

62-25

517
А-36

Т АЗЛАРОВ
Х МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

2

ЎЗБЕКИСТОН



517

A-36

**Т. АЗЛАРОВ
Ҳ. МАНСУРОВ**

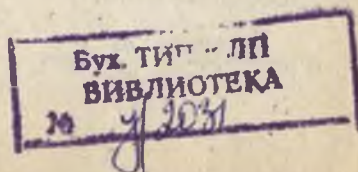
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

2

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
ниверситетларнинг ва педагогика институтларининг талабалари
учун дарслик сифатида рухсат этган*

Қайта ишланган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1995



см»
ав-
миз
ра-
зни

иал
зга-
йк-
ана
ми-

уда
нк-
зо).
ма-

ирт
ам-
иш
ла-
на-
аги
ёни
к.

ўз
ев,
ов,
ида

лни
рга

иар

22.161

А 36

Тақризчилар: Самарқанд давлат университети математик анализ кафедраси, ЎзРФА мухбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор *А. С. Саъдуллаев*, физика-математика фанлари доктори, профессор *Х. Р. Латипов*

Муҳаррир: *А. Ҳакимжонова*

ISBN 5-640-01507-1

А $\frac{1602070000-05}{М 351 (04) 95}$ 95

© «ЎҚИТУВЧИ» нашриёти, 1989 й.

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти. 1995 й.

СЎЗ БОШИ

Ушбу дарслик 1993 йили нашр этилган «Математик анализ, 1-қисм» китобимизнинг давоми бўлиб, мазкур курснинг қолган анъанавий мавзуларини ўз ичига олади. Дарсликни ёзишдаги асосий қоидаларимиз 1-қисмга ёзилган сўз бошида келтирилган, 2-қисмни тайёрлаш жараёнида улар деярли ўзгаргани йўқ. Фақат қуйидаги мулоҳазаларимизни қўшимча қилишни лозим топамиз.

Дарслик кўп ўзгарувчилик функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби баёнидан бошланади. Маълумки, бир ўзгарувчилик ва кўп ўзгарувчилик функциялар учун дифференциал ҳисоб масалаларининг қўйилиши ва ечилиши орасида ўхшашликлар ва тафовутлар бор. Биз ана шу ўхшашликлар ва тафовутларни бутун дифференциал ҳисоб давомида яққолроқ таъкидлашга ҳаракат қилдик.

Баъзи мавзуларга одатдагидан кўпроқ эътибор берилиб, улар жуда батафсил баён қилинди (масалан, каррالي ва такрорий лимитлар, функционал қаторларнинг текис ва нотекис яқинлашувчилиги ва ҳоказо). Бу ўринда шу мавзуларнинг мавжуд адабиётларда етарлича ёритилмаганлигини ҳисобга олдик.

Айни пайтда баъзи мавзуларга, масалан, каррالي интеграллар, сирт интеграллари, эгри чизиқли интеграллар мавзуларига одатдагидан камроқ эътибор берилиб, улар қисқароқ баён этилди. Шунинг ҳам айтиш керакки, эгри чизиқ, сирт, жисм каби тушунчалар геометрия курсларида тўла баён этилишини ҳисобга олиб, биз уларнинг математик анализ курси учун зарур бўлган ўринларинигина келтирдик. Юқоридаги интеграллар тушунчаларининг киритилиши ва ўрганилиши жараёни бир-бирига ўхшаш бўлганлиги учун ҳам уларга кам ўрин ажратдик.

Дарсликнинг илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз хиссаларини қўшганликлари учун профессорлар А. С. Саъдуллаев, Х. Р. Латипов, доцентлар М. Зоҳиров, Э. Х. Яқубов, Б. Наимжонов, А. Ворисов, Р. Ғанихўжаевларга, шунингдек, уни нашрга тайёрлашда қатнашган А. Умаров (ТошДУ) га миннатдорчилик билдирамыз.

Дарсликдаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга ўз миннатдорчилигимизни билдирамыз.

Муаллифлар

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ, УЗЛУКСИЗЛИГИ

«Математик анализ» курсининг 1-қисмида бир ўзгарувчилик функциялар батафсил ўрганилди.

Математика, физика, техника ва фаннинг бошқа гурли тармоқларида шундай функциялар учрайдики, улар кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, доиравий цилиндрнинг ҳажми

$$V = \pi \cdot r^2 h \quad (12.1)$$

икки ўзгарувчи: r — радиус ҳамда h — баландликка боғлиқ.

Ток кучи

$$I = \frac{E}{R} \quad (12.2)$$

ҳам икки ўзгарувчи: E — электр юритувчи куч ва R — қаршилликнинг функцияси бўлади. Бунда цилиндрнинг ҳажми (12.1) формула ёрдамида бир-бирига боғлиқ бўлмаган r ва h ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра, ток кучи (12.2) формула ёрдамида бир-бирига боғлиқ бўлмаган E ва R ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра топилади. Шунга ўхшаш мисолларни жуда кўплаб келтириш мумкин*. Бинобарин, кўп ўзгарувчилик функцияларни юқоридагидек чуқурроқ ўрганиш вазифаси туғилади.

Кўп ўзгарувчилик функциялар назариясида ҳам бир ўзгарувчилик функциялар назариясидагидек, функция ва унинг лимити, функциянинг узлуksизлиги ва ҳоказо каби тушунчалар ўрганилади. Бунда бир ўзгарувчилик функциялар ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдалана борилади.

Маълумки, бир ўзгарувчилик функцияларни ўрганишни уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) ўрганишдан бошлаган эдик. Кўп ўзгарувчилик функцияларни ўрганишни ҳам уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) баён этишдан бошлаймиз.

1-§. R^n фазо ва унинг муҳим тўпламлари

1. R^2 , R^3 фазолар. Ихтиёрий иккита A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан танишган эдик (қаралсин, 1-қисм, 1-боб, 1-§). Энди A ва B тўпламлар деб R тўпламни олайлик: $A = B = R$, Унда

$$A \times B = R \times R = \{(x_1, x_2): x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

бўлади.

* Сирасини айтганда, аслида табиатда, фан тармоқларида, кундалик ҳаётда деярли ҳамма вақт кўп ўзгарувчилик функцияларни учратамиз. Аммо, биз аввал соддалик учун бир ўзгарувчилик функцияларни муфассал ўрганган эдик ва математик анализнинг асосий масалаларини шу содда ҳол учун тушуниб етган эдик.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2): x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

тўплам R^2 тўплам деб аталади. Равшанки, R^2 тўплам элементлари жуфтликлар бўлади. Улар шу тўплам нуқталари деб юритилади. Одатда R^2 тўпламнинг нуқтаси битта ҳарф, масалан $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта x орқали белгиланади: $x = (x_1, x_2)$. Бунда x_1 ва x_2 сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи ва иккинчи координаталари дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$ нуқталар учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

Текисликда тўғри бурчакли Oxy Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда (абсцисса ўқда) x_1 ўзгарувчининг қийматлари, Oy ўқда (ордината ўқда) эса x_2 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда (x_1, x_2) жуфтлик текисликда координаталари x_1 ва x_2 бўлган $M(x_1, x_2)$ нуқтани ифодалайди (1-чизма).

Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилгани каби (қаралсин, 1-қисм, 2-боб, 10-§) R^2 тўплам нуқталари билан текислик нуқталари орасида ҳам ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Бу эса R^2 тўпламнинг геометрик тасвирини текислик деб қараш имконини беради. Юқорида R^2 тўпламнинг элементларини нуқта деб аталганининг босси ҳам шундандир. Аналитик геометрия курсида келтирилганидек, R^2 тўпламда (текисликда) икки нуқта орасидаги масофа тушуничасини киритиш мумкин. $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$ бўлсин.

12.1-таъриф. Ушбу

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

миқдор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа деб аталади. Киритилган $\rho(x, y)$ масофа қуйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^2$):

$$1^\circ. \rho(x, y) \geq 0 \text{ ва } \rho(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$2^\circ. \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

$$3^\circ. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

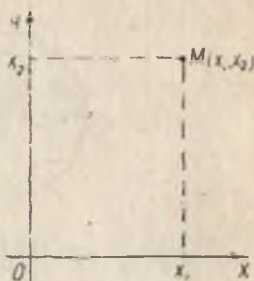
Бу хоссаларнинг исботи кейинги пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

Одатда R^2 тўплам R^2 фазо (икки ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади.

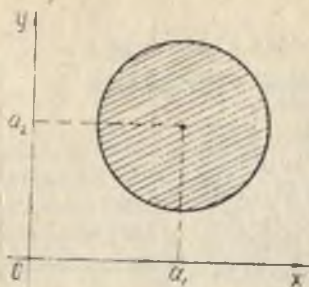
Энди R^2 фазонинг келгусида тез-тез учраб турадиган баъзи бир муҳим тўпламларини келтирамыз.

R^2 фазонинг $a = (a_1, a_2)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қуйидаги

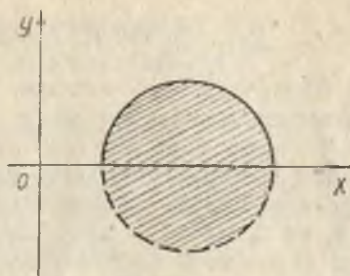
$$\{(x_1, x_2) \in R^2: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}, \quad (12.3)$$



1-чизма



2- чизма



3- чизма

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\} \quad (12.4)$$

тўпламлар мос равишда *доира* ҳамда *очиқ доира* деб аталади. Бунда a нуқта *доира маркази*, r эса *доира радиуси* дейилади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

тўплам *айлана* дейилади. Бу айлана (12.3) ва (13.4) доираларининг чегараси бўлади a нуқта айлана *маркази* ва r эса айлана *радиуси* дейилади.

(12.3) тўпламнинг геометрик тасвири 2-чизмада ифодаланган.

(12.3) тўпламда (доирада) доира чегараси шу тўпламга тегишли бўлади, (12.4) тўпламда эса (очиқ доирада) доира чегараси (12.4) тўпламга тегишли бўлмайди.

Очиқ доира ҳамда бу доира чегарасининг баъзи бир нуқталаридан иборат бўлган тўпламларни тузиб ҳам қараш мумкин. Масалан, 3-чизмада очиқ доира ҳамда унинг чегарасининг юқори ярим текисликда жойлашган нуқталаридан иборат тўплам келтирилган.

Масофа таърифидан фойдаланиб, доира ҳамда очиқ доираларни мос равишда қуйидаги

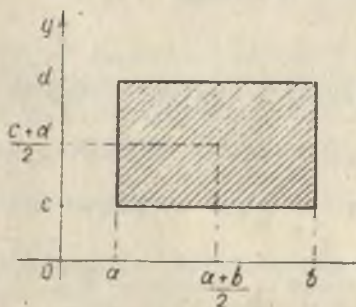
$$\{x \in R^2 : \rho(x, a) \leq r\}, \quad (12.3') \quad \{x \in R^2 : \rho(x, a) < r\} \quad (12.4')$$

тўпламлар деб ҳам қараш мумкин.

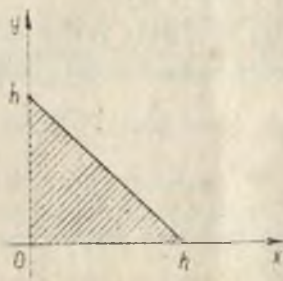
a, b, c, d — ҳақиқий сонлар ва $a < b, c < d$ бўлсин. Қуйидаги

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}, \quad (12.5)$$

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : a < x_1 < b, c < x_2 < d\} \quad (12.6)$$



4- чизма



5- чизма

тўпламлар, мос равишда *тўғри тўртбурчак* ҳамда *очиқ тўғри тўртбурчак* деб аталади. Бу (12.5) тўплам 4-чизмада *Оху* текисликдаги штрихланган соҳа сифатида тасвирланган.

Ушбу $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \in R^2$ нуқта (12.5) ва (12.6) *тўғри тўртбурчакнинг маркази* дейилади.

R^2 фазонинг ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 \geq 0; x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq h\} \quad (12.7)$$

нуқталаридан иборат тўплам (*икки ўлчовли*) *симплекс* деб аталади, бунда h — мусбат сон. Симплекс (simplex) латинча сўз бўлиб, у содда деган маънони англатади. (12.7) тўпламнинг геометрик тасвири 5-чизмада ифодаланган.

Энди R^3 фазо тушунчаси билан танишамиз. R^3 фазо ҳам юқоридаги R^2 фазо каби таърифланади. Иккита тўпламнинг Декарт кўпайтмаси каби ихтиёрий учта A, B, C тўпламнинг ҳам Декарт кўпайтмаси тушунчаси киритилади. Хусусан $A = B = C = R$ бўлганда

$$A \times B \times C = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

бўлади.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

тўплам R^3 *тўплам* деб аталади.

R^3 тўпламнинг элементи (x_1, x_2, x_3) учлик шу тўплам *нуқтаси* дейилади ва уни, одатда битта ҳарф, масалан, x орқали белгиланади: $x = (x_1, x_2, x_3)$. Бунда x_1, x_2 ва x_3 сонлар x нуқтанинг мос равишда *биринчи, иккинчи* ва *учинчи координаталари* дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2, x_3)$ ва $y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқталар учун $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

Фазода тўғри бурчакли *Оху*з Декарт координаталар системасини олайлик. *Ох* ўқда x_1 ўзгарувчининг қийматлари, *Оу* ўқда x_2 ўзгарувчининг қийматлари ва *Оз* ўқда x_3 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда (x_1, x_2, x_3) учлик фазода координаталари x_1, x_2 ва x_3 бўлган M нуқтани ифодалайди (6-чизма).

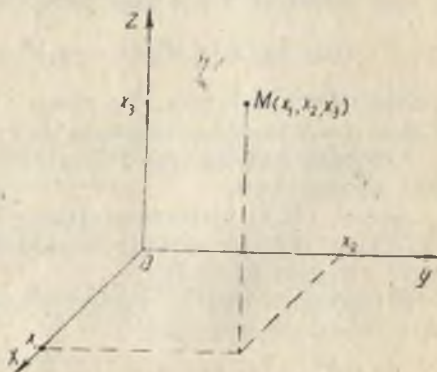
R^3 тўпламда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқталарни олайлик. Ушбу

$$\rho(x, y) =$$

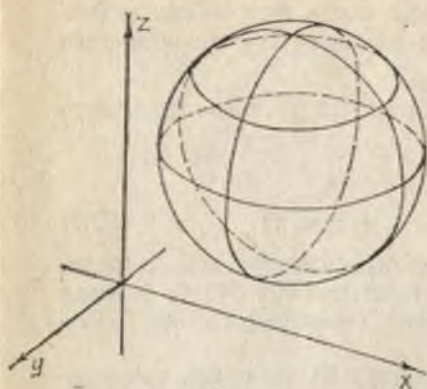
$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* деб аталади. Шу тарзда аниқланган масофа қуйидаги хосаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^3$):

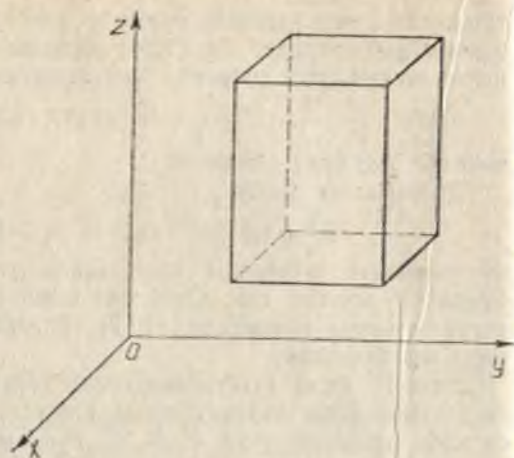
$$1^\circ. \rho(x, y) \geq 0 \text{ ва } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$



6-чизма



7- чизма



8- чизма

$$2. \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

$$3. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу хоссаларнинг исботи 2-пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

Юқорида келтирилган R^3 тўплам R^3 фазо (уч ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади.

Энди R^3 фазонинг муҳим тўпламларини келтирамыз.

R^3 фазонинг $a = (a_1, a_2, a_3)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қуйидаги

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq r^2\}, \quad (12.8)$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\} \quad (12.9)$$

тўпламлар мос равишда *шар* ҳамда *очиқ шар* деб аталади. Бунда a нуқта *шар маркази*, r эса *шар радиуси* дейилади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\}$$

тўплам *сфера* дейилади. Бу сфера (12.8), (12.9) шарларнинг чегараси бўлади a нуқта *сфера маркази* ва r эса *сфера радиуси* дейилади.

Юқорида келтирилган (12.8) тўпламнинг геометрик тасвири 7-чизмада ифодаланган.

Демак, (12.8) тўпламда (шарда) шар чегараси шу тўпламга тегишли бўлади, (12.9) тўпламда эса (очиқ шарда) шар чегараси (12.9) тўпламга тегишли бўлмайди.

R^3 фазодаги масофа тушунчасидан фойдаланиб, шар ва очиқ шарларни мос равишда ушбу

$$\{x \in R^3: \rho(x, a) \leq r\}, \quad (12.8') \quad \{x \in R^3: \rho(x, a) < r\} \quad (12.9')$$

тўпламлар сифатида ҳам аниқлаш мумкин.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d, l \leq x_3 \leq s\},$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: a < x_1 < b, c < x_2 < d, l < x_3 < s\}$$

тўплamlар (бунда a, b, c, d, l, s — ҳақиқий сонлар) мос равишда параллелепипед ҳамда очик параллелепипед деб аталади. Юқорида келтирилган параллелепипед 8-чизмада тасвирланган.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq h\}$$

тўплaм (уч ўлчооли) симплекс дейилади, бунда $h > 0$ — ўзгармас сон. Бу тўплaм 9-чизмада тасвирланган.

2. R^m фазо. m та $A_1, A_2, \dots, A_m$ тўплaмларнинг Декарт кўпайтмаси иккита A ва B тўплaмларнинг Декарт кўпайтмасига ўхшаш таърифланади. Агар $A_1 = A_2 = \dots = A_m = R$ бўлса, у ҳолда

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_m): x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

бўлади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m): x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

тўплaм R^m тўплaм деб аталади. R^m тўплaмнинг элементи $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ шу тўплaм нуқтаси дейилади ва у одатда битта ҳарф билан белгиланади: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Бунда $x_1, x_2, \dots, x_m$ сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи, $\dots$, m -координаталари дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ нуқталар учун $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

R^m тўплaмда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ нуқталарни олайлик.

Ушбу

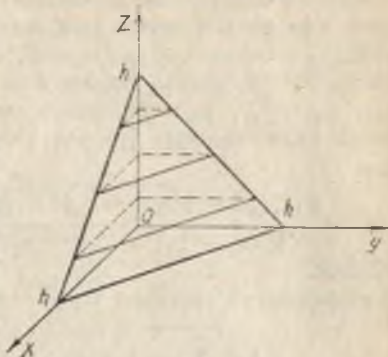
$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} \end{aligned} \quad (12.10)$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги масофа деб аталади. Бундай аниқланган масофа қуйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^m$):

1°. $\rho(x, y) \geq 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.



9-чизма

Бу хоссаларни исботлайлик. (12.10) муносабатдан $\rho(x, y)$ миқдорнинг ҳар доим манфий эмаслигини кўраминз. Агар $\rho(x, y) = 0$ бўлса, унда $y_1 - x_1 = 0$, $y_2 - x_2 = 0$, $\dots$, $y_m - x_m = 0$ бўлиб, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\dots$, $x_m = y_m$, яъни $x = y$ бўлади. Аксинча $x = y$, яъни $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\dots$, $x_m = y_m$ бўлса, у ҳолда яна (12.10) дан $\rho(x, y) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса 1°-хоссани исботлайди. (12.10) муносабатдан

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \rho(y, x)\end{aligned}$$

бўлади.

Масофанинг 3°-хоссаси ушбу

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (12.11)$$

тенгсизликка асосланиб исботланади, $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Аввало шу тенгсизликнинг тўғрилигини кўрсатайлик. Равшанки, $\forall x \in R$ учун

$$\sum_{i=1}^m (a_i x + b_i)^2 \geq 0.$$

Бундан x га нисбатан квадрат учҳаднинг манфий эмаслиги

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)x^2 + \left(2\sum_{i=1}^m a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^m b_i^2 \geq 0$$

келиб чиқади. Демак, бу квадрат учҳад иккита турли ҳақиқий илдиэга эга бўлмайди. Бинобарин, унинг дискриминанти

$$-\sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{i=1}^m b_i^2 + \left[\sum_{i=1}^m a_i b_i\right]^2 \leq 0$$

бўлиши керак. Бундан эса

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m a_i^2 + \sum_{i=1}^m b_i^2 + 2\sum_{i=1}^m a_i b_i &\leq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\right]^2 + \\ &+ \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}\right]^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}\end{aligned}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (12.11)$$

булиши келиб чиқади. Одатда (12.11) тенгсизлик Коши — Буняковский тенгсизлиги деб аталади.

Ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in R^m$ нуқталарни олиб, улар орасидаги масофани (12.10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2}, \\ \rho(y, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}, \\ \rho(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2}.\end{aligned}\tag{12.12}$$

Энди Коши — Буняковский тенгсизлиги (12.11) да

$$a_i = y_i - x_i, \quad b_i = z_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

деб олсак, унда

$$a_i + b_i = z_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

булиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}$$

булади. Юқоридаги (12.12) муносабатларни эътиборга олиб, топамиз:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу эса 3°-хоссани исботлайди. Одатда 3°-хосса билан ифодаланадиган тенгсизлик *учбурчак тенгсизлиги* (учбурчак бир томонининг узунлиги қолган икки томон узунликлари йиғиндисидан катта эмаслигини эътиборга олиб) деб юритилади*.

R^m тўпلام R^m фазо (*m* ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади. Энди R^m фазонинг баъзи бир муҳим тўпلامларини келтирамиз.

Бирор $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта ва $r > 0$ сонни олайлик. Қуйидаги

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 \leq r^2\},\tag{12.13}$$

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < r^2\},\tag{12.14}$$

яъни

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) \leq r\},\tag{12.13'}$$

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}\tag{12.14'}$$

* R^m фазонинг ихтиёрий иккита x, y ($x \in R^m, y \in R^m$) нуқталарни учун 1° — 3° шартларни қаноатлантирувчи функцияларни қўплаб топиш мумкин, яъни x, y нуқталар орасида «масофа» тушунчасини турлича киритиш мумкин (бу ҳақда 14-боб, 1-§ га қаранг).

тўпламлар мос равишда *шар* ҳамда *очиқ шар* деб аталади. Бунда a нуқта шар *маркази*, r эса шар *радиуси* дейилади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 = r^2\},$$

яъни

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

тўплам *сфера* деб аталади. Бу сфера (12.13) ва (12.14) тўпламларнинг чегараси бўлади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_m \leq x_m \leq b_m\}$$

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m\}$$

тўпламлар (бунда $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ — ҳақиқий сонлар) мос равишда *параллелепипед* ҳамда *очиқ параллелепипед* деб аталади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq h\}$$

тўплам (*м-ўлчовли*) *симплекс* деб аталади, бунда h — мусбат сон.

Юқорида келтирилган тўпламлар тез-тез ишлатилиб турилади. Улар ёрдамида муҳим тушунчалар, жумладан атроф тушунчаси таърифланади.

3. R^m фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар. Бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта ҳамда $\varepsilon > 0$ сонни олайлик.

12.2-таъриф. Маркази x^0 нуқтада, радиуси ε га тенг бўлган очиқ шар x^0 нуқтанинг *сферик атрофи* (*ε -атрофи*) дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}. \quad (12.15)$$

Нуқтанинг бошқача атрофи тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

12.3-таъриф. Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1 + \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} \quad (12.16)$$

очиқ параллелепипед x^0 нуқтанинг *параллелепипедиял атрофи* деб аталади ва $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ каби белгиланади.

Хусусан $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ бўлса, (12.16) очиқ параллелепипед кубга айланади ва уни $\bar{U}_\delta(x^0)$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, R^m фазода нуқтанинг икки хил атрофига таъриф берилди.

12.1-лемма. $x^0 \in R^m$ нуқтанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуқтанинг шундай $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиял атрофи мавжудки, бунда

$$\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

Шунингдек, x^0 нуқтанинг ҳар қандай $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиял атрофи олинганда ҳам ҳар доим шу нуқтанинг шундай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи мавжудки, бунда

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади.

Исбот. $x^0 \in R^m$ нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

берилган бўлсин. Бундаги $\varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи $\delta > 0$ сонни оламиз. Сўнг x^0 нуқтанинг ушбу

$$\bar{U}_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 + \delta, \dots, x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\}$$

параллелепипедиял атрофини тузамиз.

$x \in \bar{U}_\delta(x^0)$ бўлсин. Унда $|x_i - x_i^0| < \delta$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \delta^2} = \delta \sqrt{m}$$

бўлади. Юқоридаги $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизлиқни эътиборга олиб топамиз:

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon.$$

Демак, $\rho(x, x^0) < \varepsilon$. Бу эса $x \in U_\varepsilon(x^0)$ эканини билдиради. Шундай қилиб,

$$\forall x \in \bar{U}_\delta(x^0) \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^0),$$

яъни

$$\bar{U}_\delta(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

$x^0 \in R^m$ нуқтанинг

$$\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

параллелепипеднал атрофи берилган бўлсин. Унда

$$\varepsilon = \min \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

ни олиб x^0 нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

ни тузамиз.

$x \in U_\varepsilon(x^0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon \leq \delta_i, (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

бўлади. Демак,

$$|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \delta_i, (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Бундан эса $x \in \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\forall x \in U(x^0) \Rightarrow x \in \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

яъни

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади. Лемма исбот бўлди.

R^m фазода бирор G тўплам берилган бўлсин: $G \subset R^m$. Агар $x^0 \in G$ нуқтани олиб, ушбу $\delta = r - \rho(x^0, a)$ тенглик билан аниқланадиган δ сонини оламиз. Равшанки, $\delta > 0$ бўлади. Маркази x^0 нуқтада, радиуси δ бўлган

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \delta\}$$

Мисоллар. 1. Очиқ шар

$$A = \{x \in R^m: \rho(x, a) < r\}$$

нинг барча нуқталари унинг ички нуқтаси бўлади. Буни исботлайлик. $\forall x^0 \in A$ нуқтани олиб, ушбу $\delta = r - \rho(x^0, a)$ тенглик билан аниқланадиган δ сонини оламиз. Равшанки, $\delta > 0$ бўлади. Маркази x^0 нуқтада, радиуси δ бўлган

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \delta\}$$

очиқ шар x^0 нуқтанинг сферик атрофи бўлиб, юқоридаги A тўпламнинг қисми бўлади. Ҳақиқатан ҳам. $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$ бўлиб, масофанинг 3^о-хоссасига кўра

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, x^0) + \rho(x^0, a) < \delta + \rho(x^0, a) = r$$

бўлади. Демак, $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow x \in A$. Бу эса $U_\delta(x^0) \subset A$ эканлигини билдиради. Бундан A очиқ шарнинг ҳар бир нуқтаси ички нуқта эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$C = A \cup \{(r, 0, 0, \dots, 0), (0, r, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, r)\}$$

тўпламнинг нуқталари орасида унинг ички нуқтаси бўлмаган нуқталар бор. Масалан, $(r, 0, 0, \dots, 0) \in C$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon((r, 0, 0, \dots, 0))$ ($\varepsilon > 0$) сферик атрофини олганимизда ҳам, унга тегишли бўлган $(r + \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots, 0)$ нуқта C тўпламга тегишли бўлмайди.

12.4-таъриф. Тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, очиқ шар очиқ тўплам бўлади.

R^m фазода бирор F тўплам ва бирор x^0 нуқта берилган бўлсин: $F \subset R^m$, $x_0 \in R^m$.

12.5-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг исталган сферик атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ да F тўпламнинг x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси топилса, x^0 нуқта F тўпламнинг *лимит нуқтаси* деб аталади.

Ушбу $R^m \setminus \{x \in R^m : \rho(0, x) \leq \varepsilon\}$ очиқ тўплам ∞ «нуқта» нинг *атрофи* дейилади ($0 = (0, 0, \dots, 0)$).

Қаралаётган x^0 нуқтанинг ўзи F га тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин (қуйидаги 1-мисолга қаранг).

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг *ҳосилавий тўплами* дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг *ёпилмаси* дейилади ва у $\bar{F}$ каби белгиланади:

$$\bar{F} = F \cup F'.$$

Мисоллар. 1. Қуйидаги

$$A = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < r\}.$$

очиқ шарни қарайлик. Бу тўплам учун шу тўпламнинг барча нуқталари ҳамда ушбу

$$\{x \in R^m : \rho(x, x^0) = r\}$$

сферанинг ҳамма нуқталари лимит нуқта бўлади. Демак, A нинг ҳосилавий тўплами

$$A' = \{x \in R^m : \rho(x, x_0) \leq r\},$$

A нинг ёпилмаси $\bar{A} = A \cup A' = A'$ бўлади.

2. Шар

$$E = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) \leq r\}$$

нинг барча нуқталари шу тўпламнинг лимит нуқталаридир. Бунда

$$E' = E, \bar{E} = E$$

бўлади.

12.6-таъриф. $F \subset R^m$ тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Бу ҳолда $F' \subset F$, $F \cup F' = \bar{F} = F$.

Шар

$$E = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) \leq r\}$$

ёпиқ тўплам бўлади, чунки $E = \bar{E}$.

Бирор $M \subset R^m$ тўплами қарайлик. Равшанки, $R^m \setminus M$ айирма M тўплами R^m тўламга тўлдирувчи тўлам бўлади (қаралсин 1-қисм, 1-боб, 1-§).

12.7-таъриф. Агар x^0 ($x^0 \in R^m$) нуқтанинг исталган $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида ҳам M тўпламининг, ҳам $R^m \setminus M$ тўпламининг нуқталари бўлса, x^0 нуқта M тўпламининг *чегаравий нуқтаси* деб аталади. M тўпламининг барча чегаравий нуқталаридан иборат тўлам M тўпламининг *чегараси* дейилади ва уни одатда $\partial(M)$ каби белгиланади.

Бу тушунча ёрдамида ёпиқ тўплами қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

12.8-таъриф. Агар F ($F \subset R^m$) тўпламининг чегараси шу тўламга тегишли, яъни $\partial(F) \subset F$ бўлса, F *ёпиқ тўлам* деб аталади.

Ёпиқ тўпламининг юқорида келтирилган 12.6-ва 12.8-таърифлари эквивалент таърифлардир.

Бирор $M \subset R^m$ тўлам берилган бўлсин.

12.9-таъриф. Агар R^m фазода шундай шар

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}, \quad (0 = (0, 0, \dots, 0))$$

топилсаки, $M \subset U^0$ бўлса, у ҳолда M *чегараланган тўлам* деб аталади.

Маълумки, бирор $E \subset R$ тўлам берилган бўлиб, шундай ўзгармас ρ сони топилсаки, $\forall x \in E$ учун $|x| < \rho$, яъни E тўпламининг барча элементлари $(-\rho, \rho)$ интервалда жойлашса, E чегараланган тўлам деб аталар эди. Юқорида келтирилган таъриф $m=1$ бўлганда худди шу таърифнинг ўзи бўлади.

R^m фазодаги шар, параллелепипед, симплекслар чегараланган тўламлардир.

Ушбу

$$D^i = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$$

тўлам чегараланмаган тўлам бўлади, чунки R^m да ҳар қандай

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$$

шар олинганда ҳам ҳар доим D тўламда шундай нуқта, масалан, $(\alpha_1, 0, 0, \dots, 0)$ нуқта ($\alpha_1 > r$) топиладик, бу нуқта U^0 тўламга тегишли бўлмайди.

Маълумки,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} (a \leq t \leq b), \quad (12.17)$$

яъни $\{x(t), y(t)\}$ система (тўлам) R^2 фазода,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} (a \leq t \leq b), \quad (12.18)$$

яъни $\{x(t), y(t), z(t)\}$ система (тўлам) R^3 фазода эгри чизиқни ифодадалар эди, бунда $x(t), y(t)$, ҳамда $z(t) \in [a, b]$ сегментда узлуксиз функциялар. Хусусан, $x = \alpha_1 t + \beta_1$, $y = \alpha_2 t + \beta_2$, $z = \alpha_3 t + \beta_3$ ($-\infty < t < +\infty$), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — ҳақиқий сонлар ва α_1 ,

α_2, α_3 ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.17) ва (12.18) система мос равишда R^2 ва R^3 фазоларда тўғри чизиклар бўлади. Ана шу тушунчаларга ўхшаш, R^m фазода ҳам эгри чизик ҳамда тўғри чизик тушунчалари киритилади.

Фараз қилайлик, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))\} \quad (a \leq t \leq b) \quad (12.19)$$

система ёки нуқталар тўплами R^m фазода эгри чизик деб аталади. Хусусан, $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \dots, x_m = \alpha_m t + \beta_m$ ($-\infty < t < +\infty, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — ҳақиқий сонлар ва $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.19) система R^m фазода тўғри чизик дейилади. R^m фазода ихтиёрий иккита $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ ва $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ нуқтани олайлик. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизик қуйидаги

$$\{(x'_1 + t(x'_1 - x''_1), x'_2 + t(x'_2 - x''_2), \dots, x'_m + t(x'_m - x''_m))\} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (12.20)$$

система билан ифодаланади. Бунда $t=0$ ва $t=1$ бўлганда R^m фазонинг мос равишда x' ва x'' нуқталари ҳосил бўлиб, $0 \leq t \leq 1$ бўлганда (12.20) система R^n фазода x' ва x'' нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси бўлади.

R^m фазода чекли сондаги тўғри чизик кесмаларини бирин-кетин бирлаштиришдан ташкил топган чизик синиқ чизик деб аталади.

$M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.10-таъриф. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштирувчи шундай синиқ чизик топилсаки, у M тўпламга тегишли бўлса, M боғламли тўплам деб аталади.

Мисоллар. 1. R^m фазодаги параллелепипед, шар, симплекслар боғламли тўпламлар бўлади.

2. R^m фазонинг иккита x' ва x'' нуқталаридан ташкил топган $\{x', x''\}$ тўплам ($\{x', x''\} \subset R^m$) боғламли тўплам бўлмайди, чунки бу нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизик $\{x', x''\}$ тўпламга тегишли эмас.

12.11-таъриф. Агар $M \subset R^n$ тўплам очик ҳамда боғламли тўплам бўлса, у соҳа деб аталади.

R^m фазодаги очик параллелепипед, очик шар, очик симплекслар R^m фазодаги соҳалар бўлади.

2-§. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Натурал сонлар тўплами N ва R^m фазо берилган бўлиб, f ҳар бир n ($n \in N$) га R^m фазонинг бирор муайян $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m$ нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \rightarrow R^m \text{ ёки } n \rightarrow x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).$$

Бирор $M \subset R^m$ тўпلامي қарайлик. Равшанки, $R^m \setminus M$ айирма M тўпلامي R^m тўпламга тўлдирувчи тўплам бўлади (қаралсин 1-қисм, 1-боб, 1-§).

12.7-таъриф. Агар x^0 ($x^0 \in R^m$) нуқтанинг исталган U_ϵ (x^0) атрофида ҳам M тўпلاميнинг, ҳам $R^m \setminus M$ тўпلاميнинг нуқталари бўлса, x^0 нуқта M тўпلاميнинг *чегаравий нуқтаси* деб аталади. M тўпلاميнинг барча чегаравий нуқталаридан иборат тўплам M тўпلامي *чегараси* дейилади ва уни одатда $\partial(M)$ каби белгиланади.

Бу тушунча ёрдамида ёпиқ тўпلامي қуйндагича ҳам таърифлаш мумкин.

12.8-таъриф. Агар F ($F \subset R^m$) тўпلامي *чегараси* шу тўпламга тегишли, яъни $\partial(F) \subset F$ бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Ёпиқ тўпلامي *юқорида* келтирилган 12.6-ва 12.8-таърифлари эквивалент таърифлардир.

Бирор $M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.9-таъриф. Агар R^m фазода шундай шар

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}, \quad (0 = (0, 0, \dots, 0))$$

топилсаки, $M \subset U^0$ бўлса, у ҳолда M *чегараланган тўплам* деб аталади.

Маълумки, бирор $E \subset R$ тўплам берилган бўлиб, шундай ўзгармас ρ сони топилсаки, $\forall x \in E$ учун $|x| < \rho$, яъни E тўпلامي *барча элементлари* $(-\rho, \rho)$ интервалда жойлашса, E *чегараланган тўплам* деб аталар эди. Юқорида келтирилган таъриф $m = 1$ бўлганда худди шу таърифнинг ўзи бўлади.

R^m фазодаги шар, параллеленипед, симплекслар чегараланган тўпламлардир.

Ушбу

$$D^1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$$

тўплам чегараланмаган тўплам бўлади, чунки R^n да ҳар қандай

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$$

шар олинганда ҳам ҳар доим D тўпламда шундай нуқта, масалан, $(a_1, 0, 0, \dots, 0)$ нуқта ($a_1 > r$) топиладики, бу нуқта U^0 тўпламга тегишли бўлмайди.

Маълумки,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} (a \leq t \leq b), \quad (12.17)$$

яъни $\{x(t), y(t)\}$ система (тўплам) R^2 фазода,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} (a \leq t \leq b), \quad (12.18)$$

яъни $\{x(t), y(t), z(t)\}$ система (тўплам) R^3 фазода эгри чизиқни ифода-лар эди, бунда $x(t), y(t)$, ҳамда $z(t) \in [a, b]$ сегментда узлуксиз функциялар. Хусусан, $x = \alpha_1 t + \beta_1$, $y = \alpha_2 t + \beta_2$, $z = \alpha_3 t + \beta_3$ ($-\infty < t < +\infty$), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — ҳақиқий сонлар ва $\alpha_1,$

α_2, α_3 ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.17) ва (12.18) система мос равишда R^2 ва R^3 фазоларда тўғри чизиклар бўлади. Ана шу тушунчаларга ўхшаш, R^m фазода ҳам эгри чизик ҳамда тўғри чизик тушунчалари киритилади.

Фараз қилайлик, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))\} \quad (a \leq t \leq b) \quad (12.19)$$

система ёки нуқталар тўплами R^m фазода эгри чизик деб аталади. Хусусан, $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \dots, x_m = \alpha_m t + \beta_m$ ($-\infty < t < +\infty, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — ҳақиқий сонлар ва $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.19) система R^m фазода тўғри чизик дейилади. R^m фазода ихтиёрий иккита $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ ва $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ нуқтани олайлик. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизик қуйидаги

$$\{(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), x'_2 + t(x''_2 - x'_2), \dots, x'_m + t(x''_m - x'_m))\} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (12.20)$$

система билан ифодаланади. Бунда $t=0$ ва $t=1$ бўлганда R^m фазонинг мос равишда x' ва x'' нуқталари ҳосил бўлиб, $0 \leq t \leq 1$ бўлганда (12.20) система R^m фазода x' ва x'' нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси бўлади.

R^m фазода чекли сондаги тўғри чизик кесмаларини бирин-кетин бирлаштиришдан таниқил топган чизик синик чизик деб аталади.

$M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.10-таъриф. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштирувчи шундай синик чизик топилсаки, у M тўпламга тегишли бўлса, M боғламли тўплам деб аталади.

Мисоллар. 1. R^m фазодаги параллелепипед, шар, симплекслар боғламли тўпламлар бўлади.

2. R^m фазонинг иккита x' ва x'' нуқталаридан ташкил топган $\{x', x''\}$ тўплам ($\{x', x''\} \subset R^m$) боғламли тўплам бўлмайди, чунки бу нуқталарни бирлаштирувчи синик чизик $\{x', x''\}$ тўпламга тегишли эмас.

12.11-таъриф. Агар $M \subset R^n$ тўплам очик ҳамда боғламли тўплам бўлса, у соҳа деб аталади.

R^m фазодаги очик параллелепипед, очик шар, очик симплекслар R^m фазодаги соҳалар бўлади.

2-§. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Натурал сонлар тўплами N ва R^m фазо берилган бўлиб, f ҳар бир n ($n \in N$) га R^m фазонинг бирор муайян $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m$ нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \rightarrow R^m \text{ ёки } n \rightarrow x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).$$

тенгсизлик бажарилса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow a$$

каби белгиланади.

1-§ да келтирилган a нуқтанинг ϵ -атрофи таърифини эътиборга олиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича ҳам таърифласа бўлади.

12.13-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\epsilon(a)$ атрофи олинганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Агар (12.21) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади.

Лимит таърифидаги шартни қаноатлантирувчи a мавжуд бўлмаса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас дейилади, кетма-кетликнинг ўзи эса *узоқлашувчи* деб аталади.

Шунга эътибор бериш керакки, кетма-кетликнинг лимити таърифидаги ϵ ихтиёрий мусбат сон бўлиб, изланаётган n_0 ($n_0 \in N$) эса шу ϵ га (ва, табиийки, қаралаётган кетма-кетликка) боғлиқ равишда топилади.

Мисоллар. 1. R^m фазода ушбу $\{x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})\}$ кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \dots, 0)$ бўлиши кўрсатилсин. $\forall \epsilon > 0$ сонни олайлик. Шу ϵ га кўра $n_0 = \left\lceil \frac{\sqrt{m}}{\epsilon} \right\rceil + 1$ ни топамиз. Натижада барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \dots, 0)\right) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left\lceil \frac{\sqrt{m}}{\epsilon} \right\rceil + 1} < \epsilon$$

$< \epsilon$ бўлади. Демак, таърифга кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = (0, 0, \dots, 0) = a$$

бўлади.

2. Қуйидаги $\{x^{(n)}\} = \{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$;

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Тескарсини фарз қилайлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a = (a_1, a_2)$ га тенг бўлсин. Лимит таърифига кўра $\forall \epsilon > 0$, жумладан $\epsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\rho((1, 1), (a_1, a_2)) < \epsilon, \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) < \epsilon$$

бўлади. Бу эса ушбу

$$2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1, 1)) \leq \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) + \rho((a_1, a_2), (1, 1)) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб қаралаётган кетма-кетликнинг лимитга эга де-йилишидир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Бу акслантиришни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$1 \rightarrow x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}),$$

$$2 \rightarrow x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}),$$

$$3 \rightarrow x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots, x_m^{(3)}),$$

.....

$$n \rightarrow x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).$$

.....

$f: N \rightarrow R^m$ акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}, \dots\} \quad (12.21)$$

тўплам *кетма-кетлик* деб аталади ва у $\{x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Ҳар бир $x^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) ни *кетма-кетликнинг ҳади* дейилади. Демак, (12.21) кетма-кетлик ҳадлари R^m фазо нуқталаридан иборат.

Шуни таъкидлаш керакки, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг мос координаталаридан тузилган $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, $\dots$, $\{x_m^{(n)}\}$ лар сонли кетма-кетликлар бўлиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликни шу m та кетма-кетликнинг (маълум тартибдаги) биргаликда қаралиши деб ҳисоблаш мумкин.

Кетма-кетликларга мисоллар келтирайлик.

$$1. x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right): (1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \dots$$

$$2. x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, 0\right): (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \dots$$

$$3. x^{(n)} = \left(0, \frac{1}{n}\right): (0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \dots$$

$$4. x^{(n)} = ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}): (1, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots$$

$$5. x^{(n)} = (1, n): (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots$$

Бу келтирилган кетма-кетликлар R^2 фазо нуқталаридан ташкил топган кетма-кетликлардир.

1. Кетма-кетликнинг лимити. Энди (12.21) кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз. R^m фазода кетма-кетликнинг лимити тушунчаси ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимити тушунчасига ўхшаш киритилади.

R^m фазода бирор

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (12.21)$$

кетма-кетлик ҳамда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта берилган бўлсин.

12.12-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon \quad (12.22)$$

тенгсизлик бажарилса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow a$$

каби белгиланади.

1-§ да келтирилган a нуқтанинг ϵ -атрофи таърифини эътиборга олиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича ҳам таърифласа бўлади.

12.13-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\epsilon(a)$ атрофи олинганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, $a \{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Агар (12.21) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади.

Лимит таърифидаги шартни қаноатлантирувчи a мавжуд бўлмаса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас дейилади, кетма-кетликнинг ўзи эса *узоқлашувчи* деб аталади.

Шунга эътибор бериш керакки, кетма-кетликнинг лимити таърифидаги ϵ ихтиёрий мусбат сон бўлиб, изланаётган n_0 ($n_0 \in N$) эса шу ϵ га (ва, табиийки, қаралаётган кетма-кетликка) боғлиқ равишда топилади.

Мисоллар. 1. R^m фазода ушбу $\{x^{(n)} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \dots, 0)$ бўлиши кўрсатилсин. $\forall \epsilon > 0$ сонни олайлик. Шу ϵ га кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\epsilon} \right] + 1$ ни топамиз. Натижада барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \dots, 0)\right) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\epsilon} \right] + 1} < \epsilon$$

$< \epsilon$ бўлади. Демак, таърифга кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = (0, 0, \dots, 0) = a$$

бўлади.

2. Қуйидаги $\{x^{(n)}\} = \{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$;

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a = (a_1, a_2)$ га тенг бўлсин. Лимит таърифига кўра $\forall \epsilon > 0$, жумладан $\epsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ топилардики, барча $n > n_0$ учун

$$\rho((1, 1), (a_1, a_2)) < \epsilon, \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) < \epsilon$$

бўлади. Бу эса ушбу

$$2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1, 1)) \leq \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) + \rho((a_1, a_2), (1, 1)) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб қаралаётган кетма-кетликнинг лимитга эга дейилишидир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

R^m фазода $\{x^{(n)} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, у $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ лимитга эга бўлсин. У ҳолда лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлиكنинг бирор n_0 -ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

сферик атрофига тегишли бўлади. Бу сферик атроф ушбу бобнинг 1-§ даги 12.1-леммага мувофиқ шу a нуқтанинг $\tilde{U}_\varepsilon(a)$ параллелепипеднал атрофининг қисми бўлади:

$$U_\varepsilon(a) \subset \tilde{U}_\varepsilon(a).$$

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлиكنинг ўша n_0 -ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг $\tilde{U}_\varepsilon(a)$ атрофида ётади, яъни барча $n > n_0$ учун

$$x^{(n)} \in \tilde{U}_\varepsilon(a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \varepsilon + \varepsilon, \dots, a_m - \varepsilon < x_m < a_m + \varepsilon\}$$

бўлади. Бундан эса, барча $n > n_0$ учун

$$a_1 - \varepsilon < x_1^{(n)} < a_1 + \varepsilon,$$

$$a_2 - \varepsilon < x_2^{(n)} < a_2 + \varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_m - \varepsilon < x_m^{(n)} < a_m + \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \dots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m$$

эканлигини билдиради.

Шундай қилиб, R^n фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлиكنинг лимити $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлиكنинг координаталаридан ташкил топган сонлар кетма-кетликлари $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ ҳам лимитга эга бўлиб, улар мос равишда a нуқтанинг $a_1, a_2, \dots, a_m$ координаталарига тенг.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m. \end{cases} \quad (11.23)$$

Энди R^m фазода кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, уларнинг лимитлари мос равишда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта координаталари $a_1, a_2, \dots, a_m$ ларга тенг бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m.$$

Лимит таърифига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(1)}$ учун

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

шундай $n_0^{(2)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(2)}$ учун

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

ва ҳоказо, шундай $n_0^{(m)} \in \omega$ топиладики, барча $n > n_0^{(m)}$ учун

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

бўлади. Агар $n_0 = \max \{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. У ҳолда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

эканини билдиради.

Демак, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитлари мос равишда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта координаталари $a_1, a_2, \dots, a_m$ ларга тенг бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити юқоридаги таъриф маъносида шу a нуқта бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} &= a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} &= a_2, \\ \dots &\dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} &= a_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a. \quad (12.24)$$

Юқоридаги (12.23) ва (12.24) муносабатлардан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{cases}$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз:

12.1-теорема. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ га интилиши

$$x^{(n)} \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty \text{ да})$$

учун $n \rightarrow \infty$ да бир йўла

$$x_1^{(n)} \rightarrow a_1,$$

$$x_2^{(n)} \rightarrow a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m^{(n)} \rightarrow a_m$$

бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги 2-мисолда қаралган $\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги ушбу теоремадан дарров келиб чиқади.

Бу теорема R^m фазода кетма-кетликнинг лимитини ўрганишни сонли кетма-кетликларнинг лимитини ўрганишга келтирилишини ифода-лайди. Маълумки, «Математик анализ» курсининг 1-қисм, 3-бобида сонлар кетма-кетлиги на унинг лимити батафсил ўрганилган. Шунини

эътиборга олиб, биз қуйида R^m фазода кетма-кетликлар лимитлари назариясининг баёнида асосий фактларнигина келтириш, уларнинг айрим-айримларининг исботлаш билан чегараланамиз.

Юқорида исбот этилган теорема ҳамда яқинлашувчи сонлар кетма-кетлигининг хоссаларидан R^m фазода яқинлашувчи кетма-кетликнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

1°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.

Кейинги хоссани келтиришдан аввал, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги тушунчаси билан танишамиз.

Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўпلام чегараланган бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* деб аталади.

R^m фазода $|x^{(n)}| = |(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})|$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра (12.9-таъриф) шундай шар $U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$ топиладики, $\forall n \in N$ учун $x^{(n)} \in U^0$ бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, 0) < r.$$

Кейинги тенгсизликдан эса

$$|x_1^{(n)}| < r, |x_2^{(n)}| < r, \dots, |x_m^{(n)}| < r \quad (\forall n \in N)$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, бу кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $|x_1^{(n)}|, |x_2^{(n)}|, \dots, |x_m^{(n)}|$ кетма-кетликларнинг ҳар бири ҳам чегараланган бўлар экан.

Энди $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири чегараланган бўлсин. Сонлар кетма-кетлигининг чегараланганлиги таърифига кўра (1-қисм, 3-боб, 2-§) шундай $C_1, C_2, \dots, C_m$ ўзгармас сонлар топиладики, $\forall n \in N$ учун

$$|x_1^{(n)}| < C_1,$$

$$|x_2^{(n)}| < C_2,$$

...

$$|x_m^{(n)}| < C_m$$

бўлади. Агар $C = \max \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ деб олсак. $|x_k^{(n)}| < C$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) бўлиб, ундан $\forall n \in N$ учун

$$\rho(x^{(n)}, 0) < C \sqrt{m}$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганлигидан $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқар экан.

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

12.2-теорема. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши учун бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликларининг ҳар бирининг чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Масалан, R^2 фазода $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик чегараланган бўлади, чунки бу кетма-кетлик координаталаридан иборат кетма-кетликларнинг ҳар бири чегаралангандир. R^2 фазода $\{(n, n)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетлик.

Юқорида келтирилган $(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$ кетма-кетлик ҳам чегараланган кетма-кетлик бўлади. Бу мисолдан кўринадики, чегараланган кетма-кетликлар лимитга эга бўлиши ҳам, лимитга эга бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

2°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амалларни ўрганишдан аввал R^m фазо элементлари устида бажариладиган амалларни келтирамыз.

R^m фазонинг иккита $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқтасини олайлик.

R^m фазонинг $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$ нуқтаси a ва b нуқталар *йиғиндиси* деб аталади ва $a + b$ каби белгиланади: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$.

R^m фазонинг $(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$ (α — ҳақиқий сон) нуқтаси α ҳақиқий сон билан $a \in R^m$ нуқта *кўпайтмаси* деб аталади ва αa каби белгиланади: $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$. R^m фазонинг a ва b нуқталари орасидаги айрма $a + (-1) \cdot b$ кўринишда аниқланади ва $a - b$ каби белгиланади: $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_m - b_m)$. Шундай қилиб, R^m фазо нуқталари устида қўшиш, айириш ва R^m фазо нуқтасини ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари киритилди.

R^m фазода иккита $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$, $\{y^{(n)}\} = \{(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$\{(x_1^{(n)} + y_1^{(n)}, x_2^{(n)} + y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} + y_m^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар *йиғиндиси* деб аталади ва $\{x^{(n)} + y^{(n)}\}$ каби белгиланади. $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар айирмаси эса қуйидаги

$$\{(x_1^{(n)} - y_1^{(n)}, x_2^{(n)} - y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} - y_m^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетлик сифатида аниқланади ва $\{x^{(n)} - y^{(n)}\}$ каби белгиланади.

R^m фазодаги $\{\alpha x_1^{(n)}, \alpha x_2^{(n)}, \dots, \alpha x_m^{(n)}\}$ кетма-кетлик α сон билан $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик кўпайтмаси деб аталади ва $\{\alpha x^{(n)}\}$ каби белги-ланади.

3°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $a (a \in R^m)$ бўлса, у ҳолда $\{\alpha x^{(n)}\} (\alpha \in R)$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити αa га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x^{(n)} = \alpha a = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}.$$

4°. Агар $\{x^{(n)}\}$ ҳамда $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг лимити мос равишда a ва b бўлса, у ҳолда $\{x^{(n)} \pm y^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити $a \pm b$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)} \pm y^{(n)}) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}.$$

5°. Агар a нуқта $M (M \subset R^m)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда M тўплам нуқталаридан a га интилувчи $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик $(x^{(n)} \in M, n = 1, 2, \dots)$ ажратиш мумкин.

Маълумки, a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, a нинг ҳар бир $U_\varepsilon(a)$ атрофида $(\forall \varepsilon > 0)$ M тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ни олиб, a нуқтанинг

$$U_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ x \in R^m : \rho(x, a) < \frac{1}{n} \right\}$$

атрофини тузамиз. Бу a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлгани учун a нуқтанинг $U_1(a)$ атрофида M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Уларнинг бирини $x^{(1)}$ деб оламиз. Энди a нуқтанинг $U_{\frac{1}{2}}(a)$ атрофини қарайлик. Бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқ-

ли нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}$ га тенг бўлмаган бирини олиб, уни $x^{(2)}$ дейлик. Бу жараёни давом эттириб, n -қадамда a нуқтанинг $U_{\frac{1}{n}}(a)$ атрофи олинса, бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқли

нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}$ нуқталарнинг ҳар бирига тенг бўлмаганини олиб, уни $x^{(n)}$ билан белгилаймиз. Яна бу жараёни давом эттираверамиз. Натижада M тўплам нуқталаридан $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

ажралади. Бу кетма-кетлик учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлгани сабабли, $n \rightarrow \infty$ да $x^{(n)} \rightarrow a$ бўлиши келиб чиқади.

2. Коши теоремаси (яқинлашиш принципи). Аввал ай-тиб ўтганимиздек, кетма-кетликнинг қачон лимитга эга бўлишини аниқлаш лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан бири.

Юқорида келтирилган 12.1-теорема, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши бу кетма-кетлик ҳадлари координаталаридан ташкил топган сонли кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлиши орқали ифодаланишини кўрсатади.

Аввало, бу ерда ҳам фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

12.14-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсак, барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(p)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Мисоллар. 1. R^2 фазода ушбу $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2} = \\ &= \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right| \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right) \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра n_0 натурал сонни

$$n_0 = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

деб олсак, у ҳолда барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) < \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0}\right) \sqrt{2} < \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \varepsilon = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган кетма-кетлик фундаменталдир.

2. R^2 фазода қуйидаги $\{(x_n, 0)\}$; $x_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ кетма-кетлик фундаментал бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, бу кетма-кетлик учун, масалан, $n > p$ да

$$\begin{aligned} \rho((x_p, 0), (x_n, 0)) &= \sqrt{(x_n - x_p)^2} = (x_n - x_p) = \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n-p}{n} \end{aligned}$$

бўлиб, $n = 2p$ бўлганда эса

$$\rho((x_p, 0), (x_n, 0)) > \frac{1}{2}$$

эқанлиги келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

Фараз қилайлик, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0, p > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизлиқни қуйидагича

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \varepsilon$$

ёзиб, ундан

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма-кетликлар (қаралсин, 1-қисм, 2-боб, 10-§) эканлигини билдиради. Шундай қилиб, R^n фазода

$$\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$$

кетма-кетликнинг фундаментал бўлишидан бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг фундаментал бўлиши келиб чиқар экан.

Энди $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}$ натурал сонлар топиладики,

$$\text{барча } n > n_0^{(1)}, p > n_0^{(1)} \Rightarrow |x_1^{(n)} - x_1^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

$$\text{барча } n > n_0^{(2)}, p > n_0^{(2)} \Rightarrow |x_2^{(n)} - x_2^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

...

$$\text{барча } n > n_0^{(m)}, p > n_0^{(m)} \Rightarrow |x_m^{(n)} - x_m^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0, p > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. Натижада

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

Бу эса $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

чиқади. Коши теоремасига асосан бу кетма-кетлик лимитга эга. Биз уни a билан белгилайлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a.$$

Ихтиёрий S_n ($n = 1, 2, \dots$) шарни олайлик. Бу шар $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадларини ўз ичига олади (ошиб борса, $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n-1)}$ ҳадларигина S_n шарга тегишли бўлмаслиги мумкин). Демак, a нуқта S_n нинг лимит нуқтаси ва S_n ёпиқ тўплам бўлгани учун $a \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлади. Шундай қилиб, a нуқтанинг барча шарларга тегишли эканлигини кўрсатдик. Энди бундай a нуқтанинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, a нуқтадан фарқли барча шарларга тегишли бўлган b нуқта ҳам бор бўлсин: $b \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) $b \neq a$. Масофа хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, a^{(n)}) + \rho(a^{(n)}, b) \leq 2 \cdot r_n.$$

Бундан эса $n \rightarrow \infty$ да $r_n \rightarrow 0$ бўлгани учун

$$\rho(a, b) = 0,$$

яъни $a = b$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано—Вейерштрасс теоремаси. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ ($n_1 > n_2 < \dots < n_k < \dots, n_k \in N, k = 1, 2, \dots$) номерли ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \dots, (x^{(n_k)}, \dots, (x^{(n_k)} \in R^m)$$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x^{(n_k)}\}$ каби белгиланади. Масалан, R^2 фазода қуйидаги

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \dots, \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), \dots$$

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right), \dots$$

кетма-кетликлар

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Равшанки, битта, кетма-кетликдан жуда кўп турлича қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкин.

12.6-теорема. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг limiti a ($a \in R^m$) бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий $\{x^{(n_k)}\}$ кетма-кетлиги ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг limiti ҳам a га тенг бўлади.

Бу теореманинг исботи кетма-кетликнинг limiti таърифидан бевосита келиб чиқади.

12.1-эслатма. Кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги лимити мавжуд бўлишидан берилган кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots, ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}), \dots$
кетма-кетликнинг

$$(1, 1), (1, 1), \dots, (1, 1), \dots \\ (-1, -1), (-1, -1), \dots, (-1, -1), \dots$$

қисмий кетма-кетликлари лимитга эга (улар мос равишда $(1, 1)$ ва $(-1, -1)$ нуқталарга тенг) бўлган ҳолда берилган $\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлмаган ҳолда унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

12.7-теорема (Больцано—Вейерштрасс теоремаси.) Ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиши мумкин.

Исбот. $\{x^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра шундай шар $|x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r|$ топиладики, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу шарда ётади.

Агар ушбу

$$\{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r\} \subset \bar{U}_r(0)$$

муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда барча n лар учун

$$-r \leq x_i^{(n)} \leq r, (i = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиши топилади. Бу эса $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганлигини билдиради.

1-қисм, 3-бобда келтирилган Больцано—Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_1^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи координатаси яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_1})}, x_2^{(n_{k_1})}, \dots, x_m^{(n_{k_1})})\}$$

қисмий кетма-кетликка келамиз.

Энди $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетлик ҳам чегараланган. Яна Больцано—Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ дан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи ва иккинчи координаталари яқинлашувчи бўлган

$$\{(x_1^{(n_{k_2})}, x_2^{(n_{k_2})}, \dots, x_m^{(n_{k_2})})\}$$

қисмий кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Юқоридаги жараёни давом эттира бориб, m қадамдан кейин, барча координаталари яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_m})}, x_2^{(n_{k_m})}, \dots, x_m^{(n_{k_m})})\} = \{x^{(n_{k_m})}\}$$

қисмий кетма-кетликка эга бўламиз. Равишанки бу кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Иккинчи томондан, 12.1-теоремага кўра $\{x^{(n_k m)}\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади. Теорема исботланди.

3-§. Кўп ўзгарувчи функция ва унинг лимити

Дастлабки тушунчалар қаторида (1-қисм, 1-боб, 3-§) ихтиёрий E тўплами F тўплагма акслантириш ($\Phi: E \rightarrow F$) тушунчаси келтирилган эди. Сўнг $E = N$, $F = R$; $E = R$, $F = R$ ва $E = N$, $F = R^m$ деб ушбу

$$f: N \rightarrow R (f: n \rightarrow x_n; n \in N, x_n \in R),$$

$$\varphi: R \rightarrow R (\varphi: x \rightarrow y; x \in R, y \in R),$$

$$\psi: N \rightarrow R^m (\psi: n \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m); n \in N, (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m)$$

акслантиришларга эга бўлдик. Бу акслантиришлар мос равишда сонлар кетма-кетлиги, функция ҳамда R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги тушунчаларига олиб келди. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити 1-қисмнинг 3-бобида, функция ва унинг лимити 1-қисмнинг 4-бобида, R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги ва унинг лимити эса ушбу бобнинг 2-§ да батафсил баён этилди.

Энди $E = R^m$, $F = R$ деб $f: R^m \rightarrow R$ акслантиришни қараймиз. Бу кўп ўзгарувчи функция тушунчасига олиб келади.

1. Ф у н к ц и я. Бирор $M (M \subset R^m)$ тўплагма берилган бўлсин.

12.15-таъриф. Агар M тўплагмадаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон $y (y \in R)$ мос қўйилган бўлса, M тўплагмада *кўп ўзгарувчи (m та ўзгарувчи) функция берилган (аниқланган)* деб аталади ва уни

$$f: (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y \text{ ёки } y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (12.25)$$

каби белгиланади. Бунда M — *функциянинг берилиши (аниқланиши) тўплами*, $x_1, x_2, \dots, x_m$ эркин ўзгарувчилар — *функция аргументлари*, y эркин ўзгарувчи — $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг *функцияси* дейилади.

$(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқта битта x билан белгиланишини эътиборга олиб, бундан кейин деярлик ҳамма вақт $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўрнига x ни ишлатаверамиз. Унда юқоридаги (12.25) белгилашлар қуйидагича ёзилади.

$$f: x \rightarrow y \text{ ёки } y = f(x) (x \in R^m, y \in R).$$

Функциянинг берилиш тўплагмидан олинган $x^0 \in M$ нуқтага мос келувчи y_0 сон $y = f(x)$ функциянинг $x = x^0$ нуқтадаги *хусусий қиймати* деб аталади

Мисоллар. 1. $f - R^m$ фазодаги ҳар бир x нуқтага шу нуқта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўйувчи қоида, яъни

$$f: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

бўлсин. Бу ҳолда $y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $M = R^m$ тўплагмада берилган.

2. f — ҳар бир $x \in M = \{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq 1\}$ нуқтага ушбу

$$x \rightarrow \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

қоида билан битта ҳақиқий сонни мос қўйсин. Бу ҳолда ҳам кўп ўзгарувчили

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

функцияга эга бўламиз. Равшанки, бу функция M тўпلامда берилган.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлсин. x ўзгарувчи M тўпلامда ўзгарганда функциянинг мос қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўплам *функция қийматлари тўплами* (функциянинг ўзгариш соҳаси) деб аталади. Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида функциянинг қийматлари тўплами $[0, +\infty)$, иккинчисида эса $[0, 1]$ сегментдан иборатдир.

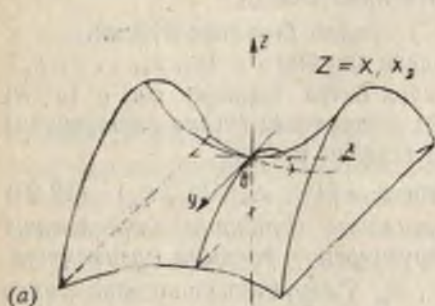
Шуни яна бир бор таъкидлаймизки, кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функцияларда функциянинг берилиш тўплами R^m фазодаги тўплам бўлиб бу функция қийматлари тўплами эса ҳақиқий сонларнинг қисм тўпلامидан иборатдир.

R^{m+1} фазонинг $(x, y) (x \in R^m, y = f(x) \in R)$ нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in R^m, f(x) \in R\}$$

тўплам $y = f(x)$ функция графиги деб аталади.

Масалан, $m = 2$ бўлганда (R^2 фазода)



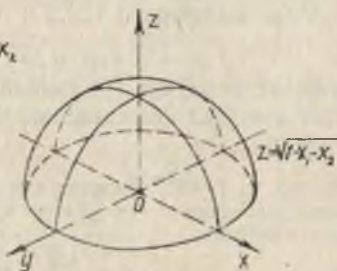
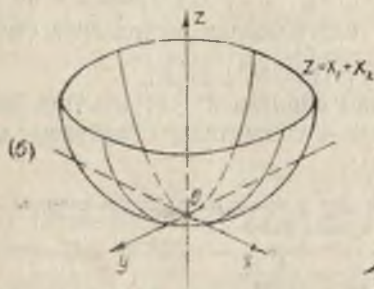
$$y = x_1 \cdot x_2, y = x_1^2 + x_2^2,$$

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

функциялар графиги мос равишда R^3 фазода гиперболлик параболоид, айланма параболоид ҳамда юқори ярим сфералардан иборатдир (10-чизма).

$M \subset R^m$ тўпلامда $y = f(x) =$

$= f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берил-



10-чизма

ган бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг ҳар бири $T \subset R^k (k \in N)$ тўпламда берилган функциялар бўлсин:

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$\dots \dots \dots x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Бунда $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ўзгарувчи $T \subset R^k$ тўпламда ўзгарганда уларга мос $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқта $M \subset R^m$ тўпламда бўлсин. Натижада y ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчи орқали $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлади:

$$t \rightarrow x \rightarrow y$$

$$((t_1, t_2, \dots, t_k) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y.$$

$$y = f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)).$$

Бу функция *мураккаб функция* ёки $f(x)$ ҳамда $\varphi_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ функциялар *суперпозицияси* деб аталади.

Элементар функциялар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари ҳамда функциялар суперпозицияси ёрдамида кўп ўзгарувчили элементар функциялар ҳосил қилинади. Ушбу

$$y = e^{x_1 \cdot x_2 \dots x_m}, y = \ln \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_m},$$

$$y = \sin(x_1 \cdot x_2) + \sin(x_2 \cdot x_3) + \dots + \sin(x_{m-1} \cdot x_m)$$

функциялар шулар жумласидандир.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

Агар бу функция қийматлари тўплами

$$Y = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M\}$$

юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас C (ўзгармас P) сон топилсаки, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ учун

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq C (f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq P)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда *юқоридан (қуйидан) чегараланган* деб аталади, акс ҳолда, яъни ҳар қандай катта мусбат S сон олинганда ҳам, M тўпламда шундай $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта топилсаки,

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) > S (f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) < -S)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда *юқоридан (қуйидан) чегараланмаган* деб аталади.

Агар $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, функция шу тўпламда *чегараланган* дейилади.

Масалан, $M = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ да берилган

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

функция шу M тўпланда қуйидан чегараланган, аммо юқоридан чегараланмагандир: $Y = (0, \infty)$.

2. Функциянинг лимити. R^m фазода бирор M тўплам олайлик. a нуқта ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$) шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. U ҳолда M тўпламнинг нуқталаридан a га интилувчи турли $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in M$, $x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликлар тузиш мумкин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a.$$

Энди шу M тўпланда бирор $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

12.16-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, b $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ ёки } x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow b$$

каби белгиланади.

Функция лимитини бошқача ҳам таърифлаш мумкин.

12.17-таъриф. (Коши таърифи) Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундан $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади.

12.18-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x)| > \delta \quad (f(x) > \varepsilon; f(x) < -\varepsilon)$$

бўлса, $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити ∞ ($+\infty$; $-\infty$) дейилади.

Шундай қилиб функциянинг лимити икки хил таърифланади. Бу таърифлар эквивалент таърифлардир. Бунинг исботи 1-қисм, 4-боб, 3-§ да келтирилган бир ўзгарувчили функция лимити таърифларининг эквивалентлигининг исботи кабидир.

Юқоридаги $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ белгилашларни $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{cases}$$

* Биз қуйида кўп ўзгарувчили функция учун лимитлар тушунчаси бошқача кiritилиши ҳам мумкинлигини кўрамиз. Улардан фарқ этиш учун, баъзан, бу лимит каррали лимит деб ҳам аталади.

эканлигини эътиборга олиб, қуйидагича

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \left. \begin{array}{l} x_1 \rightarrow a_1 \\ \text{ёки } x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{array} \right\} \text{ да } f(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow b$$

ёса ҳам бўлади.

R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлиб, ∞ эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу M тўпламда $y = f(x)$ функция берилган.

12.19-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик учун $x^{(n)} \rightarrow \infty$ да мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, b $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги limiti деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

каби белгиланади.

12.20-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $\rho(x, 0) > \delta$ тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги limiti деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Шунинг таъкидлаш лозимки, функция limiti тушунчаси киритилишида limiti қаралаётган нуқтада функциянинг берилиши (аниқланиши) шарт эмас.

12.2-э с л а т м а. Юқорида функция лимитига берилган Гейне таърифининг моҳияти, ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$, $x^{(n)} \rightarrow a$) кетма-кетлик учун мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлиكنинг limiti олинган $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликка боғлиқ бўлмаслигидадир.

Мисоллар 1. Ушбу

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функциянинг $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$) даги limiti ноль эканлиги кўрсатилсин. Бу функция R^2 тўпламда берилган бўлиб, $(0, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

а) Гейне таърифи бўйича: $(0, 0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x_1^{(n)} \rightarrow 0$, $x_2^{(n)} \rightarrow 0$) ($x^{(n)} \neq (0, 0)$) кетма-кетлик олампиз. Унда мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик учун қуйидагича

$$f(x^{(n)}) = f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = \frac{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}}{\sqrt{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}} = \sqrt{\frac{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}}{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}} \cdot \sqrt{\frac{x_1^{(n)}}{x_1^{(n)}}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1^{(n)} x_2^{(n)}}$$

бўлиб, $x_1^{(n)} \rightarrow 0$, $x_2^{(n)} \rightarrow 0$ да

$$\lim_{n \rightarrow (0,0)} f(x^{(n)}) = 0$$

бўлади- Демак.

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0;$$

б) Коши таърифи бўйича: $\forall \varepsilon > 0$ сонга $\delta = 2\varepsilon$ деб олинса, у ҳолда $0 < \rho(x, 0) < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча x нуқталарда

$$f(x) - 0 = \left| \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| = \frac{|x_1| \cdot |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2} \rho(x, 0) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon$$

е тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

эканлигини билдиради.

2) Қуйидаги

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функциянинг $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ яъни $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$ даги лимитининг мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Бу функция ҳам $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ тўпламда бўлиб, $(0, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

$(0, 0)$ нуқтага интилувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0),$$

$$\bar{x}^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

кетма-кетликлар олинса, улар учун мос равишда

$$f(x^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \rightarrow 1.$$

$$f(\bar{x}^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2}} = 0 \rightarrow 0$$

бў ади. Бу эса $x \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар. 1-қисмининг 3-боби, 4-§ ҳамда 5-§ ларида чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар тушунчалари, 4-бобнинг 7-§ ида эса чексиз катта ва чексиз кичик функциялар тушунчалари киритилиб, улар кўрсатилган параграфларда ўрганилган эди.

Худди шундай тушунчалар кўп ўзгарувчи функцияларга нисбатан ҳам киритилиши мумкин. Уларни ўрганиш эса бир ўзгарувчи функция ҳолидагига ўхшаш бўлганлигини эътиборга олиб, чексиз кичик ҳамда чексиз катта кўп ўзгарувчи функциялар ҳақидаги маълумотларни санаб ўтиш билан кифояланамиз.

Бирор $\alpha(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлиб, $a(a \in R^m)$ нуқта шу тўпلامнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12.21-таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ нинг лимити ноль, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция деб аталади.

Берилган $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли b лимитга эга бўлиши учун

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Бунинг исботи функциянинг лимити ҳамда чексиз кичик функциянинг таърифларидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция b лимитга эга бўлса, бу функцияни ҳар доим

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $\alpha(x)$ — чексиз кичик функция.

Чексиз кичик функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

Фараз қилайлик, $\beta(x)$ функция ҳам шу M тўпلامда берилган бўлсин.

1°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $\alpha(x) + \beta(x)$ функция ҳам чексиз кичик функция бўлади.

2°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлиб, $\beta(x)$ функция эса чегараланган функция бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ ҳам чексиз кичик функция бўлади.

12.22-таъриф. Агар M тўпلامда берилган $\gamma(x)$ функция учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = \infty$$

бўлса, $\gamma(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция деб аталади.

3°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ функция чексиз кичик ($\alpha(x) \neq 0$) функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $x \rightarrow a$ да $\gamma(x)$ функция чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\gamma(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция бўлади.

4. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларин. Чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функциялар ҳам чекли лимитга эга бўлган бир ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларига (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 4-§) ўхшаш хоссаларга эга. Уларнинг исботи худди бир ўзгарувчили функциялар хоссаларининг исботи кабидир. Шунинг эътиборга олиб, биз куйида чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз.

Бирор $M \subset R^n$ тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлиб, $a (a \in R^n)$ нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

мавжуд бўлиб, $b > p$ ($b < q$) бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ ($x \neq a$) нуқталарда $f(x) > p$ ($f(x) < q$) бўлади. Хусусан, $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x) \neq 0$ бўлади.

2°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

мавжуд бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ ($x \neq a$) нуқталарда $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

Энди M да иккита $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар берилган бўлсин.

3°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

бўлиб, a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги барча x нуқталарда ($x \in M \cap U_\delta(a)$) $f_1(x) \leq f_2(x)$ бўлса, у ҳолда $b_1 \leq b_2$ бўлади.

4°. Агар a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги $x \in M \cap U_\delta(a)$ нуқталарда

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

бўлиб, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

бўлади.

5°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \pm f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

6°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

7°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

12.3-э с л а т м а. Бир ўзгарувчилик функциялардагидек, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функцияларнинг лимитга эга бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг лимитга эга бўлиши келиб чиқавермайди.

12.4-э с л а т м а. Агар $x \rightarrow a$ да 1) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити ноль (ёки чексиз) бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ифода; 2) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ бўлганда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ифода ва ниҳоят 3) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ турли ишорали чексиз лимитга эга бўлганда $f_1(x) + f_2(x)$ йиғинди мос равишда $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди.

Агар $x \rightarrow a$ да 1) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow 0$ бўлса, 2) $f_1(x) \rightarrow 1$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ бўлса, 3) $f_1(x) \rightarrow \infty$, $f_2(x) \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ мос равишда 0^0 , 1^∞ , ∞^0 кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди. Бундай аниқмасликлар бир ўзгарувчилик функцияларда қаралганидек, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциянинг ўз лимитларига интилиш характерига қараб очилади.

5. Такрорий лимитлар. Биз юқорида $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқтадаги лимити

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \left(\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \right)$$

билан танишдик. Демак, функциянинг лимити, унинг аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг бир йўла, мос равишда $a_1, a_2, \dots, a_m$ сонларга интилгандаги лимитидан иборатдир.

Кўп ўзгарувчилик функциялар учун (уларгагина хос бўлган) бошқа формадаги лимит тушуничасини ҳам киритиш мумкин.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу функциянинг $x_1 \rightarrow a_1$ даги (бошқа барча ўзгарувчиларни тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу лимит, биринчидан бир ўзгарувчилик функция лимитининг ўзгинаси, иккинчидан у $x_2, x_3, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m).$$

Сўнг $\Phi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ функциянинг $x_3 \rightarrow a_2$ даги (бошқа барча ўзгарувчиларини тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_3 \rightarrow a_2} \Phi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \Phi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

ни қарайлик.

Юқоридагидек бирин-кетин $x_3 \rightarrow a_3, x_4 \rightarrow a_4, \dots, x_m \rightarrow a_m$ да лимитга ўтиб

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг такрорий лимити деб аталади.

Демак, функциянинг такрорий лимити, унинг аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг ҳар бирининг бирин-кетин мос равишда $a_1, a_2, \dots, a_m$ сонларга интилгандаги лимитидан иборат.

Худди юқоридагидек, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ аргументлари мос равишда $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ларга интилгандаги такрорий лимити

$$\lim_{x_{i_k} \rightarrow a_{i_k}} \dots \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳам қараш мумкин.

Шуни ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ лар мос равишда $a_1, a_2, \dots, a_m$ сонларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу параграфнинг 2-пунктида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ бўлса.} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг лимити

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлишини кўрсатган эди. Бу функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар ҳам 0 га тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Шунингдек,

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар бир-бирига тенг бўлиб, бу такрорий лимитлар функциянинг (каррalli) лимитига тенг бўлади.

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса.} \\ 0, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд бўлиб, уларнинг бири $-\frac{1}{3}$ га, иккинчиси эса 2 га тенг.

Бироқ $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд эмас. Чунки $(0, 0)$ нуқтага интилувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0),$$

$$\bar{x}^{(n)} = \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

кетма-кетликлар олинса улар учун мос равишда

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{5}{4}, \frac{4}{n}\right) = \frac{6}{17} \rightarrow \frac{6}{17}$$

бўлади. Бу эса $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг (каррали) лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функциянинг такрорий лимитлари

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар бири-бирига тенг экан. Биз юқорида бу функциянинг $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да (каррали) лимити мавжуд эмаслигини кўрсатган эдик.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1}, & \text{агар } x_1 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = x_1 \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлиб, $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$ — мавжуд эмас. Демак, берилган функциянинг битта так-

рорий лимити мавжуд бўлиб, иккинчи такрорий лимити эса мавжуд эмас. Аммо

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left| x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1} \right| \leq |x_1| + |x_2| \quad (x_1 \neq 0)$$

муносабатдан $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

5. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг $x_1 \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд эмас. Чунки нолга интилувчи иккита

$$x_1^{(n)} = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0, \quad \bar{x}_1^{(n)} = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

кетма-кетликлар олинса, улар учун мос равишда $(x_2 \neq 0)$ да

$$f\left(\frac{1}{n\pi}, x_2\right) \rightarrow 0, \quad f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, x_2\right) \rightarrow x_2 \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$$

ҳам мавжуд бўлмайди. Аммо

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left| (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1| + |x_2|$$

тенгсизликдан $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлишини топамиз.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг бирор нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада такрорий лимитининг мавжуд бўлиши ва аксинча, функциянинг бирор нуқтада такрорий лимитларининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлиши келиб чиқавермас экан. Ундан ташқари функциянинг такрорий лимитлари бир-бирига ҳар доим тенг бўлавермас экан.

Биз қуйида функциянинг каррали ва такрорий лимитлари орасидаги боғланиш ҳамда уларнинг маълум шартларда ўзаро тенглиги ҳақидаги теоремани исботлаймиз.

$f(x_1, x_2)$ функция $M = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < a_1, |x_2 - x_2^0| < a_2 \}$ тўпламда берилган бўлсин.

12.8-теорема. Агар 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг каррали лимити мавжуд:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b,$$

2) ҳар бир тайинланган x_1 да қуйидаги

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

Исбот. $f(x_1, x_2)$ функция $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да каррали

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

лимитга эга бўлсин. Лимитнинг таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

тўпламнинг барча (x_1, x_2) нуқталари учун

$$|f(x_1, x_2) - b| < \varepsilon \quad (12.26)$$

бўлади. Энди теореманинг 2) шартини эътиборга олиб, x_1 ўзгарувчининг $|x_1 - x_1^0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматини тайинлаб, $x_2 \rightarrow x_2^0$ да (12.26) тенгсизликда лимитга ўтиб

$$|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$$

ни топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ бўлганда $|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$ бўлади. Бу эса

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \varphi(x_1) = b$$

бўлишини билдиради. Кейинги муносабатдан

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теорема худди шунга ўхшаш исботланади.

