	97
8-§. Функцияларнинг монотонлик шarti. Экстремумлар	104
9-§. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Бурилиш нуқтаси. Асимптоталар	120
	383

10- §. Функцияни умумий усулда текшириш ва унинг гра- фигини яшаш	1
IV б о б. Аниқмас интеграллар	12
1- §. Бошлангич функция ва аниқмас интеграл. Асосий ин- теграллар жадвали	12
2- §. Квадрат учҳадни ўз ичига олган функцияларнинг ин- теграллари	15
3- §. Рационал функцияларни интеграллаш	16
4- §. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш	17
5- §. Тригонометрик ва гиперболик функцияларни инте- граллаш	17
V б о б. Аниқ интеграл	18
1- §. Аниқ интеграл ва унинг хоссалари	18
2- §. Аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш	19
3- §. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш	19
VI б о б. Аниқ интегралнинг татбиқлари	20
1- §. Аниқ интеграл ёрдамида йиғиндининг лимитини то- пиш	20
2- §. Ясси фигуралар юзларини ҳисоблаш	20
3- §. Ей узунлигини ҳисоблаш	21
4- §. Ҳажмларни ҳисоблаш	22
5- §. Айланма жисм сиртининг юзи	23
6- §. Моментларни ҳисоблаш. Оғирлик марказининг коор- динаталари. Гульдин теоремалари	23
7- §. Физик масалаларни ечишда аниқ интегралнинг тат- биқи	24
8- §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш	25
9- §. Хосмас интеграллар	26
VII б о б. Қаторлар	27
1- §. Сонли қаторлар	27
2- §. Функционал қаторлар	28
VIII б о б. Кўп ўзгарувчили (аргументли) функциялар	31
1- §. Асосий тушунчалар	31
2- §. Хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар. Мураккаб ва ошкормас функция ҳосилалари	32
3- §. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифферен- циаллар. Тейлор формуласи. Сиртга ўтказилган урин- ма текислик ва нормал тенгламаси	33
4- §. Кўп ўзгарувчили функцияларнинг экстремумлари	34
Жавоблар	35
Адабиёт	38