12.9-теорема. Агар 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг каррали лимити мавжуд:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b,$$

2) ҳар бир тайинланган x_2 да қуйидаги

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \psi(x_2)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

12.1- натижа. Агар бир вақтда юқоридаги 12.8- ва 12.9- теоремаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

бўлади.

Биз икки ўзгарувчили функциянинг каррали ва такрорий лимитлари орасидаги боғланишни ифодаловчи теоремаларни келтирдик.

Худди юқоридагидек $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича

$$\lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \dots \lim_{x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

каррали ҳамда

$$\lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \dots \lim_{x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

такрорий лимитлари ва улар орасидаги боғланишни қараш мумкин.

6. Коши теоремаси (яқинлашиш принципи). Энди кўп ўзгарувчили функция лимитининг мавжудлиги ҳақида умумий теорема келтирамиз.

R^m фазода M тўплам берилган бўлиб, $a(a \in R^m)$ унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция берилган.

12.23- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, ушбу $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва $\bar{x}(x \in M, \bar{x} \in M)$ нуқталарда

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартлари бажарилади дейилади.

12.10-теорема (Коши теоремаси). $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун a нуқтада Коши шартининг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекли лимит

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

га эга бўлсин. Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x (x \in M)$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

жумладан $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq |f(\bar{x}) - b| + |f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилсин, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$, $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва $\bar{x} (x, \bar{x} \in M)$ нуқталарда

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси. Шунинг учун M тўпламнинг нуқталаридан $\{x^{(n)}\} (x^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик тузиш мумкинки, бунда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

бўлади. Лимитнинг таърифига биноан, юқорида келтирилган $\delta > 0$ га кўра, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун $0 < \rho(x^{(n)}, a) < \delta$, $0 < \rho(x^{(p)}, a) < \delta$ бўлади. Бу тенгсизликларнинг бажарилишидан эса, шартга кўра:

$$|f(x^{(p)}) - f(x^{(n)})| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\{f(x^{(n)})\}$ — фундаментал кетма-кетлик. 2-§ да келтирилган 12.4-теоремага кўра $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу кетма-кетликнинг лимитини b билан белгилайлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = b.$$

Энди M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва a нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{\bar{x}^{(n)}\}$ кетма-кетлик

$$\bar{x}^{(n)} \rightarrow a \quad (\bar{x}^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$$

олинганда ҳам мос $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетлик (у юқорида кўрсатганимизга биноан яқинлашувчи бўлади) ҳам ўша b га интилишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, $\bar{x}^{(n)} \rightarrow a \quad (\bar{x}^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$ бўлганда

$$f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b'$$

бўлсин.

$\{x^{(n)}\}, \{\bar{x}^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ушбу

$$x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}, x^{(2)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \bar{x}^{(n)}, \dots$$

кетма-кетликни тузайлик. Равшанки, бу кетма-кетлик $a (a \in R^m)$ га интилади. У ҳолда

$$f(x^{(1)}), f(\bar{x}^{(1)}), f(x^{(2)}), f(\bar{x}^{(2)}), \dots, f(x^{(n)}), f(\bar{x}^{(n)}), \dots \quad (12.27)$$

кетма-кетлик чекли лимитга эга. Уни b^* орқали белгилайлик. Агар $\{f(x^{(n)})\}$ ва $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири (12.27) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$f(x^{(n)}) \rightarrow b^*, \quad f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b^*$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$b^* = b = b'.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилишидан M тўплам нуқталаридан тузилган ва a га интилувчи ҳар қандай $\{f(x^{(n)})\} (x^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик олинганда ҳам, мос $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетлик битта сонга интилишини топдик. Бу эса функция лимитининг Гейне таърифига кўра $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

12.5-эслатма. Коши шarti ва Коши теоремаси $x \rightarrow \infty$ да ҳам юқоридагига ўхшаш ифодаланади ва исбот этилади.

4-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги

1. Функция узлуксизлиги таърифлари. $M \subset R^m$ тўпламда $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берилган бўлиб, $a \in M$ ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$) нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12.24-таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \left(\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m) \right) \quad (*)$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ихтиёрий $(x_1^0, x_2^0) \neq (0, 0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини функция лимитининг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1^0 \cdot x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} = f(x_1^0, x_2^0),$$

Ушбу бобнинг 3-§ да келтирилган мисолга кўра

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0 = f(0, 0)$$

бўлиб, ундан берилган функциянинг $(0, 0)$ нуқтада ҳам узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Демак, қаралаётган функция R^2 тўпламда узлуксиз.

Шундай қилиб функциянинг узлуксизлиги унинг лимити орқали таърифланар экан. Функциянинг лимити эса ўз навбатида Гейне ва Коши таърифларига эга. Шунинг эътиборига олиб, функция узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифларини келтириш мумкин.

12.25-таъриф (Гейне таърифи). Агар $M \subset R^m$ тўпламнинг нуқталаридан тузилган. $a (a \in M)$ га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

12.26-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $\rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Атроф тушунчаси ёрдамида функциянинг узлуксизлигини қуйдагича ҳам таърифлаш мумкин.

12.27-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсаки, барча $x \in U_\delta(a) \cap M$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматлари $f(x) \in U_\epsilon(f(a))$ бўлса, яъни

$$x \in U_\delta(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(f(a))$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқтада узлуксизлигини функция орттирмаси ёрдамида ҳам таърифлаш мумкин.

Функция аргументларининг орттирмалари

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1, \Delta x_2 = x_2 - a_2, \dots, \Delta x_m = x_m - a_m$$

га мос ушбу

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ &= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned}$$

бўйича узлуксиз деб ағалади. Одатда функциянинг бундай узлуксизлиги, унинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги деб аталади.

Демак, кўп ўзгарувчили функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги, бир ўзгарувчили функция узлуксизлигининг ҳудди ўзи экан.

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада бир йўла) узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича ҳам хусусий узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)] = 0$$

бўлади.

Хусусан,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_m = 0, \Delta x_k \neq 0 \\ (k=1, 2, \dots, m)$$

бўлганда

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_x f = \lim_k [f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)] = 0$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада $x_k (k=1, 2, \dots, m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишини билдиради.

12.6-эслатма. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан унинг шу нуқтада (бир йўла) узлуксиз бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. Равшанки, $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$. Ихтиёр $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта олиб, унда x_2 ўзгарувчини тайинлаймиз.

Агар $x_2 \neq 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2x_1^0 \cdot x_2}{(x_1^0)^2 + x_2^2} = f(x_2^0, x_2)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, 0) = 0 = f(x_1^0, 0)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 = 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) = 0 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2).$$

Бу эса берилган $f(x_1, x_2)$ функция x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Берилган функциянинг x_2 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз. Бироқ, бу функция $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз эмас. Бу нуқтада функция ҳатто лимитга эга эмаслигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтага интиладиган қуйидаги иккита $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ва $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликлар:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

олинганда, уларга мос келадиган функция қийматларидан иборат $\left\{f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ва $\left\{f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликлар учун

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \rightarrow 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$$

бўлади.

Биз юқорида кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг ҳар бир x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги тушунчаси билан танишдик. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича узлуксизлиги худди шунга ўхшаш таърифланади.

12.29-таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, ёки

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ёки функциянинг лимити мавжуд, чекли бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

бўлса, унда функция a нуқтада узилишга эга деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функцияни қарайлик. Бу функция R^2 тўпланда берилган бўлиб, унинг $(0, 0)$ нуқта-даги limiti

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0 \neq f(0, 0) = 1$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга.

2. Ушбу бобнинг 1-§ ида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция узилишга эга, чунки

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = +\infty.$$

3. Қуйндаги

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $\{(x_1, x_2) \in R^2; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга бўлади, чунки $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 1$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг чекли limiti мавжуд эмас.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга, чунки $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг limiti мавжуд эмас (қаралсин 41-бет).

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x_1, x_2)$ функция текисликнинг муайян нуқталарида ёки текисликдаги бирор чизиқнинг барча нуқталарида (яъни чизиқ бўйлаб) узилиши мумкин экан.

2. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги. Энди узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўгайтмаси ва нисбатининг узлуксизлиги масаласини ўрганамиз.

12.11-теорема. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ҳар бири $M \subset R^m$ тўпланда берилган бўлиб, улар $a \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса,

$$f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ ҳамда } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} (f_2(a) \neq 0)$$

функциялар ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи, аслида лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги маълумотлардан (ушбу бобнинг 3-§ даги 5°, 6° ва 7°-хоссалар) бевосита келиб чиқади. Уни лимитга эга бўлган функциянинг хоссалари (3-§ даги 1° ва 2°-хоссалар) ҳамда берилган функциянинг нуқтада узлуксизлигидан фойдаланиб

ҳам исботлаш мумкин. Биз қуйида икки функция нисбатининг узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциянинг ҳар бири a нуқтада узлуксиз бўлиб, $f_2(a) \neq 0$ бўлсин. Равшанки, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар мос равишда $f_1(a)$, $f_2(a)$ лимитларга эга:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a) \quad (f_2(a) \neq 0).$$

У ҳолда ушбу бобнинг 3-§ идаги 2°-хоссага кўра, a нуқтанинг етарлича кичик атрофи $U_{\delta_1}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_1\}$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар чегараланган бўлади:

$$m_1 < f_1(x) < M_1, \quad m_2 < f_2(x) < M_2, \quad x \in U_{\delta_1}(a),$$

бунда m_1 , M_1 ва m_2 , M_2 — ўзгармас сонлар. Иккинчи томондан $f_2(a) \neq 0$ бўлганлиги сабабли 3-§ даги 1°-хоссага кўра шу a нуқтанинг етарли кичик атрофи $U_{\delta_2}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_2\}$ да $f_2(x) \neq 0$ бўлади.

Энди ушбу

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \quad (x \in U_{\delta_1}(a))$$

айирмани қарайлик. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_1(x)}{f_2(a) f_2(x)} [f_2(a) - f_2(x)] + \frac{1}{f_2(a)} [f_1(x) - f_1(a)].$$

Агар $\delta' = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ деб олсак, унда $\forall x \in U_{\delta'}(a)$ учун

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| &\leq \left| \frac{M_1}{m_2 \cdot f_2(a)} \right| \cdot |f_2(x) - f_2(a)| + \\ &+ \frac{1}{|f_2(a)|} |f_1(x) - f_1(a)| \end{aligned} \quad (12.28)$$

бўлади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг a нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon$ га кўра шундай $\delta'' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta''}(a)$ учун

$$|f_1(x) - f_1(a)| < \frac{|f_2(a)|}{2} \varepsilon, \quad (12.29)$$

шунингдек, ўша $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta''' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta'''}(a)$ учун

$$|f_2(x) - f_2(a)| < \left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \frac{\varepsilon}{2} \quad (12.30)$$

бўлади. Агар $\delta = \min \{\delta', \delta'', \delta'''\}$ деб олинса, унда $\forall x \in U_{\delta}(a)$ учун юқоридаги (12.28), (12.29) ва (12.30) муносабатлар бир йўла ўринли бўлиб, натижада ушбу

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функциянинг a нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Худди шу йўл билан теореманинг қолган қисмлари ҳам исботланади.

12.7-эслатма. Иккита функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан, бу функцияларнинг ҳар бирининг узлуксиз бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \subset R^2$ квадратни олиб, унинг рационал нуқталари (яъни ҳар иккала координаталари рационал сон бўлган нуқталари) тўпламини D_p билан белгилаймиз. Бу D тўпلامда қуйидаги

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D_p \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ бўлса} \end{cases}$$

ҳамда

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D_p \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Бу функциялар йиғиндиси $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) - 0$ ($\forall (x_1, x_2) \in D$) бўлиб, у шу тўпلامда узлуксиз бўлса-да, $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ функцияларнинг ҳар бири D да узлуксиз эмас.

Юқорида келтирилган теорема қўшилувчилар ҳамда кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Энди мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Фараз қилайлик, $M \subset R^m$ тўпلامда $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берилган бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг ҳар бири $T \subset R^k$ ($k \in N$) тўпلامда берилган функциялар бўлсин:

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Биз $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ деб қараймиз. Бу функциялар ёрдамида

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \\ &= \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k) = \Phi(t) \end{aligned}$$

мураккаб функцияни тузамиз (қаралсин, 33-бет).

12.12-теорема. Агар $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функцияларнинг ҳар бири $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлиб, $j(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтага мос $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ($x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, $x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \dots$) $\dots = \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$

нуқтада узлуксиз бўлса, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлсин.

$T \subset R^k$ тўпламда $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий

$$\{t^{(n)}\} = \{(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликни олайлик. У ҳолда узлуксизлиkning Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0 \\ t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0 \\ \dots \\ t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_1^0, \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_2^0, \\ \dots \\ x_m^{(n)} = \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_m^0 \end{array} \right\}$$

бўлади.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда яна Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow x_1^0 \\ x_2^{(n)} \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_m^{(n)} \rightarrow x_m^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \rightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлади. Демак, $t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0, t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0, \dots, t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0$ да

$$\begin{aligned} & f(\varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \dots, \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})) \rightarrow \\ & \rightarrow f(\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)). \end{aligned}$$

Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функциянинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

5-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз қуйида кўп ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссаларини келтираемиз. Бунда бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари тўғрисидаги маълумотлардан тўла фойдалана борамиз.

Кўп ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳам бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (локал хоссалари). $f(x)$ функция M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин, M тўпламдан бирор x^0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бундай $f(x)$ функциянинг нуқтанинг етарли кичик атрофидаги хоссаларини (локал хоссаларини) ўрганаемиз.

1°. Агар $f(x)$ функция $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.
Исбот. Функция узлуксизлиги таърифига кўра

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

бўлиб, ундан $f(x)$ функцияни x^0 нуқтада чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади. Чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларидан (қаранг, 38-бет) эса, $f(x)$ функцияни x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида чегараланганлигини топамиз.

2°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x^0) > 0$ ($f(x^0) < 0$) бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ нуқталар учун

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

бўлади.

Бу ерда $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (агар $f(x^0) < 0$ бўлса, $\varepsilon = -f(x^0)$) деб олсак, фикримизнинг тасдиғига эга бўламиз.

Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз ва $f(x^0) \neq 0$ бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда функция қийматларининг ишораси $f(x^0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлар экан:

$$\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x^0).$$

3°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x' \in M$, $x'' \in M$ нуқталар учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Жумладан, $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун ҳам

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликлардан эса $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

2. Тўпلامда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалари). Энди $M \subset R^m$ тўпلامда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини (глобал хоссаларини), аниқроғи $f(x)$ функция қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўпламнинг хоссаларини урганамиз.

нуқтада узлуксиз бўлса, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлсин.

$T \subset R^k$ тўпلامда $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтага интиливчи ихтиёрий

$$\{t^{(n)}\} = \{(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликни олайлик. У ҳолда узлуксизликнинг Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0 \\ t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0 \\ \dots \dots \dots \\ t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_1^0 \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_2^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_m^{(n)} = \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_m^0 \end{array} \right\}$$

бўлади.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда яна Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow x_1^0 \\ x_2^{(n)} \rightarrow x_2^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_m^{(n)} \rightarrow x_m^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \rightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлади. Демак, $t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0, t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0, \dots, t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0$ да

$$f(\varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \dots, \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})) \rightarrow f(\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)).$$

Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функциянинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

5-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз қуйида кўп ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссаларини келтирамиз. Бунда бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари тўғрисидаги маълумотлардан тўла фойдалана борамиз.

Кўп ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳам бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (локал хоссалари). $f(x)$ функция M ($M \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлсин, M тўпلامдан бирор x^0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бундай $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги хоссаларини (локал хоссаларини) ўрганамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.
Исбот. Функция узлуксизлиги таърифига кўра

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

бўлиб, ундан $f(x)$ функцияни x^0 нуқтада чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади. Чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларидан (қаранг, 38-бет) эса, $f(x)$ функцияни x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида чегараланганлигини топамиз.

2°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x^0) > 0$ ($f(x^0) < 0$) бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ нуқталар учун

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

бўлади.

Бу ерда $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (агар $f(x^0) < 0$ бўлса, $\varepsilon = -f(x^0)$) деб олсак, фикримизнинг тасдиғига эга бўламиз.

Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз ва $f(x^0) \neq 0$ бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда функция қийматларининг ишораси $f(x^0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлар экан:

$$\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x^0).$$

3°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x' \in M$, $x'' \in M$ нуқталар учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Жумладан, $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун ҳам

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликлардан эса $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

2. Тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалари). Энди $M \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини (глобал хоссаларини), аниқроғи $f(x)$ функция қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўпламнинг хоссаларини ўрганамиз.

12.13-теорема (Больцано—Кошининг биринчи теорема-си). $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция боғламли* $M \subset R^m$ тўп-ламда берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция тўпламнинг иккита $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқтасида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$ нуқта топилдики, бу нуқтада функция нолга айланади:

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0.$$

Исбот. Аниқлик учун $f(a) = f(a_1, a_2, \dots, a_m) < 0$, $f(b) = f(b_1, b_2, \dots, b_m) > 0$ бўлсин. $M \subset R^m$ боғламли тўплам бўлгани учун бу-
а ва b нуқталарини бирлаштирувчи ва M тўпламда ётувчи синиқ чи-
зиқ топилди. Бу синиқ чизик учлари бўлган нуқталарда $f(x)$ функция-
нинг қийматларини ҳисоблаб борамиз. Бунда икки ҳол юз беради:

1) Синиқ чизик учларининг бирида $f(x)$ функция нолга айланади. Бу ҳолда синиқ чизикнинг шу учини теоремадаги c нуқта деб олинса, $f(c) = 0$ бўлиб, теорема исботланади.

2) Синиқ чизик учларида $f(x)$ функция нолга айланмайди. Бу ҳол-
да синиқ чизикнинг шундай кесмаси топилдики, унинг учларида $f(x)$
функциянинг қийматлари ҳар хил ишорали бўлади. Синиқ чизикнинг
худди шу учларининг бирини $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ билан, иккинчи,
учини эса $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$ билан белгиласак, унда

$$f(a') = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$f(b') = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0$$

бўлади. Синиқ чизикнинг бу кесмасининг тенгламаси ушбу

$$x_1 = a'_1 + t(b'_1 - a'_1),$$

$$x_2 = a'_2 + t(b'_2 - a'_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = a'_m + t(b'_m - a'_m)$$

($0 \leq t \leq 1$) кўринишда ёзилади.

Агар ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нуқтани синиқ чизикнинг
шу кесмаси бўйичагина ўзгаради деб олинадиган бўлса, у ҳолда
 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ кўп ўзгарувчили функция қуйидагича

$$F(t) = f(a'_1 + t(b'_1 - a'_1), a'_2 + t(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t(b'_m - a'_m))$$

битта t ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлиб қолади. Мураккаб
функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $F(t)$ функция
[0, 1] сегментда узлуксиздир. Иккинчи томондан $t = 0$ ва $t = 1$ да бу
функция турли ишорали қийматларга эга:

$$F(0) = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$F(1) = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0.$$

Шундай қилиб, $F(t)$ функция [0, 1] сегментда узлуксиз ва шу сег-

* Боғламли тўплам таърифни 1-§, 17-бетдан қаранг.

ментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга. У ҳолда 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.5-теоремага кўра, $(0, 1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(t_0) = 0$$

бўлади. Демак,

$$F(t_0) = f(a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1), a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t_0(a'_m - a'_m)) = 0.$$

Агар

$$c_1 = a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1),$$

$$c_2 = a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2).$$

$$c = a'_m + t_0(b'_m - a'_m)$$

деб олсак, равшанки, $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$ ва $f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$ бўлади. Бу юқорида келтирилган теоремани исботлайди.

Қуйидаги теорема ҳам шунга ўхшаш исботланади.

12.14-теорема (Больцано — Кошининг иккинчи теоремаси). $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция боғламли $M \subset R^m$ тўпلامда берилган ва узлуксиз бўлиб, M тўпلامнинг иккита $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқтасида $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ бўлсин. A билан B орасида ҳар қандай C сон олинса ҳам, M тўпلامда шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ нуқта топиладики,

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = C$$

бўлади.

12.15-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $M \subset R^m$ тўпلامда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу M тўпلامда чегараланган бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпلامда узлуксиз бўлса ҳам, у шу тўпلامда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $\forall n \in \mathbb{N}$ учун шундай $x^{(n)} \in M$ нуқта топиладики,

$$|f(x^{(n)})| > n \quad (12.31)$$

бўлади. Бундай нуқталардан $\{x^{(n)}\}$, $x^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик тузамиз. Модомики, M тўпلام чегараланган экан, унда $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам чегаралангандир. Больцано — Вейерштрасс теоремасига (ушбу бобнинг 2-§ ига) кўра $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган $\{x^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $\{x^{(n_k)}\} \rightarrow x^0$ ($k \rightarrow \infty$). M ёпиқ тўпلام бўлгани учун $x^0 \in M$ бўлади. $f(x)$ функциянинг M тўпلامда узлуксиз эканлигидан эса

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади, натижада бир томондан (12.31) муносабатга кўра

$$|f(x^{(n_k)})| > n_k.$$

яъни $f(x^{(n_k)}) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$ да) бўлса, иккинчи томондан $f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$ бўлиб қолди. Бундай зиддият $f(x)$ функцияни M тўпلامда чегаралан-

маган деб олиннши оқибатида келиб чиқди. Демак, $f(x)$ функция M тўпلامда чегараланган. Теорема исбот бўлди.

12.16-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теорема-си). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёниқ $M \subset R^m$ тўпلامда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу тўпلامда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади.

Бу теореманинг исботи 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.8-теореманинг исботи кабир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

6-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси

Ушбу параграфда кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги тушунчасини киритамиз ва уни батафсил ўрганамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлсин.

12.30-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсаки, M тўпلامнинг $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in M, x'' \in M$) нуқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция M тўпلامда текис узлуксиз функция деб аталади.

Функциянинг текис узлуксизлиги таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ бўлади. Табиийки, агар $f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпلامда узлуксиз бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

функциянинг $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ тўпلامда текис узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра топиладиган $\delta > 0$ сонни $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ деб олсак, у ҳолда

$$\rho(x', x'') = \rho((x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2)) = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2} < \delta$$

тенгсизликини қаноатлантирувчи $\forall (x'_1, x'_2) \in D, \forall (x''_1, x''_2) \in D$ нуқталар учун

$$\begin{aligned} |f(x'_1, x'_2) - f(x''_1, x''_2)| &= |(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - [(x''_1)^2 + (x''_2)^2]| = |(x'_1 - x''_1)(x'_1 + x''_1) + \\ &+ (x'_2 - x''_2)(x'_2 + x''_2)| \leq 2\sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2} + 2\sqrt{(x'_1 + x''_1)^2 + (x'_2 + x''_2)^2} = \\ &= 4\delta < \varepsilon \text{ бўлади. Демак, берилган функция } D \subset R^2 \text{ тўпلامда текис узлуксиз.} \end{aligned}$$

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$$

функцияни $A = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ тўпلامда қарайлик. Равшанки, ^{бу} функция A тўпلامда узлуксиз. Бироқ қаралаётган функция учун A тўпلامга ^{текис} узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмайди, яъни $\forall \delta > 0$ учун шундай $\varepsilon > 0$ ^{ва} $x' = (x'_1, x'_2) \in A, x'' = (x''_1, x''_2) \in A$ нуқталар топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ ҳамда

$$|f(x'_1, x'_2) - f(x''_1, x''_2)| \geq \varepsilon$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ учун $\varepsilon = 1$ деб ва $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in A, \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \in A$ нуқталарни олсак, $n > n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \right\rceil$ учун

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}} < \delta$$

ҳамда

$$\left|f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)\right| = 3n^2 > 1 = \varepsilon$$

бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, бирор тўпلامда узлуксиз бўлган функциялар ҳар доим шу тўпلامда текис узлуксизлик таърифидаги шартни бажаравермас экан. Аммо қуйидаги теорема ўринлидир.

12.17-теорема (Кантор теоремаси). *Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M ($M \subset R^n$) тўпلامда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпلامда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. Тескарисини фарз қилайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпلامда узлуксиз бўлсин-у, аммо текис узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмасин. Бу ҳолда бирор $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta > 0$ сон учун M тўпلامда $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи шундай x' ва x'' ($x' \in M, x'' \in M$) нуқталар топиладики,

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ ни олайлик:

$$\delta_n \rightarrow 0 \quad (\delta_n > 0 \quad n = 1, 2, \dots). \quad (12.32)$$

Фаразимизга кўра, юқоридаги $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) учун M тўпلامда шундай $a^{(n)}$ ва $b^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) нуқталар топиладики,

$$\rho(a^{(1)}, b^{(1)}) < \delta_1 \quad \text{ва} \quad |f(a^{(1)}) - f(b^{(1)})| \geq \varepsilon,$$

$$\rho(a^{(2)}, b^{(2)}) < \delta_2 \quad \text{ва} \quad |f(a^{(2)}) - f(b^{(2)})| \geq \varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots \rho(a^{(n)}, b^{(n)}) < \delta_n \quad \text{ва} \quad |f(a^{(n)}) - f(b^{(n)})| \geq \varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots$$

бўлади.

Модомики, M — чегараланган тўплам ва $a^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, \dots$) экан, унда Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий $\{a^{(n_k)}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(n_k)} = a^0. \quad (12.33)$$

M ёпиқ тўплам бўлгани сабабли $a^0 \in M$ бўлади. Юқоридаги $\{b^{(n)}\}$ кетма-кетликдан ажратилган $\{b^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетликнинг лимити ҳам a^0 га тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\rho(b^{(n_k)}, a^0) \leq \rho(b^{(n_k)}, a^{(n_k)}) + \rho(a^{(n_k)}, a^0) < \delta_{n_k} + \rho(a^{(n_k)}, a^0)$$

тенгсизликдаги δ_{n_k} ва $\rho(a^{(n_k)}, a^0)$ лар учун (12.32) ва (12.33) муносабатларга кўра $k \rightarrow \infty$ да

$$\delta_{n_k} \rightarrow 0, \rho(a^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$$

бўлишини эътиборга олиб, $k \rightarrow \infty$ да $\rho(b^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$ эканини топамиз.

Шундай қилиб, $k \rightarrow \infty$ да

$$a^{(n_k)} \rightarrow a^0, b^{(n_k)} \rightarrow a^0.$$

Қаралаётган $f(x)$ функциянинг, шартга кўра M тўпламда узлуксиз эканлигидан

$$f(a^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0), f(b^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0)$$

бўлиб, улардан эса

$$f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)}) \rightarrow 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\forall n_k$ лар учун

$$|f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)})| \geq \varepsilon$$

деб қилинган фаразга зиддир. Бундай зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб $f(x)$ функциянинг M тўпламда текис узлуксизлик шартини қаноатлантирмайди деб олинishiдир. Демак, функция M тўпламда текис узлуксиз. Теорема исбот бўлади.

Бирор $M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий иккита x' ва x'' нуқталарни олиб, улар орасидаги $\rho(x', x'')$ масофани топамиз. Равшанки, масофа олинган нуқталарга боғлиқ бўлади. Агар x' ва x'' нуқталарни M тўпламда ўзгартира борсак, унда $\{\rho(x', x'')\}$ тўплам ҳосил бўлади. Одатда, бу тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup \{\rho(x', x'')\}$ ($x' \in M, x'' \in M$) M тўпламнинг диаметри деб аталади ва у $d(M)$ каби белгиланади:

$$d(M) = \sup \{\rho(x', x'')\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

12.31-таъриф. Ушбу

$$\sup \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

миқдор $f(x)$ функциянинг M тўпламдаги тебраниши деб аталади ва у $\omega(f; M)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; M) = \sup \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

Юқорида келтирилган Кантор теоремасидан муҳим натижа келиб чиқади.

12.2-натижа. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ тўпламда берил-

ган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам M тўп-
ламни чекли сондаги M_k тўпламларга шундай ажратиш мумкинки,

$$\bigcup_k M_k = M, \quad M_k \cap M_j = \emptyset \quad (k \neq j) \quad \text{ва} \quad \omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлсин. Кантор теоремасига кўра бу функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади. Биобарин, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ бўлган $\forall x', x''$ лар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлади, M тўпламни диаметрлари шу δ бўлган M_k тўпламларга ажратамиз. Равшанки, бу ҳолда $\forall x' \in M_k, \forall x'' \in M_k$ нуқталар учун $\rho(x', x'') < \delta$ бўлади ва демак,

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан эса

$$\sup \{|f(x'') - f(x')|\} \leq \varepsilon,$$

яъни

$$\omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Натижа исбот бўлди.

Биз ушбу параграфда функциянинг текис узлуксизлиги билан боғлиқ бўлган функциянинг узлуксизлик модули тушунчаси билан ҳам танишамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. $\forall \delta > 0$ сонни олиб, M тўпламнинг $\rho(x', x'') \leq \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in M, x'' \in M$) нуқталардаги функция қийматларидан тузилган $|f(x'') - f(x')|$ айырмаларни қарайлик.

12.32-таъриф. Ушбу

$$|f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

айырмалар тўпламининг аниқ юқори чегараси

$$\sup_{\rho(x', x'') < \delta} \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

$f(x)$ функциянинг M тўпламдаги узлуксизлик модули деб аталади ва $\omega(f; \delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

Бу таърифдан, функциянинг узлуксизлик модули δ нинг манфий бўлмаган функцияси эканини кўрамиз. Бундан ташқари $\delta_1 > \delta_2 > 0$ бўлганда ушбу

$$\sup_{\rho(x', x'') < \delta_1} \{|f(x'') - f(x')|\} \geq \sup_{\rho(x', x'') < \delta_2} \{|f(x'') - f(x')|\}$$

($x' \in M, x'' \in M$) тенгсизлик ўринли бўлиб, ундан

$$\omega(f; \delta_1) \geq \omega(f; \delta_2)$$

эканилиги келиб чиқади. Бу эса $\omega(f; \delta) - \delta$ нинг ўсувчи функцияси эканини билдиради.

Энди $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлиги билан унинг узлуксизлиги модули орасидаги боғланишни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

12. 18-теорема. $f(x)$ функциянинг $M \subset R^n$ тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

13-БОБ

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

Ушбу бобда биз кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби билан шуғулланамиз. Киритиладиган ва ўрганиладиган ҳосилалар ва дифференциаллар тушунчалари бир ўзгарувчининг функциялари учун киритилган мос тушунчаларнинг тегишлича умумлаштирилишидан иборат бўлади. Айни пайтда, биз кўрамизки, кўп ўзгарувчили функциялар учун хос бўлган бир қанча янги тушунчалар ҳам (йўналиш бўйича ҳосила, тўла дифференциал ва ҳоказо) ўрганилади.

1-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари

1. Функция хусусий ҳосиласининг таърифлари. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлсин. Бу тўпламда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта олиб, унинг биринчи координатаси x_1^0 га шундай $\Delta x_1 (\Delta x_1 \neq 0)$ орттирма берайликки, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин. Натижада $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция ҳам $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

хусусий орттирмага эга бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1} \quad (13.1)$$

нисбатни қарайлик. Равшанки, бу нисбат Δx_1 нинг функцияси бўлиб, у Δx_1 нинг нолдан фарқли қийматларида аниқланган.

13.1-таъриф. Агар $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да (3.1) нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), \quad f'_{x_1}$$

белгиларнинг бири билан белгиланади. Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1}.$$

Агар $x_1^0 + \Delta x_1 = x_1$ деб олсак, унда $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да $x_1 \rightarrow x_1^0$ бўлиб, натижада

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} &= \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0} \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ушбу

$$\frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

нисбатнинг $x_1 \rightarrow x_1^0$ даги limiti сифатида таърифлаш мумкин.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бошқа ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2 f}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_2}$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta x_m f}{\Delta x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_m}$$

Демак, кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бирор $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини таърифлашда бу функциянинг x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчидан бошқа барча ўзгарувчилари ўзгармас деб ҳисобланар экан. Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ 1-қисм, 6-боб, 1-§ да ўрганилган ҳосила — бир ўзгарувчили функция ҳосиласи каби эканлигини кўрамиз. Демак, кўп ўзгарувчили функцияларнинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласини ҳисоблашдаги маълум бўлган қоида ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкин.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ бўлсин. Бу функциянинг $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтадаги хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

бўлади.

$$2. f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \text{функциянинг } (x_1, x_2) \in R^2 (x_2 > 0) \text{ нуқтадаги хусу-}$$

сий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} - \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x_2} \right).\end{aligned}$$

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Айтайлик, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\end{aligned}$$

бўлади.

Энди $(x_1, x_2) = (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0,0)}{\Delta x_2} = 0\end{aligned}$$

бўлади.

Демак, берилган $f(x_1, x_2)$ функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ да хусусий ҳосилаларга эга.

2. Хусусий ҳосиланинг геометрик маъноси. Соддалик учун икки ўзгарувчилик функция хусусий ҳосилаларининг геометрик маъносини келтирамиз.

$f(x_1, x_2)$ функция очик $M (M \subset R^2)$ тўпдамда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ бўлсин. Бу функция (x_1^0, x_2^0) нуқтада $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Таърифга кўра $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишда ушбу $y_1 = f(x_1, x_2^0)$ ва $y_2 = f(x_1^0, x_2)$ бир ўзгарувчилик функцияларнинг x_1^0 ва x_2^0 даги ҳосилаларидан иборат.

Фараз қилайлик, $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг графиги II-чизмада кўрсатилган сиртга тасвирласин. Унда $y_1 = f(x_1, x_2^0)$ ва $y_2 = f(x_1^0, x_2)$

функцияларнинг графиклари мос равишда $y = f(x_1, x_2)$ сирт билан $x_2 = x_2^0$ текислиkning ҳамда шу сирт билан $x_1 = x_1^0$ текислиkning қесилишидан ҳосил бўлган Γ_1 ва Γ_2 чизиқлардан иборат.

Маълумки, бир ўзгарувчили $u = \varphi(x)$ функциянинг бирор x_0 ($x_0 \in R$) нуқтадаги ҳосиласининг геометрик маъноси (1-қисм, 6-боб, 1-§) бу функция тасвирлаган эгри чизиққа ($x_0, \varphi(x_0)$) нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан, яъни уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчакининг тангенсидан иборат эди. $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишда Γ_1 ва Γ_2 эгри чизиқларга (x_1^0, x_2^0) нуқтада ўтказилган уринмаларнинг Ox_1 ва Ox_2 ўқлар билан ташкил этган бурчакининг тангенсини билдиради. Демак, $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар $y = f(x_1, x_2)$ сиртнинг мос равишда Ox_1 ва Ox_2 ўқлар йўналиши бўйича ўзгариш даражасини кўрсатади.

Функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг хусусий ҳосиллага эга бўлиши орасидаги боғланиш. $f(x)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in M$ нуқтада чекли $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосиллага эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'_{x_1}(x^0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}$$

бўлиб, ундан

$$\Delta_{x_1} f = f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

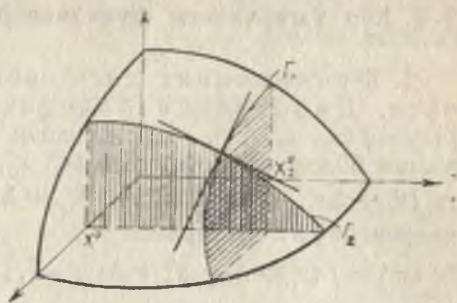
бўлишини топамиз, бунда $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$. Натижада

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Delta_{x_1} f = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} [f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1] = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада чекли $f'_{x_k}(x^0)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосиллага эга бўлса, $f(x)$ функция шу нуқтада мос x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчилари бўйича хусусий узлуксиз бўлади.

Бироқ кўп ўзгарувчили $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан, унинг шу нуқтада узлуксиз (барча ўзгарувчилари бўйича бир йўла узлуксиз) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу параграфнинг 1-пунктида келтирилган 3-мисолдаги $f(x_1, x_2)$ функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса-да, бу функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз (иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз) эмас (қаралсин, 12-боб, 1-§).



11-чизма

2-§. Кўп ўзгарувчи функцияларнинг дифференциалланувчилиги

1. Функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси. Дифференциалланувчиликнинг зарурий шарти. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлсин. Бу тўпلامда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = x^0$ нуқта билан бирга $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқтани олиб, берилган функциянинг тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

ни қараймиз.

Равшанки, функциянинг $\Delta f(x^0)$ орттирмаси аргументлар орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлиб, кўпчилик ҳолларда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар билан Δf орасидаги боғланиш мураккаб бўлади. Табиийки, бунда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга кўра Δf ни аниқ ёки тақрибий ҳисоблаш қийинлашади. Натижада орттирмаси $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмалар билан соддароқ боғланишда бўлган функцияларни ўрганиш масаласи юзага келади.

13.2-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттирмасини

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (13.2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ лар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ бўлганда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ деб олинади).

Агар $f(x)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция M тўпلامда дифференциалланувчи деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функцияни қарайлик. Бу функция $\forall (x_1^0, x_2^0) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (x_1^0, x_2^0) нуқтада берилган функциянинг орттирмаси

$$\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

бўлиб, унда $A_1 = 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2$ дейилса, натижада

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

$f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шарти (13.2) ни қуйидаги

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (13.3)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз, бунда $\rho(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = x^0$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}.$$

Равшанки,

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

ва

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$$

бўлади.

Энди $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да (13.2) муносабатдаги $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ миқдор ρ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатамиз. Агар

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = \rho \left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \dots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho} \right) \quad (\rho \neq 0)$$

муносабатда

$$\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|) \rho$$

бўлади. Демак,

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho).$$

Шундай қилиб, (13.2) шартнинг ўринли бўлишдан (13.3) нинг ўринли бўлиши келиб чиқди.

Агар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шarti (13.3) кўринишда ўринли бўлса, бундан бу шартнинг (13.2) кўриниши ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Шунини исботлайлик.

Агар $\rho = 0$ бўлса, унда $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ бўлади ва (13.3) дан (13.2) келиб чиқади.

$\rho \neq 0$ бўлсин. Унда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг барчаси бир йўлга тенг бўлмайди. Шунини эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} o(\rho) &= \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + \\ &+ \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho} \cdot \Delta x_m = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \\ &+ \dots + \alpha_m \Delta x_m, \end{aligned}$$

бунда

$$\alpha_k = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиб, $\rho \rightarrow 0$, яъни $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$, ..., $\Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$, ..., $\alpha_m \rightarrow 0$.

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилигининг (13.2) ва (13.3) шартлари ўзаро эквивалентдир.

Энди дифференциалланувчи функциялар ҳақида иккита теорема келтирамиз.

13.1-теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлади, бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ — ўзгармас, $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$, ..., $\Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$, ..., $\alpha_m \rightarrow 0$.

Юқоридаги тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(x^0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

13.2. теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0)$, $f'_{x_2}(x^0)$, ..., $f'_{x_m}(x^0)$ мавжуд ва улар мос равишда (13.2) муносабатдаги $A_1, A_2, \dots, A_m$ ларга тенг бўлади, яъни

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1, f'_{x_2}(x^0) = A_2, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m.$$

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (13.2)$$

бўлади. Бу тенгликда

$$\Delta x_1 \neq 0, \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_m = 0$$

деб олсак, унда (13.2) ушбу

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \cdot \Delta x_1$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx_1 га бўлиб, сўнг $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1.$$

Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжудлиги ҳамда

$$f'_{x_1}(x^0) = A_2, f'_{x_2}(x^0) = A_3, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

эканлиги кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

13.1-натижа. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + o(\rho)$$

бўлади.

13.1-эслатма. $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ нинг мавжуд бўлишидан, функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга:

$$f'_{x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$f'_{x_2}(0, 0) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0.$$

Берилган функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f(0, 0) = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}}$$

бўлиб, уни (13.2) ёки (13.3) кўринишида ифодаб бўлмайди. Буни исботлаш мақсадида, тескарисини, яъни $f(x_1, x_2)$ функция $(0, 0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин деб фараз қилайлик. Унда

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 0) &= f'_{x_1}(0, 0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(0, 0) \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 = \\ &= \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 \end{aligned} \quad (13.4)$$

бўлиб, бу муносабатда $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}} = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2. \quad (13.5)$$

Маълумки, Δx_1 ва Δx_2 лар ихтиёрий орттирмалар. Жумладан, $\Delta x_1 = \Delta x_2$ бўлганда (13.5) тенглик ушбу

$$\frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}} = \Delta x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)$$

бунда $0 < \theta_i < 1 (i = 1, 2, \dots, m)$.

бунда $0 < \theta_i < 1 (i = 1, 2, \dots, m)$.

Одатда (13.6) функция орттирмасининг формуласи деб аталади.
Шаргга кўра x^0 нуқтада $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалар уз-

дуксиз. Шунга кўра

$$f'_x(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) = f'_{x_1}(x^0) + \alpha_1,$$

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_1}(x^0) + \alpha^2,$$

$$f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) = f'_{x_m}(x^0) + \alpha_m \quad (13.7)$$

бүлнб, унда $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots$

$\therefore \alpha_m \rightarrow 0$ булади.

(13.6) ва (13.7) муносабатлардан

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

булиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бир ва кўп ўзгарувчи функцияларда функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси киритилди (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 4-§ ҳамда ушбу бобнинг 2-§.) Уларни солиштириб қуйидаги хулосаларга келамиз.

1) Бир ўзгарувчилик функцияларда ҳам, кўп ўзгарувчилик функцияларда ҳам функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, бир ва кўп ўзгарувчилик функцияларда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши билан унинг узлуксиз бўлиши орасидаги муносабат бир хил.

2) Маълумки, бир узгарувчилик функцияларда функциянинг бирор нуктада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуктада чекли ҳосилага эга бўлиши келиб чиқади ва, аксинча, функциянинг бирор нуктада чекли ҳосилага эга бўлишидан унинг шу нуктада дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

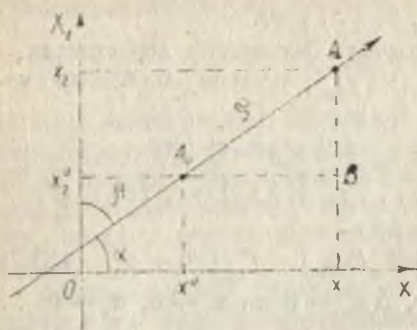
Кўп ўзгарувчи функцияларда функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. Бироқ, функциянинг бирор нуқтада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Демак, бир ва куп ўзгарувчи функцияларда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши билан унинг ҳосилага (хусусий ҳосилага) бўлиши орасидаги муносабат бир хил эмас экан.

3-§. Йўналиш бўйича ҳосила

Маълумки, бир ўзгарувчи $y = f(x)$ функциянинг $(x \in R, y \in R)$ $\frac{dy}{dx}$

хосиласи бу функциянинг ўзгариш тезлигини билдирар эди. Кўп ўзгаришчи $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $((x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$,



12- чизма

$y \in R$) хусусий ҳосилалари ҳам бир ўзгарувчилик функциянинг ҳосиласи каби эканлигини эътиборга олиб, бу $\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \dots, \frac{df}{dx_m}$ хусусий ҳосилалар ҳам $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг мос равишда $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_m$ ўқлар бўйича (R^m фазода) ўзгариш тезлигини ифодалайди деб айтиш мумкин.

Энди функциянинг ихтиёрий йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодаловчи тушунча билан танишайлик. Соддалик учун икки ўзгарувчилик функцияни қараймиз.

$y = f(x_1, x_2) = f(A)$ функция очик M тўпلامда ($M \in R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпلامда ихтиёрий $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтани олиб, у орқали бирор тўғри чизиқ ўтказайлик ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. Бу йўналган тўғри чизиқни l дейлик.

α ва β деб l йўналган тўғри чизиқ мусбат йўналиши билан мос равишда Ox_1 ва Ox_2 координата ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакларни олайлик (12-чизма). Унда $\triangle A_0AB$ дан

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} = \cos \beta$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда $\cos \alpha$ ва $\cos \beta$ лар l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

l тўғри чизиқда A_0 нуқтадан фарқли ва M тўпламга тегишли бўлган A нуқтани ($A = (x_1, x_2)$) олайликки, A_0A кесма M тўпламга тегишли бўлсин. Агарда A нуқта A_0 га нисбатан l тўғри чизиқнинг мусбат йўналиши томонида бўлса (шаклдагидек), у ҳолда A_0A кесма узунлиги $\rho(A_0, A)$ ни мусбат ишора билан, манфий йўналиши томонида жойлашган бўлса, манфий ишора билан олишга келишайлик.

13.3-таъриф. A нуқта l йўналган тўғри чизиқ бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A \rightarrow A_0$) ушбу нисбат

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\rho((x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2))}$$

нинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2) = f(A)$ функциянинг $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги l йўналиши бўйича ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{df(A_0)}{dl} \quad \text{ёки} \quad \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{df}{dl} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}$$

Энди $f(x_1, x_2)$ функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласининг мавжудлиги ҳамда уни топиш масаласи билан шуғулланамиз.

13.4-теорема. $f(x_1, x_2)$ функция очик M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. Агар бу функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада ($(x_1^0, x_2^0) \in M$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга ва

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta. \quad (13.8)$$

Исбот. Шартга кўра $f(x_1, x_2)$ функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функция орттирмиси

$$f(A) - f(A_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

учун

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + o(\rho) \quad (13.9)$$

бўлади, бунда

$$\rho = \rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

(13.9) тенгликнинг ҳар икки томонини $\rho = \rho(A_0, A)$ га бўлсак, у ҳолда

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{\rho} + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \quad (13.10)$$

бўлади.

Натижада (13.10) тенглик ушбу

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

кўринишга келади. Бу тенгликда $A \rightarrow A_0$ да (яъни $\rho \rightarrow 0$ да) лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

бўлади. Демак,

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

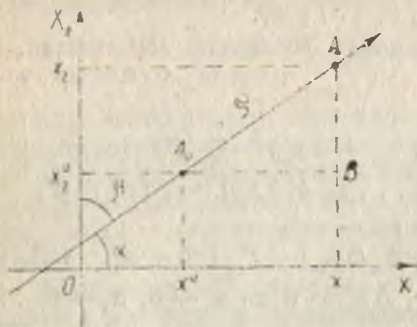
Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$$

функцияни қарайлик.

1-биринчи квадратнинг $(1, 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $(0, 0)$ нуқталан $(1, 1)$ нуқта-



12-чизма

$y \in R$) хусусий ҳосилаларни ҳам бир ўзгарувчилик функциянинг ҳосиласи каби эканлигини эътиборга олиб, бу $\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \dots, \frac{df}{dx_m}$ хусусий ҳосилалар ҳам $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг мос равишда $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_m$ ўқлар бўйича (R^m фазода) ўзгариш тезлигини ифодалайди деб айтиш мумкин.

Энди функциянинг ихтиёрий йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодаловчи тушунча билан тапширайлик. Соддалик учун икки ўзгарувчилик функцияни қараймиз.

$y = f(x_1, x_2) = f(A)$ функция очик M тўпلامда ($M \in R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпلامда ихтиёрий $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтани олиб, у орқали бирор тўғри чизик ўтказайлик ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. Бу йўналган тўғри чизикни l дейлик.

α ва β деб l йўналган тўғри чизик мусбат йўналиши билан мос равишда Ox_1 ва Ox_2 координата ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакларни олайлик (12-чизма). Унда $\triangle A_0AB$ дан

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} = \cos \beta$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда $\cos \alpha$ ва $\cos \beta$ лар l тўғри чизикнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

l тўғри чизикда A_0 нуқтадан фарқли ва M тўпламга тегишли бўлган A нуқтани ($A = (x_1, x_2)$) олайликки, A_0A кесма M тўпламга тегишли бўлсин. Агарда A нуқта A_0 га нисбатан l тўғри чизикнинг мусбат йўналиши томонидан бўлса (шаклдагидек), у ҳолда A_0A кесма узунлиги $\rho(A_0, A)$ ни мусбат ишора билан, манфий йўналиши томонидан жойлашган бўлса, манфий ишора билан олишга келишайлик.

13.3-таъриф. A нуқта l йўналган тўғри чизик бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A \rightarrow A_0$) ушбу нисбат

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\rho((x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2))}$$

нинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2) = f(A)$ функциянинг $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{df(A_0)}{dl} \text{ ёки } \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{df}{dl} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}$$

Энди $f(x_1, x_2)$ функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласининг мавжудлиги ҳамда уни топиш масаласи билан шуғулланамиз.

13.4-теорема. $f(x_1, x_2)$ функция очик M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. Агар бу функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада ($(x_1^0, x_2^0) \in M$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосиллага эга ва

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta. \quad (13.8)$$

Исбот. Шартга кўра $f(x_1, x_2)$ функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функция орттирмаси

$$f(A) - f(A_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

учун

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + o(\rho) \quad (13.9)$$

бўлади, бунда

$$\rho = \rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

(13.9) тенгликнинг ҳар икки томонини $\rho = \rho(A_0, A)$ га бўлсак, у ҳолда

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{\rho} + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \quad (13.10)$$

бўлади.

Натижада (13.10) тенглик ушбу

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

кўринишга келади. Бу тенгликда $A \rightarrow A_0$ да (яъни $\rho \rightarrow 0$ да) лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

бўлади. Демак,

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

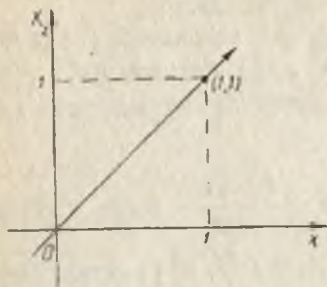
Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_1}{x_2}$$

функцияни қарайлик.

1-биричи квадратнинг $(1, 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $(0, 0)$ нуқтадан $(1, 1)$ нуқта-



13- чизма

га қараб йўналган биссектрисасидан иборат (13-чизма). Берилган функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.
Берилган

$$f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_1}{x_2}$$

функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлиги равшан. Унда юқорида келтирилган (13.8) формуладан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} \frac{df(1, 1)}{dl} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} \times \\ &\times \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)_{x_1=1, x_2=1} \times \\ &\times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{df(1, 1)}{dl} = 0.$$

Қаралаётган функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги Ox_1 ва Ox_2 l координата ўқлари бўйича ҳосилалари мос равишда

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}$$

бўлади.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функциянинг $A_0 = (0, 0)$ нуқтада исталган l йўналиш бўйича ҳосиласи

$$\frac{df(0, 0)}{dl} = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = 1$$

бўлади.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

функциянинг $(0, 0)$ нуқтада Ox_1 координата ўқи бўйича ҳосиласи 1 га тенг бўлиб, Ox_2 координата ўқи бўйича ҳосиласи мавжуд эмас.

13.2- эслатма. Функция бирор нуқтада дифференциалланувчилик шартини қаноатлантирмаса ҳам, у шу нуқтада бирор йўналиш бўйича

ва ҳатто ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга бўлиши мумкин.
Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функция $A_0 = (0, 0)$ нуқтада дифференциалланувчилик шартини бажармайди. Юқорида кўрдикки, бу функция $(0, 0)$ нуқтада исталган йўналиш бўйича ҳосилага эга.

4-§. Кўп ўзгарувчилик мураккаб функцияларнинг дифференциалланувчилиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M (M \subset R^m)$ тўпلامда берилган бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбағида $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг $T (T \subset R^k)$ тўпلامда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлсин. Натижада ушбу

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

мураккаб функцияга эга бўламиз.

1. Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги.

13.5-теорема. Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада $(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0))$ дифференциалланувчи бўлса, y ҳолда мураккаб функция $F(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ҳам $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтани олиб, унинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k$ орттирмалар берайликки, $(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) \in T$ бўлсин. У ҳолда (13.11) ифодадаги ҳар бир функция ҳам $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларга ва ниҳоят $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция Δf орттирмага эга бўлади.

Шартга кўра (13.11) ифодадаги функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho), \\ \Delta x_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho), \\ &\dots \\ \Delta x_m &= \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho)\end{aligned}\quad (13.12)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k$) хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган,

$$\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}$$

Шартга асосан, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \\ &+ \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m\end{aligned}\quad (13.13)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ бўлади.

(13.12) ва (13.13) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right] \Delta t_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right] \Delta t_2 + \\ &+ \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right] \Delta t_k + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.\end{aligned}\quad (13.14)$$

Бу тенгликдаги $\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}$ йигинди ўзгармас (ρ га боғлиқ эмас) бўлганлиги сабабли

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) = o(\rho)$$

бўлади.

Модомики, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функциялар ($t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0$) нуқтада дифференциалланувчи экан, улар шу нуқтада узлуксиз булади. Унда узлуксизлик таърифига кўра $\Delta t_1 \rightarrow 0, \Delta t_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta t_k \rightarrow 0$ да, яъни $\rho \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ булади. Яна ҳам аниқроқ айтсак, (13.12) формулалардан $\rho \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 = o(\rho), \Delta x_2 = o(\rho), \dots, \Delta x_m = o(\rho)$ эканлиги келиб чиқади.

$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да эса $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Демак,

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \text{барча } \Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow \text{барча } \alpha_i \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho).$$

Шундай қилиб,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho) \quad (13.15)$$

булади. Агар ушбу

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_j}$$

($i = 1, 2, \dots, k$) белгилашни киритсак, у ҳолда (13.14) ва (13.15) муносабатлардан

$$\Delta f = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_k \Delta t_k + o(\rho)$$

келиб чиқади. Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функциянинг ($t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0$) нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

Теорема исбот бўлди.

2. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Энди

$$y = f(\varphi_1(t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функциянинг $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз.

Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири ($t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0$) T нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос ($x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция

$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ ҳар бир $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{aligned}$$

13.5- теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

$$\Delta f = A_1 \cdot \Delta t_1 + A_2 \cdot \Delta t_2 + \dots + A_k \cdot \Delta t_k + o(\rho) \quad (13.16)$$
$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (13.17)$$
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot t_2 \cdot + \Delta \cdot + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \quad (13.18)$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

5-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (13.3)$$
$$A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

78

Шунингдек, (13.3) муносабатдан $\rho \rightarrow 0$ да $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ — чексиз кичик миқдор $\Delta f(x^0)$ — чексиз кичик миқдорнинг бош қисми эканлигини пайқаймиз.

13.4-таъриф. $f(x)$ функция ортирмаси $\Delta f(x^0)$ нинг $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга нисбатан чиқиқли бош қисми

$$A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m$$

$f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали (тўлиқ дифференциали) деб аталади ва $df(x^0)$ ёки $df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ каби белгиланади.

Демак,

$$df(x^0) = df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Агар $x_1, x_2, \dots, x_m$ эркин ўзгарувчиларнинг ихтиёрий ортирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар мос равишда бу ўзгарувчиларнинг дифференциаллари $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ га тенг эканлигини эътиборга олсак, унда $f(x)$ функциянинг дифференциали қуйидаги

$$df(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} dx_m \quad (13.20)$$

кўринишга келади.

Одатда $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$ лар $f(x)$ функциянинг хусусий дифференциаллари деб аталади ва улар мос равишда $d_{x_1} f, d_{x_2} f, \dots, d_{x_m} f$ каби белгиланади:

$$d_{x_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, d_{x_2} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, d_{x_m} f = \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали, унинг шу нуқтадаги хусусий дифференциаллари йиғиндисидан иборат.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 \sin x_2}$$

функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, унинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = \sin x_2 e^{x_1 \sin x_2} dx_1 + x_1 \cos x_2 e^{x_1 \sin x_2} dx_2 = e^{x_1 \sin x_2} (\sin x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2)$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг дифференциали $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтага боғлиқ бўлиши билан бирга бу ўзгарувчиларнинг ортирмалари $\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \dots, \Delta x_m = dx_m$ ларга ҳам боғлиқдир.

Функциянинг дифференциали содда геометрик маънога эга. Қуйида уни келтирамиз.

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M тўпда ($M \subset R^n$) берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада ($x^0 \in M$) дифференциалланувчи бўлсин. Демак, бу функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

учун

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) + o(\rho)$$

бўлади.

Фараз қилайлик $y = f(x)$ функциянинг графиги R^{m+1} фазодаги ушбу

$$(S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m; y): (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R_m, y \in R\}$$

сиртдан иборат бўлсин. Геометриядан маълумки, бу сиртнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасидан ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$) ўтувчи ҳамда Oy ўқи-га параллел бўлмаган текисликларнинг умумий тенгламаси

$$Y - y_0 = A_1(X_1 - x_1^0) + A_2(X_2 - x_2^0) + \dots + A_m(X_m - x_m^0)$$

бўлади, бунда $X_1, X_2, \dots, X_m, Y$ — текисликдаги ўзгарувчи нуқта-нинг координаталари.

Хусусан, ушбу

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) \quad (13.21)$$

текислик эса (S) сиртга $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик деб аталади.

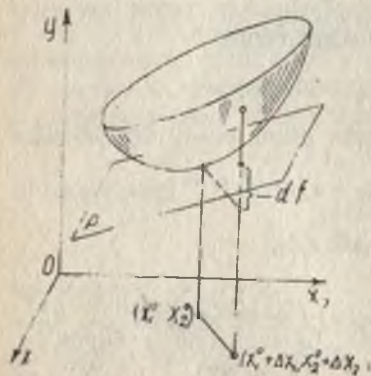
Агар $x_1 - x_1^0 = dx_1, x_2 - x_2^0 = dx_2, \dots, x_m - x_m^0 = dx_m$ дейилса, унда (13.21) уринма текислик

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)dx_1 + f'_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0)dx_m = df(x^0)$$

кўринишга келади.

Натижада қуйидаги хулосага келамиз: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_m = x_m^0$ қийматларига мос равишда орттирмалар берайлик. У ҳолда функциянинг мос орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, \\ &x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y - \\ &- y_0 \quad (S) \text{ сирт } (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0) \\ &\text{ва } (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \\ &+ \Delta x_m, y) \end{aligned}$$



14- ҚИСМ

нуқталарнинг охири, y координатаси олган орттирмани бeлдиради.
Функциянинг шу нуқтадаги дифференциали эса

$$df(x^0) = Y - y_0$$

уринма текислик $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m, Y)$ нуқталарининг охирги, y координатаси олган орттирмани билдиради.

Хусусан, $y = f(x_1, x_2)$ функция очик M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу функциянинг графиги 14-чизмада тасвирланган (S) сиртини ифодаласин. (S) сиртга (x_1^0, x_2^0, y_0) нуқтасида ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$) ўтказилган уринма текислик ушбу

$$Y - Y_0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0)$$

күрнншда бўлиб, ундан

$$Y - y_0 = df(x_1^0, x_2^0)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг (x_1^0, x_2^0) нуқтадаги дифференциали бу функция графигига $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ нуқта-сида ўтказилган уришма текислик аппликатасининг орттирмасидан иборат экан.

2. Мураккаб функциянинг дифференциали, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M (M \subset R^m)$ тўпلامда берилган бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг $T (T \subset R^k)$ тўпلامда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\vdots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлиб, ушбу

$$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Фараз қилайлик (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Унда мураккаб функциянинг шу нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$$

булади

Энди $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ хусусий ҳосилаларни, ушбу бобнинг

хосилалари $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ билан (6)

$x_1, \dots, x_m$ аргументларнинг ҳар бири $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг функцияси) мос аргумент дифференциаллари $dx_i (i = 1, 2, \dots, m)$ кўпайтмасидан иборат эканини кўрамиз.

Шундай қилиб, қаралаётган функциялар мураккаб

$$f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$$

($x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k), (i = 1, 2, \dots, m)$) кўринишда бўлганда ҳам, бу функцияларнинг дифференциаллари бир хил (13.22) формага эга бўлади (яъни дифференциал формаси сақланади). Одатда бу хоссани дифференциал формасининг (шаклининг) инвариантлиги дейилади.

Демак, кўп ўзгарувчилик функцияларда ҳам, бир ўзгарувчилик функциялардагидек, дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли экан.

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, (13.22) ифодада $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ лар $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг ихтиёрий орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар бўлмасдан, улар $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг функциялари бўлади.

3. Функция дифференциалини ҳисоблашнинг содда қоидалари. $u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар очик $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ нуқтада улар дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $u \pm v, u \cdot v, \frac{u}{v} (v \neq 0)$ функциялар ҳам шу x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва уларнинг дифференциаллари учун қуйидаги

$$1) d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$2) d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

$$3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

формулалар ўринлили бўлади.

Бу муносабатлардан бирининг, масалан, 2) нинг исботини келтириш билан чегараланамиз.

$u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар кўпайтмасини F функция деб қарайлик: $F = u \cdot v$. Натижада F функция u ва v лар орқали $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) мураккаб функцияси бўлади. Мураккаб функциянинг дифференциалини топиш формуласи (13.22) га кўра

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv$$

бўлади.

Агар

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u.$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$dF = v \cdot du + u \cdot dv$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$d(u \cdot v) = vdu + u dv.$$

4. Тақрибий формулалар. Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объект. Кўпгина масалалар эса функцияларни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Қаралаётган функция мураккаб кўринишда бўлса, равишанки, унинг қийматини аниқ ҳисоблаш қийин, баъзида эса мавжуд усуллар ёрдамида ҳисобланмай қолиши мумкин*.

Чексиз сондаги операцияларни бажариш билан ҳал бўладиган масалаларни, жумладан баъзи функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш билан боғлиқ масалаларни ечишда қаралаётган функция ундан соддароқ, ҳисоблаш учун осонроқ бўлган функция билан алмаштирилади. Бундай алмаштиришлар билан тақрибий формулаларни ҳосил қилишда функциянинг дифференциал тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

$f(x)$ функция очик M ($M \subset R^n$) тўпلامда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$\Delta f = \Delta f(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) = df(x^0) + o(\rho)$$

бўлиб, ундан ($df \neq 0$)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{df} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{df + o(\rho)}{df} = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Бундан эса қуйидаги

$$\Delta f(x^0) \approx df(x^0) \quad (13.23)$$

тақрибий формула келиб чиқади. Бу (13.23) формула $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттирмасини, унинг x^0 нуқтадаги $df(x^0)$ дифференциали билан тақрибан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг моҳияти шундаки, функциянинг Δf орттирмаси $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) ўзгарувчилар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларининг, умуман айтганда, мураккаб функцияси бўлган ҳолда функциянинг df дифференциали эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг чизиқли функцияси бўлишидадир.

(13.23) формулани ушбу

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) &\approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\ &+ \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} \Delta x_m \end{aligned} \quad (13.24)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

* Тўғи, функцияларнинг қийматини ҳисоблашда электрон ҳисоблаш машиналаридан кенг фойдаланилади. Шубҳасиз, ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналари қисқа вақт ичида жуда кўп операцияларни бажариб, қўйилган масалаларни ҳал қилиб беради.

Агар $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, ..., $\Delta x_m = x_m - x_m^0$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги (13.24) формула қуйидагича бўлади:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \\ + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} (x_m - x_m^0).$$

Хусусан, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = (0, 0, \dots, 0) \in M$ бўлганда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx f(0, 0, \dots, 0) + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_1} x_1 + \\ + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_m} x_m$$

бўлади.

5. Бир жинсли функциялар. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M (M \subset R^m)$ тўпلامда берилган. M тўпلامда $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқта билан ушбу $(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)$ нуқта $(-\infty < t < \infty)$ ҳам шу M тўпلامга тегишли бўлсин.

13.5-таъриф. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция учун

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (13.25) \\ ((x_1, x_2, \dots, x_m) \in M, p \in R)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ p -даражали бир жинсли функция деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функция иккинчи даражали бир жинсли функция бўлади, чунки

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2 = t^2 (x_1^2 + x_2^2) = t^2 f(x_1, x_2).$$

$$2. f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}} \text{ функцияни қарайлик.}$$

Бунда

$$f(tx_1, tx_2) = \operatorname{arctg} \frac{tx_2}{tx_1} + e^{\frac{tx_1}{tx_2}} = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}} = f(x_1, x_2)$$

бўлади. Демак, берилган функция нолинчи даражали бир жинсли функция экан.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1 x_2}$$

функция учун (13.25) шарт бажарилмайди. Демак, бу бир жинсли функция эмас.

Фараз қилайлик p -даражали бир жинсли $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпلامда дифференциалланувчи бўлсин. Унда

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

тенгликнинг ҳар икки томонини t бўйича дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial (tx_1)} x_1 + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial (tx_2)} x_2 + \dots + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial (tx_m)} x_m = p \cdot t^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Хусусан, $t=1$ бўлганда

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_m} x_m = p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (13.26)$$

бўлади. Бу (13.26) формула *Эйлер формуласи* деб аталади.

Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция нолинчи даражали бир жинсли функция бўлсин. Таърифга кўра

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^0 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

бўлади. Агар бу тенгликда $t = \frac{1}{x_1}$ ($x_1 \neq 0$) деб олсак, унда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиб, натижада m та ўзгарувчига боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $m-1$ та $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ ($y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_1}, \dots, y_{m-1} = \frac{x_m}{x_1}$) ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}).$$

Энди $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция p -даражали бир жинсли функция бўлсин. У ҳолда

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

бўлади. Бу тенгликда ҳам $t = \frac{1}{x_1}$ ($x_1 \neq 0$) десак, ундан

$$\frac{1}{x_1^p} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right) = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, p -даражали бир жинсли функция ушбу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^p \cdot F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

кўринишга эга бўлар экан.

6. §. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1. Функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар ўз навбатида $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, уларнинг функциялари бўлади. Демак, берилган функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ ларнинг ҳам хусусий ҳосилаларини қараш мумкин.

13.6-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ ларнинг x_k ($k=1, 2, \dots, m$) ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг *иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари* деб аталади ва

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \dots, f''_{x_m x_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} = f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Бу иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни умумий ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, m)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $k=i$ бўлганда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = f''_{x_k x_k}$$

деб ёзиш ўрнига

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f''_{x_k^2}$$

деб ёзилади.

Агар юқоридаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар турли ўзгарувчилар бўйича олинган бўлса, унда бу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad (i \neq k)$$

2-тартибли хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* деб аталади.

Худди шунга ўхшаш, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳозирда тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади. Умуман, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(n-1)$ -тартибли хусусий ҳосиласининг хусусий ҳосиласи берилган функциянинг n -тартибли хусусий ҳосиласи деб аталади.

Шуни ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ ўзгарувчилар бўйича турли тартибда олинган хусусий ҳосилалари берилган функциянинг турли аралаш ҳосилаларини юзага келтиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \quad (x_2 \neq 0)$$

функциянинг 2-тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топамиз.

Айталик $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right)$$

бўлади.

Берилган $f(x_1, x_2)$ функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларини таърифга кўра тоғамиз:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, \Delta x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1}}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{-\Delta x_2^3}{\Delta x_2^4} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2 \partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x_1, 0)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2}}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1^3}{\Delta x_1^4} = 1.$$

Бу келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг бўлиши ҳам, тенг бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

13.6-теорема. $f(x_1, x_2)$ функция очик M ($M \subset R^2$) тўғрисида берилган бўлиб, шу тўғрисида $f_{x_1}^-, f_{x_1}^+$ ҳамда $f_{x_1 x_2}^-, f_{x_2 x_1}^+$ аралаш ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нуқтада узулуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада

$$f_{x_1 x_2}^-(x_1^0, x_2^0) = f_{x_2 x_1}^+(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади.

Исбот. (x_1^0, x_2^0) нуқта координаталарига мос равишда шундай $\Delta x_1 > 0, \Delta x_2 > 0$ орттирмалар берайликки,

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^0 + \Delta x_2\} \subset M$$

бўлсин. Бу тўғрисида тўртбurchак учларини ифодаловчи $(x_1^0, x_2^0), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0), (x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$ нуқталарда функциянинг қийматларини тоғиб улардан ушбу

$$P = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) + f(x_1^0, x_2^0)$$

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0)] - [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)],$$

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2)] - [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)]$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Энди берилган $f(x_1, x_2)$ функция ёрдамида x_1 ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2^0),$$

x_2 ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$\psi(x_2) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)$$

функцияларни тузайлик. Равшанки, $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$ функциялар

$$\varphi'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0),$$

$$\psi'(x_2) = f'_{x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)$$

ҳосилаларга эга бўлиб, Лагранж теоремасига асосан

$$\varphi'(x_1) = f'_{x_1 x_1}(x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2,$$

$$\psi'(x_2) = f'_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2) \Delta x_1$$

(13.27)

бўлади, бунда $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Юқорида келтирилган P ифодани $\varphi(x_1)$ ва $\psi(x_2)$ функциялар орқали ушбу

$$P = \varphi(x_1^0 + \Delta x_1) - \varphi(x_1^0),$$

$$P = \psi(x_2^0 + \Delta x_2) - \psi(x_2^0)$$

кўринишда ёзиб, сўнг яна Лагранж теоремасини қўллаб қуйидагиларни топамиз:

$$P = \varphi'(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1) \Delta x_1, \quad P = \psi'(x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \Delta x_2$$

$$(0 < \theta'_1, \theta'_2 < 1).$$

(13.28)

Натижада (13.27) ва (13.28) муносабатлардан

$$P = f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2,$$

$$P = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2$$

бўлиб, улардан эса

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2)$$

(13.29)

бўлиши келиб чиқади.

Шартга кўра $f''_{x_1 x_2}$ ва $f''_{x_2 x_1}$ аралаш ҳосилалар (x_1^0, x_2^0) нуқтада узлуксиз. Шунинг учун (13.29) да $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ (бунда $x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0$, $x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0$, $x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0$, $x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0$) лимитга ўтсак,

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Агар $f(x_1, x_2)$ функция очиқ M ($M \subset R^2$) тўпламда юқори тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, бу ҳосилаларга нисбатан юқоридаги теоремани такрор қўллаш мумкин.

Масалан, f'_{x_1} , f'_{x_2} , $f''_{x_1 x_1}$ ларга теоремани татбиқ этиб қуйидагиларни топамиз:

$$f'''_{x_1 x_1 x_1} = f'''_{x_1 x_2 x_1} = f'''_{x_2 x_1 x_1},$$

$$f'''_{x_1 x_2 x_2} = f'''_{x_2 x_1 x_2} = f'''_{x_2 x_2 x_1},$$

$$f^{(IV)}_{x_1 x_1 x_2 x_2} = f^{(IV)}_{x_2 x_2 x_1 x_1} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_2 x_1} = f^{(IV)}_{x_2 x_1 x_1 x_2} = f^{(IV)}_{x_2 x_2 x_1 x_1} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_1 x_2}.$$

2. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли дифференциали тушунчасини келтиришдан аввал, функциянинг n ($n > 1$) марта дифференциалланувчилиги тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ бўлсин. Маълумки, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги орттормаси ушбу

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho)$$

кўринишда ифодаланса, функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталар эди, бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ — ўзгармас сонлар, $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Бу ҳолда кўрган эдикки, $A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, ($i = 1, 2, \dots, m$).

Айтайлик, $f(x)$ функция M тўпلامда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу хусусий ҳосилалар x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ шу нуқтада икки марта дифференциалланувчи функция деб аталади.

Умуман, $f(x)$ функция M тўпلامда барча $n - 1$ -тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар $x^0 \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада n марта дифференциалланувчи функция деб аталади.

13.7-теорема. Агар очик M тўпلامда $f(x)$ функциянинг барча n -тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд ва $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлади.

Бу теорема функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодаловчи 13.3-теореманинг исботланганлиги каби исботланади.

Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлиб, $y = x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бу функциянинг x нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (13.20)$$

бўлади, бунда $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ лар $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттормаларидир.

Энди $f(x)$ функция $x \in M$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

13.7-таъриф. $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали $df(x)$ нинг дифференциали берилган $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва у $d^2 f$ каби белгиланади:

$$d^2 f = d(df).$$

Юқоридаги (13.20) муносабатни эътиборга олиб, дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) dx_1 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_m\right) dx_2 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m = \quad (13.30) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2 + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} dx_2 dx_4 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_2 dx_m + \\
&+ \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.
\end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтадаги учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридгидек таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги $(n-1)$ -тартибли дифференциали $d^{n-1}f(x)$ нинг дифференциал берилган $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги n -тартибли дифференциали деб аталади ва $d^n f$ каби белгиланади. Демак,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Биз юқорида $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг хусусий ҳосилалари орқали (13.30) муносабат билан ифодаланишини кўрдик.

$f(x)$ функциянинг кейинги тартибли дифференциалларининг функция хусусий ҳосилалари орқали ифодаси борган сари мураккаблаша боради. Шу сабабли юқори тартибли дифференциалларни, символик равишда, соддароқ формада ифодалаш муҳим.

$f(x)$ функция дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

ни символик равишда (f ни формал равишда қавс ташқарисига чиқариб) қуйидагича

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) f$$

ёзамиз. Унда функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \quad (13.31)$$

деб қараш мумкин. Бунда қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнг f га «кўпайтирилади». Кейин даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилалар тартиби деб ҳисобланади.

Шу тарзда киритилган символик ифодадаш $f(x)$ функциянинг n -тартибли дифференциалини

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f$$

каби ёзиш имконини беради.

3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Ушбу пунктда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\dots$, $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$) мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциалларини топамиз.

Маълумки, (13.11) функциянинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи ва дифференциал шаклининг инвариантлик хоссасига асосан мураккаб функциянинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

бўлади.

Фараз қилайлик, (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда мураккаб функция ҳам $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлади. Дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \right) = \\ &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} d(dx_1) + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d(dx_2) + \\ &\quad + \dots + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) dx_m + \frac{\partial f}{\partial x_m} d(dx_m) = \\ &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) dx_m + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Шу нўл билан берилган мураккаб функциянинг кейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

(13.31), (13.32) формулаларни солиштириб, иккинчи тартибли дифференциалларда дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли эмаслигини кўрамиз.

13.3-э с л а т м а. Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{11} t_1 + \alpha_{12} t_2 + \dots + \alpha_{1k} t_k + \beta_1, \\x_2 &= \alpha_{21} t_1 + \alpha_{22} t_2 + \dots + \alpha_{2k} t_k + \beta_2, \\&\vdots \\x_m &= \alpha_{m1} t_1 + \alpha_{m2} t_2 + \dots + \alpha_{mk} t_k + \beta_m\end{aligned}\quad (13.33)$$

бўлса (α_{ji}, β_j ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, m$) — ўзгармас сонлар), у ҳолда бундай $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари дифференциал шаклининг инвариантлигини хос-сасига эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам (13.33) ифодадаги функцияларни дифференциалласак, унда

$$\begin{aligned}dx_1 &= \alpha_{11} dt_1 + \alpha_{12} dt_2 + \dots + \alpha_{1k} dt_k = \alpha_{11} \Delta t_1 + \alpha_{12} \Delta t_2 + \dots + \alpha_{1k} \Delta t_k, \\dx_2 &= \alpha_{21} dt_1 + \alpha_{22} dt_2 + \dots + \alpha_{2k} dt_k = \alpha_{21} \Delta t_1 + \alpha_{22} \Delta t_2 + \dots + \alpha_{2k} \Delta t_k, \\&\vdots \\dx_m &= \alpha_{m1} dt_1 + \alpha_{m2} dt_2 + \dots + \alpha_{mk} dt_k = \alpha_{m1} \Delta t_1 + \alpha_{m2} \Delta t_2 + \dots + \alpha_{mk} \Delta t_k\end{aligned}$$

бўлиб $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ ларнинг ҳар бири $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларга боғлиқ эмаслигини кўрамиз. Равшанки, бундан $d^2x_1 = d^2x_2 = \dots = d^2x_m = 0$. Бинобарин,

$$\begin{aligned}d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\&= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \\&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f\end{aligned}$$

бўлади.

Демак, иккинчи тартибли дифференциаллар дифференциал шакли-нинг инвариантлиги хоссасига эга экан.

Шунга ўхшаш, бу ҳолда мураккаб функциянинг иккидан катта тартибдаги дифференциалларида дифференциал шаклининг инвариант-лиги хоссаси ўринли бўлиши кўрсатилади.

7-§. Урта қиймат ҳақида теорема

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган. Бу тўпламда шундай $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқта-ларни олайликки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, x_m = a_m + t(b_m - a_m); 0 \leq t \leq 1\}$$

шу M тўпламга тегишли бўлсин: $A \subset M$.

13-теорема. Агар $f(x)$ функция A кесманинг a ва b нуқталари-да узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида функция

дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда A кесмада шундай c нуқта ($c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$) топиладики,

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функцияни A тўпلامда қарайлик. Унда

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)t$ ўзгарувчининг $[0, 1]$ сегментда берилган функциясига айланади:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)).$$

Бу функция $(0, 1)$ интервалда ушбу

$$F'(t) = f'_{x_1}(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(b_m - a_m)$$

ҳосилага эга бўлади.

Демак, $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз, $(0, 1)$ интервалда эса $F'(t)$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига (1-қисм, 6-боб, 6-§) кўра $(0, 1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(1) - F(0) = F'(t_0) \quad (0 < t_0 < 1) \quad (13.34)$$

бўлади. Равшанки,

$$F(0) = f(a), \quad F(1) = f(b),$$

$$\begin{aligned} F'(t_0) = & f'_{x_1}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m) \\ & + a_m)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + \\ & + t_0(b_m - a_m))(b_2 - a_2) + \dots + \\ & + f'_{x_m}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + \\ & + t_0(b_m - a_m))(b_m - a_m). \end{aligned} \quad (13.35)$$

Агар

$$a_1 + t_0(b_1 - a_1) = c_1,$$

$$a_2 + t_0(b_2 - a_2) = c_2$$

$$\dots$$

$$a_m + t_0(b_m - a_m) = c_m$$

деб белгиласак, унда $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in A$ бўлиб, юқоридаги (13.34) ва (13.35) тенгликлардан

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема ўра қиймат ҳақидаги теорема деб аталди. 13.2-натижа. $f(x)$ функция боғламли $M (M \subset R^n)$ тўпلامда берилган бўлиб, унинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. Агар M тўпلامнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлса, функция M тўпلامда ўзгармас бўлади.

Шуни исботлайлик. M тўпланда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқталарни олайлик. Бу нуқталарни бирлаштирувчи кесма шу M тўпламга тегишли бўлсин. У ҳолда шу кесма нуқталарида 13.8-теоремага кўра

$$f(a) = f(x) + f'_{x_1}(c)(a_1 - x_1) + f'_{x_2}(c)(a_2 - x_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(a_m - x_m)$$

бўлади. Функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг эканидан

$$F(x) = F(a)$$

бўлиши келиб чиқади.

a ва x нуқталарни бирлаштирувчи кесма M тўпламга тегишли бўлмаса, унда M тўпламнинг боғламли эканлигидан a ва x нуқталарни бирлаштирувчи ва шу тўпламга тегишли бўлган синиқ чизик топилади, бу синиқ чизик кесмаларига юқоридаги 13.8-теоремани қўллай бориб,

$$f(a) = f(x)$$

бўлишини топамиз.

8-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг Тейлор формуласи

1-қисм, 6-боб, 7-§ да бир ўзгарувчилик функциянинг Тейлор формуласи, унинг турли формулада ёзилиши ҳамда Тейлор формуласининг турли формадаги қолдиқ ҳадлари ўрганилган эди. Масалан, $F(t)$ функция $t = t_0$ нуқтанинг атрофида берилган бўлиб, унда $F(t)$, $F'(t)$, $\dots$, $F^{(n+1)}(t)$ ҳосилаларга эга бўлганда

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + R_n(t) \quad (13.36)$$

бўлади, бунда қолдиқ ҳад $R_n(t)$ эса қуйидагича

$$a) \text{ Коши кўринишида } R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{n!} (t - t_0)^{n+1} (1 - \theta)^n,$$

$$b) \text{ Лагранж кўринишида } R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1},$$

в) Пеано кўринишида $R_n(t) = o((t - t_0)^n)$ ёзилади (бунда $0 < \theta < 1$, $c = t_0 + \theta(t - t_0)$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпланда берилган. Бу тўпланда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтани олиб, унинг $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)) \subset M$ атрофини қарайлик. Равшанки, $\forall (x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) \in U_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта билан $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтани бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = x_1^0 + t(x_1^a - x_1^0),$$

$$x_2 = x_2^0 + t(x_2^a - x_2^0), \dots, x_m = x_m^0 + t(x_m^a - x_m^0); 0 \leq t \leq 1\}$$

шу $U_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ атрофга тегишли бўлади.

Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $U_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ да $n+1$ марта дифференциалланувчи бўлсин.

Энди $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияни A тўпламда қарайлик. Унда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0), x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m' - x_m^0))$$

бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ t ўзгарувчининг $[0, 1]$ да берилган функция-сига айланиб қолади:

$$F(t) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0), x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m' - x_m^0)) \\ (0 \leq t \leq 1). \quad (13.37)$$

Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0) \right) f, \\ F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1' - x_1^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2' - x_2^0)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_m' - x_m^0)^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1' - x_1^0)(x_2' - x_2^0) + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m}(x_{m-1}' - x_{m-1}^0)(x_m' - x_m^0) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0) \right)^2 f.$$

Умуман k -тартибли ҳосила ушбу

$$f^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0) \right)^k f \\ (k = 1, 2, \dots, n+1) \quad (13.38)$$

кўринишида бўлади. (Унинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида исботланади).

Юқоридаги $F'(t)$, $F''(t)$, $\dots$, $F^{(n)}(t)$ ҳосилаларнинг ифодаларига кирган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0), x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m' - x_m^0))$ нуқтада ҳи-собланган.

(13.36) формулада $t_0 = 0$ ва $t = 1$ деб олинса, ушбу

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta) \\ (0 < \theta < 1) \quad (13.36)$$

ҳосил бўлади. (Бу ерда қолдиқ ҳад Лагранж кўринишида олинган.)
(13.37) ва (13.38) муносабатлардан фойдаланиб қуйидагиларни то-памиз:

$$F(0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), \\ F(1) = f(x_1', x_2', \dots, x_m').$$

Кейинги тенгликдаги $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада ҳисобланган.

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right) f + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^2 f + \\ &\quad + \dots \dots \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^n f + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^{n+1} f \end{aligned}$$

Бу формула кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг Тейлор формуласи деб аталади.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_1^0) (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_2^0)^2 \right] + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^n} (x_1 - x_1^0)^n + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2} (x_1 - x_1^0)^{n-1} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2^{n-1}} (x_1 - x_1^0) (x_2 - x_2^0)^{n-1} + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^n} (x_2 - x_2^0)^n \right] + \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_1^{n+1}} (x_1 - x_1^0)^{n+1} + \dots + \frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_2^{n+1}} (x_2 - x_2^0)^{n+1} \right].$$

9-§. Кўп ўзгарувчи функциянинг экстремум қийматлари. Экстремумнинг зарурий шарти

1. Функциянинг максимум ва минимум қийматлари. Кўп ўзгарувчи функциянинг экстремум қийматлари таърифлари худди бир ўзгарувчи функцияники сингари киритилади. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция бирор очик $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин.

13.8-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: \rho(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \delta\} \subset M$ атрофи мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leq f(x^0) \quad (f(x) \geq f(x^0))$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада *максимумга (минимумга) эга* дейилади, $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг *максимум (минимум) қиймати* ёки *максимуми (минимуми)* дейилади.

13.9-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0)$ атрофи мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ учун $f(x) < f(x^0)$ ($f(x) > f(x^0)$) бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада *қатъий максимумга (қатъий минимумга)* эга дейилади. $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг *қатъий максимум (минимум) қиймати* ёки *қатъий максимуми (қатъий минимуми)* дейилади.

Юқоридаги таърифлардаги x^0 нуқта $f(x)$ функцияга максимум (минимум) (13.8-таърифда), қатъий максимум (қатъий минимум) (13.9-таърифда) қиймат берадиган нуқта деб аталади.

Функциянинг максимум (минимум) қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\} \quad f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\}.$$

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \quad (x_1^2 + x_2^2 \leq 1)$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нуқтада қатъий максимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтанинг ушбу

$$U_r((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^2 + x_2^2 < r^2\} \quad (0 < r < 1)$$

атрофи олинса, унда $\forall (x_1, x_2) \in U_r((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$ учун

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} < f(0, 0) = 1$$

бўлади.

13.8 ва 13.9-таърифлардан кўринадики, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги қиймати $f(x^0)$ ни унинг шу нуқта атрофидаги нуқталардаги

қийматлари билангина солиштирилар экан. Шунинг учун функциянинг экстремуми (максимуми, минимуми) *локал экстремум* (*локал максимум*, *локал минимум*) деб аталади.

2. Функция экстремумининг зарурий шарт. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган. Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада максимумга (минимумга) эга бўлсин. Таърифга кўра $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0) \subset M$ атрофи мавжудки, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\delta(x^0)$ учун

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)),$$

хусусан

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$$

бўлади. Натижада бир ўзгарувчига (x_1) га боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ функциянинг $U_\delta(x^0)$ да энг катта (энг кичик) қиймати $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ га эришишини кўрамиз. Агарда x^0 нуқтада $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосила мавжуд бўлса, унда Ферма теоремаси (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) га кўра

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = f'_{x_1}(x^0) = 0$$

бўлади.

Худди шунингдек, $f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса,

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз.

13.9-теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлади.

Бироқ $f(x)$ функциянинг бирор $x' \in R^m$ нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_{x_1}(x') = 0, f'_{x_2}(x') = 0, \dots, f'_{x_m}(x') = 0$$

бўлишидан, унинг шу x' нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, R^2 тўпламда берилган

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

функцияни қарайлик. Бу функция $f_{x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $f_{x_2}(x_1, x_2) = x_1$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(0, 0)$ нуқтада нолга айланади. Аммо $f(x_1, x_2) = x_1, x_2$ функция $(0, 0)$ нуқтада экстремумга эга эмас (бу функциянинг графиги гиперболик параболондн ифодалайди, қаралсин 12-боб, 3-§).

Демак, 13.9-теорема бир аргументли функциялардагидек функция экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалар экан.

$f(x)$ функция хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар нуқталари* дейилади.

13.4-эслатма. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функциянинг экстремумга эришишининг зарурий шартини ушбу

$$df(x^0) = 0 \quad (13.39)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада барча $f_{x_1}^0, f_{x_2}^0, \dots, f_{x_m}^0$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. x^0 нуқтада функция экстремумга эришишидан теоремага кўра

$$f_{x_1}^0(x^0) = 0, f_{x_2}^0(x^0) = 0, \dots, f_{x_m}^0(x^0) = 0$$

бўлади. Бундан эса (13.39) бўлиши топилади.

10-§. Функция экстремумининг етарли шarti

Биз юқорида $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада экстремумга эришишининг зарурий шартини кўрсатдик. Энди функциянинг экстремумга эришишининг етарли шартини ўрганамиз.

$f(x)$ функция $x^0 \in R^m$ нуқтанинг бирор

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

атрофда берилган бўлсин. Ушбу

$$\Delta = f(x) - f(x^0) \quad (13.40)$$

айирмани қарайлик. Равшанки, бу айирма $U_\delta(x^0)$ атрофда ўз ишорасини сақласа, яъни ҳар доим $\Delta \geq 0$ ($\Delta \leq 0$) бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга (максимумга) эришади. Агар (13.40) айирма ҳар қандай $U_\delta(x^0)$ атрофда ҳам ўз ишорасини сақламаса, у ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. Демак, масала (13.40) айирма ўз ишорасини сақлайдиган $U_\delta(x^0)$ атроф мавжудми ёки йўқми, шунинг аниқлашдан иборат. Бу масалани биз, хусусий ҳолда, яъни $f(x)$ функция маълум шартларни бажарган ҳолда ечамиз.

$f(x)$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:
1) $f(x)$ функция бирор $U_\delta(x^0)$ да узлуксиз, барча ўзгарувчилари биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;
2) x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси, яъни

$$f_{x_1}^0(x^0) = 0, f_{x_2}^0(x^0) = 0, \dots, f_{x_m}^0(x^0) = 0.$$

Ушбу бобнинг 8-§ ида келтирилган Тейлор формуласидан фойдаланиб, x^0 нуқтанинг стационар нуқта эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^0) + \frac{1}{2} [f''_{x_1^2} \Delta x_1^2 + f''_{x_2^2} \Delta x_2^2 + \dots + f''_{x_m^2} \Delta x_m^2 + \\ &+ 2(f''_{x_1 x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + f''_{x_1 x_3} \Delta x_1 \Delta x_3 + \dots + f''_{x_{m-1} x_m} \Delta x_{m-1} \Delta x_m)] = \\ &= f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m f''_{x_i x_k} \Delta x_i \Delta x_k. \end{aligned}$$

Бу муносабатда $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_{ik}}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) лар ушбу

$$(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m) \quad (0 < \theta < 1)$$

нуқтада ҳисобланган ва

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \dots, \Delta x_m = x_m - x_m^0.$$

Демак,

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m f''_{x_i x_k} \Delta x_i \Delta x_k.$$

Берилган $f(x)$ функция иккинчи тартибли ҳосилаларининг стационар нуқтадаги қийматларини қуйидагича белгилэйлик:

$$a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x^0) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Унда $f''_{x_i x_k}(x)$ нинг x^0 нуқтада узлуксизлигидан

$f''_{x_i x_k} = f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m) = a_{ik} + \alpha_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) бўлиши келиб чиқади. Бу муносабатда $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да барча $\alpha_{ik} \rightarrow 0$ ва 6-§ да келтирилган 13.6-теоремага асосан

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлади. Натижада (13.40) айирма ушбу

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right)$$

кўринишни олади. Бунини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \right).$$

Агар

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

деб белгиласак, унда

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k \right) \quad (13.41)$$

бўлади.
Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

ифода $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси* деб аталади, a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, m$) лар эса квадратик форманинг *коэффициентлари* дейилади. Равшанки, ҳар қандай квадратик форма ўз коэффициентлари орқали тула аниқланади. Квадратик формалар алгебра курсида батафсил ўрганилади. Қуйида биз квадратик формага доир баъзи (келгусида қўлланиладиган) тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Равшанки $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$ бўлса, ҳар қандай квадратик форма учун

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0$$

бўлади.

Энди бошқа нуқталарни қарайлик. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) > 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *мусбат аниқланган* дейилади.

2. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *манфий аниқланган* дейилади.

3. Баъзи ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$) нуқталар учун $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) > 0$, баъзи нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *ноаниқ* дейилади.

4. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \geq 0$$

ва улар орасида шундай ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$) нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *яриммусбат аниқланган* дейилади.

5. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leq 0$$

ва улар орасида шундай ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$) нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *яримманфий аниқланган* дейилади.

1. Ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма мусбат аниқланган бўлсин. Аввало юқоридаги

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$$

ва

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгликлардан

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$$

эканлигини топамиз. Маълумки, R^n фазода

$$S_1(0) = S_1((0, 0, \dots, 0)) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\} \in R^m:$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$$

маркази $0 = (0, 0, \dots, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг сферани ифодалайди. Сфера ёпиқ ва чегараланган тўплам. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига асосан шу сферада $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ функция узлуксиз функция сифатида чегараланган, хусусан қуйидан чегараланган бўлади:

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \geq c \quad (c = \text{const}).$$

Агар $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланган эканлигини эътиборга олсак, унда $c \geq 0$ бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра бу $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ функция $S_1(0)$ сферада ўзининг аниқ қули чегарасига эришади, яъни бирор $(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) \in S_1(0)$ учун

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) = \min Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

бўлади. Яна $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланганлигини эътиборга олсак,

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) > 0$$

эканини топамиз. Демак, $S_1(0)$ сферада

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k \geq c > 0$$

бўлади.

Энди

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

ни баҳолаймиз. Коши — Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, то-
памиз:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right| &= \left| \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right) \xi_i \right| \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^2 \xi_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^2 \sum_{k=1}^m \xi_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Маълумки, $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$, ..., $\Delta x_m \rightarrow 0$ да барча $\alpha_{ik} \rightarrow 0$.
Бундан фойдаланиб x^0 нуқтанинг атрофини етарлича кичик қилиб олиш
ҳисобига

$$\left(\sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{c}{2}$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Демак, (13.41) дан

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right) \geq \frac{\rho^2}{2} \left(c - \frac{c}{2} \right) = \frac{\rho^2 c}{4} > 0.$$

2. Қуйидаги

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма манфий аниқланган бўлсин. Бу ҳолда x^0 нуқтанинг
етарлича кичик атрофида $\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right) < 0$ бў-
лиши 1-ҳолдагига ўхшаш кўрсатилади. Натижада қуйидаги георемага
келамиз.

13.10-теорема, $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг бирор $U_\delta(x^0)$ атро-
фида ($\delta > 0$) берилган бўлсин ва у ушбу шартларни бажарсин:

- 1) $f(x)$ функция $U_\delta(x^0)$ да барча ўзгарувчилар $x_1, x_2, \dots, x_m$ бўйи-
ча биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;
- 2) x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси;
- 3) коэффициентлари

$$a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x^0) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлган

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган. У ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга (максимумга) эришади.

Бу теорема функция экстремумининг етарли шартини фойдалайди.

3. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма ноаниқ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришмайди. Шунинг исботлайлик. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ларнинг шундай $(h_1, h_2, \dots, h_m)$ ва $(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m)$ қийматлари топиладики,

$$Q(h_1, h_2, \dots, h_m) > 0, \quad Q(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m) < 0 \quad (13.42)$$

бўлади.

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \text{ ва } (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 + h_m)$$

нуқталарни бирлаштирувчи

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + th_1, \\ x_2 &= x_2^0 + th_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= x_m^0 + th_m \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned} \quad (13.43)$$

кесманинг нуқталари учун юқоридаги (13.41) муносабат ушбу

$$\Delta = \frac{t^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} h_i h_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} h_i h_k \right)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи (13.42) га кўра мусбат бўлади. Иккинчи қўшилувчи эса, $t \rightarrow 0$ да нолга интилади (чунки $t \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0 \rightarrow 0$, $\dots$, $\Delta x_m = x_m - x_m^0 \rightarrow 0$). Демак, (13.43) кесманинг x^0 нуқтага етарлича яқин бўлган x нуқталари учун Δ айирма мусбат, яъни

$$f(x) > f(x^0)$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \bar{t}h_1, \\ x_2 &= x_2^0 + \bar{t}h_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= x_m^0 + \bar{t}h_m \end{aligned}$$

кесманинг x^0 нуқтага етарлича яқин бўлган x нуқталари учун Δ айирма манфий, яъни

$$f(x) < f(x^0)$$

бўлиши кўрсатилади.

Демак, $\Delta = f(x) - f(x^0)$ айирма x^0 нуқтанинг ҳар қандай етарлича кичик атрофида ўз ишорасини сақламайди. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада экстремумга эришмаслигини билдиради.

4 — 5. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма яриммусбат аниқланган бўлса ёки яримманфий аниқланган бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришиши ҳам, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириб аниқланади.

Юқоридаги 13.10-теореманинг 3-шарти, яъни $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганликка алоқадор шарти теореманинг марказий қисмини ташкил этади. Квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганлигини алгебра курсидан маълум бўлган Сильвестр аломатидан фойдаланиб топиш мумкин. Қуйида бу аломатни исботсиз келтирамыз.

Сильвестр аломати. Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m b_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлиши учун

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларнинг, манфий аниқланган бўлиши учун

$$b_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \dots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Хусусий ҳолни, функция икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни қарайлик.

$f(x_1, x_2)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтанинг бирор атрофи

$$U_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : \rho(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

да берилган бўлсин ва бу атрофда барча биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. x^0 эса қаралаётган функциянинг стационар нуқтаси бўлсин:

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, \quad f'_{x_2}(x^0) = 0.$$

Одатдагидек

$$a_{11} = f''_{x_1 x_1}(x^0), \quad a_{12} = f''_{x_1 x_2}(x^0), \quad a_{22} = f''_{x_2 x_2}(x^0).$$

1°. Агар

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришини ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Ҳақиқатан ҳам, 1°- ва 2°-ҳолларда квадратик форма мос равишда мусбат аниқланган ёки манфий аниқланган бўлади (қаралсин: Сильвестр аломати).

3°-ҳолда, яъни

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \quad (13.44)$$

бўлганда $Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ квадратик форма ноаниқ бўлади. Шунини исботлайлик.

$a_{11} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.44) дан $a_{12} \neq 0$ бўлиши келиб чиқади. Натижада $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2)\xi_2$$

кўринишга келади. Бу квадратик форма

$$\xi_1 = \frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \xi_2 = 1$$

қийматда мусбат:

$$Q\left(\frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, 1\right) = 1 > 0 \text{ ва } \xi_1 = \frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, \quad \xi_2 = -1,$$

қийматда эса манфий:

$$Q\left(\frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, -1\right) = -1 < 0$$

бўлади.

Энди $a_{11} > 0$ бўлсин. Бу ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик формани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left[\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2 \right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} \xi_2^2 \right] \quad (13.45)$$

Кейинги тенгликдан $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1\right) < 0$$

ва $\forall \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{22}a_{22}}{a_{11}^2}}$, $\xi_2 = 1$ қийматларда эса

$$Q(\xi_1, 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Ва ниҳоят, $a_{11} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.45) муносабатдан фойдаланиб, $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форманинг $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда мус-

бат $Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1\right) > 0$ ва $\forall \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2}}$, $\xi_1 = 1$ қийматларда эса манфий

$$Q(\xi_1, 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлганда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форманинг ноаниқ бўлиши исбот этилди.

4- ҳолни, яъни $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда, $a_{11} = 0$ бўлса, унда $a_{12} = 0$ бўлиб, $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{22}\xi_2^2$$

кўринишини олади.

Равшанки, $a_{22} \geq 0$ бўлганда

$$Q(\xi_1, \xi_2) \geq 0,$$

$a_{22} \leq 0$ бўлганда

$$Q(\xi_1, \xi_2) \leq 0$$

бўлиб, ξ_1 нинг ихтиёрий қийматида

$$Q(\xi_1, 0) = 0$$

бўлади.

Агар $a_{11} > 0$ бўлса,

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2 \right)^2 \geq 0,$$

$a_{11} < 0$ бўлганда

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2 \right)^2 \leq 0$$

бўлиб, ξ_1 ва ξ_2 ларнинг

$$\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма нолга тенг бўлади. Демак, қаралаётган ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма яриммусбат аниқланган ёки яримманфий аниқланган бўлади. Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар. 1. Ўшбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 \quad (a \neq 0)$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2) &= 3x_1^2 - 3ax_2, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3ax_1, \\ f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2) &= 6x_1, \quad f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = -3a, \quad f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) = 6x_2 \end{aligned}$$

бўлади.

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3ax_2 = 0, \\ 3x_2^2 - 3ax_1 = 0 \end{cases}$$

системани ечиб, берилган функциянинг стационар нуқталари $(0, 0)$ ва (a, a) эканини тошамиз.

(a, a) нуқтада

$$a_{11} = 6a, \quad a_{12} = -3a, \quad a_{22} = 6a$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 27a^2 > 0$$

бўлади.

Демак, $a > 0$ бўлганда ($a_{11} > 0$ бўлиб) функция (a, a) нуқта минимумга эришади, $a < 0$ бўлганда функция (a, a) нуқтада максимумга эришади. Равшанки, $f(a, a) = -a^3$. $(0, 0)$ нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9a^2 < 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 + 2)^3$$

функцияни қарайлик. Берилган функциянинг стационар нуқтаси $(-2, -2)$ нуқта бўлади. Бу нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлишини топиш қийин эмас. Демак, биз бу ерда юқоридаги 4^о-«шубҳали» ҳолни учратаямиз. Экстремум бор-йўқлигини аниқлаш учун қўшимча текшириш ўтказишимиз керак. $(-2, -2)$ нуқтадан ўтувчи $x_2 = x_1$ тўғри чизиқнинг нуқталарини қараймиз. Равшанки, бу тўғри чизиқ нуқталарида берилган функция

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 2)^3$$

бўлиб, $x_2 < -2$ да $f(x_1, x_2) < 0$, $x_2 > -2$ да $f(x_1, x_2) > 0$ бўлади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция $(-2, -2)$ нуқта атрофида ишора сақламайди. Бинобарин, берилган функция $(-2, -2)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

11- §. Ошкормас функциялар

1. Ошкормас функция тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 1-§ ида функция таърифи келтирилган эди. Уни эслатиб ўтамиз. Агар X тўпламдаги ($X \subset R$) ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан ($Y \subset R$) битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган деб аталар ва у

$$f: x \rightarrow y \text{ ёки } y = f(x)$$

каби белгиланар эди. Бунда x га y ни мос қўядиган қоида ёки қонун турлича, жумладан аналитик, жадвал ҳамда график усулларда бўлишини кўрдик. Масалан, функциянинг график усулда берилишида x билан y орасидаги боғланиш текисликдаги эгри чизиқ ёрдамида бажариларди.

Энди икки x ва y аргументларнинг $F(x, y)$ функцияси

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенгламани қарайлик. Бирор x_0 сонни ($x_0 \in (a, b)$) олиб, уни юқоридаги тенгламадаги x нинг ўрнига қўямиз. Натижада y ни топиш учун қуйидаги

$$F(x_0, y) = 0 \quad (13.46)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг ечими ҳақида ушбу ҳоллар бўлиши мумкин:

1°. (13.46) тенглама ягона ҳақиқий y_0 ечимга эга,

2°. (13.46) тенглама битта ҳам ҳақиқий ечимга эга эмас,

3°. (13.46) тенглама бир нечга, ҳатто чексиз кўп ҳақиқий ечимга эга.

Масалан,

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ y^2 + x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда

$$F(x, y) = 0 \quad (13.47)$$

тенглама $x_0 \geq 0$ бўлганда, ягона $y = x_0^2$ ечимга, $x_0 < 0$ бўлганда иккита

$$y = \sqrt{-x_0}, \quad y = -\sqrt{-x_0}$$

ечимларга эга бўлади.

Агар бирор $F(x, y) = 0$ тенглама учун 1°-ҳол ўринли бўлса, бундай тенглама эътиборга лойиқ. Унинг ёрдамида функция аниқланиши мумкин.

Энди x ўзгарувчининг қиймагларидан иборат шундай X тўпламни қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир қийматда $F(x, y) = 0$ тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан ихтиёрый x сонни олиб, бу сонга $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўплам

дан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қоидага кўра бигта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида бўлади. Одатда бундай берилган (аниқланган) функция *ошкормас кўринишда берилган функция* (ёки *ошкормас функция*) деб аталади ва

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \quad (13.48)$$

тенглама x нинг $R \setminus \{x \in R: -1 \leq x < 1\}$ дан олинган ҳар бир қийматида ягона

$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ечимга эга, бундан

$$F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \equiv 0.$$

Натижада (13.48) тенглама ёрдамида берилган ушбу

$$x \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}: F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0 \quad (13.49)$$

тенгламани қарайлик. Уни қуйидагича

$$x = y - \frac{1}{2} \sin y = (y) \quad (y \in (-\infty, \infty))$$

кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, $\Phi(y)$ функция $(-\infty, \infty)$ да узлуксиз ва $\Phi'(y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0$ ҳосилага эга.

Унда тескари функция ҳақидаги теоремага кўра. § (1-қисм, 5-қоб, 7-§) $y = \Phi^{-1}(x)$ функция мавжуддир. Демак, $(-\infty, \infty)$ олинган x нинг ҳар бир қийматида (13.49) тенглама ягона $y = \Phi^{-1}(x)$ ечимга эга, бундан

$$F(x, \Phi^{-1}(x)) = 0.$$

Ҳар бир x га $\Phi^{-1}(x)$ ни мос қўйиб,

$$x \rightarrow \Phi^{-1}(x): F(x, \Phi^{-1}(x)) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

3. Юқорида келтирилган (13.47) тенглама ҳам $x > 0$ да

$$x \rightarrow x^2: F(x, x^2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди.

4. Қуйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама x нинг $(-\infty, \infty)$ ораликдан олинган ҳеч бир қийматида ечимга эга эмас. Чунки ҳар доим $y^2 - \ln y > 0$. Бу ҳолда берилган тенглама ёрдамида функция аниқланмайди.

13.5-эслатма. Фаёз қилайлик, ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқламасин. Баъзан, бу ҳолда y га маълум шарт қўйиш нағижасида юқоридаги тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлаши мумкин.

Масалан, қуйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (13.50)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама x нинг $(-1, 1)$ ораликдан олинган ҳар бир қийматида иккита

$$y = -\sqrt{1-x^2},$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

ечимларга эга. Агар y га, унинг қийматлари $[-1, 0]$ сегментда бўлсин, деб шарт қўйилса у ҳолда (13.50) тенглама ёрдамида аниқланган

$$x \rightarrow -\sqrt{1-x^2}, F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция ҳосил бўлади.

2. Ошкормас функциянинг мавжудлиги. Биз юқорида

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ёрдамида ҳар доим ошкормас кўринишдаги функция аниқланавермаслигини кўрдик.

Энди тенглама, яъни $F(x, y)$ функция қандай шартларни бажарганда ошкормас кўринишдаги функциянинг аниқланиши, бошқача айтганда, ошкормас кўринишдаги функциянинг мавжуд бўлиши масаласи билан шуғулланамиз.

13.11-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор

$$U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади,

2') $x = x_0$ бўлганда унга мос келган $y = y_0$ бўлади,

3') ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $U_{h,k}((x_0, y_0))$ агрофга тегишли бўлган $(x_0, y_0 - \varepsilon)$, $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ нуқталарни олайлик. Равшанки, $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ оралиқда $F(x_0, y)$ функция ўсувчи бўлади. Демак,

$$y_0 - \varepsilon < y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 - \varepsilon) < F(x_0, y_0),$$

$$y_0 + \varepsilon > y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 + \varepsilon) > F(x_0, y_0).$$

Теореманинг 3-шартига кўра

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

бўлади.

Теореманинг 1-шартига кўра $F(x, y)$ функция $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x, y_0 - \varepsilon)$ ва $F(x, y_0 + \varepsilon)$ функциялар $(x_0 - h, x_0 + h)$ оралиқда узлуксиз бўлади. Унда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) x_0 нуқтанинг шундай атрофи $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ топиладики ($0 < \delta < h$), $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ бўлади.

Равшанки, (x_0, y_0) нуқтанинг ушбу

$U_{\delta,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофи учун теореманинг барча шартлари бажарилаверади, чунки

$$U_{\delta,k}((x_0, y_0)) < U_{h,k}((x_0, y_0)).$$

$\forall x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуқтани олиб, $F(x^*, y)$ функцияни қарайлик. Бу функция, юқорида айтилганига кўра $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ оралиқда узлуксиз ва унинг четки нуқталарида турли ишорали қийматларга эга:

$$F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$$

У ҳолда Больцано — Кошининг биринчи теоремасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) шундай y^* топиладики ($y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$),

$$F(x^*, y^*) = 0$$

бўлади. Бу топилган y^* ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y \neq y^* \Rightarrow F(x^*, y) \neq F(x^*, y^*), \quad (y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon])$$

чунки, $F(x^*, y)$ ўсувчи бўлганлиги сабабли $y > y^*$ учун $F(x^*, y) > F(x^*, y^*)$ ва $y < y^*$ учун $F(x^*, y) < F(x^*, y^*)$ бўлади.

Шундай қилиб, x нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир қийматида $F(x, y) = 0$ тенглама ягона y ечимга эга эканлиги кўрсатилди. Бу эса $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0 \quad (13.51)$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланганлигини билдиради.

$x = x_0$ бўлсин. Унда теореманинг 3-шарти $F(x_0, y_0) = 0$ дан, x_0 га y_0 ни мос қўйилгандагина:

$$x_0 \rightarrow y_0: F(x_0, y_0) = 0.$$

Демак, $x = x_0$ да ошкормас функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлади. Энди ошкормас функциянинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ораликда узлуксиз бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ га мос қўйилладиган $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ бўлади. Бу эса ошкормас функциянинг $x = x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Ошкормас функциянинг $\forall x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш бу функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш кабидир.

Ҳақиқатан ҳам, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофи $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да ошкормас функцияни аниқлаганлигидан, шундай $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ топиладики, $F(x^*, y^*) = 0$ бўлади. Юқоридаги мулоҳазани (x^*, y^*) нуқтага нисбатан юритиб, $F(x, y) = 0$ тенглама (x^*, y^*) нуқтанинг атрофида ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлашини (бу аниқланган функция (13.51) нинг ўзи бўлади), уни x^* нуқтада узлуксиз бўлишини топамиз. Демак, ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ораликда узлуксиз бўлади. Теорема исбот бўлди.

13.6-эслагма. 13.11-теорема, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлади.

Биз юқорида $F(x, y) = 0$ тенгламани (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида x ни y нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтирдик.

Худди шунга ўхшаш, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтириш мумкин.

13.12-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h, k}((x_0, y_0))$ атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва y қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h, k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) y ўзгарувчининг $(y_0 - k, y_0 + k)$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи (камаювчи),

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона x ($x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) ечимга эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида $y \rightarrow x$: $F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2') $y = y_0$ бўлганда унга мос келган $x = x_0$ бўлади,

3') ошкормас кўринишда аниқланган функция

$$y \rightarrow x: F(x, y) = 0$$

$(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ да узлуксиз бўлади.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган 13.11-теореманинг исботи кабирдир.

3. Ошкормас функциянинг ҳосиласи. Энди ошкормас функциянинг ҳосиласини топиш билан шуғулланамиз.

13.13-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва y қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз,

2) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2') $x = x_0$ бўлганда унга мос келадиган $y = y_0$ бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади;

4') бу ошкормас кўринишдаги функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга бўлади.

Исбот. Шартга кўра $F'_y(x, y)$ функция $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Аниқлик учун $F'_y(x_0, y_0) > 0$ дейлик. У ҳолда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики, $\forall (x, y) \in U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0))$

учун $F'_y(x, y) > 0$ бўлади. Демак, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида, y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи. Юқорида исбот этилган 13.11-теоремага кўра

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди, $x = x_0$ бўлганда унга

мос келган $y = y_0$ бўлади ва ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлади.

Энди ошкормас функциянинг ҳосиласини топамиз, x_0 нуқтага шундай Δx орттирма берайликки, $x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ бўлсин. Натijaда

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас функция ҳам орттирмага эга бўлиб,

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0 \quad (13.52)$$

Шартга кўра $F'_x(x, y)$ ва $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи:

$$\Delta F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) \Delta x + F'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \quad (13.52')$$

Бу муносабатдаги α ва β лар Δx ва Δy ларга боғлиқ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

(13.52') ва (13.52) муносабатлардан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ошкормас функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигини эътиборга олиб, кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta} \right) = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Демак,

$$y'_{x=x_0} = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар узлуксиз ва $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлишидан ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0 \quad (13.53)$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ функция $\{(x, y) \in R^2: -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ тўпламда юқоридagi 13.11-теореманинг барча шарт-

ларини қаноатлантиради. Демак, $\forall (x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида (13.53) тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди ва бу ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлади.

Ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳосиласини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади. y нинг x га боғлиқ эканини эътиборга олиб, $F(x, y) = 0$ дан топамиз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0.$$

Бундан эса

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқорида келтирилган (13.53) тенглама ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) y' = e^y + ye^x + (xe^y + e^x) y' = 0, \quad (*)$$

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}.$$

4. Ошкормас функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. Фараз қилайлик,

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида ошкормас кўринишдаги функцияни аниқласин. Агар $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга ($F'_y(x, y) \neq 0$) эга бўлса, ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз ҳосилага эга бўлиб,

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (13.54)$$

бўлади.

Энди $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз иккинчи тартибли $F''_{xx}(x, y)$, $F''_{xy}(x, y)$, $F''_{yy}(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин, y нинг x га боғлиқлигини эътиборга олиб, (13.54) тенгликни x бўйича дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$y'' = -\frac{(F'_x(x, y))'_x F'_y(x, y) - (F'_y(x, y))'_x F'_x(x, y)}{(F'_y(x, y))^2}.$$

Агар

$$\begin{aligned} (F'_x(x, y))'_x &= F''_{xx}(x, y) + F''_{xy}(x, y) y', \\ ((F'_y(x, y))'_x &= F''_{yx}(x, y) + F''_{yy}(x, y) y' \end{aligned} \quad (13.55)$$

эканлигини ҳисобга олсак, унда

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(F''_{yx}(x, y) + F''_{yy}(x, y) y') \cdot F'_x(x, y) - (F''_{xx}(x, y) + F''_{xy}(x, y) y') \cdot F'_y(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} = \\ &= \frac{F''_{yx}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{xx}(x, y) \cdot F'_y(x, y) + [F''_{yy}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{xy}(x, y) \cdot F'_y(x, y)] y'}{(F'_y(x, y))^2} \end{aligned}$$

бўлади. Бу ифодадаги y' нинг ўрнига унинг қиймати $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ни қўйиб, ошкормас кўринишдаги функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи учун қуйидаги формулага келамиз:

$$y'' = \frac{2F'_x(x, y) \cdot F'_y(x, y) \cdot F''_{xy}(x, y) - F''_{yy}(x, y) F'^2_{xx}(x, y) - F'^2_{xx}(x, y) F''_{yy}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}.$$

Худди шу йўл билан ошкормас функциянинг учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари топилади.

13.7-эслатма. Ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади.

$F(x, y) = 0$ ни дифференциаллаб,

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Бунини яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} (F'_x(x, y))'_x + (F'_y(x, y) \cdot y')'_x &= \\ = (F'_x(x, y))'_x + y' \cdot (F'_y(x, y))'_x + F'_y(x, y) \cdot y'' &= 0. \end{aligned}$$

Юқоридаги (13.55) муносабатдан фойдалансак, у ҳолда ушбу

$$F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) y' + F''_{yy}(x, y) \cdot y'^2 + F'_y(x, y) \cdot y'' = 0$$

тенгликка келамиз. Унда эса

$$y'' = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) y' + F''_{yy}(x, y) \cdot y'^2}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги y' нинг ўрнига унинг қиймати $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ни қўйсак, унда

$$y'' = \frac{2F'_x(x, y) F'_y(x, y) F''_{xy}(x, y) - F''_{yy}(x, y) F'^2_{xx}(x, y) - F'^2_{xx}(x, y) F''_{yy}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$$

ни дифференциаллаб (қаралсин (*)) формула),

$$e^y + ye^x + (xe^y + e^x) \cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Бунни яна бир марта дифференциаллаб топамиз:

$$e^y \cdot y' + y' e^x + ye^x + e^y \cdot y' + xe^y y' \cdot y' + xe^y y'' + y'' e^x + y' e^x = 0,$$

яъни

$$y'' (xe^y + e^x) + 2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x.$$

Бундан эса

$$y'' = - \frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги y' унинг ўринига унинг қиймати

$$y' = - \frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}$$

ни қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз.

5. Кўп ўзгарувчили ошкормас функциялар. Кўп ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси юқорида ўрганилган бир ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси каби киритилади.

$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n$) $M = \{(x, y) \in R^{n+1} : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_m < x_m < b_m, c < y < d\}$ тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенгламани қарайлик.

$x \in R^m$ нуқталардан иборат шундай X тўпламни ($X \subset R^m$) қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир нуқтада (13.56) тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга бўлсин. Энди X тўпламдан ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтага (13.56) тенгламанинг ягона ечими бўлган y ни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x нуқтага, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, бигта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функция кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) ошкормас кўринишда берилган функция деб аталади ва

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

ёки

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y = 0$$

тенглама $R^3 \setminus \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 = x_2^2\}$ тўпладан олинган ҳар бир (x_1, x_2) нуқтада ягона

$$y = \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}$$

ечимга эга, яъни

$$F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0.$$

Демак, берилган тенглама ёрламида x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг ошқормас кўринишдаги функцияси аниқланади:

$$(x_1, x_2) \rightarrow \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}: F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0$$

Энди кўп ўзгарувчили ошқормас кўринишдаги функциянинг мавжудлиги, узлуксизлиги ҳамда ҳосилаларга эга бўлиши ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

13.14-теорема. $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция $(x^0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1}: x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофида ($h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k > 0$) берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;

2) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m\}$$

тўпладан олинган ҳар бир тайин қийматида у ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи (камаювчи);

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x^0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \varepsilon}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1}: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$
 атрофи ($0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \dots, m, 0 < \varepsilon < k$) топилдики,

$$1') \forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} \text{ учун}$$

$$F(x, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни (13.56) тенглама $x \rightarrow y: F(x, y) = 0$ ошқормас кўринишдаги функцияни аниқлайди:

2') $x = x^0$ бўлганда, унга мос келган $y = y_0$ бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

функция

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўғламда узлуксиз бўлади.

13.15-теорема. $F(x, y)$ функция $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0))$ атрофида берилган ва y қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;

2) $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз $F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \neq 0$;

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x^0, y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \varepsilon}((x^0, y_0))$ атрофи ($0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \dots, m, 0 < \varepsilon < k$) топилдики,

1') $\forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ учун

$$F(x, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни (13.56) тенглама $x \rightarrow y: F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди;

2') $x = x^0$ бўлганда, унга мос келадиган $y = y_0$ бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган функция

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўғламда узлуксиз бўлади;

4') бу ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

Бу теоремаларнинг исботи юқорида келтирилган 13.12 ва 13.13-теоремаларнинг исботи кабилар. Уларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Кўп ўзгарувчили ошкормас функциянинг ҳосилалари ҳам юқоридагига ўхшаш ҳисобланади.

Фараз қилайлик,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама берилган бўлиб, $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция 13.15-теореманинг барча шартларини қаноатлантирсин. Бу тенглама аниқлаган ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз. y нинг $x_1, x_2,$

..., x_m ларга боғлиқ эканини эътиборга олиб, (13.56) дан қуйидагиларни топамиз:

$$F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_1} = 0,$$

$$F'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_m} = 0.$$

Қейинги тенгликлардан эса

$$y'_{x_1} = - \frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)},$$

$$y'_{x_2} = - \frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y'_{x_m} = - \frac{F'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

$F(x, y)$ функция $U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m}((x^0, y_0))$ да узлуксиз юқори тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлганда $F(x, y) = 0$ тенглама аниқланган ошқормас кўринишдаги функциянинг ҳам юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1 = 0$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1$ функция 13.15-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Бу тенглама ёрдамида аниқланган ошқормас кўринишдаги функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y'_{x_1} = - \frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = - \frac{-3x_2 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2}, \quad (y^2 \neq x_1 x_2)$$

$$y'_{x_2} = - \frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = - \frac{-3x_1 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2}.$$

Бу ошқормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари қуйидагича топилади:

$$y''_{x_1} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_2 y'_{x_1} - x_2 y (2y \cdot y'_{x_1} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2},$$

$$y''_{x_2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_1 y'_{x_2} - x_1 y (2y \cdot y'_{x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2},$$

$$y''_{x_1 x_2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) (y + x_2 y'_{x_2}) - x_2 y (2y \cdot y'_{x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}.$$

Бу тенгликлардаги y_{x_2} , y'_{x_2} ларнинг ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб қуйидагиларни топамиз:

$$y_{x_1}'' = \frac{(y^2 - x_1' x_2) x_2 \frac{x_2}{y^2 - x_1 x_2} - x_2 y (2y \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} = -\frac{2x_1 x_2^3 y}{(y^2 - x_1 x_2)^2}$$

$$y_{x_1}''' = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_1 \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1 y (2y \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^3} = -\frac{2x_1^3 x_2 y}{(y^2 - x_1 x_2)^3}$$

$$y_{x_1 x_1}'' = \frac{(y^2 - x_1 x_2) \left(y + x_2 \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} \right) - x_2 y (2y \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^3} =$$

$$= \frac{y (y^4 - 2y^2 x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2)}{(y^2 - x_1 x_2)^3}$$

6. Тенгламалар системаси билан аниқланадиган ошқормас функциялар. Энди, келгусида биз учун керак буладиган янада умумийроқ ҳол билан, тенгламалар системаси орқали аниқланадиган бир неча функциялар системаси билан танишайлик.

$m+n$ та $x_1, x_2, \dots, x_m$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n$ аргументларнинг ушбу

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

функциялари R^{m+n} фазодаги бирор

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{m+n}:$$

$$\{a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m, c_1 < y_1 < d_1, \dots, c_n < y_n < d_n\}$$

тўпلامда берилган бўлсин. Қуйидаги

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ &\vdots \\ F_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.57)$$

тенгламалар системасини қарайлик. $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай

$$M_x = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m\} \subset R^m$$

тўпلامي қарайликки, бу тўпладан олинган ҳар бир $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ нуқтада (13.57) система, яъни

$$\left. \begin{aligned} F_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0 \\ F_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0 \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

система ягона ечимлар системаси $y_1, y_2, \dots, y_n$ га эга бўлсин. Энди M_x тўпладан ихтиёрий $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтани олиб, бу нуқтага (13.57) тенгламалар системасининг ягона ечимлари системаси бўлган $y_1, y_2, \dots, y_n$ ни мос қўямиз. Натижада M_x тўпладан олинган ҳар бир $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ га юқорида кўрсатилган қоидага кўра $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар мос қўйилиб, n та функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функциялар (13.57) тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциялар деб аталади. Қандай шартлар бажарилганда шу (13.57) тенгламалар системаси $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларнинг ҳар бирини $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлаши мумкинлиги ҳақидаги масала муҳим. Бундай умумий масалани ҳал қилишни бигта соддароқ ҳолни ўрганишдан бошлаймиз:

Икки $F_1 = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2 = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функция $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нуқтанинг бирор $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in R^4$: $x_1^0 - h_1 < x_1 < x_2^0 + h_1$, $x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2$, $y_1^0 - k_1 < y_1 < y_1^0 + k_1$, $y_2^0 - k_2 < y_2 < y_2^0 + k_2$ атрофида ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{aligned} \quad (13.58)$$

тенгламалар системасини қарайлик.

Энди $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар қандай шартларни бажарганда (13.58) тенгламалар системаси ошкормас функцияларни аниқлаши масаласи билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар учун

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0, F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0$$

бўлсин. Бундан ташқари қаралаётган функциялар $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга ва, айтайлик,

$$\frac{\partial F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда 13.14-теоремага кўра $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай U_1 атрофи ($U_1 \subset U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$) топиладики, бу атрофда

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

тенглама

$$(x_1, x_2, y_2) \rightarrow y_1 : F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Шу функцияни

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, y_2)$$

деб белгилайлик. Бунинг (13.58) системанинг иккинчи тенгласидаги y_1 нинг ўрнига қуйиб қуйидагини топамиз:

$$F_2(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2, y_2), y_2) = 0.$$

Энди

$$\frac{\partial F_2(x_1^0, x_2^0, f_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0), y_1^0)}{\partial y_2} \neq 0 \quad (13.59)$$

бўлсин дейлик. У ҳолда яна 13.14-теоремага кўра $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай U_2 атрофи ($U_2 \subset U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$) топиладики, бу атрофда

$$F_2(x_1, x_2, f(x_1, x_2), y_2) = 0$$

тенглама

$$(x_1, x_2) \rightarrow y_2 : F_2(x_1, x_2, f(x_1, x_2), y_2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Бу функцияни $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ деб белгилайлик.

Шундай қилиб, (13.58) тенгламалар системаси $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг бирор атрофида y_1 ва y_2 ларни x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)).$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Равшанки, $f_1(x_1^0, x_2^0, f_2(x_1^0, x_2^0)) = y_1^0$, $f_2(x_1^0, x_2^0) = y_2^0$. Юқоридаги (13.59) шартни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \neq 0.$$

Бунда барча хусусий ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтада ҳисобланган. Агар

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \left(- \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \right) = \frac{\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \neq 0$$

бўлади. Модомки,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0$$

экан, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \neq 0$$

яъни

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (13.60)$$

бўлади. Шундай қилиб (13.59) муносабатни (13.60) кўринишда ёзиш мумкин экан.

Натижада ушбу теоремага келамиз.

13.16-теорема. $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нуқтанинг бирор U_{h_1, h_2, k_1, k_2} атрофида ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$) берилган ва улар қуйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз;
- 2) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;
- 3) хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминант нолдан фарқли;

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 4) $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ да

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0, F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

У ҳолда $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай $U_{\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ атрофи ($0 < \delta_1 < h_1$, $0 < \delta_2 < h_2$, $0 < \varepsilon_1 < k_1$, $0 < \varepsilon_2 < k_2$) топилдики, бу атрофда

1') (13.58) тенгламалар системаси ошкормас кўринишидаги

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)), y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

функцияларни аниқлайди:

- 2') $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$ бўлганда: унга мос келадиган

$$y_1 = y_1^0 = f_1(x_1^0, x_2^0, f_2(x_1^0, x_2^0)), y_2 = y_2^0 = f_2(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади.

- 3') ошкормас кўринишда аниқлинган f_1 ва f_2 функциялар

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2\}$$

тўғрисида узлуксиз ва барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

$$\begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 = 1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 = 3 \end{cases} \quad (13.61)$$

системани қарайлик. Бунда

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= x_1x_2 + y_1y_2 - 1, \\ F_2(x_1, x_2) &= x_1y_2 - y_1x_2 - 3 \end{aligned}$$

бўлиб, бу функциялар (1, -1, 1, 2) нуқтанинг атрофида 13.16-теореманинг барча шартларини бажаради. Ҳақиқатан ҳам, $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар узлуксиз, узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга, (1, -1, 1, 2) нуқтада

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ҳамда

$$F_1(1, -1, 1, 2) = 0, \quad F_2(1, -1, 1, 2) = 0$$

бўлади. Демак, (13.61) система y_1 ва y_2 ларни x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди. Равшанки, бу функциялар узлуксиз, хусусий ҳосилаларга эга. Берилган (13.61) тенгламалар системасини бевосита y_1 ва y_2 ларга нисбатан ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x_1x_2 - 4x_1^2x_2^2}}{2x_2}, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4x_1x_2 - 4x_1^2x_2^2}}{2x_1}.$$

Энди (13.57) системанинг ошқормас функцияларнинг аниқлашини таъминлайдиган (ошқормас функцияларнинг мавжудлигини ифодалайдиган) теоремани исботсиз келтирамиз.

13.17-теорема. $F_1, F_2, \dots, F_n$ функцияларнинг ҳар бири $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нуқтанинг бирор

$$\begin{aligned} U_{hk}((x^0, y^0)) &= U_{h_1h_2 \dots h_m k_1k_2 \dots k_n}((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)) = \\ &= \{(x^0, y^0) \in R^{m+n} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + \\ &+ h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_1^0 - k_1 < y_1 < y_1^0 + k_1, \\ &y_2^0 - k_2 < y_2 < y_2^0 + k_2, \dots, y_n^0 - k_n < y_n < y_n^0 + k_n\} \end{aligned}$$

атрофида ($h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$) берилган ва улар қуйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $U_{hk}((x^0, y^0))$ да узлуксиз;
- 2) $U_{hk}((x^0, y^0))$ барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;
- 3) хусусий ҳосилаларнинг (x^0, y^0) нуқтадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминант нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нуқтада

$$F_1(x^0, y^0) = 0, F_2(x^0, y^0) = 0, \dots, F_n(x^0, y^0) = 0.$$

У ҳолда (x^0, y^0) нуқтанинг шундай $U_{\delta, \varepsilon}((x^0, y^0)) = U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}((x^0, y^0))$ атрофи $(0 < \delta_1 < h_1, 0 < \delta_2 < h_2, \dots, 0 < \delta_m < h_m, 0 < \varepsilon_1 < k_1, \dots, 0 < \varepsilon_n < k_n)$ топиладики бу атрофда

1') (13.57) система ошкормас кўринишдаги функциялар система-сини аниқлайди. Уларни $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дейлик;

2') $(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ да $f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_1^0, f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_2^0, \dots, f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_n^0$

бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган $f_1, f_2, \dots, f_n$ функциялар $\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m; x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ тўпламда узлуксиз ва узлуксиз хусу-сий ҳосилаларга эга бўлади.

14-БОБ

ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАР

1-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги

1. Функционал кетма-кетликлар. Ихтиёрий E ва F тўп-ламлар берилганда, E тўплами F тўпламга $f: E \rightarrow F$ акслантириш тушунчаси 1- қисм, 1- боб, 1-§ да ўрганилган эди.

Энди $E = N$, F тўплам сифатида эса $X \subset R$ тўпламда берилган функцияда тўплами $\{f(x)\}$ ни олиб, ушбу

$$\varphi: N \rightarrow \{f(x)\} \quad (\varphi: n \rightarrow f_n(x)) \quad (14.1)$$

акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш функционал кетма-кетлик тушунчасига олиб келади.

(14.1) акслантиришни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & \dots, & n, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ f_1(x), & f_2(x), & \dots, & f_n(x), & \dots \end{array}$$

Натижада $\varphi: n \rightarrow f_n(x)$ акслантиришнинг аксларидан (образларидан) ташкил топган ушбу

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

тўплам ҳосил бўлади.

(14.2) тўплам $X (X \subset R)$ да берилган функционал кетма-кетлик (функциялар кетма-кетлиги) деб аталади ва $y\{f_n(x)\}$ каби белги-ланади.

функционал кетма-кетлик $\forall x \in R_+$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x) = \sqrt{x}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{\sqrt{x}}{n}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

4. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\} = \{x^n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетликини қарайлик. Бу функционал кетма-кетлик учун, $\forall x \in (1, +\infty)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty,$$

$x = 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1,$$

$\forall x \in (-1, 1)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$ бўлганда эса берилган функционал кетма-кетлиكنинг лимити мавжуд эмас.

Шундай қилиб, берилган $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ функционал кетма-кетлиكنинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, 1]$ бўлиб, лимит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 < x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

2. Функционал қаторлар. Бирор $X (X \subset R)$ тўпلامда $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.2-таъриф. Қуйидаги

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ифода функционал қатор деб аталади ва у $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

$u_1(x), u_2(x), \dots$ функциялар (14.5) функционал қаторнинг ҳадлари, $u_n(x)$ эса функционал қаторнинг умумий ҳади (n -ҳади) деб аталади.

Функционал қаторга мисоллар келтирамиз:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \\ + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots \quad (0 < x < \infty).$$

Шундай қилиб, функционал қаторнинг ҳар бир ҳади, аввал (1-қисм

нинг 11-бобида) ўрганилган сонли қаторнинг ҳадларидан фарқли ўла-роқ, муайян функциялардан иборатдир.

14.1-эслатма. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор турли ҳадларининг берилиш соҳалари (тўпламлари), умуман айтганда, турлича бўлади. Биз бу ерда X тўплам сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини тушунамиз.

X тўпламда $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтани олиб, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ ҳадининг шу нуқтадаги қийматини топамиз. Натижада ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (14.6)$$

сонли қатор ҳосил бўлади.

Маълумки, сонли қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашиш аломатлари, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари 1-қисмнинг 11-бобида батафсил баён этилган эди.

14.3-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам, бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) дейилади.

Кейинги баёнимизда биз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси M тўплам бўлсин дейиш ўрнига $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлсин деган иборани ҳам ишлатаверамиз.

Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, $M (M \subset R)$ эса шу функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. $\forall x_0 \in M$ учун, унга мос $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндисини эса S_0 дейлик.

Агар M тўпламдан олинган ҳар бир x га унга мос келадиган $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ қаторнинг йиғиндисини мос қўйсак, унда M тўпламда берилган $S(x)$ функция ҳосил бўлади.

Бу $S(x)$ функцияни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ функционал қаторнинг *йиғиндиси* деб атаймиз. Демак, $\forall x \in M$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x).$$

Функционал қаторларда ҳам, худди сонли қаторлардаги каби, қаторнинг қисмий йиғиндилари тушунчаси киритилади.

(14.5) функционал қаторнинг дастлабки ҳадларидан тузилган ушбу

$$\begin{aligned} S_1(x) &= u_1(x), \\ S_2(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

йиғиндилар (14.5) функционал қаторнинг *қисмий йиғиндилари* дейилади. Демак, (14.5) функционал қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$:

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (14.7)$$

функционал кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Аксинча (14.5)) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат (14.7) функционал кетма-кетлик берилган ҳолда, ҳар доим ҳадлари (14.5) функционал қаторнинг мос ҳадларига тенг бўлган қуйидаги

$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \dots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \dots$$

функционал қаторни ҳосил қилиш мумкин.

Сонли қаторнинг яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) таърифини эслаб (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 1-§) (14.5) функционал қаторнинг x_0 нуқтада яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) ни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

14.4-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик

$x_0 (x_0 \in M)$ нуқтада яқинлашувчи (узоқлашуви) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади.

Бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) тегишли функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) деб аталади.

(14.7) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $S(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

(14.5) функционал қаторнинг *йиғиндиси* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади: $u_n(x) = x^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) функция $R = (-\infty, +\infty)$ да берилган. Қаралаётган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса.} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\forall x \in (-1, +1) \text{ учун } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x},$$

$\forall x \in [1, +\infty)$ учун $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty$, $\forall x \in (-\infty, -1]$ учун $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, +1)$, узоқлашиш соҳаси эса $R \setminus M = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ дан иборат.

$(-1, +1)$ ораллиқда функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x) = \frac{1}{1-x}$ бўлади.

2. Куйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{[(k-1)x+1]} - \frac{1}{kx+1} \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1}. \end{aligned}$$

Унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{nx+1} \right] = 1 \quad (0 < x < +\infty)$$

бўлади. Демак, берилган қаторнинг йиғиндиси $S(x) = 1$ бўлади.

Биз юқорида функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) тушунчалари билан танишдик.

Аслида бундай тушунчалар билан биз, аввал, хусусий ҳолда (ўзгарувчи x нинг ҳар бир тайин қийматида) 1-қисмнинг 3 ва 11-бобларида сонлар кетма-кетлиги, сонли қаторлар деб танишиб, уларни батафсил ўрганган эдик.

Ҳозирги ҳол, яъни функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)$, функционал қатор йиғиндиси $S(x)$, лар x ўзгарувчининг функциялари бўлиши бу $f(x)$ ва $S(x)$ ларнинг функционал хоссаларини ўрганишни тақозо этади.

Масала $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳадининг функционал хоссаларига кўра (узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги ва ҳоказо) $f(x)$ лимит функциянинг мос хоссаларини, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор ҳар бир $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади функционал хоссаларига кўра, қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг мос хоссаларини ўрганишдан иборат.

Бу $f(x)$ ҳамда $S(x)$ функцияларнинг хоссаларини ўрганишда, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)$ га, қатор қисмий йиғиндиси $S_n(x)$ нинг қатор йиғиндиси $S(x)$ га яқинлашиш (интилиш) характери муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун баъзимизни функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторнинг текис яқинлашиши тушунчасини киритиш ва уни ўрганишдан бошлаймиз.

2-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторларнинг текис яқинлашувчилиги

1. Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчилиги. Бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $M (M \subset R)$ эса бу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. $f(x)$ функция (14.2) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси бўлсин. Демак, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламининг ҳар бир $x_0 (x_0 \in M)$ нуқтасида, $n \rightarrow \infty$ да мос $f(x_0)$ га интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Кетма-кетликнинг лимити таърифига кўра бу қуйидагини англатади: $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бунда n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ га ва олинган x_0 нуқтага боғлиқ бўлади: $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ (чунки, x ўзгарувчининг M тўпламдан олинган турли қийматларида $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик, умуман айтганда, турлича бўлади).

M тўпламдаги барча нуқталар учун умумий бўлган n_0 натурал сонни топиш мумкинми деган савол туғилади. Бунини қуйидагича тушуниш керак: $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in M$ учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўладиган $n_0 \in N$ топиладими?

Қуйида келтириладиган мисоллар кўрсатадики, баъзи функционал кетма-кетликлар учун бундай n_0 натурал сон топилади; баъзи функционал кетма-кетликлар учун эса топилмайди, яъни бирор $\delta_0 > 0$ сони учун исталган катта $n \in N$ сони олинганда ҳам шундай $x \in M$ нуқта топиладики,

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-\infty, +\infty)$, лимит функцияси эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

бўлади. Демак, $f(x) \equiv 0$. Бу яқинлашишнинг характери қуйидагичадир:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ дейилса, барча $n > n_0$ да $\forall x \in M$ да

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

бўлади.

Бу ҳолда n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган $x (x \in (-\infty, +\infty))$ нуқтага боғлиқ эмас. Бошқача айтганда, топилган n_0 натурал сон барча $x (x \in (-\infty, +\infty))$ нуқталар учун умумийдир.

2. Ушбу

$$(f_n(x)) = \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик.

Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x) = x$ бўлади:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x.$$

Бу яқинлашишнинг характери ҳам аввалги мисолдагидек. Ҳақиқатдан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) сонни олайлик. n_0 сифатида

$$n_0 = \left\lceil (1+x_0) \left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$$

ни олсак, $\forall n > n_0$ ва $x \in [0, 1]$ нуқта учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{nx_0}{1+n+x_0} - x_0 \right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} \leq \frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0} < \varepsilon \quad (14.8)$$

бўлади. Бу ерда, равшанки, n_0 сон ε га ва x_0 нуқтага боғлиқдир. Бироқ n'_0 деб

$$n'_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} n_0 = \left\lceil 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$$

олинса $\forall n > n'_0$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун (14.8) бажарилаверади. Демак, n'_0 натурал сон барча $x (0 \leq x \leq 1)$ нуқталар учун умумий бўлади.

3. Қуйидаги

$$(f_n(x)) = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Унинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

бўлади. Бу эса таърифга кўра, қуйидагини билдиради:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам,

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon x} \right\rceil \quad (x \neq 0) \quad (14.9)$$

дейилса, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{(n_0+1)x} < \varepsilon \quad (14.10)$$

бўлади, $x = 0$ бўлса, равшанки, $\forall n$ учун $f_n(0) = f(0) = 0$.

Бироқ, масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ деб олсак, исталган $n \in N$ сони ва $x = \frac{1}{n}$ нуқта учун

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

Демак, барча $x (0 \leq x \leq 1)$ нуқталар учун умумий бўлган ва (14.10) тенгсизлик бажариладиган n_0 натурал сон топилмайди. (Бу хулосага юқоридаги n_0 учун (14.9) формулани ўрганиб (кўриниб турибдики, у ерда $x \rightarrow 0$ да $n_0 \rightarrow +\infty$) ҳам келиш мумкин эди.)

$M (M \subset R)$ тўпلامда бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, у лимит функцияга эга бўлсин. Бу лимит функцияни $f(x) (x \in M)$ деб белгилайлик.

14.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, ихтиёрий $n > n_0$ ва ихтиёрий $x \in M$ нуқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпلامда $f(x)$ га текис яқинлашади (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи) деб аталади. Акс ҳолда, (яъни $\forall n \in N$ олинганда ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$ ва $x_0 \in M$ мавжуд бўлсаки,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилса) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпلامда $f(x)$ га текис яқинлашмайди (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи эмас) деб аталади. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашувчилиги қуйидагича белгиланади:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) (x \in M).$$

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида $|f_n(x)| = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$ функционал кетма-кетлик лимит функция $f(x) \equiv 0$ га $[0, 1]$ оралиқда текис яқинлашади:

$$\frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0 (0 \leq x \leq 1)$$

Учинчисида эса, яъни $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) \equiv 0$ лимит функцияга яқинлашса-да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = 0,$$

бу функционал кетма-кетлик учун текис яқинлашиш шарти бажарилмайди.

14.1-теорема. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпلامда $f(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. M тўп-ламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда M тўп-ламнинг барча x нуқталари учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса $\forall n > n_0$ учун

$$M_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Етарлилиги. M тўп-ламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга эга бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлсин. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Агар ушбу

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in M)$$

муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда $\forall x \in M$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса M тўп-ламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \{e^{-(x-n)^2}\}$$

функционал кетма-кетлики $-c < x < c$ ($c > 0$) интервалда қарайлик. Бу функционал кетма-кетлиkning лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0$$

бўлади. Натижада

$$M_n = \sup_{-c < x < c} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-c < x < c} |e^{-(x-n)^2} - 0| = \sup_{-c < x < c} e^{-(x-n)^2} = e^{-(c-n)^2}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(c-n)^2} = 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функционал кетма-кетлик $(-c, c)$ оралиқда $f(x) = 0$ лимит функцияга текис яқинлашади:

$$e^{-(x-n)^2} \rightarrow 0 \quad (-c < x < c; c > 0).$$

2. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\} = \left\{ n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \right\} \quad (0 < x < \infty)$$

функционал кетма-кетлиكنи қарайлик. Бу функционал кетма-кетлиكنинг лимит функциясини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} \right)^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Демак, } f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Бу ҳолда } M_n = \sup_{0 < x < \infty} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 < x < \infty} \left| n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \\ &= \sup_{0 < x < \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \\ &= \sup_{0 < x < \infty} \frac{\left| \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right|}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)} = \sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{2n\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)^2} = \end{aligned}$$

$= \infty$ бўлиб берилган, функционал кетма-кетлик учун 14.1-теореманинг шарти бажарилмайди.

Маълумки, 1-қисм, 3-боб, 10-§ да сонлар кетма-кетлигининг лимитга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси келтирилган эди. Шунга ўхшаш теоремани функционал кетма-кетликларда ҳам айтиш мумкин.

Биз қуйида функционал кетма-кетлик қандай шартда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашишини ифодаладиган теоремани келтираемиз. Аввал фундаменгал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

X ($X \subset R$) тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлсаки, $n > n_0$, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ нуқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (14.11)$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпلامда фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Масалан, юқорида келтирилган

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

функционал кетма-кетлик $X = (-\infty, +\infty)$ тўпلامда фундаментал кетма-кетлик бўлади.

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$$

кетма-кетлик эса у $X = [0, 1]$ тўпلامда фундаментал кетма-кетлик бўлмайди.

14.2-теорема. (Коши теоремаси.) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпلامда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X тўпلامда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. X тўпلامда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик лимит функцияга эга бўлиб, унга текис яқинлашсин:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in X).$$

Текис яқинлашиш таърифига мувофиқ $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$

га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда $\forall x \in M$ нуқталар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

шунингдек, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ учун

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. У ҳолда $n > n_0$, $m > n_0$ ва $\forall x \in X$ учун

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпلامда фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

Етарлилиги. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпلامда фундаментал кетма-кетлик бўлсин. X тўпладан олинган ҳар бир $x_0 (x_0 \in X)$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кеглигига айланади. Равшанки, $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кеглик фундаментал кетма-кетлик бўлади. У ҳолда Коши теоремасига асосан (1-қисм, 3-боб, 10-§) $\{f_n(x_0)\}$ яқинлашувчи. Демак, X тўпламнинг ҳар бир $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтасида $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функциясини $f(x)$ дейлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

Энди (14.11) тенгсизликда $m \rightarrow \infty$ да (бунда n ва x ларни тайинлаб, лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Бундан эса $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2. Функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги. $M (M \subset R)$ тўпلامда бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу функционал қатор M тўпلامда яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Демак, M тўпلامда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] = S(x)$$

бўлади, бунда $\{S_n(x)\}$ — берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат функционал кетма-кетликдир.

14.7-таъриф. Агар M тўпلامда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг

қисмий йиғиндиларида иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор M тўпلامда *текис яқинлашувчи* деб аталади, акс ҳолда, яъни $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпلامда $S(x)$ га текис яқинлашмаса, (14.5) функционал қатор M тўпلامда $S(x)$ га *текис яқинлашмайди* дейилади.

Шундай қилиб, функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) тушунчаси ҳам уларнинг оддий яқинлашувчилиги сингари, функционал кетма-кетликларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) орқали киритилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \end{aligned}$$

бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1}.$$

Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right\rceil$ дейилса, барча $n > n_0$

учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{x+n_0+2} < \varepsilon \quad (14.12)$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ га ҳамда x ($0 \leq x < +\infty$) нуқталарга боғлиқ. Бироқ n_0 деб

$$n_0' = \max_{0 < x < \infty} \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right] = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$$

ни олинса, унда $n > n_0'$ бўлган n ларда юқоридаги (14.12) тенгсизлик бажарилмайдиган. Демак, берилган функционал қатор учун таърифдаги n_0 натурал сон барча x ($0 \leq x < \infty$) нуқталари учун умумий бўлади, яъни x га боғлиқ бўлмайди. Демак, берилган функционал қатор текис яқинлашувчи.

2. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < \infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1} \end{aligned}$$

бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \right\rceil$ ($x \neq 0$) дейилса, барча $n > n_0$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{(n_0+1)x+1} < \varepsilon$$

бўлади. Агар $x = 0$ бўлса, равшанки, $\forall n$ учун $S_n(0) = S(0) = 1$ бўлиб,

$$S_n(0) - S(0) = 0$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ ва x ($0 < x < \infty$) нуқталарга боғлиқ бўлиб, у барча x ($0 < x < +\infty$) нуқталар учун умумий бўла олмайди (бу ҳолда $n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \right\rceil$ нинг $(0, +\infty)$ да x бўйича максимуми чекли сон эмас).

Бошқача қилиб айтганда, исталган n натурал сон олсак ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$ (масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$) ва $x = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$ нуқта топиладики,

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

14.3-теорема. M ($M \subset R$) тўпламда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Бу функционал қаторнинг M да текис яқинлашувчи бўлиши учун, унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{S_n(x)\}$ нинг M да фундаментал кетма-кетлик бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиш ҳақидаги 14.2-теоремани функционал қаторга нисбатан айтилиши бўлиб, унинг исботи 14.2-теореманинг исботи кабидир.

Функционал қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

нинг текис яқинлашувчи бўлиши ҳақидаги 14.7-таъриф ҳамда функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарур ва етарли шартини ифодаловчи 14.1-теоремадан фойдаланиб қуйидаги теоремага келамиз.

14.4-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

функционал қатор $(-1, +1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

эканини кўрган эдик. Бу функционал қатор учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \quad (x \in (-1, +1))$$

бўлиб,

$$\sup_{-1 < x < 1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

бўлади. Демак, берилган қатор $(-1, +1)$ ораликда текис яқинлашувчи эмас.

14.5-теорема. (Вейерштрасс аломати.) Агар ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M ($M \subset R$) тўпламда қуйидаги

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (14.13)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.5) функционал қатор M тўпلامда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Модомики, (14.13) қатор яқинлашувчи экан, 1-қисм, 11-боб, 2-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ учун

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m < \varepsilon$$

бўлади. (*) тенгсизликдан фойдаланиб, M тўпلامнинг барча x ($x \in M$) нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бундан эса 14.8-теоремага кўра берилган функционал қаторнинг M тўпلامда текис яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги аниқланган эди. Бу қаторнинг текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломати ёрдамида осонгина кўрсатиш мумкин. [Ҳақикатан ҳам,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n| \cdot |x+n+1|} \leq \frac{1}{n^2}$$

бўлиши ҳамда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчилигидан берилган функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг умумий ҳади

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

функциядан иборат. Бу функцияни $[0, +\infty)$ оралиқда экстремумга текширамыз

$u_n(x)$ функциянинг ҳосиласи ягона $x = n^{-\frac{5}{2}}$ нуқтада нолга айланади ($x = n^{-\frac{5}{2}}$ — стационар нуқта). Бу стационар нуқтада

$$u_n''\left(n^{-\frac{5}{2}}\right) < 0$$

бўлади. Демак, $u_n(x)$ функция $x = n^{-\frac{5}{2}} \in [0, +\infty)$ нуқтада максимумга эришади.

Унинг максимум қиймати эса $\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}$ га тенг. Демак, $0 \leq x < +\infty$ да

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

бўлади. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ қаторнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Вейер.

штрасс аломатига кўра, берилган функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи эканлигини топамиз.

3-§. Функционал қатор йиғиндисининг ҳамда функционал кетма-кетлик лимит функциясининг узлуксизлиги

1. Функционал қатор йиғиндисининг узлуксизлиги. M ($M \subset R$) тўпламда бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин.

14.6-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_0 \in M$ тўпламдан олинган ихтиёрий нуқта. Функционал қатор текис яқинлашувчи. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, M тўпламнинг барча x нуқталари учун бир йўла

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (14.14)$$

жумладан

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.15)$$

тенгсизлик бажарилади.

Модомики, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M тўпламда узлуксиз экан, унда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

функция ҳам M да, жумладан x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, юқоридаги $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.16)$$

бўлади.

Юқоридаги (14.14), (14.15) ҳамда (14.16) тенгсизликлардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + \\ &+ |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $S(x)$ функциянинг x_0 ($\forall x_0 \in M$) нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$S(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x)]$$

муносабат ўринли бўлади.

14.2-эслатма. 14.6-теоремадаги $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг

M да текис яқинлашувчилик шarti функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг узлуксиз бўлиши учун жуда муҳимдир. Бу шарт бажарилмай қолса, теоремадаги тасдиқ, умуман айтганда, тўғри бўлмайди. Бунга қуйидаги функционал қатор мисол бўла олади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} (1-x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) + \dots \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади $[0, 1]$ оралиқда узлуксиз. Қатор йиғиндиси

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

эса $[0, 1]$ оралиқда (аниқроғи, $x = 1$ нуқтада) узлуксиз эмас.

Айни пайтда, қаторнинг текис яқинлашувчилиги етарли шарт бўлиб, зарурий ҳам эмас. Яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функционал қаторнинг йиғиндиси ҳам узлуксиз бўлиши мумкин. Масалан, ушбу бобнинг 2-§ да келтирилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n-1)x + 1} \quad (0 < x < +\infty)$$

функционал қатор $(0, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчилик шартини бажармаса-да, бу функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x) = 1$ $(0, +\infty)$ оралиқда узлуксиздир.

2. Функционал кетма-кетлик лимит функциясининг узлуксизлиги. M ($M \subset R$) тўпلامда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

14.7-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади M тўпلامда узлуксиз бўлиб, бу функ-

ционал кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{t \rightarrow x} f_n(t)]$$

муносабат ўринли бўлади.

4-§. Функционал қаторларда ҳамда функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш

1. Функционал қаторларда ҳадлаб лимитга ўтиш. $M (M \subset R)$ тўпламда яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпламининг лимит нуқтаси.

14.8-теорема. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14.17)$$

лимитга эга бўлиб, бу қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йиғиндиси C эса $S(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги лимити

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади.

Исбот. Шартга кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар ва M тўпламининг барча x нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon \quad (14.18)$$

тенгсизлик бажарилади. (14.17) шартни эътиборга олиб, (14.18) тенгсизликда $x \rightarrow x_0$ да лимитга ўтиб қуйидагини толамиз:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m| \leq \varepsilon.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар учун

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m| \leq \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилар экан. Қатор яқинлашувчилигининг зарурий ва етарли шартини ифодаловчи теоремага мувофиқ (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C,$$

бунда

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Энди $x \rightarrow x_0$ да (14.5) функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг limiti C га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

бўлишини кўрсатамиз. Шу мақсадда ушбу

$$S(x) - C$$

айирмани олиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$S(x) - C = [S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - C_n] + [C_n - C], \quad (14.19)$$

бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Теореманинг шартига кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи.

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва M тўпламининг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.20)$$

тенгсизлик бажарилади.

(14.17) шартдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] = c_1 + c_2 + \dots + c_n = C_n.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.21)$$

тенгсизлик бажарилади.

Юқорида исбот этилганига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра, шундай $n'_0 \in N$ топиладики, барча $n > n'_0$ учун

$$|C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.22)$$

бўлади. Шунини ҳам айтиш керакки, агар $\overline{n}_0 = \max \{n_0, n'_0\}$ деб олинсан, унда барча $n > \overline{n}_0$ учун (14.22) ва (14.20) тенгсизликлар бир вақтда бажарилади.

Натижада (14.19) муносабатдан, (14.20), (14.21) ва (14.22) тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |S(x) - C| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - C_n| + |C_n - C| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ учун ($x \in M$)

$$|S(x) - C| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Юқоридаги лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)].$$

Бу эса 14.8-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб лимитга ўтиш қондаси ўринли бўлишини кўрсатади.

2. Функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш. M ($M \subset R$) тўпلامда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпلامнинг лимит нуқтаси.

14.9-теорема. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлиkning ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

лимитга эга бўлиб, бу кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи, унинг $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ лимити эса $f(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги лимитига тенг

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

бўлади.

5-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб интеграллаш.
 $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

14.10-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади, унинг йиғиндиси эса $\int_a^b S(x) dx$ га тенг бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Исбот. Берилган функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ да узлуксиз, демак, $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи. (14.5) функционал қатор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи. Унда 14.6-теоремага кўра, функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, демак, интегралланувчи бўлади.

Аввало (14.5) функционал қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра (14.5) функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи.

У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра, шундай $n_0 \in \mathbb{C}$ топиладики, $n > n_0$, $m > n$ бўлганда

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\left| \int_a^b u_{n+1}(x) dx + \int_a^b u_{n+2}(x) dx + \dots + \int_a^b u_m(x) dx \right| \leq \int_a^b |u_{n+1}(x) +$$

$$+ u_{n+2}(x) + \dots + u_m | dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad (14.23)$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ ва $m > n$ бўлганда (14.23) тенгсизлик ўринли бўлади. 14.3-теоремага асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Одатдагидек берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини $S_n(x)$ деймиз. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги таърифидан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $[a, b]$ сегментнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади

Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx = \int_a^b u_1(x) dx + \\ &+ \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx. \end{aligned}$$

Агар

$$\left| \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx = 0$$

бўлиб, натижада

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди. Юқоридаги муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(x) dx \right].$$

Бу эса 14.10-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб интеграллаш қондаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.3-эслатма. Келтирилган теоремада функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги шarti етарли бўлиб, у зарурий шарт эмас, яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функционал қаторларни ҳам ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлади.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) \quad (0 < x < 1)$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}}) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$$

бўлиб, йиғиндиси эса

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x + x^{\frac{1}{2n+1}}) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - x, & \text{агар } 0 < x < 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Бу функционал қатор $[0, 1]$ ораликда текис яқинлашувчилик шартини бажармайди. Аммо

$$\int_0^1 S(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) dx$$

бўлиши топилади.

2. Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш. $[a, b]$ сегментда $\{f_n(x)\}$.

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14.11-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx, \dots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади, унинг лимити эса $\int_a^b f(x) dx$ га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.24)$$

Бу теоремадаги (14.24) лимит муносабатни қуйидагича

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx \right] = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

ҳам ёзиш мумкин.

6-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

14.12-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз $u'_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳосиллага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қаторнинг $S(x)$ йиғиндиси шу $[a, b]$ да $S'(x)$ ҳосиллага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (14.25)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$u_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S(x)$ дейлик: $\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Бу $\bar{S}(x)$ 14.6-теоремага асосан $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.

Функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш ҳақидаги 14.10-теоремадан фойдаланиб, ушбу

$$\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

қаторни $[a, x]$ оралиқ ($a < x \leq b$) бўйича ҳадлаб интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^x \bar{S}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x u_n'(x) dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(a) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a). \quad (14.26)$$

Модомики, $\bar{S}(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз экан, 1-қисм, 6-боб, 4-§ да келтирилган теоремага биноан

$$\int_a^x \bar{S}(t) dt$$

функция дифференциалланувчи бўлиб, унинг ҳосиласи

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x \bar{S}(t) dt \right] = \bar{S}(x)$$

бўлади.

Иккинчи томондан (14.26) тенгликка кўра

$$\frac{d}{dx} [S(x) - S(a)] = \bar{S}(x),$$

яъни

$$S'(x) = \bar{S}(x)$$

бўлишини топамиз. Бу эса (14.5) функционал қатор йиғиндиси ҳосиллага эга ва унинг учун (14.25) тенглик ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

(14.25) тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} [u_n(x)].$$

Бу эса 14.12-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб дифференциаллаш қондаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.4-эслатма. 14.12-теоремадаги функционал қаторнинг текис яқинлашувчилик шарғи ҳам етарли бўлиб, у зарурий шарт эмас.

2. Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2'(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

Функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14.13-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f_n'(x) (n=1, 2, \dots)$ ҳосиллага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган

$$f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса у ҳолда $f(x)$ лимит функция шу $[a, b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\{f'_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимити $f'(x)$ га тенг бўлади.

7-§. Даражали қаторлар

1. Даражали қаторлар. Абель теоремаси. Биз аввалги параграфларда функционал қаторларни ўргандик. Функционал қаторлар орасида, уларнинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

ёки, умумийроқ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (14.28)$$

қаторлар (бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, x_0$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар) математикада ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди. Бу ерда, ушбу ёбнинг 1-§ идаги (14.5) ифодада қатнашган $u_n(x)$ сифатида

$$u_n(x) = a_n x^n \text{ (ёки } u_n(x) = a_n (x - x_0)^n),$$

яъни x (ёки $x - x_0$) ўзгарувчининг даражалари қаралапти. Шу сабабли (14.27) ва (14.28) қаторлар *даражали қаторлар* деб аталади.

Агар (14.28) қаторда $x - x_0 = t$ деб олинса, у ҳолда бу қатор t ўзгарувчига нисбатан (14.27) қатор кўринишига келади. Демак, (14.27) қаторларни ўрганиш кифоядир.

(14.27) ифодадаги $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ҳақиқий сонлар (14.27) даражали қаторнинг *коэффициентлари* деб аталади.

Даражали қаторнинг тузилишидан, даражали қаторлар бир-биридан фақат коэффициентлари билангина фарқ қилишини кўрамиз. Демак, даражали қатор берилган деганда унинг коэффициентлари берилган деганини тушунамиз.

Мисоллар. Ушбу

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0! = 1)$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

қаторлар даражали қаторлардир.

Шундай қилиб, даражали қаторларнинг ҳар бир ҳади $(-\infty, +\infty)$ да берилган функциядир. Бинобарин, даражали қаторни, формал нуқтаи назардан, $(-\infty, +\infty)$ да қараш мумкин. Аммо, табиийки, уларни ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлади деб олмаймиз.

Албатта, ихтиёрий даражали қатор $x = 0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади. Бу равшан. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси албатта $x = 0$ нуқтани ўз ичига олади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) структурасини яқинлашда қуйидаги Абель теоремасига асосланилади.

14.14-теорема (Абель теоремаси). *Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) қийматида яқинлашувчи бўлган, x нинг

$$|x| < |x_0| \quad (14.29)$$

тенгсизликни қансантиптирувчи барча қийматларида (14.27) даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. У ҳолда қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлади, яъни шундай ўзгармас M сони мавжудки, $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leq M$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликни эътиборга олиб қуйидагини толамиз:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (14.30)$$

қатор билан бирга қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (14.31)$$

қаторни қарайлик. Бунда, биринчидан (14.31) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг маҳражи (14.29) га кўра 1 дан кичик: $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$), иккинчидан (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.31) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. У ҳолда 1-қисм 11-боб, 3-§ да келтирилган теоремага кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бўла-

ди. Демак, берилган (14.27) даражали қатор абсолют яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

14.1- натижа. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x=x_0$ қийматида узоқлашувчи бўлса, x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор x_0 нуқтада узоқлашувчи бўлсин. Унда бу қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида ҳам узоқлашувчи бўлади, чунки (14.27) қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор $x = x_1$ қийматида яқинлашувчи бўладиган бўлса, унда Абель теоремасига кўра бу қатор $x = x_0$ ($|x_0| < x_1$) нуқтада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса (14.27) қаторнинг $x = x_0$ да узоқлашувчи дейилишига зиддир. Натижа исбот бўлди.

2. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиусива яқинлашиш интервали. Энди даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси структурасини аниқлайлик.

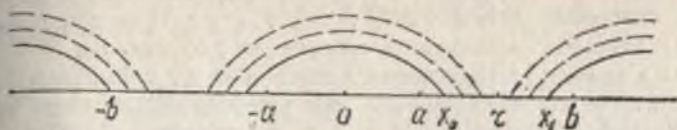
14.15-теорема. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг баъзи ($x \neq 0$) қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона $r > 0$ ҳақиқий сон топилдики (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор $x = x_0 \neq 0$ да яқинлашувчи, $x = x_1$ да эса узоқлашувчи бўлсин. Равшанки, $|x_0| < |x_1|$ бўлади. Унда 14.14-теорема ҳамда 14.1-натижага мувофиқ (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Жумладан (14.27) даражали қатор a ($a < |x_0|$) нуқтада яқинлашувчи, b ($b > |x_1|$) нуқтада эса узоқлашувчи бўлади (15-чизма). Демак, (14.27) қатор $[a, b]$ сегментнинг чап чеккасида яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса узоқлашувчи.

$[a, b]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a+b}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) қаторни қарайлик. Агар (14.27) қатор $\frac{a+b}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ сегментни, $\frac{a+b}{2}$ нуқтада узоқлашувчи бўлса, $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ сегментни олиб, уни $[a_1, b_1]$ орқали белгилайлик. Демак, (14.27) қатор a_1 нуқтада яқинлашувчи, b_1 нуқтада эса узоқлашувчи



15- чизма

бўлиб, $[a_1, b_1]$ сегментнинг узунлиги $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ га тенгдир. Сўнг $[a_1, b_1]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) қаторни қараймиз. Агар у $\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ сегментни, узоқлашувчи бўлса, $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ сегментни олиб, уни $[a_2, b_2]$ орқали белгилаймиз, Демак, (14.27) қатор a_2 нуқтада яқинлашувчи, b_2 нуқтада эса узоқлашувчи бўлиб, $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ га тенгдир. Шу жараёни давом эттираверамиз. Натижада ичма-ич жойлашган

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирининг чап чеккасида (a_n -нуқталарда) (14.47) қатор яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса (b_n -нуқталарда) узоқлашувчи, $n \rightarrow \infty$ да бу сегментлар узунлиги нолга интила боради ($b_n - a_n = (1 \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0)$).

Унда ичма-ич жойлашган сегментлар принципага кўра (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§) шундай ягона r сони топиладики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$$

бўлиб, бу r нуқта барча сегментларга тегишли бўлади.

Энди x ўзгарувчининг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ бўлгани сабабли, шундай натурал n_0 сони топиладики, $|x| < a_{n_0} < r$ бўлади. a_{n_0} нуқтада (14.27) қатор яқинлашувчи. Демак, 14.14-теоремага кўра x нуқтада ҳам (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлади.

x ўзгарувчининг $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$ бўлганлиги сабабли, шундай натурал n_1 сони топиладики, $|x| > b_{n_1} > r$ бўлади. b_{n_1} нуқтада (14.27) қатор узоқлашувчи. Унда 14.1-натижага кўра x да (14.27) қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, шундай r сони топиладики (14.27) даражали қаторнинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Теорема исботланди.

14.8-таъриф. Юқоридаги 14.15-теоремада топилган r сони (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-r, r)$ интервал эса (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали деб аталади.

14.5-эслатма. 14.15-теорема x нинг $x = \pm r$ қийматларида (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида хулоса чиқариб бермайди. Бу $x = \pm r$ нуқталарда (14.27) даражали қатор яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

даражали қатор (геометрик қатор) нинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, +1)$ бўлади. Бу қатор интервалнинг чекка нуқталари $r = \pm 1$ да узоқлашувчи.

2. Қуйидаги

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади. Берилган қатор $r = 1$ да яқинлашувчи, $r = -1$ да эса узоқлашувчидир. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) $[-1, 1]$ сегментдан иборат.

3. Ушбу

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, 1)$ бўлади. Берилган қатор $r = 1$ да яқинлашувчи, $r = -1$ да эса узоқлашувчидир. Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1, 1]$ ярим интервалдан иборат.

14.6-эслатма. Юқоридаги теорема баъзи $x_0 \neq 0$ нуқталарда яқинлашувчи, баъзи $x_1 \neq 0$ нуқталарда узоқлашувчи бўлган даражали қаторлар ҳақидадир. Аммо шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар фақат $x = 0$ нуқтадагина яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$, қатор исталган $x_0 \neq 0$ нуқтада узоқлашувчидир. Ҳақиқатан ҳам, Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x_0^{n+1}}{n! x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) x_0 = \infty$$

бўлади. Демак, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ қатор исталган $x \neq 0$ да узоқлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусини $r = 0$ деб оламиз.

Айни вақтда шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар ихтиёрий $x \in (-\infty, \infty)$ да яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ни олайлик

Бу қатор исталган x_0 нуқтада яқинлашувчидир. Ҳақиқатан ҳам, яна Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n+1} = 0$$

бўлади. Демак, бу қатор исталган $x \in (-\infty + \infty)$ да яқинлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси $r = +\infty$ деб олинади.

3. Коши—Адамар теоремаси. Юқорида кўрдикки, даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаси содда структурага эга бўлар экан: ёки интервал, ёки ярим интервал, ёки сегмент. Ҳамма ҳолларда ҳам бу соҳа яқинлашиш радиуси r орқали ифодаланади.

Маълумки, ҳар қандай даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

ўзининг коэффициентлари кетма-кетлиги $\{a_n\}$ билан аниқланади. Бинобарин, унинг яқинлашиш радиуси ҳам шу коэффициентлар кетма-кетлиги орқали қандайдир топилиши керак. Берилган (14.27) даражали қатор коэффициентлари ёрдамида $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$:

$$|a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (14.32)$$

сонлар кетма-кетлигини тузамиз. Маълумки, ҳар қандай сонлар кетма-кетлигининг юқори лимити мавжуд (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 11-§). Демак, (14.32) кетма-кетлик ҳам юқори лимитга эга. Уни b билан белгилайлик:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (0 \leq b \leq +\infty)$$

14.16-теорема (Коши—Адамар теоремаси). Берилган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (14.33)$$

бўлади.

14.6-эслатма. Юқоридаги (14.33) формулада $b = 0$ бўлганда $r = +\infty$, $b = +\infty$ бўлганда эса $r = 0$ деб олинади.

Исбот. (14.33) формуланинг туғрилигини кўрсатишда қуйидаги

$$1) b = +\infty (r = 0),$$

$$2) b = 0 (r = +\infty),$$

$$3) 0 < b < +\infty \left(r = \frac{1}{b} \right)$$

ҳолларни алоҳида-алоҳида қараймиз.

1) $b = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланмагандир. Ихтиёрий x_0 ($x_0 \neq 0$) нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) даражали

қаторнинг узоқлашувчи эканини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шу x_0 нуқтада (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлсин. Демак, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. Унда қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $|a_n x_0^n|$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас M сон мавжудки (уни 1 дан катта қилиб олиш мумкин), $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leq M (M > 1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| \leq \sqrt[n]{M} < M,$$

яъни

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|}$$

бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланган бўлиб қолди. Натижада зиддиятлик юзага келди. Зиддиятликнинг келиб чиқишига сабаб ($x_0 \neq 0$) нуқтада (14.27) қаторнинг яқинлашувчи бўлсин деб олиннидир. Демак, (14.27) даражали қатор ихтиёрий $x_0 (x_0 \neq 0)$ нуқтада узоқлашувчи.

2) $b = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий $x_0 (x_0 \neq 0)$, нуқтада (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Модомики, $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити нолга тенг экан, бундан унинг лимити ҳам мавжуд ва нолга тенглиги келиб чиқади. Таърифга асосан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, жумладан $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

қатор яқинлашувчи. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

қатор абсолют яқинлашувчи.

3) $0 < b < +\infty$ бўлсин. Бу ҳолда (14.27) даражали қатор ихтиёрий x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) нуқтада яқинлашувчи, ихтиёрий x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) нуқтада узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

$|x_0| < \frac{1}{b}$ бўлсин. У ҳолда шундай $\delta > 0$ сонни топиш мумкинки, $|x_0| = \frac{1}{b+\delta}$ бўлади. Энди $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$ сонни олайлик. Бу $\delta_1 > 0$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун (юқори лимитнинг хоссасига кўра, 1-қисм, 3-боб, 11-§) $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \delta_1$, яъни $|a_n| < (b + \delta_1)^n$ бўлади. Демак, барча $n > n_0$ учун

$$|a_n x_0^n| = |a_n| |x_0^n| < (b + \delta_1)^n \frac{1}{(b + \delta)^n} = \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n \quad (14.34)$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\frac{b + \delta_1}{b + \delta} = \frac{(b + \delta) - (\delta - \delta_1)}{b + \delta} = -\frac{\delta - \delta_1}{b + \delta} < 1.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \dots + |a_n x_0^n| + \dots \quad (14.30)$$

қатор билан қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n = 1 + \frac{b + \delta_1}{b + \delta} + \dots + \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n + \dots \quad (14.35)$$

қаторни солиштирайлик. Бунда, биринчидан, (14.35) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг махражи $0 < \frac{b + \delta_1}{b + \delta} < 1$), иккинчидан, n нинг бирор қийматидан бошлаб ($n > n_0$) (14.34) муносабатга кўра (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.35) қаторнинг мос ҳадидан катга эмас. Унда қаторлар назариясида келтирилган таққослаш теоремасига (1-қисм, 11-боб, 3-§) кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бўлади.

$|x_1| > \frac{1}{b}$ бўлсин. Унда шундай $\delta' > 0$ сонни топиш мумкинки,

$$|x_1| = \frac{1}{b - \delta'}$$

бўлади. Энди δ'_1 ($0 < \delta'_1 < \delta'$) сонни олайлик. Юқори лимитнинг хосса-
сига асосан (1-қисм, 3-боб, 2-§) $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ кетма-кетликнинг ушбу

$$\sqrt[n]{|a_n|} > b - \delta'_1, \text{ яъни } |a_n| > (b - \delta'_1)^n$$

тенгсизлиқни қаноатлантирадиган ҳадларининг сони чексиз кўп бўлади.
Демак, бу ҳолда

$$|a_n x_1^n| = |a_n| \cdot |x_1^n| > (b - \delta'_1)^n \cdot \frac{1}{(b - \delta')^n} = \left(\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'}\right)^n \quad (14.36)$$

бўлиб, бунда

$$\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'} = \frac{(b - \delta') + (\delta' - \delta'_1)}{b - \delta'} = 1 + \frac{\delta' - \delta'_1}{b - \delta'} > 1$$

бўлади.

Юқоридаги (14.36) муносабатдан $n \rightarrow \infty$ да $\{a_n x_1^n\}$ кетма-кетлик-
нинг limiti нолга тенг эмаслигини топамиз. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

қатор узоқлашувчи (қатор яқинлашувчилигининг зарурий шarti бажарилмайди).

Шундай қилиб, ҳар бир x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) нуқтада (14.27) даражали
қатор яқинлашувчи, ҳар бир x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) нуқтада эса шу даражали
қатор узоқлашувчи бўлар экан.

Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси таърифини эътиборга
олиб, $\frac{1}{b}$ берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси эканини
топамиз. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{1/2}} + \dots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \dots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (14.33)
формулага кўра топамиз:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш ин-
тервали эса $(-1, +1)$ дан иборат. Бу даражали қатор яқинлашиш интервалнинг
чеккаларида мос равишда қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

сонли қаторларга айланиб, уларни Лейбниц теоремаси ҳамда Раабе аломатидан фойдаланиб яқинлашувчи эканлигини исботлаш қийин эмас.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1, +1]$ сегментдан иборат.

Қўпишча практикада даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топишда сонли қаторлар назариясида келтирилган аломатлардан фойдаланилади. Бунда ўзгариувчи x ни параметр сифатида қаралади.

2. Ушбу

$$1 + \frac{x}{2.5} + \frac{x^2}{3.5^2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)5^n} + \dots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу қаторга Даламбер аломати (1-қисм 11-боб, 4-§) ни қўллаб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}} : \frac{x^n}{(n+1)5^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)5^n x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1} x^n} \right| = \\ &= \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{5}. \end{aligned}$$

Демак, $\frac{|x|}{5} < 1$, яъни $|x| < 5$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\frac{|x|}{5} > 1$, яъни $|x| > 5$ бўлганда қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 5$, яқинлашиш интервали эса $(-5, 5)$ бўлади.

Яқинлашиш интервали $(-5, 5)$ нинг чеккаларида даражали қатор мос равишда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

сонли қаторларга айланиб, бу қаторларнинг биринчиси яқинлашувчи, иккинчиси эса узоқлашувчидир. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-5, 5)$ ярим интервалдан иборат экан.

8-§. Даражали қаторларнинг хоссалари

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

14.17-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r ($r > 0$) бўлса, y ҳолда бу қатор $[-c, c]$ ($0 < c < r$) сегментда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра r — (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси. Демак, берилган қатор $(-r, r)$ интервалда яқинлашувчи. Жумладан, $c < r$ бўлганлигидан, (14.27) даражали қатор c нуқтада ҳам яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи) бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n = |a_0| + |a_1| c + |a_2| c^2 + \dots + |a_n| c^n + \dots \quad (14.37)$$

қатор яқинлашувчи.

$\forall x \in [-c, c]$ учун ҳар доним $|a_n x^n| \leq |a_n| c^n$ бўлади. Натижада, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (14.37) қаторнинг мос ҳадидаи катта эмаслигини топамиз. У ҳолда Вейерштрасс аломатига кўра $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор $[-c, c]$ сегментда текис яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

14.7-эслатма. Бу хоссадаги $c (c > 0)$ сонни (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r га ҳар қанча яқин қилиб олиш мумкин. Аммо, умуман айтганда, (14.27) даражали қатор $(-r, r)$ да текис яқинлашувчи бўлавермайди.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

даражали қатор $(-1, +1)$ оралиқда яқинлашувчи ($r = 1$), аммо у $(-1, +1)$ да текис яқинлашувчи эмас (134-бетга қаралсин).

14.18-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ йиғиндисини $(-r, r)$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.

Исбот. (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ дан ихтиёрий $x_0 (x_0 \in (-r, r))$ нуқтани оламиз. Равшанки, $|x_0| < r$ бўлади. Ушбу $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонини олайлик. (14.27) даражали қатор юқорида келтирилган 14.17-теоремага кўра $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Унда ушбу бобнинг 3-§ идаги 14.6-теоремага асосан, берилган (14.27) даражали қаторнинг йиғиндисини $S(x)$ функция $[-c, c]$ да, ва демак, x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, (14.27) қаторнинг йиғиндисини $S(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда узлуксиздир. Теорема исбот бўлди.

14.19-теорема (Абель теоремаси). Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлиб, бу қатор $x = r$ ($x = -r$) нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.27) қаторнинг йиғиндисини $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ функция, шу $x = r$ ($x = -r$) нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$x = r$ нуктада яқинлашувчи бўлсин. Демак, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n + \dots \quad (14.38)$$

сонли қатор яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S(r)$ билан белгилайлик:

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \text{ Биз } \lim_{x \rightarrow r-0} S(x) = S(r), \text{ яъни } \lim_{x \rightarrow r-0} [S(x) - S(r)] = 0$$

бўлишини исботлашимиз керак.

Агар $x = tr$ ($0 < t < 1$) деб олинса, унда $t \rightarrow 1 - 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow r-0} [S(x) - S(r)] = \lim_{t \rightarrow 1-0} [S(tr) - S(r)] = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n t^n - a_n r^n)$$

бўлади.

Шартга кўра (14.38) қатор яқинлашувчи. У ҳолда 1-қисм, 11-боб, 4-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $p = 1, 2, 3, \dots$ да

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.39)$$

бўлади. Бу тенгсизликда $p \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Энди қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n t^n = a_0 + a_1 r t + a_2 r^2 t^2 + \dots + a_n r^n t^n + \dots \quad (0 < t < 1) \quad (14.40)$$

қаторни қараймиз. Бу қатор $\forall t \in (0, 1)$ да яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} & a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p} = \\ & = [a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p}] t^{n+p} - \\ & - \sum_{i=1}^{p-1} [(a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+i} r^{n+i}) (t^{n+1+i} - t^{n+i})] \end{aligned}$$

бўлишини ва юқоридаги (14.39) тенгсизликни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} & |a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| < \\ & < \frac{\varepsilon}{3} t^{n+p} + \frac{\varepsilon}{3} \left[\sum_{i=1}^{p-1} (t^{n+i} - t^{n+i+1}) \right] = \frac{\varepsilon}{3} t^{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Бу эса (14.40) қаторнинг яқинлашувчилигини, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $p = 1, 2, \dots$ лар учун

$$|a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.41)$$

бўлишини кўрсатади. Бу тенгсизликда $p \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, қуйи-дагини топамиз:

$$|a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (14.42)$$

Агар $\bar{n}_0 = \max \{n_0, n'_0\}$ деб олинса, унда $n > \bar{n}_0$ бўлганда (14.41) ва (14.42) тенгсизликлар бир йўла бажарилади.

Барча $n > \bar{n}_0$ учун

$$\begin{aligned} |S(tr) - S(r)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n t^n - a_n r^n) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| + \\ &+ |a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| + |a_{n+2}r^{n+1} + a_{n+1}r^{n+2} + \\ &+ \dots| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

бўлади.

Равшанки, $t \rightarrow 1 - 0$ да $t^k - 1 \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Шу сабабли

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

деб олиш мумкин.

Натижада

$$|S(tr) - S(r)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} S(tr) = S(r), \text{ яъни } \lim_{x \rightarrow r-0} S(x) = S(r)$$

бўлишини билдиради. Демак, (14.27) даражали қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $x = r$ да чапдан узлуксиз.

Худди шунга ўхшаш (14.27) даражали қатор $x = -r$ да яқинлашувчи бўлса, қаторнинг йиғиндиси $-r$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

14.20-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашув радиуси r ($r > 0$) бўлса, бу қаторни $[a, b]$ ($[a, b] \subset (-r, r)$) оралиқ-да ҳадлаб интеграллаш мумкин.

Исбот. Шундай c ($0 < c < r$) топа оламизки, $[a, b] \subset [-c, c] \subset (-r, r)$ бўлади. Берилган даражали қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $[a, b]$ да (14.27) даражали қатор текис яқинлашувчи. Унда (14.27) қаторнинг йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

узлуксиз бўлиб, ушбу бобнинг 5-§ да келтирилган теоремага кўра бу қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин.

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $a = 0$, $b = x$ ($|x| < r$) бўлганда

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots$$

бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг. Ҳақиқатан ҳам, Коши — Адамар теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r. \end{aligned}$$

14.21-теорема $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, $(-r, r)$ да бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

Исбот. Аввало берилган (14.27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad (14.43)$$

қаторнинг $|x_0| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Қуйидаги $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонни олайлик. Унда $\frac{1}{c} |x_0| = q < 1$ бўлиб,

$$|n a_n x_0^{n-1}| = n q^{n-1} \cdot \frac{1}{c} |a_n c^n|$$

бўлади. Равшанки, $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ ($q < 1$)

қатор яқинлашувчи (уни Даламбер аломатига кўра кўрсатиш қийин эмас). Унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n q^{n-1} = 0$$

бўлади. Демак, n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, ($n > n_0$ учун) $n q^{n-1} < c$ бўлиб, натижада $\forall n > n_0$ учун ушбу

$$|n a_n x_0^{n-1}| \leq |a_n c^n| \quad (14.44)$$

тенгсизликка келамиз.

$c \in (-r, r)$ бўлганлиги сабабли $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ қатор абсолют яқинлашувчи.

Унда (14.44) муносабатни ҳисобга олиб, Вейерштрасс аломатидан фой-

даланиб, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ қаторнинг $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз. Демак, бу қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган (14.27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган (14.43) қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда ушбу бобнинг 6-§ да келтирилган 14.12-теоремага кўра

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, (14.27) ва (14.43) қаторларнинг яқинлашиш радиуслари бир хил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Коши — Адамар теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Демак,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

14.2-натижа. Агар (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $(-r, r)$ да исталган марта дифференциалаш мумкин. Шундай қилиб, яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

даражали қаторни ҳадлаб интеграллаш ва ҳадлаб (исталган марта) дифференциаллаш мумкин ва ҳосил бўлган даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг бўлади.

14.9-таъриф. Агар $f(x)$ функция $(-r, r)$ да яқинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндиси бўлса, $f(x)$ функция $(-r, r)$ да аналитик деб аталади.

14.22-теорема. Иккита

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

ва

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (14.45)$$

даражали қаторлар берилган бўлиб, (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r_1 > 0$, йиғиндиси эса $S_1(x)$, (14.45) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r_2 > 0$, йиғиндиси $S_2(x)$ бўлсин.

Агар $\forall x \in (-r, r)$ ($r = \min(r_1, r_2)$) да

$$S_1(x) = S_2(x) \quad (14.46)$$

бўлса, у ҳолди $\forall n \in \mathbb{N}$ учун

$$a_n = b_n,$$

яъни (14.27) ва (14.45) даражали қаторлар бир хил бўлади.

Исбот. Равшанки, (14.27) ва (14.45) даражали қаторлар $(-r, r)$ да яқинлашувчи ва уларнинг йигиндилари $S_1(x)$ ва $S_2(x)$ функциялар шу интервалда узлуксиз бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_1(x) = S_1(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} S_2(x) = S_2(0).$$

Юқоридаги (14.46) шартга кўра $S_1(0) = S_2(0)$ бўлади. Бундан эса $a_0 = b_0$ эканлиги келиб чиқади. Бинобарин, $\forall x \in (-r, r)$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \text{ Агар } x \neq 0 \text{ десак, бу тенгликдан барча } x \in (-r, 0) \cup (0, r) \text{ учун}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

га эга бўламиз. Бу даражали қаторларнинг ҳар бири ҳам $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлади, ва демек, уларнинг йигиндилари шу интервалда узлуксиз функция бўлади. Шу хусусиятдан фойдалансак, $x \rightarrow 0$ да

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} = b_1$$

бўлишини, ва демек, $a_1 = b_1$ эканлигини топамиз. Бу жараёни давом эттира бориб, барча $n \in N$ учун $a_n = b_n$ бўлиши топилади. Демак, (14.27) ва (14.45) даражали қаторлар бир хил. Теорема исбот бўлди.

$(-r, r)$ ($r > 0$) ораликда $f(x)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. Юқоридаги теорема, $f(x)$ ни даражали қатор йигиндиси сифатида ифодадай оладиган бўлсак, бундай ифодалаш ягона бўлишини билдирадн.

9-§. Тейлор қатори

Биз юқорида, ҳар қандай даражали

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \dots$$

қатор ўзининг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ да узлуксиз $S(x)$ функцияни (даражали қатор йигиндисини) ифодалаб, бу функция шу ораликда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлишини кўрдик.

Энди бирор ораликда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган функцияни даражали қаторга ёйиш масаласини қараймиз.

1. Функцияларни Тейлор қаторига ёйиш. $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтанинг бирор

$$U_{\delta}(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

атрофида берилган бўлиб, шу атрофда функция исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, бу ҳолда функциянинг 1-қисм, 6-боб, 7-§ да батафсил ўрганилган Тейлор формуласи

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x)$$

ни ёйиш мумкин, бунда $r_n(x)$ — қолдиқ ҳад.

Берилган $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлиши Тейлор формуласидаги ҳадларнинг сонини ҳар қанча катта сонда олиш имконини беради. Бинобарин, табиий равишда ушбу

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (14.47)$$

қатор юзага келади. Бу махсус даражали қатор бўлиб, унинг коэф. фициентлари $f(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланган.

Одатда (14.47) даражали қатор $f(x)$ функциянинг *Тейлор қатори* деб аталади.

Хусусан, $x_0 = 0$ да қатор қуйидагича бўлади:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (14.48)$$

Даражали қаторлар деб номланган 8-§ нинг бошланишида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

кўринишдаги даражали қаторларни ўрганишни келишиб олинган эди. Шунини эътиборга олиб, $f(x)$ функциянинг (14.48) кўринишдаги Тейлор қаторини ўрганамиз.

Яна бир бор таъкидлаймизки, (14.47) қатор $f(x)$ функция билан ўзининг коэффициентлари орқали боғланган бўлиб, бу (14.47) қатор яқинлашувчи бўладими, яқинлашувчи бўлган ҳолда унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўладими, бундан қатъи назар, уни $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори деб атадик.

Табиий равишда қуйидаги савол туғилади: қачон бирор $U_\delta(0)$ ораликда берилган, исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлган $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

шу ораликда худди шу $f(x)$ га яқинлашади?

14.23-теорема. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ ($r > 0$) ораликда исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлиб, унинг $x = 0$ нуқтадаги Тейлор қатори

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (14.48)$$

бўлсин.

Бу қатор $(-r, r)$ ораликда $f(x)$ га яқинлашиши учун $f(x)$ функция Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (14.49)$$

нинг қолдиқ ҳади барча $x \in (-r, r)$ да нолга интилиши $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Аввало (14.48) қаторнинг коэффициентла-

ри билан (14.49) Тейлор формуласидаги коэффициентларнинг бир хил эканлигини таъкидлаймиз.

(14.48) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлсин. У ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in (-r, r))$$

бўлади. Ундан эса $\forall x \in (-r, r)$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\forall x \in (-r, r)$ да $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлсин. У ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$ бўлиб, ундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (14.48) қатор $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлишини, яъни

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (*)$$

эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Одатда (*) муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган деб аталади.

14.24-теорема. Агар $f(x)$ функция $(-r, r)$ ($r > 0$) ораликда даражаси қаторга ёйилган бўлса:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (14.50)$$

бу қатор $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори бўлади.

Исбот. 14.21-теорема ва унинг натижасига кўра (14.50) даражаси қатор $(-r, r)$ ораликда исталган марта (ҳадлаб) дифференциалланувчи бўлиб,

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)na_n + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

бўлади. Кейинги тенгликларда $x = 0$ деб қуйидагиларни топамиз:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Натижада (14.50) қаторнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да барча тартибдаги ҳосилаларга эга:

а) $x \neq 0$ бўлганда

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x) = -\left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{4x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

.....

бунда $P(u)$ — u нинг рационал функцияси. Бу

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

муносабатнинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида кўрсатилади.

б) $x = 0$ бўлсин. Берилган функция $x = 0$ нуқтада барча тартибдаги ҳосилаларга эга бўлиб, улар нолга тенг бўлади:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f''(0) = 0,$$

.....

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

.....

Умумий ҳолда, $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлишини математик индукция методи ёрдамида кўрсатиш мумкин.

Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги барча тартибдаги ҳосилалари нолга тенг экан.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги Тейлор қатори

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

бўлиб, унинг йиғиндиси 0 га тенг.

Келтирилган мисолдан кўринадики, бирор ораликда исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлган баъзи функцияларнинг Тейлор қатори шу ораликда қаралаётган функцияга яқинлашмаслиги мумкин экан.

Қуйида функциянинг Тейлор қаторига ёйилишининг етарли шартини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

14.25-теорема. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ ораликда исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлсин. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $x \in (-r, r)$ ҳамда барча $n = 0, 1, 2, \dots$ учун

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $(-r, r)$ ораликда $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади, яъни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (14.50)$$

Исбот. $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

ни ёзиб, унинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳади

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

ни олайлик. У ҳолда

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in (-r, r))$$

бўлади. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad x \in (-r, r)$$

эканлигини аниқлаймиз. Бу эса (14.50) муносабатнинг ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. Элементар функцияларнинг Тейлор қаторлари. 1°. $f(x) = e^x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x) = e^x$ функциянинг (ихтиёрий чекли $[-a, a]$ ($a > 0$) ораликдаги) Тейлор формуласи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади эса Лагранж кўринишида қуйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

(қаранг, 1-қисм, 6-боб, 7-§). Ҳар бир $x \in [-a, a]$ ($a > 0$) да $e^{\theta x} < e^a$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

эканлиги келиб чиқади ва $n \rightarrow \infty$ да у нолга интилади. Демак, ихтиёрий чекли x да

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

бўлади.

2°. $f(x) = \sin x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x) = \sin x$ функциянинг (ихтиёрий чекли $[-a, a]$ ($a > 0$) оралиқдаги) Тейлор формуласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x)$$

бўлади. Бу формула қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) учун

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall x$ учун

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

бўлади.

3°. $f(x) = \cos x$ функциянинг Тейлор қатори. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$$

қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) учун

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall x$ учун

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, бу функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Бу формулада $x \in [0, 1]$ да $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Лагранж кўринишида қуйидагича ёзиб

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

унинг учун

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad (14.51)$$

бўлишини, $x \in [-a, 0]$ ($0 < a < 1$) бўлганда эса $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Коши кўринишида қуйидагича ёзиб

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1),$$

унинг учун

$$|r_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{1-a} \quad (14.52)$$

бўлишини кўрган эдик (1-қисм, 6-боб, 7-§).

(14.51) ва (14.52) муносабатлардан $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлишини топамиз. Демак, $\forall x \in (-1, 1]$ да

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned} \quad (14.53)$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $\ln(1+x)$ функция $(-1, +\infty)$ оралиқда берилган бўлса ҳам бу функциянинг Тейлор қатори — (14.53) муносабат $(-1, +1]$ ярим интервалда ўринлидир.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$ функциянинг Тейлор қатори. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x) \end{aligned}$$

бўлиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§), унинг қолдиқ ҳади Коши кўри-
нишида қуйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Уни ушбу

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!} x^n \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

кўринишида ёзиб оламиз.

Агар $-1 < x < 1$ бўлганда: биринчидан, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2) \dots$

$\cdot [(\alpha-1)-(n-1)] x^n = 0$,
чунки бу яқинлашувчи

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

қаторнинг умумий ҳади (бу қаторнинг яқинлашувчилиги Даламбер аломатига кўра кўрсатилади), иккинчидан, $|\alpha x| (1-|x|)^{\alpha-1} < \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha x| (1+|x|)^{\alpha-1}$ ва ниҳоят, учинчидан $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leq \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$ бўлганлигидан $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $|x| < 1$ да

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

бўлади.

10-§. Функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш

Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асо-
сий объект. Кўпгина масалалар эса, функцияни ҳисоблаш (берилган
нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Функциянинг мураккаб бў-
лиши бундай ҳисоблашларда катта қийинчиликлар туғдиради. Натижа-
да функцияни унга қараганда содда ва ҳисоблашга қулай бўлган
функция билан яқинлаштириш — тақрибий ифодалаш масаласи юзага
келади.

Функциянинг даражали қаторга ёйилишидан, уни тақрибий ҳисоб-
лашда кенг фойдаланилади. Бунда функцияни даражали қатор қисмий
йиғиндиси билан алмаштирилиб, функциянинг берилган нуқтадаги қий-
матини топиш кўпҳаднинг шу нуқтадаги қийматини ҳисоблашга кел-
тирилади. Даражали қатор тузилишига кўра содда бўлиши, унинг қис-
мий йиғиндиси эса оддий кўпҳад эканлиги функциянинг берилган нуқ-
тадаги қийматини эффектив ҳисоблай олиниши мумкинлигига олиб
келади.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, бундай имконият фақат «яқин»
функциялар учун, яъни исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлган
ва маълум шартни қаноатлантирган (қаранг 14.23-теорема) функция-
лар учун мавжуд бўлади. Ихтиёрий узлуксиз функция берилган бўлса,

уни бирор кўпхад ёрдамида тақрибий ҳисоблаш мумкин бўлармикан деган савол туғилади. Яъни функцияни кўпхад билан тақрибдан алмаштириш имкониятини аналитик функциялар синфидан узлуксиз функциялар синфига умумлаштириш масаласи пайдо бўлади.

1885 йилда машҳур немис математиги К. Вейерштрасс томонидан узлуксиз функцияни кўпхад билан яқинлаштириш мумкинлиги кўрсатилди. Бу факт қуйида келтириладиган теорема орқали ифодаланади.

14.26-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпхадлар топиладики

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < 1} |f(x) - P_n(x)| = 0$$

бўлади*.

Бу теореманинг турлича исботлари мавжуд бўлиб, биз унинг Бернштейн кўпхадлари ёрдамидаги исботини келтираемиз.

14.10-таъриф. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган бўлсин. Ушбу

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (14.54)$$

кўпхад $f(x)$ нинг Бернштейн кўпхади деб аталади.

Бернштейн кўпхади n - даражали кўпхад бўлиб, унинг коэффициентлари $f(x)$ функциянинг $\frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) нуқталардаги қийматлари орқали ифодаланади. Масалан, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ бўлганда

$$B_1(f, x) = f(0) + [f(1) - f(0)]x,$$

$$B_2(f, x) = f(0) + \left[2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(0)\right]x + \left[f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right]x^2,$$

$$B_3(f, x) = f(0) + \left[3f\left(\frac{1}{3}\right) - 3f(0)\right]x + \left[3f(0) - 6f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right)\right]x^2 + \left[f(1) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(0)\right]x^3$$

бўлади.

14.27-теорема (Бернштейн теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < 1} |f(x) - B_n(f, x)| = 0$$

бўлади.

Аввало битта лемма исботлаймиз.

*Функция берилган ва узлуксиз бўлган оралиқ ихтиёрий сегментдан иборат бўлган ҳолда теореманинг исботи 183-бетда келтирилади.

14.1. Лемма. Ушбу

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (14.55)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (14.56)$$

айниятлар ўринлидир.

Исбот. Маълумки, $\forall a, b \in R$ учун

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Бу айнtimerда $a = x$, $b = 1-x$ ($0 \leq x \leq 1$) деб оlinса, ундan

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

бўлиши келиб чиқади.

(14.56) айнtimerни исботлаш учун ушбу

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндиларни ҳисоблаймиз.

Агар

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} C_n^k &= \frac{k}{n} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{(k-1)!} = \\ &= C_{n-1}^{k-1}, \end{aligned} \quad (14.57)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = x [x + (1-x)]^{n-1} = x. \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Энди

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндини ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 [x + (1-x)]^{n-2} + \frac{1}{n} x [x + (1-x)]^{n-1} = \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

Бу ҳамда юқоридаги (14.56) ва (14.57) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Лемма исбот бўлди.

Бу леммадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

14.3- натижа. Ихтиёрий $x \in [0, 1]$ ва $n \in N$ учун

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n} \quad (14.58)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $x \in [0, 1]$ учун $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ бўлиб, (14.56) муносабатдан (14.58) тенгсизлиكنинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Бернштейн теоремасининг исботи. Юқоридаги (14.54) ва (14.55) муносабатларга кўра

$$B_n(f, x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (14.59)$$

бўлади.

$f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз. Демак, Кантор теоремасига асосан у шу сегментда текис узлуксиз бўлади, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $\forall x', x'' \in [0, 1]$ учун $|x' - x''| < \delta$ бўлганда $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

Юқоридаги (14.59) йиғинди k нинг $k = 0, 1, 2, \dots, n$ қийматлари бўйича йиғилган. Бу йиғиндининг ҳадларини k нинг

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \quad (x \in [0, 1])$$

тенгсизлиқни қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ҳамда k нинг

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \quad (x \in [0, 1])$$

тенгсизлиқнинг қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ажратиб, улардан ушбу

$$\begin{aligned} & \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - \right. \\ & \quad \left. - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ & B_n(f, x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ & = \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - \right. \\ & \quad \left. - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \quad (14.60)$$

бўлади.

Энди кейинги тенгсизлиқнинг ўнг томонидаги йиғиндиларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида баҳолаймиз.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - \right. \\ & \quad \left. - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\ & \leq 2M \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned} \quad (14.61)$$

бунда $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Агар $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ бўлганда $\left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \geq 1$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} & \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ & \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

бўлади. Юқорида келтирилган лемманинг натижасидан фойдаланиб, куйидагини топамиз:

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Демак,

$$\left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{M}{2n\delta^2}. \quad (14.62)$$

Натижада (14.60), (14.61) ва (14.62) муносабатлардан

$$|B_n(f, x) - f(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \quad (\forall x \in [0, 1])$$

бўлиши келиб чиқади. Агар n ни $n > \frac{M}{2\delta^2\varepsilon}$ қилиб олинса, у ҳолда

$$|B_n(f, x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |B_n(f, x) - f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Куйидаги

$$t = \frac{1}{b-a} x - \frac{a}{b-a}$$

чиқиқли алмаштириш $[a, b]$ сегментни $[0, 1]$ сегментга акслантиради. Бу алмаштиришдан фойдаланиб, ушбу

$$\varphi(t) = f(a + (b-a)t) \quad (14.63)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу $\varphi(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва шу сегментда узлуксиз бўлади. У ҳолда Бернштейн теоремасига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_n(\varphi, t) - \varphi(t)| = 0 \quad (14.64)$$

бўлади, бунда

$$B_n(\varphi, t) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

(14.63) ва (14.64) муносабатлардан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < b} \left| B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\begin{aligned} B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right) &= \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left[1 - \frac{x-a}{b-a}\right]^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, қаралаётган оралиқ $[a, b]$ сегментдан иборат бўлган ҳолда қуйидаги теорема (Вейерштрасс теоремаси) га келамиз.

14.28-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < b} \left| B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

бўлади.

Гарчи Вейерштрасс теоремаси $f(x)$ функцияни $B_n(f, x)$ кўпхад билан яқинлаштириш мумкинлигини ифодаласа-да, яқинлашиш хатолиги

$$r_n(f, x) = f(x) - B_n(f, x)$$

ни баҳолаш имконини аниқлаб бермайди. Кейинги ўрганишлар $r_n(f, x)$ нинг нолга интилиш тартиби, яқинлаштириладиган $f(x)$ функциянинг узлуксиз модулига (1-қисм, 5-боб, 9-§ га қаранг) боғлиқ эканлигини кўрсатади.

14.29-теорема. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $B_n(f, x)$ эса унинг Бернштейн кўпхади бўлса, у ҳолда

$$\sup_{0 < x < 1} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (14.65)$$

бўлади, бунда $\omega(\delta) - f(x)$ функциянинг узлуксизлик модули.

Исбот. (14.59) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз.

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Функция узлуксизлик модулининг ушбу

$$\omega(\lambda \delta) \leq (1 + \lambda) \omega(\delta)$$

хоссасига кўра

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) = \omega\left(\sqrt{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \\ \leq \left(\left|\frac{k}{n} - x\right| \sqrt{n} + 1\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бўлиб, натижада

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \left[\sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 1 \right] \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бўлади.

Энди $\sum_{k=0}^n \left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ йигиндини

$$\sum_{k=0}^n \left|\frac{k}{n} - x\right| \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}$$

кўринишда ёзиб, унга Қоши — Буняковский тенгсизлигини (қаралсин, 12-боб, 1-§) қўллаймиз:

$$\sum_{k=0}^n \left|\frac{k}{n} - x\right| \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \leq \\ \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} = \\ = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Демак,

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \left(\sqrt{n} \frac{1}{2\sqrt{n}} + 1 \right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $f(x)$ функция $[0, 1]$ ораликда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [0, 1]$ учун $|f'(x)| \leq M$ ($M = \text{const}$) бўлсин. У ҳолда, Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$|B_n(f, x) - f(x)| = \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ \leq M \sum_{k=0}^n \left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.$$

Демак, бу ҳолда

$$\sup_{0 < x < 1} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

бўлади.

15-БОБ

МЕТРИК ФАЗОЛАР

Юқоридаги баёнимиздан маълумки, математик анализнинг биз ўрганган барча асосий тушунчалари (лимит, узлуксизлик, ҳосила, интеграл, яқинлашувчилик ва ҳоказо) турли тўпламлар (R , R^m , $C[a, b]$ ва ҳоказо) элементлари кетма-кетлигида лимитга ўтиш амали орқали таърифланади. Бу амал ҳар бир тўпلامда ўзига хос кiritилган эди. Масалан,

1) R да $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($x_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик берилган бўлсин. Унинг лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (a \in R)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a сон $\{x_n\}$ кетма-кетлигининг лимити дейилади.

2) R^m да берилган $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon$$

$$(a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлигининг лимити деб аталади.

$$3) C[a, b] \text{ да } \{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, (f_n(x) \in C[a, b], n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу функционал кетма-кетлигининг лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлигининг лимити ($\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашади), деб аталади.

Агар $|x_n - a|$ миқдор R даги x_n ва a ($x_n \in R$, $a \in R$, $n = 1, 2, \dots$) нуқталар орасидаги масофа — $\rho(x_n, a)$ (1-қисм, 1-боб, 10-§),

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} \quad (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

миқдор R^m даги $x^{(n)}$ ва a нуқталар орасидаги масофа $\rho(x^{(n)}, a)$ (12-боб 1-§), ҳамда

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)|$$

миқдор эса $C[a, b]$ нинг $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ва $f(x)$ элементлари орасидаги масофа — $\rho(f_n(x), f(x))$ (1-қисм, 5-боб, 11-§) эканлигини эътиборга олсак, R , R^m ,

$C[a, b]$ тўпламларда, уларнинг элементларидан тузилган кетма-кетликнинг limiti масофа тушунчасига асосланганлигини кўрамиз.

Бир томондан $R, R^m, C[a, b]$ тўпламларнинг турли табиатдаги элементлардан ташкил топганлиги, иккинчи томондан эса уларда лимитга ўтиш амалининг фақат масофага асосланишдек умумийликка эга бўлиши, табиий равишда бу тўпламларни умумий ҳолда қарашга, яъни ихтиёрий тўплам элементлари орасида масофа тушунчасини киритиб, ўрганишга олиб келади.

1-§. Метрик фазо

E — ихтиёрий тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўпайтмаси

$$E \times E = \{(x, y) : x \in E, y \in E\}$$

(қаралсин, 1-қисм, 1-боб, 1-§) ни олайлик.

Маълумки, дастлабки тушунчалар қаторида ихтиёрий A тўпламни B тўпламга акслантириш

$$f : A \rightarrow B$$

тушунчаси келтирилган эди (1-қисм, 1-боб, 3-§).

Энди $A = E \times E, B = R_+$ (R_+ — барча манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами) деб ушбу

$$\rho : E \times E \rightarrow R_+ (\rho = \rho(x, y)) \quad (15.1)$$

акслантиришни қарайлик.

15.1-таъриф. Агар $\rho : E \times E \rightarrow R_+$ акслантириш учун

1°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) \geq 0$ ($\rho(x, y) = 0$ муносабат $x = y$ бўлгандагина бажарилади).

2°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриклик),

3°. $\forall x, y, z \in E$ учун $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак тенгсизлиги) шартлар бажарилса, у ҳолда бу ρ акслантириш масофа (метрика), E тўплам эса метрик фазо деб аталади. Метрик фазо (E, ρ) каби белгиланади. 1° — 3° шартлар метрик фазо аксиомалари дейилади. Метрик фазо элементларини шу фазо нуқталари ҳам деб аталади.

Мисоллар. 1. R тўпламни олайлик. ρ акслантириш қуйидагича аниқланса,

$$\rho(x, y) = |x - y| (\forall x, y \in R),$$

1-қисм, 2-боб, 10-§ да исботланганга кўра бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3° шартлар бажарилади. Демак, $\rho(x, y)$ — масофа ва (R, ρ) — метрик фазо.

2. R^m тўпламни олайлик, $\rho(x, y)$ акслантириш қуйидагича аниқлансин:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2}. \end{aligned}$$

Юқорида, 12-боб, 1-§ да бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3° шартларнинг бажарилиши кўрсатилган эди. Демак, ρ — масофа, (R^m, ρ) — метрик фазо.

3. $C[a, b]$ тўпламни кўрайлик. ρ акслантириш қуйидагича бўлсин;

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| (\forall x(t), y(t) \in C[a, b]).$$

бу $\rho(x, y)$ юқоридаги 1° — 3° шартларни қаноатлантиради (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 11-§). Демак, қаралаётган ρ — масофа, $(C[a, b], \rho)$ эса метрик фазо.

4. c — барча яқинлашувчи кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлари) тўплами бўлсин. ρ акслантириш ушбу

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in c, y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in c$$

қўринишда берилсин. 1-қисм, 3-боб, 4-§ да исботланганга кўра бу $\rho(x, y)$ учун $1^\circ - 3^\circ$ -шартлар бажарилади. Демак, ρ — масофа, $(\mathcal{C}, \rho)$ — метрик фазо.

5. m — барча чегараланган кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлари) тўплами бўлсин. ρ акслантириш 4-мисолдагидек қуйидагича берилсин:

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m, \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in m).$$

Бу акслантириш учун $1^\circ - 3^\circ$ -шартларнинг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Аввало $\rho(x, y) \geq 0$ бўлиши равшандир. Агар $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ бўлса,

ундан $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $x_n = y_n$, яъни $x = y$ бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $x = y$, яъни $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $x_n = y_n$ бўлса, ундан $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ экани

келиб чиқади.

Иккинчидан $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, чунки $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup_n |y_n - x_n| = \rho(y, x)$. Энди $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in m$ ва $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in m$ бўлсин. Абсолют қиймат хоссасига кўра

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \quad (n \in \mathbb{N})$$

бўлади. Бундан эса

$$|x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

эканлиги келиб чиқади. Аниқ юқори чегара хоссасига кўра

$$\sup_n |x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

бўлади. Бундан,

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Демак, ρ — масофа, (m, ρ) — метрик фазо.

(E, ρ) метрик фазо берилган. E_1 тўплам E нинг қисм тўплами, яъни $E_1 \subset E$ бўлсин. У ҳолда E_1 ҳам E да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади: (E_1, ρ) . Бу метрик фазо таърифидан келиб чиқади. Мисол келтирамиз. Равшанки, барча рационал сонлар тўплами Q барча ҳақиқий сонлар тўплами R нинг қисм тўплами: $Q \subset R$. (R, ρ) метрик фазо эди. (Q, ρ) ҳам R да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади.

Ўқувчининг эътиборини яна битта фактга жалб этамиз. Агар F тўплам берилган бўлиб, $\rho: F \times F \rightarrow R_+$ акслантиришлар турлича киритилиб, уларнинг ҳар бири $1^\circ - 3^\circ$ -шартларни бажарса, натижада турли метрик фазолар ҳосил бўлади. Мисол қарайлик. Биз юқориди $C[a, b]$ тўплам берилганда ушбу

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (x(t), y(t) \in C[a, b])$$

акслантиришни аниқлаб, унинг $1^\circ - 3^\circ$ -шартларни бажаришини кўрсатдик ва натижада $(C[a, b], \rho)$ метрик фазога эга бўлдик.

Энди худди шу $C[a, b]$ тўплам берилганда ρ_1 акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}. \quad (15.2)$$

Бу $\rho_1(x, y)$ нинг $1^\circ - 3^\circ$ -шартларни бажаришини кўрсатамиз.

(15.2) муносабатдан ҳар доим $\rho_1(x, y) \geq 0$ экани кўринади. Агар $\forall t \in [a, b]$ $x(t) = y(t)$ бўлса, ундан

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = 0$$

бўлса, ундан $\forall t \in [a, b]$ учун $x(t) = y(t)$ бўлиши келиб чиқади. Шунинг билан бирга, шунинг исботлай-

ми. Тескарисини фарз қилайлик. Бирор t_0 ($t_0 \in (a, b)$) нуқтада $x(t_0) \neq y(t_0)$, яъни, масалан, $x(t_0) - y(t_0) > 0$ бўлсин. У ҳолда узлуксиз функциянинг локал хос-
сасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) t_0 нуқтанинг етарлича кичик $U_\delta(t_0)$ атрофи ($U_\delta(t_0) \subset [a, b]$) топилдики, $\forall t \in U_\delta(t_0)$ учун $x(t) - y(t) > 0$ бўлади.
У ҳолда

$$\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt > 0$$

бўлиб, бу $\rho_1(x, y) = 0$ деб олинисига зид бўлиб қолади. Демак, $\forall t \in [a, b]$ учун $x(t) = y(t)$ бўлади.

Иккинчидан, $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ бўлади, чунки

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = \sqrt{\int_a^b [y(t) - x(t)]^2 dt} = \rho_1(y, x).$$

Коши — Буняковский тенгсизлиги

$$\left[\int_a^b f(t) g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt$$

дан (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 7-§) фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt &= \int_a^b f^2(t) dt + 2 \int_a^b f(t) g(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(t) dt + 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt} + \int_a^b g^2(t) dt = \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\sqrt{\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

бўлади. Бу тенгсизликда

$$f(t) = x(t) - z(t), \quad g(t) = z(t) - y(t) \quad (z(t) \in C[a, b])$$

қўйиб олинса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} &\leq \sqrt{\int_a^b [x(t) - z(t)]^2 dt} + \\ &+ \sqrt{\int_a^b [z(t) - y(t)]^2 dt}, \end{aligned}$$

яъни

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, ρ_1 акслантириш масофа. $(C[a, b], \rho_1)$ эса метрик фазо бўлади. Шундай қилиб $C[a, b]$ тўплам берилганда қуйидаги

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

ва

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

акслантиришларнинг ҳар бири масофа эканлигини кўрсатиб, натижада иккита турли $(C[a, b], \rho)$ ва $(C[a, b], \rho_1)$ метрик фазоларга эга бўлди.

Энди метрик фазодаги баъзи бир тўпламларни таърифлаймиз. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Бу фазода бирор a ($a \in E$) элемент олайлик.

15.2-таъриф. Ушбу

$$\{x \in E : \rho(x, a) < r\} \quad (\{x \in E : \rho(x, a) \leq r\}) \quad (r > 0)$$

тўплам (E, ρ) метрик фазодаги *очиқ шар* (*шар*) деб аталади. a нуқта *шар маркази*, $r > 0$ эса *шар радиуси* дейилади.

15.3-таъриф. Маркази a нуқтада, радиуси ε ($\varepsilon > 0$) бўлган *очиқ шар*

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in E : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

a нуқтанинг *атрофи* (*ε-атрофи*) дейилади.

Хусусан, (R, ρ) метрик фазода a ($a \in R$) нуқтанинг атрофи (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 2-§)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R : \rho(x, a) = |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

интервални, (R^m, ρ) фазода a ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$) нуқтанинг атрофи

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon\}$$

эса 12-боб, 1-§ да киритилган сферик атрофни билдиради.

$G = (E, \rho)$ метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин. Бу тўпламда бирор x_0 нуқтани олайлик. Агар x_0 ($x_0 \in G$) нуқтанинг шундай $U_\varepsilon(x_0)$ ($\varepsilon > 0$) атрофи мавжуд бўлсаки,

$$U_\varepsilon(x_0) \subset G$$

бўлса, у ҳолда x_0 нуқта G тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

15.4-таъриф. G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, (E, ρ) метрик фазодаги ҳар қандай *очиқ шар*

$$A = \{x \in E : \rho(x, a) < r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

очиқ тўплам бўлади (солиштиринг: 12-боб, 1-§).

$F = (E, \rho)$ метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин; $F \subset E$, x_0 эса E га тегишли бирор нуқта: $x_0 \in E$. Агар x_0 ($x_0 \in E$) нуқтанинг исталган $U_\varepsilon(x_0)$ атрофида F тўпламнинг x_0 дан фарқли камида битта нуқтаси топилса, x_0 нуқта F тўпламнинг *лимит нуқтаси* деб аталади. Бунда x_0 лимит нуқта F тўпламга тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг *ҳосиллави* тўплами дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг *эпиламси* деб аталади ва у $\bar{F}$ каби белгиланади: $\bar{F} = F \cup F'$.

15.5-таъриф. Агар F ($F \subset E$) тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, яъни $F' \subset F$ бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Равшанки, F ёпиқ тўплам бўлса, $F \cup F' = \bar{F} = F$ бўлади.

Масалан, (E, ρ) метрик фазодаги шар

$$B = \{x \in E : \rho(x, a) \leq r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

ёпиқ тўплам бўлади.

M — (E, ρ) метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин.
15.6-таъриф. Агар (E, ρ) метрик фазода шундай шар

$$B = \{x \in E; \rho(x, a) \leq r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

топилсаки, $M \subset B$ бўлса, у ҳолда M чегараланган тўплам деб аталади. Акс ҳолда, яъни ҳар қандай B шар олинганда ҳам, шундай $x \in M$ мавжуд бўлсаки, $x \in B$ бўлса, M тўпламни чегараланмаган тўплам дейилади.

Масалан, (R^m, ρ) метрик фазода шар, параллелепипед, симплекслар (қаралсин, 12-боб, 1-§) чегараланган тўпламлар бўлади.

Шу метрик фазода ушбу

$M > \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$
тўплам чегараланмаган тўплам бўлади.

2-§. Метрик фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Бирор (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. f ҳар бир натурал n ($n \in N$) сонга, E нинг бирор муайян x_n ($x_n \in E$) нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \rightarrow E \text{ ёки } n \rightarrow x_n \quad (n \in N, x_n \in E).$$

Бу $f: N \rightarrow E$ акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots) \quad (15.3)$$

тўплам (E, ρ) метрик фазода кетма-кетлик деб аталади ва у $\{x_n\}$ каби белгиланади.

(15.3) кетма-кетлиkning бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини, сўнгра номери n_1 дан катта бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини ва ҳоказо, шу усул билан (15.3) кетма-кетлиkning ҳадларини олиб, улардан ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) \quad (15.4)$$

кетма-кетлиkning ҳосил қиламиз.

Одатда (15.4) кетма-кетлик (15.3) кетма-кетлиkning қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади.

Энди (E, ρ) метрик фазода

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots) \quad (15.3)$$

кетма-кетлиkning лимити тушунчасини киритамиз.

(E, ρ) метрик фазода (15.3) кетма-кетлик берилган бўлсин, a нуқта E га тегишли нуқта бўлсин: $a \in E$.

15.7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ бўлса, a нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетлиkning лимити деб аталади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ёки $x_n \rightarrow a$ каби белгиланади.

Юқорида келтирилган таърифга эквивалент бўлган қуйидаги таърифни ҳам берish мумкин.

15.8-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ ($\forall \varepsilon > 0$) атрофи олинганда ҳам, (15.3) кетма-кетлиkning бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a нуқта (15.3) кетма-кетлиkning лимити деб аталади.

Агар (15.3) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади. Одатда бундай яқинлашиш масофа бўйича яқинлашиш деб аталади.

Мисоллар. 1. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. $\forall x_0 \in E$ нуқтани олиб, ушбу

$$x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$$

кетма-кетлиkning ҳосил қиламиз. Равшанки, бу яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади.

2. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлиб, бу фазо ҳеч бўлмаганда иккита нуқталарга эга бўлсин. Бу нуқталарни x_0 ва x_1 билан белгилаб ($x_0 \neq x_1$, $x_0 \in E$, $x_1 \in E$).

$$x_0, x_1, x_0, x_1, \dots, x_0, x_1, \dots$$

кетма-кетликни тузамиз. Бу кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

3. (Q, ρ) метрик фазода қуйидаги

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \dots$$

кетма-кетликларни қарайлик. Бу кетма-кетликларнинг биринчиси $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ нинг limiti 0 га тенг ($0 \in Q$). Демак, (Q, ρ) метрик фазодаги $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади.

Иккинчи кетма-кетлик $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ нинг limiti e га тенг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§). Бироқ $e \notin Q$. Демак, (Q, ρ) метрик фазода $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

Энди, хусусий ҳолларда, (E, ρ) метрик фазо сифатида (R, ρ) , (R^m, ρ) ва $(C[a, b], \rho)$ фазоларни олиб, бу фазоларда кетма-кетлиқнинг масофа бўйича яқинлашувчилиги тушунчасини изоҳлаб ўтаемиз.

(R, ρ) метрик фазодаги $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots (x_n \in R, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши, 1-қисм, 3-бобда ўрганилган сонлар кетма-кетлигининг яқинлашишидан иборат.

(R^m, ρ) метрик фазодаги $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик R^m тўпламининг $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$) нуқталарида иборат кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши координаталар бўйича яқинлашишни билдиради (қаралсин 12-боб, 2-§).

$(C[a, b], \rho)$ метрик фазодаги $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, f_n(x) \in C[a, b]$: $n = 1, 2, \dots$ кетма-кетлик функционал кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши 14-бобда батафсил ўрганилган текис яқинлашишни ифодалайди.

Энди метрик фазода яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларини кетма-кетликларнинг хоссалари билан келтирамиз.

1°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, бу кетма-кетликнинг limiti битта бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг limiti иккита: a ва b ($a \in E, b \in E$) бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, b) = 0,$$

яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $\rho(x_n, a) < \varepsilon$

шунингдек шу $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Агар $\bar{n}_0 = \max(n, n_0)$ дейилса, унда $\forall n > \bar{n}_0$ да бир вақтла $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Масофа таърифидаги 3° шартдан, яъни уч-
бул тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b).$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ ва $\forall n > \bar{n}_0$ учун $\rho(a, b) < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\rho(a, b) = 0$ бўлиши
келиб чикади. Масофа таърифидаги 1° шартга кўра $a = b$ бўлади.

2°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (a \in E)$$

бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $\{x_{n_k}\}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) ҳам яқинлашувчи бўлади ва $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Исб от. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a га тенг бўл-
ди; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ қисмий
кетма-кетлигини олайлик.

Модомики $x_n \rightarrow a$ экан, унда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топила-
дики, $\forall n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ бўлади. $k \rightarrow \infty$ да $n_k \rightarrow \infty$ бўлишидан $m \in N$ то-
пиладики, $n_m > n_0$ бўлади. Демак, $k > m \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Бу эса
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ эканлигини билдиради.

3-§. Коши теоремаси. Тўлиқ метрик фазо

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 10-§), R^m даги (12-боб, 2-§), $C[a, b]$
даги (14-боб, 2-§) кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлишлари учун уларнинг
фундаментал бўлишлари зарур ва етарли эканлигини (Коши теоремасини) кўриб ўт-
дик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси и х т н ё р и й метрик фазо учун ҳам
ўриқли бўладими деган савол туғилади. Аввало, фундаментал кетма-кетлик тушун-
часин киритайлик.

(E, ρ) — ихтиёрий метрик фазо, $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots)$$

— ундаги бирор кетма-кетлик бўлсин.

15.9-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки,
 $n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ бўлса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-
кетлик дейилади.

$R, R^m, C[a, b]$ фазолардаги фундаментал ва фундаментал бўлмаган кетма-кет-
ликларга мисолларни биз юқорида кўрган эдик. Яна битта мисол сифатида (Q, ρ)
метрик фазодаги

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots \quad (15.5)$$

кетма-кетликни келтирайлик. $Q \subset R$ бўлгани сабабли (15.5) ни R даги кетма-кетлик
деб қараб ҳам мумкин. R да бу кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Коши теоремасига кўра $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик фундаменталдир. Q да киритилган

масофа R даги $\rho(x, y) = |x - y|$ масофанинг айнан ўзи бўлгани учун $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик (Q, ρ) да ҳам фундаменталдир.

Ихтиёрий (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Ундаги барча яқинлашувчи кетма-кетликлар тўпламини $L(E)$, барча фундаментал кетма-кетликлар тўпламини $\Phi(E)$ деб белгилайлик.

Юқоридики келтирилган Қоши теоремаси $R, R^m, C[a, b]$ лар учун $L(E) = \Phi(E)$ эканини билдиради.

15.1-теорема. Ихтиёрий (E, ρ) метрик фазо учун $L(E) \subset \Phi(E)$, яъни ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетликлар фундаментал бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\{x_n\}$ ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (a \in E)$$

бўлсин. Яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун

$$\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. Масофа таърифидаги 3°-шартдан фойдаланиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса, $\{x_n\}$ нинг фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Аммо $\Phi(E) \subset L(E)$ муносабат, яъни ҳар қандай фундаментал кетма-кетлиkning яқинлашувчи бўлиши ихтиёрий метрик фазо учун тўғри бўлавермайди. Бошқача айтганда, шундай метрик фазо ва унда шундай фундаментал кетма-кетлик топиладики, у яқинлашувчи бўлмайди.

Мисол сифатида (Q, ρ) фазони ва ундаги (15.5) кетма-кетлиكنи қарашимиз мумкин. Бу кетма-кетлик, курсатганимиздек, фундаментал бўлса-да, яқинлашувчи эмас. Яна бир мисол келтирайлик.

$(C[0; 1], \rho)$ метрик фазода қуйидаги $\{x_n\}$:

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

кетма-кетлиكنи олайлик. Бу фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$ деб олинса, унда $\forall n > n_0, \forall m > n_0$ учун

$$\begin{aligned} \rho^2(x^n, x^m) &= \int_0^1 (x^n - x^m)^2 dx = \int_0^1 [x^{2n} + x^{2m} - 2x^{n+m}] dx = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} - 2 \frac{1}{n+m+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ва демак,

$$\rho(x^n, x^m) < \varepsilon$$

бўлади.

Бироқ бу $\{x^n\}$ кетма-кетлик $(C[0, 1], \rho)$ метрик фазода яқинлашувчи эмас (чунки

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $f(x) \notin C[a, b]$).

Шундай қилиб, баъзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлар экан, баъзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлавермас экан.

15.10-таъриф. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Агар бу фазода $\Phi(E) \subset L(E)$ бўлса, яъни ҳар қандай $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, (E, ρ) тўлиқ метрик фазо деб аталади.

Мисоллар. Юқорида, 1-§ да келтирилган (R, ρ) , (R^m, ρ) , $(C[a, b], \rho)$, (m, ρ) , (R, ρ) метрик фазолар тўлиқ метрик фазолар бўлади.
 (R, ρ) фазонинг тўлиқлиги 1-қисм, 3-боб, 10-§ да келтирилган теоремадан,
 (R^m, ρ) фазонинг тўлиқлиги 12-боб, 2-§ да келтирилган теоремадан $(C[a, b], \rho)$ метрик фазонинг тўлиқлиги эса 14-боб, 2-§ да келтирилган теоремадан келиб чиқади.

Энди (m, ρ) метрик фазонинг тўлиқлигини кўрсатамиз. Бу метрик фазода $\{x_n\} (x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots) \in m)$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Фундаменталлик таърифидан: $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0, \forall p > n_0$ учун

$$\rho(x_n, x_p) < \varepsilon,$$

яъни

$$\rho(x_n, x_p) = \sup_k |\rho_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall k \in N$ ҳамда $\forall n > n_0, \forall p > n_0$ учун

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан $(\xi_k^{(n)}) = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$ сонлар кетма-кетлигининг фундаментал кетма-кетлик экани келиб чиқади. Унда Коши теоремасига мувофиқ (1-қисм, 3-боб, 10-§) бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k \quad (\forall k \in N). \quad (15.6)$$

Энди $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ нинг m тўпламга тегишли бўлишини кўрсатамиз.

Аввало, $x_n \in m$ эканлигидан шундай M_n сон мавжудки, $\forall k \in N$ учун

$$|\xi_k^{(n)}| < M_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлади. Иккинчи томондан $\{x_n\}$ нинг фундаменталлигидан топамиз:

$\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall p > n_0$ учун $\forall k \in N$ да

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon \quad (15.7)$$

бўлади. Юқоридаги тенгсизликлардан $\forall n > n_0$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon < \xi_k^{(n)} < M_{n_0+1} + \varepsilon \quad (15.7)$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгсизликлардан, $n \rightarrow \infty$ да $\forall k \in N$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon \leq \xi_k < M_{n_0+1} + \varepsilon$$

келиб чиқади. Демак, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ кетма-кетлик чегараланган экан, яъни $x \in m$.

Юқоридаги (15.7) муносабатдан $n > n_0$ бўлганда $\sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \varepsilon$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса $s(x_n, x) < \varepsilon$ бўлишини ифодалайди. Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$,

яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи.

Шундай қилиб, (m, ρ) метрик фазодаги ихтиёрий $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлигининг яқинлашувчи бўлишини кўрсатдик. Демак, (m, ρ) — тўлиқ метрик фазо.

Худди шунга ўхшаш (c, ρ) метрик фазонинг тўлиқлиги кўрсатилади.

Юқорида келтирилган мисоллар (Q, ρ) ва $(C[0, 1], \rho_1)$ метрик фазоларнинг тўлиқ эканлигини кўрсатади. 15.1-теорема ҳамда тўлиқ метрик фазо таърифидан қуйидаги теоремага келамиз.

15.2-теорема (Коши теоремаси). (E, ρ) тўлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода $\Phi(E) = L(E)$, яъни $\{x_n\} (x_n \in E, n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Тўлиқ метрик фазоларда R даги ичма-ич жойлашган сегментлар принципи (1-қисм, 3-боб, 8-§), R^m даги ичма-ич жойлашган шарлар принципи (12-боб, 2-§) каби принцип ўринли бўлади.

(E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Марказлари x_n ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) нуқта-ларда. радиуслари r_n ($r_n \in R_+, n = 1, 2, \dots$) бўлган ушбу

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(x_1, r_1) = \{x \in E: \rho(x, x_1) \leq r_1\}, \\ S_2 &= S_2(x_2, r_2) = \{x \in E: \rho(x, x_2) \leq r_2\}, \\ S_n &= S_n(x_n, r_n) = \{x \in E: \rho(x, x_n) \leq r_n\}, \end{aligned}$$

шарлар кетма-кетлиги $\{S_n\}$ берилган бўлсин. Агар бу кетма-кетлик учун қуйидаги

$$S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{S_n\}$ — ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетли-ги деб аталади.

15.3-теорема. (E, ρ) — *тўлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода $\{S_n\}$ ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар $n \rightarrow \infty$ да шар радиусларидан иборат $\{r_n\}$ кетма-кетликнинг limiti ноль бўлса, яъни*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

у ҳолда барча шарларга тегишли бўлган x_0 ($x_0 \in E$) нуқта мавжуд ва ягонадир.

Бу теоремнинг исботи 12-боб. 2-§ да келтирилган R^m даги ичма-ич жойлашган шарлар ҳақидаги теореманинг исботига ўхшашдир.

4-§. Больцано — Вейерштрасс теоремаси. Компакт метрик фазолар

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 9-§), R^m даги (12-боб, 2-§) ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин-лигини (Больцано—Вейерштрасс теоремасини) кўриб ўтдик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси ихтиёрий метрик фазо учун ҳам ўринли бўладими деган савол туғилади.

Авалло. ушбу бобнинг 1-§ ида ихтиёрий метрик фазода берилган тўпламининг чегараланганлиги тушунчаси билан танишганимизни эслатиб ўтамиз.

Биз, шунингдек, ихтиёрий яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган тўплам таш-кил қилишини ҳам кўрган эдик. Юқорида айтилганига кўра, (R, ρ) , (R^m, ρ) метрик фазоларда ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кет-лик ажратиш мумкин, яъни бу метрик фазоларда Больцано — Вейерштрасс теоремаси ўринли бўлади.

Бироқ бу ҳол ҳамма метрик фазоларда ҳам ўринли бўлавермайди. Масалан, (m, ρ) метрик фазони олайлик. Бу фазода ушбу

$$(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots \quad (15.8)$$

кетма-кетликини қарайлик. Бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари қуйидаги

$$\{x \in m: s(x, 0) \leq 1\} \quad (0 = (0, 0, 0, \dots))$$

шарда жойлашгандир. Демак, (15.8) кетма-кетлик чегараланган. Айни пайтда бу (15.8) кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш бўлмайди. Чунки (15.8) кетма-кетликининг ихтиёрий икки x_k ва x_n ($k \neq n$) элементлири орасидаги масо-фа ҳар доим

$$\rho(x_k, x_n) = 1 \quad (k \neq n)$$

бўлади.

Демак, баъзи бир метрик фазоларда, ундаги ихтиёрий чегараланган кетма-кет-ликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин (масалан, (R, ρ) , (R^m, ρ) фазолар), баъзи бир метрик фазоларда эса, ундаги ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан ҳам яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш бўлавермас экан (маса-лан, (m, ρ) метрик фазо).

15.11-таъриф. (E, ρ) — ихтиёрий метрик фазо. Агар бу фазодаги ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$

($x_{n_k} \in E, k = 1, 2, \dots; n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, (E, ρ) *компакт метрик фазо* деб аталади. Акс ҳолда, яъни (E, ρ) да шундай чегараланган кетма-кетлик топилсаки, унда яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш олиш мумкин бўлмаса, (E, ρ) *компакт бўлмаган фазо* дейилади.

Шундай қилиб, юқоридаги R, R^m фазолар компакт фазолардир. (m, ρ) фазо компакт бўлмаган фазодир.

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

Биз 1-қисмининг 9-бобида $[a, b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функция-нинг Риман интеграли тушунчасини киритдик ва батафсил ўргандик. Интегралнинг баёнида оралиқнинг чеклилиги ва функциянинг чегара-ланганлиги бевосита иштирок этди. Биз кўрдикки, ушбу таъриф маъ-носида интегралланувчи функциялар синфи анча кенг экан.

Хўш, $[a, +\infty)$ (ёки $(-\infty, a]$, ёки $(-\infty, +\infty)$) оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг интеграли ёки $[a, b]$ да берилган, аммо чегаралан-маган $f(x)$ функциянинг интеграли тушунчаларини ҳам киритиб бўлар-микан? Яъни аввалги интеграл тушунчасини маълум маъноларда умум-лаштириш имконияти бормикан деган савол туғилади. Албатта, умум-лаштириш шундай бўлиши керакки, натижада Риман интегралининг асосий хоссалари ўз кучини сақлаб қолсин.

Биз ушбу бобда ана шундай умумлашган (ёки хосмас) интеграл-ларини киритамиз ва ўрганамиз.

1-§. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

1. Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси. Бирор $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқ-нинг исталган $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) қисмида интегралланувчи (қаралсин, 1-қисм, 9-боб), яъни ихтиёрий t ($t > a$) учун ушбу

$$\int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, қаралаётган функция ҳамда олинган t га боғлиқ бўлиб, тайин $f(x)$ учун у фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t). \quad (16.1)$$

Натижада (16.1) муносабат билан аниқланган $F(t)$ ($t \in (a, +\infty)$) функ-цияга эга бўламиз.

16.1-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқдаги *хосмас интег-рали* деб аталади ва у

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (16.2)$$

16.2-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti мав-жуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.2) хосмас интеграл *яқинлашувчи дейи-*

лади, $f(x)$ эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса, (16.2) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Функциянинг $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари ҳам юқоридаги каби таърифланади.

$f(x)$ функция $(-\infty, a]$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исгалган $[\tau, a]$ $(-\infty < \tau < a)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^a f(x) dx = \Phi(\tau)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.3-таъриф. $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг limiti $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi(\tau)$ мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(-\infty, a]$ оралиқдаги хосмас интеграл деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^a f(x) dx \quad (16.3)$$

16.4-таъриф. Агар $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.3) интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, a]$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг limiti чексиз бўлса, (16.3) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исгалган $[\tau, t]$ $(-\infty < \tau < t < +\infty)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \psi(\tau, t)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.5-таъриф. $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг limiti $\lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \psi(\tau, t)$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқдаги хосмас интеграл деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \psi(\tau, t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \int_{\tau}^t f(x) dx \quad (16.5)$$

16.6-таъриф. Агар $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.4) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса, (16.4) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Аниқ интеграл хоссасига кўра $\forall a \in R$ учун

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \int_{\tau}^a f(x) dx + \int_a^t f(x) dx$$

бўлишни эътиборга олсак, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ нинг мавжуд бўлиши

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралларнинг ҳар бирининг алоҳида-алоҳида мавжуд бўлишидан келиб чиқади. Бинобарин, уни қуйидагича ҳам аниқлаш мумкин бўлади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (\forall a \in R)$$

16.1-эслатма. Юқорида $[a, +\infty)$ ($(-\infty, a]$ ($(-\infty, +\infty)$) да берилган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли тушунчаси $F(t)$ ($\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t)$ нинг $t \rightarrow +\infty$, ($\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$) да limiti мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ ($\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t)$) нинг $t \rightarrow +\infty$ ($\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$) даги limiti мавжуд бўлмаган ҳол ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равишда $f(x)$ нинг хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)$$

узоқлашувчи деб қабул қиламиз

Шундай қилиб, хосмас интеграл тушунчаси аввал ўрганилган Римел интеграли тушунчасидан яна бир марта лимитга ўтиш амаали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун қуйида биз кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига «интеграл» деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

интегрални қарайлик. Таърифига кўра

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx$$

$$F(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-1} + 1$$

бўлганлигидан эса

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = 1$$

бўлади. Демак, берилган ҳосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

2. Қуйидаги

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални қарайлик. Ҳосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctg} \tau) = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Демак, интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

3. Ушбу

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0) \quad (16.5)$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Равшанки, $[a, t] \ (a > 0)$ оралиқда $f(x) =$

$\frac{1}{x^\alpha}$ функция узлуксиз бўлиб, $\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}$ мавжуд бўлади. Қуйидаги ҳолларни қарайлик:

а) $\alpha > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$$

бўлади. Демак, $\alpha > 1$ бўлганда берилган интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$$

бўлади.

б) $\alpha < 1$ ва $\alpha = 1$ бўлганда эса, мос равишда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

бўлади. Демак, $\alpha \leq 1$ бўлганда берилган интеграл узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0, \alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $0 < \alpha \leq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

4. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

хосмас интеграл, юқоридаги келишувимизга кўра узоқлашувчидир, чунки $t \rightarrow +\infty$ да

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

функция лимитга эга эмас.

Юқорида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ интегралнинг $t \rightarrow +\infty$ даги лимити сифатида таърифланди. Сўнгра бу хосмас интеграл мавжуд (мавжуд эмас) дейилиши ўрнига хосмас интеграл яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилди. Бундай дейилишининг боиси, бир томондан, хосмас интегралнинг лимитга ўтиш амали билан таърифланиши бўлса, иккинчи томондан унинг, қаторлар билан ўхшашлигидир. Маълумки, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қатор $F(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ қисмий йиғиндининг $n \rightarrow +\infty$ даги лимити сифатида таърифланиб, бу

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

лимит чекли бўлганда қатор яқинлашувчи, чексиз бўлганда ёки мавжуд бўлмаганда эса қатор узоқлашувчи деб аталар эди.

Биз қуйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан, $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty]$ оралиқ бўйича олишган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегрални учун келтирамыз. Бу хоссаларни $\int_{-\infty}^a f(x) dx$

ёки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин. Бу ишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

2. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. Риман интегралини умумлаштиришдан ҳосил қилинган яқинлашувчи хосмас интеграллар ҳам шу Риман интеграл хоссалари сингарига эга.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ин-

тегрални яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг $[b, +\infty)$ ($a < b$) ^{оралиқ} бўйича $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегрални ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Бунда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (16.6)$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^t f(x) dx \quad (a < t < \infty) \quad (16.7)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (16.7) муносабатни ушбу

$$\int_b^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

кўринишда ёзиб, $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_b^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

Бундан эса $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлиши

дан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.6) формула-
нинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

2° Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} cf(x) dx$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} cf(x) dx = c \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const}$.

3°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлса, бу функциянинг хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлсин.

4°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса,

у ҳолда $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} |f(x) \pm g(x)| dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \pm \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

16.1-натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлиб, $\int_a^{+\infty} f_k(x) dx$ ($k = 1, 2, \dots, n$) интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx \quad (c_k = \text{const}, k = 1, 2, \dots, n)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx &= c_1 \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + \\ &+ c_2 \int_a^{+\infty} f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^{+\infty} f_n(x) dx \end{aligned}$$

5°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи, бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 2° — 5°-хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Шунингдек $f(x)$ функция шу оралиқда чегараланган, яъни шундай m ва M ўзгармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, +\infty)$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлиб, $g(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ да ўз ишорасини ўзгартирмасин яъни $\forall x \in [a, +\infty)$ учун ҳар доим $g(x) \geq 0$ ёки $g(x) \leq 0$ бўлсин.

6° Агар $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон топиладики,

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (16.8)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Юқорида келтирилган $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда манфий бўлмасин: $g(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, +\infty)$). У ҳолда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

бўлиб, унда эса (Риман интегралнинг тегишли хоссасига кўра) $m \int_a^t g(x)dx \leq \int_a^t f(x)g(x)dx \leq M \int_a^t g(x)dx$ бўлишини топамиз. Кейинги, тенгсизликларда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтсак,

$$m \int_a^{+\infty} g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \leq M \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (16.9)$$

эканлиги келиб чиқади.

Икки ҳолни қарайлик:

а) $\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = 0$$

бўлиб, бунда μ деб $m \leq \mu \leq M$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонни олиш мумкин.

б) $\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (16.9) тенгсизликлардан

$$m \leq \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \leq M$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$M = \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$$

деб олсак, унда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

$[a, +\infty)$ оралиқда $g(x) \leq 0$ бўлганда (16.8) формула худди шунга ўхшаш исботланади. Бу 6°-хосса *ўрта қиймат ҳақидаги теорема* деб ҳам юритилади.

2. §. Чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги

Энди $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Маълумки, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги $t \rightarrow +\infty$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (t > a)$$

функциянинг чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланар эди. Бинобарин, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, $t \rightarrow +\infty$ да

$F(t)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат. Биз функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремани дастлаб монотон функция, сўнг ихтиёрий функция учун келтирган эдик (1-қисм, 4-боб, 5-§, 6-§).

Аввало $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ҳамда $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлган функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремани келтиргимиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу $f(x)$ функцияни $[a, +\infty)$ оралиқнинг исталган $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) қисмида интеграллашувчи деб қарайлик. Унда $a < t_1 < t_2 < +\infty$ лар учун

$$\begin{aligned} F(t_2) &= \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = F(t_1) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq F(t_1) \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $f(x) \geq 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Бинобарин, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади.

Монотон функциянинг лимити ҳақидаги 4.4-теоремадан (1-қисм, 4-боб, 5-§) фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

16.1-теорема. $f(x) (f(x) \geq 0)$ функция хосмас интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\{F(t)\}$ нинг юқоридан чегараланган, яъни $\forall t \in (a, +\infty)$ учун

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция хосмас интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ нинг яқинлашувчилик критерийси деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қуйидаги натижани айта оламиз.

16.2-натижа. Агар $\{F(t)\} = \left\{ \int_a^t f(x) dx \right\}$ тўпلام юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

2. Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралларини таққослаш ҳақида теоремалар.

16.2-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ сралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (16.10)$$

бўлсин. У ҳолда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.1-теоремага кўра $\{G(t)\} = \left\{ \int_a^t g(x) dx \right\}$ тўпلام юқоридан чегараланган, яъни

$$G(t) = \int_a^t g(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. (16.10) муносабатга асосан $\forall t$ учун ($t \in (a, +\infty)$)

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx = G(t) \leq C$$

бўлиб, ундан яна 16.1-теоремага кўра $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int_a^{+\infty} t(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} = \left\{ \int_a^t t(x) dx \right\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx$$

тенгсизликдан эса $\{G(t) = \{\int_a^t g(x) dx\}$ нинг ҳам юқоридан чегараланмаганлигини топамиз. Демак, юқорида келтирилган натижага кўра, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл — узоқлашувчи. Теорема исбот бўлди.

16.3-теорема. $[a, +\infty)$ да $g(x)$ манфий бўлмаган функциялар берилган бўлсин. $x \rightarrow +\infty$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг limiti k бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k > 0$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $k < +\infty$ бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай t_0 ($t_0 > a$) топиладики, барча $x > t_0$ учун

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon,$$

яъни

$$(k - \varepsilon) g(x) < f(x) < (k + \varepsilon) g(x) \quad (16.11)$$

бўлади.

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи. У ҳолда $\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon) g(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. (16.11] тенгсизликни эътиборга олиб, сўнг 16.2-теоремадан фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.

Энди $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлиб, $k > 0$ бўлсин. Агар $k > k_1 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи k_1 сон олинса ҳам, шундай t_0 ($t_0 > a$) топиладики, барча $x > t_0$ учун

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k_1$$

бўлади. Демак, $x > t_0$ да

$$g(x) < \frac{1}{k_1} f(x)$$

бўлиб, ундан 16.2-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

16.3-натижа. 16.3-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Одатда, бирор (мураккаброқ) хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ҳақида аввалдан яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган хосмас интеграл билан солиштириб хулоса чиқарилади. Хусусан, текширилаётган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ($f(x) \geq 0$) интегрални $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$, $\alpha > 0$, қаралсин, (16.5)) интеграл билан солиштириб қуйидаги аломатларни ҳосил қиламиз.

1°. Агар x нинг етарли катта қийматларида ($x > x_0 > a$)

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$$

бўлса, у ҳолда $\forall x > x_0$ учун $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \leq 1$ бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Аргумент x нинг етарли катта қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \quad (x > x_0)$$

бўлиб, $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \leq \frac{c}{x^\alpha}$$

бўлиб, $\alpha > 1$ да $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг яқинлашувчилигига ҳамда 16.2-теоремага асосланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \leq 1$ бўлса, унда $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг узоқлашувчилигини эътиборга олиб, яна 16.2-теоремага кўра $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини топамиз. 1°-аломат исбот бўлди.

2°. Агар $x \rightarrow +\infty$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{x}$ га нисбатан $\alpha (\alpha > 0)$ тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатнинг тўғрилиги юқорида келтирилган 16.2-теоремадан
ндаги $g(x)$ функцияни $\frac{1}{x^2}$ деб олинишидан келиб чиқадн.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегрални қарайлик. Равшанки, ихтиёрий $x \geq 1$

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Агар $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ҳамда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг
яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда 1^о-аломатга кўра берилган интегралнинг
яқинлашувчи эканини топамиз.

2. Куйидаги

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x}}$$

интегрални қарайлик. Бу интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{x^{5/3} \sqrt{1+\frac{1}{x}}} \leq \frac{1}{x^{5/3}}, x \geq 1$$

булиб, юқорида келтирилган аломатга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

3. Ихтиёрий функция хосмас интегралнинг яқинла-
шувчилиги. Биз $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг
шу оралиқ бўйича олинган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегрални

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

функция $t \rightarrow +\infty$ да чекли лимитга эга бўлган ҳолда яқинлашувчи
деб атадик. Демак, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги
тушунчаси, биз аввал ўрганган тушунча — функциянинг чекли лимити
орқали ифодаланди. Бинобарин, бу интегралнинг яқинлашувчилик шар-
ти $F(t)$ функциянинг $t \rightarrow +\infty$ даги чекли лимити мавжуд бўлиши
шартидан иборат бўлади.

Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 6-§ ида келтирилган теоремадан
(Коши теоремасидан) фойдаланиб, қуйидаги теоремага келамиз.

16.4-теорема (Коши теоремаси). Қуйидаги хосмас интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ сони топилиб, $t' > t_0$, $t'' > t_0$ бўлган ихтиёрий t' , t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема назарий аҳамиятга эга бўлган муҳим теорема бўлиб, ундан хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади (аввалги Коши критерийлари сингари).

16.5-теорема. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи. 16.4-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ топиладики, $t' > t_0$, $t'' > t'$ бўлганда $\int_{t'}^{t''} |f(x)| dx < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Аммо

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx$$

тенгсизликни эътиборга олсак, у ҳолда

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ топиладики, $t' > t_0$, $t'' > t'$ бўлганда

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан 16.4-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз. Теорема исбот бўлди.

16.2-эслатма. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди, яъни баъзи функциялар учун $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ узоқлашувчи, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

эса яқинлашувчи бўлади.

Масалан, ушбу

$$\int_a^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} dx$$

интеграл яқинлашувчи, аммо

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} \right| dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{[x]}$$

эса узоқлашувчидир.

16.7-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл деб аталади, $f(x)$ функция яса $[a, +\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция дейилади.

16.8-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.

Шундай қилиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегрални яқинлашувчиликка текшириш қуйидаги тартибда олиб борилиши мумкин:

$\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи (узоқлашувчи) лигини 2-§ да келтирилган аломатлардан фойдаланиб топиш мумкин. Бошқа ҳолларда $f(x)$ функциянинг $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегрални қараймиз. Равшанки, кейинги интегралга нисбатан яна 2-§ даги аломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор аломатга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги топилса, унда 16.5-теоремага кўра берилган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчилиги (ҳатто абсолют яқинлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор аломатга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ёки узоқлашувчи бўлади, ёки шартли яқинлашувчи бўлади ва бунини аниқлаш қўшимча шартли қилишни талаб этади.

Пировардида, хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда кўп қўлланадиган аломатлардан бирини келтирамыз.

16.6-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин;

1) $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғичи $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) функцияси чегараланган,

2) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда $g'(x)$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,

3) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ да камаювчи,

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Узлуксиз $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг кўпайтмасы $f(x) g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун, бу $f(x) g(x)$ функция исталган $[a, t]$ ($t > a$) оралиқда интегралланувчи бўлади, яъни

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x) g(x) dx \quad (16.12)$$

интеграл мавжуд.

$t \rightarrow +\infty$ да $\Phi(t)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз. Теореманинг 1-ва 2-шартларидан фойдаланиб, (16.12) интегрални бўлаклаб ҳисоблаймиз.

$$\int_a^t f(x) g(x) dx = \int_a^t g(x) dF(x) = g(x) F(x) \Big|_a^t - \int_a^t F(x) g'(x) dx. \quad (16.13)$$

Ўнг томондаги биринчи қўшилувчи учун ушбу

$$|g(t) F(t)| \leq M g(t) \quad (M = \sup |F(t)| < +\infty)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Ундан, $t \rightarrow +\infty$ да $g(t) \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) F(t) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди ўнг томондаги иккинчи $\int_a^t F(x) g'(x) dx$ ҳадни қараймиз. Модомики, $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи ҳамда шу оралиқда камаювчи экан, унда $\forall x \in [a, +\infty)$ да $g'(x) \leq 0$ бўлиб,

$$\int_a^t F(x) \cdot g'(x) dx \leq M \int_a^t |g'(x)| dx = -M \int_a^t g'(x) dx =$$

$$= M [g(a) - g(t)] \leq M g(a) \quad (g(t) \geq 0)$$

бўлади. Шундай қилиб, t ўзгарувчининг барча $t > a$ қийматларида

$$\int_a^t |F(x) \cdot g'(x)| dx$$

интеграл (t ўзгарувчининг функцияси) юқоридан чегараланган. У ҳолда ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган теоремага кўра $\int_a^{+\infty} F(x) g'(x) dx$ интеграл яқинлашувчи (ҳатто абсолют яқинлашувчи) бўлади. Деяк,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t F(x) g'(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли.

Юқоридаги (16.13) тенгликда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) g(x) dx$$

лимитнинг мавжуд ҳамда чекли бўлишини топамиз. Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

интегрални қарайлик. Бу интегралдаги $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) функциялар юқорида келтирилган теореманинг барча шартларини қаноатлантиради:

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва бошланғич функцияси $F(x) = -\cos x$ чегараланган,

2) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ ҳосилага эга ва узлуксиз,

3) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) функция $[1, +\infty)$ оралиқда камаювчи,

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$

бўлади. Демак, Дирихле аломатига кўра берилган интеграл яқинлашувчи.

3-§. Чегараси чексиз хосмас интегралларнинг ихсолаш

Чекли $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x) dx$ Риман интеграли

Ньютон — Лейбниц формуласи ёрдамида, ёки бўлаклаб, ёки ўзгарувчиларни алмаштириб, ёки бошқа усуллар билан ҳисобланар эди.

Энди яқинлашувчи ушбу

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

хосмас интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон — Лейбниц формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Маълумки, бу ҳолда

$f(x)$ функция шу ораликда $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, +\infty)$) бошлангич функцияга эга бўлади. $x \rightarrow +\infty$ да $\Phi(x)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошлангич функциянинг $+\infty$ даги қиймати деб қабул қиламиз, яъни

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\Phi(t) - \Phi(a)] = \\ &= \Phi(+\infty) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^{+\infty}. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Бу эса юқоридаги келишувга кўра бошлангич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интегрални учун Ньютон — Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ функция $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ ораликда узлуксиз бўлиб, унинг бошлангич функцияси $\Phi(x) = \cos \frac{1}{x}$ бўлади. Демак, (16.14) формулага кўра

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1.$$

Баъзан, берилган I хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланади.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, +\infty)$ ораликда берилган ҳамда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u(+\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v(+\infty)$$

лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x) du(x)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 1-қисм, 9-боб, 10-§ да келтирилган формулага кўра

$$\begin{aligned} \int_a^t u(x) dv(x) &= u(x)v(x) \Big|_a^t - \int_a^t v(x) du(x) = [u(t)v(t) - \\ &- u(a)v(a)] - \int_a^t v(x) du(x) \end{aligned}$$

қилиб, бу тенгликда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t u(x) dv(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [u(t)v(t) - u(a)v(a)] - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t v(x) du(x) \quad (16.16)$$

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} [u(t)v(t) - u(a)v(a)]$ лимит мавжуд ва чекли эканлигини эътиборга олсак, унда

(16.16) муносабатдан $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳам-

да (16.15) формуланинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Қуйидаги

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$$

интегрални ҳисоблайлик. Агар $u(x) = x$, $dv(x) = e^{-x} dx$ дейилса, унда $u(x)v(x) \Big|_0^{+\infty} = x(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$, $\int_0^{+\infty} v(x) du(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -1$ бўлиб,

(16.15) формулага кўра

$$\int_0^{+\infty} u(x) dv(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) dx = 1$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

16.3-эслатма. Юқоридаги (16.15) формулани келтириб чиқариш-да $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$, $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта шартдан исталган икkitаси ўринли бўлса, у ҳолда уларнинг учинчиси ҳамда (16.15) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлсин. Қуйидаги

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

интегрални қарайлик. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z)$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ ораликда берилган, $\varphi'(z)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз,
- 2) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ ораликда қатъий ўсувчи,
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = +\infty$ бўлсин.

У ҳолда $\int_a^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$ интеграл яқинлашувчи бўлса, унда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz \quad (16.17)$$

бўлади.

Ихтиёрий $z (\alpha < z < +\infty)$ нуқтани олиб, унга мос $\varphi(z) = t$ нуқтани топамиз. $[a, t)$ ораликда 1-қисм, 9-боб, 2-§ да келтирилган формулага кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^z f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz$$

бўлади. Бу муносабатда $t \rightarrow +\infty$ да (бунда $z = \varphi^{-1}(t) \rightarrow +\infty$) лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz.$$

Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини ҳамда (16.17) формуланинг ўринли бўлишини кўрсатади.

16.4-эслатма. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда

$$x = \varphi(z) \quad (16.18)$$

бўлиб, (16.18) функция юқоридаги шартларни бажарсин. У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални қарайлик. Равшанки, бу интеграл яқинлашувчи. Уни ҳисоблайлик. Аввало бу интегралда $x = \frac{1}{z}$ алмаштириш қиламиз. Натижада

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{1+z^4} \quad (16.20)$$

бўлиб, (16.19) ва (16.20) тенгликлардан

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги интегралда

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \left(x - \frac{1}{x} = y \right)$$

алмаштиришни бажариб, қуйидагини топамиз:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Чегараси чексиз бўлган хосмас интегралларни ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда ($a \geq 0$) берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $[a, +\infty)$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,
- 2) $[a, +\infty)$ да $f(x)$ функция камаювчи ва $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) > 0$.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh) \quad (16.21)$$

бўлади.

Исботлайлик, $[a, +\infty)$ ораликни $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, $\dots$, $[a+kh, a+(k+1)h]$, $\dots$ ($h > 0$) ораликларга ажратайлик. $A > a$ бўлсин. Функциянинг мусбатлигидан

$$\left[\frac{A}{h} - 1 \right] \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx \leq \int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h} \right]} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx \quad (16.22)$$

теңсизликларни ёза оламиз. Функциянинг камаювчи эканлигидан $\forall x \in [a+kh, a+(k+1)h]$ учун

$$f(a+kh) \leq f(x) \leq f(a+(k+1)h)$$

бўлади. Шундан фойдалансак, (16.22) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left[\frac{A}{h} \right] - 1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h} \right] - 1} hf(a + kh + h) \leq \int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h} \right]} hf(a + kh). \quad (16.23)$$

Шартга кўра, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ яқинлашувчи. Функциянинг мусбатлигидан $\forall A > a$ учун

$$\int_a^A f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Бу тенгсизликдан ва (16.23) дан $\forall A > a$, $\forall h > 0$ учун

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx > \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h} \right] - 1} hf(a + kh) - hf(a).$$

Бундан эса

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} hf(a + kh) - hf(a)$$

Сўлади. Шундай қилиб, $\sum_{k=0}^{\infty} f(a + kh)$ қатор яқинлашувчи бўлар экан.

Бунинг эътиборга олсак, $f(x)$ нинг мусбатлигидан ва (16.22) муносабатининг ўнг томонидаги тенгсизликдан

$$\int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} hf(a + kh)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ихтиёрий $A > a$ учун туғри эканлигидан

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{k=0}^{\infty} f(a + kh).$$

Демак,

$$h \sum_{k=0}^{\infty} f(a + kh) - hf(a) \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{k=0}^{\infty} f(a + kh)$$

экан. Бу ерда $h \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак (16.21) формулани ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx$$

интегрални қарайлик. Равшанки, бу интеграл яқинлашувчи. $[1, +\infty)$ оралиғида $f(x) = xe^{-x}$ функция камаювчи ҳамда $\forall x \in [1, +\infty)$ учун $f(x) = xe^{-x} > 0$ дур. Юқорида келтирилган (16.21) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} (1 + kh) e^{-(1+kh)} = e^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} \left[n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kh} + h^2 \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-kh} \right]$$

$$= e^{-1} \left[\lim_{h \rightarrow 0} h \frac{1}{1 - e^{-h}} + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \frac{e^{-h}}{(1 - e^{-h})^2} \right] = e^{-1} \left[1 + \lim_{h \rightarrow 0} e^{-1} \left(\frac{h}{e^{-h} - 1} \right)^2 \right] =$$

$$= e^{-1} (1 + 1) = 2e^{-1}.$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = 2e^{-1}.$$

16.5-эслатма. Юқорида келтирилган (16.21) формула $f(x)$ функция x ўзгарувчининг бирор x_0 ($x_0 > a$) қийматидан бошлаб камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

5. Чегараси чексиз хосмас интегралларнинг бош қийматлари. $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $f(x)$ оралиқнинг исталган $[t', t]$ ($-\infty < t' < t < +\infty$) қисмида интегралланувчи бўлсин: $F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx$.

Маълумки, $f(x)$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегрални ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} F(t', t) = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \int_{t'}^t f(x) dx$$

лимит билан аниқланар эди. t', t ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ бўлган ҳолда $t' \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли лимитга

эга бўлса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталар эди.

Равшанки, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий

равшанда $t' \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда бу функция $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ бўлганда ҳам, чекли лимитга эга (интеграл яқинлашувчи) бўлаверади. Бироқ $F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx$ функция, $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ да чекли лимитга эга

бўлишидан $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши ке-

либ чиқавермайди.

Масол. Ушбу

$$\int_{t'}^t \sin x dx$$

интеграл учун $t' = -t$ бўлса, равшанки, $\forall t > 0$ учун $\int_{-t}^t \sin x dx = 0$ ва демак,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sin x dx = 0$$

Бироқ $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ интеграл яқинлашувчи эмас.

16.9-таъриф. Агар $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t) =$

$= \int_a^t f(x) dx$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

лимит эса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати деб аталади.

Одатда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Бунда v. p. белги французча «valeur principale» «бош қиймат» сўзларининг дастлабки ҳарфларини ифодалайди.

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у

бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишдан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

6. Чегараси чексиз хосмас интегралларни тақрибий ҳисоблаш. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлиб,

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (16.24)$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қийин бўлиб, уни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

(16.24) хосмас интегрални тақрибий ҳисоблаш хос интегрални аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални ҳисоблашда, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари (қаралсин 1-қисм, 9-боб, 11-§)) дан фойдаланилади.

Таърифга кўра

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $t_0 (a < t_0 < \infty)$ топиладики, $t > t_0$ да

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (16.25)$$

бўлади. Агар

$$\int_t^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx$$

эканлигини эътиборга олсак, унда юқоридаги (16.25) тенгсизлик ушбу

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

қўринишни олади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қуйидаги формулага келамиз:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \approx \int_a^t f(x) dx. \quad (16.26)$$

Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегрални қарайлик. Бу интеграл яқинлашувчидир. Уни $[0, a[$ ($a > 0$) оралиқ

бўйича $\int_0^a e^{-x^2} dx$ интеграл билан алмштириб ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^a e^{-x^2} dx \quad (a > 0) \quad (16.27)$$

тақрибий формулага келамиз. (16.27) формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{a} \int_a^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2a} \int_a^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2a} \left[-e^{-x^2} \right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2a} e^{-a^2}.$$

Энди $a = 1, a = 2, a = 3$ бўлган ҳолларни қарайлик. $a = 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

қилиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq 0,1839$$

бўлади.

$a = 2$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун ушбу

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^2 e^{-x^2} dx = \int_2^{\infty} e^{-x^2} dx \leq 0,00458$$

баҳога эга бўламиз.

$a = 3$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^3 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, унинг хатолиги

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^3 e^{-x^2} dx = \int_3^{\infty} e^{-x^2} dx \leq 0,00002$$

бўлади.

4. §. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари

1. Махсус нуқта. $f(x)$ функция X ($X \subset R$) тўпламда берилган бўлсин. Бирор x_0 ($x_0 \in R$) нуқтани олиб, унинг ушбу

$$U_\delta(x_0) = \{x: x \in R; x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; x \neq x_0\} \quad (\delta > 0)$$

атрофини (1-қисм, 118, 122-бетлар) қарайлик.

16.10-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг ҳар қандай $U_\delta(x_0)$ атрофи олинганда ҳам $U_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$ тўпламда $f(x)$ функция чегараланмаган бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $[a, b]$ ярим интервалда ушбу $f(x) = \frac{1}{b-x}$ функцияни қарайлик. b нуқта бу функциянинг махсус нуқтаси бўлади, чунки $[a, b) \cap U_\delta(b)$ тўпламда берилган функция чегараланмагандир.

2. $(a, b]$ ярим интегралда $f(x) = \frac{1}{x-a}$ функция берилган бўлсин. Равшанки бу функция $(a, b) \cap U_\delta(a)$ тўпламда чегараланмаган. Демак, a махсус нуқта.

3. (a, b) интервалда ушбу $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) функцияни қарайлик, a ва b нуқталар бу функциянинг махсус нуқталари бўлади, чунки берилган функция $(a, b) \cap U_\delta(a)$ ва $(a, b) \cap U_\delta(b)$ тўпламларда чегараланмагандир.

4. Ушбу $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ функция $R \setminus \{-1, 0, 1\}$ тўпламда берилган. Равшанки, бу функция $-1, 0, 1$ нуқталар атрофида чегараланмаган. Демак, $-1, 0, 1$ махсус нуқталар бўлади.

2. Чегараланмаган функциянинг хосмас интегрални тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 9-бобида математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири—функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграл (Риман интеграл) тушунчаси киритилди ва уни батафсил ўрганилди. Унда функциянинг интегралланувчи бўлиши функциянинг чегараланмаган бўлишини тақозо этади.

Энди чекли $[a, b]$ оралиқда чегараланмаган функциялар учун интеграл тушунчасини киритамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция $[a, b]$ ярим интервалнинг исталган $[a, t]$ ($a < t < b$) қисмида интегралланувчи (1-қисм, 9-боб, 2-§), яъни ихтиёрий t учун ушбу

$$\int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, равшанки, қаралаётган функцияга ва олинган t га боғлиқ бўлади. Агар $f(x)$ ни тайинлаб олсак, қаралаётган интеграл фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) \quad (a < t < b).$$

Натижада (a, b) интервалда берилган $F(t)$ функцияга эга бўламиз. 16.11-таъриф. Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функциянинг limiti

$$\lim_{t \rightarrow b-0} F(t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ бўйича хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} F(t) = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx. \quad (16.28)$$

16.12-таъриф. Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.28) хосмас интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса $[a, b]$ да *интегралланувчи функция* дейилади.

Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса, (16.28) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Худди юқоридагидек, a нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл, a ва b нуқталар функциянинг махсус нуқталари бўлганда (a, b) оралиқ бўйича хосмас интеграл таърифланади.

$f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, a нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалнинг исталган $[t, b]$ ($a < t < b$) қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий t ($a < t < b$) учун ушбу

$$\int_t^b f(x) dx = \Phi(t) \quad (16.29)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.13-таъриф. Агар $t \rightarrow a + 0$ да $\Phi(t)$ функциянинг

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \Phi(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $(a, b]$ бўйича хосмас интеграли деб аталади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \Phi(t). \quad (16.30)$$

16.14-таъриф. Агар $t \rightarrow a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи деб аталади, $f(x)$ эса $(a, b]$ да интегралланувчи функция дейилади.

Агар $t \rightarrow a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса (16.30) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, a ва b нуқталар шу функциянинг махсус нуқталари бўлсин. Шунингдек, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг исталган $[\tau, t]$ ($a < \tau < t < b$) қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \varphi(\tau, t) \quad (16.31)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.15-таъриф. $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \varphi(\tau, t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг (a, b) бўйича хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \int_{\tau}^t f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \varphi(\tau, t). \quad (16.32)$$

16.16-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.32) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса (a, b) да интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса, (16.32) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ ($c_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, \dots, n$) нуқталар $f(x)$ функциянинг махсус нуқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ нинг (a, b) бўйича хосмас интеграли юқоридагидек таърифланади. Соддалик учун a, b ҳамда c ($a < c < b$) махсус нуқталар бўлган ҳолда, хосмас интеграл таърифини келтираимиз. $f(x)$ функция $(a, b) \setminus \{c\}$ тўпламининг исталган

τ, t ($a < \tau < t < c$) ҳамда $[u, v]$ ($c < u < v < b$) қисмларида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \varphi(\tau, t), \quad \int_u^v f(x) dx = \psi(u, v) \quad (16.32)$$

интеграллар мавжуд бўлсин.

16.17-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow c-0$ ҳамда $u \rightarrow c+0$, $v \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функциянинг

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} [\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)] = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} \left[\int_{\tau}^t f(x) dx + \int_u^v f(x) dx \right]$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг (a, b) бўйича хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} \left[\int_{\tau}^t f(x) dx + \int_u^v f(x) dx \right]. \quad (16.34)$$

16.18-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow c-0$ ҳамда $u \rightarrow c+0$, $v \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.34) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса (a, b) да интегралланувчи функция дейилади.

Агар $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow c-0$ ҳамда $u \rightarrow c+0$, $v \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.34) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

16.6-эслатма. Юқорида махсус нуқтаси a (ёки b , ёки a ва b) бўлган $f(x)$ функциянинг (a, b) (ёки $[a, b]$), ёки оралиқ бўйича хосмас интеграли тушунчаси $F(t)$ нинг $t \rightarrow a+0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t \rightarrow b-0$, ёки $\varphi(\tau, t)$ нинг $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow b-0$) да лимити мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ нинг $t \rightarrow a+0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t \rightarrow b-0$, ёки $\varphi(\tau, t)$ нинг $\tau \rightarrow a+0$, $t \rightarrow b-0$) даги лимити мавжуд бўлмаган ҳол бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равишда $f(x)$ нинг хосмас интеграли

$$\int_a^b f(x) dx$$

узоқлашувчи деб қабул қиламиз.

Шундай қилиб, чегараланмаган функция хосмас интеграли тушунчаси аввал ўрганилган Риман интеграли тушунчасидан яна бир марта лимитга ўтиш амали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига интеграл деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. $(0, 1]$ ярим интервалда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцияни қарайлик. Равшанки, $x = 0$ нукта бу функциянинг махсус нуқтасидир. Берилган функция натиғрий $[t, 1]$ ($0 < t < 1$) оралиқ бўйича интегралланувчи

$$\Phi(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1 - \sqrt{t}).$$

У ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{t}) = 2$$

бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг.

2. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} [\ln x]_t^1 = +\infty.$$

3. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ интегрални қарайлик. Равшанки, $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталар махсус нуқталардир. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\tau}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\tau \rightarrow +0} [\arcsin(2x-1)]_{\tau}^1 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} [\arcsin(2t-1) - \arcsin(2\tau-1)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

4. Ушбу

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интегралларни қарайлик. Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a+0} \left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_t^b = \\ &= \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{1}{1-\alpha} [b-a]^{1-\alpha} - (t-a)^{1-\alpha}, \quad (\alpha \neq 1). \end{aligned}$$

Бу лимит $\alpha < 1$ бўлганда чекли, демак I_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha > 1$ бўлганда эса чексиз бўлиб, унда I_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади. $\alpha = 1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} [\ln|x-a|]_t^b$$

бўлиб, I_1 интеграл узоқлашувчидир. Демак,

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Биз қуйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан махсус нуқтаси b бўлган $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x) dx$ интеграл учун келтирамиз. Бу хоссаларни махсус нуқтаси a (ёки a ва b) бўлган функциянинг мос равишда $(a, b]$ ёки (a, b) оралиқ бўйича олинган хосмас интеграллари учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

3. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b шу $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция исталган $[a, t]$ ($a < t < b$) да интегралланувчи бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ оралиқ бўйича $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг $[c, b]$ ($a < c < b$) оралиқ бўйича $\int_c^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (16.35)$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \quad (a < t < b) \quad (*)$$

бўлади.

$\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (*) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\int_c^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$$

Кейинги тенгликда $t \rightarrow b-0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \int_c^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$$

Бундан $\int_c^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int_c^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.35) формуланинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

Қуйида келтириладиган 2° — 5°-хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

2°. Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b cf(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const.}$

3°. Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин.

4° Агар $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

16.4- натижа. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\int_a^b f_k(x) dx (k = 1, 2, \dots, n)$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

$$+ \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx c_i = \text{const}, i = \overline{1, n}.$$

бўлади.

5° Агар $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

Юқоридаги $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни ҳам ба-
жарсин:

1) $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган, яъни шундай m ва M ўз-
гармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ да $m \leq f(x) \leq M$;

2) $g(x)$ функция $[a, b]$ да ўз ишорасини ўзгартирмасин, яъни барча
 $x \in [a, b]$ ларда $g(x) \geq 0$ ёки $g(x) \leq 0$.

6°. Агар $\int_a^b f(x) g(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса,
у ҳолда шундай ўзгармас $\mu (m \leq M)$ сон топиладики,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу хосса ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган 6°-хосса исботи каби
исботланади. Одатда бу хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема
деб юритилади.

5- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b шу функ-
циянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция хосмас интегралининг
яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Биз юқорида $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги $t \rightarrow b - 0$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (a < t < b)$$

функциянинг чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланишини кўрдик. Бинобарин, $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини, $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат.

1-қисм, 4-боб, 5-§, 6-§ даги функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Бу функция $[a, b]$ оралиқда манфий бўлмасин ($\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geq 0$) ва оралиқнинг исталган $[a, t]$ қисмида ($a < t < b$) интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $a < t_1 < t_2 < b$ лар учун

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq F(t_1)$$

бўлади. Демак, $f(x) \geq 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Бинобарин, $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади. Монотон функция лимити ҳақидаги теоремадан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 5-§) $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

16.7-теорема. $[a, b]$ да манфий бўлмаган $f(x)$ функция $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\{F(t)\}$ нинг юқоридаги чегараланган, яъни $\forall t \in (a, b)$ учун

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq c \quad (c = \text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги критерийси деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қуйидаги натижани айта оламиз.

16.5-натижа. Агар $|F(t)| = \left| \int_a^t f(x) dx \right|$ тўплам юқоридан чегара-

манфий бўлмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бў-

лади. Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралла-
нинг таққослаш ҳақида теоремалар.

16.8-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган бўлиб,
эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси ва $\forall x \in [a, b]$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (16.36)$$

бўлсин. У ҳолда:

$\int_a^b g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади,

$\int_a^b f(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b g(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^t g(x) dx$ яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.7-теоремага кўра

$\{G(t)\} = \left\{ \int_a^t g(x) dx \right\} (a < t < b)$ тўпلام юқоридан чегараланган:

$$G(t) = \int_a^t g(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. (16.36) муносабатга асосан

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx = G(t) \leq C$$

бўлиб, ундан яна 16.7-теоремага кўра $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинла-
шувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int_a^b f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} =$
 $\left\{ \int_a^t f(x) dx \right\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx$$

тенгсизликдан эса

$$\{G(t)\} = \left\{ \int_a^t g(x) dx \right\}$$

нинг ҳам юқоридан чегараланмаганлигини топамиз. Демак, юқорида
келтирилган натижага кўра $\int_a^b g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи. Теорема
исбот бўлди.

16.9-теорема. $[a, b]$ да $f(x)$ ва $g(x)$ манфий бўлмаган функция-
лар берилган. $x \rightarrow b-0$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг limiti k бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $k > 0$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.3 теореманинг исботи кабидир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

16.6-натижа. 16.9-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Бирор $\int_a^b f(x) dx$ ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b)$) хосмас интеграл берилган бўлсин. Бу интегрални $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ интеграл билан солиштириб, қуйидаги аломаглари топамиз.

1°. Агар x нинг b га етарлича яқин қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha < 1$ бўлганда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \geq 1$ бўлганда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

2°. Агар $x \rightarrow b - 0$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{b-x}$ га нисбатан α ($\alpha > 0$) тартибли чексиз катта бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатларнинг исботи ҳам ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган аломатларнинг исботи кабидир.

Мисоллар. I. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

интегрални қарайлик. Бунда интеграл остидаги функция

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\varphi(x)}{(1-x)^{1/4}}$$

бўлади. Ҳақиқатан, $\forall x \in [0, 1)$ учун $\varphi(x) = \cos^2 x \leq 1$ ва $\alpha = \frac{1}{4} < 1$. Демак, юқоридagi 1^о-аломатга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

2. Қуйидаги

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

интегрални қарайлик.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow -0} x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2-амда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 16.6-натижага асосланиб берилган интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.

2. Ихтиёрий функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $t \rightarrow b-0$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) \, dx$$

функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) \, dx$ хосмас интеграл

яқинлашувчи деб аталар эди. Демак $\int_a^b f(x) \, dx$ хосмас интегралнинг

яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам функциянинг чекли лимитга эга бўлиши орқали ифодаланади. Функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремадан (1-қисм, 4-боб, 6-§) фойдаланиб қуйидаги теоремага келамиз.

16.10-теорема. (Коши теоремаси). Қуйидаги

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

хосмас интегралнинг (b — махсус нуқта) яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи t' ва t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема муҳим назарий аҳамиятга эга бўлган теорема. Бирок, ундан амалда—хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади.

16.11-теорема. Агар $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ идаги 16.5-теореманинг исботи кабидир.

16.7-эслатма. $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $\int_0^1 (-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]} \left[\frac{1}{1-x}\right] dx$ интеграл яқинлашувчи, аммо $\int_0^1 \left| (-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]} \left[\frac{1}{1-x}\right] \right| dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x}\right] dx$ интеграл эса узоқлашувчидир.

16.9-таъриф. Агар $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл деб аталади. $f(x)$ функция эса $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ шартли яқинлашувчи интеграл деб аталади.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, b]$ бўйича $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралини қарайлик. Кейинги интегралга нисбатан 6-§ даги аломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги топилса, унда

16.11-теоремага асосан берилган $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчилиги (ҳатто абсолют яқинлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^b f(x) dx$ ёки узоқлашувчи бўлади. Ёки шартли яқинлашувчи бўлади ва буни аниқлаш қўшимча текширишни талаб этади.

6-§. Чегараланмаган функция хосмас интегралини ҳисоблаш

Биз аввалги параграфларда функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ўргандик. Энди яқинлашувчи хосмас интегралларни ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функциянинг хосмас интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

яқинлашувчи, уни ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон—Лейбниц формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b)$ да узлуксиз бўлсин. Маълумки, бу ҳолда $f(x)$ функция шу оралиқда $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, b)$) бошланғич функцияга эга бўлади. $x \rightarrow b-0$ да $\Phi(x)$ функциянинг limiti мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошланғич функциянинг b нуқтадаги қиймати деб қабул қиламиз:

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \Phi(x) = \Phi(b).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} [\Phi(t) - \Phi(a)] = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Бу эса, юқоридаги келишув асосида, бошланғич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграл учун Ньютон—Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Берилган хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланиши мумкин.

Биз ушбу бобнинг 3-§ ида чегаралари чексиз хосмас интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усулларини келтирган эдик. Худди шу усуллар чегараланмаган функция хосмас интегралларида ҳам мавжуддир. Уларни исботсиз келтирамиз.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b)$ да берилган бўлиб, шу оралиқда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. b нуқта эса $u(x) \cdot u'(x)$ ҳамда $u(x)v'(x)$ функцияларнинг махсус нуқталари.

Агар $\int_a^b v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t \rightarrow b-0} u(t) v(t)$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b u(x) dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x) \quad (16.37)$$

бўлади, бунда

$$u(b) \cdot v(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t) v(t).$$

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

интегрални қарайлик. Агар $u(x) = x+1$, $dv(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ деб олсак, унда

$$u(x) \cdot v(x) \Big|_0^1 = (x+1) 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 = 3,$$

$$\int_0^1 v(x) du(x) = \int_0^1 3(x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{9}{4} (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 = -\frac{9}{4}$$

бўлиб, (16.37) формулага кўра

$$\int_0^1 u(x) dv(x) = \int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3 - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{21}{4}$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{21}{4}.$$

16.8-эслатма. Юқоридаги (16.37) формулани келтириб чиқаришда $\int_a^b v(x) du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow b-0} [u(t) \cdot v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_a^b u(x) dv(x)$, $\int_a^b v(x) du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow b-0} [u(t) v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта факт-

дан исталган икkitаси ўринли бўлса, унда уларнинг учинчиси ҳамда (16.37) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда $\varphi'(z) > 0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Агар $\int_\alpha^\beta f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz$ интеграл яқинлашув-

бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^B f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

16.9-эслагма. $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ бўлиб, у юқоридаги шартларни бажарсин. У ҳолда $\int_a^b f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^B f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

интегралда $x = \varphi(z) = z^2$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки, бу $x = z^2$ функция $[0, 1]$ оралиқда $x' = 2z > 0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = \int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2} = 2 \arctg z \Big|_0^1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Чегараланмаган функциялар хосмас интегралларини ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция қуйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $[a, b)$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,
- 2) $[a, b)$ да $f(x)$ функция ўсувчи ва $\forall x \in [a, b)$ учун $f(x) > 0$.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \quad (6.38)$$

бўлади.

Бу (6.38) муносабатнинг исботи ушбу бобнинг 4-§ ида исботланган (16.21) муносабатнинг исботи кабидир.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг бош қиймати. $f(x)$ функция $[a, b)$ интервалда берилган бўлиб, $a < c < b$ эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $\tau \rightarrow c - 0$, $t \rightarrow c + 0$ да, яъни $\eta = c - \tau \rightarrow 0$, $\eta' = t - c \rightarrow 0$ да ушбу

$$F(\tau, t) = \int_a^\tau f(x) dx + \int_t^b f(x) dx = \int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta'}^b f(x) dx = F_0(\eta, \eta')$$

функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган функциянинг хосмас интеграл деб аталар эди:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} F_0(\eta, \eta') = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta'}^b f(x) dx \right].$$

Агар бу лимит чекли бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилар эди.

Равшанки, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий равишда $\eta \rightarrow 0$, $\eta' \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta')$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да ҳам бу функция чекли лимитга эга — интеграл яқинлашувчи бўлаверади.

Бироқ $F_0(\eta, \eta')$ функциянинг $\eta = \eta'$ бўлиб, $\eta \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b)$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки,

$$F_0(\eta, \eta') = \int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\eta}{\eta'} \quad (16.39)$$

бўлади.

$\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta') \rightarrow \ln \frac{b-c}{c-a}$ бўлади.

Бироқ ихтиёрий равишда $\eta \rightarrow 0$, $\eta' \rightarrow 0$ да (16.39) муносабатдан ҳуридаялик, $F_0(\eta, \eta')$ функция аниқ лимитга эга бўлмайди.

16.20-таъриф. Агар $\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta')$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\eta, \eta)$$

лимит эса $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати деб аталади.

$$v. p. \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$v. p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\eta, \eta).$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у

бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

5. Чегараланмаган функция хосмас интегралини тақрибий ҳисоблаш. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва b шу функциянинг махсус нуқтаси, бу функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб,

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин. Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қийин бўлиб, уни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги таърифига асосан

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилдики, $b - \delta < t < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча t ларда

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \right| = \left| \int_t^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^t f(x) dx \quad (b - \delta < t < b)$$

формулага келамиз. Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left| \int_t^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Шундай қилиб, хосмас интегрални тақрибий ҳисоблаш — аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашда эса, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари, қаралсин, I-қисм, 9-боб, 11-§) дан фойдаланилади.

7- §. Умумий ҳол

Ушбу параграфда чегараланмаган $f(x)$ функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интегралли тушунчаси келтирилади.

Соддалик учун, $(a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция шу оралиқда битта a махсус нуқтага эга бўлсин. Бу функция исталган оралиқ $[t, \tau]$ ($a < t < \tau < +\infty$) оралиқда интегралланувчи, яъни ушбу

$$\int_t^\tau f(x) dx \quad (16.40)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

τ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида ($t < \tau < +\infty$) (16.40) интеграл t га боғлиқ бўлади:

$$\int_t^\tau f(x) dx = F_\tau(t).$$

Маълумки, агар $t \rightarrow a+0$ да

$$\lim_{t \rightarrow a+0} F_\tau(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(a, \tau]$ оралиқ бўйича хосмас интегралли деб аталиб, у

$$\int_a^\tau f(x) dx$$

каби белгиланар эди. Демак,

$$\int_a^\tau f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} F_\tau(t) = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^\tau f(x) dx. \quad (16.41)$$

Қаралаётган $f(x)$ функциянинг $(a, \tau]$ ($a < \tau < +\infty$) оралиқ бўйича хосмас интегралли $\int_a^\tau f(x) dx$ мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл τ га боғлиқ бўлади.

$$\int_a^\tau f(x) dx = \varphi(\tau).$$

Агар $\tau \rightarrow +\infty$ да $\varphi(\tau)$ функциянинг лимити

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\tau)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегралли деб аталиб, у

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^\tau f(x) dx. \quad (16.42)$$

Юқоридаги (16.41) ва (16.42) муносабатларга кўра

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^{\tau} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^{\tau} f(x) dx \quad (16.43)$$

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хос-мас интеграл яқинлашувчи дейилиб, $f(x)$ эса $(a, +\infty)$ оралиқда ин-тегралланувчи деб аталади.

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чексиз бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хос-мас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

16.10-эслатма. Агар (16.43) лимит мавжуд бўлмаса, бу ҳолда шундан ривонда $f(x)$ функциянинг $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграли узоқ-лашувчи деб қабул қилинади.

Умуман, юқоридагидек, $f(x)$ функция $(a, +\infty) / \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ $0 < c_i < +\infty, i = 1, 2, \dots, n$ тўпلامда берилган, $c_1, c_2, \dots, c_n$ эса шу функциянинг махсус нуқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ функ-циянинг $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегралини таърифлаш ва уни ўрганиш мумкин.

Биз ушбу бобнинг 1 — 8-параграфларида функциянинг чексиз ора-лиқ бўйича хосмас интегралнинг ҳамда чегараланмаган функциянинг хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, яқинлашувчи интеграл-ларнинг хоссалари, уларни ҳисоблаш билан шугулланган эдик. Худди шунга ўхшаш масалаларни 9-§ да келтирилган интегралларга нисбатан кўриб, уларни ўрганиш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (16.44)$$

хосмас интегрални қарайлик. $a < 1$ қийматларда, $x = 0$ нуқта интеграл остидаги функциянинг махсус нуқтаси бўлади (чунки, $x \rightarrow +0$ да интеграл остидаги функция нопуқатли интилади). Демак, бу ҳолда (16.44) интеграл ҳам чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграл, ҳам чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли экан.

Интегрални юқори қисмга:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

кўриб, уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқинлашувчиликка текшираимиз.

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл, интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x^{1-a}} \leq x^{a-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-a}} (0 < x \leq 1)$$

интеграллар ўринли бўлади.

Ушбу

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}} dx$$

интеграл $1-a < 1$, яъни $a > 0$ да яқинлашувчи, $1-a \geq 1$, яъни $a \leq 0$ да лашувчи (қаралсин, 5-§).

5-§ да келтирилган таққослаш ҳақидаги 16.8-теоремага кўра

$$\int_0^1 x^{a-1} e^x dx$$

интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да эса узоқлашувчи.

Энди $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интегрални яқинлашувчиликка текширамыз.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a-1} e^{-x}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0.$$

Ушбу $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ интеграл яқинлашувчи бўлганлигидан, 2-§ да келтирилган 16.8-теоремага кўра

$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интеграл ҳам яқинлашувчидир. Шундай қилиб

$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интеграл a нинг ихтиёрий қийматида яқинлашувчи. Натижада

риланган $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интегралнинг $a > 0$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз.

2. Ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги функция учун

1) $a < 1$, $b \geq 1$ бўлганда $x = 0$ махсус нуқта,

2) $a \geq 1$, $b < 1$ бўлганда $x = 1$ махсус нуқта,

3) $a < 1$, $b < 1$ бўлганда $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади.

Берилган интегрални яқинлашувчиликка текшириш учун уни қуйидагича оламиз:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир интегралда, интеграл остидаги функция

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{b-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{a-1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{x^{a-1}} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}} = 1$$

хосима интегралларда таққослаш ҳақидаги 16.9-тсоремага кўра

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \text{ билан } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \text{ билан } \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{b-1} dx$$

бир вақтда ёки яқинлашади, ёки узоқлашади.
Маълумки, $a > 0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи, $b > 0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^1 (1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи. Демак, $a > 0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади, $b > 0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интеграл $a > 0$ ва $b > 0$ бўлганда, яъни

$$M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, \infty)\}$$

ҳолда яқинлашувчи бўлади.

17-БОБ

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

Маълум курснинг 12-ва 13-бобларида кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби батафсил ўрганилди. Энди бундай функцияларнинг интеграл ҳисоби билан шуғулланамиз. Шунинг учун керакки, кўп ўзгарувчили функцияларга нисбатан интеграл тушунишни турлича бўлади.

Ушбу бобда кўп ўзгарувчили функциянинг битта ўзгарувчиси бўйича интеграл билан танишамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция бирор M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин. Бу функциянинг битта x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўшқа барча ўзгарувчиларини ўзгармас деб ҳисобласак, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция битта x_k ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади. Унинг шу ўзгарувчи бўйича интегралли (агар у мавжуд бўлса), равшанки $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ ларга боғлиқ бўлади. Бундай интеграллар параметрга боғлиқ интеграллар тушунчасига олинади.

Соддалик учун икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг битта ўзгарувчи бўйича интеграллини ўрганамиз.

$f(x, y)$ функция R^2 фазодаги бирор

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$$

тўпламда берилган бўлсин. y ўзгарувчининг E ($E \subset R$) тўпламдан олинган ҳар бир тайинланган қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (17.1)$$

Одатда (17.1) интеграл параметрга боғлиқ интеграл деб аталади, y ўзгарувчи эса параметр дейилади.

Параметрга боғлиқ интегралларда, $f(x, y)$ функциянинг функционал хоссаларига (лимити, узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги, интегралланувчилиги ви ҳоказо) кўра $\Phi(y)$ функциянинг тегишли функционал хоссалари ўрганилади. Бундай хоссаларни ўрганишда $f(x, y)$ функциянинг y ўзгарувчиси бўйича limiti ва унга интилиши характери муҳим роль ўйнайди.

1-§. Лимит функция. Текис яқинлашиш. Лимит функциянинг узлуксизлиги

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y_0 эса E ($E \subset R$) тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ фақат y нинггина функциясига айланади. Агар $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функциянинг limiti мавжуд бўлса, равшанки, у лимит x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x, y_0) = \varphi(x).$$

17.1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси дейилади.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2; x \in [a, b], y \in E\}$ тўпламда берилган бўлиб, ∞ эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow \infty$ даги лимит функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = xy$$

функциянинг $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 1$ бўлсин.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ кўра, $\delta = \varepsilon$ деб олинса, унда $|y - y_0| = |y - 1| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in [0, 1]$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |xy - x| = |x| \cdot |y - 1| \leq |y - 1| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $y \rightarrow 1$ да $f(x, y) = xy$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 1} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 1} xy = x$$

бўлади.

2. Қуйидаги

$$f(x, y) = x^y$$

функциянинг $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 0$ бўлсин.

Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда $\forall y \in [0, 1]$ учун

$$f(0, y) = 0$$

бўлади.

Агар x ўзгариувчи тайинланган ва $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y \rightarrow 0$ да

$$f(x, y) = x^y \rightarrow x^0 = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \log_x(1 - \varepsilon)$ ($x > 0$) деб олинадиган бўлса, унда $|y - y_0| = |y - 0| = |y| < \delta$ тангсизликни бажарадиган $\forall y \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |x^y - 1| = 1 - x^y < 1 - x^{\log_x(1 - \varepsilon)} = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $y \rightarrow 0$ да берилган $f(x, y) = x^y$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ни тент бўлади.

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида, лимит функция таърифидаги $\delta = \varepsilon$ бўлиб, у фақат ε гагина боғлиқ, иккинчисида эса $\delta = \log_x(1 - \varepsilon)$ бўлиб, у берилган $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралаётган x нуқтага ҳам боғлиқ эканини кўрамиз.

Лимит функция таърифидаги $\delta > 0$ нинг қаралаётган x нуқталарга боғлиқ бўлмай фақат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ қилиб танлаб олинниши мумкин бўлган ҳол муҳимдир.

17.3-таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да *нотекис яқинлашади* дейилади.

Акс ҳолда яқинлашувчи *нотекис* дейилади. Нотекис яқинлашувчи қағсий таърифни келтирайлик.

17.4-таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \delta > 0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $x_0 \in [a, b]$ ва $|y_1 - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y \in E$ топилсаки, ушбу

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ га *нотекис яқинлашади* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = x \sin y$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq \pi\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = \frac{\pi}{3}$

бўлсин. Равшанки, $y \rightarrow y_0 = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $f(x, y) = x \cdot \sin y$ функциянинг лимит

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ га тенг бўлади. Демак, } \varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Агар $\delta = \varepsilon$ десак, y ҳолда $|y - \frac{\pi}{3}| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирган $\forall y$ учун ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| x \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right| = |x| \cdot \left| \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |x| \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{3} \right| < \left| y - \frac{\pi}{3} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. 17.3-таърифта кўра, $y \rightarrow \frac{\pi}{3}$ да берилган $f(x, y) = x \sin y$

функция ўз лимит функцияси $\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x$ га текис яқинлашади.

3. Юқорида келтирилган

$$f(x, y) = x^y$$

функция $y \rightarrow 0$ да ўз лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га нотекис яқинлашади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, y_1 сифатида $0 < y_1 < \delta$

қаноатлантирувчи ихтиёрий y_1 ни ва $x_0 = 2^{-1/y_1}$ деб олсак, у

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| = 1 - x_0^{y_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 = \frac{1}{4}.$$

17.4 таърифга кўра, $y \rightarrow 0$ да $f(x, y) = x^y$ функция ўз лимит функцияси

Энди $f(x, y)$ функциянинг лимит функцияга эга бўлиши ва унга

яқинлашиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E\}$ тўпلامда берил-

17.1 теорема. $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да лимит функция $\varphi(x)$

бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \quad (17.2)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит

функцияга эга бўлиб, унга $[a, b]$ да текис яқинлашсин. Таърифга кў-

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq |f(x, y) - \varphi(x)| + |f(x, y') - \varphi(x)| < \varepsilon$$

қилиб, (17.2) шартнинг бажарилишини топамиз.

Етарлилиги. Теоремадаги (17.2) шарт бажарилсин. У ҳолда x -

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \quad (17.2)$$

қилади. Функция лимитнинг мавжудлиги ҳақидаги Коши теоремаси-

асосан (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 6-§) $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция

лимитга эга бўлади. Равшанки, бу лимит тайинланган x ($x \in [a, b]$) га

бериқ. Демак,

Шу билан $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бў-

лини кўрсатилди.

Энди y ўзгарувчини $|y - y_0| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантира қийматида тайинлаб, (17.2) тенгсизлиқда $y' \rightarrow y_0$ да лимитга ўтсак, ҳолда

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

ҳосил бўлади. Бу эса $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функциянинг $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлади.

Энди лимит функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирайлик. Бу теоремадан келгусида биз фойдаланамиз.

17.2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир қийматида, x ўзгарувчининг функцияси сифатида, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса ва $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашса, y ҳолда $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.

Исбот. y_0 га интиладиган $\{y_n\}$ кетма-кетликни олайлик ($y_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$). Шартга кўра ҳар бир y_n ($n = 1, 2, \dots$) да $f(x, y_n)$ функция x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади. Демак, $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $[a, b]$ оралиқда узлуксиз.

Теореманинг иккинчи шартига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (y \in E) \quad (17.3)$$

бўлади.

$y_n \rightarrow y_0$ дан юқорида олинган $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ га кўра шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $|y_n - y_0| < \delta$ бўлади. У ҳолда, (17.3) ни асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетлик $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашувчилигини билдиради. 14-боб, 3-§ да келтирилган 14.6-теоремага асосан $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиздир. Теорема исбот бўлди.

2-§. Параметрга боғлиқ интеграллар

$f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in E \subset \mathbb{R}\}$$

тўпلامда берилган бўлиб, y ўзгарувчининг E тўпلامдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y) = f(x)$ ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Яъни y ни ўзгармас деб ҳисобланганда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интегралнинг қиймати олинган
 га (параметрга) боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (17.1)$$

Мисол. Ушбу $f(x, y) = \sin xy$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ даги
 интеграл (бу ерда $y \neq 0$)

$$\int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \sin xy dx = \frac{1}{y} \int_a^b \sin xy d(xy) = \frac{\cos ay - \cos by}{y}$$

қандоқ $E = R \setminus \{0\}$ тўпламда берилган

$$\Phi(y) = \frac{1}{y} (\cos ay - \cos by)$$

функциядан иборатдир.

Ушбу параграфда параметрга боғлиқ (17.1) интегралнинг $\Phi(y)$ —
 функциянинг) функционал хоссаларини ўрганамиз.

1. Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш. $f(x, y)$
 функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган бў-
 либ, y_0 нукта E тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин.

13.3-теорема. $f(x, y)$ функция y нинг E тўпламдан олинган
 ҳар бир тайин қийматида x нинг функцияси сифатида $[a, b]$ ора-
 мда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит
 функцияга эга бўлса ва унга текис яқинлашса, y ҳолда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (17.4)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функ-
 цияга эга ва унга текис яқинлашади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам,
 шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладикки, $|y - y_0| < \delta$ ни қаноатлантирувчи
 $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади.

Иккинчи томондан, 17.2-теоремага асосан, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$
 да узлуксиз бўлади. Демак, бу функциянинг интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$

мавжуд.

Нагижада

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

қандоқ, ундан

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

жаълиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

(17.4) муносабатни қуйидагича

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

ҳам ёзиш мумкин. Бу эса интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

Мисол. Биз $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ тўпلامда берилган

$$f(x, y) = x \sin y$$

функциянинг $y \rightarrow 0$ да $\varphi(x) = 0$ лимит функцияга текис яқинлашишини кўрган эдик.

Берилган функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг $[0, 1]$ оралиқдаги узлуксиз функцияси эканлиги равшан. Демак, 17.3-теоремага кўра

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 x \sin y dx = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} x \sin y dx = 0$$

бўлади.

2. Интегралнинг параметр бўйича узлуксизлиги.
17.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

тўпلامда узлуксиз бўлса, y ҳолда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. Иштиёрий $y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. Шартга кўра $f(x, y)$ функция M тўпلامда (тўғри тўртбурчакда) узлуксиз. Кантор теоремасига кўра бу функция M тўпلامда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики,

$$\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$$

теңгсизлиكنи қаноатлантирувчи $\forall (x, y) \in M, \forall (x, y_0) \in M$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y_0)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради. У ҳолда 17.3-теоремага асосан

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = \Phi(y_0)$$

$$(\forall y_0 \in [c, d])$$

бўлади. Демак, $\Phi(y)$ функция y_0 нуқтада узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

$$\text{Мисол. Ушбу } f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

функция $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ тўпلامда қаралаётган бўлсин.

функция $f(x, y)$ да узлуксиздир. Юқоридаги теоремага кўра $\Phi(y)$ функ-
ция $[0, 1]$ да узлуксиз бўлади. Берилган интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 + y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + y^2}{1 + y^2}.$$

3. Интегрални параметр бўйича дифференциаллаш.
Энди параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича дифференциаллаш-
ти қараймиз.

17.5-теорема. $f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

таълимда берилган ва y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар
бир таъин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$
оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция M таълимда $f'_y(x, y)$
хосилага эга бўлиб, y узлуксиз бўлса, y ҳолда $\Phi(y)$ функ-
ция ҳам $[c, d]$ оралиқда $\Phi'(y)$ хосилага эга ва ушбу

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (17.5)$$

ҳисобат гринлидир.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$
оралиқда узлуксиз. Бинобарин

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд.

Энди $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \geq 0$) орттир-
иш берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. $\Phi(y)$ функциянинг y_0 нуқта-
даги орттирмасини топиб, ушбу

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

таълимни ҳосил қиламиз. Лагранж теоремаси (1-қисм, 6-боб, 6-§) га
кўра (уни қўллай олишимиз теорема шартлари билан таъминланган)

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y)$$

булар, бунда $0 < \theta < 1$.

Натижада

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} &= \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx + \\ &+ \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)] dx \end{aligned}$$

бўлиб, ундан эса

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)| dx \leq \\ & \leq \int_a^b \omega(f'_y, \Delta y) dx = \omega(f'_y, \Delta y) \cdot (b - a) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз, бунда $\omega(f'_y, \Delta y) - f'_y(x, y)$ функциянинг узлуксизлик модули.

Модомики, $f'_y(x, y)$ функция M тўпلامда узлуксиз экан, унда Кэтор теоремасига кўра бу функция шу тўпلامда текис узлуксиз бўлади. У ҳолда мазкур курснинг 12-боб, 4-§ ида келтирилган теорема асосан

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \omega(f'_y, \Delta y) = 0$$

бўлади.

(17.6) муносабатдан

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\Phi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx.$$

Қаралаётган y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлигини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик теореманинг исботланганлигини кўрсатади.

(17.5) муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

Бу эса дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

Исбот этилган бу 17.5-теорема Лейбниц қоидаси деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln(y^2 \sin^2 x)$$

функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}], 0 < y_0 \leq y \leq y_1 < \infty\}$ тўпلامда узлуксиз

ҳамда $f'_y(x, y) = \frac{2}{y}$ ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз. Ундан олинган $\Phi(y) =$

3. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \ln(y^2 \cdot \sin^2 x) dx$ интегрални қарайлик. 17.5-теоремага кўра $\Phi(y)$ функция

$$\Phi'(y) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\ln(y^2 \sin^2 x))'_y dx = \frac{2}{y} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{y}$$

4. Интегрални параметр бўйича интеграллаш. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпلامда берилган ва шу тўпلامда узлуксиз бўлсин. У ҳолда 17.4-теоремага кўра

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.1)$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Бинобарин, бу функциянинг $[c, d]$ оралиқ бўйича интеграли мавжуд.

Демак, $f(x, y)$ функция M тўпلامда узлуксиз бўлса, у ҳолда параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаш мумкин:

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $f(x, y)$ функцияни аввал x ўзгарувчи бўйича $[a, b]$ оралиқда интеграллаб (бунда y ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг натижани $[c, d]$ оралиқда интегралланади.

Базан $f(x, y)$ функция M тўпلامда узлуксиз бўлган ҳолда бу функцияни аввал y ўзгарувчиси бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаб (бунда x ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг ҳосил бўлган x ўзгарувчининг функцияси $[a, b]$ оралиқда интеграллаш қулай бўлади. Натижада ушбу

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

интеграллар ҳосил бўлади. Бу интеграллар бир-бирига тенг бўладими деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

17.6-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпلامда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. $\forall t \in [c, d]$ нуқтани олиб, қуйидаги

$$\Phi(t) = \int_c^t \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \quad \Psi(t) = \int_a^t \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx$$

интегралларни қарайлик. Бу $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$\Phi(u) = \int_a^u f(x, y) dx$ функция $[c, d]$ оралықта узлуксиз бўлгани сабабли 1-қисм; 9-боб, 9-§ да келтирилган 9.9-теоремага асосан

$$\varphi'(t) = \left(\int_c^t \Phi(y) dy \right)' = \Phi(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad (17.7)$$

бўлади.

$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз. Яна ўша 1-қисм, 9-боб, 9-§ даги теоремага кўра

$$\left(\int_c^t f(x, y) dy \right)'_t = f(x, t) \quad (x — \text{ўзгармас})$$

бўлади. Демак, $\int_c^t f(x, y) dy$ функциянинг $M = \{(x, t) \in R^2: x \in [a, b], t \in [c, d]\}$ тўпламдаги t бўйича хусусий ҳосиласи $f(x, t)$ га тенг ва демек, узлуксиз. У ҳолда 17.5-теоремага мувофиқ

$$\psi'(t) = \left(\int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx \right)'_t = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right]'_t dx = \int_a^b f(x, t) dx \quad (17.8)$$

бўлади.

(17.7) ва (17.8) муносабатлардан

$$\varphi'(t) = \psi'(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\varphi(t) = \psi(t) + C \quad (C — \text{const}).$$

Бироқ $t = c$ бўлганда $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ бўлиб, ундан $C = 0$ бўлиши топамиз. Демак, $\varphi(t) = \psi(t)$ бўлади. Хусусан, $t = d$ бўлганда $\varphi(d) = \psi(d)$ бўлиб, у теоремани исботлайди.

Мисол. Параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича интеграллашдан даланиб, ушбу

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b)$$

интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $(x > 0)$

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

бўлади. Демак

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

Интеграл остидаги $f(x, y) = x^y$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [0, 1], y \in [a, b]\}$ тўпламида узлуксиздир. У ҳолда 17.6-теоремага кўра

$$A = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

бўлади. Аммо

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}$$

булганлигидан $A = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$ бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$.

3-§. Параметрга боғлиқ интеграллар [умумий ҳол]

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин.

$x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да берилган ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b \quad (17.9)$$

бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд, y ўзгарувчи (параметр) га боғлиқдир:

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (17.10)$$

Бу интеграл ушбу бобнинг 2-§ ида ўрганилган интегралга қараганда умумийроқ. Ҳақиқатан ҳам, (17.9) да $\alpha(y) = a$, $\beta(y) = b$, ($y \in [c, d]$) бўлганда (17.10) интеграл (17.1) кўринишдаги интегралга айланади.

Ушбу параграфда $f(x, y)$ ҳамда $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг функционал хоссаларига кўра параметрга боғлиқ

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

интегралнинг хоссаларини ўрганамиз.

17.7-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

функция ҳам $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай $\Delta y (\Delta y \geq 0)$ оғир-
тирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \\ &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \\ &+ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \end{aligned} \quad (17.11)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қўшилувчиларни баҳолаймиз.
 $f(x, y)$ функция M тўпلامда узлуксиз, демак, Кантор теоремаси-
га асосан, текис узлуксиз бўлади. У ҳолда $\Delta y \rightarrow 0$ да $f(x, y_0 + \Delta y)$
функция ўз лимит функцияси $f(x, y_0)$ га текис яқинлашади (қаралсин,
250- бет) ва 17.3-теоремага кўра

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx &= \\ = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx &= 0 \end{aligned} \quad (17.12)$$

бўлади.

(17.11) муносабатдаги

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

интеграллар учун қуйидаги баҳога эгамиз:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| &\leq M |\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)|, \\ \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| &\leq M \alpha |(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)|, \end{aligned} \quad (17.13)$$

бунда $M = \sup (|f(x, y)| \mid (x, y) \in M)$.

Шартга кўра $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлук-
сиз. Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] &= 0, \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] &= 0. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Юқоридаги (17.12), (17.13) ва (17.14) муносабатларни эътиборга олиб,
(17.11) тенгликда $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} [F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)] = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $F(y)$ функция $\forall y_0 \in [c, d]$ да узлуксиз.
Теорема исбот бўлди.

17.8-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз, $f_y^*(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва y узлуксиз, $\alpha(y)$ $f(y)$ функциялар эса $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ ҳосилаларга эга ҳамда улар (17.9) теоремани қаноатлантирсин. У ҳолда

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда $F'(y)$ ҳосилага эга ва

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y^*(x, y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y)$$

бўлади. Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \geq 0$) орт-тирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. (17.11) муносабатдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \\ &+ \Delta y) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx. \end{aligned} \quad (17.15)$$

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

$\Delta y \rightarrow 0$ да

функция ўз лимит функцияси $f_y^*(x, y_0)$ га $[a, b]$ оралиқда текис яқин-лашади (қаралсин, 250-бет). Унда

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y^*(x, y_0) dx \quad (17.16)$$

қилади. Энди

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

интегралларга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 8-§), ушбу

$$\begin{aligned} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= f(x', y_0 + \Delta y) [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)], \\ \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= f(x'', y_0 + \Delta y) [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] \end{aligned}$$

теңликларни ҳосил қиламиз, бунда x' нуқта $\beta(y_0)$, $\beta(y_0 + \Delta y)$ нуқта-лар орасида, x'' эса $\alpha(y_0)$, $\alpha(y_0 + \Delta y)$ нуқталар орасида жойлашган. $f(x, y)$ функциянинг M тўпламда узлуксизлигини, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$

функцияларнинг эса $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x', y_0 + \Delta y) \times \\ &\times \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y}] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} = \\ &= f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0), \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[f(x'', y_0 + \Delta y) \times \right. \\ &\times \left. \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x'', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} = \\ &= f(\alpha(y_0), y_0) \alpha'(y_0) \end{aligned} \quad (17.17)$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқоридаги (17.15) муносабатда, $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, (17.16) ва (17.17) тенгликларни эътиборга олиб ушбунни топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - \\ &- f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \end{aligned}$$

Демак,

$$F'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Модомики, y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқдаги ихтиёрий нуқта экан, у ҳолда $\forall y \in [c, d]$ учун

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$$

бўлиши равшандир. Бу эса теоремани исботлайди.

Хусусан, $\alpha(y) = a$, $\beta(y) = b$ бўлса, бу формуладан 2-§ да келтирилган (17.5) формула келиб чиқади.

17.9-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпلامда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $F(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи бўлади.

Бу теоремани исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

4-§. Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар. Интегралнинг текис яқинлашиши

Биз мазкур курснинг 16-бобида хосмас интеграл (чегараси чексиз хосмас интеграл, чегараланмаган функциянинг хосмас интеграл) тўғрисида шунчаси билан танишиб, уни ўргандик. Ушбу бобнинг 2-§ ва 3-§ ларида параметрга боғлиқ интеграллар баён этилди.

Энди умумий ҳол — параметрга боғлиқ хосмас интеграллар билан шуғулланамиз.

1. Параметрга боғлиқ хосмас интеграл тушунчаси.

1°. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. Сўнг y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир қийматида $f(x, y)$ x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ бўйича интегралланувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд ва чекли бўлсин. Бу интеграл y нинг қий-
мига боғлиқдир:

$$K(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (17.18)$$

(17.18) интеграл параметрга боғлиқ чегараси чексиз хосмас интеграл деб аталади.

2°. $f(x, y)$ функция $M' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, a], y \in E \subset R\}$ ($M'' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in E \subset R\}$) тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ — x нинг функцияси сифатида $(-\infty, a]$ ($(-\infty, +\infty)$) да интегралланувчи бўлсин. Бунда

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right)$$

интеграл ҳам параметрга боғлиқ, чегараси чексиз хосмас интеграл деб аталади.

2°. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. Сўнг y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи яъни,

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y нинг қий-
мига боғлиқ:

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (17.19)$$

(17.19) интеграл параметрга боғлиқ, чегараланмаган [функциянинг хосмас интеграл деб аталади.

3°. $f(x, y)$ функция $M_1' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ — x нинг функцияси сифатида қаралганда, унинг учун $x = a$ махсус нуқта бўлсин. Бу функция $(a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. У ҳолда

$$I_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл ҳам параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг мас интегралли деб аталади.

3° Умумий ҳолда, параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интегралли тушунчаси ҳам юқоридагидек кўрилади.

$f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in (c, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламида берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир таъин қийматиде $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралган. унинг учун $x = c$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $(c, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи (қаралсин: 16-боб, 9-§), яъни

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интегралли маънода бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқдир:

$$I_3(y) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.20)$$

(17.20) интеграл параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интегралли деб аталади.

Биз юқорида келтирилган (17.18), (17.19), (17.20) интегралларни параметрга боғлиқ хосмас интеграллар деб кетаверамиз.

Масалан, 16-бобнинг 1-§ ида қаралган

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

интеграл, шу бобнинг 5-§ да қаралган

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интеграллар, 16-бобнинг 9-§ да қаралган

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграллар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

Бу ерда ҳам асосий масалалардан бири — $f(x, y)$ функциянинг функционал хоссаларига кўра, (17.18), (17.19) ва (17.20) параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг функционал хоссаларини ўрганишдир.

Биз қуйида уларнинг турли хоссаларини, асосан,

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

интеграл учун келтирамиз. Бу хоссаларни

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни ўрганишда интегралнинг текис яқинлашиши тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

2. Интегралнинг текис яқинлашиши. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпلامда берилган. y ўзгарувчининг E тўпلامдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ x ўзгаришининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин. Чеғараси чексиз хосмас интеграл таърифига кўра ихтиёрий $[a, l]$ да $a < l < +\infty$

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx \quad (17.21)$$

интеграл мавжуд ва

$$I(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x, y) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, y). \quad (17.22)$$

Шундай қилиб, (17.21) ва (17.22) интеграллар билан аниқланган $F(t, y)$ ва $I(y)$ функцияларга эга бўламиз ва $I(y)$ функция $F(t, y)$ функциянинг $t \rightarrow +\infty$ даги лимит функцияси бўлади.

17.5-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E тўпلامда текис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпلامда текис яқинлашувчи деб аталади.

17.6-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E да нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпلامда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

Равшанки, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E тўпلامда текис яқинлашувчи бўлса, у шу тўпلامда яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интегралнинг E тўпلامда текис яқинлашувчи бўлиши қуйидагини аниқлатади:

- 1) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E тўпلامдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи,
- 2) $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall l > a$ ва $\forall y \in E$ учун

бўлади.

$$\left| \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E тўпланда яқинлашувчи, аммо у шу тўпланда нотекис яқинлашувчи дегани қуйидагини англатади:

1) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E тўпланда олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи.

2) $\forall \delta > 0$ олинганда ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in E$ ва $t_1 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $t_1 \in [a, +\infty)$ топиладики,

$$\left| \int_{t_1}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx \quad (y \in E = (0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Бу ҳолда

$$F(t, y) = \int_0^t ye^{-xy} dx = 1 - e^{-ty} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

бўлиб, y ўзгарувчининг $E = (0, +\infty)$ тўпландан олинган ҳар бир тайин қийматида

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-ty}) = 1$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = 1$$

бўлади.

Энди берилган интегрални текис яқинлашувчиликка текшираимиз. $y \in E = (0, +\infty)$ бўлсин. Ихтиёрий кагта мусбат δ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $t_0 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий t_0 ва $y_0 = \frac{1}{t_0}$ деб олам.

у ҳолда

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} y_0 e^{-xy_0} dx \right| = e^{-t_0 y_0} = e^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0$$

бўлади. Бу эса

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$$

интеграл $E = (0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчи эканини билдиради.

Энди $y \in E' = [c, +\infty) \subset E$ бўлсин, бунда c — ихтиёрий мусбат сон. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(0 < \varepsilon < 1)$ $\delta = \frac{1}{c} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ дейилса, $\forall t > \delta$ ва $y \in E'$

$(+\infty)$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| = e^{-ty} < e^{-c \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$$

Демак,

яъна $E^* = \{c, +\infty\}$ да ($c > 0$) текис яқинлашувчи.

Биз кўрдикки, параметрга боғлиқ хосмас интеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

нинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функциянинг лимит функция $I(y)$ га ($y \in E$) текис яқинлашишидан иборат. Ушбу боснинг 1-§ нда $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функциянинг лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашишининг зарурий ва етарли шартини фойдаланиб, 17.1-теоремани келтирдик. Бу теоремадан фойдаланиб, (17.18) интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарурий ва етарли шартин келтирилади.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y) - \varphi(x)$ ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи, яъни

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин.

17.7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, y га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ ни қаноатлантирувчи $\forall t', t''$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

тенисизлик бажарилса, y ҳолда (17.18) хосмас интеграл E тўпламда фундаментал интеграл деб аталади.

17.10-теорема (Коши теоремаси). Ушбу $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг E тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема назарий аҳамиятга эга. Ундан амалиётда фойдаланиш қийин.

Қўйади биз интегралнинг текис яқинлашувчилигини таъминлайдиган, кўпинча қўлланиладиган аломатларни келтирамиз.

Вейерштрасс аломати. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин. Агар

1) $\forall x \in [a, +\infty)$ функция $\varphi(x)$ ($x \in [a, +\infty)$) топилсаки,

2) $\forall x \in [a, +\infty)$ ва $\forall y \in E$ учун $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ бўлса,

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ яқинлашувчи. Унда 16-боб 2-§ ида келтирилган 16.4-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall t' > \delta$, $\forall t'' > \delta$ бўлганда $\left| \int_{t'}^{t''} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon$ бўлади. Иккинчи томондан, 1) шартдан фойдаланиб қуйидагига топамиз:

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x, y)| dx \leq \int_{t'}^{t''} \varphi(x) dx \quad (t' < t'').$$

Демак,

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интегралнинг E тўпламда фундаментал эканини билдиради. Юқоридаги 17.10-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} (dx) \quad (y \in E = (-\infty, \infty))$$

интегрални қарайлик.

Агар $\varphi(x)$ функция сифатида $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ олинса, у ҳолда

1) $\forall x \in [0, +\infty)$ ва $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\cos xy}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x).$$

2) $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл яқинлашувчи (қаратсин, 16-боб, 1-§) бўлади.

Демак, Вейерштрасс аломатига кўра берилган интеграл $E = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Интегралнинг текис яқинлашувчилигини аниқлашда қўл келадиган аломатлардан — Абель ва Дирихле аломатларини исботсиз келтирамиз.

Абель аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $M = \{(x, y) \in R \mid x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламида

олинган ҳар бир тайин қийматида $g(x, y)$ функция x нинг
 функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да монотон функция бўлсин.

Агар

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи ва $\forall (x, y) \in M$ учун

$$|g(x, y)| \leq c \quad (c = \text{const})$$

булса,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \quad (y \in E = [0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Агар

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x, y) = e^{-xy}$$

деб олинса, Абель аломати шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx$ те-
 кис яқинлашувчи:

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

16-боб, 2-§ ва 17-боб, 8-§), $g(x, y) = e^{-xy}$ эса y нинг $E = [0, +\infty)$ дан олин-
 ган ҳар бир тайин қийматида x нинг камаювчи функцияси ва $\forall x \in [0, +\infty)$,
 $y \in E = [0, +\infty)$ учун $|g(x, y)| = e^{-xy} \leq 1$ бўлади. Демак, берилган интеграл
 Абель аломатига қура $E = [0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи.]

Дирихле аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда
 берилган. Агар $\forall t \geq a$ ҳамда $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_a^t f(x, y) dx \right| \leq c \quad (c = \text{const})$$

булса ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида,
 $x \rightarrow +\infty$ да $g(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(y) = 0$ га текис
 яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx \quad (y \in E = [1, 2])$$

интегрални қарайлик. Агар

$$f(x, y) = \sin xy, \quad g(x, y) = \frac{1}{x}$$

дейилса, унда $\forall t > 0, \forall y \in [1, 2]$ учун

$$\left| \int_0^t f(x, y) dx \right| = \left| \int_0^t \sin xy dx \right| = \left| 1 - \frac{\cos ty}{y} \right| \leq 2$$

бўлади. $x \rightarrow +\infty$ да $g(x, y) = \frac{1}{x}$ функция E тўпلامда нолга текис яқинлашув

$$g(x, y) = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Демак, берилган интеграл Дирихле аломатига кўра $E = [1, 2]$ да текис яқинлашув

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг текис (нотекис) яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпلامда берилган. y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. Чегараланмаган функция хосмас интегрални таърифига кўра ихтиёрий $[a, t]$ да ($a < t < b$)

$$F_1(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} F_1(t, y) \quad (17.23)$$

бўлади. Демак, $I_1(y)$ функция $F_1(t, y)$ функциянинг $t \rightarrow b-0$ даги лимит функцияси.

17.8-таъриф. Агар $t \rightarrow b-0$ да $F_1(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпلامда текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпلامда текис яқинлашувчи деб аталади.

17.9-таъриф. Агар $t \rightarrow b-0$ да $F_1(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпلامда нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпلامда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

Бу таърифларни « $\epsilon - \delta$ » орқали баён этишни ўқувчига ҳавола этилмиш.

17.10-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладикки, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ бўлган $\forall t', t''$ лар ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

теңсизлик бажарилса, у ҳолда (17.23) интеграл E тўпламда фундаментал деб аталади.

17.11-теорема. $\int_a^b f(x, y) dx$ интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг E тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

5. §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда интеграл белгиси остида лимитга ўтиш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in \subset R\}$ тўпламда берилган. y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.12-теорема. $f(x)$ функция

1) y ўзгаришнинг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгаришнинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да узлуксиз,

2) $y \rightarrow y_0$ да ихтиёрий $[a, t] [a < t < \infty)$ оралиқда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агарда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \rightarrow y_0$ да $I(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (17.24)$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг 1) ва 2) шартлари ҳамда ушбу бобнинг 1-§ идаги 17.2-теоремадан $\varphi(x)$ лимит функциянинг $[a, +\infty)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ функция ҳар бир чекли $[a, t] [a < t < +\infty)$ оралиқда интегралланувчи.

$\varphi(x)$ ни $[a, +\infty)$ да интегралланувчи эканлигини кўрсатайлик.

Теореманинг шартига кўра

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи. Унда 17.10-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладикки, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ бўлган $\forall t', t''$ лар ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (17.25)$$

бўлади. $f(x, y)$ функцияга қўйилган шартлар 2-§ да келтирилган 17.3 теорема шартларининг бажарилишини таъминлайди. (17.25) тенгсизлиги $y \rightarrow y_0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\left| \int_a^{t'} \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Бундан эса $\varphi(x)$ нинг $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлиши келиб чиқади (16-боб, 2-§).

Энди

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right|$$

айирмани қуйидагича ёзиб,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^t [f(x, y) - \varphi(x)] dx + \int_t^{+\infty} f(x, y) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \left| \int_a^t [f(x, y) - \varphi(x)] dx \right| + \left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \\ &\quad + \left| \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \quad (a < t < +\infty) \end{aligned} \quad (17.26)$$

тенгсизлиكنинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчинини баҳолаймиз.

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_1$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (17.27)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи. Демак, юқоридаги $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_2$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (17.28)$$

бўлади.

Агар $\delta_0 = \max \{ \delta_1, \delta_2 \}$ деб олинса, барча $t > \delta_0$ учун (17.27) ва (17.28) тенгсизликлар бир йўла бажарилади. $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга ҳар бир $[a, t]$ (жумладан $t > \delta_0$) да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta' > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y \in E$ ва $\forall x \in [a, t]$ $(a < t < +\infty)$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(t-a)} \quad (17.29)$$

Натижада (17.26), (17.27) (17.28) ва (17.29) тенгсизликларга

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (17.30)$$

бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

(17.30) лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx.$$

Бу эса 17.12-теореманинг шартлари бажарилганда параметрга боғлиқ хосмас интегралларда ҳам интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y_0 нуқта E тўплагининг лимит нуқтаси бўлсин. Шунингдек, y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.13-теорема. $f(x, y)$ функция

1) y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b)$ да узлуксиз,

2) $y \rightarrow y_0$ да ихтиёрий $[a, t)$ ($a < t < b$) ораликда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, y ҳолда $y \rightarrow y_0$ да $I_1(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I_1(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

бўлади.

6-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг параметр бўйича узлуксизлиги

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d)\}$ тўпламда берилган.

17.14-теорема. $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функциянинг M тўпلامда узлуксизлигидан, аввало бу функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида x нинг узлуксиз функцияси бўлиши келиб чиқади. Шу билан бирга $f(x, y)$ функция $M_t = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, t], y \in [c, d]\}$ ($a < t < +\infty$) тўпلامда ҳам узлуксиз, демак, шу тўпلامда текис узлуксиз бўлади.

$\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $f(x, y_0)$ лимит функцияга $[a, t]$ да текис яқинлашади (қаралсин, 250-бет). Агар теореманинг иккинчи шартини эътиборга олсак, у ҳолда $f(x, y)$ функция 17.12-теореманинг барча шартларини бажаришини кўрамиз. У ҳолда 17.12-теоремага асосан

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} I(y) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = I(y_0) \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. $f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпلامда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.15-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 тўпلامда узлуксиз ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

7-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича дифференциаллаш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпلامда берилган.

17.16-теорема. $f(x, y)$ функция M тўпلامда узлуксиз, $f_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва y ҳам узлуксиз ҳамда y ўзгарувчининг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$ интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлсин,

У ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ ораллиқда $I'(y)$ ҳасилага эга бўла-

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \quad (17.31)$$

муносабат ғринлидир.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \geq 0$) орттирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин.

$I(y)$ функциянинг y_0 нуқтадаги орттирмасини олиб, ушбу

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx \quad (17.32)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди (17.32) тенгликдаги интегралда $\Delta y \rightarrow 0$ да интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Лагранж теоремасига кўра

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) \quad (17.33)$$

бўлади, бунда $0 < \theta < 1$.

Шартга кўра $f'_y(x, y)$ функция $M_t = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, t], y \in [c, d]\}$ ($a < t < +\infty$) тўпладда узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|x'' - x'| < \delta$, $|y'' - y'| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x', y') \in M_t$, $(x'', y'') \in M_t$ нуқталар учун

$$|f'_y(x'', y'') - f'_y(x', y')| < \varepsilon$$

бўлади. Агар $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \Delta y \cdot \theta$ дейилса, унда $|y'' - y'| < \delta$ бўлганда

$$|f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [a, t])$$

бўлади. Юқоридаги (17.33) тенгликдан фойдаланиб қуйидагини топи-

$$\left| \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} - f'_y(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Бу эса $\Delta y \rightarrow 0$ да $\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$ функция $f'_y(x, y_0)$ лимит функ-

цияга текис яқинлашганини билдиради.

Теореманинг шартига кўра

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $> t' \delta$, $t'' > \delta$ бўлган t' , t'' ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f'_y(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Жумладан

$$\left| \int_a^{x''} f'_y(x, y_0 + \Delta y \cdot \theta) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. (17.33) тенгликка асосан

$$\left| \int_a^{x''} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчиلىгини билдиради.

Натижада 17.12-теоремага кўра

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} \right] dx$$

теңглик ўринли бўлади.

Юқоридаги (17.32) теңгликда $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтамыз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} \right] dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

Демак,

$$I'(y_0) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0) dx.$$

Теорема исбот бўлди.

(17.31) муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Бу эса теорема шартларида дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), y \in [c, d]\}$ тўп-ламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир таъин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.17-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 тўпланда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ ҳосилага эга ва y ҳам узлуксиз ҳамда y ўзгарувчининг $[c, d]$ да берилган ҳар бир тайин қийматида

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.
Агар

$$\int_a^b f'_y(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, y ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда $I'_1(y)$ ҳосилага эга бўлади ва

$$I'_1(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

муносабат ўринлидир.

1. §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича интеграллаш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпланда берилган.

17.18-теорема. Агар $f(x, y)$ функция M тўпланда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, y ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.
Исбот. Теореманинг шартларидан $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади (қаралсин, 17.4-теорема) Демак, $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи.
Энди

$$\int_a^{+\infty} \left| \int_c^d f(x, y) dy \right| dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d |f(x, y)| dy \right] dx$$

теңлиқнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.
Шартга кўра

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинган ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall t > \delta$ ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (17.34)$$

бўлади. Мана шундай t бўйича

$$\int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \left[\int_a^t f(x, y) dx \right] dy + \int_c^d \left[\int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy.$$

17.6-теоремага асосан

$$\int_c^d \left[\int_a^t f(x, y) dx \right] dy = \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади. Натижада

$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx + \int_c^d \left[\int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади. Юқоридаги (17.34) муносабатни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \right| \leq \int_c^d \left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy < \varepsilon(d - c).$$

Бу эса

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

эканини билдиради. Демак,

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди $f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, +\infty)\}$ тўпلامда берилган бўлсин.

17.19-теорема. $f(x, y)$ функция M_2 тўпلامда узлуксиз ва

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

интеграллар мос равишда $[c, +\infty]$ ва $[a, +\infty]$ да текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right] dy \quad (\text{ёки}) \quad \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right] dx,$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

интеграллар яқинлашувчи ва

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Бу теореманинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпلامда берилган. y нинг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x=b$ махсус нуқта бўлсин.

17.20-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 тўпلامда ўзлуксиз ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, y ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d I_1(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ўшбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегрални қарайлик. a чегараланмаган функциянинг ($a < 1$ да $x=0$ махсус нуқта) чегараси чексиз хосмас интеграл бўлиб, a параметрга боғлиқдир:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Бу интегрални қуйидаги икки қисмга ажратиб,

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = I_1(a) + I_2(a)$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқинлашувчиликка текшираемиз.

$0 < x < 1$ да қуйидаги

$$\frac{1}{2} x^{a-1} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-1}$$

теңсизликлар ўринли ва $\int_0^1 x^{a-1} dx$ интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да узоқлашувчи (қаралсин, 16-боб, 5-§). 16-бобнинг 6-§ ида келтирилган 16.8-теоремага кўра

$$I_1(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи $a \leq 0$ да узоқлашувчи бўлади. $x \geq 1$ да қуйидаги

$$\frac{1}{2} x^{a-2} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-2}$$

тенгсизликлар ўринли ва $\int_1^{+\infty} x^{a-2} dx$ интеграл $a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоқлашувчи (қаралсин, 16-боб, 1-§). 16-бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.2-теоремага кўра

$$I_2(a) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоқлашувчи бўлади. Шундай қилиб, келтирилган

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегралнинг $0 < a < 1$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Энди $I(a)$ интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $0 < x < 1$ да

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{a+k-1} \quad (*)$$

бўлиб, бу қатор $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 \leq x \leq b_0 < 1$) да текис яқинлашувчи бўлади.

(*) даражали қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} = \frac{x^{a-1} [1 - (-x)^n]}{(1+x)}$$

бўлади. Агар $\forall n \in N$ ва $\forall x \in (0, 1)$ учун

$$\frac{x^{a-1} [1 - (-x)^n]}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлишини ҳамда

$$\int_0^1 x^{a-1} dx \quad (0 < a < 1)$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра интеграл $\int_0^1 S_n(x) dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) текис яқинлашувчи бўлади. 17.13-теоремага кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} \right] dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

Бўлади. Бу тенгликдан қуйдагини топамиз;

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}. \end{aligned}$$

Демак,

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Агар

$$I_2(a) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегралда $x = \frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I_2(a) = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-a)-1}}{1+t} dt$$

бўлади. Юқоридаги йўл билан

$$I_2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}$$

ёқилини топамиз. Демак,

$$I(a) = I_1(a) + I_2(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (0 < a < 1)$$

бўлишини (қаралсин, 21-боб, 4-§) эътиборга олсак, унда

$$I(a) = \frac{\pi}{\sin a \pi}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (0 < a < 1).$$

2. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

интегрални қарайлик. Бу хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлини 16-бобнинг 2-§ ида кўрсатилган эди. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз. Бунинг учун қуйидаги

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интегрални қараймиз.

Равшанки,

$$f(x, a) = e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \quad (f(0, a) = 1)$$

функция

$$\{(x, a) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, +\infty), a \in [0, c]\} \quad (c > 0)$$

тўпламда узлуксиз,

$$f'_a(x, a) = -e^{-ax} \sin x$$

хусусий ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз функция. Қуйидаги

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

интеграл эса $a \geq a_0$ ($a_0 > 0$) да текис яқинлашувчи. 17.16-теоремага кўра

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right)'_a dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = - \frac{1}{1+a^2}$$

бўлади (қаралсин, 1-қисм, 8-боб, 2-§). Демак,

$$I(a) = -\operatorname{arctg} a + C.$$

$a = +\infty$ бўлганда, $I(+\infty) = \text{бўлиб}, \frac{-\pi}{2} + C = 0$ яъни $C = \frac{\pi}{2}$ бўлади. Демак,

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a.$$

Бу тенгликда $a \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = \frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, $I(0) = \frac{\pi}{2}$, яъни

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

қилин.

9. §. Бета функция (I тур Эйлер интеграл) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9-§ нда ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (17.35)$$

хосмас интегрални қарадик.

Интеграл остидаги функция учун

- 1) $a < 1$, $b \geq 1$ бўлганда $x = 0$ махсус нуқта,
- 2) $a \geq 1$, $b < 1$ бўлганда $x = 1$ махсус нуқта,
- 3) $a < 1$, $b < 1$ бўлганда $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади.

Бинобарин, (17.35) чегараланмаган функциянинг хосмас интегралидир. Демак, (17.35) интеграл — параметрга боғлиқ хосмас интегралдир. Уша ерда (17.35) хосмас интегралнинг $a > 0$, $b > 0$ да, яъни

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$$

тўпламда яқинлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.11-таъриф. (17.35) интеграл бета функция ёки I тур Эйлер интеграл деб аталади ва $B(a, b)$ каби белгиланади, демак

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Шундай қилиб $B(a, b)$ функция R^2 фазодаги $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда берилгандир.

Энди $B(a, b)$ функциянинг хоссаларини ўрганайлик.

1°. (17.35) интеграл

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

активёрини $M_0 = \{(x, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty), b \in [b_0, +\infty)\} \mid a_0 > 0, b_0 > 0\}$ тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган интегрални текис яқинлашувчиликка текшириш учун уни қуйидагича

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

ёзиб оламиз.

Равшанки, $a > 0$ бўлганда $\int_0^{1/2} x^{a-1} dx$ интеграл яқинлашувчи, $b > 0$ бўлганда $\int_{1/2}^1 (1-x)^{b-1} dx$ интеграл яқинлашувчи.

Параметр a нинг $a \geq a_0 (a_0 > 0)$ қийматлари ва $\forall b > 0, \forall x \in (0, \frac{1}{2})$ учун

$$x^{a-1} (1-x)^{b-1} (\leq x^{a_0-1} (1-x)^{b-1} \leq 2x^{a_0-1})$$

бўлади. Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Шунингдек, параметр b нинг $b \geq b_0 (b_0 > 0)$ қийматлари ва $\forall a > 0, \forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$ учун

$$x^{a-1} (1-x)^{b-1} \leq x^{a-1} (1-x)^{b_0-1} \leq 2(1-x)^{b_0-1}$$

бўлади ва яна Вейерштрасс аломатига кўра $\int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ интегралнинг текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Демак, $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ интеграл $a \geq a_0 > 0$, ва $b \geq b_0 > 0$ бўлганда, яъни

$$M_0 = \{(a, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty), b \in [b_0, +\infty)\}$$

тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

17.1-эслатма. $B(a, b)$ нинг $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда нотекис яқинлашувчилигини кўриш қийин эмас.
2°. $B(a, b)$ функция $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда узлуксиз функциядир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

интегралнинг M_0 тўпламда текис яқинлашувчи бўлишидан ва интеграл остидаги функциянинг $\forall (a, b) \in M$ да узлуксизлигидан 17.15-теоремага асосан $B(a, b)$ функция

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

3°. $\forall (a, b) \in M$ учун $B(a, b) = B(b, a)$ бўлади. Дарҳақиқат
 $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ интегралда $x = 1-t$ алмаштириш билан

БЕЛГІ, УНДІ

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a)$$

БЕЛГІНИ ТОПАМИЗ.

4°. $B(a, b)$ функция қуйидагича ҳам ифодаланади:

$$B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt. \quad (17.36)$$

Хақиқатан ҳам, (17.35) интегралда $x = \frac{t}{1+t}$ алмаштириш бажарил-

ди. Ҳолда

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{b-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt \end{aligned}$$

БЕЛГІДИ.

Хусусан, $b = 1 - a$ ($0 < a < 1$) бўлганда

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (17.37)$$

БЕЛГІДИ. (17.37) муносабатдан қуйидагини топамиз:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

5°. $\forall (a, b) \in M' (M' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (1, +\infty)\})$ учун

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad (17.38)$$

БЕЛГІДИ.

(17.35) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \frac{1}{a} x^a (1-x)^{b-1} \Big|_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx = \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx \end{aligned}$$

$$(a > 0, b > 1).$$

Агар

$$x^a (1-x)^{b-2} = x^{a-1} [1 - (1-x)] (1-x)^{b-2} = x^{a-1} (1-x)^{b-2} - x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx - \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = B(a, b-1) - B(a, b)$$

булиб, натижада

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} [B(a, b-1) - B(a, b)]$$

булади. Бу тенгликдан эса

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad (a > 0, b > 1)$$

булишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш $\forall (a, b) \in M''$ учун

$$(M'' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (1, +\infty), b \in (0, +\infty)\})$$

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b)$$

булади.

Хусусан, $b = n$ ($n \in N$) бўлганда

$$B(a, b) = B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} B(a, n-1)$$

булиб, (17.38) формулани такрор қўллаб қуйидагини топамиз.

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{n+1} B(a, 1).$$

$$\text{Равшанки, } B(a, 1) = \int_a^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}. \text{ Демак,}$$

$$B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}. \quad (17.39)$$

Агар (17.39) да $a = m$ ($m \in N$) бўлса, у ҳолда

$$B(m, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{m(m+1) \cdots (m+n-1)} = \frac{(n-1)! (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

10-§. Гамма функция (II тур Эйлер интегралли) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9-§ ида қуйидаги

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (17.40)$$

хосмас интегрални қарадик. Бу чегараланмаган функциянинг ($a < 1$) да $x = 0$ махсус нуқта) чексиз оралиқ бўйича олинган хосмас интеграл

булиши билан бирга a га (параметрга) ҳам боғлиқдир. Ҳа ерда (17.40) хосмас интегралнинг $a > 0$ да, $(0, +\infty)$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да, яъни $(-\infty, 0]$ да узоқлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.12-таъриф. (17.40) интеграл гамма функция ёки II тур Эйлер интеграл деб аталади ва $\Gamma(a)$ каби белгиланади. Демак,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Шундай қилиб, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да берилгандир. Энди $\Gamma(a)$ функциянинг хоссаларини ўрганайлик.

Γ (17.40) интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

хаттирий $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 < b_0 < +\infty$) ораликда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. (17.40) интегрални қуйидаги икки қисмга ажратиб,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида текис яқинлашувчиликка текшираймиз.

Агар a_0 ($a_0 > 0$) сонни олиб, параметр a нинг $a \geq a_0$ қийматлари қаралса, унда барча $x \in (0, 1]$ учун $x^{a-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-a_0}}$ бўлиб, ушбу

қосимнинг 4-§ ида келтирилган Вейерштрасс аломатига асосан

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл текис яқинлашувчи бўлади.

Агар b_0 ($b_0 > 0$) сонни олиб, параметр a нинг $a \leq b_0$ қийматлари қаралдиган бўлса, унда барча $x \geq 1$ учун

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{b_0-1} e^{-x} \leq \left(\frac{b_0+1}{e}\right)^{b_0+1} \cdot \frac{1}{x^2}$$

бўлиб,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс аломатига кўра

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Шундай қилиб,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 < b_0 < +\infty$) да текис яқинлашувчи бўлади.
17.2-эслатма. $\Gamma(a)$ нинг $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчилигини кўриш қийин эмас.

2°. $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз ҳамда барча тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Исбот. $\forall a \in (0, +\infty)$ нуқтани олайлик. Унда шундай $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 < b_0 < +\infty$) оралиқ топиладики, $a \in [a_0, b_0]$ бўлади. Равишанки,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция $M = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, +\infty), a \in (0, +\infty)\}$ тўпلامда узлуксиз функциядир. (17.40) интеграл эса (юқорида исбот эгилганга кўра) $[a_0, b_0]$ да текис яқинлашувчи. У ҳолда 17.4-теоремага асосан $\Gamma(a)$ функция $[a_0, b_0]$ да бинобарин, a нуқтада узлуксиз бўлади.

(17.40) интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция $f'_a(x, a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x$ ҳосиласининг M тўпلامда узлуксиз функция эканлигини пайқаш қийин эмас.

Энди

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

интегрални $[a_0, b_0]$ да текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Ушбу $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун $0 < x \leq 1$ да $|x^{a-1} e^{-x} \ln x| \leq x^{a_0-1} |\ln x|$ тенгсизлик ўринлидир. $\psi_1(x) = x^2 |\ln x|$ функция $0 < x \leq 1$ да чегараланганлигидан $\int_0^1 x^{\frac{a_0}{2}-1} dx$ интегралнинг яқинлашувчилигидан $\int_0^1 x^{a_0-1} |\ln x| dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлишини ва Вейерштрасс аломатига кўра қаралаётган $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Шунга ўхшаш қуйидаги

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

интегралда, интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун барча $x \geq 1$ да

$$x^{a-1} e^{-x} \ln x \leq x^{b_0-1} e^{-x} \ln x < x^{b_0} e^{-x} \leq \left(\frac{b_0+2}{e}\right)^{b_0+2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Келиб, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс

теоремасига кўра $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ нинг текис яқинлашувчилиги ке-

либ чиқади. Демак, $[a_0, b_0]$ да $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ интеграл текис

яқинлашувчи. Унда 17.16-теоремага асосан

$$F(a) = \left(\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx \right)' = \int_0^{+\infty} (x^{a-1} e^{-x})' \, dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$$

чиқади ва $\Gamma'(a)$ $[a_0, b_0]$ да бинобарин, a нуқтада узлуксиздир.

Худди шу йўл билан $\Gamma(a)$ функциянинг иккинчи, учинчи ва ҳока-

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

да кўрсатилади.

3. $\Gamma(a)$ функция учун ушбу

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (a > 0)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} d\left(\frac{x^a}{a}\right)$$

интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$\Gamma(a) = e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{a} e^{-x} \, dx = \frac{1}{a} \Gamma(a+1)$$

Келиб, ундан

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (17.41)$$

чиқади.

Бу формула ёрдамида $\Gamma(a+n)$ ни топиш мумкин. Дарҳақиқат, (17.41) формулани такрор қўллаб,

$$\Gamma(a+2) = \Gamma(a+1) \cdot (a+1),$$

$$\Gamma(a+3) = \Gamma(a+2) \cdot (a+2),$$

$$\Gamma(a+n) = \Gamma(a+n-1) \cdot (a+n-1)$$

чиқарини, улардан эса

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+2)(a+1) \cdot a \Gamma(a)$$

чиқарини топамиз. Хусусан, $a=1$ бўлганда

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

бўлади. Агар $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$\Gamma(n+1) = n!$ эканлиги келиб чиқади.

Яна (17.41) формуладан фойдаланиб $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ бўлишини топамиз.

4° $\Gamma(a)$ функциянинг ўзгариш характери.

$\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, шу оралиқда исталган тартибли ҳосилга эга. Бу функциянинг $a=1$ ва $a=2$ нуқталардаги қийматлари бир-бирига тенг:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

$\Gamma(a)$ функцияга Ролль теоремасини (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) татбиқ қила оламиз, чунки юқорида келтирилган фактлар Ролль теоремаси шартларининг бажарилишини таъминлайди. Демак, Ролль теоремасига кўра, шундай a^* ($1 < a^* < 2$) топиладикки, $\Gamma'(a^*) = 0$ бўлади. $\forall a \in (0, +\infty)$ да

$$\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0$$

бўлиши сабабли, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда қатъий ўсувчи бўлади. Демак, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ да a^* нуқтадан бошқа нуқталарда нолга айланмайди, яъни

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx = 0$$

тенглама $(0, +\infty)$ оралиқда a^* дан бошқа ечимга эга эмас. У ҳолда

$$0 < a < a^* \text{ да } \Gamma'(a) < 0,$$

$$a^* < a < +\infty \text{ да } \Gamma'(a) > 0$$

бўлади. Демак, $\Gamma(a)$ функция a^* нуқтада минимумга эга. Унинг минимум қиймати $\Gamma(a^*)$ га тенг.

Тақрибий ҳисоблаш усули билан

$$a^* = 1,4616 \dots$$

$$\Gamma(a^*) = \min \Gamma(a) = 0,8856 \dots$$

бўлиши топилган.

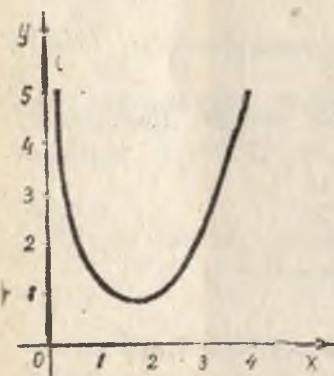
$\Gamma(a)$ функция $a > a^*$ да ўсувчи бўлганлиги сабабли $a > n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) бўлганда $\Gamma(a) > \Gamma(n+1) = n!$ бўлиб, ундан

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a) = +\infty$$

бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, $a \rightarrow +0$ да $\Gamma(a+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ ҳамда $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$ эканлигидан $\lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = +\infty$ келиб чиқади.

$\Gamma(a)$ функциянинг графиги 16-чизмада тасвирланган.



16-чизма

11- §. Бета ва гамма функциялар орасидаги боғланиш

Биз қуйида $B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функциялар орасидаги боғланишни яқинроқ аниқлаш учун қуйидагидан формулани келтирамиз.

Маълумки, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да, $B(a, b)$ функция эса R^2 фазодаги $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда берилган.

17.21-теорема. $\forall (a, b) \in M$ учун

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

формула қринлидир.

Исбот. Ушбу $\Gamma(a+b) = \int_0^{+\infty} x^{a+b-1} e^{-x} dx$ ($a > 0, b > 0$) гамма функцияда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x = (1+t)y \quad (t > 0).$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) &= \int_0^{+\infty} (1+t)^{a+b-1} \cdot y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} \cdot (1+t) dy = \\ &= (1+t)^{a+b} \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини t^{a-1} га кўпайтириб, натижани $(0, +\infty)$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] t^{a-1} dt.$$

Агар (17.36) формулага кўра

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = B(a, b)$$

эквивалентлиги эътиборга олсак, унда

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] t^{a-1} dt \quad (17.42)$$

бўлади. Энди (17.42) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)$ га тенг бўлишини исботлаймиз. Унинг учун, аввало бу интегралларда интеграллаш тартибини алмаштириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун 17.19-теорема шартлари бажарилишини кўрсатишимиз керак.

Дастлаб $a > 1, b > 1$ бўлган ҳолни кўрайлик.

$a > 1, b > 1$ да, яъни $\{(a, b) \in R^2: a \in (1, +\infty), b \in (1, +\infty)\}$ тўпламда интеграл остидаги

$$f(t, y) = y^{a+b-1} t^{a-1} e^{-(1+t)y}$$

функция $\forall (t, y) \in \{(t, y) \in R^2: t \in [0, +\infty), y \in [0, +\infty)\}$ да узлуксиз бўлиб, $f(t, y) = y^{a+b-1} t^{a-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$ бўлади.

Ушбу $\int_0^{+\infty} f(t, y) dy = \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$ интеграл t ўзгаришчанлиги $[0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}.$$

Ушбу

$$\int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt$$

интеграл y ўзгаришчанлиги $[0, +\infty)$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt = \Gamma(a) \cdot y^{b-1} e^{-y}$$

ва ниҳоят, юқоридаги (17.42) муносабатга кўра

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt$$

интеграл яқинлашувчи.

У ҳолда 17.19-теоремага асосан

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

бўлади. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \frac{1}{y^a} \left[\int_0^{+\infty} (ty)^{a-1} e^{-ty} d(ty) \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{b-1} e^{-y} \cdot \Gamma(a) dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b). \end{aligned} \quad (17.43)$$

Натижада (17.42) ва (17.43) муносабатлардан

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b),$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (17.44)$$

Хлиши келиб чиқади. Биз бу формулани $a > 1, b > 1$ бўлган ҳол учун исботладик. Энди умумий ҳолни кўрайлик. Айтилик, $a > 0, b > 0$ бўлсин. У ҳолда исбот этилган (17.44) формулага кўра

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \quad (17.45)$$

қуладн.

$B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$B(a+1, b+1) = \frac{a}{a+b+1} B(a, b+1) = \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} B(a, b),$$

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a), \Gamma(b+1) = b \cdot \Gamma(b), \Gamma(a+b+2) = (a+b+1) \Gamma(a+b+1) = (a+b+1)(a+b) \cdot \Gamma(a+b).$$

Натижада (17.45) формула қуйидаги

$$\frac{a \cdot b}{(a+b)(a+b+1)} B(a, b) = \frac{a \cdot \Gamma(a) \cdot b \cdot \Gamma(b)}{(a+b)(a+b+1) \Gamma(a+b)}$$

кўринишга келади. Бу эса (17.44) формула $a > 0, b > 0$ да ҳам ўринли эканини билдиради.

17.1-натижа. $\forall a \in (0, 1)$ учун

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (17.46)$$

қуладн.

Ҳақиқатан ҳам, (17.44) формулада $b = 1-a$ ($0 < a < 1$) дейилса,

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

қилиб, (17.37) ва $\Gamma(1) = 1$ муносабатларга мувофиқ

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (0 < a < 1).$$

Одатда (17.46) формула келтириш формуласи деб аталади.

Хусусан, (17.46) да $a = \frac{1}{2}$ деб олсак, унда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (*)$$

қилини топамиз.

17.2-нәтижа. Ушбу

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a) \quad (a > 0)$$

формула уринлидир. Шуни исботлаймиз.
(17.44) муносабатда $a = b$ деб

$$B(a, a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(a)}{\Gamma(a)}$$

бўлишини топамиз. Сўнгра

$$\begin{aligned} B(a, a) &= \int_0^1 [x(1-x)]^{a-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx \end{aligned}$$

интегралда $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} \sqrt{t}$ алмаштиришни бажариб,

$$\begin{aligned} B(a, a) &= 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{4} (1-t) \right]^{a-1} \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right) \end{aligned}$$

га эга бўламиз. Нәтижада

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$$

бўлади.

Яна (17.44) формулага кўра

$$B\left(\frac{1}{2}, a\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} (**)$$

бўлиб, (**) муносабатдан

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \sqrt{\pi} \frac{1}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a).$$

(17.47)

Одатда (17.47) формула Лежандр формуласи деб аталади.

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

«Математик анализ» курсининг 1-қисм, 9 — 10-бобларида функция-нинг аниқ интеграли бағфсил ўрганилди.

Математика ва фаннинг бошқа тармоқларида кўп ўзгарувчили функ-цияларнинг интеграллари билан боғлиқ масалаларга дуч келамиз (қуйи-1-§ келтириладиган масала шулар жумласидандир). Бинобарин, каррали интегралларни ўрганиш вазифаси юзга келади.

Каррали интеграллар назариясида ҳам, аниқ интеграллар назарияси-дайдек, интегралнинг мавжудлиги, унинг хоссалари, каррали интеграл-ни ҳисоблаш, интегралнинг татбиқлари ўрганилади. Бунда аниқ инте-грал ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдалана борилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, аниқ интегралда интеграллаш оралиғи ўзгариш чизиқ (R — фазо) даги кесмадан иборат бўлса, каррали интеграл-ларда мос фазодаги соҳалар бўлади. Бундай соҳаларнинг турлича бў-лиши каррали интегралларни ўрганишни бирмунча мураккаблаштиради. Биз ҳатто, кейинроқ кўрамизки, интеграл тушунчасини ҳам турлича ки-ришнинг тақозо қилади (кейинги бобларга қаранг).

Қуйида биз, соддалик учун, икки ўзгарувчили функцияларнинг ин-теграллари билан танишамиз.

1-§. Икки каррали интеграл таърифи

Аниқ интегралнинг баёнини шу интеграл тушунчасига олиб кела-диган масаладан бошлаган эдик. Икки каррали интеграл тушунчасини ўрганишни ҳам унга олиб келадиган масалани келтиришдан бошлай-миз.

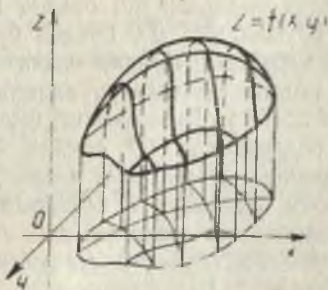
1. Масала. $f(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада* ($(D) \subset R^2$) берилган, узлуксиз ҳамда $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлсин. R^3 фазода $Oxyz$ — Декарт координата системасини олайлик. Юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томонидан, ясовчилари Oz ўқиға паралел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Oxy текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган (V) жисмни қарайлик (17-чизма). (V) жисмнинг ҳажминини топиш талаб этилсин.

Агар $f(x, y)$ функция (D) да ўзгар-мас бўлса, $f(x, y) = C$ (C — const), у ҳолда (V) жисмнинг (цилиндрнинг) ҳажми

$$V = C \cdot D$$

га тенг бўлади, бунда D — (D) соҳанинг ёзи.

Агар (D) соҳада $f(x, y)$ x ва y ўзга-рувчиларнинг ихтиёрий узлуксиз функ-цияси бўлса, у ҳолда (V) жисмнинг ҳаж-минини топиш учун, аввало (D) соҳани эгри



17-чизма

* Бу ерда ва келгусида ҳамма вақт функциянинг аниқланиш соҳаси (D) ни юзга келган соҳа деб ҳисоблаймиз.

чизиқлар билан n та бўлакка бўламиз: $(D) = \bigcup_{k=1}^n (D_k)$. Бўлувчи чизиқларни йўналтирувчи сифатида олиб Oz ўқига параллел цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Натижада (V) жисм n та (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлакларга ажралади. Сўнг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта оламиз. Бу (D_k) да $f(x, y)$ функцияни ўзгармас ва $f(\xi_k, \eta_k)$ га тенг десак, u ҳолда (V_k) бўлакнинг ҳажми тахминан

$$f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

бўлиб, (V) жисмнинг ҳажми эса тахминан

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

бўлади, бунда $D_k = (D_k)$ нинг юзи.

(V) жисмнинг ҳажмини ифодаловчи бу формула тақрибийдир. Чунки, $f(x, y)$ ни ҳар бир (D_k) да ўзгармас $f(\xi_k, \eta_k)$ деб ҳисобладик: $f(x, y) = f(\xi_k, \eta_k)$, агар $(x, y) \in (D_k)$ бўлса.

Энди (D) соҳани бўлакларга бўлиниш сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлакнинг диаметри нолга интила борсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

қиймат изланаётган (V) жисмнинг ҳажмини тобора аниқроқ ифодалай боради деб ҳисоблаш табиийдир. Демак, масала юқоридаги йиғиндининг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндининг лимити икки каррали интеграл тушунчасига олиб келади.

2. Икки каррали интеграл таърифи. Икки каррали интегрални таърифлашдан аввал баъзи бир тушунчалар, жумладан (D) соҳанинг бўлиниши, функциянинг интеграл йиғиндиси тушунчалари билан танишамиз.

Бирор чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. (D) соҳанинг чегарасидаги ихтиёрий икки нуқтани бирлаштирувчи ва бутунлай шу соҳада ётувчи чизиқни (эгри чизиқни) l чизиқ деб атаймиз. Равшанки, бундай чизиқлар (D) соҳани бўлакларга ажратади.

Шунингдек, (D) соҳада бутунлай ётувчи ёпиқ чизиқни ҳам l чизиқ деб қараймиз. Бундай чизиқлар ҳам (D) соҳани бўлакларга ажратади. Бу соҳани бўлакларга ажратувчи чекли сондаги l чизиқлар системаси $\{l: l \subset (D)\}$ (D) соҳанинг бўлиниши деб аталади ва $P = \{l: l \subset (D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлакларга ажратувчи ҳар бир l чизиқ P бўлинишининг бўлувчи чизиғи, (D) соҳанинг бўлағи эса P бўлинишининг бўлағи дейилади. P бўлиниш бўлақлари диаметрининг энг каттаси P бўлинишининг диаметри деб аталади ва у λ_P каби белгиланади.

Мисол: $(D) = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ бўлсин. Қуйидаги

$$x = x_i = \frac{i}{4} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$$y = y_k = \frac{k}{3} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Усуллар системаси (D) соҳанинг P_1 бўлиниши,

$$x = x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$y = y_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Усуллар системаси эса шу соҳанинг бошқа P_2 бўлиниши бўлади. Уларнинг диаметри

$$R_2 = \frac{5}{12}, \quad P_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ га тенг.}$$

Демак, (D) соҳа берилган ҳолда, бу соҳани турли усуллар билан бўлинишларини тузиш мумкин. Натижада (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами ҳосил бўлади. Уни $\mathcal{P} = \{P\}$ каби белгилайлик.

$f(x, y)$ функция (D) $\subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу соҳанинг $P \in \mathcal{P}$ бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагиди ихтиёрий (ξ_k, η_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k) нуқтадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни D_k ($D_k - (D_k)$ соҳанинг юзи) га кўпайтириб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n (\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

йиғиндиш тузамиз.

18.1-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k \quad (18.1)$$

йиғинди, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндисидеб аталади.

Мисол. 1. $f(x, y) = x \cdot y$ функциянинг (D) соҳадаги интеграл йиғиндисиди

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \eta_k \cdot D_k$$

бўлади, бунда

$$(\xi_k, \eta_k) \in (D_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Ушбу

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да } x - \text{рационал сон, } y - \text{рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да, } x \text{ ва } y \text{ ларнинг камида биттаси иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Функциянинг интеграл йиғиндисиди қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \Psi(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = \begin{cases} D, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ва } \eta_k \text{ лар рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ёки барча } \eta_k \text{ лар иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Юқорида келтирилган таърифдан кўринадики, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндисиди σ қаралаётган $f(x, y)$ функцияга, (D) соҳанинг бўлиниш усулига ҳамда ҳар бир (D_k) дан олинган ξ_k, η_k нуқталарга боғлиқ бўлади, яъни

$$\sigma_P = \sigma_P(f, \xi_k, \eta_k).$$

$f(x, y)$ функция чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу (D) соҳанинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (18.2)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндисини ту-
замиз.

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Натижада (D) соҳанинг (18.2) бўлинишларига мос $f(x, y)$ функция интеграл йиғиндилари қийматларидан иборат қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k) нуқталарга боғлиқ.

18.2-таъриф. Агар (D) соҳанинг ҳар қандай (18.2) бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k) нуқталарини танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I га σ йиғиндининг limiti деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = I$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

18.3-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлакдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I га σ йиғиндининг limiti деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = I$$

каби белгиланади.

Энди $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралнинг таърифини келтирамиз.

18.4-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндис σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция дейилади.

Бу о йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки қаррали интеграл (Риман интеграл) дейилади ва у

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD$$

қайи белгиланади. Демак,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Биринчи пунктда келтирилган (V) жисмининг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки қаррали интегралдан иборат экан.

Мисол. 1. $f(x, y) = C = \text{const}$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки қаррали интегрални топамиз. Бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^n C \cdot D_k = C \cdot D$$

Чунки, $\lambda_P \rightarrow 0$ да $\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = C \cdot D$ бўлади. Демак,

$$\iint_{(D)} C \cdot dD = C \cdot D.$$

Хусусан, $f(x, y) = 1$ бўлганда

$$\iint_{(D)} dD = D \quad (18.3)$$

Бўлади.

2. Ушбу пунктда $\psi(x, y)$ функциянинг $(D) \subset R^2$ соҳада интеграл йиғиндисини қўйиб эдик. Унинг ифодаси ҳамда интеграл таърифидан бу функциянинг (D) соҳада интегралланувчи эмаслиги келиб чиқади.

18.1-эслатма. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланмаган бўлса, у шу соҳада интегралланмайди.

2-§. Дарбу йиғиндилари. Икки қаррали интегралнинг бошқача таърифи

1. Дарбу йиғиндилари. $f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада белгиланган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай ўзгаришмас m ва M сонлар мавжудки, $\forall (x, y) \in (D)$ да

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

бўлади. (D) соҳанинг бирор P бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагиди $f(x, y)$ функция чегараланган бўлиб, унинг аниқ чегаралари

$$m_k = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\}, M_k = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\}$$

мавжуд бўлади. Равшанки, $\forall (x, y) \in (D_k)$ учун

$$m_k \leq f(x, y) \leq M_k. \quad (18.4)$$

18.5-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k, S = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

йиғиндилар мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари деб аталади.

Бу таърифдан, Дарбу йиғиндиларининг $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишига боғлиқ эканлиги кўрилади:

$$S = S_P(f), \quad S = S_P(f).$$

Шунингдек, ҳар доим

$$s \leq S$$

бўлади.

Юқоридаги (18.4) тенгсизликдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\sum_{k=1}^n m_k D_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k \leq \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

Демак,

$$S_P(f) \leq \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) \leq S_P(f).$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ҳар доим унинг Дарбу йиғиндилари орасида бўлар экан.

Аниқ чегаранинг хоссасига кўра

$$m \leq m_k, \quad M_k \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

бўлади. Натижада ушбу

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k \geq m \sum_{k=1}^n D_k = mD,$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k D_k \leq M \sum_{k=1}^n D_k = M \cdot D$$

тенгсизликларга келамиз. Демак, $\forall P \in \mathcal{P}$ учун

$$m \cdot D \leq s \leq S \leq M \cdot D \quad (18.5)$$

бўлади. Бу эса Дарбу йиғиндиларининг чегараланганлигини билдиради.

2. Икки каррали интегралнинг бошқача таърифи. $f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами $\mathcal{P} = \{P\}$ нинг ҳар бир $P \in \mathcal{P}$ бўлинишига нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s_P(f)$, $S_P(f)$ ни тузиб

$$\{s_P(f)\}, \{S_P(f)\}$$

тўплamlарни қараймиз. Бу тўплamlар (18.5) га кўра чегараланган бўлади.

18.6-таъриф. $\{s_P(f)\}$ тўплamlнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги қуйи икки каррали интеграли (қуйи Риман интеграли) деб аталади ва у

$$I = \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади.

$\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада юқори икки каррали интегралли (юқори Риман интегралли) деб аталади ва у

$$\bar{I} = \overline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\underline{I} = \underline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD} = \sup \{s\}, \quad \bar{I} = \overline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD} = \inf \{S\}.$$

18.7-таъриф. Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи деб аталади, уларнинг умумий қиймати

$$I = \int \int_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD}$$

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги икки каррали интегралли (Риман интегралли) дейилади ва у

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD = \underline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD} = \overline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD}.$$

Агар

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD \neq \overline{\int \int_{(D)} f(x, y) dD}$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланмайди деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг икки каррали интегралига икки хил таъриф берилди. Бу таърифлар ўзаро эквивалент таърифлар. У 1-қисм, 9-бобдаги аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлигини исботланганидек кўрсатилади.

3-§. Икки қаррали интегралнинг мавжудлиги

$f(x, y)$ функциянинг $(D) \subset R^2$ соҳа бўйича икки каррали интегралли мавжудлиги масаласини қараймиз. Бунинг учун аввало (D) соҳанинг ҳамда Дарби йиғиндиларининг хоссаларини келтирамиз.

(D) соҳанинг бўлинишлари хоссалари 1-қисм, 9-бобда ўрганилган [10, 6] оралиқнинг бўлинишлари хоссалари кабидир. Уларни исботлаш зарари бир хил мулоҳаза асосида олиб борилишини эътиборга олиб, ҳунида у хоссаларни исботсиз келтиришни лозим топдик.

$f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари хоссалари ҳақидаги вазият ҳам худди шундайдир.

1. (D) соҳа бўлинишларининг хоссалари. Фараз қилайлик, $\mathcal{P} = \{P\}$ — (D) соҳа бўлинишларидан иборат тўплам бўлиб, $P_1 \in \mathcal{P}$ бўлсин.

Агар P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлувчи чизиғи P_2 бўлинишнинг ҳам бўлувчи чизиғи бўлса, P_2 бўлиниш P_1 ни эргаштиради деб аталади ва $P_1 \rightsquigarrow P_2$ каби белгиланади.

1°. Агар $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2 \in \mathcal{P}$, $P_3 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун $P_1 \rightsquigarrow P_2$, $P_2 \rightsquigarrow P_3$ бўлса, у ҳолда $P_1 \rightsquigarrow P_3$ бўлади.

2°. $\forall P_1 \in \mathcal{P}$, $\forall P_2 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун, шундай $P \in \mathcal{P}$ топиладики, $P_1 \rightsquigarrow P$, $P_2 \rightsquigarrow P$ бўлади.

2. Дарбу йиғиндиларининг хоссалари. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл ва Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$\sigma = \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

$$s = s_P(f) = \sum_{k=1}^n m_k D_k,$$

$$S = S_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

1°. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ нуқталарни ($k = 1, 2, \dots, n$) шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leq S_P(f) - \sigma_P(f) < \varepsilon,$$

шунингдек, $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқталарни яна шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leq \sigma_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлади.

Бу хосса Дарбу йиғиндилари $s_P(f)$, $S_P(f)$ лар интеграл йиғинди $\sigma_P(f)$ муайян бўлиниш учун мос равишда аниқ қуйи ҳамда аниқ юқори чегара бўлишини билдиради.

2°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг икки бўлинишлари бўлиб, $P_1 \rightsquigarrow P_2$ бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_2}(f), \quad S_{P_1}(f) \leq S_{P_2}(f)$$

бўлади.

Бу хосса (D) соҳанинг бўлинишдаги бўлақлар сони орта борганда уларга мос Дарбунинг қуйи йиғиндисининг камаймаслиги, юқори йиғиндисининг эса ошмаслигини билдиради.

3°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг ихтиёрий икки бўлинишлари бўлиб, $s_{P_1}(f)$, $S_{P_1}(f)$ ва $s_{P_2}(f)$, $S_{P_2}(f)$ лар $f(x, y)$ функциянинг шу бўлинишларга нисбатан Дарбу йиғиндилари бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_2}(f), \quad S_{P_1}(f) \leq S_{P_2}(f)$$

бўлади.

Бу хосса, (D) соҳанинг бўлинишларига нисбатан тузилган қуйи йиғиндилар тўплами $\{s_P(f)\}$ нинг ҳар бир элементи (юқори йиғиндилар

тўплами $\{S_p(f)\}$ нинг ҳар бир элементи) юқори йиғиндилар тўплами $\{S_p(f)\}$ нинг исталган элементидан (қуйи йиғиндилар тўплами $\{s_p(f)\}$ нинг исталган элементидан) катта (кичик) эмаслигини билдиради.

4°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\sup \{s_p(f)\} \leq \inf \{S_p(f)\}$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг қуйи икки каррали интегралли, унинг юқори икки каррали интегралдан катта эмаслигини билдиради:

$$\underline{I} \leq \bar{I}.$$

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган барча бўлинишлари учун

$$\begin{aligned} S_p(f) &< \bar{I} + \varepsilon \quad (0 \leq S_p(f) - \bar{I} < \varepsilon), \\ s_p(f) &> \underline{I} - \varepsilon \quad (0 \leq \underline{I} - s_p(f) < \varepsilon) \end{aligned} \quad (18.6)$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг юқори ҳамда қуйи интеграллари $\lambda_p \rightarrow 0$ да мос равишда Дарбунинг юқори ҳамда қуйи йиғиндиларининг лимити эканлигини билдиради:

$$\bar{I} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_p(f), \quad \underline{I} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} s_p(f).$$

3. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги. Энди икки каррали интегралнинг мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини (критерийсини) келтирамиз.

18.1-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \quad (18.7)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$I = \underline{I} = \bar{I}$$

бўлади, бунда

$$\underline{I} = \sup \{s_p(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_p(f)\}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун (18.6) муносабатларга кўра

$$S_p(f) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I} - s_p(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлиб, ундан

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

бўлсин. Қаралаётган $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланганлиги учун, унинг қуйи ҳамда юқори интеграллари

$$\underline{I} = \sup \{s_p(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_p(f)\}$$

мавжуд

$$\underline{I} \leq \bar{I}$$

бўлади. Равшанки,

$$s_p(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_p(f).$$

Бу муносабатдан

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_p(f) - s_p(f)$$

бўлишини топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ учун

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

бўлиб, ундан $\underline{I} = \bar{I}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) соҳадаги тебранишини ω_k билан белгиласак, у ҳолда

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) D_k = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k$$

бўлиб, теоремадаги (18.7) шарт ушбу

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon,$$

яъни

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

кўринишларни олади.

4-§. Интегралланувчи функциялар синфи

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум синф функцияларнинг интегралланувчан бўлишини кўрсатамиз.

18.2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёниқ $(D) \subset R^2$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада текис узлуксиз бўлади. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан (12-боб, 6-§), $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинганда, бу бўлинишнинг ҳар бир бўлагида функциянинг тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади. Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n D_k = \varepsilon \cdot D$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи. Теорема исбот бўлди.

Баъзи бир узиладиган функцияларнинг ҳам интегралланувчи бўлишини кўрсатишдан аввал ноль юзли чизиқ тушунчасини эслатиб, битта лемма исботлаймиз. R^2 текисликда бирор Γ чизиқ берилган бўлсин. Маълумки, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам, Γ чизиқни шундай кўпбурчак (Q) билан ўраш мумкин бўлсаки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда Γ — ноль юзли чизиқ деб аталар эди. Масалан, $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $y = f(x)$ функция тасвирлаган чизиқ ноль юзли чизиқ бўлади. Шунинг ҳам айтиши керакки, гарчанд юзаки қараганда ҳар қандай чизиқ ноль юзли бўлиб кўринса ҳам, аслида ундай эмас.

(D) соҳада ноль юзли Γ чизиқ берилган бўлсин.

18.1-лемма. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинганда бу бўлинишнинг Γ чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади.

Исбот. Шаргга кўра Γ — ноль юзли чизиқ. Демак, уни шундай (Q) кўпбурчак билан ўраш мумкинки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлади.

Γ чизиқ билан (Q) кўпбурчак чегараси умумий нуқтага эга эмас деб, Γ чизиқ нуқталари билан (Q) кўпбурчак чегараси нуқталари орасидаги масофани қарайлик. Бу нуқталар орасидаги масофа ўзининг энг кичик қийматига эришади. Биз уни $\delta > 0$ орқали белгилаймиз. Агар (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинса, равшанки, бу бўлинишнинг Γ чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари бутунлай (Q) кўпбурчакда жойлашади. Демак, бундай бўлаклар юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади. Лемма исбот бўлди.

18.3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги ноль юзли чизиқларида узилишига эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган бўлиб, у шу со-

ҳанинг фақат битта ноль юзли Γ чизигида ($\Gamma \subset (D)$) узилишга эга бўлиб қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, Γ чизикни юзи ε дан кичик бўлган (Q) кўпбурчак билан ўраймиз. Натижада (D) соҳа (Q) ва $(D) \setminus (Q)$ соҳаларга ажралади.

Шартга кўра, $f(x, y)$ функция $(D) \setminus (Q)$ да узлуксиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_1 > 0$ топиладики, диаметри $\lambda_{P_1} < \delta_1$ бўлган P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлагидagi $f(x, y)$ функциянинг тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади.

Юқоридаги лемманинг исбот жараёни кўрсатадики, шу $\varepsilon > 0$ га кўра, шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta_2$ бўлган бўлиниши олинса, бу бўлинишнинг (Q) кўпбурчак билан умумий нуқтага эга бўлган бўлақлар юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади.

Энди $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ деб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлинишини оламиз. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндиларини тузиб, қуйидаги

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k \quad (18.8)$$

айирмани қараймиз.

Бу (18.8) йиғиндининг (Q) кўпбурчакдан ташқарида жойлашган (D_k) бўлақларга мос ҳадларидан иборат йиғинди

$$\sum_k' \omega_k D_k$$

бўлсин.

(18.8) йиғиндининг қолган барча ҳадларидан ташкил топган йиғинди

$$\sum_k'' \omega_k D_k$$

бўлсин. Натижада (18.8) йиғинди икки қисмга ажралади:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k = \sum_k' \omega_k D_k + \sum_k'' \omega_k D_k. \quad (18.9)$$

$(D) \setminus (Q)$ соҳадаги бўлақларда $\omega_k < \varepsilon$ бўлганлигидан

$$\sum_k' \omega_k D_k < \varepsilon \sum_k' D_k \leq \varepsilon \cdot D \quad (18.10)$$

бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги тебранишини Ω билан белгиласак, у ҳолда

$$\sum_k'' \omega_k D_k \leq \Omega \sum_k'' D_k$$

бўлади. (Q) кўпбурчакда бутунлай жойлашган P бўлинишнинг бўлақлари юзларининг йиғиндиси ε дан кичик ҳамда (Q) кўпбурчак чегараси билан умумий нуқтага эга бўлган бўлақлар юзларининг йиғиндиси ҳам ε дан кичик бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sum_k^n D_k < 2\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_k^n \omega_k D_k < 2\Omega\varepsilon. \quad (18.11)$$

Натижада (18.9), (18.10) ва (18.11) муносабатлардан

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon D + 2\Omega\varepsilon = \varepsilon(D + 2\Omega)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0.$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи бўлишини билдиради.

$f(x, y)$ функция (D) соҳанинг чекли сондаги ноль юзли чизиқларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, унинг (D) да интегралланувчи бўлиши юқоридагидек исбот этилади. Теорема исбот бўлди.

5-§. Икки каррали интегралнинг хоссалари

Қуйида $f(x, y)$ функция икки каррали интегралнинг хоссаларини ўрганамиз.

Икки каррали интеграл ҳам аниқ интегралнинг хоссалари сингарин хоссаларга эга. Уларни асосан исботсиз келтирамыз.

1°. $f(x, y)$ функция (D) соҳага $((D) \subset R^2)$ интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг (D) соҳага тегишли бўлган ноль юзли L чизиқдаги $(L \subset (D))$ қийматларинигина (чегараланганлигини сақлаган ҳолда) ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dD = \int\int_{(D)} F(x, y) dD$$

бўлади.

Исбот. Равшанки, $\forall (x, y) \in (D) \setminus L$ учун

$$f(x, y) = F(x, y).$$

Шартга кўра L — ноль юзли чизиқ. Унда 18.1-леммага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши олинганда ҳам, бу бўлинишнинг L чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йиғиндисини ε дан кичик бўлади. Шу P бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ ва $F(x, y)$ функцияларнинг ушбу интеграл йиғиндиларини тузамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k,$$

$$\sigma_P(F) = \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

$\sigma_P(f)$ йиғиндини қуйидагича икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_k' f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k + \sum_k'' f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

бунда $\sum_k'$ йиғинди L чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган (D_k) бўлаклар бўйича олинган, $\sum_k''$ эса қолган барча ҳадлардан ташкил топган йиғинди.

Худди шунга ўхшаш

$$\sigma_P(F) = \sum_k' F(\xi_k, \eta_k) D_k + \sum_k'' F(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Агар $\forall (x, y) \in (D) \setminus L$ учун $f(x, y) = F(x, y)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F)| \leq \sum_k' |f(\xi_k, \eta_k) - F(\xi_k, \eta_k)| \cdot D_k \leq M \cdot \sum_k' D_k < M\epsilon$$

бўлиши келиб чиқади, бунда $M = \sup |f(x, y) - F(x, y)|$, $((x, y) \in (D) \setminus L)$. Демак,

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F)| < M\epsilon.$$

Кейинги тенгсизликда $\lambda_P \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} F(x, y) dD.$$

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа ноль юзли L чизиқ билан (D_1) ва (D_2) соҳаларга ажралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, функция (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча, яъни $f(x, y)$ функция (D_1) ва (D_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (D) соҳада ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D_1)} f(x, y) dD + \iint_{(D_2)} f(x, y) dD.$$

3°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c f(x, y)$ ($c = \text{const}$) ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint_{(D)} c \cdot f(x, y) dD = c \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

формула ўринли бўлади.

18.1- натижа. Агар $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу $c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y)$ ($c_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n$)

функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\int\int_{(D)} |c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y)| dD = \\ = c_1 \int\int_{(D)} f_1(x, y) dD + c_2 \int\int_{(D)} f_2(x, y) dD + \dots + c_n \int\int_{(D)} f_n(x, y) dD$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dD \geq 0$$

бўлади.

18.2-натижа. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун

$$f(x, y) \leq g(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dD \leq \int\int_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\int\int_{(D)} |f(x, y)| dD \leq \int\int_{(D)} |f(x, y)| dD$$

бўлади.

7°. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай m ва M ўзгармас сонлар ($m = \inf \{f(x, y); (x, y) \in (D)\}$, $M = \sup \{f(x, y); (x, y) \in (D)\}$) мавжудки, $\forall (x, y) \in (D)$ учун

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

бўлади.

18.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки,

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dD = \mu \cdot D$$

бўлади, бунда D — (D) соҳанинг юзи.

18.3-натижа. Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $(a, b) \in (D)$ нуқта топиладики,

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dD = f(a, b) \cdot D$$

бўлади.

18.5-теорема. Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз шиорасини ўзгартирмаса ва $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ нуқта топиладики,

$$\int\int_{(D)} f(x, y) g(x, y) dD = f(a, b) \int\int_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

8°. Интеграллаш соҳаси ўзгарувчи бўлган икки каррали интеграллар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функция, (D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар қандай (d) қисмида $((d) \subset (D))$ ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки, ушбу

$$\iint_{(d)} f(x, y) dD$$

интеграл (d) га боғлиқ бўлади.

(D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар бир (d) қисмига юқоридаги интегрални мос қўямиз:

$$\Phi : (d) \rightarrow \iint_{(d)} f(x, y) dD.$$

Натижада функция ҳосил бўлади. Одатда бу

$$\Phi((d)) = \iint_{(d)} f(x, y) dD$$

функция соҳанинг функцияси деб аталади.

(D) соҳада бирор (x_0, y_0) нуқтани олайлик. (d) эса шу нуқтани ўз ичига олган ва $(d) \subset (D)$ бўлган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг юзи d , диаметри эса λ бўлсин.

Агар $\lambda \rightarrow 0$ да $\frac{\Phi((d))}{d}$ нисбатнинг лимити $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi((d))}{d}$ мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи деб аталади.

Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи $f(x_0, y_0)$ га тенг бўлади.

6- §. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги $((D) \subset R^2)$ икки каррали интеграл тегишли интеграл йиғиндининг маълум маънодаги лимити сифатида таърифлани. Бу лимит тушунчаси мураккаб характерга эга бўлиб, уни шу таъриф бўйича ҳисоблаш ҳатто содда ҳолларда ҳам анча қийин бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчилиги маълум бўлса, унда биламизки, интеграл йиғинда (D) соҳанинг бўлиниш услуга ҳам, ҳар бир бўлакда олинган (ξ_k, η_k) нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \rightarrow 0$ да ягона $\iint_{(D)} f(x, y) dD$ сонга интилади. Натижада функ-

циянинг икки каррали интеграллини топиш учун бирорта бўлинишга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади. Бу ҳол (D) соҳанинг бўлинишини ҳамда (ξ_k, η_k) нуқталарни, интеграл йиғиндини ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имконини беради.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy \, dD$$

интегрални ҳисоблайлик. Бунда

$$(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Чунки, $f(x, y) = xy$ функция (D) да узлуксиз. Демак, бу функция (D) соҳада интегралланувчи.

(D) соҳани

$$(D_{ik}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \frac{k}{n} \leq y \leq \frac{k+1}{n}, \frac{i}{n} + \frac{k}{n} \leq 1 \right\}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1, k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

булакларга ажратиб, ҳар бир (D_{ik}) да $(\xi_i, \eta_k) = \left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)$ деб қараймиз.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_k) D_{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n-i}{n} \cdot \frac{1}{2n^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i)^2 = \frac{1}{2n^2} \left(\frac{n^2(n-1)n}{2} - 2n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Мажбури. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \frac{1}{24}$$

булиши келиб чиқади. Демак,

$$\iint_{(D)} xy \, dD = \frac{1}{24}$$

Умуман, кўп ҳолларда функцияларнинг каррали интегралларини таърифга кўра ҳисоблаш қийин бўлади. Шунинг учун каррали интегралларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган йўлларини топиш зарурияти туғилади.

Юқориди айтиб ўтганимиздек, $f(x, y)$ функциянинг каррали интеграл ва уни ҳисоблаш (D) соҳага боғлиқ.

Аввал, содда ҳолда, (D) соҳа тўғри тўртбурчак соҳадан иборат бўлган ҳолда функциянинг каррали интегралини ҳисоблаймиз.

18.6. теорема. $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин.

Агар $x(x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) \, dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. (D) соҳани

$$(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1}\} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1)$$

($a = x_0 < x_i < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_l < \dots < y_m = d$) бўлакларга ажратамиз. Бу бўлинишни P_{nm} деб белгилаймиз. Унинг диаметри

$$\lambda_{Pnm} = \max \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2} \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k).$$

Модомики, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи экан, у шу соҳада чегараланган бўлади. Бинобарин, $f(x, y)$ функция ҳар бир (D_{ik}) да чегараланган ва демак, у шу соҳада аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эга бўлади:

$$m_{ik} = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik}) \},$$

$$M_{ik} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik}) \},$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Равшанки, $\forall (x, y) \in (D_{ik})$ учун $m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}$, хусусан, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ учун ҳам $m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$ бўлади. Теореманинг шартидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik} dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik} dy,$$

яъни

$$m_{ik} \Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \Delta y_k, \quad \text{бунда } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Агар кейинги тенгсизликларни k нинг $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ қийматларида ёзиб, уларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy = I(\xi_i) \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k$$

($i = 0, 1, \dots, n-1$) бўлади.

Энди кейинги тенгсизликларни Δx_i ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) га қўпайтириб, сўнг ҳадлаб қўшамиз. Натижада

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i$$

бўлади.

Равнани, $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \cdot \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} D_{ik} = si$

$f(x, y)$ функция учун Дарбунинг қуйи йиғиндиси,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} D_{ik} = S$$

эса Дарбунинг юқори йиғиндисидир. Демак,

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S. \quad (18.12)$$

Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) да интегралланувчи. У ҳолда $\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0$ да

$$s \rightarrow \int \int_{(D)} f(x, y) dD, \quad S \rightarrow \int \int_{(D)} f(x, y) dD$$

бўлади.

(18.12) муносабатдан эса,

$$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

йиғиндининг лимитга эга бўлиши ва бу лимит

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD$$

га тенг бўлиши келиб чиқади:

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \int \int_{(D)} f(x, y) dD.$$

Агар

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b I(x) dx$$

ва

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

эъавлигини эътиборга олсак, унда

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлишини топамиз. Бу эса теоремани исботлайди.

18.7-теорема. $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $y(y \in [c, d])$ ҳарувиининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

интеграл ҳам мавжид бўлади ва

$$\int_{(D)} f(x, y) dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи юқоридаги теореманинг исботи кабилар.

18.6-теорема ва 18.7-теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

18.4-натижа. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x (x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_c^d f(x, y) dy$ интеграл мавжуд бўлса, $y (y \in [c, d])$ ўзгарувчининг

ҳар бир тайин қийматида $\int_a^b f(x, y) dx$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (18.13)$$

интеграллар ҳам мавжуд бўлади ва

$$\int_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади.

18.5-натижа. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва ўзлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{(D)} f(x, y) dD, \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд ва улар бир-бирга тенг бўлади.

(18.13) интеграллар, тузилишига кўра, икки аргументли функциядан аввал бир аргументи бўйича (иккинчи аргументини ўзгармас ҳисоблаб туриб), сўнг иккинчи аргументи бўйича олинган интеграллардир. Бундай интегралларни *такрорий интеграллар* деб аташ (такрорий лимитлар сингари) табиийдир.

Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда қаррали интегралларни ҳисоблаш такрорий интегралларни ҳисоблашга келтирилар экан. Такрорий интегрални ҳисоблаш эса иккита оддий (бир аргументли функциянинг интеграллини) Риман интеграллини кетма-кет ҳисоблаш демакдир.

18.2-эслатма. Юқорида келтирилган 18.6-теоремани исботлаш жараёнида кўрдикки, тўғри тўртбурчак (D) соҳа, томонлари мос равишда Δx_i , Δy_k бўлган тўғри тўртбурчак соҳалар (D_{i0}) ларга ажратилди. Равшанки, бу элементар соҳанинг юзи $D_{ik} = \Delta x_i \Delta y_0$ бўлади.

Аввел айтганимиздек, Δx ни dx га, Δy ни dy га алмаштириш мумкинлигини ҳамда $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ эканини эътиборга олиб, бундан ушбу интегрални ушбу

$$\iint_{(D)} f(x, y) \cdot dD$$

шаклида ёзиш ўрнига

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \left(\text{ёки} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \right)$$

ёки ҳам ёзиб кетаверамиз.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$$

интеграл ҳисоблансин, бунда $(D) = \{x, y\} \in R^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
Интеграл остидаги

$$f(x, y) = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

функция (D) соҳада узлуксиз. Унда қаралаётган икки каррали интеграл ҳам,

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx$$

интеграл ҳам мавжуд. 18.7-теоремага кўра

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right] dy$$

интеграл мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right] dy$$

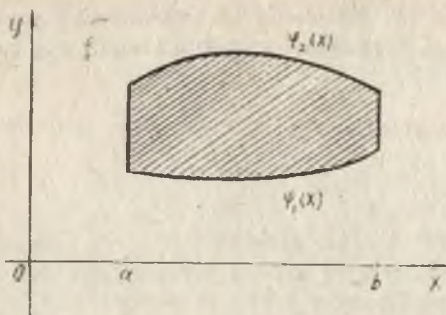
ёқини.

Агар

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} d(1+x^2+y^2) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \end{aligned}$$

ёқинини ҳисобга олсак, унда

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{x dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \right] dy = \\ &= \left[\ln(y + \sqrt{y^2+1}) - \ln(y + \sqrt{y^2+2}) \right]_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



18- чизма

18.8- теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар $x(x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир қийматида

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, y ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз. Вейерштрасс теоремасига кўра бу функциялар $[a, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Уларни

$$\min_{a \leq x \leq b} \varphi_1(x) = c, \quad \max_{a \leq x \leq b} \varphi_2(x) = d$$

деб белгилайлик.

Энди

$$(D_1) = \{ (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

соҳада ушбу

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) \in (D_1) \setminus (D) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Равшанки, теорема шартларида бу функция (D_1) соҳада ланувчи ва интеграл хоссасига кўра

$$\begin{aligned} \iint_{(D_1)} f^*(x, y) dD &= \iint_{(D)} f^*(x, y) dD + \iint_{(D_1) \setminus (D)} f^*(x, y) dD = \\ &= \iint_{(D)} f(x, y) dD \end{aligned}$$

(18.10)

Шунингдек, $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийма-

$$I_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд ва

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x, y) dy + \\ &+ \int_{\varphi_2(x)}^d f^*(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (18.15)$$

бўлади. Унда 18.6-теоремага кўра

$$\int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f^*(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

(18.14) ва (18.15) муносабатдан

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

шаклида бўлсин. Бунда $\psi_1(y)$ ва $\psi_2(y)$ $[c, d]$ да берилган узлуксиз функциялар (19-чизма).

18.9-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралданувчи бўлсин. Агар $y(y \in [c, d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, y ҳолда ушбу

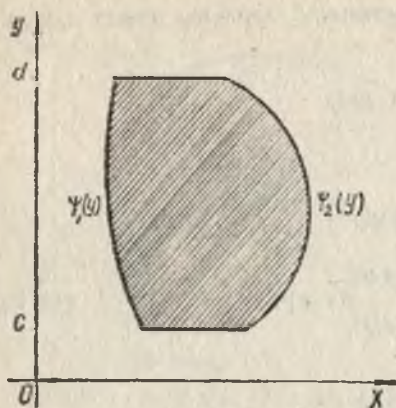
$$\int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

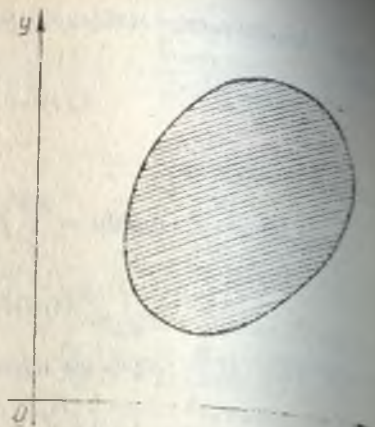
$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи 18.8-теореманинг исботи кабилар.



19- чизма



20- чизма

Фараз қилайлик, (D) соҳа $((D) \subset R^2)$ юқорида қаралган соҳаларнинг ҳар бирининг хусусиятига эга бўлсин (20- чизма).

18.6- натижа. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x (x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тийин қийматида

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, $y (y \in [c, d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тийин қийматида

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

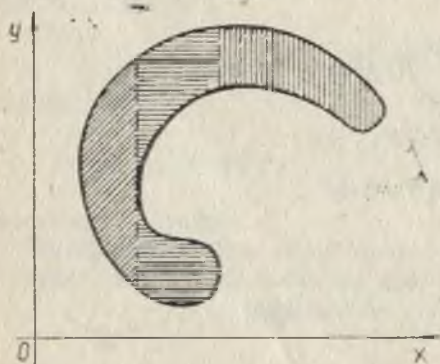
интеграллар ҳам мавжуд ва

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} f(x, y) dD &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \\ &= \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

бўлади.

Бу натижанинг исботи 18.8-теорема ва 18.9-теоремадан келиб чиқади.

Агар (D) соҳа 21-чизмада таърифланган соҳа бўлса, у ҳолда бу соҳа юқорида урганилган соҳалар кўринишига келадиган қи



21- чизма

қўйиб бўлакларга ажратилади. Натижада (D) соҳа бўйича икки каррали интеграл ажратилган соҳалар бўйича икки каррали интеграллар йигинтига тенг бўлади. Шундай қилиб, биз интеграллаш соҳаси (D) нинг кенг синфи учун каррали интегралларни такрорий интегралларга келтириб ҳисоблаш мумкинлигини кўраимиз.

Масаллар. 1. Ушбу

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$. Бу ҳолда 18.7-теореманинг барча шартлари бажарилади. Уша теоремага кўра

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{-y^2} dx \right] dy$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни ҳисоблаб қуйидагиларни топишимиз:

$$\int_0^y e^{-y^2} dx = y e^{-y^2}.$$

$$\int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} d(y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Демак,

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

2. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$. Бу ҳолда 18.6-теореманинг барча шартлари бажарилади. Унда

$$\iint_{(D)} xy dx dy = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{24}$$

бўлади.

3. Ушбу

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$. Бу ҳолда 18.6-теореманинг барча шартлари бажарилади. Уша теоремага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx$$

бўлади. Интегралларни ҳисоблаб топишимиз:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \sqrt{x+y}^3 \right)_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - \sqrt{x^2}) dx = \frac{2}{5}.$$

Демак,

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy = \frac{2}{5}.$$

Бу келтирилган мисолларда содда функцияларнинг содда соҳа бўйича икки каррали интеграллари қаралди. Кўп ҳолларда содда функцияларни мураккаб соҳа бўйича, мураккаб функцияларни содда соҳа бўйича ва айниқса, мураккаб функцияларни мураккаб соҳа бўйича икки каррали интегралларни ҳисоблашга тўғри келади. Бундай интегралларни ҳисоблаш эса анча қийин бўлади.

7-§. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

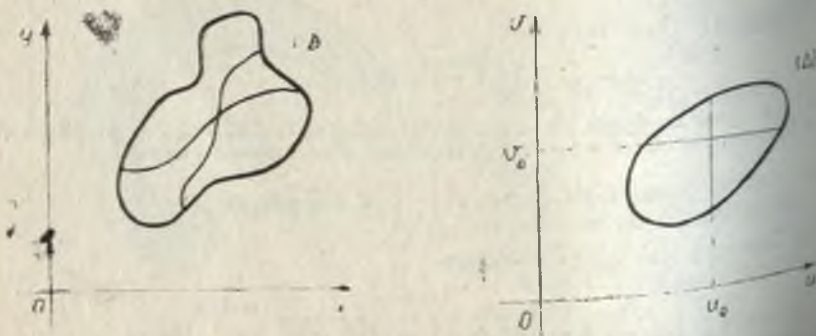
$f(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган бўлсин. Бу функциянинг икки каррали

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (18.16)$$

интегрални маъжудлиги маълум бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция ҳамда (D) соҳа мураккаб бўлса, (18.16) интегрални ҳисоблаш қийин бўлади. Кўпинча, x ва y ўзгарувчиларни, маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчиларга алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция ҳам, интеграллаш соҳаси ҳам соддалашиб, икки каррали интегрални ҳисоблаш осонлашади.

Ушбу параграфда икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш билан шуғулланамиз. Аввало текисликда соҳани соҳага акслантириш, эгри чизиқли координаталар ҳамда соҳанинг юзини эгри чизиқли координаталарда ифодаланишини келтирамиз.

Иккита текислик берилган бўлсин (22-чизма). Биринчи текисликда тўғри бурчакли Oxy координата системасини ва чегараланган (D) соҳани қарайлик. Бу соҳанинг чегараси $\partial(D)$ содда, бўлакли-салиқ чизиқдан иборат бўлсин. Иккинчи текисликда эса тўғри бурчакли Oxy



22-чизма

системасини ва чегараланган (Δ) соҳани қарайлик. Бу соҳа-
нинг чегараси $\partial(\Delta)$ ҳам содда, бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўл-
син.

$\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ лар (Δ) соҳада берилган шундай функциялар
бўлсинки, улардан тузилган $\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}$ система (Δ) соҳадаги
 (u, v) нуқтани (D) соҳадаги (x, y) нуқтага акслантирсин:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(u, v) &\rightarrow x, \\ \psi(u, v) &\rightarrow y. \end{aligned} \right\}$$

Ва бу акслантиришнинг аксларидан иборат $\{(x, y)\}$ тўплам (D) га те-
гишли бўлсин.
Демак, ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантиради.

Бу акслантириш қуйидаги шартларни бажарсин:
1°. (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш, яъни (Δ)
соҳанинг турли нуқталарини (D) соҳанинг турли нуқталарига акслан-
тириб, (D) соҳадаги ҳар бир нуқта учун (Δ) соҳада унга мос келади-
ган нуқта биттагина бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда (18.17) система u ва v ларга нисбаган бир
қийматли ечилади: $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$ ва ушбу

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1(x, y), \\ v &= \psi_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

система билан акслантириш юқоридаги акслантиришга тескари бўлиб
(D) соҳани (Δ) соҳага акслантиради. Демак,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) &= x, \\ \psi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) &= y. \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

2°. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ функциялар (Δ) соҳада, $\varphi_1(x, y)$ ва $\psi_1(x, y)$
функциялар (D) соҳада узлуксиз ва барча хусусий ҳосилаларга эга бў-
либ, бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз бўлсин.

3°. (18.17) системадаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларидан ту-
зилган ушбу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (18.20)$$

функционал детерминант (Δ) соҳада полдан фарқли (яъни (Δ) соҳанинг
ҳар бир нуқтасида полдан фарқли) бўлсин. Одатда (18.20) детерми-
нанти системанинг якобиани дейилади ва $I(u, v)$ ёки $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ каби бел-
килади.

Бу 2° ва 3° шартлардан, (Δ) боғламли соҳа бўлганда, (18.20) яко-
бианинг шу соҳада ўз ишорасини сақлаши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, $I(u, v)$ функция (Δ) соҳанинг иккита турли нуқта-
ларида турли ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда 12-бўлимнинг

5-§ идаги 12.13-теоремага кўра, (Δ) да шундай (u_0, v_0) нукта топилма-
дики, $I(u_0, v_0) = 0$ бўлади. Бу эса $I(u, v) \neq 0$ бўлишига зиддир.

3°-шартдан (18.18) системанинг якобиани, яъни ушбу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (18.21)$$

функционал детерминантнинг ҳам (D) соҳада нолдан фарқли бўлиши
келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (18.19) муносабатдан

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

бўлиб,

$$I_1(x, y) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, (D) боғламли соҳа бўлганда (18.21) якобиани ҳам (D) соҳа-
да ўз ишорасини сақлайди.

Юқоридаги шартлардан яна қуйидагилар келиб чиқади.

(18.17) акслантириш (Δ) соҳанинг ички нуктасини (D) соҳанинг
ички нуктасига акслантиради. Ҳақиқатан ҳам, ошкормас функциянинг
мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра (18.17) система (x_0, y_0) нукта-
нинг бирор атрофида u ва v ларни x ва y ўзгарувчиларнинг функция-
си сифатида аниқлайди: $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$. Бунда $\varphi_1(x_0, y_0) =$
 $= u_0$, $\psi_1(x_0, y_0) = v_0$ бўлади. Демак, (x_0, y_0) (D) соҳанинг ички нук-
таси. Бундан (18.17) акслантириш (Δ) соҳанинг чегараси $\partial(\Delta)$ ни (D)
соҳанинг чегараси $\partial(D)$ га акслантириши келиб чиқади.

Шунингдек, (18.17) акслантириш (Δ) соҳадаги силлиқ (бўлак-
силлиқ) эгри чизик

$$\left. \begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned} \right\} (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ни (D) соҳадаги силлиқ (бўлак-силлиқ) эгри чизик

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u(t), v(t)) \\ y &= \psi(u(t), v(t)) \end{aligned} \right\}$$

га акслантиради.

(Δ) соҳада $u = u_0$ тўғри чизиқни олайлик. (18.17) акслантириш бу тўғри чизиқни (D) соҳадаги

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u_0, v), \\ y &= \psi(u_0, v) \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

эгри чизиққа акслантиради. Худди шундай (Δ) соҳадаги $v = v_0$ тўғри чизиқни (18.17) акслантириш (D) соҳадаги

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v_0), \\ y &= \psi(u, v_0) \end{aligned} \right\} \quad (18.23)$$

эгри чизиққа акслантиради. Одатда, (18.22) ва (18.23) эгри чизиқларни координат чизиқлари ((18.22) ни v координат чизиғи, (18.23) ни эса u координат чизиғи) деб аталади.

Модомики, (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш экан, унда (D) соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан ягона v — координат чизиғи (u нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизиқ), ягона u — координат чизиғи (v нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизиқ) ўтади. Демак, (D) соҳанинг шу (x, y) нуқтаси юқорида айтилган u ва v лар билан, яъни (Δ) соҳанинг (u, v) нуқтаси билан тўла аниқланади. Шунинг учун u ва v ларни (D) соҳа нуқталарининг координатлари деб қараш мумкин. (D) соҳа нуқталарининг бундай координатлари эгри чизиқли координаталар деб аталади.

Шундай қилиб, u ва v лар бир томондан (Δ) соҳа нуқтасининг Декарт координатлари, иккинчи томондан худди шу u ва v лар (D) соҳа нуқтасининг эгри чизиқли координатлари бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ x &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

системани қарайлик.

Бу система (Δ) = $\{(u, v) \in R^2 : 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ соҳани Oxy текислигида акслантиради. Бу системанинг яkobини

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \\ \sin \varphi \quad \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

бўлади. ρ ва φ лар (D) соҳа нуқталарининг эгри чизиқли координатлари бўлиб, шу соҳанинг координат чизиқлари эса, маркази (0, 0) нуқтада, радиуси ρ га тенг ушбу

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

айланалардан (v — координат чизиқлари) ҳамда (0, 0) нуқтадан чиққан $\varphi = \rho_0$ ($0 \leq \rho_0 < 2\pi$) нурлардан (u — координат чизиқлар) иборатдир.

Фараз қилайлик, ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирсин. Бу акслантириш юқоридаги $1^\circ - 3^\circ$ шартларни бажарсин. У ҳолда, (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint_{(D)} |I(u, v)| du dv = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (18.24)$$

бўлади.

Бу формуланинг исботи кейинги бобда келтирилади (қarang, 19. боб, 3-§).

$f(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган ва шу соҳада улуксиз бўлсин. (D) эса содда, бўлакли-силлиқ чизиқ билан чегараланган соҳа бўлсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Айтайлик, ушбу

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирсин ва бу акслантириш юқоридаги 1° — 3° шартларни бажарсин.

Ҳар бир бўлувчи чизиғи бўлакли-силлиқ бўлган (Δ) соҳанинг P_Δ бўлинишини олайлик. (18.17) акслантириш натижасида (D) соҳанинг P_D бўлиниши ҳосил бўлади. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

ни тузамиз. Равшанки,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy. \quad (18.25)$$

Юқорида келтирилган (18.24) формулага кўра

$$D_k = \iint_{(D_k)} |I(u, v)| du dv$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$D_k = |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k \quad ((u_k^*, v_k^*) \in (\Delta_k)),$$

бунда Δ_k — (Δ_k) нинг юзи. Натижада (18.26) йиғинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$$

кўринишга келади.

(ξ_k, η_k) нуқтанинг (D_k) соҳадаги ихтиёрий нуқта эканлигидан фойдаланиб, уни

$$\begin{aligned} \varphi(u_k^*, v_k^*) &= \xi_k, \\ \psi(u_k^*, v_k^*) &= \eta_k \end{aligned}$$

деб олиш мумкин. У ҳолда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*) |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$$

бўлади.

Раванлики,

$$f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |I(u, v)|$$

функция (Δ) соҳада узлуксиз. Демак, у шу соҳада интегралланувчи.

$$\lim_{\lambda_{PD} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{PD} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*)) |I(u_k^*, v_k^*)| \Delta_k = \\ = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv \quad (18.26)$$

таъли. $\lambda_{PD} \rightarrow 0$ да $\lambda_{PD} \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олиб, (18.25) ва (18.26) муносабатлардан

$$\iint_{(\Delta)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv \quad (18.27)$$

ёқлишини топамиз.

Бу икки каррали интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формула-тири.

У берилган (D) соҳа бўйича интегрални ҳисоблашни (Δ) соҳа бўйи-ча интегрални ҳисоблашга келтиради. Агарда (18.27) да ўнг томондаги интегрални ҳисоблаш енгил бўлса, бажарилган ўзгарувчиларни алмаш-тириш ўзини оқлайди.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

қисми $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган юқорн текисликдаги ярим доира.

Берилган интегралда ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$

Б. алмаштириш ушбу

$$(\Delta) = \{(\rho, \varphi) \in R^2 : 0 < \varphi < \pi, 0 < \rho < 1\}$$

түрлү бурчли (D) соҳага акслантиради ва у $1^\circ - 3^\circ$ -шартларни қаноатлантира-ди. Унда (18.27) формулага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \iint_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi$$

Мисол. Бунда якобиан $I(\rho, \varphi) = \rho$ бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интег-рални ҳисоблаб топамиз:

$$\iint_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^\pi d\varphi \right) \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \\ = \pi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (\pi - 2).$$

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \frac{\pi}{4} (\pi - 2)$$

8-§. Икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш

$f(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган ва шу соҳада тегралландуви, яъни

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

интеграл мавжуд бўлсин. Маълум кўринишга эга бўлган (D) соҳада учун бундай интегрални ҳисоблаш 6-§ да келтирилди. Равшанки, $f(x, y)$ функция мураккаб бўлса, шунингдек, интеграллан соҳаси мураккаб кўринишга эга бўлса, унда (18.28) интегрални ҳисоблаш анча қийин бўлади ва кўп ҳолларда бундай интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Ушбу параграфда (18.28) интегрални тақрибий ҳисоблашни амалга оширадиган содда формулалардан бирини келтирамыз.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $(D) = \{ (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$ тўғри тўртбурчакда берилган ва узлуксиз бўлсин. Унда 6-§ да келтирилган формулага кўра

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (18.29)$$

бўлади.

Энди

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad (x \in [a, b])$$

интегралга 1-қисм, 9-боб, 11-§ даги (9.52) формулани — тўғри тўртбурчаклар формуласини татбиқ этиб, ушбу

$$\int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (x \in [a, b]) \quad (18.30)$$

тақрибий формулани ҳосил қиламыз. Сўнг

$$\int_a^b f\left(x, y_{k+\frac{1}{2}}\right) dx$$

интегралга яна ўша (9.53) формулани қўллаб, қуйидаги

$$\int_a^b f\left(x, y_{k+\frac{1}{2}}\right) dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (18.31)$$

тақрибий формулага келамиз.

Натижада (18.29), (18.30) ва (18.31) муносабатлардан

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (18.32)$$

ёлини келиб чиқади.

Бу икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш формуласи, «тўғри тўртбурчаклар» формуласи деб аталади.

Шундай қилиб, «тўғри тўртбурчаклар» формуласида, икки каррали интеграл махсус тузилган йиғинди билан алмаштирилади. Бу йиғинди қуйидагича тузилади:

$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ — тўғри тўртбурчак nm та тенг $(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1}\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) тўғри тўртбурчакларга ажратилади. Бунда

$$x_i = a + i \frac{b-a}{m}, y_k = c + k \frac{d-c}{n}.$$

Ҳар бир (D_{ik}) нинг маркази бўлган $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) нуқтада $f(x, y)$ функциянинг қиймати $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ ҳисобланиб, уни шу (D_{ik}) нинг юзига кўпайтирилади. Сўнгра улар барча i ва k лар ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) бўйича йиғилади.

Одатда, ҳар бир тақрибий формуланинг хатолиги топилади ёки баҳоланади. Келтирилган (18.32) тақрибий формуланинг хатолигини ҳам ўрганиш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Уни тақрибий ҳисоблаймиз. (D) ни ушбу тўртта тенг бўлакка бўламиз:

$$(D_{00}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

$$(D_{01}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}.$$

$$(D_{10}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

$$(D_{11}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}.$$

Бу булакларнинг марказлари

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

нуқталарда

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$$

функциянинг қийматларини ҳисоблаб, (18.32) формулага кўра

$$\iint_{(D)} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy \approx 0,2761$$

бўлишини топамиз. Бу интегралнинг аниқ қиймати эса

$$\iint_{(D)} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2} \right] dy = \ln \frac{4}{3} = 0,287682 \dots$$

бўлади.

9-§. Икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқларини келтирамиз.

1. Жисмнинг ҳажми ва унинг икки каррали интеграл орқали ифодаланиши. R^3 фазода бирор чегараланган (V) жисмни қарайлик. Бу (V) жисмнинг ичига (A) кўпёқлар жойлашган, ўз навбатида (V) жисм эса (B) кўпёқлар ичида жойлашган бўлсин. (A) кўпёқлар ҳажмларини V_A билан, (B) кўпёқлар ҳажмларини V_B билан белгилайлик. Биз кўпёқларнинг ҳажмлари тушунчасини ва уни ҳисоблашнинг (худди текисликдаги кўпбурчакнинг юзи тушунчаси ва уни ҳисоблаш каби) биламиз деб оламиз. Натижада (V) жисмнинг ичида жойлашган кўпёқлар ҳажмларидан иборат $\{V_A\}$ тўплам, ичига (V) жисм жойлашган кўпёқлар ҳажмларидан иборат $\{V_B\}$ тўпламлар ҳосил бўлади. $\{V_A\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B\}$ тўплам қуйидан чегараланганлиги сабаб $\{V_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{V_B\}$ тўплам эса аниқ қуйи чегарага эга бўлади:

$$\sup \{V_A\} = \underline{V}, \quad \inf \{V_B\} = \bar{V}.$$

Равшанки,

$$\underline{V} \leq \bar{V}.$$

18.8-таъриф. Агар $\underline{V} = \bar{V}$, яъни $\sup \{V_A\} = \inf \{V_B\}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (V) жисм ҳажмга эга деб аталади ва $V = \underline{V} = \bar{V}$ миқдор (V) жисмнинг ҳажми дейилади.

Демак,

$$V = \sup \{V_A\} = \inf \{V_B\}.$$

Энди (V) жисм сифатида юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томонларидан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт

пастдан Ox текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган жисмни

(D) ёпиқ соҳанинг P бўлинишини оламиз. $f(x, y)$ функция (D) да узлуксиз бўлганлиги сабабли, бу функция P бўлинишининг ҳар бир (D_k) бўлагига ҳам узлуксиз бўлиб, унда

$$\inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = m_k, \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = M_k$$

$k = 1, 2, \dots, n$ ларга эга бўлади.

Қуйидаги

$$V_A = \sum_{k=1}^n m_k D_k$$

$$V_B = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндиларнинг биринчиси (V) жисм ичига жойлашган кўпёқнинг ҳажмини, иккинчиси эса (V) жисмни ўз ичига олган кўпёқнинг ҳажмини ифодалайди.

Равшанки, бу кўпёқлар, демак, уларнинг ҳажмлари ҳам $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$V_A = V_A^P(f), V_B = V_B^P(f).$$

(D) соҳанинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан (V) жисмнинг ичига жойлашган ҳамда (V) жисмни ўз ичига олган турли кўпёқлар ясалади. Натижада бу кўпёқлар ҳажмларидан иборат қуйидаги

$$\{V_A^P(f)\}, \{V_B^P(f)\}$$

тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{V_A^P(f)\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B^P(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг чегаралари

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \inf \{V_B^P(f)\}$$

мажмуд. Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) ёпиқ соҳада узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{D}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши P учун ҳар бир (D_k) да функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{D}$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} &\leq V_B^P(f) - V_A^P(f) = \\ &= \sum_{k=1}^n M_k \cdot D_k - \sum_{k=1}^n m_k D_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) D_k < \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{D} \sum_{k=1}^n D_k = \frac{\varepsilon}{D} D = \varepsilon.$$

Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_D < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниш олинганда ҳам бу бўлинишга мос (V) жисмининг ичига жойлашган ҳамда бу (V) ни ўз ичига олган кўпёқ ҳажмлари учун ҳар доим

$$0 \leq \inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

$$\inf \{V_B^P(f)\} = \sup \{V_A^P(f)\} \quad (18.33)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик (V) жисм ҳажмга эга бўлиниши билдиради.

Энди юқорида ўрганилган $V_A^P(f)$, $V_B^P(f)$ йиғиндиларни Дарбу йиғиндилари билан таққослаб, $V_A^P(f)$ ҳам $V_B^P(f)$ йиғиндилар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари эканини топамиз. Шунинг учун ушбу

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \inf \{V_B^P(f)\}$$

миқдорлар $f(x, y)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бўлади, яъни

$$\sup \{V_A^P(f)\} = \iint_{(D)} f(x, y) dD, \inf \{V_B^P(f)\} = \overline{\iint_{(D)} f(x, y) dD}.$$

Юқоридаги (18.33) муносабатга кўра

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\iint_{(D)} f(x, y) dD}$$

тенглик ўринли экани кўрилади. Демак .

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\iint_{(D)} f(x, y) dD}.$$

Шундай қилиб, бир томондан, қаралаётган (V) жисм ҳажмга эга экани иккинчи томондан, унинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўлиниши икки каррали интегралига тенг экани исбот этилди. Демак, (V) жисмининг ҳажми учун ушбу

$$V = \iint_{(D)} f(x, y) dD \quad (18.34)$$

формула ўринли.

Мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

эллипсоиднинг ҳажми топилин. Бу эллипсоид $z = 0$ текисликка [нисбатан симметрикдир. Юқори қисмини ($z \geq 0$) ўраб турган сирт

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

бўлади.

Қўйиладиган (18.34) формулага кўра эллипсоиднинг ҳажми V :

$$V = 2c \iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

буанда

$$(D) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Интегралда

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \varphi \\ y = b \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (18.35)$$

қўйиштиришни бажарамиз. Бу системанинг якобиани

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -a \rho \sin \varphi & b \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab \rho$$

яъни, (18.35) система $(\Delta) = \{(\rho, \varphi) \in R^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ соҳани (D) соҳани акслантиради. (18.27) формулага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} ab \rho d\rho d\varphi$$

яъни. Демак,

$$\begin{aligned} V &= 2abc \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = 2abc \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= 4\pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, эллипсоиднинг ҳажми

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

буанда.

2. Ясси шаклнинг юзи. Ушбу бобнинг 1-§ ида (D) соҳанинг қуйидаги

$$D = \iint_{(D)} dD = \iint_{(D)} dx dy$$

интегралга тенг бўлишини кўрдик. Демак, икки қаррали интеграл ёрдамида ясси шаклнинг юзини ҳисоблаш мумкин экан.

Хусусан, соҳа

$$(D) \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

трапециядан иборат бўлса ($f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, u ҳолда

$$D = \iint_{(D)} dx dy = \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} dy \right] dx = \int_a^b f(x) dx$$

қилиб, 1-қисм, 10-боб, 2-§ да топилган формулага келамиз.

Мисол. Ушбу

$$x = \frac{y^2 + a^2}{2a}, \quad x = \frac{y^2 + b^2}{2b} \quad (0 < a < b)$$

чиқиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. Бу чиқиқлар параболадан иборат (23-чизма). Қуйидаги

$$\begin{cases} x - \frac{y^2 + a^2}{2a} = 0 \\ x - \frac{y^2 + b^2}{2b} = 0 \end{cases}$$

системани ечиб, параболаларнинг кесишган нуқталари

$$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) \text{ ва } \left(\frac{a+b}{2}, -\sqrt{ab} \right)$$

эканини топамиз. Қаралаётган шакл Ox ўқига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (D) нинг юзи

$$D = 2 \iint_{(D_1)} dx \, dy$$

бўлади, бунда

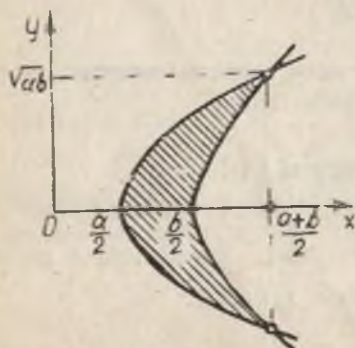
$$(D_1) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2 + a^2}{2a} \leq x \leq \frac{y^2 + b^2}{2b}, 0 \leq y \leq \sqrt{ab} \right\}.$$

Интегрални ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D_1)} dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} dx \right) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2+b^2}{2b} - \frac{y^2+a^2}{2a} \right) dy = \frac{1}{3} (b-a) \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Демак,

$$D = \iint_{(D)} dx \, dy = \frac{2}{3} (b-a) \sqrt{ab}.$$



23-чизма

§ 3. Сиртнинг юзи ва унинг икки қаррали интеграл орқали ифодаланиши. Икки қаррали интеграл ёрдамида сирт юзини ҳисоблаш мумкин. Аввало сиртнинг тупшунчасини келтирамыз.

Фараз қилайлик, $z = f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг графиги 17-чизмада тасвирланган (S) сиртдан иборат бўлсин.

(D) соҳанинг P бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари $(D_1), (D_2), \dots$

(D_k) бўлсин. Бу бўлинишнинг бўлувчи чизиқларини йўналтирувчилар сиртида қараб, улар орқали ясовчилари Oz ўқиға параллел бўлган цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Равшанки, бу цилиндрик сиртлар (S) сиртни $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ бўлакларга ажратади. Ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб, (S) сиртда унга мос нуқта (ξ_k, η_k, z_k) ($z_k = f(\xi_k, \eta_k)$) ни топамиз. Сўнг (S) сиртга шу (ξ_k, η_k, z_k) нуқтада уринма текислик ўтказамиз. Бу уринма текислик билан юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг кесишишидан ҳосил бўлган уринма текислик қисмини (T_k) билан, унинг юзини эса T_k билан белгилайлик.

Геометриядан маълумки, (D_k) соҳа (T_k) нинг ортогонал проекцияси бўлиб,

$$D_k = T_k |\cos \gamma_k| \quad (18.36)$$

бўлади, бунда γ_k — (S) сиртга (ξ_k, η_k, z_k) ($z_k = f(\xi_k, \eta_k)$) нуқтада ўтказилган уринма текислик нормалининг Oz ўқи билан ташкил этган бурчак.

Равшанки, $\lambda_P \rightarrow 0$ да (S_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) нинг диаметри ҳам нолга интилади.

Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да

$$\sum_{k=1}^n T_k$$

йиғинди чекли лимитга эга бўлса, бу лимит (S) сиртнинг юзи деб аталади. Демак, (S) сиртнинг юзи

$$S = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k \quad (18.27)$$

бўлади.

Юқорида қаралаётган $z = f(x, y)$ функция (D) соҳада $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (D) соҳада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)}}$$

бўлади.

(18.36) муносабатдан

$$T_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} D_k. \quad (18.38)$$

Теңгликнинг ўнг томонидаги йиғинди

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$$

функциянинг интеграл йиғиндисидир (қаранг, 1-§). Бу функция (D) ҳада узлуксиз, демак, интегралланувчи. Шунинг учун

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot D_k = \\ = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} \, dD$$

бўлади.

Шундай қилиб, (18.37) ва (18.38) муносабатлардан

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} \, dD \quad (18.39)$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Асосининг радиуси r , баландлиги h бўлган доиравий конуснинг ён сирти топилсин.

Бундай конус сиртининг тенгламаси

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади. Юқоридаги (18.39) формулага кўра

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy$$

бўлади, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Энди

$$z'_x = \frac{h}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{h}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ва

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{r^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}$$

эканини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \, dx \, dy = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \iint_{(D)} dx \, dy = \\ = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \pi r^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

10- §. Уч каррали интеграл

Юқорида Риман интеграли тушунчасининг икки ўзгарувчи функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни батафсил ўргандик. Худди шунга ўхшаш бу тушунча уч ўзгарувчи функция учун киритилади. Уни ўрганишда Риман интеграли ҳамда икки каррали интеграл

интегрални юритилган барча мулоҳазалар (интеграллаш соҳасининг бўли-
ни олиш, бўлакларда ихтиёрий нуқта танлаб олиб, интеграл йи-
гиндиси тузиш, тегишлича лимитга ўтиш ва ҳоказо) қайтарилади. Шунини
эътиборга олиб, қуйида уч каррали интеграл ҳақидаги фактларни кел-
тириш билан чегараланамиз.

1. Σ каррали интеграл таърифи. $f(x, y, z)$ функция R^3
ҳақидаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. (Бу ерда ва кел-
гилари ҳамма вақт функциянинг берилиш соҳаси (V) ни ҳажмга эга
деб қараймиз.) (V) соҳанинг P бўлинишини ва бу бўлиниш-
нинг ҳар бир (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагиди ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқ-
таси олайлик. Сўнг қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

ини тузамиз, бунда $V_k = (V_k)$ нинг ҳажми.

Бу йиғинди $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ёки P -
йиғиндиси деб аталади.

Энди (V) соҳанинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (18.40)$$

йиғинишларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бў-
линишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндисини ту-
зиш:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k, ζ_k)
нуқталарга боғлиқ.

18.9-таъриф. Агар (V) нинг ҳар қандай (18.40) бўлинишлар кет-
ма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматла-
ри иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олини-
шга боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I
сон (V) йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k = I$$

белгиланади.

18.10-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл
йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (V) да ин-
тегралланувчи (Риман маъносиди интегралланувчи) функция дейила-
ди. Бу σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y, z)$ функциянинг (V)

бўйича уч каррали интегралли (Риман интегралли) дейилади ва у

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda, p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda, p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k.$$

$f(x, y, z)$ функция (V) да $((V) \subset R^3)$ берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин:

$$m \leq f(x, y, z) \leq M \quad (\forall (x, y, z) \in (V)).$$

(V) соҳанинг бўлинишлар тўплами $\{P\}$ нинг ҳар бир бўлинишига нисбатан $f(x, y, z)$ функциясининг Дарбу йигиндилари

$$s_p(f) = \sum_{k=1}^n m_k V_k, \quad S_p(f) = \sum_{k=1}^n M_k V_k$$

ни тузиб, ушбу

$$\{s_p(f)\}; \{S_p(f)\}$$

тўплamlарни қарайлик. Равшанки, бу тўплamlар чегараланган бўладн.

18.11-таъриф. $\{s_p(f)\}$ тўплamlнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y, z)$ функциянинг қуйи уч каррали интегралли деб аталади ва у

$$\underline{I} = \underline{\iiint_{(V)}} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади.

$\{S_p(f)\}$ тўплamlнинг аниқ қуйи чегараси $f(x, y, z)$ функциянинг юқори уч каррали интегралли деб аталади ва у

$$\overline{I} = \overline{\iiint_{(V)}} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади.

18.12-таъриф. Агар $f(x, y, z)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори уч каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи деб аталади ва уларнинг умумий қиймати

$$I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \overline{\iiint_{(V)}} f(x, y, z) dV$$

$f(x, y, z)$ функциянинг уч каррали интегралли (Риман интегралли) дейилади.

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \underline{\iiint_{(V)}} f(x, y, z) dV = \overline{\iiint_{(V)}} f(x, y, z) dV.$$

2. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги. $f(x, y, z)$ функция (V) $((V) \subset R^3)$ соҳада берилган бўлсин.

18.10-теорема. $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилиб, (V) соҳада диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан

$$S_P(V) - s_P(V) < \varepsilon$$

тотализмликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

3. Интегралланувчи функциялар синфи. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум функцияларнинг интегралланувчи бўлиши кўрсатилади.

18.11-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция чегараланган ёпиқ $(V) \subset R^3$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

18.12-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаг ноль ҳажмли сиртларида узилиш-га эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция (V) да интегралланувчи бўлади.

4. Уч каррали интегралнинг хоссалари. Уч каррали интеграллар ҳам ушбу бобнинг 5-§ ида келтирилган икки каррали интегралнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1°. $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада берилган бўлиб, (V) соҳа ноль ҳажмли (S) сирт билан (V_1) ва (V_2) соҳаларга ажратилган бўлсин. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, функция (V_1) ва (V_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча яъни $f(x, y, z)$ функция (V_1) ва (V_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (V) да ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V_1)} f(x, y, z) dV + \iiint_{(V_2)} f(x, y, z) dV$$

бўлади.

2°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z)$ ($c = \text{const}$) функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint_{(V)} c f(x, y, z) dV = c \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x, y, z)$ ва $g(x, y, z)$ функциялар (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint_{(V)} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \pm \iiint_{(V)} g(x, y, z) dV$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлиб, $f(x, y, z) \in (V)$ учун $f(x, y, z) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \geq 0$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y, z)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f(x, y, z)| dV$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \mu \cdot V$$

бўлади, бунда $V = (V)$ соҳанинг қисми.

7°. Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ (V) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $(a, b, c) \in (V)$ нукта топиладики,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(a, b, c) \cdot V$$

бўлади.

5. Уч каррали интегралларни ҳисоблаш. $f(x, y, z)$ функция $(V) = \{(x, y, z) \in (R^3): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\}$ соҳада (параллелепипедда) берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^l f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

Энди $(V) ((V) \subset R^3)$ соҳа—пастдан $z = \varphi_1(x, y)$, юқоридан $z = \varphi_2(x, y)$ сиртлар билан, ён томондан эса Oz ўқиға параллел цилиндрик сиртлар билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текислигидаги проекцияси эса (D) бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шундай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z = \varphi_1(x, y)$, $z = \varphi_2(x, y)$ функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

бўлади. Агар юқоридаги ҳолда $(D) = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

6. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштиришнинг 7-§ да келтирилган икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш кабидир. Шунинг ҳисобга олиниб, қуйидаги уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласини келтириб берилади.

$f(x, y, z)$ функция $(V) ((V) \subset R^3)$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин, (V) соҳа эса силлиқ ёки бўлакли-силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

Ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases}$$

система $(\Delta) ((\Delta) \subset R^3)$ соҳани (V) соҳага акслантирсин ва бу акслантириш 7-§ да келтирилган 1°—3° шартларни бажарсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J| du dv dw$$

бўлади, бунда

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

7. Уч каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Уч каррали интеграл ёрдамида R^3 фазодаги жисмнинг ҳажминин, жисмнинг массасини, инерция моментларини топиш мумкин.

19-Б О Б

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Юқоридаги бобда Риман интегрални тушунчасининг икки ўзгарувчилиги функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни ўргандик. Шунинг ҳам айтиш керакки, кўп ўзгарувчилиги функциялар учун интеграл тушунчаси турлича киритилиши мумкин. Биз қуйида келтирадиган эгри чизиқли интеграллар ҳам конкрет амалий масалалардан пайдо бўлган.

1-§. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар

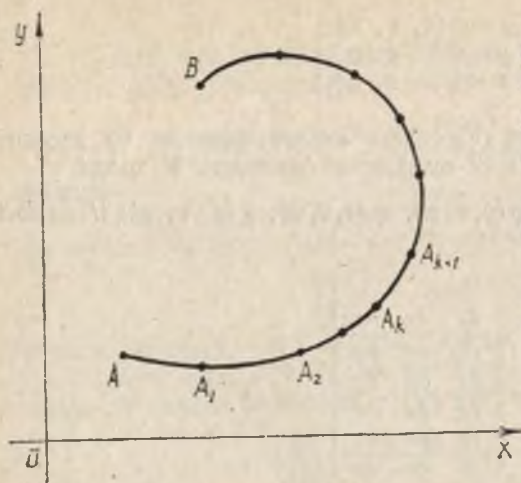
1. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл таърифи. Текисликда бирор соҳада AB^* ($A = (a_1, a_2) \in R^2$, $B = (b_1, b_2) \in R^2$) эгри чизиқни (ёйни) олайлик. Бу эгри чизиқда икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик (24-чизма).

* Айтилиши, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири (α, β) да берилган бўлсин. Бу функциялар (α, β) да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлиб, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ бўлсин.

Текисликдаги ушбу

$$L = \{(x, y) \in R^2: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (\alpha, \beta)\}$$

соҳада эгри чизиқ деб аталади. Соҳа эгри чизиқ узунлигига эга бўлади.



24-чизма

$\overline{AB}$ эгри чизиқни A дан B га қараб $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ ($A_k = (x_k, y_k) \in AB, k=0, 1, \dots, n$, $A_0 = (x_0, y_0) = (a_1, a_2), A_n = (x_n, y_n) = (b_1, b_2)$) нуқта-лар ёрдамида n та бўлақча бўламиз. Бу $A_0, A_1, \dots, A_n$ нуқталар системаси $\overline{AB}$ ёйининг бўлиниши деб ата-лади ва у

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

каби белгиланади $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёй (бўлиниш ёйлари) узун-ликлари Δs_k ($k=0, 1, \dots, n$)

$\dots, n$) нинг энг каттаси P бўлишнинг диаметри дейилади ва у λ_P билан белгиланади:

$$\lambda_P = \max_k \{\Delta s_k\}.$$

Равшанки, $\overline{AB}$ эгри чизиқни турли усуллар билан исталган сонда бў-линишларини тузиш мумкин.

$\overline{AB}$ эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу эгри чи-зиқнинг

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёйида ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}, k=0, 1, \dots, n$) нуқта оламиз. Берилган функ-циянинг $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Δs_k узунлигига кўпайтириб қуйидаги йигинднни тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k \quad (19.1)$$

Энди $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots, \quad (19.2)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг мос диаметрлари-дан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай бўлинишларга нисбатан

(19.1) каби йигиндиларни тузиб, ушбу

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқталарга боғлиқ.

19.1-таъриф. Агар AB эгри чизиқнинг ҳар қандай (19.2) кўриниш-даги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғин-лардан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нуқталарнинг танлаб оли-нишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу σ йиғиндининг лимити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = I \quad (19.3)$$

каби белгиланади.

(19.1) йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сони олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ то-пишсин, AB эгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бў-линиши учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

теңгезликни бажарса, I сон σ йиғиндининг $\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва (19.3) каби белгиланади.

(19.1) йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.3-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ йиғинди четли лимитга эга бўлса,

у ҳолда $f(x, y)$ функция AB эгри чизиқ бўйича интегралланувчи де-б бўлади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг эгри чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интегралли деб аталади ва у

$$\int_{AB} f(x, y) dS$$

каби белгиланади.

Шундай қилиб, киритилган эгри чизиқли интеграл тушунчасининг ўзига хослиги қаралаётган икки аргументли функциянинг берилиш со-ҳаси текисликдаги бирор AB эгри чизиқ эканлигидир. Қолган бошқа мувоҳазага (бўлинишларининг олинishi, бўлаклардан ихтиёрий нуқ-та танлаб интеграл йиғинди тузиш, тегишлича лимитга ўтиш) юқорида киритилган интеграл тушунчалари сингаридир.

2. У луксиз функция биринчи тур эгри чизиқли интегралли. Энди биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз. Юқо-рида келтирилган 19.3-таърифдан кўринадики, биринчи тур эгри чи-зиқли интеграл AB эгри чизиққа ҳамда унда берилган $f(x, y)$ функ-цияга боғлиқ бўлади. Демак, интегралнинг мавжуд бўлиши шартини AB эгри чизиқ ҳамда $f(x, y)$ функцияга қўйиладиган шартлар орқали топиш керак бўлади.

Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S)$$

(19.4)

система билан берилган бўлсин. Бунда s — $\overline{AQ}$ ёйининг узунлиги ($Q = (x, y) \in \overline{AB}$), S эса $\overline{AB}$ нинг узунлиги. $f(x, y)$ функция шу $\overline{AB}$ эгри чизикда берилган бўлсин. Модомики, $x = x(s)$, $y = y(s)$ ($0 \leq s \leq S$) экан, унда $(x, y) = f(x(s), y(s))$ бўлиб, натижада ушбу

$$f(x(s), y(s)) = F(s) \quad (0 \leq s \leq S)$$

мураккаб функцияга эга бўламиз.

$\overline{AB}$ эгри чизикнинг $P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ бўлинишини ва ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ да ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтани олайлик. Ҳар бир A_k нуқтага мос келадиган $\overline{AA_k}$ нинг узунлиги s_k , ҳар бир Q_k нуқтага мос келадиган $\overline{AQ_k}$ нинг узунлиги s_k^* дейлик. Равшанки, $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг узунлиги $s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$ бўлади.

Натижада P бўлинишга нисбатан тузилган

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

йиғинди ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(s_k^*), y(s_k^*)) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k$$

кўринишга келади. Демак,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k. \quad (19.5)$$

Бу йиғиндини $[0, S]$ оралиқдаги $F(s)$ функциянинг интеграл йиғиндиси (Риман йиғиндиси) эканлигини пайқаш қийин эмас (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§).

Агар $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ эгри чизикда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[0, S]$ да узлуксиз бўлади. Демак, бу ҳолда $F(s)$ функция $[0, S]$ да интегралланувчи:

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k = \int_0^S F(s) ds. \quad (19.6)$$

Шундай қилиб, (19.5), (19.6) муносабатлардан $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ йиғиндининг лимити мавжуд бўлиши ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \int_0^S F(s) ds$$

эканлигини топамиз. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

19.1-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ эгри чизикда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overline{AB}$ эгри чизик бўйича биринчи тур эгри чизикли интегралли мавжуд бўлади ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_0^s f(x(s), y(s)) ds$$

бўлади.

Бу теорема, бир томондан узлуксиз функция биринчи тур эгри чизикли интегралнинг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан бу интегралнинг аниқ интегралга (Риман интегралига) келишини кўрсатади.

19.1-эслатма. Эгри чизикли интеграл тушунчаси билан Риман интегралли тушунчасини солиштириб, уларнинг ҳар иккаласи йиғиндилнинг лимити сифатида таърифланишини кўрдик. Айни пайтда бу тушунчаларнинг фарқли томони ҳам бор. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k \quad (19.5)$$

йиғиндидаги Δs_k ҳар доим мусбат бўлиб, $\overline{AB}$ эгри чизикнинг йўналишига боғлиқ эмас. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{BA}} f(x, y) ds.$$

3. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг хоссалари. Юқорида кўрдикки, узлуксиз функцияларнинг биринчи тур эгри чизикли интеграллари Риман интегралларига келади. Бинобарин, эгри чизикли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Шунинг эътиборига олиб, эгри чизикли интегралларнинг асосий хоссаларини санаб ўтиш билан кифояланамиз.

(19.4) система билан аниқланган $\overline{AB}$ эгри чизикда $f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз.

1°. Агар $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{AC}} f(x, y) ds + \int_{\overline{CB}} f(x, y) ds$$

бўлади.

2°. Ушбу

$$\int_{\overline{AB}} c f(x, y) ds = c \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \quad (c = \text{const})$$

тенглик ўринли.

$\overline{AB}$ эгри чизикда $f(x, y)$ функция билан $g(x, y)$ функция ҳам берилган ва у узлуксиз бўлсин.

3°. Қуйидаги

$$\int_{\overline{AB}} |f(x, y) \pm g(x, y)| ds = \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \pm \int_{\overline{AB}} g(x, y) ds$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall (x, y) \in \overline{AB}$ да $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \geq 0$$

бўлади.

5°. $|f(x, y)|$ функция шу $\overline{AB}$ да интегралланувчи ва

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \right| \leq \int_{\overline{AB}} |f(x, y)| ds$$

бўлади.

6°. Шундай $(c_1, c_2) \in \overline{AB}$ нукта топиладики,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = f(c_1, c_2) \cdot S$$

бўлади, бунда $S = \overline{AB}$ нинг узунлиги.

6°. хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб аталади.

4. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар, асосан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади. Юқорида келтирилган 19.1-теоремага кўра $\overline{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S)$$

система билан берилганда (бунда s — ёй узунлиги) га $f(x, y)$ функция шу $\overline{AB}$ да узлуксиз бўлганда эгри чизиқли интеграл Риман интегралга келди. Демак, бу Риман интегралини ҳисоблаш натижасида эгри чизиқли интеграл топилади.

Энди $\overline{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (19.7)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t), \psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t), \psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар шу ораликда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$ ва $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

Равшанки, (19.7) система $[\alpha, \beta]$ оралиқни $\overline{AB}$ эгри чизиққа акс эттиради. Бунда $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ нинг $\overline{AB}$ чизиқдаги $A_\gamma A_\delta$ аксининг узунлиги

$$\int_{\gamma}^{\delta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

бўлади (қаралсин, 1-қисм, 10-боб, 1-§).

19.2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ да берилган ва узлуксиз
 ҳақиқат, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (19.8)$$

қилиниши. Исбот. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

қилинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нинг $\overline{AB}$ даги мос аксларини A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) дейлик.

Равшанки, бу A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нуқталар $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

қилинишини ҳосил қилади. Бунда $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

ва $A_k A_{k+1}$ нинг узунлиги

$$\Delta s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

бўлади. Ўрта қиймаг ҳадидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагини то-
 ламиз:

$$\Delta s_k = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot \Delta t_k,$$

бунда $t_k < \tau_k < t_{k+1}$. Энди $\varphi(\tau_k) = \xi_k$, $\psi(\tau_k) = \eta_k$ деб оламиз. Равшанки,
 $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) бўлади. $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг
 ҳақиқатда айтилган

$$\{A_1, A_1, \dots, A_n\}$$

қилинишини ва ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ да (ξ_k, η_k) нуқтани олиб,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

қилинишини тузамиз. Уни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k, \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k. \quad (19.8)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$
 функциянинг $[\alpha, \beta]$ оралиқдаги Риман йиғиндисидир.

Шартга кўра $f(x, y)$ ва $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ функциялар узлуксиз. Демак, мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $f(\varphi(t), \psi(t))$ ва демак, $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз. Демак, бу функция $[\alpha, \beta]$ да интегралланувчи бўлади. Яъни

$$\lim_{\max \{\Delta t_k\} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Модомики, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз экан, унда $\max \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$ да $\Delta x_k \rightarrow 0$, $\Delta y_k \rightarrow 0$ ва демак, $\Delta s_k \rightarrow 0$. Бундан эса $\lambda_P \rightarrow 0$ бўлиши келиб чиқади. (19.8) муносабатдан фойдаланиб

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

бўлишини топамиз. Бу эса

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

19.1-натижа. $\overline{AB}$ эгри чизик ушбу

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу $\overline{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (19.9)$$

бўлади.

19.2-натижа. $\overline{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$$

тенглама билан (қутб координата системасида) берилган бўлиб, $\rho(\theta)$ функция $[\theta_0, \theta_1]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу $\overline{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta \quad (19.10)$$

бўлади.

Бу натижаларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\overline{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

эгри чизикли интеграл ҳисоблансин, бунда $\overline{AB}$ — маркази координата бошида, радиуси $r > 0$ га тенг бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми.

Равшанки, бу $\overline{AB}$ эгри чизик қуйидаги

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

система билан аниқланади. $\overline{AB}$ да $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2}$ функция узлуксиз. Демак,

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^\pi \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} \cdot \sqrt{(r \cos t)'^2 + (r \sin t)'^2} dt = \\ &= r^2 \int_0^\pi dt = \pi r^2 \end{aligned}$$

Ҳудуд.

5. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг баъзи бир татбиқлари. Биринчи тур эгри чизикли интеграллар ёрдамида ёй узунлигини, жисмнинг массасини, оғирлик марказларини топиш мумкин. Қуйида биз биринчи тур эгри чизикли интеграллар ёрдамида ёй узунлиги қандай ҳисобланишини кўрсатамиз.

Текисликда содда AB эгри чизик берилган бўлсин. Бу чизикда $f(x, y) = 1$ функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $\overline{AB}$ да узлуксиз. $f(x, y)$ функциянинг биринчи тур эгри чизикли интеграли таърифидан қуйидагини топамиз:

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta s_k = S.$$

Демак,

$$S = \int_{\overline{AB}} ds. \quad (*)$$

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = x(t) = a \cos^3 t \\ y = y(t) = a \sin^3 t \end{cases}$$

система билан берилган $\overline{AB}$ чизикнинг узунлиги топилсин. Бу чизик астроида ифодалайди.

(*) формулага кўра астроиданинг узунлиги

$$S = \int_{\overline{AB}} ds$$

бўлади. Астроида координата ўқларига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олиб, юқорида келтирилган (19.8) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} ds &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{9a^2}{4} \sin^2 2t} dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

2- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар таърифи. Текисликда бирор содда AB эгри чизиқни қарайлик. Бу эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. AB эгри чизиқнинг

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ёйида ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтани ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) олайлик. Берилган функциянинг $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Ox (Oy) ўқдаги Δx_k (Δy_k) проекциясига кўпайтириб қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k \quad (\sigma'' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k). \quad (19.11)$$

Энди AB эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (19.12)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган мос

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин:

$$\lambda_{P_m} \rightarrow 0.$$

Бундай бўлинишларга нисбатан (19.11) каби йиғиндиларни тузиб ушбу

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m, \dots \quad (\sigma''_1, \sigma''_2, \dots, \sigma''_m, \dots)$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади, хусусан, (ξ_k, η_k) нуқталарга ҳам боғлиқ.

19.4- таъриф. Агар AB эгри чизиқнинг ҳар қандай (19.12) кўринишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma'_m\}$ ($\{\sigma''_m\}$) кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нуқталарнинг $((\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}})$ танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган равишда ҳамон

бул бигла I' сонга (I'' сонга) интилса, бу сон $\sigma'(\sigma'')$ йиғиндининг ли-
мити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n-1} (\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = I'$$

$$(\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k = I'') \quad (19.13)$$

каби белгиланади.

$\sigma'(\sigma'')$ йиғиндининг бу лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топил-

син, $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўли-

ғи учун тузилган $\sigma'(\sigma'')$ йиғинди учун ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқталарда

$(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}, k = 0, 1, \dots, n-1$

$$|\sigma' - I'| < \varepsilon \quad (|\sigma'' - I''| < \varepsilon)$$

шартсизлик бажарилса, I' сон (I'' сон) σ' йиғиндининг (σ'' йиғиндининг)

$\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва (19.13) каби белгиланади.

Йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.6-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ' йиғинди (σ'' йиғинди) чекли ли-

митга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ эгри чизиқ бўйича ин-

тегралланувчи дейилади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг $\overline{AB}$ эгри чи-

зиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интегралли деб аталади ва у

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx \quad \int_{\overline{AB}} f(x, y) dy$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$$

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k$$

Шундай қилиб, $\overline{AB}$ эгри чизиқда берилган $f(x, y)$ функциядан иккита

Ой ўқидаги проекциялар воситасида ва Oy ўқидаги проекциялар восита-

сида олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграл тушунчалари кири-

лади.

Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ эгри чизиқда иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функ-

циялар берилган бўлиб, $\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx, \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy$ лар эса уларнинг

иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари бўлсин. Ушбу

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

каби ёзилади. Демак,

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл таърифидан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

19.3-натижа. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл эгри чизиқнинг йўналишига боғлиқ бўлади.

Шуни исботлайлик.

Маълумки, $\overline{AB}$ эгри чизиқда иккита йўналиш (A нуқтадан B нуқтага ва B нуқтадан A нуқтага) олиш мумкин ($\overline{AB}$, $\overline{BA}$; $A \neq B$).

$\overline{AB}$ эгри чизиқнинг юқоридаги P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k).$$

Айтайлик, $\lambda_P \rightarrow 0$ да бу йиғинди чекли лимитга эга бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = \int_{AB} f(x, y) dx. \quad (19.14)$$

Энди $\overline{AB}$ нинг ўша P бўлинишини ҳамда ҳар бир $A_k A_{k+1}$ даги ўша (ξ_k, η_k) нуқталарни олиб, $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг йўналишини эса B дан A га қараб деб ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\overline{\sigma'} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}).$$

$\lambda_P \rightarrow 0$ да бу йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у таърифга биноан ушбу

$$\int_{BA} f(x, y) dx$$

интеграл бўлади:

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \overline{\sigma'} = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}) = \int_{BA} f(x, y) dx.$$

Агар

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}) = -\overline{\sigma'}$$

хатлигини эътиборга олсак, у ҳолда $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ' йиғиндининг чекли
 лимитга эга бўлишидан $\overline{\sigma'}$ йиғиндининг ҳам чекли лимитга эга бўлиши

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \overline{\sigma'} = - \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma'$$

теңгликнинг бажарилишини топамиз. Демак,

$$\int_{\overline{BA}} f(x, y) dx = - \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx.$$

Шундан шунга ўхшаш

$$\int_{\overline{BA}} f(x, y) dy = - \int_{\overline{AB}} f(x, y) dy$$

бўлади.

19.4- натижа. $\overline{AB}$ эгри чизиқ Ox ўқига (Oy ўқига) перпендику-
 ляр бўлган тўғри чизиқ кесмасидан иборат бўлсин. $f(x, y)$ функция шу
 чизиқда берилган бўлсин.

У ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx \left(\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy \right)$$

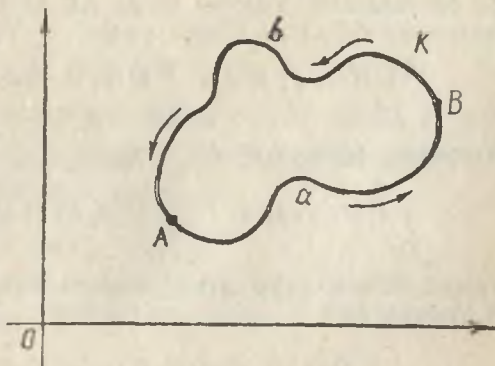
ноқадар бўлади ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = 0 \quad \left(\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = 0 \right).$$

Бу теңглик бевосита иккинчи тур эгри чизиқли интеграл таърифидан
 келиб чиқади.

Энди AB — содда ёпиқ эгри чизиқ бўлсин, яъни A ва B нуқталар
 устма-уст тушсин. Бу ёпиқ чизиқни K деб белгилайлик. Бу содда
 ёпиқ чизиқда ҳам икки йўналиш бўлади. Уларнинг бирини мусбат йў-
 налиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. Шундай
 йўналишнинг мусбат деб қабул қиламизки, кузатувчи ёпиқ чизиқ бўйлаб
 соғират қилганда, ёпиқ чизиқ
 билан чегараланган соҳа унга
 нисбатан ҳар доим чап томон-
 да ётсин.

Фараз қилайлик, K содда
 ёпиқ чизиқда $f(x, y)$ функция
 берилган бўлсин. Бу K чизиқ-
 да ихтиёрий иккита турли нуқ-
 таларни олиб, уларни A ва B
 билан белгилайлик. Натижада
 K ёпиқ чизиқ иккита AaB ва
 BbA чизиқларга ажралади (25-
 чизма).



25- чизма

Ушбу

$$\int_{\overline{AaB}} f(x, y) dx + \int_{\overline{BbA}} f(x, y) dx$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y)$ функциянинг K ёпиқ чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграл деб аталади ва

$$\int_K f(x, y) dx \text{ ёки } \int_K f(x, y) dx$$

каби белгиланади. Бунда K ёпиқ чизиқнинг мусбат йўналиши олинган. (Бундан буён ёпиқ чизиқ бўйича олинган интегралларда, ёпиқ чизиқ мусбат йўналишда деб қараймиз.) Демак,

$$\int_K f(x, y) dx = \int_{\overline{AaB}} f(x, y) dx + \int_{\overline{BbA}} f(x, y) dx.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int_K f(x, y) dy$$

ҳамда, умумий ҳолда

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

интеграллар таърифланади.

$\overline{AB}$ фазовий эгри чизиқ бўлиб, бу чизиқда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек, $f(x, y, z)$ функциянинг $\overline{AB}$ эгри чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари таърифланади ва улар

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y, z) dx, \int_{\overline{AB}} f(x, y, z) dy, \int_{\overline{AB}} f(x, y, z) dz$$

каби белгиланади. Умумий ҳолда $\overline{AB}$ да $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx, \int_{\overline{AB}} Q(x, y, z) dy, \int_{\overline{AB}} R(x, y, z) dz$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + \int_{\overline{AB}} Q(x, y, z) dy + \int_{\overline{AB}} R(x, y, z) dz$$

йигинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

кўри бeлгиланади. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + \int_{\overline{AB}} Q(x, y, z) dy + \int_{\overline{AB}} R(x, y, z) dz.$$

2. Узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизиqli интегралли. Энди иккинчи тур эгри чизиqli интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ эгри чизиqli ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (19.15)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила шу оралиқда узлуксиз, $\psi(t)$ функция ҳам $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$ ва $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ нуқта A дан B га қараб $\overline{AB}$ ни чиза борсин.

19.3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overline{AB}$ эгри чизиqli бўйича иккинчи тур эгри чизиqli интегралли

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

мавжуд ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

бўлади.

Исбот. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нинг $\overline{AB}$ даги мос аксларини A_k дейлик ($k = 0, 1, \dots, n$). Равшанки, бу A_k нуқталар $\overline{AB}$ эгри чизикнинг

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ҳосил қилади. Бундан $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$) бўлади. Бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$$

тузамиз. Кейинги тенгликда $\Delta x_k = \overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Ox ўқдаги проекцияси

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$$

га тенгдир.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\theta_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \varphi'(\theta_k) \cdot \Delta t_k \quad (\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]).$$

Маълумки, $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Агар бу (ξ_k, η_k) нуқтага аксланувчи нуқтани τ_k ($\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$) дейилса, унда

$$\xi_k = \varphi(\tau_k), \quad \eta_k = \psi(\tau_k)$$

бўлади. Натижада σ' йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi'(\theta_k) \cdot \Delta t_k.$$

Энди $\lambda'_p = \max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$ да (бу ҳолда λ_p ҳам нолга интилади) σ'

йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)] \cdot \Delta t_k. \quad (19.16)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчинини баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\tau_k)] \cdot \Delta t_k \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{n-1} |f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \Delta t_k \leq \\ & \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \Delta t_k, \end{aligned}$$

бунда

$$M = \max_{\alpha < t < \beta} |f(\varphi(t), \psi(t))|.$$

$\varphi(t)$ функция $[d, \beta]$ да узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилади, $[\alpha, \beta]$ орاليқнинг диаметри $\lambda'_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниш учун

$$|\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{M \cdot (\beta - \alpha)} \quad (\theta_k, \tau_k \in [t_k, t_{k+1}])$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)] \Delta t_k \right| & < M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)} \Delta t_k = \\ & = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)] \Delta t_k = 0$$

бу муносабатни эътиборга олиб, (19.16) тенгликда $\lambda_P \rightarrow 0$ да утиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' &= \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди (19.15) системада $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\mu(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ да $\psi'(t)$ ҳосилата эга ва бу ҳосила шу ораликда узлуксиз бўлсин.

19.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overline{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overline{AB}$ эгри чизиқ бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграл

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy$$

мавжуд ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

бўлади.

Бу теорема юқоридаги 19.3-теорема каби исботланади.

Бу теоремалар, бир томондан, узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл аниқ интеграл (Риман интеграл) орқали ифодаланиши кўрсатади.

$\overline{AB}$ эгри чизиқ (19.15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар узлуксиз бўлсин.

Агар $\overline{AB}$ эгри чизиқда иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб, улар шу чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + \\ &+ Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt \end{aligned}$$

бўлади.

3. Иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг хоссалари. Юқорида келтирилган теоремалар узлуксиз функцияларнинг иккинчи тур эгри чизикли интегралларини, бизга маълум бўлган аниқ интеграл — Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу эгри чизикли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Утган параграфда эса худди шундай мулоҳаза биринчи тур эгри чизикли интегралларга нисбатан бўлган эди. Шуларни эътиборга олиб, иккинчи тур эгри чизикли интегралларнинг хоссаларини келтиришни ва тегишли хулосалар чиқаришни ўқувчига ҳавола этамиз.

4. Иккинчи тур эгри чизикли интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалар функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интегралларининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан уларни ҳисоблаш йўлини кўрсатади. Демак, иккинчи тур эгри чизикли интеграллар ҳам, асосан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (19.17)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt, \quad (19.18)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \quad (19.19)$$

Хусусан, $\overline{AB}$ эгри чизик

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлса, (19.17), (19.19) формулалар қуйидаги

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx, \quad (19.20)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx$$

кўринишга келади.

Шунингдек, $\overline{AB}$ эгри чизик

$$x = x(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $x(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга ва узлуксиз бўлса, (19.18) ва (19.19) формулалар қуйидаги

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy, \quad (19.21)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d [P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)] dy \quad (19.22)$$

кўринишга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_{AB} y^2 dx + x^2 dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $\overline{AB} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсининг юқори ярим текисликдаги қисмидан иборат.

Эллипсининг параметрик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

$A = (a, 0)$ нуқтага параметр t нинг $t = 0$ қиймати, $B = (-a, 0)$ нуқтага эса $t = \pi$ қиймати мос келиб, t параметр 0 дан π гача ўзгарганда (x, y) нуқта A дан B га қараб эллипсининг юқори ярим текисликдаги қисмини чизиб чиқади. $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = x^2$ функциялар эса $\overline{AB}$ да узлуксиз. (19.9) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^\pi [b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t b \cos t] dt = \\ &= ab \int_0^\pi (a \cos^3 t - b \sin^3 t) dt = -\frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $\overline{AB}$ эгри чизик:

- (0,0) нуқтадан чиққан (0,0) ва (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси,
- (0,0) дан чиққан (0,0) ва (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи $y = x^3$ парабола-нинг ёйи,
- (0,0) нуқтадан чиққан (0,0), (1,0), (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи синик чизикдан иборат.

Юқоридаги (19.20), (19.21) ва (19.22) формулалардан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

а) ҳолда

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 [3x^2 x + (x^3 + 1)] dx = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2,$$

б) ҳолда

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 [3x^2 x^2 + (x^3 + 1) 2x] dx = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2,$$

в) ҳолда

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_{AC} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy + \int_{CB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy,$$

бунда $\overline{AC} - (0, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарни, $\overline{CB} - (1, 0)$ ва $(1, 1)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаларидан иборат.

Равшанки,

$$\int_{AC} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = 0, \quad \int_{CB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 2 dy = 2.$$

Демак,

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = 2.$$

3- §. Грин формуласи ва унинг татбиқлари

Маълумки, Ньютон — Лейбниц формуласи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган аниқ интегралини шу функция бошланғич функциясининг оралиқ чеккалари (чегаралари) даги қийматлари орқали ифодадалар эди.

Бирор (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган $f(x, y)$ узлуксиз функциянинг икки каррали

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

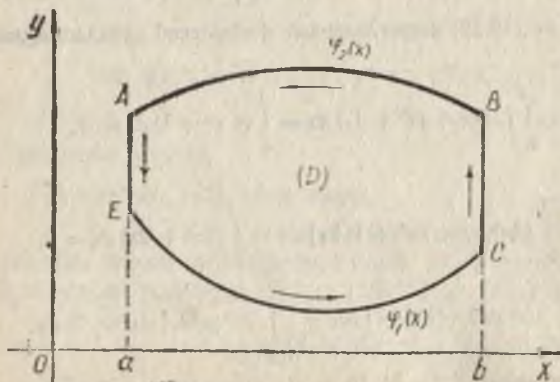
интегралини тегишли функциянинг шу соҳа чегарасидаги қийматлари орқали (аниқроғи, соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл орқали) ифодалайдиган формула ҳам мавжуд. Қуйида бу формулани келтирамиз.

1. Грин формуласи. Юқоридан $y = \varphi_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан $y_1 = \varphi_1(x)$ ($a \leq x \leq b$) функция графиги билан чегараланган соҳа-эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг чегараси — ёпик чизиқни $\partial(D)$ билан белгилайлик (26- чизма).

Равшанки, AB — $\varphi_2(x)$ функция графиги, EC — $\varphi_1(x)$ функция графиги ҳамда

$$\partial(D) = \overline{EC} + \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AE}.$$

$P(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$



26- чизма

хусусий ҳосилага эга ва у ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

интеграл мавжуд бўлади ва 18-бобнинг 6- § идаги формулага кўра

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx$$

бўлади. Энди

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))$$

булишини эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.$$

Ушбу бобнинг 2-§ идаги (19.20) формулага биноан

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx, \quad \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = \int_{\overline{EC}} P(x, y) dx$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx - \int_{\overline{EC}} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{\overline{BA}} P(x, y) dx - \int_{\overline{EC}} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\int_{\overline{CB}} P(x, y) dx = 0, \quad \int_{\overline{EA}} P(x, y) dx = 0.$$

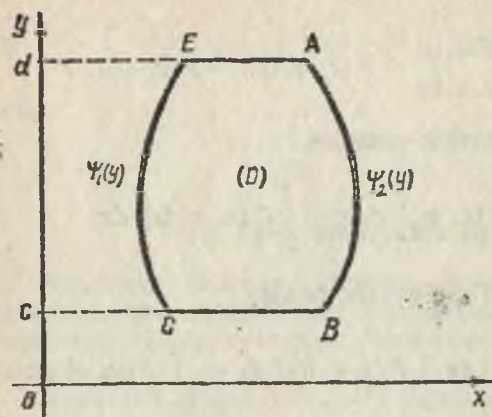
Бу тенгликларни ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \int_{\overline{EC}} P(x, y) dx - \int_{\overline{CB}} P(x, y) dy - \int_{\overline{BA}} P(x, y) dx - \\ &- \int_{\overline{AE}} P(x, y) dx = - \left(\int_{\overline{EC}} P(x, y) dx + \int_{\overline{CB}} P(x, y) dx + \int_{\overline{BA}} P(x, y) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\overline{AE}} P(x, y) dx \right) = - \int_{\partial(D)} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial(D)} P(x, y) dx. \quad (19.23)$$

Энди, юқоридан $y = c$, пастдан $y = d$ чизиқлар, ён томондан эса $x = \varphi_1(y)$, $y = \varphi_2(y)$ функциялар графиклари билан чегараланган соҳа — эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг



27- чизма

Энди R^2 фазода қараладиган (D) соҳа юқоридаги икки ҳолда қаралган соҳанинг ҳар бирининг характериға эға бўлган соҳа бўлсин, $\partial(D)$ эса унинг чегараси бўлсин. Бу (D) соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган, узлуксиз бўлиб, улар $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларға эға ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу ҳолда (19.23) ва (19.24) формулалар ўринли бўлади. Уларни ҳадлаб қўшиб ушбун топамиз:

$$\int_{\partial(D)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (19.25)$$

Бу Грин формуласи деб аталади.

Демак, Грин формуласи соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални шу соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизикли интеграл билан боғлайдиган формула экан.

Биз юқорида Грин формуласини махсус кўринишдаги (D) соҳалар (эгри чизикли трапециялар) учун келтирдик. Аслида бу формула аниқ кенг синфдеги соҳалар учун ҳам тўғри бўлиб, бу факт у соҳаларнинг чекли сондаги эгри чизикли трапециялар йиғиндиси сифатида тасвирлаш билан исбот қилинади.

2. Грин формуласининг баъзи бир татбиқлари. 1°. Шаклнинг юзини топиш. Грин формуласидан фойдаланиб, янги шаклнинг юзини содда функцияларнинг эгри чизикли интеграллари ёрдамида ҳисобланишини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (19.25) формулада $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$ дейилса, у ҳолда

$$\int_{\partial(D)} (-y) dx = \iint_{(D)} dx dy = D$$

бўлади. Демак,

$$D = - \int_{\partial(D)} y dx.$$

чегараси — ёпиқ чизикни $\partial(D)$ билан белгилайлик (27- чизма).

$Q(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган, узлуксиз бўлиб, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларға эға ва бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy &= \\ &= \int_{\partial(D)} Q(x, y) dy \end{aligned} \quad (19.24)$$

бўлади.

Бу формуланинг тўғрилиги юқоридагидек мулоҳаза юритиш билан исботланади.

Агар (19.25) формулада $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$ дейилса, у ҳолда

$$D = \int_{\partial(D)} x dy \quad (19.26)$$

бўлади.

(19.25) формулада $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ деб олинса, (D) соҳанинг юзи

$$D = \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx \quad (19.27)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

эллипс билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. (19.26) формулага кўра

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab \end{aligned}$$

бўлади.

2°. Икки каррали интегралларни ўзгарувчиларни алмаштириб ҳисоблаш. Мазкур курснинг 18- боб, 7- § ида (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирувчи

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (19.28)$$

система ўша параграфда келтирилган 1° — 3° шартларни бажарганда (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint_{(\Delta)} |I(u, v)| du dv = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (19.29)$$

айтилиши айтилган эди. Грин формуласидан фойдаланиб шу формуланинг тўғрилигини исботлаймиз.

Аввало (19.26) формуладан фойдаланиб, (D) соҳанинг юзи

$$D = \int_{\partial(D)} x dy \quad (19.30)$$

айтилиши топамиз. Фараз қилайлик, $\partial(\Delta)$ параметрик формада ушбу

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta \text{ ёки } \alpha \geq t \geq \beta)$$

система билан ифодалансин. У ҳолда қуйидаги

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = \varphi(u(t), v(t)), \\ y = \psi(u, v) = \psi(u(t), v(t)) \end{cases}$$

система (D) соҳанинг $\partial(D)$ чегарасини ифодалайди. Бунда параметрнинг ўзгариш чегарасини шундай танлаб оламизки, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқ мусбат йўналишда бўлсин. u ҳолда (19.30) тенглик ушбу

$$D = \int_{\partial(D)} x dy = \int_{\partial(D)} \varphi(u, v) d\psi(u, v) = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v} v'(t) \right] dt \quad (19.31)$$

кўринишга келади.

Агар

$$\int_{\partial(D)} \varphi(u, v) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right] = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v} v'(t) \right] dt \quad (19.32)$$

бўлишини эътиборга олсак, u ҳолда

$$D = \pm \int_{\partial(D)} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (19.33)$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдаги интеграл белгиси олдига қўйилган ишорани тушунтирамиз. Юқорида, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқни мусбат йўналишда бўлишини айтдик. Бу ҳолда $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг йўналиши мусбат ҳам бўлиши мумкин, маъний ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун (19.31) ва (19.32) муносабатлар бир-биридан ишора билан фарқ қилади. Агар $\partial(D)$ эгри чизиқнинг мусбат йўналишига $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг ҳам мусбат йўналиши мос келса, унда «+» ишора олинади, акс ҳолда эса «—» ишора олинади.

Энди ушбу

$$\int_{\partial(\Delta)} P(u, v) du + Q(u, v) dv = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right) du dv \quad (19.34)$$

Грин формуласида

$$P(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial v}$$

деб олсак, u ҳолда бу формула қуйидаги кўринишга келади:

$$\int_{\partial(\Delta)} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv = \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] du dv. \quad (19.35)$$

Агар

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

ва

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

этиборга олсак, унда (19.33), (19.34) ва (19.35) муносабатлар

$$D = \pm \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv$$

булиши келиб чиқади.
Маълумки,

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

аниқ ишорали, D эса маъносига кўра мусбат бўлиши керак. интеграл белгиси олдидаги ишора якобианнинг ишораси билан бир хил бўлиши керак. Шунинг учун

$$D = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{\partial Q(x, y)}{\partial D(u, v)} \right| du dv$$

бўлади. Шунини исботлаш лозим эди.

3. Эгри чизикли интеграл қийматининг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги. Чегараланган ёпиқ боғламли $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлсин. Бу функциялар (D) соҳада узлуксиз ва $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \frac{Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар ҳам шу соҳада узлуксиз бўлсин.

1) Агар (D) соҳада

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (19.36)$$

булса, у ҳолда (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизик бўйича олинган ушбу

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

интеграл нолга тенг бўлади:

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Исбот. K ёпиқ чизик чегараланган соҳани (G) дейлик. Равшанки, $(G) \subset (D)$. Грин формуласига кўра

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

бўлади. Шартга кўра (D) да, демак (G) да

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

у ҳолда (19.36) муносабатдан

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

2) Агар (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган ушбу интеграл

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\overline{AB} \subset (D)) \quad (19.37)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмайди, яъни (19.37) интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди.

Исбот. (D) соҳанинг A ва B нуқталарини бирлаштирувчи ва шу соҳага тегишли бўлган ихтиёрий иккита AaB ҳамда AbB эгри чизиқни олайлик. Бу ҳолда AaB ва AbB эгри чизиқлар биргаликда (D) соҳага тегишли бўлган ёпиқ чизиқни ташкил этади. Уни K билан белгилайлик:

$$K = AaBbA.$$

Шартга кўра

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AaBbA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

бўлади. Интегралнинг хоссасидан (фойдаланиб ушбунни топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{AaBbA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{AaB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \\ &+ \int_{BbA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AaB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \\ &- \int_{AbB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{AaB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{AbB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Бундан эса

$$\int_{AaB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AbB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

эканлиги келиб чиқади.

19.2-эслатма. Юқоридаги тасдиқ, исбот жараёнидан кўринадики, $\overline{AB}$ эгри чизиқ содда эгри чизиқлар тўпламидан ихтиёрий олинганлиги ўринлидир.

3) Агар ушбу

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\overline{AB} \subset (D)) \quad (19.37)$$

интеграл бўлмаса, A ва B нуқталарини бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ яъни интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(D) соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади.

Исбот. Модомики, (19.37) интеграллаш йўлига боғлиқ эмас экан, у ҳолда интеграл $A = (x_0, y_0)$ ва $B = (x_1, y_1)$ нуқталар билан бир қийматли аниқланади. Шунинг учун бу ҳолда (19.27) интеграл қуйидагича ҳам ёзилади:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Энди A нуқтани тайинлаб, B нуқта сифатида (D) соҳанинг ихтиёрий (x, y) нуқтасини олиб, ушбу

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

интегрални қараймиз. Равшанки, бу интеграл (x, y) га боғлиқ бўлади:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Бу функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз. (x, y) нуқтанинг x координатасига шундай Δx орттирма берайликки, $(x + \Delta x, y)$ нуқта га (x, y) , $(x + \Delta x, y)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси ҳам (D) соҳага тегишли бўлсин. Натижада $F(x, y)$ функция ҳам хусусий орттирмага эга бўлади:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y) - F(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \\ &- \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx. \end{aligned}$$

Ушбу қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx = P(x + \theta \cdot \Delta x, y) \Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

Натижада

$$\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta \cdot \Delta x, y)$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \cdot \Delta x, y) = P(x, y)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

бўлиши кўрсатилади.

Шундай қилиб,

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = dF(x, y)$$

бўлади.

4) Агар

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (19.38)$$

ифода (D) соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, (19.38) ифода (D) соҳада берилган $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлсин:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dF(x, y).$$

Равшанки,

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Қейинги тенгликлардан ушбунни топамиз:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Шартга кўра $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ лар (D) соҳада узлуксиз. Аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремага биноан (қаралсин, 13-боб, (6-§))

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Шундай қилиб, Грин формуласидан фойдаланган ҳолда, юқоридаги 1) — 4) тасдиқлар орасида

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$$

муносабат борлиги кўрсатилди.

1-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланиш

Ушбу параграфда биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланишни ифодаловчи формулаларни келтирамыз.

Текисликда содда силлиқ $\overline{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S)$$

система билан аниқланган бўлсин, бунда s — ёй узунлиги (қаралсин, ушбу бобнинг 1-§), $x(s)$ ва $y(s)$ функциялар $x'(s)$, $y'(s)$ ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар узлуксиз.

Равшанки, бу эгри чизик ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлади. Агар Ox ва Oy ўқлар билан уринманинг ёй ўсиши томонига қараб нуналиш орасидаги бурчак мос равишда α ва β дейилса, унда

$$x'(s) = \cos \alpha, \quad y'(s) = \cos \beta$$

бўлади.

Айтайлик, бу $\overline{AB}$ эгри чизикда $f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлади ва (19,17) формулага кўра

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot x'(s) ds$$

тенглик ўринли. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қуйидагича

$$\int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot x'(s) ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds$$

ёзиш мумкин. Ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган 19.1-теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \alpha ds.$$

Натижада юқоридаги тенгликлардан

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \alpha ds.$$

булиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, тегишли шартларда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \beta ds$$

ва умумий ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds$$

бўлади.

СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Мазкур курсинг 18-бобида $z = z(x, y)$ тенглама аниқлаган силлиқ (S) сирт билан танишган эдик. Бунда $z(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган, узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз функция эди. (S) сирт юзга эга бўлиб, унинг юзи

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} \, dx \, dy \quad (20.1)$$

га тенг эканлиги кўрсатилди.

Ушба бобнинг пировардида R^3 фазодаги (V) соҳада $((V) \subset R^3)$ берилган функциянинг уч каррали интеграл билан танишиб, уни ўргандик.

Энди R^3 фазодаги (S) сиртда берилган функциянинг интеграл тушунчаси билан танишамиз. Сирт интеграл тушунчасини киритишдан аввал, бу ерда ҳам функция берилиш соҳасининг бўлиниши, бўлиниш бўлаклари, бўлинишнинг диаметри тушунчалари киритилиши керак.

Бу тушунчалар $[a, b]$ оралиқнинг бўлиниши (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§) ва текисликдаги (D) соҳанинг бўлиниши (қаралсин, 18-боб, 1-§) даги каби киритилади ва ўхшаш хоссаларга эга бўлади. Шунинг учун бу ерда биз бу тушунчаларни киритилган ҳисоблаб бевосита баёнимизни сирт интегралнинг таърифидан бошлаб кетаверамиз.

1-§. Биринчи тур сирт интеграллари

1. Биринчи тур сирт интегралнинг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда $((S) \subset R^3)$ берилган бўлсин. Бу сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагиди ($k = 1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг S_k юзига кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k$$

20.1-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k \quad (20.2)$$

йиғинди $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндисига ёки Риман йиғиндисига деб аталади.

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (20.3)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$ Бундай $P_m (m = 1, 2, \dots)$ бў-
линишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини
қўямиз. Натижада (S) сиртнинг (20.3) бўлинишларига мос интеграл
йиғиндилар қийматларидан иборат қуйидаги кетма-кетлик ҳосил бўла-
ди

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

20.2-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.3) бўлинишлари
кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қий-
матларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб
олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интилса,
бу I σ йиғиндининг *лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k = I \quad (20.4)$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мум-
кин.

20.3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топил-
синки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши ҳам-
да ҳар бир (S_k) бўлакдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сони σ йиғиндининг *лимити* деб
аталади ва у (20.4) каби белгиланади.

20.4-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл
йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сирт
бўйича *интегралланувчи* (*Риман маъносида интегралланувчи*) функ-
ция деб аталади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функ-
циянинг *биринчи тур сирт интеграли* дейилади ва у

$$\left(\int \int_{(S)} f(x, y, z) ds \right)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\left(\int \int_{(S)} f(x, y, z) ds \right) = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k.$$

2. Узлуксиз функция биринчи тур сирт интеграли.
Энди биринчи тур сирт интегралининг мавжуд бўлишини таъминлайди-
ган шартни топиш билан шугулланамиз.

Фараз қилайлик R^3 фазодаги (S) сирт

$$z = z(x, y)$$

теглама билан берилган бўлсин. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегара-
ланган ёпиқ (D) соҳада $((D)) \subset R^2$ узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ ҳоси-
ларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.1-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интегралли

$$\int_{(S)} f(x, y, z) ds$$

мавжуд ва

$$\int_{(S)} f(x, y, z) ds = \int_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

бўлади.

Исбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлакларининг Oxy текисликтаги проекцияси (D) соҳанинг P_D бўлинишини ва унинг $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$ бўлакларини ҳосил қилади. P_S бўлинишга нисбатан (20.2) йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) S_k.$$

Маълумки, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (S_k)$. Бу нуқтага аксланувчи нуқта (ξ_k, η_k) бўлади. Демак, $\zeta_k = z(\xi_k, \eta_k)$. (20.1) формулага биноан

$$S_k = \int_{(D_k)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

бўлади.

Урта қиймат ҳақидаги теорема (қаралсин, 18-боб, 5-§) дан фойдаланиб топамиз:

$$S_k = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} D_k \quad ((\xi_k^*, \eta_k^*) \in (D_k)).$$

Натижада σ йиғинди қуйидаги

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) S_k = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} D_k \end{aligned}$$

кўринишга келади.

Энди $\lambda_{P_S} \rightarrow 0$ да (бу ҳолда $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ ҳам нолга интилади) σ йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб берамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k. \quad (20.5)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k \right| \leq \\ \leq M \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right| D_k,$$

бунда

$$M = \max |f(x, y, z)|.$$

Равшанки,

$$\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$

функция (D) да узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_{P_D} < \delta$ бўлган ҳар қандай P_D бўлиниши учун

$$\left| \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right| < \frac{\varepsilon}{M \cdot D}$$

бўлади. Унда

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k \right| < M \frac{\varepsilon}{MD} \sum_{k=1}^n D_k = \varepsilon$$

демак,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k = 0$$

бўлади.

(20.5) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k$$

эса

$$f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$

функциянинг интеграл йигиндисидир. Бу функция (D) соҳада узлуксиз. Демак, $\lambda_{PD} \rightarrow 0$ да интеграл йигинди чекли лимитга эга ва

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{PD} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k = \\ = \int_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

бўлади. Бу муносабатни эътиборга олиб, (20.5) тенгликда $\lambda_{PS} \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{PS} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{PS} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k = \\ = \int_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{(S)} f(x, y, z) ds = \int_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теорема, бир томондан, узлуксиз функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл икки каррали Риман интегралли орқали ифодаланишини кўрсатади.

20.1-эслатма. (S) сирт $x = x(y, z)$ ($y = y(z, x)$) тенглама билан аниқланган бўлиб, $x = x(y, z)$ функция ($y = y(z, x)$ функция) (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ узлуксиз ва $x'_y(y, z)$, $x'_z(y, z)$ хусусий ҳосилаларга ($y'_z(z, x)$, $y'_x(z, x)$ хусусий ҳосилаларга) эга ҳамда бу ҳосилалар (D) да узлуксиз бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шу (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг биринчи тур сирт интегралли

$$\int_{(S)} f(x, y, z) ds$$

мавжуд ва

$$\begin{aligned} \int_{(S)} f(x, y, z) ds &= \int_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} dy dz, \\ \left(\int_{(S)} f(x, y, z) ds = \int_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y_z'^2(z, x) + y_x'^2(z, x)} dz dx \right) \end{aligned}$$

бўлади.

20.2-эслатма. Биз $f(x, y, z)$ функция биринчи тур сирт интегралнинг мавжудлигини махсус кўринишдаги (S) сиртлар ($z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$) тенгламалар билан аниқланган сиртлар) учун келтирдик. Аслида функция интегралнинг мавжудлиги кенг синфдаги сиртлар учун тўғри бўлади. Жумладан, агар (S) сирт чекли сондаги сиртда айtilган сиртлар йиғиндиси сифатида тасвирланган бўлса, онда берилган ва узлуксиз бўлган $f(x, y, z)$ функциянинг сирт интеграл мавжуд бўлади ва у мос икки каррали интеграллар йиғиндисида бўлади.

3. Биринчи тур сирт интегралларининг хоссалари. Теорема келтирилган теорема узлуксиз функциялар биринчи тур сирт интегралларининг икки каррали Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу сирт интеграллар ҳам икки каррали Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Икки каррали Риман интегралларининг хоссалари 18-бобнинг 5-§ ида ўрганилган.

4. Биринчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теорема функция биринчи тур сирт интегралнинг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан, уни ҳисоблаш йўлини ҳам кўрсатади. Демак, биринчи тур сирт интеграллар икки каррали Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = \int\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy,$$

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = \int\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} dy dz,$$

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = \int\limits_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y_z'^2(z, x) + y_x'^2(z, x)} dz dx. \quad (20.6)$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$I = \int\limits_{(S)} (x + y + z) ds$$

интегрални қарайлик. Бунда (S) — $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $z = 0$ текислигининг ичарида жойлашган қисми.

Равшанин. (S) сирт

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

функция узлуксиздир. 20.1 теоремага кўра

$$I = \int\limits_{(D)} (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

бунда (D) = $\{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$z_x'(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y'(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Демак,

$$I = \iint_{(D)} (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + z'_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy = \\ = r \iint_{(D)} \left(\frac{x+y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy.$$

Кейинги интегралда Ҳэгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi.$$

Натижада

$$I = r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left[\frac{\rho (\cos \psi + \sin \psi)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + 1 \right] \rho d\rho \right) d\psi = r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{\rho (\cos \psi + \sin \psi)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\psi + \\ + r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho d\rho \right) d\psi = r \int_0^{2\pi} (\cos \psi + \sin \psi) d\psi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + r \cdot 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^3.$$

Демак, берилган интеграл

$$\iiint_{(S)} (x + y + z) ds = \pi r^3$$

булади.

3. Ушбу

$$\iiint_{(S)} x(y + z) ds$$

интегрални қарайлик, бунда $(S) - x = \sqrt{b^2 - y^2}$ цилиндрлик сиртнинг $z = 0, z = c$ ($c > 0$) текисликлар орасидаги қисми.

Модомики, бу (S) сирт $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ кўринишда берилган экан, унда интегрални ҳисоблаш учун (20.6) формуладан фойдаланиш лозимдир.

$$\iiint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'^2_y(y, z) + x'^2_z(y, z)} dy dz.$$

Бунда (D) соҳа (S) сиртнинг Oyz текисликдаги проекциясидан иборат:

$$(D) = \{(y, z) \in R^2: x = \sqrt{b^2 - y^2}, z = 0, z = c\} = \\ = \{(y, z) \in R^2: -b \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}.$$

$x = \sqrt{b^2 - y^2}$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$x'_y(y, z) = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad x'_z(y, z) = 0$$

булади. Демак,

$$\iint_{(S)} x(y + z) ds = \iint_{(D)} \sqrt{b^2 - y^2} (y + z) \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2 - y^2}} dy dz = \\ = b \iint_{(D)} (y + z) dy dz$$

булади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки қаррали интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$b \iint_{(D)} (y + z) dy dz = b \int_{-b}^b \left(\int_0^c (y + z) dz \right) dy = b \int_{-b}^b \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=c} dy = \\ = b \int_{-b}^b \left(cy + \frac{c^2}{2} \right) dy = \frac{bc}{2} y^2 \Big|_{-b}^b + \frac{bc^2}{2} y \Big|_{-b}^b = b^2 c^2.$$

$$\iint_{(S)} x(y+z) ds = b^2 c^2.$$

2-§. Иккинчи тур сирт интеграллари

Фазада $z = z(x, y)$ тенглама билан аниқланган (S) сиртни қа-
 тилик. Бунда $z(x, y)$ функция чегараси бўлакли-силлиқ чизиқдан ибо-
 бат бўлган (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган, узлуксиз, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$
 ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам узлуксиз. Одатда
 сиртнинг силлиқ сирт дейилади. Силлиқ сирт ҳар бир (x_0, y_0, z_0)
 нуктада уринма текисликка эга бўлади.

Энди (S) сиртда унинг чегараси билан кесишмайдиган K ёпиқ чи-
 зиқни отайлик. (x_0, y_0, z_0) нукта сиртнинг K ёпиқ чизиқ билан чег-
 араланган қисмига тегишли бўлсин. Бу чизиқни Oxy текислигига проек-
 ция қилаймиз. Натижада Oxy текисликда ҳам K_n ёпиқ чизиқ ҳосил бўла-
 ди.

Математик курснинг 19-боб, 2-§ ида текисликдаги ёпиқ чизиқнинг
 мусбат ва манфий йўналишлари киритилган эди. (S) сиртдаги ёпиқ чи-
 зиқнинг мусбат ва манфий йўналишлари ҳам шу сингари киритилади.
 Шунинг ҳам айтиш керакки, йўналишнинг мусбат ёки манфийлигини
 ҳаракатланаётган нуктага қай томондан қарашга ҳам боғлиқ.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуктасидаги уринма текисликка шу нуктада
 перпендикуляр ўтказайлик. Бу перпендикулярнинг мусбат йўналиши
 деб шундай йўналиш оламизки, унинг томонидан қаралганда иккала
 $(K$ ҳамда $K_n)$ ёпиқ чизиқларнинг йўналишлари мусбат бўлади. Унинг
 манфий йўналиши эса шундай йўналишки, у томондан қаралганда K_n
 нинг мусбат йўналишига K нинг манфий йўналиши мос келади. Пер-
 пендикулярнинг мусбат йўналиши бўйича олинган бирлик кесма сирт-
 нинг (x_0, y_0, z_0) нуктадаги нормали дейилади.

Нормалнинг Ox , Oy ва Oz ўқларининг мусбат йўналишлари билан
 ташкил қилган бурчакларини мос равишда λ , β , γ орқали белгиласак,

$$\cos \alpha = - \frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \quad \cos \beta = - \frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad (20.7)$$

булар ва улар нормалнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади (қа-
 тилик. Г. М. Фихтенгольц, «Математик анализ асослари», II қисм).

Ишоблаш мумкинки, силлиқ (S) сиртнинг барча нукталаридаги пер-
 пендикулярларнинг мусбат йўналишлари (нормаллари) бир хил бўлади.
 Яъни, демак, манфий йўналишлари ҳам. Шунга кўра, сиртнинг икки то-
 монидан ҳақиқатан тушунча киритилади.

Сиртнинг устки томони деб, унинг шундай томони олиндики, бу
 томондан қаралганда иккала $(K$ ва $K_n)$ ёпиқ чизиқларнинг йўналиш-
 лари мусбат бўлади.

Сиртнинг устки томони қаралганда K_n билан чегараланган текис шаклнинг юзи мусбат ишора билан, пастки томони (иккинчи томони) қаралганда манфий ишора билан олинади.

1. Иккинчи тур сирт интегралининг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томони олайлик. Сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагида ($k = 1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта ($k = 1, 2, \dots, n$) олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг Oxy текисликдаги проекцияси (D_k) нинг юзига кўпайтириб қуйидаги йигиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k. \quad (20.8)$$

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (20.9)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик полга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йигиндиларини тузамиз. Натижада (S) сиртнинг (20.9) бўлинишларига мос интеграл йигиндилар қийматларидан иборат қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

20.5-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.9) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йигинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I σ йигиндининг *лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k = I \quad (20.10)$$

каби белгиланади.

Интеграл йигиндининг *лимитини* қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

20.6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (S_k) бўлақдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сони σ йигиндининг *лимити* деб аталади ва у (20.10) каби белгиланади.

20.7-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йигиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сиртнинг танланган томони бўйича интегралланувчи функция деб аталади.

ди. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функциянинг (S) сиртнинг танланган томони бўйича иккинчи тур сирт интеграли деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k.$$

Функция иккинчи тур сирт интегралининг қуйидагича

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy \quad (20.11)$$

белгиланишидан, интеграл (S) сиртнинг қайси томони бўйича олинганлиги кўринмайди. Бинобарин, (20.11) интеграл туғрисида гап борганда, бу гал интеграл сиртнинг қайси томони бўйича олинаётганлиги айтиб кўрилади.

Равшанки, $f(x, y, z)$ функциянинг (S) сиртнинг бир томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли, функциянинг шу сиртнинг иккинчи томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интегралидан фақат ишораси билангина фарқ қилади.

Юқоридагидек,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

иккинчи тур сирт интеграллари таърифланади.

Шундай қилиб, сиртда берилган $f(x, y, z)$ функциядан унга — Oxy текисликдаги проекциялар, Oyz текисликдаги проекциялар ҳамда Ozx текисликдаги проекциялар воситасида олинган иккинчи тур сирт интегралли тушунчалари киритилади.

Умумий ҳолда, (S) сиртда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy, \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz + \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx$$

йиғинди иккинчи тур сирт интегралининг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx = \\ & = \iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz + \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx. \end{aligned}$$

Энди R^3 фазода бирор (V) жисм берилган бўлсин. Бу жисмни ўраб турган ёпиқ сирт силлиқ сирт бўлиб, уни (S) дейлик. $f(x, y, z)$ функция (V) да берилган. *Оху* текисликка параллел бўлган текислик билан (V) ни икки қисмга ажратамиз: $(V) = (V_1) + (V_2)$. Натижада уни ўраб турган (S) сирт ҳам (S_1) ва (S_2) сиртларга ажралади. Ушбу

$$\iint_{(S_1)} f(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y, z) dx dy \quad (20.12)$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y, z)$ функциянинг ёпиқ сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли деб аталади ва!

$$\oint\oint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади. Бунда (20.12) муносабатдаги биринчи интеграл (S_1) сиртнинг устки томони, иккинчи интеграл эса (S_2) сиртнинг пастки томони бўйича олинган. Худди шунга ўхшаш

$$\oint\oint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \oint\oint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

ҳамда, умумий қолда

$$\oint\oint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx$$

интеграллар таърифланади.

2. Узлуксиз функция иккинчи тур сирт интегрални. Фараз қилайлик, R^3 фазода (S) сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.2-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

бўлади.

Исбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлаklarининг *Оху* текисликдаги проекцияси (D) нинг P_D бўлинишини ва унинг $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$ бўлаklarини ҳосил қилади. P_S бўлинишга нисбатан ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \xi_k) \cdot D_k. \quad (20.3)$$

Агар (S) сиртнинг устки томони қаралаётган бўлса, у ҳолда барча D_k лар мусбат бўлади.

Модомики, $f(x, y, z)$ функция $z = z(x, y)$ сиртда берилган экан, у
 ы у ўзгарувчиларнинг қуйидаги функциясига айланади:

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)).$$

$$\xi_k = z(\xi_k, \eta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

келиб чиқади. Натижада (20.8) йигинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot D_k$$

нишга келади. Бу йигинди $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг интеграл
 диси (икки қаррали интеграл учун интеграл йигинди) эканини
 қаш қийин эмас. Агар $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг (D) да узлук-
 эканлигини эътиборга олсак, унда $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ да

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k$$

нигди чекли лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sigma &= \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \xi_k) \cdot D_k = \\ &= \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

нигди эса

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

нигди келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Агар (S) сиртнинг пастки томони қаралса, унда барча D_k лар ман-
 ғий бўлиб,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

лади.

Худди юқоридагидек, тегишли шартларда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(D)} f(x, y, z) dz dx$$

интеграллар мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{(S)} f(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) dz dx$$

лади.

20.1-натижа. Ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган (S) цилин-
 др сиртни қарайлик. $f(x, y, z)$ функция шу сиртда берилган бўлсин.

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

мавжуд бўлади ва у нолга тенг:

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dx dy = 0.$$

Худди шунга ўхшаш, тегишли шартларда

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dy dz = 0, \quad \int\limits_{(S)} f(x, y, z) dz dx = 0$$

бўлади.

Бу тенгликлар бевосита иккинчи тур сирт интеграллари таърифидан келиб чиқади.

Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб, иккинчи тур сирт интеграллари ҳам икки каррالي Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлишини кўрсатиш ва уларни келтириб чиқаришни ўқувчига ҳавола этамиз.

3. Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш мумкин. Унда иккинчи тур сирт интеграллари икки каррالي Риман интегралларига келтириб ҳисобланади:

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \int\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \int\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \int\limits_{(D)} f(x, y(z, x), z) dz dx.$$

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $(S) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг $z = 0$ текисликдан пастда жойлашган қисми бўлиб, интеграл шу сиртнинг пастки томони бўлиб олинган.

Равшанки, бу (S) сиртнинг тенгламаси қуйидагича бўлиб,

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

унинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

эллипсоиддан иборатдир.

(S) сирт ҳам, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz$$

функция ҳам 20.2-теореманинг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда

$$\int\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = - \int\limits_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy$$

Интеграл (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли тенглик-
томонидаги икки каррали интеграл олдиға минус ишораси қўйилди.

$$-\iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy =$$

$$= \iint_{(D)} \left(kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

Икки каррали интегрални ҳисоблаймиз. Икки каррали интегралда ўзгарувчиларни
 $x = a \rho \cos \varphi$, $y = b \rho \sin \varphi$
 қўйиб алмаштириб қуйидагини топамиз:

$$\iint_{(D)} \left(kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (kc \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2) ab \rho d\rho d\varphi =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (kc \rho \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^3) d\rho \right] d\varphi = 2\pi ab \left[-\frac{kc}{2} \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi ab \left(-\frac{1}{4} + \frac{kc}{3} \right).$$

Демак,

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = 2\pi ab \left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4} \right).$$

4. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари ораси-
даги боғланиш. Биз 19-бобнинг 4-§ да биринчи ва иккинчи тур
эгри қизикли интеграллар орасидаги боғланишни ифодаладиган фор-
мулаларни келтирган эдик.

Шунга ўхшаш, биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари ораси-
даги боғланишни ифодаловчи формулалар ҳам мавжуд.

(S) сирт ва унда берилган $f(x, y, z)$ ва $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$,
 $R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда (қарал-
син, 2-§ нинг 1-пункти) ушбу

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \alpha ds,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \beta ds, \quad (20.13)$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \gamma ds,$$

умумий ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iint_{(S)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds$$

формулалар ўринли бўлади.

Бу формулаларнинг тўғрилигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

3- §. Стокс формуласи

R^3 фазода $z = z(x, y)$ тенглама билан аниқланган силлиқ (S) сирт берилган бўлсин. Бу сиртнинг чегараси $\partial(S)$ бўлакли-силлиқ эгри чи-зиқ бўлсин. (S) сиртнинг Oxy текисликдаги проекциясини (D) дейлик. Унда $\partial(S)$ нинг проекцияси $\partial(D)$ дан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, (S) сиртда $P(x, y, z)$ функция берилган бўлиб, у узлуксиз бўлсин. Ундан ташқари бу функция (S) да

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx$$

эгри чизиқли интегрални қарайлик (унинг мавжудлиги равшан). Агар $\partial(S)$ чизиқнинг (S) сиртда ётишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = \int_{\partial(D)} P(x, y, z(x, y)) dx$$

бўлади.

Энди Грин формуласидан фойдаланиб ушбунини топамиз:

$$\int_{\partial(D)} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} dx dy.$$

Равшанки, $P(x, y, z(x, y))$ функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y)$$

бўлади.

Ушбу бобнинг 2-§ ндаги (20.7) муносабатлардан

$$z'_y(x, y) = - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

бўлишини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y) \right] dx dy = \\ = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dx dy \end{aligned}$$

бўлади.

Натижада қаралаётган интеграл учун қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = - \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dx dy. \quad (20.14)$$

2-§ даги 20.2-теоремадан фойдаланиб (20.14) тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални иккинчи тур сирт интегрални орқали ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dx dy = \\ = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи тур сирт интегрални, (20.13) формулага асосланиб, биринчи тур сирт интегралга келтирамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] \cdot dx dy = \\ = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] \cdot \cos \gamma ds = \quad (20.15) \\ = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma ds - \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta ds. \end{aligned}$$

Ва ниҳоят, яна (20.13) формулалардан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma ds = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy, \\ \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta ds = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dz dx. \quad (20.16) \end{aligned}$$

(20.14), (20.15) ва (20.16) муносабатлардан

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy \quad (20.17)$$

булиши келиб чиқади.

Худди шундай мулоҳаза асосида (S) сирт ва унда берилган Q(x, y, z), R(x, y, z) функциялар тегишли шартларни бажарганда ушбу

$$\int_{\partial(S)} Q(x, y, z) dy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} dy dz,$$

$$\int_{\partial(S)} R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} dz dx \quad (20.18)$$

формулаларнинг ўринли бўлиши кўрсатилади. (20.17) ва (20.18) формулаларни ҳадлаб қўшиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \right] dx dy + \left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} \right] dy dz + \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \right] dz dx. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Бу *Стокс формуласи* деб аталади.

20.2- натижа. Мазкур курснинг 19- боб, 3- § идаги Грин формуласи Стокс формуласининг хусусий ҳолидир. Ҳақиқатан ҳам, (20.19) Стокс формуласида (S) сирт сифатида Oxy текисликдаги (D) соҳа олинса, унда $z = 0$ бўлиб, (20.19) формуладан

$$\int_{\partial(D)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy$$

бўлиши келиб чиқади. Бу Грин формуласидир.

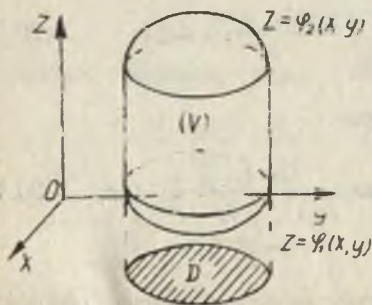
Шундай қилиб, Стокс формуласи (S) сирт бўйича олинган II тур сирт интегрални билан шу сиртнинг чегараси бўйича олинган эгри чизикли интегрални боғловчи формуладир.

4- §. Остроградский формуласи

R^3 фазода, пастдан $z = \varphi_1(x, y)$ теглама билан аниқланган силлиқ (S_1) сирт билан, юқоридан $z = \varphi_2(x, y)$ теглама ёрдамида аниқланган силлиқ (S_2) сирт билан, ён томондан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S_3) сирт билан чегараланган (V) соҳани (жисмни) қарайлик. Унинг Oxy текисликдаги проекцияси (D) бўлиб, бу (D) нинг чегараси юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси сифатида олинади (28- чизма)

$$(\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in (D)).$$

Фараз қилайлик, (V) да $R(x, y, z)$ функция берилган ва узлуксиз бўл-



28- чизма

Бундан ташқари бу функция шу соҳада

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

хосилага эга ва бу ҳосила ҳам узлуксиз.
Равшанки, бу ҳолда

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

буладди ва 18-бобнинг 10-§ ида келтирилган формулага кўра

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \int_{(D)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy \quad (20.20)$$

буладди.
Агар

$$\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))$$

булишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy &= \int_{(D)} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \\ &- \int_{(D)} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (20.21)$$

буладди. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки қаррали интегралларни,
2-§ даги формулалардан фойдаланиб, сирт интеграллари орқали ёзамиз:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy &= \int_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy, \\ \int_{(D)} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy &= \int_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Келтирилган тенгликлардаги сирт интеграллари сиртнинг устки томони
бўйича олинган. (20.20), (20.21) ва (20.22) муносабатлардан қуйидаги-
ни топамиз:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \int_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \int_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интеграл (S_1) сиртнинг паст-
ки томони бўйича олинган.

(S_3) сирт ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт бўлганлигидан

$$\int_{(S_1)} \int R(x, y, z) dx dy = 0 \quad (20.24)$$

бўлади. (20.23) ва (20.24) муносабатлардан

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \int \int \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \int_{(S_1)} \int R(x, y, z) dx dy + \int_{(S_2)} \int R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \int_{(S_3)} \int R(x, y, z) dx dy = \oint_{(S)} \int R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бунда $(S) = (V)$ жисми ўраб турувчи сирт. Демак,

$$\int_{(V)} \int \int \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \oint_{(S)} \int R(x, y, z) dx dy. \quad (20.25)$$

Худди шу йўл билан, (V) ҳамда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ лар тегишли шартларни қаноатлантирганда қуйидаги

$$\int_{(V)} \int \int \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \oint_{(S)} \int P(x, y, z) dy dz, \quad (20.26)$$

$$\int_{(V)} \int \int \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \oint_{(S)} \int Q(x, y, z) dz dx \quad (20.27)$$

формулаларнинг тўғрилиги исботланади.

Юқоридаги (20.25), (20.26) ва (20.27) тенгликларни ҳадлаб қўшиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \int \int \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{(S)} \int P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + \\ + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Бу формула *Остроградский формуласи* деб аталади.

21-Б О Б

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

Биз юқорида, курсимиз давомида, мураккаб функцияларни улардан соддароқ бўлган функциялар орқали ифодалаш масалаларига бир неча марта дуч келдик ва уларни ўргандик. Бу соҳадаги классик масалалардан бири — функцияларни даражали қаторларга ёйишдан иборат бўлиб, у мазкур курснинг 13-бобида батафсил ўрганилди.

Агар қаралаётган функциялар даврий функциялар бўлса, табиийки, уларни соддароқ даврий функциялар билан ифодалаш лозим бўлади. Ҳар бир ҳади содда даврий функциялар бўлган функционал қаторларни ўрганиш мураккаб даврий функцияларни соддароқ даврий функциялар билан ифодалаш масаласини ҳал этишда муҳим роль ўйнайди.

Ушбу бобда, ҳар бир ҳади махсус даврий функциялар бўлган функ-

ционал қаторлар — Фурье қаторларини ўрганамиз.

Фурье қаторлари назарияси математик анализнинг чуқур ва кенг ўрганилган бўлими бўлиб, унинг амалий масалаларни ҳал қилишдаги роли каттадир. Бу соҳада жуда кўп илмий излашлар олиб борилган ва муҳим натижаларга эришилган.

Биз қуйида Фурье қаторлари назариясининг асосий тушунчалари, методлари ва ютуқлари билан дастлабки тарзда танишамиз.

1-§. Баъзи муҳим тушунчалар

Ушбу параграфда келгусида керак бўладиган баъзи муҳим тушунчаларни — функцияларни даврий давом эттириш, гармоникалар ҳамда бўлакли-узлуксизлик, бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаларини келтирамиз.

1. Функцияларни даврий давом эттириш. $f(x)$ функция $a, b]$ ярим интервалда берилган бўлсин. Бу функция ёрдамида қуйи-

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a))$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21.1)$$

функцияни тузамиз. Равшанки, энди $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган ва даврий функция бўлади. Унинг даври $T_0 = b - a$ га тенг. Бу бажарилган жараёни *функцияни даврий давом эттириш* дейилади.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

$$f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(b)$$

бўлса, у ҳолда давом эттирилган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлади.

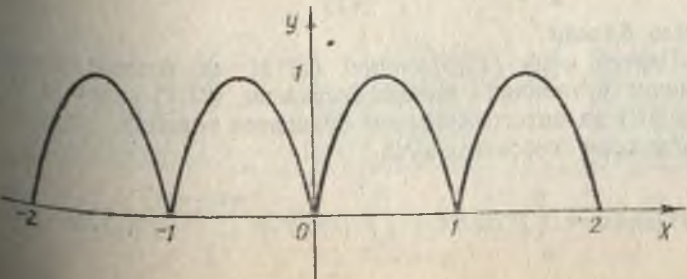
Масалан, $f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 29-чизмада тасвирланган.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

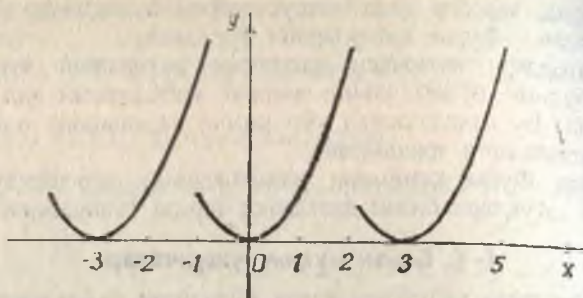
$$f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(b)$$

бўлса, равшанки $f^*(x)$ функция $x = a + m(b - a)$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталарда узилишга эга бўлади.

Масалан, $(-1, 2]$ оралиқда берилган $f(x) = x^2$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 30-чизмада тасвирланган.



29-чизма.



30- чизма.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлса, уни даврий давом эттириш ҳам юқоридаги сингари бажарилади:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Агарда $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ $\{a + m(b - a); m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = X^*$ тўпламга даврий давом эттириш мумкин:

$$f^*(x)_1 = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)) \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Изоҳ. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ га, умуман айтганда, икки хил даврий давом эттириш мумкин:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)) \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$f^{**}(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

21.1-лемма. $f(x)$ функция (a, b) оралиқда берилган ва у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ ни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция ихтиёрий $(\alpha, \alpha + (b - a))$ да интегралланувчи бўлади еа,

$$\int_{\alpha}^{\alpha + (b - a)} f^*(x)_1 dx = \int_a^b f(x) dx \quad (*)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) да интегралланувчи. $f^*(x)$ функциянинг тузилишига биноан (қаралсин, (21.1) унинг $\alpha, \alpha + (b - a)$) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ да интегралланувчи бўлишини топамиз.

Аниқ интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_{\alpha}^{\alpha + (b - a)} f^*(x) dx = \int_{\alpha}^a f^*(x) dx + \int_a^b f^*(x) dx + \int_b^{\alpha + (b - a)} f^*(x) dx \quad (21.2)$$

булади. Равшанки, $\forall x \in (a, b]$ учун $f^*(x) = f(x)$. Демак,

$$\int_a^b f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Энди

$$\int_b^{\alpha + (b-a)} f^*(x) dx$$

интегралда $x = y + (b - a)$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\int_b^{\alpha + (b-a)} f^*(x) dx = \int_a^{\alpha} f^*(y + (b - a)) dy = \int_a^{\alpha} f^*(y) dy = - \int_a^{\alpha} f^*(y) dy.$$

Натижада (21.2) тенглик ушбу

$$\int_a^{\alpha + (b-a)} f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

кўринишга келади. Бу эса 21.1-леммани исботлайди. Бу леммадаги (*) формула содда геометрик маънога эга: [31-чизмадаги штрихланган юзalar бир-бирига тенг.

2. Гармоникалар. Ушбу

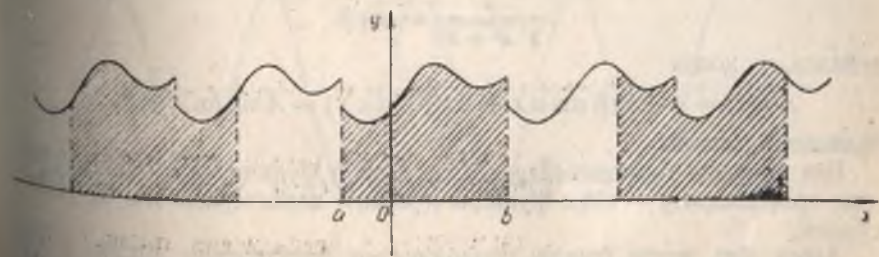
$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) \quad (21.3)$$

функцияни қарайлик, бунда A , α , β — ўзгармас сонлар. Бу даврий функция бўлиб, унинг даври $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ га тенгдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = A \cdot \sin\left[\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) + \beta\right] = A \cdot \sin[(\alpha x + \beta) + 2\pi] = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) = f(x).$$

Бу $f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$ функция гармоника деб аталади.

Гармоникалар математика ва унинг татбиқларида, физика ва техникада кўп учрайди. Масалан, массаси m га тенг бўлган M нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб OM ($OM = s$) масофага пропорционал бўлган $F = -ks$ куч таъсири остидаги ҳаракати (тебранма ҳаракати) $s = s(t)$ ни топиш ушбу



31- чизма.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \gamma \cdot s = 0, \left(\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

дифференциал тенгламани ечишга келади. Бу тенгламанинг ечими гармоникадан иборат бўлади.

Берилган

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$$

гармониканинг графиги, $y = \sin x$ функция графигини Ox ва Oy ўқлар бўйича сиқиш (чўзиш) ҳамда Ox ўқи бўйича суриш натижасида ҳосил бўлади. Масалан, ■ ■

$$f(x) = 2 \cdot \sin(2x + 1)$$

гармониканинг графигини ясаш жараёни ва унинг графиги 3 2-чизмалар тасвирланган.

Тригонометриядан маълум бўлган формуладан фойдаланиб, гармоникани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) = A \cdot (\cos \alpha x \cdot \sin \beta + \sin \alpha x \cdot \cos \beta).$$

Агар

$$A \cdot \sin \beta = a, \quad A \cdot \cos \beta = b$$

деб белгиласак, унда гармоника ушбу

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x \quad (21.4)$$

кўринишга келади.

Демак, ҳар қандай (21.3) гармоника (21.4) кўринишда ифодаланади.

Аксинча, ҳар қандай (21.4) кўринишдаги функция гармоникани ифодалайди. Шунини исботлаймиз. $f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$ бўлиб, a ва b лар ўзгармас бўлсин. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha x \right].$$

Агар

$$\sqrt{a^2 + b^2} = A, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta,$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$$

дейилса, у ҳолда

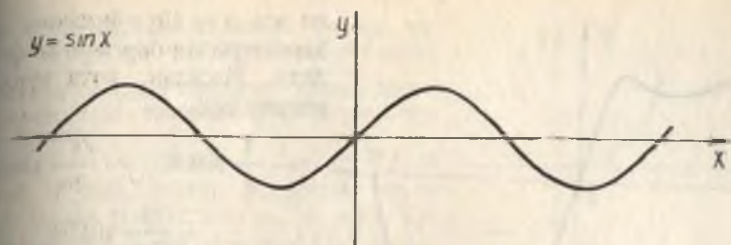
$$f(x) = A \cdot [\sin \beta \cos \alpha x + \cos \beta \sin \alpha x] = A \sin(\alpha x + \beta)$$

бўлишини топамиз.

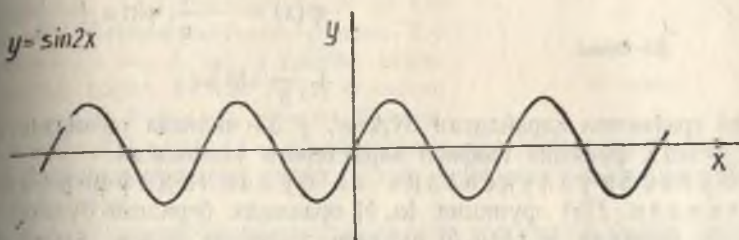
Биз юқорида гармоникалар содда даврий функциялар бўлиб, уларнинг графиклари $y = \sin x$ функция графиги характерига эга бўлишини кўрдик.

Аммо бир нечта (турли) гармоникалар йиғиндисини олсак, у ҳам даврий функция бўлсада, аммо анча мураккаб функция бўлади, графиги

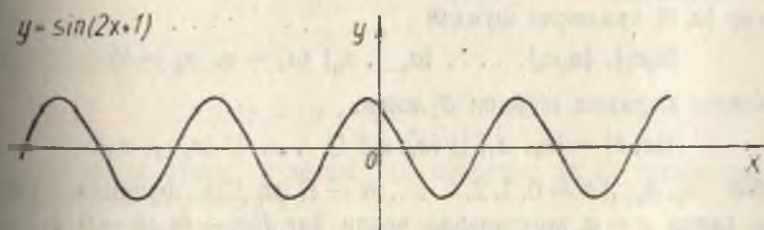
$$y = \sin x$$



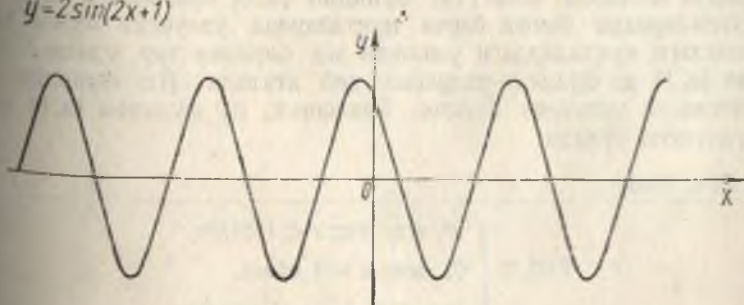
$$y = \sin 2x$$

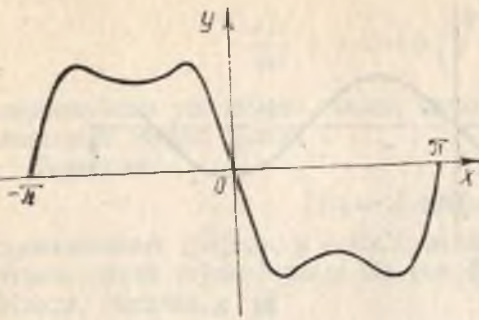


$$y = \sin(2x+1)$$



$$y = 2\sin(2x+1)$$





33- чизма

ги эса $y = \sin x$ функция графиги характеридан бир мунча фарқ қилади. Масалан, учта турли гармоникалар:

$$-\frac{4}{\pi} \sin x, \quad -\frac{4}{3\pi} \sin 3x, \\ -\frac{4}{5\pi} \sin 5x$$

йиғиндисидан иборат ушбу

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$

функция графигини қарайдиган бўлсак, у 33- чизмада тасвирланган бўлиб, $y = \sin x$ функция графиги характерига ўхшамайди.

3. Бўлакли-узлуксизлик ва бўлакли-дифференциалланувчилик. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, ҳамда a нуқтада ўнгдан, b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз дейилар эди.

Энди $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да бўлакли-узлуксизлиги тушунчаси билан танишамиз.

Агар $[a, b]$ оралиқни шундай

$$[a_0 a_1], [a_1 a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n] \quad (a_0 = a, a_n = b)$$

бўлақларга ажратиш мумкин бўлсаки,

$$([a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n])$$

ҳар бир (a_k, a_{k+1}) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ да $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f(a_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) лимитларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида узлуксиз бўлса ва шу чекли сондаги нуқталардаги узилиши эса биринчи тур узилиш бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз деб аталади. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } 1 < x \leq 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Агар $[0, 2]$ оралиқни $[0, 1]$ ва $[1, 2]$ бўлақларга ажратсак $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$, у ҳолда $[0, 1]$ ва $[1, 2]$ бўлақларда берилган функция уз-

луксиз, $x = 1$ нуқтада эса чекли ўнг ва чап $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -1$, $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$ лимитларга эга бўлиши топилди. Демак, берилган функция $[0, 2]$ оралиқда бўлакли-узлуксиздир (34- чизма).

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta]$ қисмида $([\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty))$, бўлакли-узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-узлуксиз деб аталади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(a, b]$ да берилган ва бўлакли-узлуксиз бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Масалан, $f(x) = x$ ($x \in (-\pi, \pi]$) бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 35-чизмада тасвирланган.

Энди бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, ҳамда унинг a нуқтада ўнг ҳосиласи

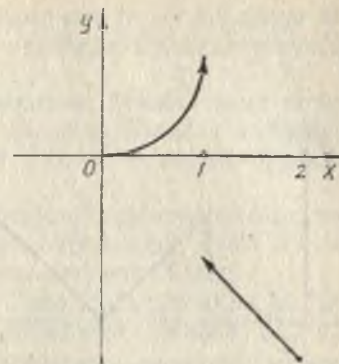
$$f'(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

b нуқтада чап ҳосиласи

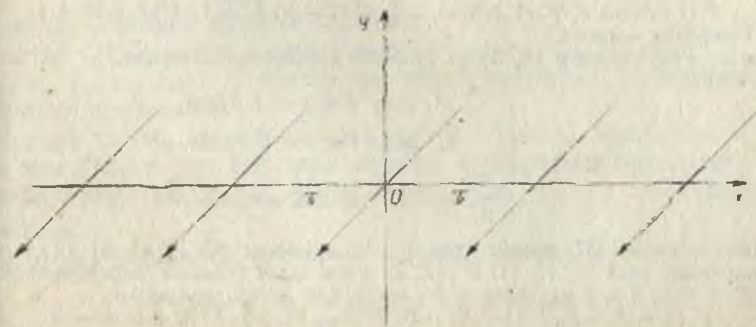
$$f'(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи дейилар эди.

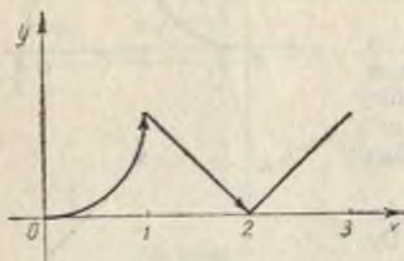
Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ ($a_0 = a, a_n = b$) бўлақларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да ($k = 0, 1, 2, \dots$,



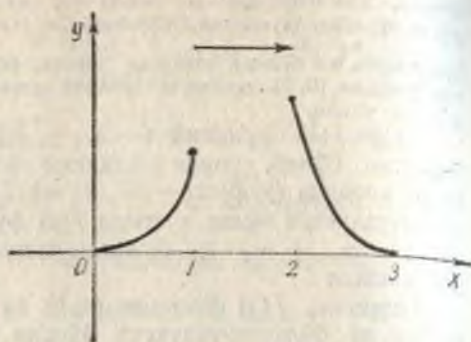
34- чизма



35- чизма



36- чизма



37- чизма

$n-1$) функция дифференциалланувчи бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(a_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f'(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса ва шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва дифференциалланувчи бўлсин. Равшанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

Мисол. 1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2-x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ x-2, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (36- чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ бўлакларга ажратсак, унда $[0, 1]$ ($1, 2$) ва $[2, 3]$ ларда $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1$, $x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1-0) = 2, f'(1+0) = -1, f'(2-0) = -1, f'(2+0) = 1$$

га эга бўлишини топамиз.

Демак, $f(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли-дифференциалланувчи.

2. Ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ \frac{3}{2}(x-3)^2, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (37- чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ бўлакларга ажратсак, унда $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ ларда $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1$, $x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1-0) = 2, f'(1+0) = 0, f'(2-0) = 0, f'(2+0) = -3$$

га эга бўлишини топамиз. Демак, $\varphi(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли-дифференциалланувчи.

Юқорида келтирилган таъриф га мисоллардан, $[a, b]$ ораликда бўлакли-дифференциалланувчи функция шу ораликда бўлакли-узлуксиз функция бўлишини кўриш мумкин.

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta]$ ($[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$) қисмида бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) да берилган ва бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ ($a_0 = a, a_n = b$) бўлақларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир $[a_k, a_{k+1}]$ да ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) функция $f'(x)$ ҳосиллага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(x_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f'(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-силлиқ деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида $f'(x)$ ҳосиллага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-силлиқ деб аталади.

2-§. Фурье қаторининг таърифи

Биз мазкур курснинг 14-бобида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қаторни батафсил ўргандик. Энди ҳар бир ҳади

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

гармониқадан иборат ушбу

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.5)$$

хусусий функционал қаторни қарайлик.

Одатда (21.5) қатор *тригонометрик қатор* деб аталади.

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ сонлар эса *тригонометрик қаторнинг коэф-фициентлари* дейилади.

Шундай қилиб, тригонометрик қатор гарчанд функционал қатор бўлса ҳам (унинг ҳар бир ҳади муайян функциялар бўлганлиги учун) ўз коэффициентлари $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ лар билан тўла аниқланади.

(21.5) тригонометрик қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

тригонометрик кўпҳад деб аталади.

1. Фурье қаторининг таърифи. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда

$$f(x) \cos nx, f(x) \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функциялар ҳам, иккита интегралланувчи функциялар кўпайтмаси сифатида (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 7-§) $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уларни қуйидагича белгилайлик:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (21.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.7)$$

тригонометрик қаторни тузамиз.

21.1-таъриф. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ коэффицентлари (21.6) формулалар билан аниқланган (21.7) тригонометрик қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори деб аталади. $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ сонлар эса $f(x)$ функциянинг Фурье коэффицентлари дейилади.

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори шундай тригонометрик қаторки, унинг коэффицентлари шу функцияга боғлиқ бўлиб, (21.6) формулалар билан аниқланади. Шу сабабли (21.7) қаторни (унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишидан қатъи назар) ушбу $\sim$ белги билан қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad (-\pi \leq x \leq \pi, \alpha \neq 0)$$

функциянинг Фурье қатори тузилсин.

(21.6) формуладан фойдаланиб, бу функциянинг Фурье коэффицентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha \pi} (e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}) = \frac{2}{\alpha \pi} \operatorname{sh} \alpha \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \cos nx + n \sin nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \operatorname{sh} \alpha\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sin nx - n \cos nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{\alpha^2 + n^2} \operatorname{sh} \alpha\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(қўшимча, 1-қисм, 8-боб, 2-§).

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$e^{\alpha x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx) \right\}$$

бўлади.

Фараз қилайлик, бирор

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.7)$$

тригонометрик (функционал) қатор $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин. Унинг йилгидисини $f(x)$ деб белгилайлик:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \quad (21.8)$$

Бундан ташқари, (21.7) ни ҳамда уни $\cos kx$ ва $\sin kx$ ($k = 1, 2, \dots$) зарга кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + b_n \sin nx \cdot \cos kx) =$$

$$= f(x) \cos kx, \quad (21.9)$$

$$\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + b_n \sin nx \cdot \sin kx) = f(x) \sin kx$$

($k = 1, 2, 3, \dots$) қаторларни $[-\pi, \pi]$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлсин,

(21.8) ва (21.9) ларни $[-\pi, \pi]$ да интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \pi \cdot a_0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \sin nx \cdot \cos kx) \right] dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx \right), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \sin nx \cdot \sin kx) \right] dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx \right).\end{aligned}$$

Агар $n \neq k$ да

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-k)x - \cos(n+k)x] dx = \\ &= \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

ва

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi,$$

шунингдек,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 0 \quad (n \neq k), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx = 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

булишини эътиборга олсак, унда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi \cdot a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi \cdot a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi \cdot b_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ёқанини топамиз. Бу тенгликлардан эса

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (21.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функция тригонометрик қаторга ёйилган бўлса ва бу қатор учун юқорида айтилган шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда бу тригонометрик қаторнинг коэффицентлари $f(x)$ функция орқали (21.6) формулалар билан ифодаланади, яъни $f(x)$ нинг Фурье коэффицентлари бўлади. Бинобарин, қаторнинг ўзи $f(x)$ нинг Фурье қатори бўлади.

2. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари бирмунча содда кўринишга эга бўлади. Биз қуйида уларни келтирамиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган жуфт функция бўлсин. У шу $[-\pi, \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x) \cos nx$ жуфт функция, $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) эса тоқ функция бўлади ва улар $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади.

(21.6) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффицентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, жуфт $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21.10)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган тоқ функция бўлсин ва у шу $[-\pi, \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу ҳолда $f(x) \cos nx$ тоқ функция, $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) эса жуфт функция бўлади. (21.6) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, тоқ $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21.11)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \approx T(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

бўлади.

Мисоллар. 1. $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) функциянинг Фурье қатори ^{ёзилсин.} (21.10) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left[\left(-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^3} (n = 1, 2, \dots).$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянинг Фурье қатори ушбу

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} - \dots \right)$$

ёриғида бўлади.

2. Ушбу

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

тоқ функциянинг Фурье қатори ёзилсин.

(21.11) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз: $b_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$. Демак, $f(x) = x$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

3. $[-l, l]$ оралиқда берилган функциянинг Фурье қатори. Биз юқорида $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган функция учун унинг Фурье қатори тушунчасини киритдик. Бундай тушунчани ихтиёрий $[-l, l]$ ($l > 0$) оралиқда берилган функция учун ҳам киритиш мумкин.

$f(x)$ функция $[-l, l]$ ($l > 0$) да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$t = \frac{\pi}{l} x \quad (21.12)$$

алмаштириш $[-l, l]$ оралиқни $[-\pi, \pi]$ оралиққа ўтказди. Агар

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t)$$

дейилса, $\varphi(t)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлишини кўриш қийин эмас. Бу $\varphi(t)$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$\varphi(t) \sim T(\varphi; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Юқоридаги (21.12) тенгликни эътиборга олсак, унда

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l}x + b_n \sin n \frac{\pi}{l}x \right)$$

булиб, унинг коэффициентлари эса

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos n \frac{\pi}{l}x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sin n \frac{\pi}{l}x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

булади.

Натижада

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (21.13)$$

га эга бўламиз, бунда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (21.14)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(21.13) нинг ўнг томонидаги тригонометрик қаторни $[-l, l]$ да берилган $f(x)$ нинг Фурье қатори дейилади, (21.14) Фурье коэффициентлари дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

функциянинг Фурье қатори ёзилсин.

(21.14) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз (бунда $l = 1$);

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 e^x \cos n\pi x dx = \frac{n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{1}{1 + n^2\pi^2} (e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi) = (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{1 + n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 e^x \sin n\pi x dx = \frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2} (e \cdot n\pi \cos n\pi + e^{-1} n\pi \cos n\pi) = \frac{n\pi \cos n\pi}{1+n^2\pi^2} (e^{-1} - e) =$$

$$= \frac{n\pi (-1)^n}{1+n^2\pi^2} (e^{-1} - e) = (-1)^{n+1} \frac{e - e^{-1}}{1+n^2\pi^2} n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, $f(x) = e^x$ функциянинг $(-1 \leq x \leq 1)$ Фурье қатори ушбу

$$e^x \sim \frac{e - e^{-1}}{2} + (e - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2} n\pi \sin n\pi x \right]$$

кўринишда бўлади.

Изоҳ. (21.7) формула билан аниқланган

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

тригонометрик қаторнинг $(-\infty, +\infty)$ да берилган 2π даврли функция эканлигини кўриш қийин эмас:

$$T(f; x + 2\pi) = T(f; x).$$

Агар $[-\pi, \pi]$ да берилган $f(x)$ функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттирсак (қаранг ушбу бобнинг 1-§).

$f^*(x) = f(x - 2\pi m)$, $x \in (-\pi + 2\pi m, \pi + 2\pi m)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), y ҳолда, равшанки, $(-\infty, +\infty)$ да

$$f^*(x) \sim T(f^*; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

бўлади.

3-§. Леммалар. Дирихле интегралли

Функцияларни Фурье қаторига ёйиш шартларини аниқлаш, юқорида айтиб ўтганимиздек, Фурье қаторлари назариясининг муҳим масалаларидан бири. Уни ҳал этувчи теоремани келтиришдан аввал баъзи бир фактларни ўрганамиз.

1. Леммалар. Қуйида келтириладиган леммалар Фурье қаторлари назариясида муҳим роль ўйнайди.

21.2-лемма. $[a, b]$ оралиқда берилган ва интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0, \quad (21.15)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos px \, dx = 0 \quad (21.16)$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олайлик. Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin px \, dx \quad (21.17)$$

бўлади. $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак,

$$\inf \{ \varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}] \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

мавжуд. Уни m_k билан белгилаймиз:

$$m_k = \inf \{ \varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}] \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Энди (21.20) интегрални

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin px \, dx = \quad (21.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin px \, dx + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px \, dx = S_1 + S_2$$

кўринишда ёзиб, сўнгра ҳар бир

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin px \, dx,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px \, dx$$

қўшилувчини баҳолаймиз.

Агар ω_k $\varphi(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) даги тебраниши бўлса, S_1 учун ушбу

$$|S_1| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \quad (21.19)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи. Унда 1-қисм, 9-боб, 5-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.20)$$

бўлади. (21.19) ва (21.20) муносабатлардан

$$|S_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.21)$$

бўлини келиб чиқади.

Энди $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px \, dx$ йиғиндини баҳолаймиз. Равшанки,

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px \, dx \right| = \left| \frac{\cos px_k - \cos px_{k+1}}{p} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Демак, $|S_2| \leq \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$ бўлади. p ни етарли катта қилиб олиш ҳисобига

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.22)$$

бўлади. Натижада (21.18), (21.21) ва (21.22) муносабатлардан етарли катта p лар учун $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx \right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0.$$

(21.16) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Хусусан, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда бўлакли-узлуксиз бўлса, унинг учун лемманинг тасдиғи ўринли бўлади.

21.1-эслатма. Леммадаги

$$I(p) = \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx, \quad I_1(p) = \int_a^b \varphi(x) \cos px \, dx$$

интеграллар, равшанки, параметрга (p — параметр) боғлиқ интеграллардир. Мазкур курснинг 17-боб, 5-§ ида биз бундай интегралларнинг лимитини интеграл белгиси остида лимитга ўтиб ҳисоблаш ҳақидаги теоремада исбот қилган эдик. Бу теорема шартлари юқоридаги интеграллар учун бажарилмайди ($p \rightarrow \infty$ да интеграл остидаги функциянинг лимити мавжуд эмас) ва, демак, ундан фойдалана олмаймиз. Шунинг учун ҳам лемма юқорида алоҳида исботланди. Иккинчи томондан, лемма параметрга боғлиқ интегралларнинг лимитини бевосита, интеграл белгиси остида лимитга ўтмасдан ҳам, ҳисоблаш мумкин эканлигига мисол бўлади.

Юқоридаги лемма чегараланмаган функциянинг хосмас интеграл учун ҳам умумлаштирилиши мумкин.

$\varphi(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

21.3-лемма. $[a, b)$ да абсолют интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos px \, dx = 0 \quad (21.23)$$

бўлади.

Исбот. Ихтиёрий η ($0 < \eta < b - a$) олиб,

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx$$

интегрални қуйидагича ёзиб

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin px \, dx + \int_{b-\eta}^b \varphi(x) \sin px \, dx, \quad (21.24)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

Қаралаётган $\varphi(x)$ функция $[a, b - \eta]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли юқорида келтирилган 21.2-леммага кўра

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin px \, dx = 0$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $p_0 > 0$ топиладики, барча $p > p_0$ учун

$$\left| \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin px \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.25)$$

бўлади.

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи. Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики,

$0 < \eta < \delta$ бўлганда $\int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Демак,

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx \right| \leq \int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.26)$$

Юқоридаги (21.24), (21.25) ва (21.26) муносабатлардан етарли катта

p лар учун $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx \right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0$. (21.23) муносабатнинг ўринли бўлиши худди

шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Исбот этилган леммалардан муҳим натижа келиб чиқади.

21.1-натижа. $[-\pi, \pi]$ ораликда бўлакли-узлуксиз ёки шу ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

2. Дирихле интегралли. Фурье қаторининг яқинлашувчилигини ўрганиш, бу қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимитини аниқлаш демакдир. Шу мақсадда қатор қисмий йиғиндисини қулай кўринишда ёзиб оламиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ ораллиқда берилган ва абсолют интегралланувчи (хос ёки хосмас маънода) бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топиб,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

сўнгра топилган коэффициентлар бўйича $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини тузамиз:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Энди бу қаторнинг ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

қисмий йиғиндисини оламиз. Бу йиғиндидаги a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) ва b_k ($k = 1, 2, \dots$) ларнинг ўрнига уларнинг ифодаларини қўйсак, у ҳолда

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx] \, dt.$$

Маълумки,

$$\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx = \cos k(t - x).$$

Демак,

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) \right] dt.$$

Интеграл остидаги ифода учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) = \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$2 \sin \frac{u}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right] = \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{u}{2} \cos ku = \sin \frac{u}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) u \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u$$

$$(u = t - x).$$

Бу тенглик ёрдамида $F_n(f; x)$ йиғинди қуйидагича ифодаланади:

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (21.27)$$

(21.27) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихле интегралли деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f; x)$ параметрга боғлиқ (21.27) кўринишдаги интеграл (Дирихле интегралли) дан иборат экан.

$f^*(x)$ функция $f(x)$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ га даврий давомий бўлсин. Бинобарин, $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи функциядир. Қулайлик учун биз қуйида $f(x)$ функциянинг ўзини $(-\infty, +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи функция деб ҳисоблаймиз ва $f^*(x)$ ўрнига $f(x)$ ни ёзиб кетаверамиз.

$$\text{Энди } F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \text{ интегралда } t=x+u$$

алмаштириш қиламиз. Интеграл остидаги функция 2π даврли функция бўлганлиги сабабли, бу алмаштириш натижасида интеграллаш чегараси ўзгармасдан қолади (ушбу бобнинг 1-§ ига қаралсин). Натижада

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du$$

бўлади. Бу интегрални ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du + \int_0^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du \right]$$

икки қисмга ажратиб, ўнг томондаги биринчи интегралда u ўзгарувчиси $-u$ га алмаштирамиз. У ҳолда

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (21.28)$$

бўлади. Дирихле интегрални $F_n(f; x)$ нинг бу кўринишидан келгусида фойдаланилади.

Хусусан, $f(x) \equiv 1$ бўлса, (21.28) муносабатдан

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (21.29)$$

бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$a_0 = 2, \quad a_k = b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлиб,

$$F_n(1; x) \equiv 1$$

бўлади.

4-§. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги

Энди берилган $f(x)$ функция қандай шартларни бажарганда, унинг Фурье қатори яқинлашувчи бўлишини топиш билан шуғулланамиз.

1. Локал лаштириш принципи. Юқорида келтирилган Дирихле интегрални

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+u) + f(x-u) \right] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (21.29)$$

қуйидаги муҳим хоссага эга. Ихтиёрий δ ($0 < \delta < \pi$) сонни олиб, (21.29) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\begin{aligned} F_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \end{aligned}$$

Унг томондаги иккинчи

$$I_2(n, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

интегралнинг $n \rightarrow \infty$ да лимити мавжуд ва нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам берилган $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да, ва демак, $[\delta, \pi]$ да абсолют интегралланувчи бўлганлигидан

$$\varphi(u) = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} [f(x+u) + f(x-u)]$$

функция ҳам шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади ((δ, π) да $\sin \frac{u}{2}$ функция чегараланган) ва 21.3-леммага асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du = 0.$$

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

21.1-теорема. *Ушбу*

$$I_1(n, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

интегралнинг $n \rightarrow \infty$ даги limiti] мавжуд бўлгандагина Дирихле интегралининг $n \rightarrow \infty$ даги limiti мавжуд бўлади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n, \delta).$$

Равшанки, $I_1(n, \delta)$ интегралда f функциянинг $[x - \delta, x + \delta]$ оралиқдаги қийматларигина қатнашади.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функция Фурье қаторининг x нуқтада яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши бу функциянинг шу нуқта ($x - \delta, x + \delta$) атрофидаги қийматларигагина боғлиқ бўлар экан. Шунинг учун келтирилган теорема локаллаштириш принципи деб юритилади. Унинг моҳиятини қуйидагича ҳам тушунтириш мумкин.

Иккита турли 2π даврли $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу функцияларнинг Фурье қаторлари ҳам, умуман айтганда, турлича бўлади. Бирор $x_0 \in (-\pi, \pi)$ ва δ ($0 < \delta < \pi$) учун

$$f(x) = \varphi(x), \text{ агар } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

$$f(x) \neq \varphi(x), \text{ агар } x \in [-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да бу функциялар Фурье қаторлари қисмий йиғиндиларининг x_0 нуқтадаги лимитлари ёки бир вақтда мавжуд (бу ҳолда улар бир-бирига тенг) бўлади, ёки улар бир вақтда мавжуд бўлмайди.

Пировардида, ўқувчиларимиз эътиборини локаллаштириш принципининг яна бир муҳим томонига жалб қилайлик.

Келтирилган теоремадан $I_1(n, \delta)$ интегралнинг $n \rightarrow \infty$ даги limiti барча δ ($0 < \delta < \pi$) лар учун бир вақтда ёки мавжуд бўлиши, ёки мавжуд бўлмаслиги келиб чиқади.

2. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги.

21.2-теорема. 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлак-ли-дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$[-\pi, \pi)$ да яқинлашувчи бўлади. Унинг йиғиндису

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

бўлади ($x \in [-\pi, \pi)$).

Исбот. (21.29) тенгликнинг ҳар икки томонини

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

га кўпайтириб қуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{2} [f(x+0)] + f(x-0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (21.30)$$

(21.28) ва (21.30) муносабатлардан фойдаланиб ушбу

$$F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

фармони қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Агар

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = I_{1n}(f; x),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = I_{2n}(f; x)$$

деб белгиласак, унда

$$F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = I_{1n}(f; x) + I_{2n}(f; x)$$

бўлади.

Энди $I_{1n}(f; x)$ ва $I_{2n}(f; x)$ ларни баҳолаймиз. Ихтиёрий δ ($0 < \delta < \pi$) сонни олиб, $I_{1n}(f; x)$ ни икки қисмга ажратиб ёзайлик:

$$I_{1n}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin \frac{u}{2}} du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin \frac{u}{2}} du. \quad (21.31)$$

Локаллаштириш принципига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin \frac{u}{2}} du = 0$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin \frac{u}{2}} du \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.32)$$

бўлади.

Энди (21.31) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интегрални баҳолайлик. Уни δ ни танлаб олиш ҳисобига етарлича кичик қила олишимиз мумкинлигини кўрсатайлик.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $[-\pi, \pi)$ да бўлакли-дифференциалланувчи. Бинобарин, $\forall x [x \in [-\pi, \pi))$ нуқтада унинг бир томонли чекли ҳосилалари, хусусан, ўнг ҳосиласи

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} = f'(x+0)$$

мавжуд. Демак, шундай $\delta_1 > 0$ топиладики $0 < u < \delta_1$ бўлганда

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right| \leq M_1 \quad (M_1 = \text{const})$$

бўлади.

Шунингдек, шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, $0 < u < \delta_2$ бўлганда

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \leq M_2 \quad (M_2 = \text{const})$$

бўлади.

Агар $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{\pi \varepsilon}{2M_1M_2} \right\}$ дейилса, унда ихтиёрий $n \in N$ учун

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left[\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right] \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u du \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right| \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du \leq \frac{1}{\pi} \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.36)$$

бўлади. Натижада (21.31), (21.32) ва (21.33) муносабатлардан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун $|I_n(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

Иккинчи интеграл

$$I_{2n}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

ҳам худди шунга ўхшаш баҳоланада ва $|I_{2n}(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши топилади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]| < 2\varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

таъинини билдиради.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $T(f; x)$ эса $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ га тенг:

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Теорема исбот бўлди.

Равшанки, теорема шартларида қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталарида

$$T(f; x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x)$$

бўлади.

$x = \pm \pi$ бўлганда ушбу бобнинг 1-§ ида айтилган ушбу

$$f(\pi+0) = f(-\pi+0) = f(\pi-0)$$

тенгликлар эътиборга олинса, унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; -\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; \pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; -\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; \pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)],$$

яъни

$$T(f; -\pi) = T(f; \pi) = \frac{1}{2} |f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)|$$

бўлади.

21.2- натижа. Агар 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз, бўлаккли-дифференциалланувчи ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, бу функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи, йиғиндиси

$$Tff; x) = f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^2 \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

функциянинг Фурье қатори қуйидагича

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

бўлишини кўрган эдик. Равшанки, x^2 функция $[-\pi, \pi]$ да оралиқда 21.5-натижанинг шартларини қаноатлантиради. Шу натижага кўра, $[-\pi, \pi]$ да унинг Фурье қатори яқинлашувчи, йиғиндиси эса x^2 га тенг бўлади. Демак,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

2. Ушбу

$$f(x) = \cos ax \quad (0 < a < 1)$$

функцияни қарайлик. Унинг Фурье коэффициентлари

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = 2 \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x) dx = \\ &= (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$\cos ax \sim \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx$$

бўлади. Агар бу $f(x) = \cos ax$ функция 21.5-натижанинг шартларини бажарганини эътиборга олсак, унда

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx$$

бўлишини топамиз.

Кейинги тенгликдан $x = 0$ дейилса.

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \right],$$

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

эслиб чиқади.

3. Қуйидаги

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } 0 < x < \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги 21.2-теорема шартини қаноатлантиришнинг қўриш қийин эмас.

Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топиб, Фурье қаторини ёзамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos kx dx = -\frac{1}{k\pi} x \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \\ &+ \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx = \frac{1}{k^2\pi} (\cos k\pi - \cos 0) = \frac{1}{k^2\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

Демак,

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi}, & \text{агар } k \text{ — тоқ сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k \text{ — жуфт сон бўлса.} \end{cases}$$

Энди b_k коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} x \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\cos kx}{k} dx = \frac{\cos k\pi}{k} = \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $x \in (-\pi, \pi)$ учун

$$T(f; x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kx}{k} = f(x),$$

$x = \pm \pi$ да эса

$$T(f; -\pi) = T(f; \pi) = \frac{0 + \sigma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

4. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } -\pi \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } 0 \leq x < \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги теореманинг шартларини қаноатлантиради. Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаб, унинг Фурье қаторини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx - \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\cos 0 - \cos nx] + \frac{1}{n\pi} [\cos nx - \cos 0] = \frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Демак,

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{агар } n - \text{жуфт сон бўлса,} \\ -\frac{4}{n\pi}, & \text{агар } n - \text{тоқ сон бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функциянинг Фурье қатори

$$T(f; x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

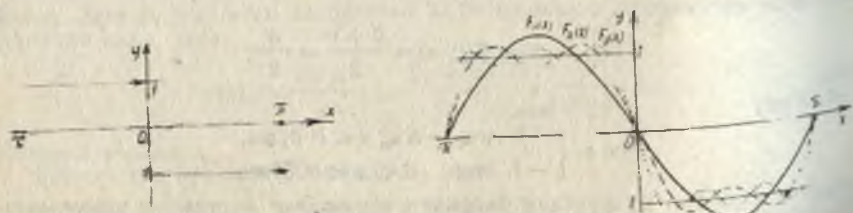
бўлади ва унинг йиғиндиси

$$T(f; x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \text{ бўлса,} \\ \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{f(-\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = 0, & \text{агар } x = -\pi \text{ бўлса,} \\ \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = 0, & \text{агар } x = \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. 38-чизмада $f(x)$ функциянинг ва унинг Фурье қаторининг $F_1(f; x)$, $F_2(f; x)$ ва $F_3(f; x)$ қисмий йиғиндилари тасвирланган.

5-§. Қисмий йиғиндиларнинг бир экстремал хоссаси. Бессель тенгсизлиги

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган. Бу функция ва унинг квадрати $f^2(x)$ ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Одатда бундай функциялар квадрати билан интегралланувчи деб аталади.



38-чизма

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, шундай

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} (1 + f^2(x))$$

тенгсизликдан фойдаланиб

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

нинг мавжуд бўлишини топамиз. Бу эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи эканини билдиради.

Аммо $f(x)$ функциянинг абсолют интегралланувчи бўлишидан, унинг квадрати билан интегралланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

функция $(0, 1]$ да интегралланувчи, лекин

$$f^2(x) = \frac{1}{x}$$

функция эса $(0, 1]$ да интегралланувчи эмас (қаралсин, 16-боб, 5-§).

Демак, квадрати билан интегралланувчи функциялар тўплами, абсолют интегралланувчи функциялар тўпламининг қисми бўлади.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи функция, $T_n(x)$ — даражаси n дан катта бўлмаган тригонометрик кўпхад бўлсин:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Равшаники, бундай кўпхадлар ҳам $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи бўладилар. Коши — Буняковский тенгсизлигидан

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \quad (21.34)$$

интегралнинг ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Бу интеграл муайян $f(x)$ да $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$ ларга боғлиқ:

$$I = I(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx.$$

Энди қуйидаги масалани қарайлик. Шу коэффициентлар қандай танлаб олинганда I энг кичик қийматга эга бўлади? Бу масалани ҳал этиш учун юқоридаги (21.34) интегрални ҳисоблайлик:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx \quad (21.35)$$

$f(x)$ функция Фурье коэффициентлари учун

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

формулалардан фойдалансак,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] dx = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} a_0 \pi + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot a_k \pi + \beta_k \cdot b_k \cdot \pi) = \\ &= \pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot a_k + \beta_k \cdot b_k) \right] \end{aligned} \quad (21.36)$$

бўлади.

Агар

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin kx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi \end{aligned}$$

(қаранг, ушбу бобнинг 2-§ ига) эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx = \\ &= \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right] \end{aligned} \quad (21.37)$$

бўлади. Юқоридаги (21.36), (21.35.), (21.37) тенгликлардан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n \beta_k b_k \right] + \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right] + \pi \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_k - b_k)^2 \right]. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан кўринадики,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_k &= a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \beta_k &= b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

булгандагына ўзининг энг кичик қийматига эришади ва у қиймат

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right]$$

булади, яъни:

$$\begin{aligned}& \min_{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right].\end{aligned}$$

Шундай қилиб, қуйидаги теоремани исботладик.

21.3-теорема. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, квадрати билан интегралланувчи бўлсин. Даражаси n дан катта бўлмаган барча тригонометрик кўпхадлар $\{T_n(x)\}$ ичида ушбу

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

интегралга энг кичик қиймат берувчи кўпхад $f(x)$ функция Фурье қаторининг n -қисмий йиғиндисиди бўлади:

$$\begin{aligned}\min_{T(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(j; x)]^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right].\end{aligned} \quad (21.38)$$

21.3-натижа. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье коэффициентлари квадратларидан тузилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ ва } \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади ва қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (21.39)$$

Исбот. (21.38) муносабатдан $\forall n$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right] \geq 0,$$

яъни

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

бўлади. Бу ерда n ни чексизликка интиштириб, келтирилган натижани ва тенгсизлиكنи ҳосил қиламиз.

(21.39) тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* деб аталади.

6-§. Яқинлашувчи Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссалари

Биз мазкур курснинг 14-бобида яқинлашувчи функционал қаторлар йиғиндисининг функционал хоссаларини батафсил ўргандик. Равшанки, берилган функциянинг Фурье қатори функционал қаторларнинг хусусий ҳолидир. Бинобарин, тегишли шартларда Фурье қаторлари йиғиндилари ҳам 14-бобда келтирилган хоссаларга эга бўлади. Куйида уларни исботсиз келтираемиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва унинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.40)$$

$[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин.

1°. Фурье қатори йиғиндисининг узлуксизлиги. Агар (21.40) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $T(f; x)$ йиғиндиси $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.

2°. Фурье қаторни ҳадлаб интеграллаш. Агар (21.40) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (21.40) қатор ҳадларини интегралларидан тузилган

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos nxdx + b_n \int_a^b \sin nxdx \right) = \\ & = \frac{a_0}{2} (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin nb - \sin na}{n} + b_n \frac{\cos na - \cos nb}{n} \right) \end{aligned}$$

қатор $(-\pi \leq a < b \leq \pi)$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси

$$\int_a^b T(f; x) dx$$

га тенг бўлади, яъни

$$\begin{aligned} \int_a^b T(f; x) dx &= \int_a^b \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ &= \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \right]. \end{aligned}$$

3°. Фурье қаторини ҳадлаб дифференциаллаш. Агар (21.43) қаторнинг ҳар бир ҳадининг ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган Фурье қаторининг йигиндиси $T(f; x)$ шу $[-\pi, \pi]$ да $T'(f; x)$ ҳосиллага эга ва

$$T'(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

бўлади.

Шундай қилиб, умумий ҳолдагидек $f(x)$ функция Фурье қатори йигиндисининг функционал хоссаларини ўрганганда Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлиши муҳим роль ўйнапти. Бинобарин, Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлишини таъминлайдиган шартларни аниқлаш лозим бўлади.

Энди шу ҳақида теорема келтирамиз.

Фурье қаторининг текис яқинлашиши. 21.4-теорема. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган, узлуксиз ҳамда $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлсин. Агар бу функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлакли-сilliқ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.40)$$

$[-\pi, \pi]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган $f(x)$ функция Фурье қатори (21.40) нинг ҳар бир

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ҳади учун

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

($n = 1, 2, \dots$) бўлади.

Энди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ни қарайлик.

Бўлаклаб интеграллаш қондасига кўра

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx, \quad (21.41)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} (-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)] + \\ + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Агар $f(-\pi) = f(\pi)$ шартни эътиборга олсак, у ҳолда

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \quad (21.42)$$

бўлади.

$f'(x)$ нинг Фурье коэффициентларини a'_n ва b'_n десак:

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

у ҳолда (21.41) ва (21.42) муносабатларга кўра

$$a_n = -\frac{1}{n} b'_n, \quad b_n = \frac{1}{n} a'_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлади. Натижада

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|)$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|) = \frac{1}{n} |a'_n| + \frac{1}{n} |b'_n| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда ушбу

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2} \quad (21.43)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Шартга кўра $f'(x)$ функция бўлаккли-узлуксиздир. Бинобарин, у квадрати билан интегралланувчидир. Шунинг учун бу функциянинг a'_n , b'_n Фурье коэффициентлари Бессель тенгсизлигини қаноатлантиради, яъни

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx$$

бўлади. Демак,

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2)$$

қатор яқинлашувчи. Унда яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларига кўра ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2} \right] \quad (21.44)$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Юқорида келтирилган (21.46) тенгсизликка мувофиқ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad (21.45)$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (21.44) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1- том, 11- боб, 8- §) (21.45) қатор яқинлашувчи, демак,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

Вейерштрасс аломатидан (14- боб, 2- §) фойдаланиб, (21.40) Фурье қаторининг $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

7- §. Функцияларни тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш

Юқорида, 6- § да кўрдикки, агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз, бўлакли-узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, унинг Фурье қатори $T(x)$ шу ораликда текис яқинлашувчи бўлади, яъни қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги $\{F_n(f; x)\}$ шу $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. Текис яқинлашувчиликнинг таърифига биноан, $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\sup_{-\pi < x < \pi} |F_n(f; x) - f(x)| < \epsilon \quad (21.46)$$

бўлади. Бу эса юқорида айtilган шартларни қаноатлантирувчи функцияларни исталган аниқликда $F_n(x)$ тригонометрик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкинлигини ифодалайди.

Аммо 14- бобда келтирилган Вейерштрасс теоремасига кўра ихтиёрий $[a, b]$ да узлуксиз функцияни исталган аниқликда алгебраик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкин эди.

Табийки, (21.46) ўринли бўлиши учун $f(x)$ нинг $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз бўлишининг ўзи етарли бўлмасмикин, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб салбийдир. Ҳаттоки, узлуксиз функциянинг Фурье қатори, умуман айтганда, яқинлашувчи бўлмай қолиши ҳам мумкин экан (қаранг, И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва, 1947, 7-боб, 3-§). Демак, Фурье қаторлари қисмий йиғиндиларидан, функцияларнинг бу, кенгроқ синфи учун тақрибий ҳисоблаш аппаратлари сифатида фойдалана олмас эканмиз. Қуйида биз $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ихтиёрий $f(x)$ функция учун шундай тригонометрик кўпхадлар $\{\sigma_n(f; x)\}$ кетма-кетлигини тузамизки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma(f; x) - f(x)| = 0$$

бўлади. Шунинг ҳам таъкидлаймизки, бу тригонометрик кўпхадлар Фурье қаторлари қисмий йиғиндилари ёрдамида осонгина тузилади.

Фейер йиғиндиси. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ ораллиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

дан фойдаланиб, ушбу

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n} [F_0(f; x) + F_1(f; x) + F_1(f; x) + \dots + F_{n-1}(f; x)],$$

$$F_0(f; x) = \frac{a_0}{2} \quad (21.47)$$

йиғиндини тузамиз. Одатда (21.47) йиғинди $f(x)$ функциянинг Фейер йиғиндиси деб аталади.

$f(x)$ функциянинг Фейер йиғиндиси $\sigma_n(f; x)$ тригонометрик кўпхад бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Фурье қатори қисмий йиғиндиларининг ифодалари

$$F_0(f; x) = \frac{a_0}{2},$$

$$F_1(f; x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

$$F_2(f; x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$

$$F_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)x + b_{n-1} \sin(n-1)x$$

га кўра

$$\sigma_1(f; x) = \frac{a_0}{2},$$

$$\sigma_2(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} a_1 \cos x + \frac{1}{2} b_1 \sin x,$$

$$\sigma_3(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{3} a_1 \cos x + \frac{2}{3} b_1 \sin x + \frac{1}{3} a_2 \cos 2x + \frac{1}{3} b_2 \sin 2x,$$

$$\sigma_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{n-1}{n} a_1 \cos x + \frac{n-1}{n} b_1 \sin x + \dots + \frac{1}{n} a_{n-1} \cos(n-1)x + \frac{1}{n} b_{n-1} \sin(n-1)x$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} a_k \cos kx + \frac{n-k}{n} b_k \sin kx \right)$$

бўлади.

Агар 3-§ да келтирилган (21.32) тенглик

$$F_n(1, x) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ни эътиборга олсак, унда (21.50) дан

$$\sigma_n(1; x) = 1 \quad (21.48)$$

бўлиши келиб чиқади.

(21.47) муносабатдаги $F_k(f; x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) нинг ўрнига унинг ифодаси (қаралсин, (21.28))

$$F_k(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

ни қўйиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right\} = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{\sin \frac{u}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1) \frac{u}{2} \right] du = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{\sin t} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t \right] dt. \end{aligned}$$

Интеграл остидаги йиғинди учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t = \frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

муносабат ўринли. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \sin t \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin t \cdot \sin(2k+1)t = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} [\cos 2kt - \cos(2k+2)t] = \frac{1}{2} (1 - \cos 2nt) = \sin^2 nt. \end{aligned}$$

Натижада $f(x)$ функциянинг Фейер йиғиндиси ушбу

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+2t) + f(x-2t) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \quad (21.49)$$

ўринишни олади. Бу ва юқоридаги (21.48) тенгликдан

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \quad (21.50)$$

бўлиши келиб чиқади.

21.5-теорема (Фейер теоремаси). $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ ораллиқда берилган, узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$$

бўлади.

Исбот. (21.50) тенгликнинг ҳар икки томонини $f(x)$ га кўпайтирсак, у ҳолда

$$f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt$$

бўлади. Бу ва (21.49) муносабатдан фойдаланиб, ушбунни топамиз:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - 2f(x) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (21.51)$$

Модомики, шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз экан, у Кантор теоремасига биноан текис узлуксиз бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|x' - x''| < 2\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x', x'' \in [-\pi, \pi]$ учун

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.52)$$

бўлади. Шу топилган δ сонни олиб (уни $\delta < \frac{\pi}{2}$ деб ҳисоблаш мумкин), (21.51) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_n(f; x) - f(x) = I_1(n, \delta) + I_2(n, \delta),$$

бунда

$$I_1(n, \delta) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\delta} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt,$$

$$I_2(n, \sigma) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

Энди $I_1(n, \delta)$ ва $I_2(n, \sigma)$ интегралларни баҳолаймиз. Юқоридаги (21.52) муносабатни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |I_1(n, \delta)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \left[|f(x+2t) - f(x)| + |f(x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - f(x)| \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt < \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $n \in N$ лар учун $|I_1(n, \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Энди $I_2(n, \delta)$ интегрални баҳолаймиз.

$$\begin{aligned} |I_2(n, \delta)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x+2t) + f(x-2t) - \\ &\quad - 2f(x)| \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \frac{1}{n\pi} \cdot 4M \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt, \end{aligned}$$

бунда $M = \max_{-\pi < x < \pi} |f(x)|$. Равшанки,

$$t \in \left[\delta, \frac{\pi}{2} \right] (\delta > 0) \text{ да } \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \delta}$$

бўлади. Натижада $I_2(n, \delta)$ учун ушбу $|I_2(n, \delta)| \leq \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{4M}{\sin^2 \delta} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n \sin^2 \delta}$ баҳога эга бўламиз. Агар натурал n сонини $n > n_0 = \left[\frac{4M}{\varepsilon \sin^2 \delta} \right]$ қилиб олинса, унда $\frac{2M}{n \sin^2 \delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ ва, демак, $|I_2(n, \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall n \in N$ учун $|I_1(n, \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлди. Ва шу $\varepsilon > 0$ ва $\delta = \delta(\varepsilon)$

ларга кўра шундай n_0 топиладики, $\forall n > n_0$ учун $|I_2(n, \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлди. Бу тасдиқларни бирлаштирсак, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ учун $|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$ бўлади.

Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$. Теорема исбот бўлди.

Натижада, функцияни тригонометрик кўпхад билан яқинлаштириш ҳақидаги қуйидаги теоремага келамиз.

21.6-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, у ҳолда шундай $\mathcal{P}_n(x)$ тригонометрик қўлҳад топиладики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\mathcal{P}_n(x) - f(x)| = 0$$

йўлади.

8-§. Ўртача яқинлашиш. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши

Функционал кетма-кетлик ва қаторларда текис яқинлашиш тушунаси билан бир қаторда, ундан умумийроқ — ўртача яқинлашиш тушунаси ҳам киритилади.

1. Ўртача яқинлашиш. $[a, b]$ оралиқда бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (21.53)$$

функционал кетма-кетлик ва $f(x)$ функция берилган бўлиб, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳамда $f(x)$ лар шу оралиқда квадрати билан интегралланувчи бўлсин.

21.2-таъриф. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

бўлса у ҳолда (21.53) функционал кетма-кетлик $f(x)$ функцияга $[a, b]$ да ўртача яқинлашади деб аталади*.

Мисоллар. 1. Ушбу $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$:

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (x \in [0, 1])$$

функционал кетма-кетлик

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0, 1] \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 (x^n - 0)^2 dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

ва, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x^n - 0|^2 dx = 0.$$

*Аниқроқ айтганда, киритилган яқинлашишни, одатда ўрта квадратик яқинлашиш деб аталади.

2. Қуйидаги $\{f_n(x)\} = \{\sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2}nx^2}\}$:

$$\sqrt{2x} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \sqrt{4x} e^{-\frac{1}{2}2x^2}, \dots, \sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2}nx^2}, \dots (x \in (0, 1])$$

Функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашмайди, чунки

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx &= \int_0^1 [\sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2}nx^2} - 0]^2 dx = \\ &= \int_0^1 2nx e^{-nx^2} dx = \int_0^1 e^{-nx^2} d(nx^2) = (1 - e^{-n}), \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [\sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2}nx^2} - 0]^2 dx = 1 \neq 0.$$

21.7-теорема. Агар (21.53) функционал кетма-кетлик $f(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашса, шу (21.53) кетма-кетлик $f(x)$ га $[a, b]$ да ўртача яқинлашади.

Исбот. (21.53) кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашсин.

Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

бўлади. Демак, $\forall n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |f_n(x) + f(x)| dx < \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

эквивалент билдиради. Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ функцияга $[a, b]$ да ўртача яқинлашади. Теорема исбот бўлди.

21.2-эслатма. Функционал кетма-кетликнинг $[a, b]$ да ўртача яқинлашишидан, унинг шу ораликда текис яқинлашиши ҳар донм келиб чиқавермайди. Масалан, юқорида кўрдикки $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ кетма-кетлик

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0, 1) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Бироқ бу функционал кетма-кетлик шу $f(x)$ функцияга $[0, 1]$ да текис яқинлашмайди (қаралсин, 14-боб, 2-§).

Юқорида келтирилган теорема ва эслатма функционал кетма-кетликларда ўртача яқинлашиш текис яқинлашиш тушунчасига қараганда кенгроқ тушунча эканини кўрсатади.

21.3-эслатма. Функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да яқинлашишидан $[(a, b)$ нинг ҳар бир нуқтасида яқинлашишидан) унинг шу оралиқда ўртача яқинлашиши келиб чиқавермайди. Шунингдек, функционал кетма-кетликнинг $[a, b]$ да ўртача яқинлашишидан, унинг шу оралиқда яқинлашиши $[(a, b)$ нинг ҳар бир нуқтасида яқинлашиши ҳам келиб чиқавермайди.

Мисол. $\{f_n(x)\} = \{V^{-2nxe} - \frac{1}{2}nx^2\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ да яқинлашади ($[0, 1]$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашади):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V^{-2nxe} - \frac{1}{2}nx^2 = 0 = f(x).$$

Бу кетма-кетликнинг $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашмаслиги кўрсатилган эди.

Энди бирор оралиқда ўртача яқинлашадиган, бироқ шу оралиқда яқинлашмайдиган функционал кетма-кетликка мисол келтирамыз.

$[0, 1]$ оралиқни n та тенг бўлакка ажратамыз:

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Delta_n(k),$$

бунда

$$\Delta_n(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Қуйидаги

$$\varphi_n(k, x) = 1, \text{ агар } x \in \Delta_n(k),$$

$$\varphi_n(k, x) = 0, \text{ агар } x \in [0, 1] \setminus \Delta_n(k)$$

($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) функциялар ёрдамида ушбу функционал кетма-кетлиқни тузамиз:

$$f_1(x) = \varphi_1(0, x),$$

$$f_2(x) = \varphi_2(0, x), \quad f_3(x) = \varphi_2(1, x),$$

$$f_4(x) = \varphi_3(0, x), \quad f_5(x) = \varphi_3(1, x), \quad f_6(x) = \varphi_3(2, x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқда ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [f_m(x) - f(x)]^2 dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 f_m^2(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [\varphi_n(k, x)]^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 1 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳадларининг тузилиши қондасига кўра $f_m(x) = \varphi_n(kx)$ бўлиб, $m \rightarrow \infty$ да $n \rightarrow \infty$ бўлади.)

Бу $\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқнинг бир нуқтасида яқинлашмайди. Ҳақиқатан ҳам. $\forall x \in [0, 1]$ нуқта учун m нинг чексиз кўп қийматлари топиладики, $f_m(x) = 1$ бўлади, m нинг чексиз кўп қийматлари топиладики, $f_m(x) = 0$ бўлади.

Функционал қаторларда ҳам ўртача яқинлашиш тушунчаси шунга асосан киритилади.

$[a, b]$ оралиқда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (21.54)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу қатор қисмий йиғиндилари

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

дан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетликни қарайлик.

21.3- таъриф. Агар

$$\lim \int_a^b [S_n(x) - S(x)]^2 dx = 0$$

бўлса, у ҳолда (21.54) функционал қатор $S(x)$ функцияга $[a, b]$ да ўртача яқинлашади деб аталади.

2. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, $T(f; x)$ эса унинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

бўлсин.

21.8- теорема. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, унинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да $f(x)$ га ўртача яқинлашади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$. У ҳолда ушбу бобнинг 7- § ида келтирилган Вейерштрасс теоремасига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай тригонометрик кўпхад $\mathcal{P}_n(x)$ топиладики, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ учун

$$|f(x) - \mathcal{P}_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathcal{P}_n(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon \quad (21.55)$$

бўлишини топамиз.

Маълумки, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f; x)$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(f; x)|^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \quad (21.56)$$

бўлади (қаралсин, 5- §). Демак, (21.58) ва (21.59) муносабатларга кўра

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(f; x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx < \varepsilon$$

$$(\forall x \in [-\pi, \pi])$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(f; x)|^2 dx = 0,$$

яъни $f(x)$ функция Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Биз ўтган параграфда $[-\pi, \pi]$ оралиқда квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция учун ушбу

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(f; x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

тенгликни келтириб чиқарган эдик. Бу тенгликдан кўринадики, агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \right\} = 0,$$

яъни

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (21.57)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(f; x)|^2 dx = 0$$

бўлади ва, демак, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашишини кўрсатиш учун (21.60) тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш зарур ва етарли бўлади. Одатда (21.57) *Парсеваль тенглиги* деб аталади.

9- §. Функцияларнинг ортогонал системаси.

Умумлашган Фурье қатояи

1. Функцияларнинг ортогонал системаси. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган ва улар шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

21.4- таъриф. Агар

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да *ортогонал* деб аталади.

Мисол. $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ функциялар $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx = 0$$

бўлади,

$\varphi(x) = x$, $\psi(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$ функциялар $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \int_{-1}^1 x \left(\frac{3}{2}x^2 - 1 \right) dx = 0.$$

Энди

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (21.58)$$

функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу (21.58) функциялар системасини $\{\varphi_n(x)\}$ каби белгилаймиз.

21.5-таъриф. Агар $\varphi_n(x)$ функциялар системасининг исталган иккита $\varphi_k(x)$ ва $\varphi_m(x)$ ($k \neq m$) функциялари учун

$$\int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \quad (k \neq m)$$

бўлса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси $[a, b]$ да *ортсгонал* деб аталади.

Одатда, $k = m$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) бўлганда

$$\int_a^b \varphi_k^2(x) dx > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

деб қаралади. Бу интегрални λ_k каби белгилайлик:

$$\lambda_k = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Агар (21.61) система учун

$$\lambda_k = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси *нормал* деб аталади.

Агар (21.58) система учун

$$\int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \neq m \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } k = m \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси *ортонормал* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

система (тригонометрик система) $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки $k \neq m$ бўлганда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx = 0$$

бўлиб, ихтиёрий $k, m = 0, 1, 2, \dots$ бўлганда $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx \, dx = 0$ бўлади (қара-
ралсин, ушбу бобнинг 1-§).

2. Қуйидаги

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

функциялар системаси $[-\pi, \pi]$ да ортонормал бўлади. Бу системанинг $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлиши равшандир. Унинг шу $[-\pi, \pi]$ да нормал бўлиши эса

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right)^2 dx = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлишидан келиб чиқади.

3. Ушбу $\{P_n(x)\}$:

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (21.59)$$

функциялар системасини қарайлик, бунда

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Бу система $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади. Шунинг исботлайлик. Бўлаклар интеграл-
лаш усулидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx &= \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k} \cdot d \left[\frac{d^{m-1} (x^2-1)^m}{dx^{m-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \left[\frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k} \cdot \frac{d^{m-1} (x^2-1)^m}{dx^{m-1}} \right]_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1} (x^2-1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{m-1} (x^2-1)^m}{dx^{m-1}} dx. \end{aligned}$$

Агар $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-1} (x^2-1)^m}{dx^{m-1}} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1} (x^2-1)^k}{dx^{k+1}} d \left[\frac{d^{m-2} (x^2-1)^m}{dx^{m-2}} \right]$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални яна бўлаклар интеграллаб, сўнг $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-2} (x^2-1)^m}{dx^{m-2}} = 0$$

қўлини ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^{k+2}(x^2-1)^k}{dx^{k+2}} d \left[\frac{d^{m-3}(x^2-1)^m}{dx^{m-3}} \right].$$

Шу жараёни лавом этира бориб, m қадамдан кейин қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx &= \frac{(-1)^{m-1}}{k! m! 2^{k+m}} \left[\frac{d^{k+m-1}(x^2-1)^k}{dx^{k+m-1}} \cdot (x^2-1) \right]_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 (x^2-1) \frac{d^{k+m}(x^2-1)^k}{dx^{k+m}} dx \end{aligned}$$

$x = \pm 1$ да $x^2 - 1 = 0$ ва $m > k$ учун $\frac{d^{k+m+1}(x^2-1)}{dx^{k+m+1}} = 0$ бўлишини ҳисобга олиб

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = 0 \quad (21.60)$$

эканлигини топамиз. Демак, $m > k$ бўлганда (21.60) муносабат ўринлидир.

Худди юқоридагидек, $m < k$ бўлганда ҳам (21.60) муносабатнинг ўринли бўлишини кўрсатилади.

Шундай қилиб $k \neq m$ учун $\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = 0$ бўлади. Бу эса (21.62) системанинг $[-1; 1]$ да ортогонал эканлигини билдиради.

Одатда $P_n(x)$ — Лежандр кўпҳади деб аталади. Бу кўпҳад, хусусан $n = 0, 1, 2, 3$ бўлганда

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1, P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

бўлади.

(21.61) система берилган бўлсин. Унинг ёрдамида тузилган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (21.61)$$

функционал қатор $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича қатор дейилади, $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, ўзгармас сонлар эса қаторнинг коэффицентлари дейилади.

Хусусан, $\varphi_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ бўлганда (21.61) қатор тригонометрик қаторга айланади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, $f(x) \cdot \varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) функция ҳам $[a, b]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уни қуйидагича белгилаймиз:

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx. \quad (21.62)$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + \dots \quad (21.63)$$

қаторни тузамиз.

21.6. Таъриф. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ коэффициентлари (21.62) формула билан аниқланган (21.63) қатор $f(x)$ функциянинг $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича *умумлашган Фурье қатори* деб аталади. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ сонлар эса *умумлашган Фурье коэффициентлари* дейилади.

Одатда, $f(x)$ функция билан унга мос умумлашган Фурье қатори « $\sim$ » белги орқали қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + \dots$$

АДАБИЁТ

1. Фиктенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, — М., Наука, 1969. (I, II томлари ўзбек тилига таржима қилинган).
2. Фиктенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I, II. — М., Наука, 1964. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. I. — М., Наука, 1971. (Ўзбек тилига таржима қилинган).
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. II. — М., Наука, 1980.
5. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу, — М., Наука, 1977.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II. — М., Высшая школа, 1981.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II, — М., Наука, 1973.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. К. Математический анализ. — М., Наука, 1979.
9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, — М., Наука, 1970.
10. Рудин У. Основы математического анализа, — М., Мир, 1976.
11. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I, II, — М., Наука, 1981.
12. Романовский И. В. Избранные труды, т. I (Введение в анализ). Изд. АН УССР, Ташкент, 1959.
13. Азларов Т. А., Мансуров Ҳ. Математик анализ, I-қисм, — Т., «Ўқитувчи», 1986.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
12-б о б. Кўп ўзгарувчилик функциялар, уларнинг limiti, узлуксизлиги . . .	4
1-§. R^m фазо ва унинг муҳим тўпламлари	4
2-§. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг limiti	17
3-8. Кўп ўзгарувчилик функция ва унинг limiti	31
4-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг узлуксизлиги	46
5-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари	54
6-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси .	58
13-б о б. Кўп ўзгарувчилик функциянинг ҳосила ва дифференциаллари	62
1-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг хусусий ҳосилалари	62
2-§. Кўп ўзгарувчилик функцияларнинг дифференциалланувчилиги	66
3-§. Йўналиш бўйича ҳосила	71
4-§. Кўп ўзгарувчилик мураккаб функцияларнинг дифференциалланувчилиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	75
5-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг дифференциали	78
6-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифферен- циаллари	87
7-§. Ўрта қиймат ҳақида теорема	94
8-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг Тейлор формуласи	96
9-§. Кўп ўзгарувчилик функциянинг экстремум қийматлари. Экстремумнинг зарурий шarti	99
10-§. Функция экстремумининг етарли шarti	101
11-§. Ошкормас функциялар	111
14-б о б. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар	129
1-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги . .	129
2-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторларнинг текис яқинлашувчилиги . .	136
3-§. Функционал қатор йиғиндисининг ҳамда функционал кетма-кетлик limiti функциясининг узлуксизлиги	146
4-§. Функционал қаторларда ҳамда функционал кетма-кетликларда ҳадлаб ли- митга ўтиш	148
5-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб ин- теграллаш	151
6-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш	154

7- §. Даражали қаторлар	156
8- §. Даражали қаторларнинг хоссалари	165
9- §. Тейлор қатори	171
10- §. Функцияни қўхад билан яқинлаштириш	178
 15- б о б. Метрик фазолар	 186
1- §. Метрик фазо	187
2- §. Метрик фазода кетма-кетлик ва унинг лимити	191
3- §. Коши теоремаси. Тўлиқ метрик фазо	193
4- §. Больцано—Вейерштрасс теоремаси. Компакт метрик фазолар	196
 16- б о б. Хосмас интеграллар	 197
1- §. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар	197
2- §. Чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги	205
3- §. Чегараси чексиз хосмас интегралларни ҳисоблаш	213
4- §. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари	222
5- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги	229
6- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралини ҳисоблаш	235
7- §. Умумий ҳол	240
 17- б о б. Параметрга боғлиқ интеграллар	 243
1- §. Лимит функция. Текис яқинлашиш. Лимит функциянинг узлуксизлиги	244
2- §. Параметрга боғлиқ интеграллар	248
3- §. Параметрга боғлиқ интеграллар (умумий ҳол)	255
4- §. Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар. Интегралнинг текис яқинлашиши	258
5- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда интеграл белгиси остида лимитга ўтиш	267
6- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг параметр бўйича узлуксизлиги	269
7- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича дифференциаллаш	270
8- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича интеграллаш	273
9- §. Бета функция (I тур Эйлер интеграл) ва унинг хоссалари	279
10- §. Гамма функция (II тур Эйлер интеграл) ва унинг хоссалари	282
1- §. Бета ва гамма функциялар орасидаги боғланиш	287
 18- б о б. Каррали интеграллар	 291
1- §. Икки каррали интеграл таърифи	291
2- §. Дарбу йиғиндилари. Икки каррали интегралнинг бошқача таърифи	295
3- §. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги	297
4- §. Интегралланувчи функциялар синфи	300
5- §. Икки каррали интегралнинг хоссалари	203
6- §. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш	306
7- §. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш	316
8- §. Икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш	322
9- §. Икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқалари	324
10- §. Уч каррали интеграл	330

19-б о б. Эгри чизиқли интеграллар	335
1- §. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар	335
2- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар	344
3- §. Грин формуласи ва унинг татбиқлари	354
4- §. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланиш	363
20-б о б. Сирт интеграллари	364
1- §. Биринчи тур сирт интеграллари	364
2- §. Иккинчи тур сирт интеграллари	371
3- §. Стокс формуласи	378
4- §. Остроградский формуласи	380
21-б о б. Фурье қаторлари	382
1- §. Баъзи муҳим тушунчалар	383
2- §. Фурье қаторининг таърифи	391
3- §. Леммалар. Дирихле интеграллари	399
4- §. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги	405
5- §. Қисмий йиғиндиларнинг бир экстремал хоссаси. Бессель тенгсизлиги	412
6- §. Яқинлашувчи Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссалари	416
7- §. Функцияларни тригонометрик қўлҳад билан яқинлаштириш	419
8- §. Ўртача яқинлашиш. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши	424
9- §. Функцияларнинг ортогонал системаси. Умумлашган Фурье қатори	428

На узбекском языке

АЗЛАРОВ ТУРСУН АБДУРАХИМОВИЧ,
МАНСУРОВ ХОДЖАКБАР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II часть

Учебник для студентов
университетов и пединститутков

Издательство «Ўзбекистон»,
700129 — Ташкент, 1995, Навои, 30.

Бадий муҳаррир И. Кученкова
Техник муҳаррир А. Горшкова
Мусаҳҳиҳ М. Юлдашева

Теришга берилди 11.01.94. Босишга рухсат этилди 24.02.95. Қоғоз
формати 60×90^{1/16}. Литературная гарнитурада юқори босма усулида босилди.
Шартли бос. т. 27,5. Нашр. т. 29,93. Тиражи 5500. Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент. Навоий. 30. Нашр № 286-93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа
комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Азларов Т., Мансуров Х.

А 36 Математик анализ: Ун-тлар ва пед.ин-тларининг талаба-
лари учун дарслик Қ. 2.— Т.: Ўзбекистон, 1995.—436 б.

ISBN 5-640-01507-1

Ушбу китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика фани чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган. Уни ёзишда муаллифлар Тошкент Давлат университетининг математика, амалий математика ва механика факультетларида бир неча йиллар давомида ўқиган лекцияларидан фойдаланганлар.

Китобни ёзишда, бир томондан, математика фанининг тобора янги тushunchalar, янги ғоялар билан бойиб боришига эътибор қаратилган бўлса, иккинчи томондан, математиканинг фан ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ доираси кенгайиб бориши ҳисобга олинган.

Китоб анализ курсининг 2- қисми бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ва интеграл ҳисоби, функционал қаторлар назарияси ва Фурье қаторлари назарияси батафсил баён этилган.

22.161я73

№ 637-94

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

А 1602070000—05 95
М 351 (04) 95